उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी(एमएपीएसवाई-515)

(Psychological Statistics (MAPSY-515)

अनुक्रमणिका

इकाई संख्या	इकाई का नाम	पृष्ठ संख्या
	खण्ड 1: सांख्यिकीय संप्रत्यय (Statistical Concept)	
इकाई -1	सांख्यिकी:- अर्थ, उपयोग एवं मनोवैज्ञानिक मापन में सांख्यिकी का महत्व (Statistics:- Meaning, Uses and its Significance in Psychological Measurement)	1-6
इकाई -2	विवरणात्मक सांख्यिकी तथा उसके उपयोग (Descriptive Statistics and its uses)	8-14
इकाई -3	अनुमानात्मक सांख्यिकी तथा उसके उपयोग, विवरणात्मक व अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर (Inferential Statistics and its Uses; Difference Between Descriptive and Inferential Statistics)	15-19
	खण्ड 2: सामान्य संभाव्यता वक्र (Normal Probability Curve)	
इकाई -4	सामान्य सम्भाव्यता वक्र की प्रकृति तथा विशेषताएँ (Nature and Characteristics of Normal Probability Curve)	20-33
इकाई -5	सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुप्रयोग (Applications of Normal Probability Curve)	34-58
इकाई -6	सामान्यता से विचलन- विषमता एवम ककुदता (Deviation from normality-Skewness and Kurtosis)	59-76
	खण्ड 3: सहसंबंध विधियाँ (Correlation Methods)	
इकाई -7	सहसम्बन्ध गुणांक:- अर्थ, महत्व और विधियाँ (गुणा आघूर्ण एवं क्रम अन्तर) (Correlation Coefficient:- Meaning, Importance and Methods (Product Moment and Rank Difference)	77-103

इकाई --8	द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध गुणांक, बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध एवम आसंग गुणांक (Bi-serial correlation, Point Bi-serial Correlation coefficient and Contingency Coefficient)	104-122
खण्ड 4:	**उपकल्पना परीक्षण की सांख्यिकीय प्रविधियाँ (Statistical Techniques of Hypothesis Testing)**	
इकाई -9	क्रान्तिक अनुपात, टी परीक्षण एवं प्रसरण-विश्लेषण (Critical Ratio, '*t*' test and Analysis of Variance)	123-153
इकाई -10	काई-वर्ग एवं मध्यांक परीक्षण (Chi-Square and Median Test)	154-171
इकाई -11	सार्थकता स्तर, स्वतन्त्रता के अंश तथा प्रथम एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Level of Significance, Degree of Freedom and Type I & Type II Error)	172-186

इकाई-1 सांख्यिकी:- अर्थ, उपयोग एवं मनोवैज्ञानिक मापन में सांख्यिकी का महत्व (Statistics:- Meaning, Uses and its Significance in Psychological Measurement)

इकाई सरंचना

1.1 प्रस्तावना
1.2 उद्देश्य
1.3 सांख्यिकी का अर्थ
1.4 सांख्यिकी की विशेषताएँ
1.5 सांख्यिकी के उपयोग
1.6 मनोवैज्ञानिक मापन: अर्थ
1.7 सारांश
1.8 शब्दावली
1.9 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
1.10 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
1.11 निबन्धात्मक प्रश्न

1.1 प्रस्तावना

इससे पूर्व मनोविज्ञान विषय का अध्ययन कर आपने जाना था कि प्राणी के व्यवहार का वैज्ञानिक अध्ययन मनोविज्ञान करता है। अनेक प्राणियों के व्यवहार के विभिन्न पहुलओं का अध्ययन कर आँकड़ों का संकलन किया जाता है। प्राप्त आँकड़ों का वैज्ञानिक विधि द्वारा विश्लेषण कर प्राणियों के व्यवहार का समुचित वर्णन किया जा सकता है। प्राप्त आँकड़ों का विश्लेषण करने वाली वैज्ञानिक विधि को सांख्यिकी (Statistics) कहा जाता है। इस इकाई का अध्ययन कर आप सांख्यिकी का अर्थ तथा उसकी उपयोगिता समझ सकते हो।

1.2 उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप

- सांख्यिकी का अर्थ समझ सकेंगे।
- सांख्यिकी के उपयोग बता सकेंगे।
- मनोवैज्ञानिक मापन का अर्थ बता सकेंगे।
- मनोवैज्ञानिक मापन में सांख्यिकी महत्व का वर्णन कर सकेंगे।

1.3 सांख्यिकी का अर्थ

सांख्यिकी को अंग्रेजी में Statistics (स्टेटिस्टिक्स) कहा जाता है। अंग्रेजी भाषा के शब्द Statistics की उत्पत्ति लैटिन भाषा स्टेटस (Status), इटैलियन भाषा के शब्द स्टेटिस्टा (Statista)तथा जर्मन भाषा के शब्द स्टेटिस्टिक (Statistik) शब्द से हुई है। इन तीन भाषाओं के उत्पत्ति शब्दों Status, Statista व Statistik का

शाब्दिक अर्थ राज्य माना जाता है। स्पष्ट है राज्य (State) की आय-व्यय, जनसंख्या गणना, उत्पादन, जीवन-मृत्यु का लेखा जोखा रखने के रूप में किया जाता था। इसे ही Statistics कहा जाता था। इसी कारण से प्रारम्भ में सांख्यिकी को राजाओं का विज्ञान (Science of King) कहा जाता था।

वर्तमान समय में सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है जिसके द्वारा आँकड़ों का संकलन, व्यवस्थापन, विश्लेषण तथा निष्कर्ष ज्ञात किया जाता है।

फरग्यूसन तथा तकाने (Ferguson & Takane, 1989) के अनुसार ‘‘साख्यिकी वैज्ञानिक विधि की एक शाखा है जिसका सम्बन्ध सर्वेक्षणों तथा प्रयोगों द्वारा प्राप्त आँकड़ों का संकलन वर्गीकरण, वर्णन तथा व्याख्या से है।’’

मिनियम, किंग तथा बेअर (Minium, King & Bear, 1995) के अनुसार ‘‘सांख्यिकी आँकड़ों का वर्गीकरण करने, संगठित करने तथा विश्लेषण करने का विज्ञान है।’’

उपर्युक्त परिभाषाओं के आधार पर स्पष्ट है कि सांख्यिकी एक विज्ञान है जिसमें आँकड़ों का संकलन वर्गीकरण एवं विश्लेषण किया जाता है ताकि प्राप्त तथ्यों के आधार पर उपयुक्त अनुमान तथा निष्कर्ष ज्ञात करना सम्भव हो सके। (डॉ**0** भाटिया)

1.4 सांख्यिकी की विशेषताएँ

सांख्यिकी के अर्थ को समझने के पश्चात सांख्यिकी की प्रमुख विशेषताएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं-

- ❖ सांख्यिकी एक विज्ञान है।
- ❖ सांख्यिकी समूह द्वारा प्राप्त आँकड़ों का अध्ययन व विश्लेषण करती है।
- ❖ सांख्यिकी प्रमुख रूप से किसी विषय के संख्यात्मक पक्ष का अध्ययन करती है।
- ❖ साख्यिकी द्वारा तुलनात्मक अध्ययन सम्भव है।
- ❖ साख्यिकी द्वारा प्राप्त परिणामों के आधार पर निष्कर्ष ज्ञात कर सकते हैं।

1.5 सांख्यिकी के उपयोग

सांख्यिकी अध्ययन की उपयोगिता बहुत अधिक है। इसके प्रमुख उपयोग इस प्रकार हैं -

1) **वैज्ञानिक विधि-**

सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है। इसका आधार वैज्ञानिक है, जिसमें वैज्ञानिक विधियों का प्रयोग किया जाता है तथा प्राप्त तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं और उनकी व्याख्या भी की जाती। इस प्रकार विज्ञान और सांख्यिकी एक दूसरे के लिये आवश्यक हैं। सांख्यिकी के बिना विज्ञान फलप्रद नही है और विज्ञान के बिना सांख्यिकी निराधार है। (Sciences without statistics bear no fruit, statistics without sciences have no root.)

2) **अंकों द्वारा तथ्यों की व्याख्या-**

सांख्यिकी के अन्तर्गत प्राप्त तथ्यों की व्याख्या अंकों द्वारा की जाती है। आँकड़ों के आधार पर सार्थक निष्कर्ष ज्ञात किये जाते हैं। सांख्यिकी के अध्ययन में आंकिक ज्ञान होना आवश्यक है। लार्ड कैलविन (Lord Kelvin)के अनुसार, ‘‘जिस विषय की बात आप कर रहे हैं यदि आप उसका मापन कर सकते हैं और उसे संख्याओं में व्यक्त कर सकते हैं तो आप उसके बारे में जानते हैं। यदि आप उस विषय का मापन नहीं कर सकते, तो आपका ज्ञान अधूरा व असन्तोषजनक प्रकार का है।’’

"When you measure what you are speaking about and can express it in numbers it, when you can not express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind.

Kelvin, quoted by Ronold King, Physics, Metaphysics and commonsense, Scientific Monthly 42:311 April 1936.

3) **वस्तुनिष्ठ तथा शुद्ध परिणाम-**

सांख्यिकी का अध्ययन वैज्ञानिक तथ्यों पर आधारित होता है तथा उसके परिणामों में वस्तुनिष्ठता की विशेषता पाई जाती है, फलतः उसके द्वारा प्राप्त परिणामों में शुद्धता पाई जाती है।

4) **भविष्यवाणी की योग्यता-**

सांख्यिकी के अध्ययन द्वारा जहाँ भूत व वर्तमान की स्थिति को स्पष्ट किया जा सकता है वहीं भविष्य की स्थिति को स्पष्ट करते हुए भविष्यकथन भी किया जा सकता है।

5) **परीक्षण की वैधता तथा विश्वसनीयता का निर्धारण-**

मनोवैज्ञानिक परीक्षण के निर्माण की प्रकिया में उपयुक्त पदों के चयन हेतु पद-विश्लेषण एवं परीक्षण की वैधता तथा विश्वसनीयता का निर्धारण करने में सांख्यिकी विधियाँ अत्यधिक उपयोगी व सहायक सिद्ध होती हैं।

6) सहसम्बन्ध का अध्ययन- सहसम्बन्ध द्वारा यह स्पष्ट होता है कि एक चर (परिवर्ती) तथा दूसरे चर के मध्य सकारात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य किस प्रकार का सहसम्बन्ध है और उसकी मात्रा क्या है? सहसम्बन्ध की गणना सांख्यिकी द्वारा ही ज्ञात की जा सकती है।

7) **तुलनात्मक अध्ययन-**

यदि दो अथवा अधिक समूहों के मध्य तुलनात्मक अध्ययन करना चाहते हैं तथा सार्थक अन्तर की जाँच करना चाहते है, तब सांख्यिकी विधियाँ अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होती हैं।

8) **अनुसन्धान में सहायक-**

सांख्यिकी के बिना अनुसन्धान करना एक कठिन कार्य है। किसी भी अनुसन्धान की योजना बनाना, उपयुक्त प्रतिदर्श का चयन कर आँकड़ों को एकत्रित करना, उपकल्पना बनाना तथा उसकी जाँच करना, प्राप्त आँकड़ों का विश्लेषण करना और उनकी व्याख्या कर महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालना, इन सभी अनुसन्धान के चरणों में सांख्यिकी अत्यन्त सहायक सिद्ध होती है।

9) **कार्य-कारण सम्बन्धों की खोज-**

सांख्यिकी विधियाँ कार्य-कारण सम्बन्धों को खोजने में सहायक सिद्ध होती हैं। सांख्यिकी द्वारा जीवन की जटिल समस्याओं का निराकरण किया जा सकता है। टिपैट (Tippett) के अनुसार ''सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और जीवन के प्रत्येक पहलू को स्पर्श करती है।'' "Statistics affects every body and touches life at many points. *L.H.C. Tippett, Statistics, 1947.*

10) **गणना में सहायक-**

सांख्यिकी के अन्तर्गत विभिन्न निर्धारित सूत्रों द्वारा गणना करनी अत्यधिक सरल है। इसके द्वारा विभिन्न जटिल समस्याओं का निराकरण सम्भव हे। वर्तमान समय में कम्प्यूटर की सहायता से विभिन्न जटिल गणनायें कम समय में सहजता से प्राप्त हो जाती हैं।

उपर्युक्त प्रमुख उपयोगिताओं से स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी की वर्तमान समय में, विभिन्न क्षेत्रों में अत्यधिक महत्वपूर्ण उपयोगिता है।

1.6 मनोवैज्ञानिक मापन: अर्थ

थॉर्नडाइक (Thorndike) के अनुसार ''प्रत्येक वस्तु यदि थोड़ा भी अस्तित्व रखती है, तब वह किसी न किसी मात्रा में अस्तित्व रखती है तथा कोई भी वस्तु जिसका किसी मात्रा में अस्तित्व है वह मापन के योग्य है।'' (Any thing that exist at all, exist in some quantity and any thing that exist in some quantity is capable of being measured.) E.L. Thorndike

इस प्रकार मापन का क्षेत्र सर्वत्र विद्यमान है, किन्तु मापन शब्द की व्याख्या करना एक कठिन कार्य है। रॉस स्ट्रेन्ज (Ross Strange) के अनुसार, ''मापन जैसे निरपेक्ष शब्द की व्याख्या करना एक कठिन प्रश्न है। प्रायः मापन से अर्थ प्रदत्तों का अंकों के रूप में वर्णन करना है। मापन किसी वस्तु का शुद्ध तथा वस्तुनिष्ठ वर्णन है।''

स्टीवेंस (Stevense) के विचार में, ''मापन किसी निश्चित स्वीकृत नियमों के अनुसार वस्तुओं को अंक प्रदान करने की प्रक्रिया है।'' (Measurement is the process of assigning numbers to objects according to certain agreed rules.)

वास्तव में मापन किसी वस्तु अथवा व्यक्ति का नहीं बल्कि वस्तु अथवा व्यक्ति की विशेषताओं का किया जाता है। थॉर्नडाइक व हेगन के अनुसार, ''हम किसी वस्तु अथवा व्यक्ति का मापन कभी नहीं करते हैं, मापन हमेशा व्यक्ति अथवा वस्तु के गुणों अथवा विशेषताओं का किया जाता है।'' (We never measure a thing or a person, measurement is always of a quality or attribute of the thing or person.)

Thorndike and Hagen

इसी प्रकार हेल्मस्टेडटर (Helmstadter) का विचार है कि ''मापन को एक प्रक्रिया के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिसके अन्तर्गत किसी व्यक्ति अथवा वस्तु में स्थित विशेषताओं का आंकिक विवरण होता है।'' (Measurement has been defined as the process of obtaining a numerical description of the extent to which a person or thing possesses some characteristics.) Helmstadte

लोरगे (Lorge) के अनुसार मापन के अन्तर्गत तीन मुख्य कारकों का विचार करना आवश्यक है- प्रथम वह वस्तुओं (Objects) के वर्ग (Class) से सम्बन्धित होना चाहिये, द्वितीय वह अंकों के वर्ग से सम्बन्धित होना चाहिये, तृतीय, वह उन नियमों से सम्बन्धित होना चाहिये, जिनके आधार पर वस्तुओं को अंक प्रदान किये जाते हैं।

निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है कि मापन किसी वस्तु अथवा व्यक्ति की विशेषताओं को वस्तुनिष्ठ रूप में निश्चित स्वीकृत नियमों के अनुसार आंकिक संकेत चिन्ह प्रदान करने की प्रक्रिया है।

मनौवैज्ञानिक मापन में सांख्यिकी का महत्व-

मनोवैज्ञानिक मापन में सांख्यिकी के निम्नलिखित दो प्रमुख महत्व हैं-

1. **मनोवैज्ञानिक परीक्षण निर्माण में सहायक -**

   मनौवैज्ञानिक परीक्षण के निर्माण की प्रक्रिया में उपयुक्त पदों के पद-विश्लेषण किया जाता है, जो कि सांख्यिकी विधियों द्वारा ही किया जाता है। इसके अतिरिक्त मनोवैज्ञानिक परीक्षण की वैधता तथा विश्वसनीयता का निर्धारण करने में सांख्यिकी विधियाँ उपयोगी व सहायक होती है।

2. **अनुसन्धान में सहायक -**

सांख्यिकी के बिना अनुसन्धान करना एक कठिन कार्य है। डॉ**0** अस्थाना के अनुसार अनुसन्धान में सांख्यिकी निम्नलिखित कारणों से आवश्यक है-

- सांख्यिकी द्वारा सही विवरण सम्भव है।

- ❖ सांख्यिकी विधियाँ अनुसन्धान प्रक्रिया व चिन्तन में सही होने के लिए बाध्य करती है।
- ❖ सांख्यिकी हमें अपने परिणामों को सार्थक व सरल रूप में सार्थक करने में सहायक होती है।
- ❖ साख्यिकी द्वारा सामान्य निष्कर्ष निकालने में सहायता प्राप्त होती है।
- ❖ साख्यिकी पूर्वकथन (भविष्यवाणी) करने में सहायक होती है।
- ❖ सांख्यिकी जटिल कार्य-कारण सम्बन्धों के विश्लेषण में सहायक होती।

1.7 सारांश

सांख्यिकी एक विज्ञान है जिसमें आँकड़ों का संकलन, वर्गीकरण एवं विश्लेषण किया जाता है ताकि प्राप्त तथ्यों के आधार पर उपयुक्त अनुमान तथा निष्कर्ष ज्ञात करना सम्भव हो सके। सांख्यिकी द्वारा वस्तुनिष्ठ तथा शुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं जिनके आधार पर भविष्यवाणी भी की जा सकती है। सहसम्बन्ध का अध्ययन, तुलनात्मक अध्ययन एवं कार्य-कारण सम्बन्धों का अध्ययन सांख्यिकी विधि द्वारा सम्भव है।

मनौवैज्ञानिक मापन किसी वस्तु अथवा व्यक्ति की विशेषताओं को वस्तुनिष्ठ रूप में निश्चित स्वीकृत नियमों के अनुसार आंकिक संकेत चिन्ह प्रदान करने की प्रक्रिया है । सांख्यिकी मनोवैज्ञानिक मापन के लिए भी महत्वपूर्ण है। सांख्यिकी द्वारा ही मनोवैज्ञानिक परीक्षण का निर्माण सम्भव है तथा विभिन्न प्रकार के अनुसन्धान अध्ययनों में सांख्यिकी सहायक सिद्ध होती है।

1.8 शब्दावली

- **वस्तुनिष्ठ:** बिना किसी पक्षपात के निष्पक्ष निरीक्षण द्वारा प्राप्त तथ्य
- **मनोवैज्ञानिक परीक्षण:** वह मानकीकृत साधन है जिसके द्वारा व्यक्तित्व के एक पक्ष अथवा अनेक पक्षों का अध्ययन किया जाता है।
- **परीक्षण के पद:** परीक्षण में निहित कथन/प्रश्न पद कहलाते हैं।
- **परीक्षण की वैधता:** परीक्षण जिस उद्देश्य से निर्मित किया गया है उसी का मापन अधिक से अधिक करे।
- **परीक्षण की विश्वसनीयता:** विभिन्न समय अन्तराल के पश्चात भी परीक्षण के परिणामों में समानता बनी रहे।
- **सहसम्बन्ध:** एक परिवर्ती तथा अनेक परिवर्तियों के मध्य स्थित पारस्परिक सम्बन्ध है, जिसे सहसम्बन्ध गुणांक के रूप में व्यक्त किया जाता है।
- **कार्य-कारण सम्बन्ध:** यदि विद्युत है तब पंखा चल रहा है, किन्तु विद्युत न होने पर पंखा नहीं चल रहा है। इस प्रकार विद्युत तथा पंखे के मध्य कार्य-कारण सम्बन्ध है। इसी प्रकार एक परिवर्ती तथा अन्य किसी परिवर्ती के मध्य कार्य-कारण सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है अर्थात एक परिवर्ती दूसरे परिवर्ती को कितना प्रभावित कर रहा है।

1.9 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

सांख्यिकी के सन्दर्भ में सत्य/असत्य कथन बतायें-

i. सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है। सत्य/असत्य

ii. सांख्यिकी विषय के संख्यात्मक पक्ष का अध्ययन करती है। सत्य/असत्य

iii. सांख्यिकी द्वारा तुलनात्मक अध्ययन सम्भव नहीं है। सत्य/असत्य

iv. सांख्यिकी द्वारा भविष्यवाणी की जा सकती है। सत्य/असत्य

v. सांख्यिकी अनुसन्धान में बाधक होती है। सत्य/असत्य

उत्तर: **i.** सत्य **ii.**सत्य **iii.** असत्य **iv.**सत्य **v.** असत्य

1.10 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**
- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), Statistical Methods- concept application and computation, Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur (Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), Statistics for Psychology. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) Basic Statistical Concepts. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi.
- Garrett, Henry E. (1981)) Statistics in Psychology and Education. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) Fundamental Statistics for students of psychology and Education, McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences. McGraw Hill Book Company, New York.

1.11 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सांख्यिकी को राजाओं का विज्ञान क्यों कहा जाता था?
2. सांख्यिकी का अर्थ स्पष्ट करें।
3. सांख्यिकी की विशेषताओं का वर्णन करें।
4. सांख्यिकी की उपयोगिता का विस्तारपूर्वक वर्णन करें।
5. मनोवैज्ञानिक मापन की व्याख्या करें।
6. मापन में सांख्यिकी के महत्व को स्पष्ट करें।

7. सांख्यिकी किस प्रकार अनुसन्धान में सहायक होती है।

इकाई-2 विवरणात्मक सांख्यिकी तथा उसके उपयोग (Descriptive Statistics and its uses)

इकाई संरचना

2.1 प्रस्तावना
2.2 उद्देश्य
2.3 सांख्यिकी के प्रकार
2.4 विवरणात्मक सांख्यिकी
2.4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप
2.4.2 विचलनों के माप
2.4.3 आँकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण
2.5 विवरणात्मक सांख्यिकी के उपयोग
2.6 सारांश
2.7 शब्दावली
2.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
2.9 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
2.10 निबन्धात्मक प्रश्न

2.1 प्रस्तावना

इससे पूर्व आप ने सांख्यिकी का अर्थ तथा उसके उपयोग को समझा था। सांख्यिकी एक विज्ञान है जिसमें आँकड़ों का संकलन, वर्गीकरण एवं विश्लेषण किया जाता है ताकि प्राप्त तथ्यों के आधार पर उपयुक्त निष्कर्ष ज्ञात करना सम्भव हो सके। सांख्यिकी के व्यावहारिक उपयोग प्रक्रिया के आधार पर सांख्यिकी के प्रकार का अध्ययन करना भी आवश्यक है। सांख्यिकी का प्रमुख उद्देश्य जनसंख्या से सम्बन्धित संख्यात्मक विशेषताओं का वर्णन करना तथा उसके सम्बन्ध में अनुमान लगाना है। इस प्रकार सांख्यिकी के दो प्रमुख प्रकार हैं- प्रथम विवरणात्मक सांख्यिकी तथा द्वितीय अनुमानात्मक सांख्यिकी हैं।

इस इकाई का अध्ययन कर आप विवरणात्मक सांख्यिकी तथा इसके उपयोग को समझ सकते हो।

2.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप-

- सांख्यिकी के प्रकार समझ सकते हैं।
- विवरणात्मक सांख्यिकी के बारे में बता सकते हैं।

- विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत केन्द्रीय प्रवृत्ति को तीन माप-मध्यमान, मध्यांक व बहुलांक का अर्थ समझ सकेंगें।
- इसी प्रकार विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत विचलनों के विभिन्न माप-प्रसार, चतुर्थांक विचलन, मध्यमान विचलन व प्रामाणिक विचलन के बारे में जान सकतें है।
- विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत आँकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण भी आप समझ सकेंगे।
- विवरणात्मक सांख्यिकी के उपयोग आप बता सकेंगे।

2.3 सांख्यिकी के प्रकार

व्यावहारिक उपयोग प्रक्रिया के आधार पर-सांख्यिकी के निम्नलिखित दो प्रकार हैं-

1. विवरणात्मक अथवा वर्णनात्मक सांख्यिकी

2. अनुमानात्मक सांख्यिकी

2.4 विवरणात्मक सांख्यिकी

इस प्रकार की सांख्यिकी के अन्तर्गत प्राप्त सम्पूर्ण आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श अथवा जनसंख्या की विशेषताओं का वर्णन किया जाता है, अतः इसे विवरणात्मक अथवा वर्णनात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। वर्णनात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत निरीक्षण द्वारा प्राप्त आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श का वर्णन करने, संगठित करने तथा संक्षिप्त करने का कार्य निहित होता है जिसके कारण उसे अच्छी प्रकार समझने में सरलता होती है। निरीक्षण द्वारा प्राप्त आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जाता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों के अन्तर्गत मध्यमान, मध्यांक अथवा बहुलांक की गणना की जाती है। इसके द्वारा समूह की मध्य स्थिति ज्ञात होती है। विचलन के मापकों के अन्तर्गत प्रदत्तों का प्रसारए शतांशीय मानए औसत विचलनए चतुर्थांक विचलन, प्रामाणिक विचलन ज्ञात किया जाता है। आँकड़ों के आधार पर आलेखीय चित्रण जैसे बार चित्र, स्तम्भाकृतिए आवृत्ति बहुभुज, संचयी आवृत्ति वक्र, ओजाइव, वृत्त चित्र आदि को प्रदर्शित किया जाता है। समूह के विभिन्न सदस्यों के प्रतिशत के आधार पर अधिक सरलता से वर्णन किया जा सकता है तथा समूह के सदस्यों के मध्य तुलनात्मक अध्ययन भी किया जा सकता है।

2.4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप - मध्यमान, मध्यांक, बहुलांक-

प्राप्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करने तथा आँकड़ों की प्रवृत्ति को प्रदर्शित करने के माप केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कहलाते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का उद्देश्य एक संक्षिप्त अंक को उपलब्ध कराना है जो कि निरीक्षण द्वारा प्राप्त सम्पूर्ण वितरण की केन्द्रीय स्थिति को वर्णित करता है। आँकड़ों की केन्द्रीय स्थिति स्पष्ट करने के लिये तीन प्रमुख मापों की गणना की जाती है, जिन्हें मध्यमान (Mean) मध्यांक (Median) तथा बहुलांक (Mode) कहा जाता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के इन मापकों में शुद्धता का अन्तर है। मध्यमान सर्वाधिक शुद्ध गणना करता है, जबकि मध्यांक तुलनात्मक रूप में कम शुद्ध परिणाम प्रदान करता है। बहुलांक कम समय में सर्वाधिक कम शुद्ध परिणाम प्रदान करता है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप-मध्यमान, मध्यांक व बहुलांक का महत्व -

1) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समूह के प्राप्तांकों का प्रतिनिधित्व करते हैं।
2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समूह के प्राप्तांकों की विशेषता को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करते हैं।
3) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप द्वारा दो अथवा अधिक समूह की विशेषताओं के सन्दर्भ में, तुलना करना सम्भव होता है। विभिन्न परिस्थितियों के सन्दर्भ में विभिन्न समूहों के मध्य सार्थक तुलनात्मक अध्ययन सम्भव है।

4) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तुलनात्मक रूप में स्थिर एवं शुद्ध परिणाम प्रदान करते हैं।
5) विभिन्न महत्वपूर्ण सांख्यिकीय गणनाओं में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की आवश्यकता होती है।

(अ) मध्यमान -

समस्त अंकों के योग में उन अंकों की संख्या का भाग देने पर जो भागफल प्राप्त होता है, उसे मध्यमान कहा जाता है (The mean is the sum of all the scores in a distribution divided by the total number of scores.)

मध्यमान की विशेषताएँ -

1) अन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों-मध्यांक तथा बहुलांक की अपेक्षा मध्यमान सर्वाधिक शुद्ध मान प्रस्तुत करता है।
2) प्राप्तांकों की प्रत्येक संख्या के घटने अथवा बढ़ने का प्रभाव मध्यमान के परिणाम पर पड़ता है अतः मध्यमान अधिक विश्वसनीय है।
3) प्राप्तांकों का मध्यमान एक सन्तुलन बिन्दु है, क्योंकि धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशाओं का विचलन योग शून्य प्राप्त होता है।
4) प्राप्तांकों के प्रारम्भिक तथा अन्तिम प्राप्तांक भी मध्यमान को महत्वपूर्ण रूप से प्रभावित करते हैं।
5) प्राप्तांकों के प्रत्येक अंक में किसी स्थिर अंक को जोड़ दिया जाये, घटा दिया जाये अथवा गुणा कर दिया जाये, तब मध्यमान का मूल्य उसी स्थिर अंक में बढ़ जाता है, घट जाता है अथवा गुणनफल के रूप में प्राप्त होता है।

(ब) मध्यांक -

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का दूसरा महत्वपूर्ण माप मध्यांक कहा जाता है। मध्यांक शब्द दो शब्दों मध्य+अंक से मिलकर बना है, जिसका अर्थ मध्य का अंक बताने वाला माप है। मध्यांक वह बिन्दु है जो कि प्रदत्त को दो समान भागों में विभक्त करता है। मध्यांक के बिन्दु से एक ओर **50** प्रतिशत प्रदत्त होते हैं तथा दूसरी ओर शेष **50** प्रतिशत प्रदत्त होते हैं। (The median is a value such that half the observations fall it and half below it.) Ferguson & Takane

मध्यांक की विशेषताएँ-

1) मध्यांक वह बिन्दु है जो कि प्रदत्त को दो समान भागों में विभाजित करता है।
2) मध्यांक पर प्रारम्भिक प्राप्तांकों तथा अन्तिम छोर (End)के प्राप्तांकों का कम प्रभाव पड़ता है।
3) यदि प्रदत्त सामान्य वितरण (Normal Distribution)के अनुरूप नहीं प्राप्त होता है और उसमें विषमता (Skewness)निहित होती है, तब केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में मध्यांक श्रेष्ठ परिणाम प्रदान करता है। (Therefore in distribution that are strongly asymmetrical (skewed) or have a few very deriant scores, the median may be the better choice for measuring the central tendency.)
4) मध्यांक ग्राफ के द्वारा भी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। संचयी प्रतिशत आवृत्ति वक्र अथवा ओजाइव (Ogive)द्वारा मध्यांक को ज्ञात किया जा सकता है।
5) जबकि प्रदत्त अपूर्ण हों और प्रारम्भिक अथवा अन्तिम छोरों (Ends) पर प्राप्तांक छूट गये हों, तब मध्यांक की गणना करना उपयुक्त होता है।

(स) बहुलांक -

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप में तीसरा महत्वपूर्ण प्रकार बहुलांक कहलाता है। यद्यपि बहुलांक शुद्धता की दृष्टि से मध्यमान तथा मध्यांक की अपेक्षा कम शुद्ध माप है। बहुलांक को अंग्रेजी में Mode कहा जाता है। Mode शब्द फ्रेंच भाषा के La Mode से बना है, जिसका अर्थ फैशन या रिवाज होता है। जिस वस्तु का फैशन होता है, अधिकांश व्यक्ति उसी वस्तु का उपभोग करते हैं। सांख्यिकी में इसका अर्थ उस प्राप्तांक से होता है जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक हो। (The mode is the most frequently occuring value.) हिन्दी के शब्द बहुलांक से भी (बहुल+अंक) स्पष्ट होता है, वह प्राप्तांक जिसकी प्रदत्त में बहुलता है, वही बहुलांक है।

बहुलांक की विशेषताएँ

1) बहुलांक का मापन अधिक सरलता से व शीघ्रता से ज्ञात किया जा सकता है।
2) व्यावहारिक रूप से बहुलांक का प्रयोग दैनिक जीवन में आसानी से किया जाता है।
3) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप में यह अधिक विश्वसनीय माप नहीं है।
4) बहुलांक शुद्धता की दृष्टि से मध्यमान तथा मध्यांक की अपेक्षा कम शुद्ध माप है।

2.4.2 विचलनों के माप - प्रसार, चतुर्थांक विचलन, मध्यमान विचलन, प्रामाणिक विचलन-

प्रदत्त की मध्य स्थिति अथवा केन्द्रीय स्थिति का ज्ञान मध्यमान (Mean), मध्यांक (Median) तथा बहुलांक (Mode) द्वारा सम्भव होता है, किन्तु प्रदत्त के प्राप्तांकों का फैलाव किस प्रकार का है? यह ज्ञान हमें विचलन (Variability) के माप द्वारा ही सम्भव होता है। इस प्रकार विचलन लिण्डक्यूस्ट (Lindquist) के अनुसार, ‘‘वह सीमा है जिसके अन्तर्गत प्राप्तांक मध्यमान से नीचे अथवा ऊपर फैले अथवा बिखरे होते हैं।’’ (Variability is the extent to which the scores tend to scatter or spread above and below the average) E. Lindquist (1950) Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education, 1950.)

इस प्रकार विचलन के माप मात्रात्मक रूप में उस सीमा को अभिव्यक्त करते हैं, जिसके अन्तर्गत एक वितरण में प्राप्तांक किस रूप में लगभग फैले हैं अथवा एकत्र हैं। विचलन के माप प्रदत्त की विभिन्नता को संख्यात्मक अथवा मात्रात्मक रूप में अभिव्यक्त करते हैं। इसी आधार पर टैटे **(1965)** का मत है कि ‘‘सम्पूर्ण सांख्यिकी विचलन का अध्ययन हैं। (The whole of statistics might will be characterized as the study of variability.") M.W. Tate (1965) Statistics in Education & Psychology 1965,

विचलन के प्रमुख माप इस प्रकार हैं-

(अ) प्रसार- विचलन का मापन करने की सर्वाधिक सरल विधि प्रसार (Range) है। (The simplest measure of variability is the range) आवृत्ति वितरण (frequency distribution) के लिये सर्वप्रथम प्रसार की गणना की जाती है। प्रसार ज्ञात करने के लिये अधिकतम प्राप्तांक में से न्यूनतम प्राप्तांक को घटाया जाता है तथा **1** जोड़ दिया जाता है। इसे सूत्र रूप में इस प्रकार भी लिखा जा सकता है-

प्रसार = (अधिकतम प्राप्तांक -न्यूनतम प्राप्तांक) +**1**

Range=(Highest Score–Lowest Score)+1

(ब) चतुर्थांक विचलन- प्रसार के द्वारा विचलन का माप करने पर विभिन्न प्रदत्त के प्राप्तांकों को महत्व नहीं दिया जाता है वरन् केवल अधिकतम प्राप्तांक तथा न्यूनतम प्राप्तांक को ही आधार मानते हुए विचलन का मापन किया जाता है। प्रसार के इसी दोष को दूर करने के उद्देश्य से चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation)का

मापन किया जाता है। चतुर्थांक विचलन के अन्तर्गत प्रदत्त के मध्य में स्थित **50** प्रतिशत प्राप्तांकों के आधार पर विचलन की गणना की जाती है। मध्यमान के बिन्दु से नीचे **25** प्रतिशत प्राप्तांक की सीमा को चतुर्थांक एक **(Q1)** कहा जाता है तथा मध्यमान के बिन्दु से ऊपर **25** प्रतिशत प्राप्तांक की सीमा को चतुर्थांक तीन **(Q3)** कहा जाता है। इस चतुर्थांक तीन **(Q3)** के मान तथा चतुर्थांक एक **(Q1)**के मान का अन्तर ज्ञात किया जाता है ($Q_3 - Q_1$), जिसे अन्तर्चतुर्थक विचलन (Inter-Quartile Range or Deviation) कहा जाता है। यदि अन्तर्चतुर्थक के मान को आधा कर दें तब इसे अर्द्ध-अन्तर्चतुर्थंक विचलन (Semi -Inter-Quartile Deviation) कहा जाता है। इस अर्द्ध-अन्तर्चतुर्थक विचलन (Semi -Inter-Quartile Deviation)को ही चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation अथवा Q.D.) कहा जाता है तथा सूत्र रूप में इस प्रकार लिखा जाता है-

$$\text{चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation } \{Q.D.\}) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

इसी आधार पर लिंडक्यूस्ट (Lindquist 1950) के अनुसार ''चतुर्थांक विचलन प्रथम तथा तृतीय चतुर्थांक के मध्य अन्तर का आधा है। इसी कारण से इसे अर्द्ध-अन्तर्चतुर्थक विचलन कहा जाता है।''

"Q.D. is one-half the distance between the first and third quartile and so it is called semi-inter-quartile range. (Lindquist. 1950.)

चतुर्थांक एक **(Q1)**तथा चतुर्थांक तीन **(Q3)** को क्रमशः शतांशीय मान **25** (P_{25})तथा **75** (P_{75})माना जाता है**,** अतः चतुर्थांक विचलन को सूत्र रूप में इस प्रकार भी कहा जा सकता है-

$$Q.D. = \frac{P_{75} - P_{25}}{2}.$$

इसी आधार पर गैरिट (Garrett 1973) ने चतुर्थांक विचलन को परिभाषित करते हुए लिखा है**,** ''किसी आवृत्ति वितरण में चतुर्थांक विचलन शतांशीय मान **75** (P_{75})तथा शतांशीय मान **25** (P_{25})के मध्य अन्तर का आधा है।'' The quartile deviation or Q is one-half the scale distance between the 75th and 25th percentiles in a frequency distribution." Garrett (1973).

(स) मध्यमान विचलन -

विचलन के माप के अन्तर्गत प्रसार तथा चतुर्थांक विचलन द्वारा वास्तव में विचलन का मापन नहीं होता है। प्रसार द्वारा प्रदत्त के अधिकतम प्राप्तांक तथा न्यूनतम प्राप्तांक की दूरी का ज्ञान होता है**,** वहीं चतुर्थांक विचलन केवल मध्य के **50** प्रतिशत प्राप्तांकों के आधार पर ज्ञात किया जाता है। मध्यमान विचलन जिसे औसत विचलन भी कहा जाता है**,** के अन्तर्गत मध्यमान से सभी प्राप्तांकों के विचलन के आधार पर गणना की जाती है। गैरिट के अनुसार ''औसत विचलन जिसे मध्यमान विचलन अलग-अलग प्राप्तांकों के मध्यमान का विचलन है**,** जो कि उसके मध्यमान श्रृंखला से लिया जाता है।'' (The Average Deviation or AD (also written mean deviation or MD) is the mean of the deviation of all the separate scores in a series taken from their mean.)" *H.E. Garrett.*

मध्यमान विचलन के अन्तर्गत मध्यमान से प्रत्येक प्राप्तांक का विचलन ज्ञात किया जाता है। प्राप्त सभी विचलनों को धनात्मक मानते हुए धन (+) तथा ऋण (- चिन्हों को बिना ध्यान दिये योग कर प्राप्तांकों की संख्या (N) का भाग दिया जाता है। प्राप्त भागफल ही मध्यमान विचलन अथवा औसत विचलन कहलाता है। गिल्फर्ड के

अनुसार, ''औसत विचलन अथवा AD, सभी विचलनों का मध्यमान है, जबकि बीज गणितीय चिन्हों को ध्यान में नहीं रखते हैं।'' (The average deviation or AD is the arithmetic mean of all the deviations when we disregard the algebraic sign.") *Guilford (1979).*

(द) प्रामाणिक विचलन -

विचलन के मापन के उद्देश्य से सर्वाधिक महत्वपूर्ण तथा विश्वसनीय विधि प्रामाणिक विचलन (Standard Deviation or S.D.) है। इस विधि को **1893** में कार्ल पीयरसन (Karl Pearson) ने बताया था। अंग्रेजी में प्रामाणिक विचलन को Standard Deviation तथा संक्षेप में S.D. कहा जाता है जिसे ग्रीक चिन्ह σ(sigma) के रूप में लिखा जाता है।

विचलन के अन्य माप जैसे प्रसार के अन्तर्गत अधिकतम प्राप्तांक तथा न्यूनतम प्राप्तांक के अन्तर की केवल गणना की जाती हैं। मध्य के प्राप्तांक की उपेक्षा की जाती है। चतुर्थांक विचलन में केवल मध्य के **50** प्रतिशत प्राप्तांकों के आधार पर विचलन की गणना की जाती है। प्रारम्भिक तथा अन्तिम छोर के प्राप्तांकों को गणना में सम्मिलित नहीं किया जाता है। मध्यमान विचलन में बीज गणितीय चिन्हों धन (+) तथा ऋण (-) का ध्यान गणना में नहीं करते हैं, फलतः शुद्ध तथा विश्वसनीय विचलन प्राप्त नहीं होता है।

उपर्युक्त विचलन मापों में स्थित विभिन्न परिसीमाओं को दूर करते हुए विचलन का शुद्ध मापन प्रामाणिक विचलन द्वारा किया जाता है। गिल्फर्ड के अनुसार ''प्रामाणिक विचलन मध्यमान से प्राप्तांकों के विचलनों के वर्गों के मध्यमान का वर्गमूल होता है''

(A standard deviation is the square root of the arithmetic mean of the squared deviation of measurements from their mean.) J.P. Guilford

2.4.3 आँकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण-

सांख्यिकी के अन्तर्गत निम्नलिखित प्रमुख आलेखीय प्रस्तुतीकरण किये जाते हैं-

1. आवृत्ति बहुभुज - आवृत्तियों के आधार पर अनेक भुजाओं को निर्मित किया जाता है।
2. स्तम्भाकृति - आयताकार चित्र क्रमशः वर्गान्तरों की आवृत्ति के अनुसार निर्मित किये जाते हैं।
3. संचयी आवृत्ति वक्र - संचयी आवृत्ति के आधार पर वक्र की रचना की जाती है।
4. वृत्त चित्र- प्राप्त प्रतिशत के आँकड़ों को वृत्त चित्र (Pie Diagram)के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

2.5 विवरणात्मक सांख्यिकी के उपयोग

अब आप विवरणात्मक सांख्यिकी का अध्ययन करने के पश्चात उसके प्रमुख उपयोग बिन्दुवार समझ सकते हो-

- विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत सम्पूर्ण आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श की विशेषताओं का वर्णन किया जाता है।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलांक की गणना द्वारा समूह की मध्य अथवा केन्द्रीय स्थिति ज्ञात की जाती है।
- विचलनों के मापकों-प्रसार, शतांशीय मान, चतुर्थांक विचलन, मध्यमान विचलन तथा प्रामाणिक विचलन की गणना द्वारा आँकड़ों के मध्य स्थित विचलन का अध्ययन किया जाता है।
- प्राप्त आँकड़ों के आधार पर आलेखीय प्रस्तुतीकरण के रूप में बार चित्र, स्तम्भाकृति, आवृत्ति बहुभुज, संचयी आवृत्ति वक्र , वृत्ति चित्र आदि को प्रदर्शित किया जाता है।

- विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्रतिदर्श को संगठित करने, संक्षिप्त करने तथा वर्णन करने का प्रमुख कार्य निहित होता है।

2.6 सारांश

सांख्यिकी के दो प्रमुख प्रकार प्रथम विवरणात्मक सांख्यिकी तथा द्वितीय अनुमानात्मक सांख्यिकी हैं। विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत सम्पूर्ण आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श की केन्द्रीय प्रवृत्ति का अध्ययन मध्यमान, मध्यांक अथवा बहुलांक के द्वारा कर सकते हैं। इसी प्रकार प्रतिदर्श प्राप्तांकों के मध्य स्थित विचलन का अध्ययन प्रसार, चतुर्थाक विचलन, मध्यमान विचलन, प्रामाणिक विचलन आदि के द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

प्राप्त आँकड़ों को आलेखीय रूप में भी प्रस्तुत कर सकते हैं- जैसे बार चित्र, स्तम्भाकृति, आवृत्ति बहुभुज, संचयी आवृत्ति वक्र, वृत्ति चित्र आदि। स्पष्ट है कि विवरणात्मक सांख्यिकी अत्यधिक उपयोगी सांख्यिकी है जिसके अन्तर्गत प्रतिदर्श का वर्णन करने संगठित करने तथा संक्षिप्त कर प्रस्तुत करने का उद्देश्य निहित होता हैं।

2.7 शब्दावली

- **केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप:** केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के अन्तर्गत एक संक्षिप्त अंक को उपलब्ध कराना है जो कि निरीक्षण द्वारा प्राप्त सम्पूर्ण वितरण की केन्द्रीय (मध्य की) स्थिति को प्रदर्शित करता है। आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति मध्यमान, मध्यांक व बहुलांक के रूप में स्पष्ट होती है।
- **विचलन:** प्राप्त आँकड़ों के मध्य स्थित विभिन्नता को मात्रात्मक रूप में प्रदर्शित करता है।
- **आलेखीय प्रस्तुतीकरण**: प्राप्त आँकड़ों को चित्र रूप में प्रदर्शित करना।

2.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) सांख्यिकी के दो प्रकार बतायें

2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तीन हैं प्रथम............., द्वितीय............., तृतीय...............

3) विचलनों के प्रमुख माप हैं......

4) केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों में सर्वाधिक शुद्ध माप है.......

5) विचलन का सर्वाधिक शुद्ध माप है.......

6) आँकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण प्रमुख रूप में किया जाता है।

7) विवरणात्मक सांख्यिकी प्रस्तुतीकरण प्रमुख रूप में किया जाता है-

अ) अनुमान से ब) आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण से

उत्तर: 1) विवरणात्मक सांख्यिकी तथा अनुमानात्मक साख्यिकी

2) प्रथम- मध्यमान,द्वितीय- मध्यांक, तृतीय- बहुलांक

3) मध्यमान

4) प्रसार, चतुर्थांक विचलन, मध्यमान, विचलन, प्रामाणिक विचलन आदि

5) प्रामाणिक विचलन

6) बार चित्र, स्तम्भाकृति, आवृत्ति बहुभुज, संचयी आवृत्ति वक्र, वृत्त चित्र आदि

7) ब. आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण से

2.9 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**
- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), Statistical Methods- concept application and computation, Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur (Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), Statistics for Psychology. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) Basic Statistical Concepts. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi.
- Garrett, Henry E. (1981)) Statistics in Psychology and Education. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) Fundamental Statistics for students of psychology and Education, McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences. McGraw Hill Book Company, New York.

2.10 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सांख्यिकी के प्रमुख प्रकार का स्पष्ट करते हुए विवरणात्मक सांख्यिकी का वर्णन कीजिये।
2. विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का संक्षिप्त वर्णन करें।
3. विवरणात्मक सांख्यिकी के उपयोग स्पष्ट करें।
4. विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत ऑकड़ों के आलेखीय प्रस्तुतीकरण की आवश्यकता स्पष्ट करें।
5. विचलन के प्रमुख मापों का संक्षेप में वर्णन करें।

इकाई-3 अनुमानात्मक सांख्यिकी तथा उसके उपयोग, विवरणात्मक व अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर(Inferential Statistics and its Uses; Difference Between Descriptive and Inferential Statistics)

इकाई सरंचना

3.1 प्रस्तावना
3.2 उद्देश्य
3.3 अनुमानात्मक सांख्यिकी
3.4 प्राचलिक तथा अप्राचलिक सांख्यिकी
3.5 विवरणात्मक तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर
3.6 अनुमानात्मक सांख्यिकी के उपयोग
3.7 सारांश
3.8 शब्दावली
3.9 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
3.10 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
3.11 निबन्धात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना

इससे पहले आप ने सांख्यिकी के दो प्रमुख प्रकार में प्रथम विवरणात्मक सांख्यिकी को समझा था। किस प्रकार विवरणात्मक सांख्यिकी द्वारा सम्पूर्ण आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श की विशेषताओं का वर्णन किया जाता है। अब सांख्यिकी के दूसरे महत्वपूर्ण प्रकार अनुमानात्मक सांख्यिकी को समझना भी आवश्यक है।

इस इकाई का अध्ययन कर आप अनुमानात्मक सांख्यिकी तथा इसके उपयोग को समझ सकते हो। साथ ही विवरणात्मक सांख्यिकी तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर भी समझ सकते हो। सांख्यिकी की आधारभूत विशेषताओं के आधार पर प्राचलिक सांख्यिकी तथा अप्राचलिक सांख्यिकी इन दो वर्गों में विभक्त किया जाता है। इस इकाई में इन दो प्रकार की सांख्यिकी को भी आप को समझाया जायेगा।

3.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप-

1. अनुमानात्मक सांख्यिकी को स्पष्ट कर सकते हैं।
2. विवरणात्मक तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर स्पष्ट कर सकते हैं।
3. अनुमानात्मक सांख्यिकी की उपयोगिता स्पष्ट कर सकते हैं।
4. प्राचलिक तथा अप्राचलिक सांख्यिकी में अन्तर स्पष्ट कर सकते हैं।
5. अनुमानात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्रमुख सांख्यिकी विधियों को जान सकते हैं।

3.3 अनुमानात्मक सांख्यिकी

प्रतिदर्श प्रदत्तों के आधार पर जनसंख्या की विशेषताओं का अनुमान करने की सांख्यिकीय प्रक्रिया को अनुमानात्मक सांख्यिकी के रूप में माना जाता है। "Statistical procedures used in drawing of inferences about the properties of population from sample data are frequently referred to as inferential statistics.

Ferguson and Takane (1995)

प्रायः अनुसन्धान के अन्तर्गत समस्त जनसंख्या के स्थान पर जनसंख्या के एक छोटे समूह पर अध्ययन किया जाता है। इस छोटे समूह को प्रतिदर्श कहा जाता है, जो कि सम्पूर्ण जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता है। इसी प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर सम्पूर्ण जनसंख्या के सम्बन्ध में अनुमान लगाया जाता है अतः इसे अनुमानात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। अनुमानात्मक सांख्यिकी का तात्पर्य उन सांख्यिकी प्रक्रियाओं से हैं, जिनके द्वारा अनुमान लगाये जाते हैं। यह अनुमान प्रतिदर्श के आधार पर लगाया जाता है, अतः इसे प्रतिचयन सांख्यिकी भी कहा जाता है। (Inferential statistics is the use of statistical procedures for the making of inferences.)

इस प्रकार की सांख्यिकी में टी-परीक्षण (t-test), प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of variance), काई वर्ग (Chi-square) आदि विधियों का प्रयोग किया जाता है। इन विधियों द्वारा प्रतिदर्श से प्राप्त आँकड़ों का विश्लेषण कर सम्पूर्ण समूह (जनसंख्या) के सम्बन्ध में वैज्ञानिक मापदण्ड के आधार पर अनुमान लगाया जाता है तथा महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जाते हैं।

3.4 प्राचलिक तथा अप्राचलिक सांख्यिकी

आधारभूत विशेषताओं के आधार पर सांख्यिकी को दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है- प्रथम प्राचलिक एवं द्वितीय अप्राचलिक सांख्यिकी।

1. **प्राचलिक सांख्यिकी** (Parametric Statistics) -

प्राचल से अभिप्राय सम्पूर्ण जनसंख्या अथवा समष्टि के किसी तत्व विशेष के वास्तविक ज्ञान से है। परन्तु सम्पूर्ण जनसंख्या के प्राचल मूल्य को ज्ञात करना एक कठिन तथा प्रायः असम्भव कार्य है। तब सम्पूर्ण जनसंख्या के प्रतिदर्श के आधार पर वास्तविक ज्ञान अथवा प्राचल मूल्य का अनुमान लगाया जाता है। जिन सांख्यिकी विधियों द्वारा यह अनुमान लगाया जाता है उन विधियों को प्राचलिक सांख्यिकी कहा जाता है। प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग केवल वहीं किया जा सकता है जबकि प्राप्त आँकड़ों का स्वरूप सामान्य वितरण के अनुरूप, विचलन की समजातीयता तथा प्रतिदर्श की अनियमितता आदि आधारभूत विशेषताएँ निहित होती हैं। प्राचलिक सांख्यिकी विधियों के अन्तर्गत टी परीक्षण, क्रान्तिक अनुपात, प्रसरण विश्लेषण आदि की गणना की जाती है।

2. **अप्राचलिक सांख्यिकी** (Non Parametric Statistics) -

जहाँ प्राचलिक सांख्यिकी के अन्तर्गत आधारभूत आवश्यक विशेषताओं का अभाव होता है, वहाँ अप्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग किया जाता है। आधारभूत मान्यता तथा प्रतिबन्धों में शिथिलता के कारण इसे वितरण मुक्त सांख्यिकी कहा जाता है। इस प्रकार प्राचलिक सांख्यिकी की विशेषताओं के विपरीत अप्राचलिक सांख्यिकी मानी जाती है। सम्पूर्ण जनसंख्या के प्राचल मूल्य से इसका कोई सम्बन्ध नहीं होता है। अप्राचलिक सांख्यिकी वितरण की सामान्यता विचलन की समजातीयता तथा प्रतिदर्श की अनियमितता आदि आधारभूत

विशेषताओं पर आधारित नहीं होती हैं। अप्राचलिक सांख्यिकी के अन्तर्गत काई वर्ग मध्यांक परीक्षण, चिन्ह परीक्षण, स्पीयरमैन का क्रम अन्तर विधि सह सम्बन्ध आदि विधियों का प्रयोग किया जाता है।

3.5 विवरणात्मक तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर

विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्राप्त आँकड़ों के आधार पर प्रतिदर्श अथवा सम्पूर्ण जनसंख्या की विशेषताओं का वर्णन प्रस्तुत किया जाता है अतः इसे वर्णनात्मक अथवा विवरणात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। इसके विपरीत प्रतिदर्श के आँकड़ों के आधार पर सम्पूर्ण जनसंख्या की विशेषताओं का अनुमान लगाया जाता है। अनुमान करने की सांख्यिकी प्रक्रिया को ही अनुमानात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। विवरणात्मक सांख्यिकी तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी के मध्य अन्तर को एक सरल उदाहरण द्वारा आप अधिक स्पष्ट समझ सकते हो। एक विश्वविद्यालय में **10,000** छात्र-छात्रायें अध्ययन करते हैं। हमने प्रतिदर्श के रूप में **250** छात्र व **250** छात्राओं का चयन कर उनकी बौद्धिक योग्यता का परीक्षण किया। विवरणात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत **250** छात्रों व छात्राओं की बौद्धिक योग्यता का मध्यमान, प्रामाणिक विचलन तथा बार चित्र द्वारा आलेखीय प्रस्तुतीकरण कर सकते हैं। दोनों समूह के मध्यमान का तुलनात्मक अध्ययन कर ज्ञात हो जायेगा कि किस समूह की बौद्धिक योग्यता अधिक है। इसे ही बार चित्र द्वारा प्रदर्शित भी कर सकते हैं। अब प्रश्न उठता है कि छात्र व छात्राओं की बौद्धिक योग्यता के मध्य सार्थक अन्तर है अथवा नहीं**?** इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने के उद्देश्य से यदि हम दोनो समूह के मध्य 'टी' परीक्षण की गणना करें तथा 'टी' का मान **2.50** प्राप्त हो। तब स्पष्ट है कि जिस समूह का मध्यमान अधिक है (छात्र अथवा छात्रा) वह समूह सार्थक रूप से उच्च बौद्धिक योग्यता रखता है। यह परिणाम केवल **250** छात्रों व **250** छात्राओं के (प्रतिदर्श) परिणाम नहीं है वरन् सम्पूर्ण विश्वविद्यालय के **10,000** विद्यार्थियों (छात्र व छात्रा) के परिणाम माने जाते हैं। इसे ही अनुमानात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। प्रतिदर्श के आँकड़ों (**250** छात्र व **250** छात्रा) के आधार पर सम्पूर्ण जनसंख्या (**10,000** विश्वविद्यालय के विद्यार्थी) की बौद्धिक योग्यता का अनुमान लगाने की प्रक्रिया ही अनुमानात्मक सांख्यिकी है।

3.6 अनुमानात्मक सांख्यिकी के उपयोग

उपर्युक्त उदाहरण के आधार पर अनुमानात्मक सांख्यिकी के निम्नलिखित उपयोग हैं-

1) अनुमानात्मक सांख्यिकी विभिन्न प्रकार के अनुसन्धानों का आधार है।
2) सम्पूर्ण जनसंख्या में से एक छोटे समूह का प्रतिदर्श के रूप में चयन कर अनुमानात्मक सांख्यिकी द्वारा अध्ययन कर सकते हैं।
3) प्रतिदर्श के आधार पर प्राप्त परिणामों के द्वारा सम्पूर्ण जनसंख्या के सन्दर्भ में अनुसन्धान निष्कर्ष ज्ञात किये जा सकते हैं।
4) इसी कारण से अनुमानात्मक सांख्यिकी को निष्कर्षात्मक सांख्यिकी भी कहा जाता है।
5) अनुमानात्मक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्रमुख रूप से टी-परीक्षण प्रसरण-विश्लेषण, काई वर्ग, मान विटने यू परीक्षण आदि सांख्यिकी विधियों का प्रयोग किया जाता है।

3.7 सारांश

प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर सम्पूर्ण जनसंख्या के सम्बन्ध में अनुमान लगाया जाता है अतः इसे अनुमानात्मक सांख्यिकी भी कहा जाता है। अनुमानात्मक सांख्यिकी का तात्पर्य उन सांख्यिकी प्रक्रियाओं से है,

जिनके द्वारा अनुमान लगाये जाते हैं। यह अनुमान प्रतिदर्श के आधार पर लगाया जाता है, अतः इसे प्रतिचयन सांख्यिकी भी कहा जाता है।

आधारभूत विशेषताओं के आधार पर सांख्यिकी को प्राचलिक का प्रयोग केवल वही किया जा सकता है, जबकि प्राप्त आँकड़ों का स्वरूप सामान्य वितरण के अनुरूप होता है तथा प्रतिदर्श की अनियमितता (randomness), विचलन की समजातीयता (homogeniety of variation) आदि आधारभूत विशेषताएँ निहित होती है। जबकि अप्राचलिक साख्यिकी के अन्तर्गत उक्त आधारभूत विशेषताओं की कमी होती है प्राचलिक सांख्यिकी के अन्तर्गत काई वर्ग, टी-परीक्षण, क्रान्तिक अनुपात, प्रसरण विश्लेषण आदि की गणना की जाती है, जबकि अप्राचालिक सांख्यिकी के अन्तर्गत काई वर्ग, मध्यांक परीक्षण, चिह्न परीक्षण, स्पीरमैन की क्रम अन्तर विधि सहसम्बन्ध, मान विटने यू परीक्षण (Mann–Whitney U test) आदि की गणना की जाती है।

3.8 शब्दावली

- **प्रतिदर्श:** प्रतिदर्श जनसंख्या का वह भाग है, जो कि निहित उद्देश्य के लिये सम्पूर्ण जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता है ताकि प्रतिदर्श पर आधारित निश्चित निष्कर्ष सम्पूर्ण जनसंख्या के लिये वैध हो सकें।
- **जनसंख्या:** वह सम्पूर्ण समूह जिसमें से प्रतिदर्श का चयन किया जाता है, उसे जनसंख्या (**population**) अथवा समग्र (**universe**) कहा जाता है।
- **टी परीक्षण/क्रान्तिक अनुपात:** टी परीक्षण (t-test) का मान दो समूहों के मध्यमानों के अन्तर (M_1-M_2) की प्रामाणिक त्रुटि का अनुपात होता है। टी-परीक्षण के द्वारा दो मध्यमानों के मध्य स्थित अन्तर की सार्थकता का अध्ययन किया जाता है। यदि प्रतिदर्श समूह की संख्या (N) **30** से अधिक होता है, तब इस प्रकार के अन्तर का अध्ययन क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio) द्वारा करते हैं।
- **प्रसरण विश्लेषण:** टी परीक्षण का उद्देश्य दो प्रतिदर्श समूह के प्राप्तांकों के मध्य सार्थक अन्तर का अध्ययन करना होता है, जबकि प्रसरण विश्लेषण के द्वारा दो से अधिक प्रतिदर्श समूहों के प्राप्त्तांकों के मध्य सार्थक अन्तर का अध्ययन करना होता है।
- **काई वर्ग:** काई वर्ग अप्राचलिक सांख्यिकी की प्रमुख सांख्यिकी विधि है जिसके अन्तर प्रेक्षित आवृत्ति (Observed Frequency) तथा प्रत्याशित आवृत्ति (Expected Frequency) के अन्तर की व्याख्या की जाती है।

3.9 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) अनुमानात्मक सांख्यिकी को निष्कर्षात्मक सांख्यिकी के अतिरिक्त क्या कहा जाता है?
2) अनुमानात्मक सांख्यिकी का सम्बन्ध है (अ) आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण से (ब) अनुमान से**................**
3) आधारभूत विशेषता के आधार पर सांख्यिकी के दो प्रकार हैं प्रथम प्राचलिक सांख्यिक जबकि द्वितीय..........
4) प्राचलिक सांख्यिकी इस मान्यता पर आधारित होती है कि आँकड़ों का स्वरूप................... वितरण वक्र के अनुरूप है।
5) प्राचलिक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्रमुख सांख्यिकी विधियाँ हैं**.......**
6) अप्राचलिक सांख्यिकी के अन्तर्गत प्रमुख सांख्यिकी विधियाँ हैं.....................

उत्तर: **1**. प्रतिचयन सांख्यिकी **2.** (ब) अनुमान से

3. अप्राचलिक सांख्यिकी 4. सामान्य (**Normal**)
5. टी-परीक्षण तथा प्रसरण विश्लेषण
6. काई-वर्ग, मध्यांक परीक्षण, चिह्न परीक्षण आदि

3.10 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**
- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), Statistical Methods- concept application and computation, Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur(Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), Statistics for Psychology. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) Basic Statistical Concepts. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi.
- Garrett, Henry E. (1981)) Statistics in Psychology and Education. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) Fundamental Statistics for students of psychology and Education, McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences. McGraw Hill Book Company, New York.

3.12 निबन्धात्मक प्रश्न

1. साख्यिकी की विभिन्न प्रकारों का वर्णन कीजिये।
2. वर्णनात्मक तथा अनुमानात्मक सांख्यिकी में अन्तर स्पष्ट करें।
3. प्राचलिक तथा अप्राचलिक सांख्यिकी में अन्तर स्पष्ट करें।
4. अनुमानात्मक सांख्यिकी के उपयोग का वर्णन करें।

इकाई-4 सामान्य सम्भाव्यता वक्र की प्रकृति तथा विशेषताएँ(Nature and Characteristics of Normal Probability Curve)

इकाई संरंचना

4.1 प्रस्तावना
4.2 उद्देश्य
4.3 सामान्य सम्भाव्यता वक्र का अर्थ
4.4 सम्भाव्यता का अर्थ
4.5 सम्भाव्यता अनुपात
4.6 सम्भाव्यता के नियम
4.7 द्विपद वितरण
4.8 सामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताएँ
4.9 सारांश
4.10 शब्दावली
4.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
4.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
4.13 निबन्धात्मक प्रश्न

4.1 प्रस्तावना

इससे पहले आपने सांख्यिकी का अर्थ, प्रकार तथा सांख्यिकी के विभिन्न उपयोग को समझा था। सांख्यिकी की आधारभूत विशेषताओं के आधार पर प्राचलिक सांख्यिकी तथा अप्राचलिक सांख्यिकी के प्रमुख अन्तर को भी आपने समझा था। प्राचलिक सांख्यिकी का प्रयोग केवल वहाँ किया जाता है, जहाँ प्राप्त आँकड़ों का स्वरूप सामान्य वितरण के अनुरूप होता है।

इस इकाई में सामान्य वितरण (Normal distribution) को विस्तारपूर्वक समझाया जायेगा। इस इकाई का अध्ययन कर आप सम्भाव्यता वक्र का अर्थ, सामान्य सम्भाव्यता वक्र तथा उसकी विशेषताओं को समझ सकते हो। इसके साथ ही सम्भाव्यता अनुपात, सम्भाव्यता के नियम तथा द्विपद वितरण के बारे में भी आप को समझाया जायेगा।

4.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप-

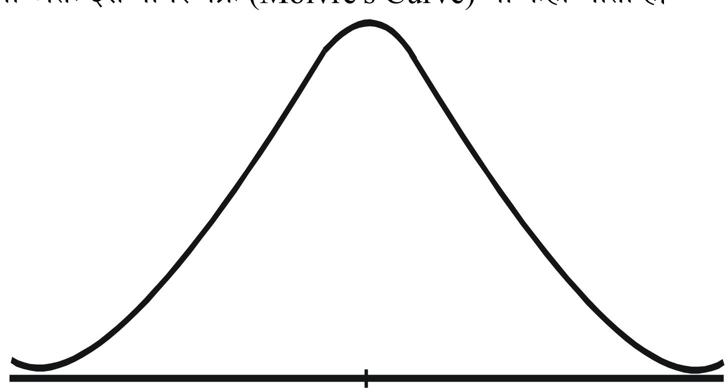
- सामान्य सम्भाव्यता वक्र का अर्थ समझ सकते हैं।
- सम्भाव्यता अनुपात तथा सम्भाव्यता के नियम समझ सकते हैं।
- द्विपद वितरण को स्पष्ट कर सकते हैं।

- सामान्य सम्भाव्यता वक्र को स्पष्ट कर सकते हैं।
- सामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताओं को समझ सकते हैं।

4.3 सामान्य सम्भाव्यता वक्र का अर्थ

सामान्य वितरण एक सैद्धान्तिक कल्पना है जिसके आधार पर प्रकृति की विभिन्न विशेषताओं की व्याख्या करने का प्रयास किया जाता है। सामान्य वितरण के मध्य में प्राप्तांक सर्वाधिक होते हैं तथा क्रमशः दोनों किनारों पर घटते जाते हैं। सामान्य वितरण के आधार पर जो वक्र निर्मित होता है उसे सामान्य वितरण वक्र कहा जाता है। सामान्य वितरण वक्र (Normal Distribution Curve) जिसे सामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) भी कहा जाता है, वह सममित (Symmetrical) वक्र है जो मध्य में सबसे अधिक ऊँचा होता है तथा क्रमशः दोनों किनारों की ओर घटता जाता है, किन्तु आधार रेखा से स्पर्श नहीं करता है। इसका आकार घण्टाकार (bell-shaped) होता है। (The frequency curve, which is bell-shaped, is the normal curve or normal distributio - **Ferguson & Takane (1989)**

कार्ल पीयर्सन के अनुसार सर्वप्रथम **1733** में गणितशास्त्री अब्राहम डी मोवरे (Abraham De Moivre 1677-1754) द्वारा इस वक्र का उपयोग संयोग के खेल आदि से सम्बन्धित विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिये किया, जो कि लन्दन के जुआरियों (Gamblers) में लोकप्रिय हुआ। इस वक्र का प्रयोग सर्वप्रथम मोवरे ने किया अतः इसे मोवरे वक्र (Moivre's Curve) भी कहा जाता है।



स्विट्जरलैण्ड के गणितज्ञ बरनोली (Bernolli 1964-1705) का विचार था कि सामान्य वितरण वक्र द्वारा आर्थिक तथा नैतिक आदि कारकों का अध्ययन किया जा सकता है। फ्रांसीसी खगोलशास्त्री लाप्लेस (Laplace, 1749-1827) द्वारा सामान्य वितरण वक्र के आधार पर सम्भाविता के नियम का उल्लेख किया गया। जर्मन खगोलशास्त्री गौस (Gauss, 1777-1855) द्वारा सामान्य वितरण वक्र के द्वारा आकस्मिक त्रुटियों के आधार पर संयोग सिद्धान्त का प्रतिपादन किया, अतः सामान्य वितरण वक्र को गौस का वक्र भी कहा जाता है। तत्पश्चात बैल्जियम के सांख्यिकी विद्वान क्यूटले (Quetelet, 1796-1874) द्वारा सामान्य वितरण वक्र का प्रयोग निरीक्षण की त्रुटियों के अतिरिक्त समष्टि के विभिन्न कारकों जैसे मानसिक तथा नैतिक शीलगुणों से सम्बन्धित विभिन्न क्षेत्रों में किया जा सकता है।

इस प्रकार वर्तमान समय में सामान्य वितरण वक्र का प्रयोग भौतिक विज्ञान, जीव-विज्ञान तथा खगोल शास्त्र के अतिरिक्त सामाजिक विज्ञानों के अन्तर्गत मनोविज्ञान व शिक्षाशास्त्र के क्षेत्रों में होने लगा है। इन क्षेत्रों में प्रतिदर्श के सिद्धान्त के आधार पर अनुमानात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर महत्वपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त किये जा रहे हैं।

प्रत्येक व्यक्ति के शीलगुणों जैसे बुद्धि, रूचि, चिन्ता, संवेगात्मक परिपक्वता, सामाजिकता, समायोजन, आदि में व्यक्तिगत भिन्नता निहित होती है। यदि एक विशाल समूह का अध्ययन करें तब पायेंगे कि अधिकांश व्यक्तियों में औसत स्तर पर शीलगुण विद्यमान होते हैं। बहुत कम व्यक्तियों में औसत से अधिक शीलगुण विद्यमान होते हैं। उदाहरणार्थ यदि किसी विशाल जनसमूह के व्यक्तियों के बुद्धि स्तर का अध्ययन करें तब पायेंगे कि अधिकांश व्यक्तियों की बुद्धि औसत स्तर की है, जबकि बहुत कम व्यक्ति औसत से अधिक अर्थात् तीव्र बुद्धि के हैं और बहुत कम व्यक्ति औसत से कम अर्थात् मन्दबुद्धि के दृष्टिगत होते हैं। इस प्रकार विभिन्न शीलगुणों में से किसी भी गुण का अध्ययन करने पर एक सामान्य वितरण वक्र निर्मित होता है, जिसके आधार पर समूह की विशेषताओं का सम्भाव्यता अथवा प्रायिकता का अध्ययन किया जा सकता है। इसी कारण सामान्य वितरण वक्र को सामान्य सम्भाव्यता वक्र भी कहा जाता है।

जनसंख्या में स्थित मनोवैज्ञानिक शीलगुण सामान्य वितरण वक्र के रूप में सम्भावित हैं, इस धारणा के आधार पर ही सम्भाव्यता सिद्धान्त आधारित है और इसी सिद्धान्त के आधार पर सम्पूर्ण समूह में किसी गुण विशेष की सम्भावना कितनी है अथवा किसी घटना के घटित होने की सम्भावना कितनी है? इसका अध्ययन किया जा सकता है। जैसा कि गैरिट का विचार है कि ‘‘अधिकतर प्राकृतिक गोचरों और कुछ विशिष्ट परिस्थितियों में अधिकांश मनोवैज्ञानिक और सामाजिक शीलगुणों के मापनों में अपने मध्यमानों के समीप इस प्रकार सममित रूप से वितरित होने की प्रवृत्ति सामान्य वितरण वक्र के ही अनुपात में प्राप्त होती है।’’

"Measurement of many natural phenomena and of many mental and social traits under certain conditions tend to be distributed symmetrically about their means in proportions which approximate those of the normal probability distribution"

4.4 सम्भाव्यता का अर्थ

किसी विशेष घटना के घटित होने का पूर्वानुमान ही सम्भाव्यता को व्यक्त करता है। गैरिट (Garrett)के द्वारा सामान्य घटनाओं के मध्य किसी घटना के घटित होने की सम्भावित आवृत्ति के रूप में सम्भाव्यता को परिभाषित किया है। (The probability of a given event is defined as the expected frequency of this event among events of a like sort.) इस प्रकार दूसरे शब्दों में सम्भाव्यता सामान्य रूप से एक घटना, **100** बार में से कितनी बार घटित होगी को स्पष्ट करती है।

(The probability of an event will be defined as the number of times out of 100 that the event would occur.) Underwood, Taylor, Duncan and Cotton: Elementary Statistics. 1954.

यदि एक सिक्के को उछाला जाये तब उसके चित्त तथा पट गिरने की सम्भावना समान है। सिक्का चित्त गिरेगा इसकी सम्भावना **1/2** है, जबकि सिक्का पट गिरेगा इस बात की भी सम्भावना **1/2** है।

4.5 सम्भाव्यता अनुपात

किसी घटना के घटित होने की सम्भाव्यता को गणितीय रूप में एक अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता हैं, इसे ही सम्भाव्यता अनुपात कहा जाता है। गैरिट (Garrett) के अनुसार सम्भाव्यता अनुपात उस भिन्न से परिभाषित किया जा सकता है, जिसका अंश वांछित परिणामों के बराबर होता है एवं जिसका हर कुल सम्भव परिणामों के योग को इंगित करता है।

(Probability ratios are defined by the fraction, the numerator of which equals the desired outcomes and the denominator of which equals the total possible outcomes.)

सूत्र रूप में -

$$\text{सम्भाव्यता अनुपात} = \frac{\text{वांछित परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}}$$

एक सिक्के के उछालने पर चित्त गिरने की सम्भावना **1/2** तथा पट गिरने की सम्भावना अनुपात **1/2** है। सम्भाव्यता अनुपात की मात्रा शून्य से **1.00** तक होती है। शून्य मात्रा का अर्थ है घटना के घटित न होने की पूर्ण सम्भावना, जबकि **1.00** का अर्थ है घटना के घटित होने की पूर्ण सम्भावना होती है। घटना के घटित होने की सम्भावना p तथा घटना के घटित न होने की सम्भावना q दोनों का योग **1.00** होता है। सिक्के के चित्त आने की सम्भावना तथा पट आने की सम्भावना का योग (½ +½ =1)**1.00** ही है। इसी प्रकार यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाये तब ऐसी स्थिति में निम्नलिखित चार सम्भावनायें होगीं-

1		**2**		**3**		**4**
दोनो चित्त		पहला चित्त दूसरा पट		पहला पट दूसरा चित्त		दोनों पट
(H H)		(HT)		(T H)		(TT)
¼	+	¼	+	¼	+	¼ = 1

4.6 सम्भाव्यता के नियम

सम्भाव्यता के नियम को समझने से पूर्व घटनाओं के प्रकार को समझना आवश्यक है। घटनाओं के प्रमुख रूप से निम्नलिखित प्रकार हैं-

सरल घटना (Simple Events)**-** जब एक समय में केवल एक ही घटना घटित होती है। जैसे एक सिक्के को उछालने पर चित्त अथवा पट का होना।

संयुक्त घटना (Compound Event)**-** जब एक घटना एक से अधिक प्रकार से घटित होती है। जैसे एक साथ कई सिक्कों को उछालना अथवा एक साथ कई पांसों को फेंकना आदि।

जब संयुक्त रूप में घटित घटनायें एक दूसरे को प्रभावित नहीं करती हैं तब इन्हें स्वतन्त्र घटनायें कहते हैं। जैसे-दो सिक्के एक साथ उछालने पर पहले सिक्के के चित्त अथवा पट गिरने का प्रभाव दूसरे सिक्के के चित्त अथवा पट गिरने को प्रभावित नहीं करता है।

इसके विपरीत जब एक घटना का प्रभाव दूसरी घटना को प्रभावित करता है तब इन्हें परतन्त्र अथवा आश्रित घटनायें कहते हैं। जैसे ताश के **52** पत्तों में से एक हुकुम का इक्का निकाला जाये तथा उसे पुनः पत्तों में न मिलाया जाये तब ऐसी स्थिति में शेष पत्तों में से तीन बचे इक्कों के निकलने की सम्भावना पहली घटना से प्रभावित होती है**,** जिसे परतन्त्र घटना कहा जाता है। पहले इक्के के निकलने की सम्भावना **4/52** थी जबकि अन्य तीन इक्के निकलने की अब सम्भावना **3/51** है।

इसी प्रकार परस्पर विरोधी घटनायें वे घटनायें होती हैं**,** जो कि एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं अर्थात् एक घटना के घटित होने पर दूसरी घटना घटित नहीं हो सकती है। जैसे सिक्के के चित्त गिरने पर पट गिरने की सम्भावना समाप्त हो जाती है।

सम्भाव्यता के दो प्रमुख नियम होते हैं-

1. **सम्भाव्यता के योग का नियम** (Adding Law of Probability)**-**

परस्पर विरोधी घटनाओं के घटित होने की सम्भाव्यता उन सभी घटनाओं की अलग-अलग सम्भाव्यताओं का योग होती है। (The probability of occurence of any one of several particular events is the sum of their individual probabilities, provided that they are mutually exclusive.) Minium & others यदि ताश के **52** पत्तों में से हम एक किसी पत्ते को निकालते हैं और यह सम्भाव्यता ज्ञात करना चाहते हैं कि निकाला हुआ एक पत्ता हुक्म का इक्का होगा अथवा पान का इक्का होगा**?** तब ऐसी स्थिति में हुक्म का इक्का होने की सम्भाव्यता होगी **1/52** तथा इसी प्रकार पान का इक्का होने की सम्भाव्यता भी **1/52** होगी। अब यदि केवल एक निकाला गया पत्ता हुक्म का इक्का होगा अथवा पान का इक्का होगा यह जानने के लिये दोनों सम्भाव्यता अनुपात का योग कर सम्भाव्यता $\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{2}{52}=0.385$ ज्ञात करते हैं। इस प्रकार दोनों पत्तों के निकलने की अलग-अलग सम्भाव्यता $\frac{1}{52}$ व $\frac{1}{52}$ का योग कर $\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{52}\right)$ हम सम्भाव्यता ज्ञात करते हैं। यह घटनायें परस्पर विरोधी घटनायें हैं**,** क्योंकि यदि निकाला गया एक पत्ता जो भी होगा वह दूसरी घटना के घटित होने की सम्भावना को स्वतः समाप्त कर देगा।

अन्य उदाहरण

साँप सीढ़ी खेल में प्रयुक्त वर्गाकार पांसे जिसमें **1** से **6** बिन्दु सभी ओर बने होते हैं। पांसे को एक बार उछालने पर उसमें ऊपर **4** व **6** आने की क्या सम्भावना है**?**

पांसे को उछालने पर **4** आने की सम्भावना = **1/6**

पांसे को उछालने पर **6** आने की सम्भावना =**1/6**

पांसे को एक बार उछालने पर **4** व **6** आने की

सम्भावना = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=0.333$

2. **सम्भाव्यता का गुणन नियम** (The Multiplicative Law of Probability)**-**

दो अथवा दो से अधिक परस्पर स्वतन्त्र घटनाओं के संयुक्त रूप में घटित होने की सम्भाव्यता उनकी अलग-अलग सम्भाव्यताओं का गुणनफल होती है। (The probability of several particular events occuring successively or jointly is the product of their separate probabilities, provided that the generating events are independent.) Minium & others 1989.

यदि हम तीन बार सिक्का उछालें तब उसके तीनों बार चित्त आने की सम्भाव्यता गुणन नियम द्वारा ज्ञात करते हैं। चित्त आने की सम्भाव्यता **1/2** है**,** अतः तीन बार चित्त आने की सम्भाव्यता होगी।

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0.125$$

तीन बार सिक्का उछालने की घटना परस्पर स्वतन्त्र घटना है, क्योंकि एक के घटित होने का दूसरे के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। (the way the first toss falls has no influence on the way the second toss will fall.) यदि इस प्रकार की स्वतन्त्र घटनायें हैं, तब उक्त नियम द्वारा सम्भाव्यता ज्ञात करते हैं।

4.7 द्विपद वितरण

द्विपद का अर्थ है दो पद, एक पद घटना की सफलता तथा दूसरा पद घटना की विफलता को व्यक्त करता है। सफलता तथा विफलता दोनों की सम्भाव्यता बराबर-बराबर होती है। द्विपद वितरण का प्रतिपादन स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नोली (James Bernoulli) द्वारा किया गया था, अतः इसे बर्नोली वितरण (Bernoulli Distribution) भी कहा जाता है। जिन क्षेत्रों में घटनाओं की सफलता-असफलता के आधार पर दो भागों मे विभाजित किया जा सकता है, (Dichotomous Classification) वहां द्विपद वितरण का प्रयोग किया जा सकता है। द्विपद वितरण एक प्रकार का सम्भाव्यता वितरण है जो कि विभिन्न प्रयासों में घटित विशेष सापेक्षिक आवृत्तियों को प्रदर्शित करता है।

("When observations are dichotomous (Classified in just two categories), we can construct a distribution that shows each possible outcome and its probability for a specified number of trials. This binomial distribution is a probability distribution that shows the relative frequency with which particular outcomes would occur over an infinite number of trials.") Minium, King and Bear

यदि हम दो सिक्के एक साथ उछालें तब उसके परिणाम चार समूहों में विभाजित कर सकते हैं-

(1)	(2)	(3)	(4)
H.H	HT	TH	TT
दोनों सिक्के चित्त गिरें	पहला चित्त व दूसरा पट गिरे	पहला पट व दूसरा चित्त गिरे	दोनों ही सिक्के पट गिरें

यदि इन परिणामों को अनुपात में व्यक्त करें तब दोनों सिक्के चित्त गिरने की सम्भावना ¼ तथा दोनों सिक्के पट गिरने की सम्भावना ¼ है। इसी प्रकार पहला चित्त/पट व दूसरा चित्त/पट गिरने की सम्भावना ½(¼+¼) है। अतः सम्भाव्यता अनुपात का योग ¼+½+¼=1 होता है।

यदि सिक्कों की संख्या को बढ़ा दिया जाये अर्थात् कई सिक्के एक साथ उछाले जायें तब भी सम्भाव्यता अनुपात ज्ञात किया जा सकता है, किन्तु उक्त प्रक्रिया अत्यन्त जटिल सिद्ध होगी। सम्भाव्यता अनुपात सरलता से ज्ञात करने के लिये द्विपद विस्तार (Binomial expansion) सूत्र का प्रयोग किया जाता है-

$$(P+Q)^{N}$$

जबकि **P**= प्रथम घटना के घटित होने की सम्भावना

Q = दूसरी घटना के घटित होने की सम्भावना

N = घटकों की संख्या

यदि हम दो सिक्के एक साथ उछालते हैं तब उपर्युक्त सूत्र के अनुसार चित्त आने की सम्भाव्यता **P** होगी तथा पट आने की सम्भाव्यता फ होगी। दो सिक्कों की संख्या **Q** होगी अतः सूत्र रूप में-

$$(H+T)^2$$

द्विपद विस्तार के लिये (H+T) का गुणा (H+T) में करेंगे-

$$\begin{array}{r} H+T \\ \times\ H+T \\ \hline HT+T^2 \\ H^2+HT\quad \\ \hline H^2+2HT+T^2 \end{array}$$

$H^2 + 2HT + T^2$ परिणाम के आधार पर-

H^2 = दोनों चित्त आने की सम्भाव्यता अनुपात (चार में से एक) = ¼

2HT=एक सिक्का चित्त (H) व एक सिक्का पट (T) आने का सम्भाव्यता

अनुपात (चार में से दो) = ½

T^2 =दोनों सिक्के पट आने की सम्भाव्यता अनुपात (चार में से एक) = ¼

2HT=एक सिक्का चित्त (H) व एक सिक्का पट (T) आने का सम्भाव्यता

अनुपात (चार में से दो) = ½

T^2 =दोनों सिक्के पट आने की सम्भाव्यता अनुपात (चार में से एक) = ¼

सम्भाव्यता अनुपात का योग = ¼+½+¼ =1.00

इसी प्रकार यदि तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाये तो निम्नलिखित **8** समूह सम्भव हैं।

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT

द्विपद विस्तार इस प्रकार ज्ञात होगा-

$$(H+T)^3 = H^3 + 3H^2T + 3HT^2 + T^3$$

सम्भाव्यता अनुपात $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1.00$

यदि दस सिक्कों को एक साथ उछाला जाये तब ऐसी स्थिति में **1024** सम्भावित परिणाम होंगे तथा

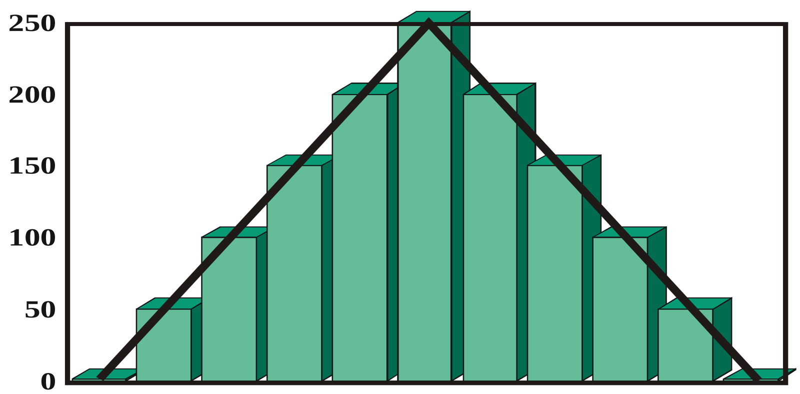
द्विपद विस्तार इस प्रकार होगा-

$(H+T)^{10} = H^{10} + 10H^9T + 45H^8T^2 + 120H^7T^3 + 210H^6T^4 + 252H^5T^5 + 210H^4T^6 + 120H^3T^7 + 45H^2T^8 + 10HT^9 + T^{10}$

सम्भाव्यता अनुपात -

$$=\frac{1}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}=1.00$$

यदि उपर्युक्त द्विपद विस्तार के आधार पर आलेखीय वक्र निर्मित किया जाये तब वह सामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) के समरूप होगा।



पास्कल (Pascal) द्वारा इन गुणांको में एक निश्चित सम्बन्ध पाया गया जिसे पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle) कहा जाता है।

N **घटकों की संख्या**	**गुणांक**	**योग**
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32

6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	512
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	1024

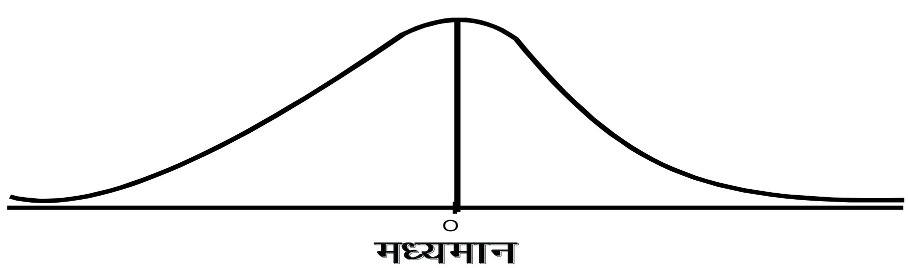
प्रत्येक अंक अपने से ऊपर वाले दो अंको का योग है। पास्कल त्रिभुज देखने से स्पष्ट है कि यदि दो सिक्के (द्वितीय पंक्ति) एक साथ उछालते हैं तब सम्भाव्यता गुणांक **121** होगा। एक साथ तीन सिक्के उछालने पर (तीसरी पंक्ति) गुणांक **1331** होगा। इसी प्रकार अन्तिम पंक्ति में **10** सिक्के एक साथ उछालने पर सम्भाव्यता मान दिया गया है।

4.8 सामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताएँ

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की निम्नलिखित महत्वपूर्ण विशेषताएँ होती है।

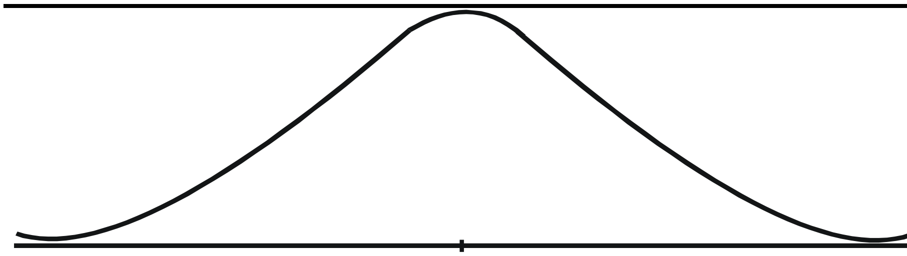
1. **वक्र की आकृति** (Shape of Curve) -

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की आकृति घंटाकार होती है। प्राप्तांकों का वितरण सममित होता है। मध्य में प्राप्तांक सर्वाधिक होते हैं तथा सममित रूप से दोनों ओर फैलते चलते हैं। इसी कारण से वक्र को सामान्य वितरण वक्र कहा जाता है। यदि मध्यमान से लम्बवत् रेखा खींची जाये तो वह वक्र को दो समान भागों में विभाजित करती है।



2. **मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलांक की समानता** (Equality of Mean, Median and Mode) -

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की दूसरी महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों माप-मध्यमान**,** मध्यांक तथा बहुलांक का मान समान होता है। Mean = Median = Mode



3. वक्र का गणितीय समीकरण (Mathematical Equation of Curve) -

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की आधार रेखा (**X**-अक्ष) का विस्तार तथा **Y** अक्ष की ऊँचाई का निर्धारण निम्नलिखित गणितीय सूत्र द्वारा निर्धारित होता है, जिसे सामान्य सम्भाव्यता वक्र का समीकरण भी कहा जाता है-

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

जहाँ y = x अक्ष के ऊपर वक्र की ऊँचाई

N = आवृत्तियों का योग

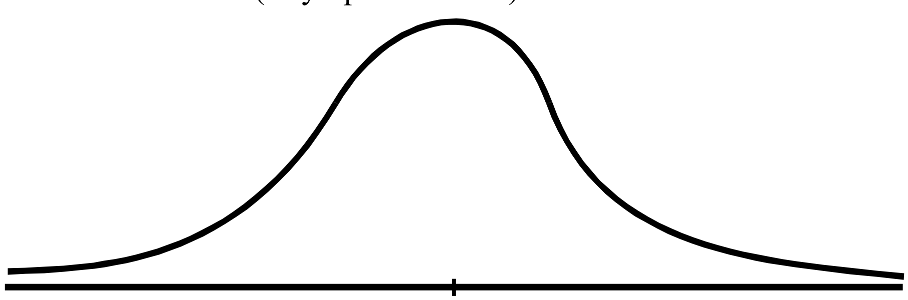
σ = वितरण का प्रामाणिक विचलन (S.D.)

π = परिधि तथा व्यास का अनुपात (22/7 = 3.14)

e = नेपिरियन (Napierian)लॉगर्थिम का अनुपात (2.718)

x = मध्यमान से प्राप्तांक का विचलन

4 . अनन्त स्पर्शीय वक्र (Asymptotic Curve) -

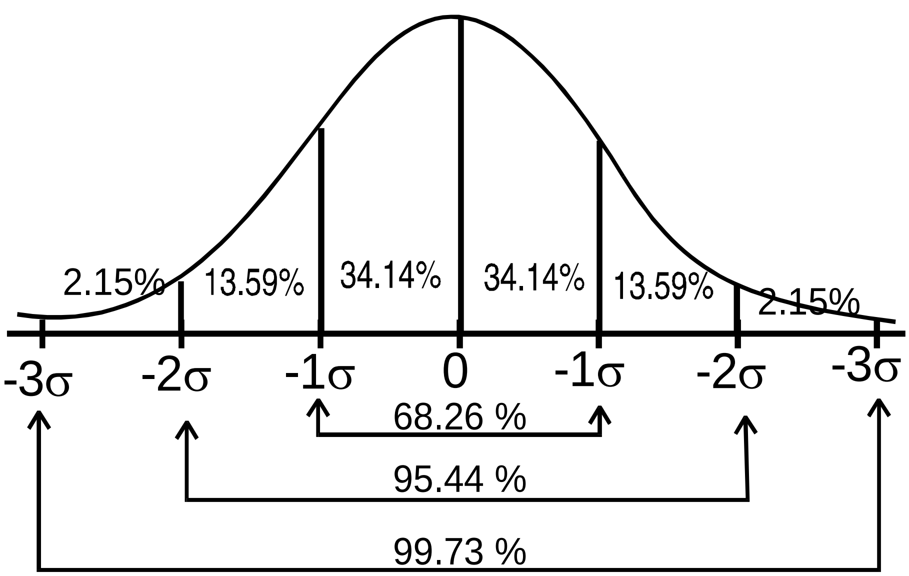


सामान्य सम्भाव्यता वक्र के दोनों छोर आधार रेखा (अक्ष-भुजा) को स्पर्श नहीं करते हैं।

5. **विषमता गुणांक** (Coefficient of Skewness) -
सामान्य सम्भाव्यता वक्र का वितरण सामान्य होता है, जिसके कारण वक्र का विषमता गुणांक शून्य होता है। वक्र पूर्णतः सन्तुलित होता है, उसमें किसी प्रकार की विषमता नहीं पाई जाती है।

6. ककुदता गुणांक (Coefficient of Kurtosis) –
ककुदता गुणांक वक्र के मध्य की ऊँचाई को स्पष्ट करता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र मध्य में बहुत नुकीला (Lepto Kurtic) नहीं होता है और न ही अधिक चपटा (Platy Kurtic)होता है। वक्र की ऊँचाई औसत होती है। इसका ककुदता गुणांक (Coefficient of Kurtosis)का मान **0.263** (ku = 0.263) होता है।

7. **निरन्तर वक्र** (Continuous Curve) -
सामान्य सम्भाव्यता वक्र एक निरन्तर अथवा अविरल वक्र है। इस वक्र की आधार रेखा (अक्ष भुजा) पर जिन प्राप्तांकों को आलेखित अथवा प्रदर्शित किया जाता है, वे अविरल अथवा अविछिन्न (Continuous) होते हैं।
8. **सामान्य वक्र का क्षेत्रफल** (Area under a normal curve)-
सामान्य सम्भाव्यता वक्र का, आधार रेखा (अक्ष भुजा) पर विस्तार **-3σ** से **+3σ** तक **99.73** प्रतिशत (शेष **0.27** नगण्य प्रतिशत के कारण **100** प्रतिशत) होता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र में मध्यमान से ±**1σ** का क्षेत्रफल **34.13** प्रतिशतर्, ±**2σ** क्षेत्रफल **95.44** प्रतिशत तर्था ±**3.00 σ** का क्षेत्रफल **99.73** प्रतिशत होता है। इसे अग्रलिखित चित्र द्वारा स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है-



9. **दिशा परिवर्तन बिन्दु** (Point of inflection) -
सामान्य सम्भाव्यता वक्र के मध्यमान से **1σ** ऊपर तथा **1σ** नीचे (+**1σ** से -**1σ** तक) वक्र की आकृति अवतल (Concave)होती है तथा इसके पश्चात उत्तल (Convex) में परिवर्तित होती है।

10. **निश्चित सम्बन्ध** (Definite Relationship) -

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अन्तर्गत विचलनों के विभिन्न मापकों के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होता है। चतुर्थांक एक (Quartile$_1$ or Q_1) तथा चतुर्थांक तीन (Quartile$_3$ or Q_3) का मध्यमान से अन्तर समान होता है, जिसे चतुर्थांक विचलन अथवा सम्भाव्य त्रुटि (Probable Error or PE) कहा जाता है। अतः कहा जा सकता है-

$$Q_3 - \text{Mean} = \text{Mean} - Q_1 = \text{Quartile Deviation or PE}$$

प्रामाणिक विचलन **(σ)** तथा सम्भाव्य त्रुटि **(PE)** के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होता है। सम्भाव्य त्रुटि **(PE)** ज्ञात होने पर प्रामाणिक विचलन **(σ)**का मान ज्ञात कर सकते हैं तथा इसी प्रकार प्रामाणिक विचलन **(σ)** ज्ञात होने पर सम्भाव्य त्रुटि **(PE)** ज्ञात कर सकते हैं।

$PE = 0.6756\ \sigma$ $\sigma = 1.4826\ PE$

11. **वक्र का कोटिमान** (Ordinate Value of Curve) -

सामान्य सम्भाव्यता वक्र में विभिन्न जेड मानों (Z Values) पर कोटि (ordinate) की ऊँचाई भिन्न-भिन्न होती है। मध्यमान बिन्दु पर कोटि की ऊँचाई सर्वाधिक **0.3989** होती है।

इस प्रकार स्पष्ट है कि सामान्य सम्भाव्यता वक्र में विभिन्न महत्वपूर्ण विशेषताएँ निहित हैं। यह भी स्पष्ट करना आवश्यक है कि सामान्य सम्भाव्यता वक्र एक सैद्धान्तिक कल्पना है, अतः आवश्यक नहीं है कि यह सामान्य जनसंख्या आदि का प्रतिनिधित्व ही करे।

4.9 सारांश

सामान्य वितरण एक सैद्धान्तिक कल्पना है जिसके आधार पर प्रकृति की विभिन्न विशेषताओं की व्याख्या करने का प्रयास किया जाता है। सामान्य वितरण वक्र जिसे सामान्य सम्भाव्यता वक्र भी कहा जाता है, जिसका आकार घण्टाकर (Bell- shaped) होता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र की प्रमुख विशेषताएँ होती हैं जैसे मध्यमान, मध्यांक व बहुलांक के मान समान होना, विषमता गुणांक शून्य, ककुदता गुणांक (मध्य की ऊँचाई) का मान **0.263,** वक्र का विस्तार व ऊँचाई गणितीय समीकरण पर आधारित होना आदि।

4.10 शब्दावली

- **सम्भाव्यता**: किसी विशेष घटना के घटित होने का पूर्वानुमान अथवा सम्भावना को व्यक्त करना।
- **सम्भाव्यता अनुपात**: किसी विशेष घटना के घटित होने की सम्भाव्यता को गणितीय रूप में अनुपात के रूप में व्यक्त करना।
- **विषमता गुणांक**: सामान्य सम्भाव्यता वक्र का वितरण सामान्य न होकर बांये अथवा दांये कुछ अधिक होना ही विषमता है, जिसे मात्रात्मक रूप में विषमता गुणांक के रूप में ज्ञात करते हैं। यदि वक्र पूर्णतः सन्तुलित होगा तब विषमता गुणांक शून्य होता है।

- **ककुदता गुणांक**: वक्र की ऊँचाई को ककुदता गुणांक निर्धारित करता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र मध्य में न अधिक नुकीला तथा न अधिक चपटा होता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र का ककुदता गुणांक का मान **0.263** होता है।
- **द्विपद वितरण**: द्विपद का अर्थ है दो पद, एक पद घटना की सफलता तथा दूसरा पद घटना की विफलता को व्यक्त करता है। द्विपद वितरण एक प्रकार का सम्भाव्यता वितरण है जो कि विभिन्न प्रयासों में घटित विशेष सापेक्षिक आवृतियों को प्रदर्शित करता है।

4.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) सामान्य वितरण वक्र को अन्य किस नाम से भी जाना जाता है?

   अ) ....ब) ....

2) यदि एक सिक्के को उछाला जाये तब उसके चित्त तथा पट गिरने की सम्भावना होगी?
3) निम्नलिखित सूत्र द्वारा क्या ज्ञात किया जाता है?

$$\frac{\text{वांछित परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}}$$

4) जब केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों माप-मध्यमान, मध्यांक व बहुलांक समान हों तब इस प्रकार का वितरण क्या कहलाता है?
5) व्यावहारिक रूप से सामान्य सम्भाव्यता वक्र का प्रसार होता है-

   अ)**-1** से **+1** तक ब)**-2** से **+2** तक स)**-3** से **+3** तक द)**-0.50** से **+0.50** तक

6) सामान्य सम्भाव्यता वक्र में **-1**से + **1σ** के अन्तर्गत कितने प्रतिशत मान आते हैं-

   अ) **60** प्रतिशत ब) **64.56** प्रतिशत स) **68.26** प्रतिशत द) **54.68** प्रतिशत

उत्तर:**1.** अ) गौस का वक्र (Gaussian curve) ब) मोवरे का वक्र (Moivre's Curve)

2. **50** प्रतिशत (**1/2**) **3.** सम्भाव्यता अनुपात **4.** सामान्य वितरण

5. **-3** से **+3** तक **6.** **68.26** प्रतिशत

4.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई (उ**0**प्र**0**)
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**

- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), *Statistical Methods- concept application and computation,* Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur(Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), *Statistics for Psychology*. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) *Basic Statistical Concepts*. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi
- Garrett, Henry E. (1981)) *Statistics in Psychology and Education*. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) *Fundamental Statistics for students of psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) *Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences.* McGraw Hill Book Company, New York.

4.3 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सामान्य सम्भाव्यता वक्र से आप क्या समझते हैं ?
2. सामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताओं का वर्णन करें।
3. निम्नलिखित पर संक्षिप्त में टिप्पणी लिखिये-

   क. सम्भाव्यता अनुपात ख. स्वतन्त्र व आश्रित घटनायें

   ग. सम्भाव्यता के नियम घ. पास्कल त्रिभुज
4. द्विपद वितरण को सम्भाव्यता के सन्दर्भ में स्पष्ट करें।
5. सम्भाव्यता का अर्थ क्या है? सम्भाव्यता के विभिन्न नियमों को उदाहरण सहित स्पष्ट करें।

इकाई-5 सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुप्रयोग (Applications of Normal Probability Curve)

इकाई संरचना

5.1 प्रस्तावना
5.2 उद्देश्य
5.3 सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुप्रयोग
5.3.1 प्राप्तांक सीमाओं के मध्य प्रतिशत का निर्धारण
5.3.2 प्रतिशत सीमाओं के मध्य प्राप्तांक का निर्धारण
5.3.3 समूह को विभिन्न उपसमूहों में विभाजित करना
5.3.4 दो सामान्य वितरणों के आच्छादन के सन्दर्भ में तुलना
5.3.5 मनोवैज्ञानिक परीक्षण के पदों के कठिनाई स्तर का निर्धारण
5.5 सारांश
5.6 शब्दावली
5.7 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
5.8 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
5.9 निबन्धात्मक प्रश्न

5.1 प्रस्तावना

इससे पूर्व आप ने सम्भाव्यता का अर्थ समझते हुए सामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताओं का अध्ययन किया था। साथ ही सम्भाव्यता अनुपात, सम्भाव्यता के नियम तथा द्विपद वितरण को भी आप ने समझा था।

सामान्य वितरण एक सैद्धान्तिक कल्पना है जिसके आधार पर वक्र की ऊँचाई, उसका फैलाव तथा विचलनों के विभिन्न मापकों के मध्य निश्चित सम्बन्ध होता है, अतः सामान्य सम्भाव्यता वक्र के आधार पर विभिन्न प्रकार से अनुप्रयोग कर सकते हैं।

इस इकाई में सामान्य सम्भाव्यता वक्र के आधार पर किस प्रकार अनुप्रयोग कर सकते हैं इसको विभिन्न उदाहरणों एवं चित्रों के आधार पर समझाया जायेगा।

5.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप

- सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुप्रयोग द्वारा प्राप्तांक सीमाओं के मध्य प्रतिशत का निर्धारण समझ सकते हैं।
- इसी प्रकार प्रतिशत सीमाओं के मध्य प्राप्तांक का निर्धारण भी जान सकते हो।
- यदि किसी सामान्य सम्भाव्यता वक्र को कई उप समूहों में विभक्त करना है तब किस प्रकार विभक्त कर प्रत्येक उपसमूह का प्रतिशत ज्ञात करेंगे यह भी समझा जा सकता है।

- दो सामान्य वितरणों के आच्छादन के सन्दर्भ में तुलना करना भी समझ सकते हो।
- किसी मनोवैज्ञानिक परीक्षण के पदों का कठिनाई स्तर किस प्रकार निर्धारित किया जाता है, यह भी समझ सकते हो।

5.3 सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुप्रयोग

अनुप्रयोग -1 (Application-1)

5.3.1 प्राप्तांक सीमाओं के मध्य प्रतिशत का निर्धारण-

किसी सामान्य वितरण में दी गई प्राप्तांक सीमाओं के मध्य प्रतिशत प्राप्तांक का निर्धारण करना। To Find out the percentage of cases within given limits in any normal distribution-

उदाहरण-1 किसी सामान्य वितरण का मध्यमान 30 है तथा प्रामाणिक विचलन 5 हैं, बताइये कि

(i) 25 से 35 तक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा?

(ii) 37 अंक से अधिक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा?

(iii) 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा?

(iv) 25 से 28 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत बतायें।

(v) 33 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा?

हल -

i) 25 से 35 तक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत हम दो चरणों में ज्ञात करते हैं। प्रथम चरण के अन्तर्गत 25 प्राप्तांक से मध्यमान 30 के मध्य का प्रतिशत ज्ञात करेंगे तथा द्वितीय चरण में मध्यमान 30 से 35 प्राप्तांक के मध्य का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। तत्पश्चात इन दोनों प्राप्त प्रतिशत का योग कर 25 से 35 तक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करते हैं।

प्रथम चरण- के अन्तर्गत 25 प्राप्तांक से मध्यमान 30 के मध्य प्रतिशत ज्ञात करने के लिये मध्यमान से सिग्मा दूरी अथवा Z मूल्य ज्ञात करते हैं। जिसका निम्नलिखित सूत्र है-

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{\text{प्राप्तांक} - \text{मध्य मान}}{\text{प्रमाणिक विचलन}} \text{ अथवा } \frac{X - M}{S.D.}$$

जबकि - प्राप्तांक (X) = 25

मध्यमान (M) = 30

प्रामाणिक विचलन (S.D.) = 5

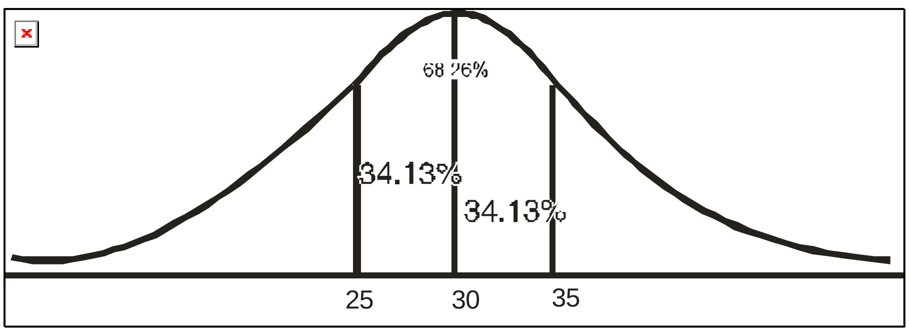
अतः Z मूल्य = $\frac{25-30}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

सारणी A द्वारा-1 Z मूल्य का 34.13 प्रतिशत होता है, अतः 25 से 30 प्राप्तांक के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत 34.13 है।

द्वितीय चरण- मध्यमान 30 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत भी Z मूल्य द्वारा ज्ञात करेंगे।

Z मूल्य = $\frac{X-M}{S.D.} = \frac{35-30}{5} = 1$

सारणी । द्वारा +1 Z मूल्य का प्रतिशत भी 34.13 होता है। (ऋणात्मक Z मूल्य मध्यमान से नीचे की ओर का प्रतिशत प्रदर्शित करता है, जबकि धनात्मक Z मूल्य मध्यमान से ऊपर की ओर का प्रतिशत प्रदर्शित करता है।)

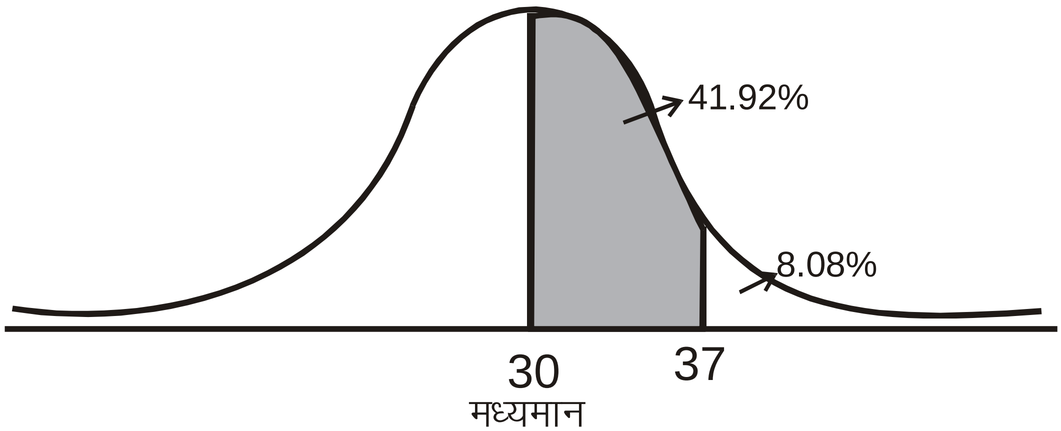


चित्र द्वारा स्पष्ट है कि 25 प्राप्तांक से मध्यमान 30 प्राप्तांक तक 34.13 प्रतिशत स्थित है तथा मध्यमान 30 प्राप्तांक से 35 प्राप्तांक तक भी 34.13 प्रतिशत स्थित है। प्रश्न में (i) प्राप्तांक 25 से 35 तक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत पूछा गया है, अतः दोनों प्रतिशत का योग 34.13+34.13=68.26 प्रतिशत उन व्यक्तियों का प्रतिशत है, जिनको 25 से 35 प्राप्तांक मिले हैं।

ii) 37 अंक से अधिक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा?

सर्वप्रथम मध्यमान 30 से 37 प्राप्तांक के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। मध्यमान 30 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले कुल 50 प्रतिशत व्यक्तियों में से 30 से 37 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले

प्रतिशत को घटाकर जो प्रतिशत प्राप्त होगा वह उन व्यक्तियों का प्रतिशत होगा, जिनको 37 से अधिक अंक प्राप्त



हुए हैं।

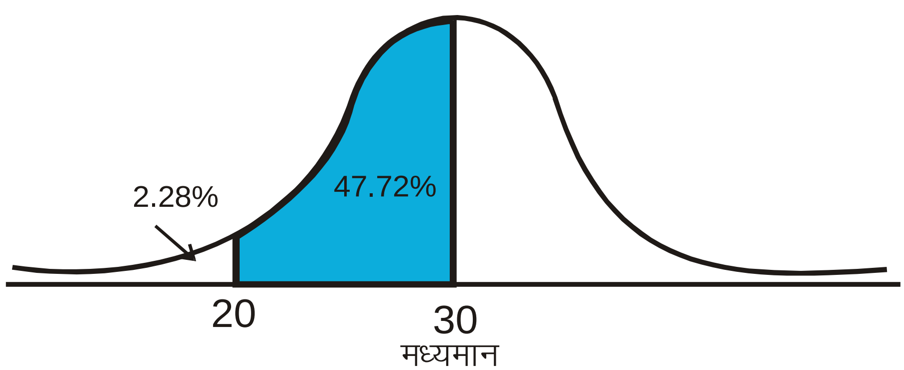
मध्यमान 30 से 37 प्राप्तांक की सिग्मा दूरी अथवा

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{X-M}{S.D.} = \frac{37-30}{5} = \frac{7}{5} = 1.40$$

सारणी I के आधार पर Z मूल्य 1.40 का प्रतिशत 41.92 प्रतिशत है। मध्यमान 30 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले कुल 50 प्रतिशत व्यक्तियों में से 30 से 37 अंक प्राप्त करने वाले 41.92 प्रतिशत घटाने पर (50-41.92=8.08प्रतिशत) शेष 8.08 प्रतिशत ऐसे व्यक्ति हैं, जिनको 37 अंक से अधिक अंक प्राप्त हुए हैं।

iii) 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा

सर्वप्रथम प्राप्तांक 20 से मध्यमान 30 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। तत्पश्चात मध्यमान 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले कुल 50 प्रतिशत व्यक्तियों में से प्राप्तांक 20 से मध्यमान 30 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों के प्रतिशत को घटा देंगे। शेष प्रतिशत उन व्यक्तियों का होगा, जिनको 20 अंक से कम अंक प्राप्त हुए हैं।



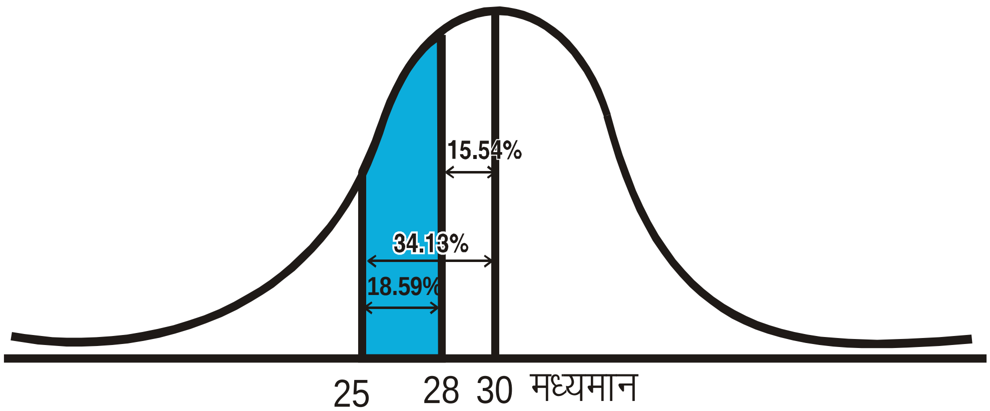
मध्यमान 30 से 20 प्राप्तांक की सिग्मा दूरी अथवा मूल्य

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{X-M}{S.D.} = \frac{20-30}{5} = \frac{-10}{5} = -2.00$$

सारणी A के आधार पर Z मूल्य 2.00 का प्रतिशत 47.72 है। मध्यमान 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले कुल 50 प्रतिशत व्यक्तियों में से 20 से 30 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले 47.72 प्रतिशत व्यक्तियों को घटाने पर (50-47.72) शेष 2.28 प्रतिशत ऐसे व्यक्ति हैं, जिनको 20 अंक से कम अंक प्राप्त हुए हैं।

iv) 25 से 28 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत बतायें-

सर्वप्रथम अंक 25 से मध्यमान 30 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे, तत्पश्चात अंक 28 से मध्यमान 30 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। अंक 25 से मध्यमान 30 के मध्य प्राप्त प्रतिशत में से अंक 28 से मध्यमान 30 के मध्य प्राप्त प्रतिशत को घटायेंगे। शेष प्राप्त प्रतिशत ही 25 से 28 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत होगां।



अंक 25 से मध्यमान 30 की सिग्मा दूरी अथवा

Z मूल्य = $\frac{X-M}{S.D.} = \frac{25-30}{5} = \frac{-5}{5}$ = -1.00

सारणी A के आधार पर Z मूल्य -1.00 का प्रतिशत 34.13 है। जबकि अंक 28 से मध्यमान 30 की सिग्मा दूरी अथवा

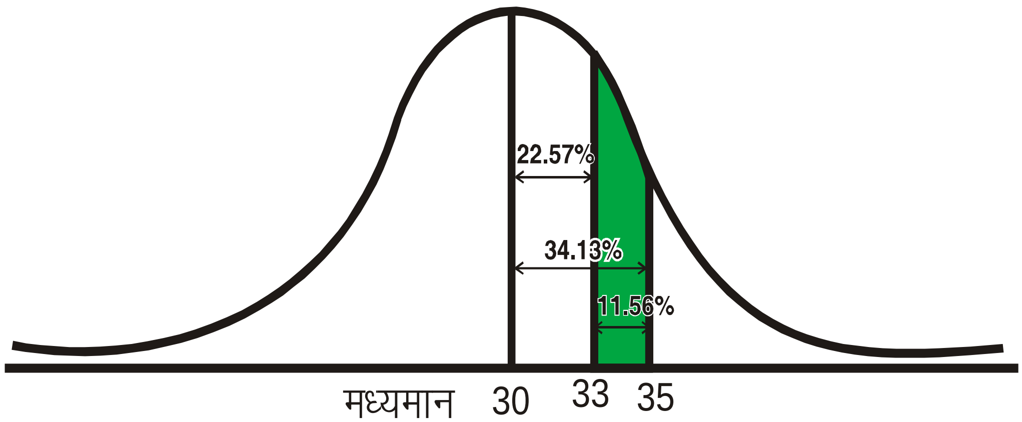
Z मूल्य = $\frac{X-M}{S.D.} = \frac{28-30}{5}$ = -0.40

सारणी A के आधार पर Z मूल्य -0.40 का प्रतिशत 15.54 है। अतः अंक 25 से 28 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों के प्रतिशत को ज्ञात करने के लिए अंक 25 से मध्यमान 30 के मध्य प्राप्त 34.13 प्रतिशत में से अंक 28 से मध्यमान 30 के मध्य प्राप्त 15.54 प्रतिशत को घटायेंगे (34.13-15.54), जो कि शेष 18.59 प्रतिशत प्राप्त हुआ। 18.59 प्रतिशत ही 25 से 28 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत है।

v) 33 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत क्या होगा

सर्वप्रथम मध्यमान 30 से 35 अंक के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। तत्पश्चात मध्यमान 30 से 33 अंक के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। मध्यमान 30 से 35 अंक के मध्य प्राप्त प्रतिशत में से मध्यमान 30 से 33 अंक के मध्य के प्रतिशत को घटाकर शेष प्राप्त प्रतिशत ही

33 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का होगा।



मध्यमान 30 से 35 अंक की सिग्मा दूरी अथवा

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{X-M}{S.D.} = \frac{35-30}{5} = \frac{5}{5} = 1.00$$

सारणी । के आधार पर Z मूल्य 1.00 का प्रतिशत 34.13 है। इसी प्रकार मध्यमान 30 से 33 अंक की सिग्मा दूरी अर्थात

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{X-M}{S.D.} = \frac{33-30}{5} = \frac{3}{5} = 0.60$$

सारणी A के आधार पर Z मूल्य 0.60 का प्रतिशत 22.57 है। अतः अंक 33 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों के प्रतिशत को ज्ञात करने के लिये मध्यमान 30 से 35 अंक के मध्य प्राप्त 34.13 प्रतिशत मे से मध्यमान 30 से 33 अंक के मध्य प्राप्त 22.57 प्रतिशत को घटाकर (34.13-22.57) शेष प्राप्त 11.56 प्रतिशत ही 33 से 35 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों का है।

अनुप्रयोग -2 (Application-2)

5.3.2 प्रतिशत सीमाओं के मध्य प्राप्तांक का निर्धारण-

किसी सामान्य वितरण में दिये गये प्रतिशत की प्राप्तांक सीमायें निर्धारित करना

To determine the score limits of given percentage in any normal distribution

उदाहरण-2 किसी सामान्य वितरण का मध्यमान 50 है तथा प्रामाणिक विचलन 7 है। बताइये कि-

i) मध्य के 60 प्रतिशत विद्यार्थियों की प्राप्तांक सीमा क्या होगी?

ii) मध्य के 75 प्रतिशत विद्यार्थियों की प्राप्तांक सीमा क्या होगी?

iii) श्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा क्या है?

iv) निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थियों की उच्चतम प्राप्तांक सीमा क्या हैं?

v) प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा क्या है?

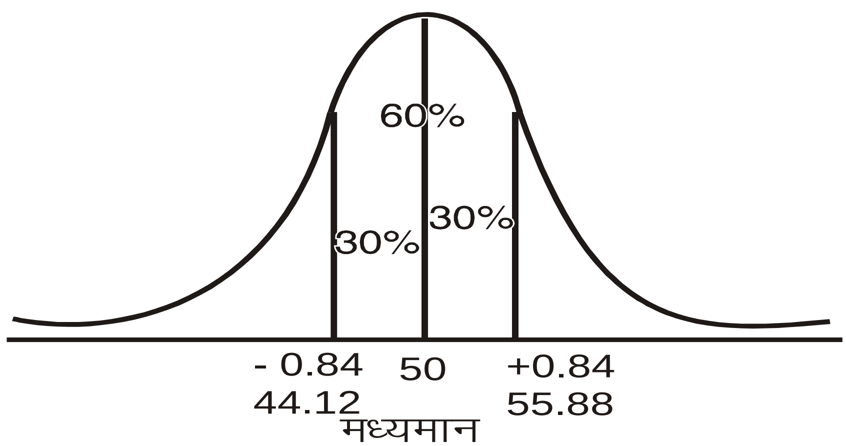
हल-

i) मध्य के 60 प्रतिशत विद्यार्थियों की प्राप्तांक सीमा क्या होगी?
सामान्य वितरण वक्र में मध्य के 60 प्रतिशत का अर्थ है मध्यमान बिन्दु के बांयी ओर 30 प्रतिशत तथा दांयी ओर शेष 30 प्रतिशत विद्यार्थी स्थित हैं।

सर्वप्रथम बांयी ओर के 30 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा ज्ञात करेंगे। मध्यमान बिन्दु से बांयी ओर के 30 प्रतिशत र्का मूल्य (मध्यमान से नीचे हाने के कारण ऋणात्मक होगा) सारणी A द्वारा ज्ञात किया गया जो कि -0.84 प्राप्त हुआ। मूल्य के आधार पर निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्तांक ज्ञात करते हैं-

प्राप्तांक = Z मूल्य × प्रामाणिक विचलन + मध्यमान

$x = z \times S.D. + Mean$



सूत्र में संख्यायें रखने पर-

$$x = -0.84 \times 7 + 50 = -5.88 + 50 = 44.12$$

मध्यमान बिन्दु के दांयी ओर 30 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा ज्ञात करने के उद्देश्य से सारणी A द्वार्रा Z मूल्य वही प्राप्त होता है, (सामान्य वितरण के कारण) किन्तु यर्ह Z मूल्य मध्यमान से अधिक दिशा का होने के कारण धनात्मक 0.84 प्राप्त होता है। सूत्र के आधार पर प्राप्तांक सीमा होगी-

$$x = 0.84 \times 7 + 50 = 5.88 + 50 = 55.88$$

अतः स्पष्ट है कि मध्य के 60 प्रतिशत विद्यार्थियों की प्राप्तांक सीमा 44.12 से 55.88 के मध्य स्थित है।

ii) मध्य के 75 प्रतिशत विद्यार्थियों की प्राप्तांक सीमा क्या होगी

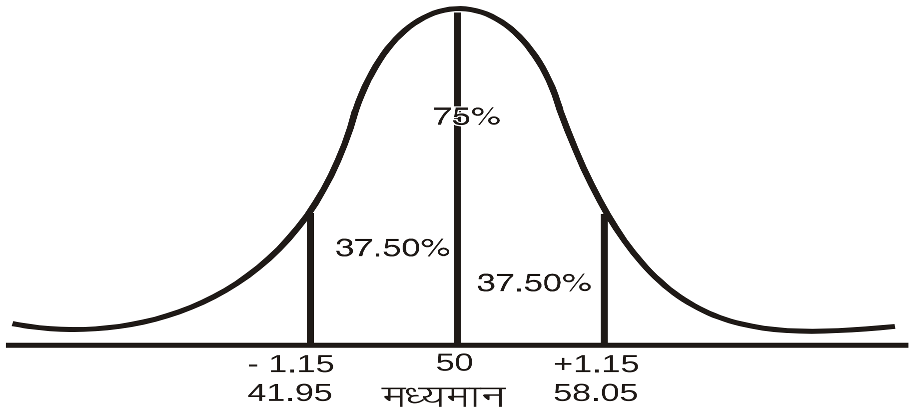
सामान्य वितरण वक्र में मध्य के 75 प्रतिशत का तात्पर्य है मध्यमान बिन्दु के नीचे (बांयी ओर) 37.50 प्रतिशत तथा मध्यमान बिन्दु के ऊपर (दांयी ओर) शेष 37.50 प्रतिशत विद्यार्थी स्थित हैं। 37.50 प्रतिशत र्का Z मूल्य सारणी । के आधार पर्र ±1.15 होता है, अतः प्राप्तांक सीमा इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

x = z × S.D. + Mean

x = -1.15 ×7+50 x = 1.15 × 7 + 50

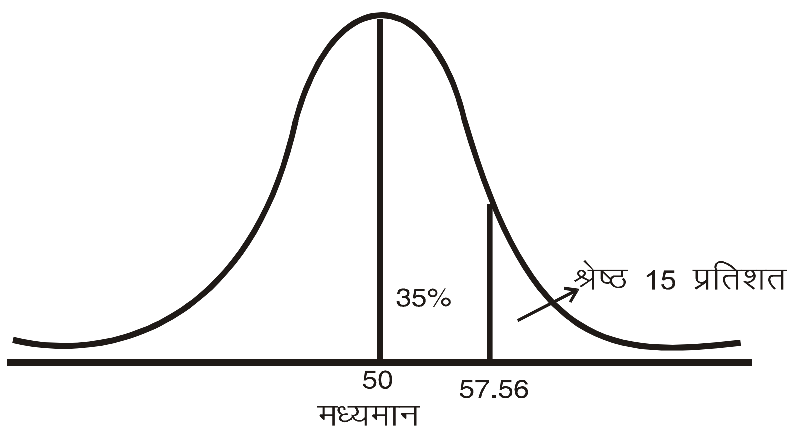
= - 8.05+50 = 8.05 + 50

= 41.95 = 58.05



iii) सर्वश्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा क्या होगी

श्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थी, मध्यमान बिन्दु के ऊपर दांयी ओर कुल 50 प्रतिशत के अन्तिम छोर पर स्थित होंगे, अतः शेष 35 प्रतिशत (50-15) की प्राप्तांक सीमा निर्धारित करेंगे, वही प्राप्तांक सीमा श्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा होगी। 35 प्रतिशत के आधार पर सारणी । के द्वारा प्राप्त Z मूल्य 1.08 को सूत्र में रखने पर-



X = Z×S.D. + Mean

X = 1.08 × 7 + 50

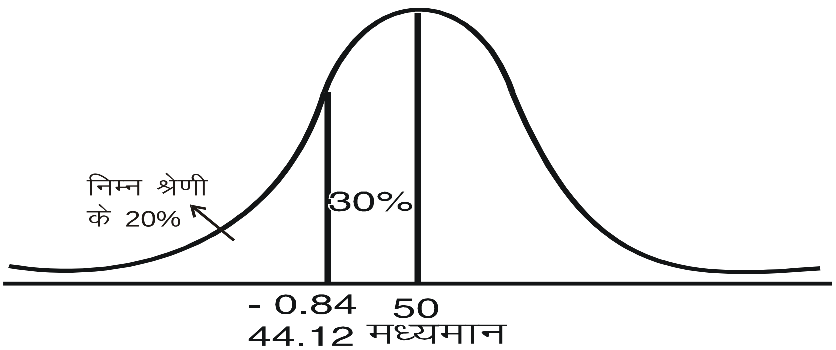
X = 7.56 +50

X = 57.56

अतः श्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा 57.56 है। प्राप्तांक 57.56 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले श्रेष्ठ 15 प्रतिशत विद्यार्थी हैं।

iv) निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थियों की उच्चतम प्राप्तांक सीमा क्या है

निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थी, मध्यमान बिन्दु के नीचे बायीं ओर के अन्तिम छोर पर स्थित होंगे, अतः शेष 30 प्रतिशत (50-30) की प्राप्तांक सीमा ज्ञात करेंगे जो कि निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थियों की उच्चतम प्राप्तांक सीमा होगी। 30 प्रतिशत के आधार पर सारणी A के द्वारा प्रार्प्त Z मूल्य - 0.84 को सूत्र में रखने पर



$X = Z \times S.D. + Mean$

$X = -0.84 \times 7 + 50$

$= -5.88 + 50$

$= 44.12$

अतः स्पष्ट है कि निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थियों की उच्चतम प्राप्तांक सीमा 44.12 हैं। प्राप्तांक 44.12 से कम अंक प्राप्त करने वाले निम्न श्रेणी के 20 प्रतिशत विद्यार्थी हैं।

v) प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा क्या है

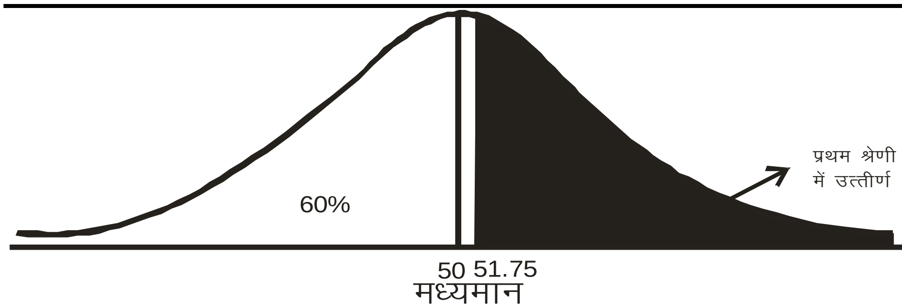
सामान्यतः प्रथम श्रेणी 60 प्रतिशत अंकों अथवा इससे अधिक अंकों पर मानी जाती है, अतः मध्यमान के बिन्दु से 10 प्रतिशत अधिक र्का Z मूल्य सारणी A द्वारा 0.25 ज्ञात किया गया। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा ज्ञात करेंगे।

$X = Z \times S.D. + Mean$

$X = 0.25 \times 7 + 50$

$= 1.75 + 50$

$= 51.75$



अतः प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की निम्नतम प्राप्तांक सीमा 51.75 है। 51.75 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थी हैं।

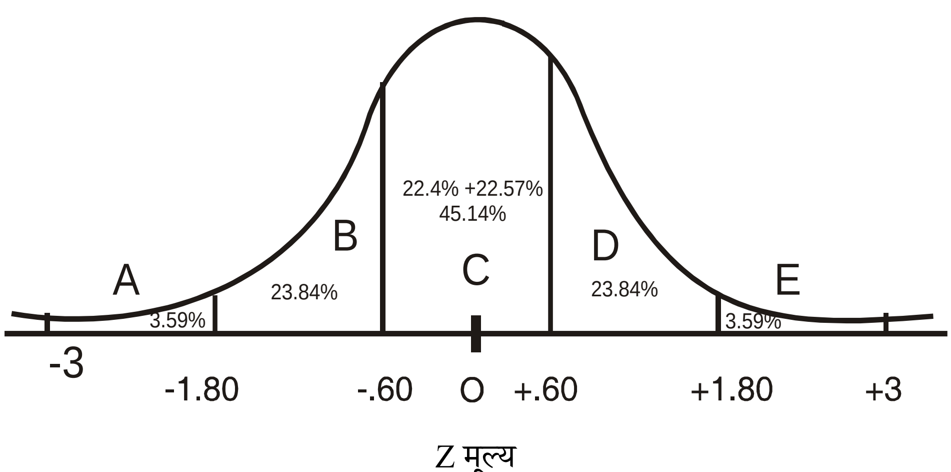
अनुप्रयोग-3 (Application -3)

5.3.3 समूह को विभिन्न उपसमूहों में विभाजित करना-

किसी सामान्य वितरण समूह को विभिन्न उपसमूहों में विभाजित करना (To divide a given normal distribution group into sub-groups)

उदाहरण-3 एक सामान्य वितरण समूह को पाँच उपसमूहों में विभक्त कीजिये। प्रत्येक उप समूह में स्थित प्रतिशत बताइये। यदि विद्यार्थियों की संख्या 500 है, तब बताइये प्रत्येक उप समूह में कितने विद्यार्थी स्थित हैं?

सामान्य वितरण वक्र का विस्तार -3 से +3 के मध्य प्रमुख रूप से होते हैं, अतः सामान्य वितरण वक्र का विस्तार 6 Z मूल्य (सिग्मा दूरी) माना जाता है। जितने उपसमूहों में सामान्य वितरण वक्र को विभाजित करना है, उस संख्या का भाग 6 में दिया जाता है ताकि प्रत्येक उपसमूह का समान विस्तार ज्ञात हो जाये। यदि हमें पाँच उपसमूहों में सामान्य वितरण को विभक्त करना है, तब प्रत्येक उप समूह का विस्तार 6/5 = 1.20 Z मूल्य का होगा। प्रत्येक उपसमूह का विस्तार 1.20 Z मूल्य निर्धारित करते हुए पाँच उपसमूह में सामान्य वितरण वक्र को विभक्त करते हैं।



उपसमूह A का विस्तार -3 से -1.80 तक (50 – 46.41%) 3.59%

उपसमूह B का विस्तार -1.80 से -0.60 तक (46.41–22.57) 23.84%

उपसमूह C का विस्तार-0.60 से +0.60 तक (22.57+22.57)	45.14%
उपसमूह D का विस्तार + 0.60 से +1.80 तक (46.41–22.57)	23.84%
उपसमूह E का विस्तार +1.80 से + 3.00 तक (50–46.41)	3.59%
कुल योग	100%

प्रथम उपसमूह । का विस्तार निर्धारित करने के लिये बांयी ओर -3 Z मूल्य से 1.20 Z मूल्य को घटाया गया (3-1.20) जो कि -1.80 प्राप्त हुआ। अतः प्रथम उपसमूह A का विस्तार -3 से -1.80 निर्धारित होता है। इसी प्रकार उपसमूह ठ का विस्तार -1.80 से - 0.60 (1.80-1.20) तक निर्धारित किया गया। उपसमूह B का विस्तार -0.60 से +0.60 तक निर्धारित किया गया। उपसमूह D का विस्तार +0.60 से +1.80 (0.60 +1.20) तक निर्धारित किया गया। उपसमूह E का विस्तार +1.80 से +3 तक निर्धारित हुआ। इस प्रकार प्रत्येक उपसमूह का विस्तार समान रूप से 1.20 Z मूल्य निर्धारित है।

प्रथम उपसमूह का प्रतिशत ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम-1.80 मूल्य का प्रतिशत सारणी A से ज्ञात किया गया जो कि 45.41 प्राप्त हुआ। इस प्रकार मध्यमान बिन्दु से बांयी ओर के Z मूल्य -1.80 का प्रतिशत 46.41 हैं, जबकि मध्यमान बिन्दु से बांयी ओर का कुल प्रतिशत 50 है अतः -3 से -1.80 का प्रतिशत 50-46.41=3.59 प्रतिशत प्राप्त हुआ। इसी प्रकार समूह ठ का प्रतिशत ज्ञात करते हैं। मूल्य -0.60 का प्रतिशत सारणी । द्वारा 22.57 प्रतिशत ज्ञात हुआ, अतः उपसमूह C का प्रतिशत ज्ञात करने के लिये मूल्य -1.80 के प्रतिशत 46.41 में से -0.60 Z मूल्य के प्रतिशत 22.57 को घटाकर (46.41-22.57) 23.84 प्रतिशत प्राप्त किया। उपसमूह B का प्रतिशत -0.60 Z मूल्य के प्रतिशत 22.57 तथा +0.60 मूल्य के प्रतिशत 22.57 का योग (22.57+22.57) कर 45.14 प्रतिशत निर्धारित किया गया। उपसमूह D का प्रतिशत उपसमूह ठ के समान ही (46.41-22.57) 23.84 प्रतिशत प्राप्त किया। इसी प्रकार उपसमूह E का प्रतिशत (50-46.41) 3.59 निर्धारित किया गया। यदि सभी उपसमूहों के निर्धारित प्रतिशत का योग किया जाये तब यह योग लगभग 100 प्राप्त होता है।

प्रत्येक उपसमूह का प्रतिशत निर्धारित होने के पश्चात निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्रत्येक उपसमूह में स्थित विद्यार्थियों की संख्या भी ज्ञात कर सकते हैं-

$$\text{विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{\text{उपसमूह का प्रतिशत} \times \text{कुल विद्यार्थियों की संख्या}}{100}$$

सूत्र के आधार पर -

$$\text{प्रथम उपसमूह A के विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{3.59 \times 500}{100} = 17.95 = 18$$

$$\text{द्वितीय उपसमूह B के विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{23.84 \times 500}{100} = 119.20 = 119$$

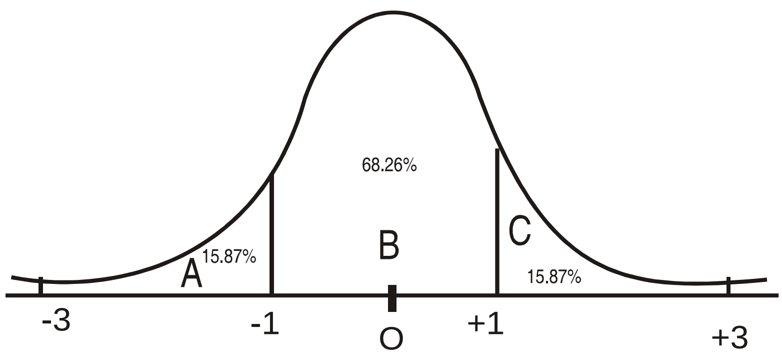
$$\text{तृतीय उपसमूह C के विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{23.84 \times 500}{100} = 225.70 = 226$$

चतुर्थ उपसमूह D के विद्यार्थियों की संख्या = $\frac{45.14 \times 500}{100}$ =119.20=119

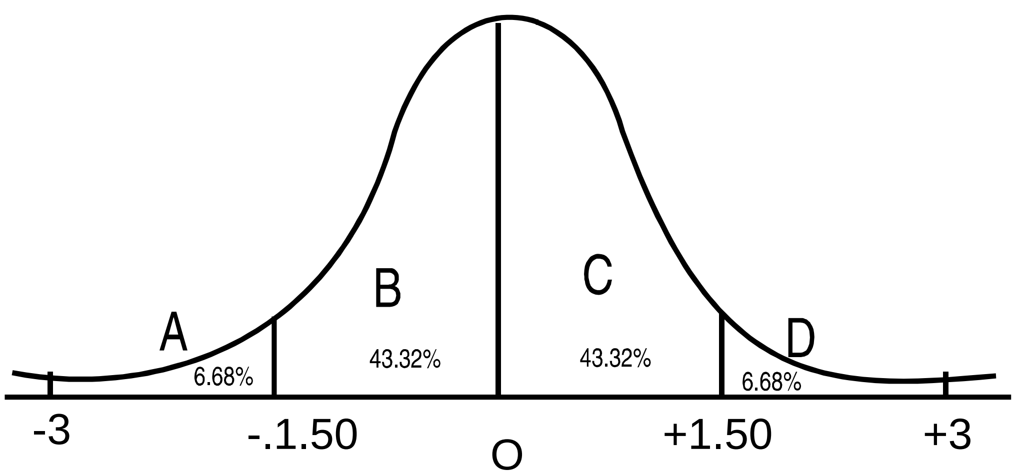
पंचम उपसमूह E के विद्यार्थियों की संख्या = $\frac{3.59 \times 500}{100}$ =17.95=18

इस प्रकार किसी सामान्य वितरण वक्र को विभिन्न उपसमूहों जैसे 3,4 व 6 उपसमूहों में विभाजित कर प्रत्येक उपसमूह में स्थित प्रतिशत निर्धारित कर सकते हैं। जैसे निम्नलिखित चित्र द्वारा स्पष्ट है-

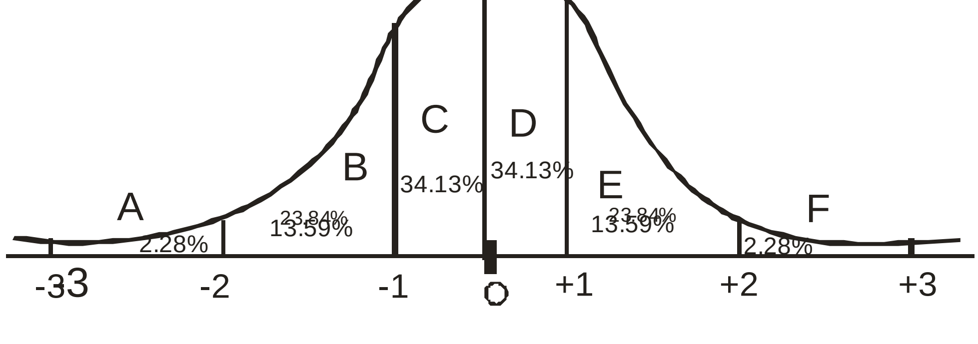
तीन उपसमूहों में विभक्त करना



चार उपसमूहों में विभक्त करना



छह उपसमूहों में विभक्त करना-



अनुपयोग-4 (Application -4)

5.3.4 दो सामान्य वितरणों के आच्छादन के सन्दर्भ में तुलना-

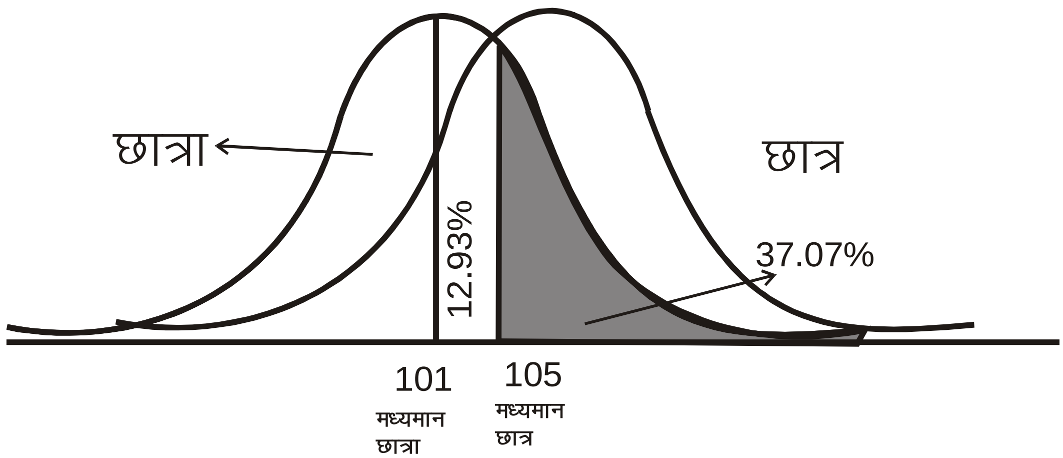
दो सामान्य वितरणों के आच्छादन के सन्दर्भ में तुलना करना (To compare two normal distributions in term of overlapping)

उदाहरण-4 छात्र तथा छात्राओं के समूह पर एक बुद्धि परीक्षण प्रशासित किया गया। छात्रों का मध्यमान 105 तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.)10 प्राप्त हुआ, जबकि छात्राओं का मध्यमान 101 तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.)12 प्राप्त हुआ। छात्र तथा छात्राओं के परिणामों को सामान्य वितरण के रूप में मानते हुए बताइये-

i) छात्रों के मध्यमान से कितने प्रतिशत छात्राओं के बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक अधिक हैं?

ii). छात्राओं के मध्यमान से कितने प्रतिशत छात्रो के बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक कम प्राप्त हुए हैं?

हल (i). सर्वप्रथम छात्राओं के मध्यमान तथा छात्रों के मध्यमान के मध्य स्थित प्रतिशत ज्ञात करेंगे। प्राप्त प्रतिशत के छात्राओं के मध्यमान बिन्दु के दांयी ओर के कुल 50 प्रतिशत में से घटाकर उन छात्राओं के प्रतिशत को ज्ञात कर सकते हैं जिनकी बुद्धि-लब्धि छात्रों के मध्यमान से अधिक है।



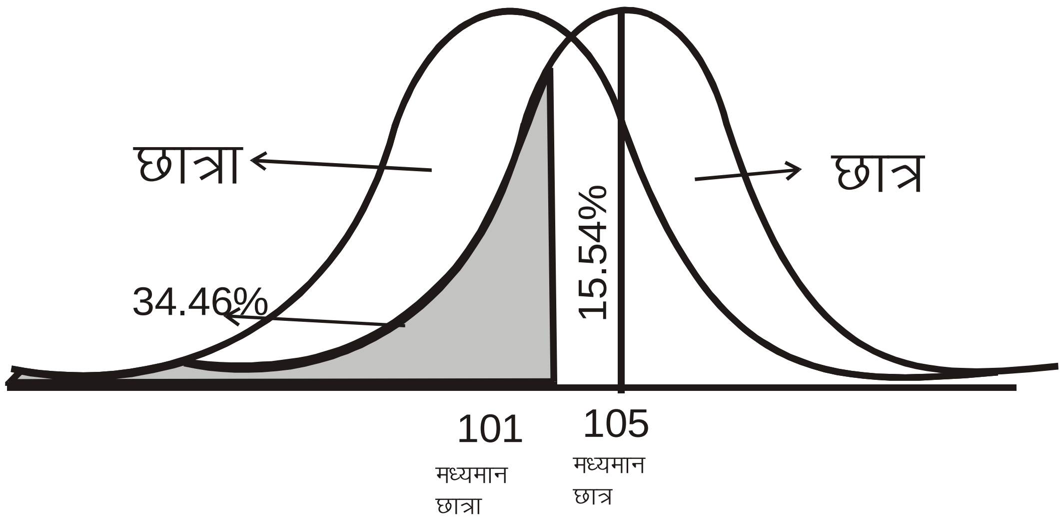
छात्राओं के मध्यमान से छात्रों के मध्यमान तक प्रतिशत ज्ञात करने के लिये Z मूल्य ज्ञात करेंगे-

$$\text{मूल्य} = \frac{X - M}{S.D.} = \frac{105 - 101}{12} = \frac{4}{12} = .33$$

0.33 मूल्य के आधार पर सारणी A का निरीक्षण करने से स्पष्ट होता है कि छात्राओं के मध्यमान से छात्रों के मध्यमान तक 12.93 प्रतिशत छात्रायें स्थित हैं, अतः छात्रों के मध्यमान से अधिक कुल (50-12.93) 37.07 प्रतिशत छात्रायें स्थित हैं।

ii) छात्राओं के मध्यमान से कितने प्रतिशत छात्रों को बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक कम प्राप्त हुए हैं

सर्वप्रथम छात्रों के मध्यमान से छात्राओं के मध्यमान के मध्य स्थित छात्रों का प्रतिशत ज्ञात करेंगे। बांयी ओर के छात्रों के कुल 50 प्रतिशत में से प्राप्त प्रतिशत को घटाकर उन छात्रों के प्रतिशत को ज्ञात कर सकते हैं, जिनकी बुद्धि-लब्धि छात्राओं के मध्यमान से कम है।



छात्रों के मध्यमान से छात्राओं के मध्यमान तक बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक रखने वाले छात्रों का प्रतिशत होगा-

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{X - M}{S.D.} = \frac{101 \times 105}{10} = \frac{-4}{10} = -0.40$$

-0.40 Z मूल्य के आधार पर सारणी A का निरीक्षण करने से स्पष्ट होता है कि छात्रों के मध्यमान तथा छात्राओं के मध्यमान के मध्य 15.54 प्रतिशत छात्र स्थित हैं, अतः छात्राओं के मध्यमान से कम बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक रखने वाले छात्र (50-15.54) 34.46 प्रतिशत हैं।

अनुप्रयोग -5 (Application-5)

5.3.5 मनोवैज्ञानिक परीक्षण के पदों के कठिनाई स्तर का निर्धारण-

मनोवैज्ञानिक परीक्षण के पदों की सापेक्षिक कठिनाई स्तर का निर्धारण करना (To determine the relative item difficulty level of psychological test)

उदाहरण-5 डिग्री कालेज के बी0ए0 प्रथम वर्ष के विद्यार्थियों पर बुद्धि परीक्षण प्रशासित किया गया। परीक्षण के प्रथम पद को 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने, द्वितीय पद 33 प्रतिशत विद्यार्थियों ने तथा तृतीय पद को 20 प्रतिशत विद्यार्थियों द्वारा हल किया गया। सामान्य वितरण मानते हुए प्रत्येक पद का कठिनता स्तर ज्ञात कीजिये। चतुर्थ पद कितने प्रतिशत विद्यार्थी हल कर पायेंगे, जबकि चतुर्थ पद तृतीय पद से उतना ही कठिन हैं, जितना कि द्वितीय पद प्रथम पद की अपेक्षा कठिन है।

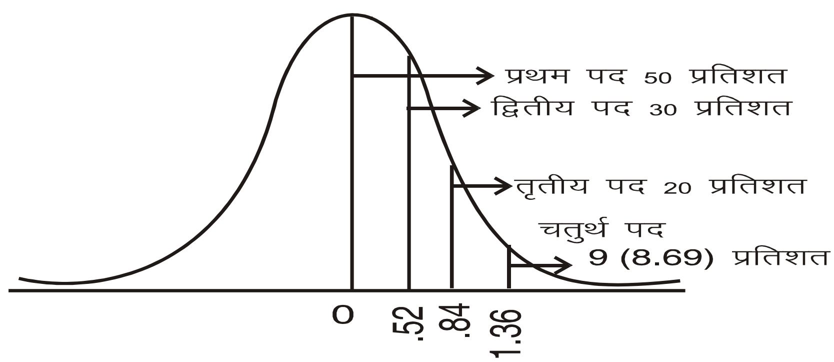
हल- प्रथम पद को 50 प्रतिशत विद्यार्थी हल कर पाते हैं, जबकि 50 प्रतिशत हल नहीं कर पाते हैं, अतः इस प्रकार के पद का कठिनता स्तर (50-50) शून्य माना जाता है।

द्वितीय पद को 30 प्रतिशत विद्यार्थी हल कर पाते हैं, जबकि मध्यमान से शेष 20 प्रतिशत (50-30) विद्यार्थी, हल नहीं कर पाते हैं। अतः 20 प्रतिशत का Z मूल्य 0.52 (सारणी A के आधार पर) द्वितीय पद का कठिनता स्तर है।

तृतीय पद को 20 प्रतिशत विद्यार्थी हल कर पाते हैं, जबकि मध्यमान से शेष 30 प्रतिशत (50-20) विद्यार्थी असफल रहे। अतः 30 प्रतिशत का Z मूल्य 0.84 तृतीय पद का कठिनता स्तर है।

चतुर्थ पद तृतीय पद से उतना ही कठिन है जितना कि द्वितीय पद प्रथम पद की अपेक्षा कठिन है। इस आधार पर द्वितीय पद प्रथम पद की अपेक्षा 0.52 अधिक कठिन है, अतः चतुर्थ पद का कठिनता स्तर तृतीय पद के कठिनता स्तर 0.84 से 0.52 अधिक कठिन है, इस प्रकार चतुर्थ पद का कठिनता स्तर (0.84+0.52) 1.36 Z मूल्य के रूप में प्राप्त होता है। Z मूल्य 1.36 के आधार पर सारणी A द्वारा निरीक्षण करने से स्पष्ट है कि चतुर्थ पद को केवल 8.69 प्रतिशत विद्यार्थी ही हल कर पाते हैं (50-41.31 =8.69 प्रतिशत)।

पद संख्या	हल किये गये विद्यार्थियों का प्रतिशत	कठिनता स्तर	अन्तर
प्रथम पद	50	0	0.52
द्वितीय पद	30	0.52	
तृतीय पद	20	0.84	0.52
चतुर्थ पद	9(8.69%)	1.36	



5.5 सारांश

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के आधार पर अनेक व्यावहारिक समस्याओं का समाधान भी किया जाता है। सामान्य सम्भाव्यता वक्र के द्वारा कुछ प्रमुख अनुप्रयोग हैं- प्राप्तांक सीमाओं के मध्य प्रतिशत का निर्धारण, प्रतिशत सीमाओं के मध्य प्राप्तांक का निर्धारण, समूह को विभिन्न उप समूहों में विभक्त करना, सामान्य वितरणों के आच्छादन के सन्दर्भ में तुलना तथा मनोविज्ञान परीक्षण के पदों के कठिनाई स्तर का निर्धारण करना आदि प्रमुख हैं।

5.6 शब्दावली

- **जेड मूल्य (Z value):** Z अंक एक मानक अंक है जो कि प्राप्तांक वितरण के औसत से विचलन (ऊपर अथवा नीचे) को प्रदर्शित करता है। इसका सूत्र है-

$$z = \frac{X - M}{\sigma} = \frac{\text{प्राप्तांक} - \text{मध्य मान}}{\text{प्रामाणिक विचलन}}$$

- **आच्छादन (Overlapping):** यदि दो सामान्य वितरण वक्र हैं तथा मध्यमान में कुछ अन्तर है तब ऐसी स्थिति में एक सामान्य वितरण वक्र दूसरे सामान्य वितरण वक्र को थोड़ा ढक लेता है। इसे ही आच्छादन कहते हैं।
- **मनोविज्ञानिक परीक्षण का कठिनाई स्तर:** एक मनोवैज्ञानिक परीक्षण निर्मित करते समय परीक्षण के प्रत्येक पद के कठिनता स्तर की गणना की जाती है। पद की कठिनाई स्तर से तात्पर्य व्यक्तियों के उस अनुपात अथवा प्रतिशत से होता है जो किसी पद का उत्तर सही दे पाते हैं। इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग कर सकते हैं-

$$\text{पद का कठिनाई स्तर प्रतिशत} = \frac{\text{सही उत्तर देने वाले व्यक्तियों की संख्या} \times 100}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

5.7 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) एक दिये हुए वितरण का मध्यमान 16 तथा प्रामाणिक विचलन 4 है। यदि वितरण को सामान्य मान लिया जाये तो बताइये कि 12 तथा 20 की सीमा में कितने प्रतिशत प्राप्तांक हैं एवं 18 से ऊपर तथा 8 से नीचे कितने प्रतिशत प्राप्तांक हैं।
2) सामान्य वितरण मानते हुए मध्यमान =10, σ या मानक विचलन =5

   निम्नलिखित सीमाओं के बीच पड़ने वाली स्थितियाँ ज्ञात कीजिये-

   अ) 5 तथा 15 ब) 10 तथा 20 स) 15 तथा 25
3) एक परीक्षण के 500 विद्यार्थियों को सामान्य सम्भाव्यता के आधार पर पाँच श्रेणियों में विभाजित कीजिये। प्रत्येक श्रेणी में कितने परीक्षार्थियों के आने की सम्भावना है?
4) यदि 1000 प्रयोज्यों को सामान्य सम्भाव्यता की अवधारणा पर 5 श्रेणियों A,B,C,D तथा E में विभक्त किया जाये तो बताइये कि प्रत्येक श्रेणी में कितने प्रयोज्य आयेंगे।
5) सामान्यीकृत आवृत्ति से आप क्या समझते हैं? निम्नलिखित आवृत्ति वितरण को सामान्यीकृत आवृत्ति वितरण में परिवर्तित कीजिये-

वर्गान्तर (C.I.)	आवृत्ति (f)
45.50	4
40.45	12

35.40	25
30.35	41
25.30	22
20.25	10
15.20	3
10.15	2

6) सामान्य वितरण पर आधारित 500 विद्यार्थियों के समूह का मध्यमान 40 तथा प्रामाणिक विचलन 8 है, बताइये-

i) प्राप्तांक 25 से 35 के मध्य विद्यार्थियों की संख्या

ii) समान योग्यता विस्तार के आधार पर यदि समूह को 6 उपसमूहों में विभक्त करें तब प्रत्येक उपसमूह में स्थित विद्यार्थियों की संख्या बताइये।

7) यदि मान लिया जाये कि जनसंख्या में स्थित बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक सामान्य वितरण के अनुरूप हैं तथा मध्यमान 100 व प्रामाणिक विचलन 15 है, तब निम्नलिखित बुद्धि-लब्धि वाले व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात कीजिये-

a) 130 से अधिक (Above130) b) 125 से अधिक (Above125)

c) 85 से कम (Below 85) d) 72 से कम (Below 72)

e) 110 से 115 के मध्य (Between 110 and 115)

8) दो कक्षा समूह द्वारा निम्नलिखित परीक्षण प्राप्तांक ज्ञात हुए। सामान्य वितरण के आधार पर बतायें कि-

i) कक्षा 9 के कितने विद्यार्थी, कक्षा 10 के मध्यमान की अपेक्षा अधिक अंक प्राप्त करेंगे?

ii) कक्षा 10 के कितने विद्यार्थी कक्षा 9 के मध्यमान की अपेक्षा कम अंक प्राप्त करेंगे?

समूह (Groups)	Class 9	Class 10
मध्यमान (Mean)	48	56
प्रामाणिक विचलन (SD)	8	12
N	500	800

9) किसी सामान्य ज्ञान परीक्षण में सामान्य वितरण के अन्तर्गत मध्यमान 100 तथा प्रामाणिक विचलन 20 है।

i) 85 तथा 120 के मध्य कितने प्रतिशत प्राप्तांक हैं?

ii) मध्य के 65 प्रतिशत, 70 प्रतिशत, 75 प्रतिशत, 80 प्रतिशत किन प्राप्तांकों के मध्य स्थिति हैं?

10) किसी समूह के क्रमशः A,B,C,D चार समस्याओं को 20 प्रतिशत, 32 प्रतिशत, 44 प्रतिशत, 50 प्रतिशत ने हल किया। समस्या A तथा B समस्या C तथा D के मध्य कठिनाई के अन्तर की तुलना कीजिये।
11) एक प्रसामान्य वितरण में मध्यमान (Mean)18 तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.) 4 हो तो प्राप्तांक 10 के नीचे कितने प्रतिशत होंगे?
12) किसी वितरण से सम्बन्धित सूचनायें निम्नलिखित हैं-

मध्यमान (Mean) = 11.35

प्रामाणिक विचलन (S.D.) = 3.03

N = 120

वितरण में प्रसामान्यता की कल्पना करते हुए यह बतायइे कि प्राप्तांक 9 तथा प्राप्तांक 17 के बीच कितने प्रतिशत केसेज पड़ते हैं।

13) किसी सामान्य वितरण का मध्यमान 16 है तथा प्रामाणिक विचलन 4 है। यह बताइये कि मध्य के 75 प्रतिशत केसेज किन सीमाओं के बीच होंगे?
14) 500 छात्रों को एक परीक्षण के प्राप्तांकों के आधार पर चार वर्गों में विभाजित करना है। सामान्य वितरण के आधार पर प्रत्येक वर्ग में कितने छात्र आयेंगे?
15) बुद्धि-लब्धि प्राप्तांक सामान्य वितरण के अनुरूप हैं तथा मध्यमान 100 व प्रामाणिक विचलन 10 है, तब निम्नलिखित बुद्धिलब्धि वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत बताइये-

(a) 120 से अधिक (Above120)

(b) 90 से कम (Below 90)

उत्तर: 1. 12 तथा 20 की सीमा में 68.26 प्रतिशत

18 प्राप्तांक से ऊपर 30.85 प्रतिशत

8 प्राप्तांक से नीचे 2.28 प्रतिशत

2. अ) 68.26 प्रतिशत ब) 47.72 प्रतिशत स) 15.73 प्रतिशत (49.86-34.13)

3. उपसमूह A=18, B=119, C=226, D=119, E=18

4. उपसमूह A=36, B=238, C=452, D=238, E=36

5.

वर्गान्तर (C.I.))	निरीक्षित आवृत्ति	सामन्यीकृत आवृत्ति
55.50	1	1
45.50	4	4
40.45	12	13

35.40	25	27
30.35	41	33
25.30	22	26
20.25	10	12
15.20	3	3
10.15	2	1
	N=120	N=120

6. **अ)** प्राप्तांक 25 से 35 के मध्य 23.75 प्रतिशत (46.99-23.24) अतः विद्यार्थियों की संख्या 119
ब) उपसमूह A=11, B=68, C=171, D=171, E=68, F=11

7. a) 2.28 प्रतिशत (50-47.72)

   b) 4.75 प्रतिशत (50-45.25)

   c) 15.87 प्रतिशत (40-34.13)

   d) 3.07 प्रतिशत (50-46.93)

   e) 9.27 प्रतिशत (34.13-24.86)

8. i) 15.87 प्रतिशत (विद्यार्थियों की संख्या 79)

   ii) 20.15 प्रतिशत (विद्यार्थियों की संख्या 201)

9. i) 61.47 (34.13+27.34)

   ii) मध्य के 65 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा 81.40 से 118.60

   मध्य के 70 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा 79.20 से 120.80

   मध्य के 75 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा 77.00 से 123.00

   मध्य के 80 प्रतिशत की प्राप्तांक सीमा 74.40 से 125.60

10.

समस्या	हल किये गये विद्यार्थियों का प्रतिशत	कठिनता स्तर
A	20%	0.84
B	32%	0.47
C	44%	0.15
D	50%	0

11 2.28 प्रतिशत (50-47.72)

12. 75.09 प्रतिशत (28.23+46.86)

13. प्राप्तांक सीमा 11.40 से 20.60

14. उपसमूह A=33, B=217, C=217, D=33

15. (a) 2.28% (b) 15.87%

5.8 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (2009) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई (उ0प्र0)
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (2009) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-2
- कपिल, एच.के. (2005) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-2
- गुप्ता, एस.पी. (2003) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ0प्र0)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (1994) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-4
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (1997) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ0प्र0)
- Aggrawal, Y.P. (1986), *Statistical Methods- concept application and computation,* Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur(Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), *Statistics for Psychology*. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) *Basic Statistical Concepts*. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi
- Garrett, Henry E. (1981)) *Statistics in Psychology and Education*. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) *Fundamental Statistics for students of psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.

5.9 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सामान्य सम्भाव्यता वक्र के विभिन्न अनुप्रयोगों का वर्णन करें।
2. सम्भाव्यता के अन्तर्गत सामान्य सम्भाव्यता वक्र के महत्व को स्पष्ट करें।
3. सामान्य सम्भाव्यता वक्र से आप क्या समझते हैं? सामान्य सम्भाव्यता की उपयोगिता का वर्णन करें।

Table -A

सामान्य सम्भाव्यता वक्र में क्षेत्रफल

(AREA UNDER NORMAL PROBABILITY CURVE)

इस तालिका की सहायता से सामान्य वितरण में M तथा SD के अन्तर्गत आने वाले केसेज को ज्ञात किया जाता है, जैसे M तथा 1.47SD के मध्य निम्न तालिका के अनुसार 42.92% केसेज हैं। सिगमा दूरी (SD-Distance)को Z-Score भी कहते हैं।

(कुल क्षेत्र 10000 संख्याओं के आधार पर)

X/SD	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852

0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3290	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4383	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4599	4608	4616	4625	4633	4639
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767

2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4872	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4878	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4906	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4929	4948	4949	4951	4952
2.6	4853	4955	4956	4957	4959	4946	4961	4962	4962	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4960	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4986.9	4987.4	4987.8	4988.2	4988.6	4988.9	4989.3	4989.7	4990.0
3.1	4990.3	4990.6	4991.0	4991.3	4991.6	4991.8	4992.1	4992.4	4992.4	4992.91
3.5	4997.674									

4.0	4999.683									
5.5	4999.966									
5.0	4999.997 133									

Table B

सामान्य प्रायिकता वक्र की कोटियाँ (Ordinates of the Normal Probablity Curve)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1986	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1331	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127

1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0983	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0809
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0056	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0395	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0174	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0055	.0053	.0051	.0050	.0078	.0047
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.5	.00087									
4.0	.00013									
4.5	.000016									
5.0	.0000015									

इकाई-6 सामान्यता से विचलन- विषमता एवम ककुदता (Deviation from normality- Skewness and Kurtosis)

इकाई सरंचना

6.1 प्रस्तावना
6.2 उद्देश्य
6.3 असामान्य वितरण
6.4 असामान्य वितरण के प्रकार
6.4.1 विषमता
6.4.2 ककुदता
6.5 सारांश
6.6 शब्दावली
6.7 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
6.8 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
6.9 निबन्धात्मक प्रश्न

6.1 प्रस्तावना

इससे पूर्व आप ने सामान्य सम्भाव्यता वक्र के आधार पर उसके अनेक अनुप्रयोगों को समझा था। सामान्य सम्भाव्यता वितरण एक सैद्धान्तिक कल्पना है जिसके आधार पर विभिन्न प्रकार के उपयोग सम्भव हैं जिसे विभिन्न उदाहरणों एवं चित्रों के आधार पर आप ने विभिन्न व्यावहारिक समस्याओं का समाधान किया था।

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के आधार पर उसके उपयोग तब ही सम्भव हैं जबकि पूर्ण सन्तुलित सामान्य वितरण वक्र निर्मित हो। सामान्य वितरण वक्र के फैलाव एवं उसकी निश्चित ऊँचाई में यदि थोड़ा भी अन्तर होगा तब उसे असामान्य वितरण मानते हैं।

असामान्य वितरण में प्रमुख रूप से दो प्रकार होते हैं- प्रथम- सामान्य वितरण के फैलाव में यदि अन्तर है तब उसे विषमता कहा जाता है। द्वितीय- सामान्य वितरण की ऊँचाई में यदि अन्तर है तब उसे ककुदता कहा जाता है। इस इकाई में असामान्य वितरण के इन्हीं दो प्रकार विषमता तथा ककुदता को विस्तार से आप को समझाया जायेगा।

6.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप-

- सामान्य सम्भाव्यता वक्र की निहित विशेषताओं को नहीं रखने वाले असामान्य वितरण को समझ सकते हो।
- असामान्य वितरण के प्रथम प्रकार विषमता का अर्थ तथा उसके दो प्रमुख प्रकार धनात्मक विषमता व ऋणात्मक विषमता को समझ सकते हो।

- इसी प्रकार असामान्य वितरण के द्वितीय प्रकार ककुदता के अर्थ तथा उसके विभिन्न रूपों का अध्ययन कर सकते हो।
- असामान्य वितरण की विषमता को दूर कर सामान्य वितरण किस प्रकार बनाया जा सकता है यह विधि भी आप समझ सकते हो।

6.3 असामान्य वितरण

सामान्य सम्भाव्यता वक्र एक सैद्धान्तिक कल्पना है जिसके कारण उसके वितरण का फैलाव एवं उसकी ऊँचाई पूर्णतः निश्चित है। इसी कारण से विचलन के विभिन्न मापकों के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होता है। सामान्यतः प्राप्त आँकड़ों के आधार पर निर्मित वक्र सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुरूप प्राप्त नहीं होता है, उसमें सामान्य सम्भाव्यता वक्र की तुलना में असामान्यता निहित होती है, ऐसे वितरण को असामान्यता वितरण कहा जाता है।

वितरण के फैलाव में यदि अन्तर है तब उसे वितरण की विषमता कहा जाता है जबकि सामान्य वितरण की ऊँचाई में अन्तर है तब उसे ककुदता कहा जाता है।

6.4 असामान्य वितरण के प्रकार

उपर्युक्त तथ्य के आधार पर असामान्य वितरण के दो प्रमुख प्रकार हैं-

(i) विषमता (ii) ककुदता

6.4.1 विषमता

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अन्तर्गत केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों माप-मध्यमान, मध्यांक एवं बहुलांक का मान एक समान होता है, किन्तु यदि इनका मान अलग-अलग हो, तब ऐसी स्थिति में वक्र सममित (Symmetrical) नहीं होता है तथा उसमें विषमता (Skewness) दृष्टिगत होती है, इसे ही विषमता कहा जाता है। (The word skewed means lacking symmetry or distorted.) M.W. Tate 1965. इसी प्रकार गैरिट के अनुसार ''वह वितरण विषम कहा जाता है, जिसमें मध्यमान तथा मध्यांक वितरण के विभिन्न बिन्दुओं पर स्थित हों तथा उनका सन्तुलन (या घनत्व का केन्द्र) एक ओर से दूसरी ओर-बायें या दायें परिवर्तित हो जाता है।''

A distribution is said to be skewed when the mean and the median fall at different point in the distributions and the balance (or centre of gravity) is shifted to one side or the other to left or right.) H.E.Garrett (1967)

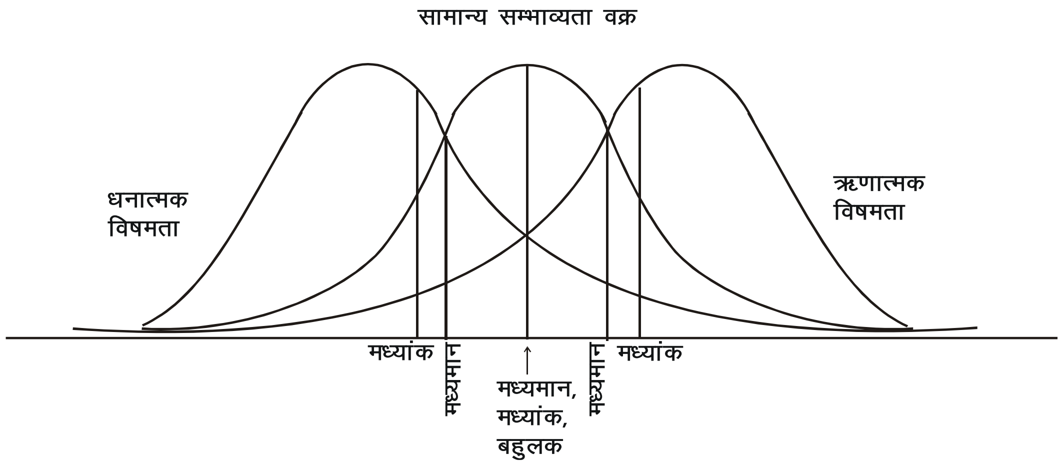
इस प्रकार विषमता के अन्तर्गत आवृत्ति वितरण का फैलाव एक दिशा अथवा दूसरी दिशा में विकृत (Twisted) होता है जिससे कि इसका एक भाग दूसरे भाग की अपेक्षा बहुलांक से अधिक दूर फैल जाता है।

(Skewness is the extent to which a frequency curve is twisted to one side or other, so that it extends farther to one side of the mode than the other.) English and English

वक्र में स्थित बायीं व दांयी ओर की विषमता के आधार पर विषमता दो प्रकार की होती है-

1. धनात्मक विषमता (Positive Skewness)
2. ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness0

यदि वितरण के प्राप्तांक मध्यमान से बायीं ओर अधिक वितरित हों तब धनात्मक विषमता (Positive Skewness) मानी जाती है। इसके विपरीत यदि मध्यमान से दायीं ओर अधिक प्राप्तांक वितरित हों तब ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) होती है।



धनात्मक विषमता के अन्तर्गत मध्यमान का मान मध्यांक (Median) से अधिक होता है, जबकि ऋणात्मक विषमता के अन्तर्गत मध्यमान का मान मध्यांक की अपेक्षा कम होता है। मध्यमान तथा मध्यांक (Median) के मान में जितना अधिक अन्तर होता है, वक्र विषमता की मात्रा उतनी ही अधिक होती है। निम्नलिखित सूत्र द्वारा वितरण की विषमता ज्ञात कर सकते हैं-

विषमता (Skewness) = $\frac{3(\text{मध्य मान} - \text{मध्यांक})}{\text{प्रामाणिक विचलन}}$ Sk = $\frac{3(M - Md)}{\sigma}$ इसी प्रकार निम्नलिखित सूत्रों द्वारा भी विषमता (Skewness) ज्ञात की जा सकती है-

विषमता $Sk = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Median}{Q_3 - Q_1}$

जबकि Q_3 व Q_1 चतुर्थांक तीन व चतुर्थांक एक

अथवा, विषमता $Sk = \frac{P_{90} + P_{10}}{2} - P_{50}$

जबकि P = Percentile शतांशीय मान

उपर्युक्त विषमता ज्ञात करने की विधियों द्वारा प्राप्त विषमता की मात्रा में अन्तर आता है। इसका कारण भिन्न-भिन्न सन्दर्भ बिन्दुओं का है। प्रथम विधि में गणना का आधार मध्यमान व मध्यांक (Median) है, जबकि दूसरी व तीसरी विधि में गणना का आधार मध्यांक अथवा शतांशीय मान 50 (P_{50}) है। यदि दो अथवा अधिक वितरणों की विषमता के मध्य पारस्परिक तुलना करनी हो तब एक ही विधि द्वारा गणना करना अधिक उपयुक्त होता है।

विषमता वितरण का सामान्यीकरण (Normalization of Skewed Distribution) -

प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग केवल वहीं किया जा सकता है, जबकि प्राप्त आँकड़ों का स्वरूप सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुरूप प्राप्त होता है। यदि आँकड़ों का स्वरूप सामान्य वितरण के अनुरूप नहीं है तथा उसके वितरण के स्वरूप में विषमता है, तब प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग उपयुक्त नहीं होता है। वितरण के स्वरूप में विषमता होने पर अनुसन्धानकर्त्ता के लिए अप्राचालिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग करना उपयुक्त होता है। यदि अनुसन्धानकर्त्ता यह अपेक्षा रखता है कि अनुसन्धान की परिकल्पनाओं की जाँच प्राचलिक सांख्यिकी विधियों द्वारा की जायें, तब ऐसी स्थिति में प्राप्त आँकड़ों के वितरण का सामान्यीकरण करना आवश्यक होता है। वितरण में स्थित विषमता का सामान्यीकरण करने अर्थात् सामान्य वितरण का आसंजन (Fitting of Normal Distribution) करने के पश्चात वांछित प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग करना उपयुक्त होता है।

विषमता वितरण का सामान्यीकरण निम्नलिखित दो विधियों द्वारा किया जा सकता है-

a. कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method) b. क्षेत्रफल विधि (Area Method)

a) कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method)-

कोटि अक्ष विधि से निम्नलिखित चरणों द्वारा विषमता प्राप्त वितरण (Skewed Distribution) को सामान्य वितरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

1. सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण का मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन ज्ञात करना।
2. प्रत्येक वर्गान्तर के मध्य बिन्दु (Mixed Point X) तथा मध्यमान के अन्तर में प्रामाणिक विचलन (S.D.)का भाग देकर्र Z मूल्य ज्ञात करना $\left(\frac{X-M}{\sigma}\right)$।
3. प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य के आधार पर तालिका द्वारा कोटि अक्ष (Ordinate y) y का मूल्य ज्ञात करना।
4. प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करना।

$$\frac{\text{वर्ग अन्तराल} \times \text{आवृत्तियों का कुल योग} \times y \text{ मूल}}{\text{प्रामाणिक विचलन}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{i \times N \times y}{S.D.}$$

उदाहरण-1 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के आधार पर कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method) द्वारा वितरण में स्थित विषमता का सामान्यीकरण कीजिये-

वर्गान्तर (C.I.)	आवृत्ति (f)
45 -50	1
40 - 45	5
35 -40	11
30 -35	23
25- 30	36
20 – 25	20

15 – 20	8
10 – 15	4
5 -10	2
	N= 110

सर्वप्रथम उपर्युक्त आवृत्ति वितरण का मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.) ज्ञात करेंगे।

C.I.	f	d	fd (fd×d)	fd^2	X (Midpoint)	Z	Y आवृत्ति	सामान्यीकृत
45-50	1	+4	4	16	47	2.62	0.129	0.94=01
40-45	5	+3	15	45	42	1.95	0.596	4.37=04
35-40	11	+2	22	44	37	1.28	.1758	12.89=13
30-35	23	+1	23	23	32	0.62	.3292	24.14=24
25-30	36	0	0	00	27	-0.05	.3984	29.21=29
20-25	20	-1	-20	20	22	-0.71	.3101	22.74=23
15-20	8	-2	-16	32	17	-1.38	.1539	11.28=11
10-15	4	-3	-12	36	12	-2.05	.0488	3.58=04
5-10	2	-4	-8	5632	7	-2.71	.0101	0.73=01
	N=110		$\sum$fd=+8		$\sum fd^2$=248			N=110

1. मध्यमान (Mean) = $AM + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) i = 27 + \left(\frac{8}{110}\right) \times 5 = 27.36$

2. प्रामाणिक विचलन (S.D) $= i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)}$

$$= 5\sqrt{\frac{248}{110} - \left(\frac{8}{110}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{2.25 - 0.00} \quad = 5 \times 1.50 \quad = 7.50$$

3. प्रत्येक वर्गान्तर का Z मूल्य $\frac{\text{मध्य बिन्दु} - \text{मध्य मान}}{\text{प्रामाणिक विचलन}}$ $\left(\frac{X - M}{S.D.}\right)$ सूत्र द्वारा ज्ञात किया गया। प्रथम वर्गान्तर का मध्यबिन्दु 7 है तथा वितरण का मध्यमान 27.36 व प्रामाणिक विचलन 7.50 प्राप्त हुआ, अतः Z मूल्य $\left(\frac{7 - 27.36}{7.50}\right) = \frac{-20.36}{7.50} = -2.71$ प्राप्त होगा। इसी प्रकार प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य को ज्ञात किया गया।

4. प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य के आधार पर सारणी B द्वारा y मूल्य (y Value) ज्ञात किया गया।

5. अन्त में, प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति को सूत्र $\frac{\text{वर्ग अन्तराल} \times \text{आवृत्तियों का कुल योग} \times y\text{मूल्य}}{\text{प्रामाणिक विचलन}} \left(\frac{i \times N \times y}{S.D.}\right)$ द्वारा ज्ञात किया गया। प्रत्येक वर्गान्तर का अन्तराल 5 (i=5) है तथा आवृत्तियों का योग 110 N=110) है। प्रामाणिक विचलन भी 7.50 है। परन्तु प्रत्येक वर्गान्तर का y मूल्य अलग-अलग है। सामान्यीकृत आवृत्ति की गणना करें तब प्रथम वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति $\frac{5 \times 110 \times 0.0101}{7.50} = 0.74$ होगी। आधे से अधिक होने के कारण इसे 1 सामान्यीकृत आवृत्ति मान सकते हैं।

इसी प्रकार सूत्र द्वारा प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति ज्ञात करते हैं। इस प्रकार कोटि अक्ष विधि द्वारा विषमता प्राप्त वितरण को सामान्य वितरण में परिवर्तित किया जा सकता है। इसे आलेखीय रूप में अधिक स्पष्ट रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं।

वर्गान्तर (C.I.)	निरीक्षित आवृत्ति	सामान्यीकृत आवृत्ति
45-50	1	1
40-45	5	4
35-40	11	13
30-35	23	24
25-30	36	29
20 -25	20	23
15-20	8	11
10-15	4	4
5-10	2	1
	N=110	N=110
मध्यमान (Mean)	27.36	7.50
प्रामाणिक विचलन (S.D.)	27.23	7.50

स्पष्ट है कि सामान्यीकृत आवृत्तियों द्वारा निर्मित आवृत्ति बहुभुज सामान्य वितरण वक्र को प्रदर्शित कर रहा है। निरीक्षित आवृत्ति तथा सामान्यीकृत आवृत्ति दोनों के मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.)भी लगभग समान प्राप्त हुए हैं। यदि प्रथम और अन्तिम वर्गान्तरों में Z का मूल्य ± 3 से कम प्राप्त होता है तब ऐसी स्थिति में सामान्यीकृत आवृत्ति बनाते समय एक वर्गान्तर प्रारम्भ में तथा एक वर्गान्तर अन्त में निर्मित करते हैं एवं उसकी आवृत्ति शून्य रखते हैं। जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट है-

उदाहरण-2

वर्गान्तर	आवृत्ति	d	fd	fd^2(fd×d)	x	z	y	सामान्यीकृत
50-55	0				52	2.42	.0213	1.52=1
45-50	10	4	40	160	47	1.94	.0608	4.36=4
40-45	8	3	24	72	42	1.47	.1354	9.72=10
35-40	15	2	30	60	37	.99	.2444	17.54=18
30-35	25	1	25	25	32	.51	.3503	25.14=25
25-30	32	0	00	00	27	.03	.3988	28.62=29
20-25	20	-1	-20	20	22	-.45	.3605	25.87=26
15-20	18	-2	-36	72	17	-.92	.2613	18.75=19
10-15	15	-3	-45	135	12	-1.40	.1497	10.74=11
5-10	7	-4	-28	112	7	-1.88	.0681	4.88=5
0-5	0				2	-2.36	.0246	1.76=2
N=150			$\sum fd=-10$	$\sum fd^2=656$			N= 150	

मध्यमान (Mean) = $AM + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) \times i$

$= 27 + \frac{-10}{150} \times 5$

$= 27 - 0.33$

$=26.67$

प्रामाणिक विचलन (S.D.) = $i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$= 5\sqrt{\frac{656}{150} - \left(\frac{-10}{150}\right)^2}$

$= 5\sqrt{4.37 - 0.00}$

$= 5 \times 2.09$

$=10.45$

b) क्षेत्रफल विधि (Area Method)-

क्षेत्रफल विधि के द्वारा भी विषमता प्राप्त वितरण को सामान्य वितरण में परिवर्तित किया जा सकता है। इस विधि के निम्नलिखित चरण हैं-

1) सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण का मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.)की गणना की जाती है।
2) प्रत्येक वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा (exact upper limit) तथा मध्यमान के अन्तर में प्रामाणिक विचलन (S.D.)का भाग देकर Z मूल्य ज्ञात $\frac{\text{Upper Limit-Mean}}{\text{SD}}$ किया जाता है।
3) प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य के आधार पर सारणी -A द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात ज्ञात करते हैं।
4) प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित प्रतिशत क्षेत्रफल ज्ञात करना।
5) प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति सूत्र $\left(AreaPercent \times \frac{N}{100}\right)$ प्रतिशत क्षेत्रफल × (आवृत्तियों का योग)/100 द्वारा ज्ञात करते हैं

उपर्युक्त चरणों को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा अधिक स्पष्टता से समझा जा सकता है-

उदाहरण-3

सर्वप्रथम दिये गये आवृत्ति वितरण का मध्यमान ज्ञात करेंगे।

मध्यमान (Mean) =A.M. + $\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)i$

$$27 + \left(\frac{-20}{100}\right) \times 5$$

$$= 27 + (-1.00)$$

$$=26.00$$

2. प्रामाणिक विचलन की गणना की गई-

$$\text{प्रामाणिक विचलन (S.D.)} = i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{\frac{256}{100} - \left(\frac{-20}{100}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{2.56 - 0.04}$$

$$= 5\sqrt{2.52}$$

$$= 5 \times 1.59$$

$$= 7.95$$

3. प्रत्येक वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा (Exact Upper Limit or u) तथा प्राप्त मध्यमान (25.50) के अन्तर में प्रामणिक विचलन (7.85) का भाग देते हुए Z मूल्य ज्ञात करते हैं।

प्रथम वर्गान्तर का Z मूल्य ज्ञात करने के लिये वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा 9.50 में से मध्यमान 25.50 को घटाकर प्रामाणिक विचलन 7.85 का भाग दिया गया-

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{\text{शुद्ध उच्चतम सीमा (वर्गानतर की)} - \text{मध्य मान}}{\text{प्रामाणिक विचलन}} \text{ अथवा } \frac{u - M}{S.D.}$$

$$Z \text{ मूल्य} = \frac{9.50 - 26.00}{7.95} = -2.08$$

4. प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य के आधार पर तालिका द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात ज्ञात किया गया। प्रथम वर्गान्तर के Z मूल्य 2.04 के आधार पर तालिका A द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात 47.93 प्राप्त हुआ।

5. क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात के आधार पर प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत ज्ञात किया गया। प्रथम वर्गान्तर (5-9) के प्रतिशत 47.93 को कुल 50 प्रतिशत से घटाने पर प्रथम वर्गान्तर में स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत (50-47.93) 2.07 प्राप्त हुआ। इसी प्रकार दूसरे वर्गान्तर (10-14) के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत 6.01 (47.93-41.92) प्राप्त हुआ। इस प्रकार सभी वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत ज्ञात किया गया। वर्गान्तर 25-29 में स्थित क्षेत्रफल अनुपात 5.17 में 19.50 को जोड़कर 24.67 प्रतिशत प्राप्त किया गया।

6. अन्त में, प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति को स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत के आधार पर ज्ञात किया गया। वर्गान्तर में स्थित प्रतिशत क्षेत्रफल का गुणा, आवृत्तियों के योग (N) से कर 100 का भाग देकर सामान्यीकृत आवृत्ति ज्ञात करते हैं। इसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं-

$$\text{सामान्यीकृत आवृत्ति} = \frac{\text{स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत} \times \text{आवृत्तियों का योग}}{100}$$

$$\text{प्रथम वर्गान्तर (5-9) की सामान्यीकृत आवृत्ति} = \frac{1.88 \times 100}{100}$$

$$= 1.88 = 2$$

इस प्रकार क्षेत्रफल विधि द्वारा निम्नलिखित रूप में सामान्यीकृत आवृत्ति प्राप्त होती है-

वर्गान्तर	निरीक्षित आवृत्ति	सामान्यीकृत आवृत्ति
45-49	2	1
40-44	4	3
35-39	8	9
30-34	12	18
25-29	35	25
20-24	18	22
15-19	14	14
10-14	6	6
5-9	1	2
N	100	100
मध्यमान (Mean)	25.50	25.65
प्रामाणिक विचलन (SD)	7.85	7.95

इस प्रकार क्षेत्रफल विधि (Area Method) द्वारा विषमता प्राप्त वितरण को सामान्य वितरण में परिवर्तित करते हैं। निरीक्षित आवृत्ति तथा सामान्यीकृत आवृत्ति वितरण के मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन (S.D.)भी लगभग समान हैं। कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method) तथा क्षेत्रफल विधि (Area Method) द्वारा प्राप्त सामान्यीकृत आवृत्तियों में कुछ अन्तर भी हो सकता है।

6.4.2 ककुदता

ककुदता से तात्पर्य है सामान्य सम्भाव्यता वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति वितरण की ऊँचाई अथवा उसका चपटा होना है। (The term Kurtosis refers to the peakedness or flatness of frequency distribution with normal.) H.E. Garrett

सामान्य वितरण वक्र से अधिक ऊँचाई होने पर लैप्टोकर्टिक (Leptokurtic), सामान्य से कम ऊँचाई को मैसोकर्टिक (Mesokurtic) तथा चपटापन होने पर प्लैटीकर्टिक (Platykurtic)कहा जाता है।

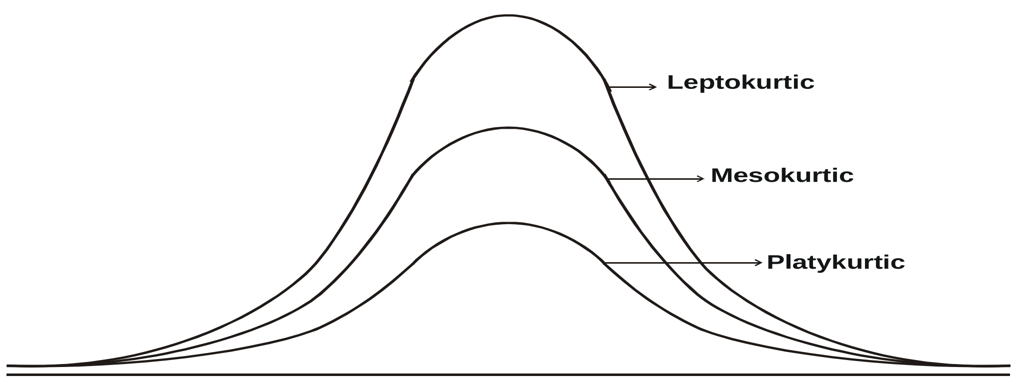
ककुदता ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{ककुदता (Ku)} = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की ककुदता (Ku)का मान 0.263 निश्चित होता है। यदि किसी वितरण का 0.263 $\left(ku = \frac{0.6745}{1.28 - (-1.28)} = 0.263 \right)$ ककुदता मान से अधिक मान प्राप्त होता हैं तब वह प्लैटीकर्टिक माना जाता है तथा इसके विपरीत यदि किसी वितरण का ककुदता मान 0.263 से कम प्राप्त होता है तब उसे लैप्टोकर्टिक कहा जाता है।

6.5 सारांश

सामान्यतः प्राप्त आँकडों के आधार पर निर्मित वक्र सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अनुरूप प्राप्त नही होता है। इस प्रकार के वक्र में सामान्य सम्भाव्यता वक्र की तुलना में असामान्यता स्थित होती है। इस प्रकार के वितरण को ही असामान्य वितरण कहा जाता है। यह असामान्य वितरण विषमता तथा ककुदता के रूप में होता है। विषमता के अन्तर्गत वितरण का फैलाव एक दिशा अथवा दूसरी दिशा में अधिक होता है। यदि वितरण के प्राप्तांक मध्यमान से बांयीं ओर अधिक वितरित हों तब धनात्मक विषमता मानते हैं। इसके विपरीत यदि मध्यमान से दांयीं ओर अधिक प्राप्तांक वितरित हों तब ऋणात्मक विषमता होती है। विषमता वितरण का सामान्यीकरण कोटि अक्ष विधि तथा क्षेत्रफल विधि द्वारा कर सकते हैं। सामान्य सम्भाव्यता वक्र की तुलना में किसी आवृत्ति वितरण की ऊँचाई अथवा उसका चपटा होना ककुदता कहलाता है। सामान्य वितरण वक्र से अधिक ऊँचाई होने पर लैप्टोकर्टिक जबकि सामान्य वितरण वक्र से कम ऊँचाई होने पर चपटापन अथवा प्लैटीकर्टिक कहा जाता है। यदि सामान्य वितरण वक्र के समान हो तब उसे मैसोकर्टिक कहते है।



6.6 शब्दावली

- **शतांषीय मान:** शतांशीय मान वह बिन्दु है जो दिये वितरण में उस बिन्दु को बताता है जिसके नीचे निश्चित प्रतिशत के प्राप्तांक स्थित होते हैं।

6.7 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) किसी सामान्य वितरण वक्र की विषमता होगी

   (अ) धनात्मक (ब) ऋणात्मक (स) शून्य (द) 1.00

2) सामान्य वितरण वक्र में ककुदता गुणांक का मान होता हैं-

   (अ) शून्य (ब) 0.263 (स) 0.457 (द) 01.42

3) वितरण वक्र यदि बाँयी ओर झुक जाए तो उसे कहते है-

   (अ) धनात्मक विषमता (ब) ऋणात्मक विषमता (स) ककुदता (द) लैप्टो कर्टिक

4) निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं-

   (अ) ककुदता (ब)शतांशीय मान (स) चतुर्थांक विचलन (द) विषमता

5) क्या मैसोकर्टिक वक्र को सामान्य वितरण वक्र के समान माना जा सकता (हाँ/नही)

उत्तर: 1) स 2) ब 3) अ 4) द 5) हाँ

6.8 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (2009) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई (उ0प्र0)
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (2009) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-2
- कपिल, एच.के. (2005) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-2
- गुप्ता, एस.पी. (2003) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ0प्र0)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (1994) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-4
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (1997) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ0प्र0)
- Aggrawal, Y.P. (1986), *Statistical Methods- concept application and computation,* Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.

- Aron, Arthur (Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), *Statistics for Psychology*. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) *Basic Statistical Concepts*. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi
- Garrett, Henry E. (1981)) *Statistics in Psychology and Education*. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) *Fundamental Statistics for students of psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) *Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences.* McGraw Hill Book Company, New York.

6.9 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सामान्य सम्भाव्यता वक्र से विचलन के रूप में विषमता तथा ककुदता का वर्णन करें।
2. किसी प्राप्तांक वितरण का शतांशीय 10 (P_{10}) का मान 52 शतांशीय 50 (P_{50}) का मान 57 है तथा शतांशीय 90 (P_{90}) का मान 65 (P_{65}) है तब वितरण की विषमता क्या होगी ?
3. वितरण की ककुदता का अर्थ स्पष्ट करते हुए विषमता से भिन्नता स्पष्ट करें।
4. धनात्मक तथा ऋणात्मक विषमता को चित्र सहित स्पष्ट करें।
5. सामान्य वितरण वक्र का ककुदता गुणांक स्पष्ट करते हुए लैप्टो कर्टिक (Lepto Kurtic) तथा प्लेटीकटिक (Platy Kurtic) में अन्तर स्पष्ट करें।

Table -A

सामान्य सम्भाव्यता वक्र में क्षेत्रफल

(AREA UNDER NORMAL PROBABILITY CURVE)

इस तालिका की सहायता से सामान्य वितरण में M तथा SD के अन्तर्गत आने वाले केसेज को ज्ञात किया जाता है, जैसे M तथा 1.47SD के मध्य निम्न तालिका के अनुसार 42.92% केसेज हैं। सिगमा दूरी (SD-Distance)को Z-Score भी कहते हैं।

(कुल क्षेत्र 10000 संख्याओं के आधार पर)

X/SD	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852

0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3290	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4383	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4599	4608	4616	4625	4633	4639
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767

2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4872	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4878	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4906	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4929	4948	4949	4951	4952
2.6	4853	4955	4956	4957	4959	4946	4961	4962	4962	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4960	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4986.9	4987.4	4987.8	4988.2	4988.6	4988.9	4989.3	4989.7	4990.0
3.1	4990.3	4990.6	4991.0	4991.3	4991.6	4991.8	4992.1	4992.4	4992.4	4992.91
3.5	4997.674									

4.0	4999.683									
5.5	4999.966									
5.0	4999.997 133									

Table B

सामान्य प्रायिकता वक्र की कोटियाँ (Ordinates of the Normal Probablity Curve)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1986	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1331	.1315

1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0983	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0809
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0056	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0395	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0174	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0055	.0053	.0051	.0050	.0078	.0047
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.5	.00087									
4.0	.00013									
4.5	.000016									
5.0	.0000015									

इकाई-7 सहसम्बन्ध गुणांक:- अर्थ, महत्व और विधियाँ (गुणन-आघूर्ण एवं क्रम अन्तर) (Correlation Coefficient:- Meaning, Importance and Methods (Product Moment and Rank Difference)

इकाई सरंचना

7.1 प्रस्तावना

7.2 उद्देश्य

7.3 सहसम्बन्ध का अर्थ

7.4 सहसम्बन्ध की दिशाएँ

7.5 सहसम्बन्ध के प्रकार

7.5.1 मात्रात्मक सहसम्बन्ध

7.5.2 गुणात्मक सहसम्बन्ध

7.6 सहसम्बन्ध गुणांक की विधियाँ

7.6.1 प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध विधि

7.6.2 क्रम अन्तर विधि

7.7 प्रोडेक्ट मोमेन्ट तथा क्रम अन्तर विधि में अन्तर

7.8 सहसम्बन्ध गुणांक

7.9 सारांश

7.10 शब्दावली

7.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

7.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

7.13 निबन्धात्मक प्रश्न

7.1 प्रस्तावना

जीवन की अनेक घटनायें एक दूसरे से सम्बन्धित होती हैं। इन सम्बन्धों का अध्ययन सहसम्बन्ध विधियों द्वारा किया जाता है। दैनिक जीवन में अपने अनुभवों के आधार पर हम विभिन्न परिवर्तियों के मध्य पारस्परिक सम्बन्ध निर्धारित करने का प्रयास करते हैं। जब एक परिवर्ती में हुए परिवर्तन का दूसरे परिवर्ती पर अनुकूल अथवा प्रतिकूल परिवर्तन होता है, तब इन दोनो परिवर्तियों में पारस्परिक सम्बन्ध अथवा सहसम्बन्ध माना जाता है।

इस इकाई का अध्ययन कर विभिन्न सहसम्बन्ध की गणना विधियों को समझ सकते हो। सहसम्बन्ध के प्रकार तथा सहसम्बन्ध गुणांक के महत्व को भी स्पष्ट किया गया है।

7.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप-

- सहसम्बन्ध का अर्थ समझ सकते हैं।
- सहसम्बन्ध के विभिन्न प्रकार उदाहरण सहित समझ सकते हैं।
- सहसम्बन्ध की गणना विधियाँ प्रमुख रूप से दो हैं- प्रथम प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि है जिसे पीर्यसन ने बताया था। उदाहरण सहित गणना विधि को समझ सकते हो।
- द्वितीय प्रमुख विधि क्रम अन्तर विधि है, जिसे स्पीयरमैन ने बताया था। इस विधि द्वारा गणना करना जान सकते हो।
- उपर्युक्त दोनो विधि प्रोडेक्ट मोमेन्ट तथा क्रम अन्तर विधि में विभिन्न अन्तर भी स्पष्ट किये गए हैं।

7.3 सहसम्बन्ध का अर्थ

सहसम्बन्ध दो अथवा दो से अधिक परिवर्तियों के मध्य स्थित पारस्परिक सम्बन्ध है। पारस्परिक सहसम्बन्ध की मात्रा सहसम्बन्ध गुणांक के रूप में व्यक्त की जाती है।

गिल्फर्ड (Guilford) के अनुसार, ‘‘सहसम्बन्ध गुणांक वह एक अंक है, जो यह बताता है कि दो वस्तुयें किस सीमा तक सम्बन्धित हैं, एक परिवर्ती दूसरे परिवर्ती के साथ किस सीमा तक परिवर्तित होता है।’’

"A coefficient of correlation is a single number that tell us to what extent two things are related, to what extent variations in the one go with variations in the other." *J.P. Guilford*

फरग्यूसन तथा टकाने के अनुसार ‘‘वह सांख्यिकी जो कि दो परिवर्तियों के मध्य सम्बन्ध की मात्रा का वर्णन करे सहसम्बन्ध गुणांक कहलाती है।’’

"The statistics that describe the degree of relation between two variables is called a correlation coefficient." *Ferguson and Takane*

अन्य महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

लैथरॉपं ‘‘सहसम्बन्ध दो परिवर्तियों के मध्य संयुक्त सम्बन्ध की ओर इंगित करता है।’’ Correlation indicates a joint relationship between variables." Richard G. Lathrop (Introduction to Psychological Research 1969)

इंगलिश तथा इंगलिश - ‘‘सहसम्बन्ध एक प्रकार का सम्बन्ध अथवा निर्भरता है। सहसम्बन्ध इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि दो वस्तुयें अथवा परिवर्ती इस प्रकार सम्बन्धित हैं कि एक में परिवर्तन होने के साथ दूसरे में समान रूप से अथवा समानान्तर परिवर्तन होता है।’’

"Correlation is a relationship or dependence. It is the fact that two things or variables are so related that change in one is accompanied by a corresponding or parallel change in the others." English and English

वॉलमैन ''सहसम्बन्ध एक सहगामी परिवर्तन है, वह सीमा जिस सीमा तक दो परिवर्ती साथ-साथ परिवर्तित होते हैं।''

"Correlation is a concomitant variation, the degree to which two variables vary together." B.B. Wolman.

उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणांक वह मात्रा है जो कि दो परिवर्तियों अथवा वस्तुओं के मध्य सम्बन्ध की सीमा तथा उसका स्वरूप प्रदर्शित करता है।

7.4 सहसम्बन्ध की दिशाएँ

एक परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में भी वृद्धि होती है अथवा एक परिवर्ती की मात्रा में कमी होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में भी कमी होती है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध माना जाता है। उदाहरणार्थ, किसी विद्यार्थी के विज्ञान विषय में अधिक अंक आने पर गणित विषय में भी अच्छे अंक प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार विज्ञान विषय में कम अंक प्राप्त होने पर गणित विषय में भी कम अंक प्राप्त होते हैं, तब यह माना जा सकता है कि विज्ञान तथा गणित विषयों के प्राप्तांकों के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध है।

इसके विपरीत ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। जब एक परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में कमी होती है अथवा एक परिवर्ती की मात्रा में कमी होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि होती है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य ऋणात्मक सहसम्बन्ध माना जाता है। उदाहरणार्थ, किसी विद्यार्थी को विज्ञान विषय में अधिक अंक प्राप्त होने पर हिन्दी विषय में कम अंक प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार हिन्दी विषय में अधिक अंक प्राप्त होने पर विज्ञान विषय में कम अंक प्राप्त होते हैं। ऐसी स्थिति में माना जा सकता है कि विज्ञान तथा हिन्दी विषयों के प्राप्तांकों के मध्य ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

यदि एक विषय में प्राप्त अंकों का दूसरे विषय में प्राप्त अंकों पर धनात्मक अथवा ऋणात्मक किसी प्रकार का प्रभाव न पड़े तब इस प्रकार के सहसम्बन्ध को शून्य सहसम्बन्ध**(Zero Correlation)** कहा जाता है। जब एक परिवर्ती की वृद्धि अथवा कमी होने पर दूसरे परिवर्ती की मात्रा पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य शून्य सहसम्बन्ध मानते हैं। उदाहरणार्थ- गणित विषय व हिन्दी विषय के प्राप्तांकों के घटने व बढ़ने का यदि कोई स्पष्ट प्रभाव नहीं दृष्टिगत होता है, तब यह माना जा सकता है कि गणित व हिन्दी विषय के प्राप्तांकों के मध्य शून्य सहसम्बन्ध है।

इस प्रकार धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य सहसम्बन्ध तीनों ही सहसम्बन्ध की दिशा को व्यक्त करते हैं। सहसम्बन्ध गुणांक के धनात्मक (+) व ऋणात्मक (-) चिन्हों द्वारा सहसम्बन्ध की दिशा का ज्ञान होता है। सहसम्बन्ध गुणांक का विस्तार **+1** से लेकर **-1** तक होता है। (Coefficient of correlation are indices ranging over a scale which extends from 1.00 through 0.00 to +1.00) Garrett.

सहसम्बन्ध गुणांक विस्तार						
-1.00	**-0.50**	**-0.25**	**.00**	**+0.25**	**+0.50**	**+1.00**

ऋणात्मक शून्य धनात्मक

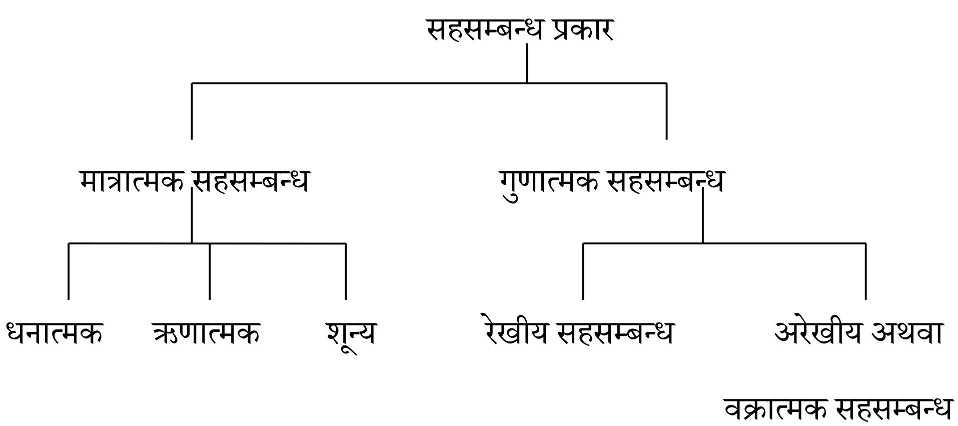
स्पष्ट है कि **+1.00** सहसम्बन्ध गुणांक पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Positive Correlation) को स्पष्ट करता है**,** जबकि **-1.00** सहसम्बन्ध गुणांक पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (perfect negative correlation) को व्यक्त करता है। **-1.00 से 0.00** के मध्य स्थित सहसम्बन्ध गुणांक ऋणात्मक होते हैं**,** जबकि **+1.00 से 0.00** के मध्य स्थित सहसम्बन्ध धनात्मक सहसम्बन्ध होते हैं। सहसम्बन्ध गुणांक की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है-

सहसम्बन्ध गुणांक	सहसम्बन्ध विवरण
+ 1.00	पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Positive Correlation)
+.81 से +.99	अत्यन्त उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध (Very High Positive Correlation)
+.61 से +.80	उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध (High Positive Correlation)
+.41 से +.60	औसत धनात्मक सहसम्बन्ध (Moderate Positive Correlation)
+.21 से +.40	निम्न धनात्मक सहसम्बन्ध (Low Positive Correlation)
.01 से +.20	नगण्य धनात्मक सहसम्बन्ध (Negligible Positive Correlation)
0	शून्य सहसम्बन्ध (Zero Correlation)

.01 से .-20	नगण्य ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Negligible Negative Correlation)
-.21 से .-40	निम्न ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Low Negative Correlation)
-.41 से .-60	औसत ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Moderate Negative Correlation)
-.61 से .-80	उच्च ऋणात्मक सहसम्बन्ध (High Negative Correlation)
-.81 से .-99	अत्यधिक उच्च ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Very High Negative Correlation)
-1.00	पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Negative Correlation)

7.5 सहसम्बन्ध के प्रकार

सहसम्बन्ध के प्रमुख रूप से दो प्रकार हैं- प्रथम मात्रात्मक सहसम्बन्ध तथा द्वितीय गुणात्मक सहसम्बन्ध। मात्रात्मक सहसम्बन्ध धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य सहसम्बन्ध के रूप में मानते हैं। गुणात्मक सहसम्बन्ध, रेखीय तथा अरेखीय दो रूपों में विभक्त करते हैं। सहसम्बन्ध के प्रकार निम्नलिखित रूप में वर्गीकृत कर सकते हैं-

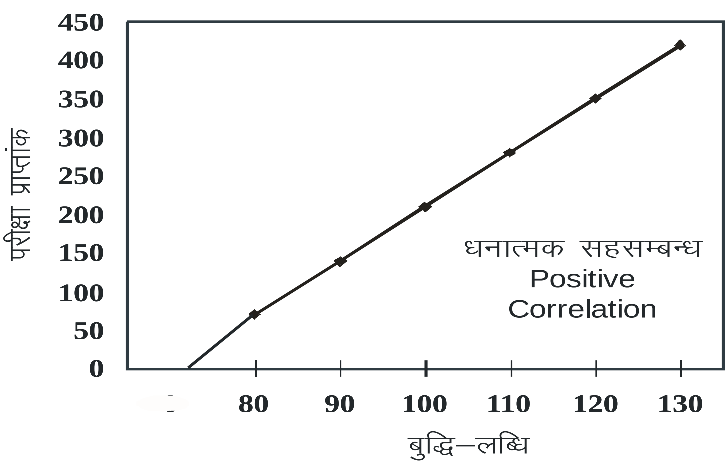


7.5.1 मात्रात्मक सहसम्बन्ध (Quantitative Correlation)-

जब सहसम्बन्ध गुणांक के आधार पर इसे तीन भागों में विभक्त कर सकते हैं-

I. धनात्मक सहसम्बन्ध (Positive Correlation)-

जब एक परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में भी वृद्धि होती है अथवा एक परिवर्ती की मात्रा में कमी होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में कमी होती है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध माना जाता है। स्पष्ट है कि जब एक परिवर्ती में होने वाला परिवर्तन दूसरे परिवर्ती को भी उसी दिशा में प्रभावित करे तब दोनों परिवर्तियों में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है। (A positive correlation indicates that large amount of one variable tend to accompany large amount of the other.) H.E. Garrett उदाहरणार्थ, एक वृत्त का व्यास बढ़ता है तब वृत्त की परिधि भी बढ़ती है। वृत्त का व्यास घटने पर उसकी परिधि भी घटती है। इस प्रकार वृत्त के व्यास एवं परिधि के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध है। इसी प्रकार विद्यार्थियों के विज्ञान विषय में अधिक अंक आते हैं, तब गणित विषय में भी अच्छे अंक आते हैं। विज्ञान विषय तथा गणित विषय के प्राप्तांकों के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध है। यदि अधिक बुद्धि-लब्धि वाले विद्यार्थियों के परीक्षा में अधिक अच्छे अंक आते हैं, अतः यह धनात्मक सहसम्बन्ध माना जाता है। इसे निम्नलिखित चित्र द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं-



II. ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Negative Correlation) -

एक परिवर्ती का प्रभाव दूसरे परिवर्ती को विपरीत दिशा में प्रभावित करे तब दोनों परिवर्तियों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। जब एक परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि के परिणामस्वस्प दूसरे परिवर्ती की मात्रा में कमी होती है अथवा एक परिवर्ती की मात्रा में कमी होने के परिणामस्वरूप दूसरे परिवर्ती की मात्रा में वृद्धि होती है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है।

वॉलमैन के अनुसार, ‘‘ऋणात्मक सहसम्बन्ध दो परिवर्तियों के मध्य ऐसा सम्बन्ध है, जिसमें एक परिवर्ती के बढ़ते हुए मानों का सम्बन्ध दूसरे परिवर्ती के घटते हुए मानों से होता है।’’ (Negative Correlation is a relation between two variables in which increasing values of one variable are related to decreasing values of the other.) Wolman

गति व शुद्धता (Speed and Accuracy)के मध्य ऋणात्मक सहसम्बन्ध पाया जाता है। गति अधिक होने पर शुद्धता कम होती है अर्थात् अशुद्धियाँ अधिक होती हैं।

III. शून्य सहसम्बन्ध (Zero Correlation)-

शून्य सहसम्बन्ध वह सहसम्बन्ध होता है, जिसमें कोई सम्बन्ध दृष्टिगत नहीं होता है अथवा जिसका सहसम्बन्ध गुणांक शून्य होता है।

(*Zero Correlation is a correlation showing no relationship or a correlation having a correlation coefficient of zero.)* Wolman

जब एक परिवर्ती की वृद्धि अथवा कमी होने पर दूसरे परिवर्ती की मात्रा पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, तब दोनों परिवर्तियों के मध्य शून्य सहसम्बन्ध होता है। उदाहरणार्थ, गणित विषय व हिन्दी विषय के प्राप्तांकों के घटने व बढ़ने का यदि कोई स्पष्ट प्रभाव नहीं दृष्टिगत होता है, तब यह कहा जा सकता है कि गणित व हिन्दी विषय के प्राप्तांकों के मध्य शून्य सहसम्बन्ध है।

7.5.2 गुणात्मक सहसम्बन्ध (Qualitative Correlation)-

गुणात्मक सहसम्बन्ध के आधार पर सहसम्बन्ध के दो प्रकार हैं-

I. रेखीय सहसम्बन्ध (Linear Correlation)-

जब दो परिवर्तियों का मापन किसी अन्तराल या अनुपात मापनी से किया जाता है, तब उसके प्राप्तांकों में निरन्तरता का गुण विद्यमान रहता है। दो परिवर्तियों के मध्य पाये जाने वाले सहसम्बन्ध को रेखीय इसलिये कहा जाता है, क्योंकि दोनों परिवर्तियों के मापन द्वारा प्राप्त प्रदत्तों को एक सरल रेखा के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार का रेखीय सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिये पीयर्सन प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि का उपयोग किया जाता है, जिससे प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक को **'r'** के रूप में व्यक्त किया जाता है।

("When the relationship between two sets of measures is 'linear', i.e. can be described by straight line, the correlation between scores may be expressed by the 'product moment coefficient of correlation,' designated by the letter 'r',") Garrett (1969)

(ii) अरेखीय अथवा वक्रात्मक सहसम्बन्ध (Non-Linear or Curvilinear Correlation)-

दो परिवर्तियों के मध्य एक विशेष स्थिति तक धनात्मक सहसम्बन्ध रहता है, तत्पश्चात् उन दोनों परिवर्तियों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध पाया जाता है। प्रारम्भ में धनात्मक सहसम्बन्ध के पश्चात ऋणात्मक सहसम्बन्ध होने के कारण आलेखीय प्रस्तुतीकरण में रेखा सीधी न होकर वक्र रूप में परिवर्तित हो जाती हैं। इसी कारण से इस प्रकार के सहसम्बन्ध को अरेखीय अथवा वक्रात्मक (वक्र रेखीय) सहसम्बन्ध कहा जाता है। उदाहरणार्थ, प्रारम्भिक आयु बढ़ने के साथ-साथ कार्यकुशलता भी बढ़ती जाती है, किन्तु एक आयु के पश्चात (लगभग **45** वर्ष) आयु बढ़ने के साथ कार्यकुशलता में कमी आती जाती है। इस आधार पर आयु तथा कार्यकुशलता के मध्य अरेखीय अथवा वक्रात्मक सहसम्बन्ध माना जा सकता है।

7.6 सहसम्बन्ध गुणांक की विधियाँ

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित दो प्रमुख विधियाँ हैं

प्रमुख विधियाँ		**संकेत चिन्ह**
1.	पीयर्सन की प्रोडक्ट मोमेन्ट विधि	'r'
	Pearson's Product Moment Method	
2.	स्पीयरमैन की श्रेणी क्रम विधि	'ρ'
	Spearman's Rank Order Method	
अन्य विधियाँ		
3.	द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध विधि	rbi
	Biserial Correlation Method	
4.	बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध विधि	rpbi
	Point Biserial Correlation Method	
5.	चतुष्कोटिक सहसम्बन्ध विधि	r_t
	Tetrachoric Correlation Method	
6.	फाई गुणांक सहसम्बन्ध विधि	ϕ
	Phi-Coefficient Correlation Method	

7.6.1 प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध विधि (Pearson's Product Moment Method)-

प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध विधि का प्रतिपादन **1896** में कार्ल पीयर्सन द्वारा किया गया था। इसी कारण से इस विधि को पीयर्सन प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि कहा जाता है। इस विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक को अंग्रेजी के अक्षर **'r'** से प्रदर्शित करते हैं, अतः सहसम्बन्ध गुणांक को पीयर्सन **'r'** (Pearson 'r') भी कहा जाता है।

प्राप्तांकों का उनके मध्यमान से विचलन के योग को कुल संख्या **'N'** से भाग देने पर जो मान प्राप्त होता है उसे मोमेन्ट कहते हैं। जब दो परिवर्तियों **(X** तथा **Y)** के सम्बन्धित विचलनों को आपस में गुणाकर, योग कर दिया जाता है तथा इसमें कुल संख्या **'N'** का भाग दिया जाता है, तब इसे प्रोडेक्ट मोमेन्ट की संज्ञा दी जाती है।

(The sum of deviations from the mean and divided by N is called moment'. When corresponding deviations in X and Y are multipled together, summed and divided by N the term product moment' is used.) Garrett. 1969

प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध गुणांक को आवश्यक रूप से उस अनुपात **'Ratio"** के रूप में माना जा सकता है, जो कि एक परिवर्ती के पारस्परिक अथवा स्वतन्त्र परिवर्तन को दूसरे परिवर्ती की ओर परिवर्तित करने की सीमा को प्रकट करता है।

(The product moment coefficient of correlation may be thought of essentially as that ratio which expresses the extent of which changes in one variable are accompanied by or are dependent upon changes in a second variable.) Garrett. 1969.

प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्रदत्त के स्वरूप के आधार पर दो प्रकार से की जा सकती है-

प्रोडक्ट मोमेन्ट विधि

अव्यवस्थित प्रदत्त (Ungrouped Data)

व्यवस्थित प्रदत्त (Grouped Data)

प्रकीर्णन चित्र (Scatter Diagram)

वास्तविक मध्यमान विधि — Actual Mean Method

कल्पित मध्यमान विधि — Assumed Mean Method

अव्यवस्थित प्रदत्त (Ungrouped Data)-

जबकि प्रदत्त अव्यवस्थित होते हैं, प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना दो प्रकार से कर सकते हैं। प्रथम वास्तविक मध्यमान के आधार पर तथा द्वितीय कल्पित मध्यमान के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करते हैं। उक्त दोनों ही विधियों द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक लगभग समान प्राप्त होता है। यदि मध्यमान **(Mean)** का मान दशमलव में प्राप्त होता है तथा जिसके कारण विचलन के मान भी दशमलव में प्राप्त होते हैं, तब ऐसी स्थिति में कल्पित मध्यमान विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करना अधिक उपयुक्त होता है।

वास्तविक मध्यमान विधि (Actual Mean Method)-

वास्तविक मध्यमान विधि द्वारा प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध गुणांक की गणना **'X'** तथा **'Y'**परिवर्ती के वास्तविक मध्यमान के आधार पर की जाती है। यदि **X** तथा **Y** परिवर्ती का मध्यमान पूर्णांक के रूप में (बिना दशमलव) प्राप्त होता है, तब इस विधि द्वारा ही सहसम्बन्ध गुणांक की गणना अधिक सरल होती है।

उदाहरण-1 निम्नलिखित **X** तथा **Y** परिवर्ती के मध्य प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा वास्तविक मध्यमान के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये।

X	*Y*	*x(X-M)*	*y (Y-M)*	x^2	y^2	*xy*
18	14	4	1	16	1	4
10	12	– 4	–1	16	1	4
15	17	1	4	1	16	4
17	18	3	5	9	25	15
12	10	– 2	– 3	4	9	6
15	13	1	0	1	0	0
12	11	–2	–2	4	4	4
11	10	– 3	– 3	9	9	9
14	16	0	3	0	9	0
16	9	2	-4	4	16	-8
M14	13	$\Sigma x=0$	$\Sigma y=0$	$\Sigma x^2=64$	$\Sigma y^2=90$	$\Sigma xy=38$

ΣX	140	130
N	10	10

सहसम्बन्ध गुणांक 'r' $= \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 . \sum y^2}} = \frac{38}{\sqrt{64 \times 90}}$

$$= \frac{38}{\sqrt{5760}} = \frac{38}{75.89} = +\,0.50$$

जबकि -

$\sum Xy = X$ तथा Y परिवर्ती के विचलनों के गुणनफल का योग

$\sum X^2 = X$ परिवर्ती के विचलन के वर्ग का योग

$\sum Y^2 = Y$ परिवर्ती के विचलन के वर्ग का योग

गणना के चरण -

1. सर्वप्रथम **X** तथा **Y** परिवर्ती के अलग-अलग मध्यमान की गणना करते हैं। मध्यमान की गणना $\frac{\sum X}{N}$ सूत्र द्वारा की जाती है। **(X)** परिवर्ती के सभी प्राप्तांकों के योग ($\sum$X) 140 में प्राप्तांकों की संख्या (N) 10 का भाग देकर मध्यमान 14 (140/10) प्राप्त हुआ। इसी प्रकार **Y** परिवर्ती का मध्यमान 13 (130/10) प्राप्त हुआ।
2. द्वितीय चरण में **X** तथा **Y** परिवर्ती का विचलन (deviation) ज्ञात किया जाता है। **X** परिवर्ती के मध्यमान **14** को सभी **X** परिवर्ती के प्राप्तांकों से घटाकर (x=X–Mean) विचलन प्राप्त करते हैं। प्रथम **X** परिवर्ती की संख्या **18** में से मध्यमान **14** को घटाने पर विचलन **4** प्राप्त हुआ। इसी प्रकार दूसरी संख्या **10** में से मध्यमान **14** घटाने पर **(10-14)** विचलन **4** प्राप्त हुआ। इसी प्रकार **Y** परिवर्ती का विचलन **(y)** मध्यमान **13** को प्रत्येक ल् परिवर्ती के प्राप्तांक से घटाकर प्राप्त करते हैं। विचलन सही रूप में प्राप्त हुए हैं**,** इस बात की जाँच ऋणात्मक तथा धनात्मक विचलनों के योग के आधार पर कर सकते हैं। ऋणात्मक तथा धनात्मक प्राप्तांकों के विचलनों का योग हमेशा बराबर होता है**,** अर्थात् $\sum x$ तथा $\sum y$ का मान शून्य होना चाहिये।
3. तृतीय चरण के अन्तर्गत दोनों परिवर्तियों के विचलनों का वर्ग (Square) कर x^2 तथा y^2 ज्ञात किया जाता है। **x**2 का योग $\sum x^2$**(64)** तथा **y**2 का योग $\sum y^2$ **(90)** प्राप्त करते हैं। वर्ग करने के कारण सभी संख्यायें धनात्मक हो जाती हैं।
4. चतुर्थ चरण की गणना में विशेष सावधानी की आवश्यकता होती है। इस चरण में **x** तथा **y** विचलनों का परस्पर गुणा कर गुणनफल के रूप में **xy** प्राप्त करते हैं। गुणनफल ज्ञात करते हुए धनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्हों का विशेष ध्यान रखा जाता है। यदि कोई एक विचलन ऋणात्मक होता है**,** जबकि दूसरा धनात्मक है**,** तब ऐसी स्थिति में गुणनफल ऋणात्मक (2×–4=–8) होता है। तत्पश्चात् **xy** का योग कर $\sum xy$ प्राप्त करते हैं। धनात्मक प्राप्तांकों का अलग योग **(46)** प्राप्त करते हैं**,** जबकि ऋणात्मक प्राप्तांकों का अलग योग **(-8)** प्राप्त करते हैं। दोनों प्राप्तांकों मे जो अधिक होता है उसे घटाकर **(46.8=38)** $\sum xy$ प्राप्त करते हैं।
5. अन्त में**,** सूत्र में सभी प्राप्तांकों के मान रखकर गणना द्वारा सरल करते हैं। **x**2 के मान **64** का गुणा **y**2 के मान **90** से कर गुणनफल **(64×90=5760) 5760** का वर्गमूल **75.89** प्राप्त किया। $\sum xy$ के मान **38** में **75.89** के मान का भाग देकर भागफल +**0.50** के रूप में प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा वास्तविक मध्यमान के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक (Pearson 'r') + 0.50 प्राप्त हुआ।

अन्य **उदाहरण-2** परीक्षण **A** तथा परीक्षण **B** के परिणामों के मध्य पीयर्सन सहसम्बन्ध गुणांक **('r')** की गणना कीजिये-

परीक्षण **A** परीक्षण **B**

X	Y	x	y	x^2	y^2	xy
18	20	.70	1.20	.49	1.44	.84
10	16	7.30	-2.80	53.29	7.84	20.44
12	14	-5.30	-4.80	28.09	23.04	25.44

18	20	.70	1.20	.49	1.44	.84
25	22	7.70	3.20	59.29	10.24	24.64
16	18	-1.30	-0.80	1.69	.64	1.04
18	24	.70	5.20	.49	27.04	3.64
24	15	6.70	-3.80	44.89	14.44	-25.46
15	18	-2.30	-0.80	5.29	.64	1.84
17	21	-.30	2.20	0.09	4.84	-.66

M =17.30 18.80 Σx^2=194.10 Σy^2=91.60 Σxy=52.60

ΣX =173 ΣY 188

N=10 10

$$\text{Pearson 'r'} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 . \sum y^2}}$$

$$= \frac{52.60}{\sqrt{194.10 \times 91.60}}$$

$$= \frac{52.60}{\sqrt{17779.56}}$$

$$= \frac{52.60}{133.34}$$

$$= +.39$$

उपर्युक्त उदाहरण द्वारा स्पष्ट है कि वास्तविक मध्यमान के आधार पर प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा पीयर्सन **'r'** की गणना करना अधिक कठिन हो जाता है जबकि परिवर्ती **X** तथा **Y** का मध्यमान (क्रमशः **17.30** व **18.80)** दशमलव में प्राप्त होता है। ऐसी स्थिति में कल्पित मध्यमान विधि के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करना अधिक उपयुक्त होता है।

कल्पित मध्यमान विधि (Assumed Mean Method) -

कल्पित मध्यमान विधि द्वारा प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध गुणांक की गणना **X** तथा **Y** परिवर्ती के कल्पित मध्यमान के आधार पर की जाती है। यदि **X** तथा **Y** परिवर्ती का मध्यमान दशमलव में भी प्राप्त होता है**,** तब ऐसी स्थिति में कल्पित पूर्णांक मध्यमान के आधार पर सरलता से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कर सकते हैं।

परीक्षण **A** तथा परीक्षण **B** के परिणामों के मध्य पीयर्सन सहसम्बन्ध गुणांक **(r)** की गणना कीजिये-

परीक्षण **A** परीक्षण **B**

X	Y	x (x-17)	y (y-18)	x^2	y^2	xy
18	20	1	2	1	4	2
10	16	-7	-2	49	4	14
12	14	-5	-4	25	16	20
18	20	1	2	1	4	2
25	22	8	4	64	16	32
16	18	-1	0	1	0	0
18	24	1	6	1	36	6
24	15	7	-3	49	9	-21
15	18	-2	0	4	0	0
17	21	0	3	0	9	0
M =17.30	18.80			$\sum x^2$=195	$\sum y^2$=98	$\sum xy$=55
$\sum$X =173	$\sum$Y = 188					
N=10	10					

कल्पित मध्यमान (Assumed Mean) AMx = 17 AMy = 18

Cx = Mx –AMx

= 17.30–17 = .30

Cy = My –AMy

= 18.80 –18

= .80

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - cx^2} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N} - cy^2}$$

$$= \sqrt{\frac{195}{10} - .30^2} \qquad = \sqrt{\frac{98}{10} - .80^2}$$

$$= \sqrt{19.50 - 0.09} \qquad = \sqrt{9.80 - 0.64}$$

$$= \sqrt{19.41} \qquad = \sqrt{9.16}$$

$$= 4.40 \qquad = 3.03$$

$$'r' = \frac{\frac{\sum xy}{N} - cx.cy}{\sigma x.\sigma y} = \frac{\frac{55}{10} - .30 \times .80}{4.40 \times 3.03}$$

$$= \frac{5.50 - .24}{13.33} = \frac{5.26}{13.33} = +.39$$

जबकि

$\sum xy$ = X तथा **Y** परिवर्ती के विचलनों के गुणनफल का योग **(55)**

N= प्राप्तांकों की संख्या (**10**)

Cx = Mx –AMx (X परिवर्ती के मध्यमान में से कल्पित मध्यमान (AMx) को घटाना)

Cy = My –AMy (Y परिवर्ती के मध्यमान में से कल्पित मध्यमान (AMy) को घटाना)

σ_X = X परिवर्ती का प्रामाणिक विचलन **(S.D.)**

σ_Y = Y परिवर्ती का प्रामाणिक विचलन

गणना के चरण-

1. सर्वप्रथम X तथा **Y** परिवर्ती का मध्यमान (Mean) $\frac{\sum X}{N}$ सूत्र द्वारा अलग-अलग क्रमशः **17.30** तथा **18.80** ज्ञात किया।
2. पूर्णांक के आधार पर ग् परिवर्ती का कल्पित मध्यमान **(AMx)17** माना तथा **Y** परिवर्ती का कल्पित मध्यमान **(AMy) 18** निर्धारित किया। (इसके अतिरिक्त किसी अन्य मान के रूप में कल्पित मध्यमान निर्धारित कर सकते हैं।)
3. **X** परिवर्ती के कल्पित मध्यमान **(AMx) 17** के आधार पर विचलन **x** ज्ञात किया तथा विचलन का वर्ग x^2 कर, योग रूप में Σx^2**(195)** प्राप्त किया।
4. इसी प्रकार **Y** परिवर्ती के कल्पित मध्यमान **(AMy) 18** के आधार पर विचलन ल ज्ञात किया तथा विचलन का वर्ग y^2 कर, योग रूप में Σy^2 **(98)** ज्ञात किया।
5. **x** तथा **y** के विचलनों का परस्पर गुणा कर **xy** तथा उस का योग **Σxy** ज्ञात किया। गुणनफल **(xy)** तथा योग **(Σxy)** करते समय + तथा - चिन्ह का ध्यान रखकर **Σxy (55)** ज्ञात किया।
6. **X** तथा **Y** परिवर्ती के वास्तविक मध्यमान (Mx व My) तथा कल्पित मध्यमान (AMx व AMy) के अन्तर के रूप में Cx तथा Cy का मान ज्ञात किया गया।
7. **X** परिवर्ती का प्रामाणिक विचलन (Σ_X) का मान सूत्र द्वारा ज्ञात **(4.40)** किया। इसी प्रकार **Y** परिवर्ती का मान सूत्र द्वारा ज्ञात **(3.03)** किया गया।

8. अन्त में, सभी प्राप्त मानों को सूत्र में रखकर सरल करते हुए पीयर्सन सहसम्बन्ध गुणांक **+0.39** प्राप्त किया।

अन्य विधि: यदि कल्पित मध्यमान, दोनों परिवर्तियों का शून्य मान लिया जाये तब ऐसी स्थिति में निम्नलिखित प्रकार से भी सहसम्बन्ध गुणांक **(r)** ज्ञात किया जा सकता है। अनुसन्धान कार्य में सामान्य कैलकुलेटर द्वारा सरलता से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है-

परीक्षण **A** परीक्षण **B**

X	Y	X^2	Y^2	XY
18	20	324	400	360
10	16	100	256	160
12	14	144	196	168
18	20	324	400	360
25	22	625	484	550
16	18	256	324	288
18	24	324	576	432
24	15	576	225	360
15	18	225	324	270
17	21	289	441	357
M =17.30	18.80	ΣX^2=3187	ΣY^2=3626	ΣXY=3305

N=10

$$r = \frac{\sum XY - NMxMy}{\sqrt{\left(\sum X^2 - NMx^2\right)\left(\sum Y^2 - NMy^2\right)}}$$

$$r = \frac{3305 - 10 \times 17.30 \times 18.80}{\sqrt{3187 - 10 \times 17.30^2 \quad 3626 - 10 \times 18.80^2}}$$

$$r = \frac{3305 - 10 \times 17.30 \times 18.80}{\sqrt{3187 - 2992.90 \quad 3626 - 3534.40}}$$

$$r = \frac{3305 - 3252.4}{\sqrt{3187 - 2992.90 \quad 3626 - 3534.40}}$$

$$r = \frac{52.60}{\sqrt{194.10 \times 91.60}}$$

$$r = \frac{52.60}{\sqrt{17779.56}}$$

$$r = \frac{52.60}{133.34}$$

$r =$ +0.39

Mx=X परिवर्ती का मध्यमान

My=Y परिवर्ती का मध्यमान

ΣXY= X तथा Y परिवर्ती का परस्पर गुणनफल का योग

ΣX^2 = X परिवर्ती का वर्ग एवं योग

ΣY^2 = Y परिवर्ती का वर्ग एवं योग

N = प्राप्तांकों की संख्या

गणना के चरण -

1. सर्वप्रथम **X** परिवर्ती तथा **Y** परिवर्ती का मध्यमान $\frac{\sum X}{N}$ सूत्र द्वारा क्रमशः **17.30** तथा **18.80** ज्ञात किया।
2. **X** परिवर्ती के सभी प्राप्तांकों का वर्ग कर योग के रूप में ΣX^2(3187) ज्ञात किया।
3. इसी प्रकार **Y** परिवर्ती के सभी प्राप्तांकों का वर्ग कर योग के रूप में ΣY^2(3626) ज्ञात किया।

4. **X** परिवर्ती तथा **Y** परिवर्ती के प्राप्तांकों में परस्पर गुणा **(XY)** किया तथा योग कर Σ**XY (3305)** ज्ञात किया।
5. सूत्र में सभी मानों को रखकर गणना द्वारा सरल किया तथा सहसम्बन्ध गुणांक +**0.39** प्राप्त किया।

7.6.2 क्रम अन्तर विधि (Spearman's Rank Order Method or Rank Difference Method) -

चार्ल्स स्पीयरमैन द्वारा श्रेणी क्रम विधि अथवा क्रम अन्तर विधि का प्रतिपादन किया गया, अतः इस विधि को स्पीयरमैन की श्रेणी क्रम विधि भी कहा जाता है। इस विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक को रौ (Rho) कहा जाता है, जिसे लैटिन भाषा के अक्षर 'ρ' से प्रदर्शित करते हैं।

प्रस्तुत विधि एक सरल विधि है, जिसका प्रयोग केवल छोटे समूह पर किया जाता है। इस विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्राप्तांकों के आधार पर नहीं की जाती है, वरन् उनकी कोटि के आधार पर की जाती है।

उदाहरण-3 निम्नलिखित गणित तथा विज्ञान विषयों के प्राप्तांकों के मध्य श्रेणी क्रम विधि (Rank Order Method) द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये

विद्यार्थी	गणित प्राप्तांक	विज्ञान प्राप्तांक
A	12	18
B	16	20
C	24	22
D	18	15
E	15	14
F	20	17
G	17	12

हल-

गणित प्राप्तांक (X)	विज्ञान प्राप्तांक Y	$Rank_1$	$Rank_2$ (R_1)	D (R_2)	D^2 R_1-R_2
12	18	7	3	4	16
16	20	5	2	3	9
24	22	1	1	0	0
18	15	3	5	2	4
15	14	6	6	0	0
20	17	2	4	2	4

17	12	4	7	3	9
				D=0	$\sum D^2$=42

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 42}{7(7^2 - 1)}$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 42}{7(49 - 1)}$$

$$\rho = 1 - \frac{252}{7 \times 48}$$

$$\rho = 1 - \frac{252}{336}$$

$$\rho = 1 - .75$$

$$\rho = +.25$$

गणना के चरण-

1. सर्वप्रथम **X** परिवर्ती के सभी प्राप्तांकों को क्रम प्रदान करेंगे। जो संख्या सर्वाधिक होगी उसे प्रथम क्रम प्रदान करेंगे तथा सबसे छोटी प्राप्तांक संख्या को अन्तिम क्रम **(**Rank) देंगे। **X** परिवर्ती में सबसे बड़ी संख्या **24** है अतः $Rank_1$ के कॉलम में पहला क्रम **24** को दिया। दूसरी बड़ी संख्या **20** को दूसरा क्रम दिया तथा इसी प्रकार सबसे छोटे प्राप्तांक **12** को अन्तिम क्रम **7** दिया गया।
2. इसी प्रकार **Y** परिवर्ती के सभी प्राप्तांकों को क्रम (R_2) प्रदान किया।
3. $Rank_1$ में से $Rank_2$ को घटाकर (R_1–R_2) D का मान ज्ञात किया। **D** का योग शून्य (धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों का योग समान) होना चाहिए।
4. **D** का वर्ग कर योग के रूप में $\sum D^2$ ज्ञात किया।
5. सूत्र में **N(7)** तथा $\sum D^2$**(42)** का मान रखते हुए सरल किया। अन्त में **0.75** के मान को **1** से घटाकर सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक +**0.25** ज्ञात हुआ।

उदाहरण-4 निम्नलिखित **X** तथा **Y** परिवर्ती के मध्य श्रेणी क्रम विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ρ (Rho) की गणना कीजिये।

मनोविज्ञान के प्राप्तांक	संगीत के प्राप्तांक
X	Y
24	19
14	30
24	14

25	15
27	16
28	18
19	29
14	25
26	15
30	17

हल -

मनोविज्ञान प्राप्तांक(X)	संगीत प्राप्तांक Y	$Rank_1$	$Rank_2$ (R_1)	D (R_1)	D^2 R_1-R_2
24	19	6.5	4	2.5	6.25
14	30	9.5	1	8.5	72.25
24	14	6.5	10	-3.5	12.25
25	15	5	8.5	-3.5	12.25
27	16	3	7	-4	16.00
28	18	2	5	-3	9.00
19	29	8	2	6	36.00
14	25	9.5	3	6.5	42.25
26	15	4	8.5	-4.5	20.25
30	17	1	6	-5	25.00
				$\Sigma D=0$	$\Sigma D^2=251.50$

N=10 $\Sigma D^2 = 251.50$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 251.50}{10(10^2-1)}$$

$$\rho = 1 - \frac{1509}{990}$$

$$\rho = 1 - 1.52$$

= –.52

ऋणात्मक सहसम्बन्ध

X परिवर्ती में **24** प्राप्तांक दो बार स्थित है जिसे छठवां व सातवां क्रम **(Rank)**देना है, अतः दोनों क्रमों को जोड़कर दो का भाग देकर $\left(\frac{6+7}{2}=6.5\right)$ प्राप्त **6.5** क्रम दोनों **24** प्राप्तांकों को देंगे। इसी प्रकार **14** प्राप्तांक भी दो बार स्थित है, जिसे अन्तिम **9** व **10** क्रम देना है, अतः दोनों **14** प्राप्तांकों को क्रमशः **9..5** व **9.5** क्रम देंगे। Y परिवर्ती में भी **15** प्राप्तांक दो बार है, अतः दोनों को **8.5** क्रम दिया गया है।

7.7 प्रोडेक्ट मोमेन्ट तथा क्रम अन्तर विधि में अन्तर

उपर्युक्त दोनों ही विधियाँ सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की महत्वपूर्ण विधियाँ हैं, किन्तु दोनों विधियों में निम्नलिखित अन्तर हैं-

प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि	श्रेणी क्रमविधि
1. इस विधि का प्रतिपादन **1896** में कार्ल पीयर्सन द्वारा किया गया था। इसी कारण से इस विधि को पीयर्सन प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि कहा जाता है। **2.** इस विधि का सहसम्बन्ध गुणांक अंग्रेजी के अक्षर **‘r’** से प्रदर्शित होता है, जिसे पीयर्सन **‘r’** भी कहा जाता है। **3.** इस विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्राप्तांकों के आधार पर की जाती है। इस आधार पर यह विधि अधिक शुद्ध सहसम्बन्ध गुणांक प्रदान करती है। **4.** यह विधि सामान्य वितरण वक्र के आधार पर अधिक शुद्ध परिणाम प्रदान करती है, अतः दोनों परिवर्तियों)**X** व **Y**के प्राप्तांक सामान्य (वितरण के अन**q** रूप होने चाहिये। **5.** इस विधि के अन्तर्गत प्रतिदर्श का बड़ा होना आवश्यक है, ताकि अधिक शुद्ध परिणाम प्राप्त हों। **6.** यह विधि प्राचलिक सांख्यिकी प्रकार पर आधारित है। **7.** यह विधि रेखीय सहसम्बन्ध पर आधारित है।	**1.** इस विधि का प्रतिपादन ब्रिटिश मनोवैज्ञानिक चार्ल्स एडवर्ड स्पीयरमैन द्वारा **1904** में किया गया था। इसी कारण से इस विधि को स्पीयरमैन की श्रेणी क्रम विधि कहा जाता है। **2.** इस विधि का सहसम्बन्ध गुणांक लैटिन भाषा के अक्षर ρ (Rho) से प्रदर्शित करते हैं, जिसे स्पीयरमैन ρ (Spearman ρ) भी कहा जाता है। **3.** इस विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्राप्तांकों की कोटि **(Rank)**के आधार पर की जाती है। इस प्रकार यह विधि सहसम्बन्ध गुणांक अधिक शुद्ध प्रदान नहीं करती है। **4.** यह विधि उन स्थितियों में अधिक महत्वपूर्ण सहसम्बन्ध गुणांक प्रदान करती है, जबकि दोनों परिवर्तियों के प्राप्तांकों की केवल कोटि का ही ज्ञान उपलब्ध हो। **5.** इस विधि के अन्तर्गत प्रतिदर्श छोटा होना चाहिये। इस विधि का प्रयोग केवल छोटे समूह पर ही किया जा सकता है।

इस विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध को आलेखीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है तथा प्रतिगमन समीकरण के आधार पर पूर्वकथन भी किया जा सकता है।	**6.** यह विधि अप्राचलिक सांख्यिकी प्रकार पर आधारित है। विषमजातीय प्रदत्तों में यह विधि उपयुक्त सिद्ध होती है।
8. इस विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक प्रदत्त के मध्यमान **(Mean)** तथा प्रामाणिक विचलन **(S.D.)** पर आधारित होने के कारण अधिक शुद्ध तथा विश्वसनीय होता हैं। इस कारण से विभिन्न मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की विश्वसनीयता तथा वैधता का निर्धारण इसी विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक के आधार पर किया जाता है।	**7.** जबकि सहसम्बन्ध गुणांक को यदि शीघ्रता से ज्ञात करने की आवश्यकता हो**,** तब यह विधि अधिक सुविधाजनक सिद्ध होती है। **8.** इस विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक का मान प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक की अपेक्षा कम प्राप्त होता है।

7.8 सहसम्बन्ध गुणांक

सहसम्बन्ध गुणांक के निम्नलिखित प्रमुख उपयोग हैं **:-**

1. किन्हीं दो परिवर्तियों के मध्य स्थित सम्बन्ध की मात्रा तथा उसके (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) स्वरूप को स्पष्ट करता है।

2. किसी मनोवैज्ञानिक परीक्षण की विश्वसनीयता**,** वैधता तथा पद-विश्लेषण में सहायक सिद्ध होता है।

3. दो परिवर्तियों के मध्य परस्पर सहसम्बन्ध के आधार पर भविष्यकथन करने में सहायक होता है। इसके आधार पर उपयुक्त निर्देशन तथा परामर्श प्रदान किया जा सकता है।

4. विभिन्न प्रकार के सहसम्बन्धात्मक अध्ययनों में सहसम्बन्ध गुणांक उपयोगी सिद्ध होता है।

5. कारक विश्लेषण अध्ययनों का आधार सहसम्बन्ध होता है।

7.9 सारांश

सहसम्बन्ध दो अथवा दो से अधिक परिवर्तियों के मध्य स्थित पारस्परिक सम्बन्ध है। पारस्परिक सहसम्बन्ध की मात्रा सहसम्बन्ध गुणांक के रूप में व्यक्त की जाती है। सहसम्बन्ध गुणांक के धनात्मक व ऋणात्मक चिन्हों द्वारा सहसम्बन्ध की दिषा का ज्ञान होता है। सहसम्बन्ध गुणांक का विस्तार **+1** से लेकर **-1** तक होता है।

प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध विधि का प्रतिपादन **1896** में कार्ल पीयर्सन द्वारा किया गया था। प्रोडेक्ट मोमेन्ट सहसम्बन्ध गुणांक को आवश्यक रूप से उस अनुपात के रूप में माना जा सकता है जो कि एक परिवर्ती के पारस्परिक अथवा स्वतन्त्र परिवर्तन को दूसरे परिवर्ती की ओर परिवर्वित करने की सीमा को प्रकट करता है।

चार्ल्स स्पीयरमैन द्वारा क्रम अन्तर विधि का प्रतिपादन किया गया अतः इस विधि को स्पीयरमैन की क्रम अन्तर विधि भी कहा जाता है।

सहसम्बन्ध गुणांक के अनेक क्षेत्रों में उपयोग हैं- जैसे दो परिवर्तियों के मध्य स्थित सम्बन्ध तथा उसके ऋणात्मक अथवा धनात्मक स्वरूप को स्पष्ट करता है। प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक के आधार पर पूर्व कथन, निर्देषन व परामर्श में सहायता मिलती है।

7.10 शब्दावली

- **सहसम्बन्ध गुणांक**: सहसम्बन्ध की मात्रा सहसम्बन्ध गुणांक कहलाता है। सहसम्बन्ध गुणांक वह मात्रा है जो कि दो परिवर्तियों अथवा वस्तुओं के मध्य सम्बन्ध की सीमा तथा उसका स्वरूप प्रदर्शित करती है।
- **शून्य सहसम्बन्ध:** जब एक परिवर्ती की वृद्धि अथवा कमी होने पर दूसरे परिवर्ती की मात्रा पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, तब दोनो परिवर्तियों के मध्य शून्य सहसम्बन्ध होता है।
- **रेखीय सहसम्बन्ध:** दो परिवर्तियों के मध्य पाये जाने वाले सहसम्बन्ध को रेखीय इसलिये कहा जाता है, क्योकि दोनो परिवर्तियों के मापन द्वारा प्राप्त आँकड़ों को एक सरल रेखा के रूप में प्रदर्शित किया जाता है।
- **अरेखीय सहसम्बन्ध अथवा वक्रात्मक सहसम्बन्ध:** प्रारम्भ में धनात्मक सहसम्बन्ध के पश्चात ऋणात्मक सहसम्बन्ध होने के कारण रेखा सीधी न होकर वक्र रूप में परिवर्तित हो जाती है। इस प्रकार के सहसम्बन्ध को अरेखीय अथवा वक्रात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है।

7.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1. सहसम्बन्ध गुणांक की 'प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि' का प्रतिपादन किसने किया?

i) फरग्यूसन **ii)** फिशर **iii)** पीर्यसन **iv)** स्पीयरमैन 2

2. कार्ल पीयर्सन ने सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की विधि का प्रतिपादन कब किया?

i) 1886 **ii) 1896** **iii) 1860** **iv) 1902**

3. जब दो सम्बन्धित परिवर्तियों में समानुपातिक परिवर्तन एक ही दिशा में होते हैं, तब उन दोनों के मध्य कौन-सा सहसम्बन्ध होता हैं

i) पूर्ण सहसम्बन्ध (Perfect Correlation)

ii) पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (Perfect positive correlation)

iii) सीमित सहसम्बन्ध (Limited correlation)

iv) सीमित धनात्मक सहसम्बन्ध (limited positive Correlation)

4. दो परिवर्तियों के मध्य साहचर्य की मात्रा का निर्धारण करने में किसे अधिक उपयुक्त माना जायेगा?

i) विचलन शीलता **ii)** सहसम्बन्ध **iii)** समय श्रृंखला **iv)** प्रामाणिक विचलन

5. सहसम्बन्ध गुणांक (Correlation coefficient)-

i) धनात्मक नहीं हो सकता

ii) ऋणात्मक नहीं हो सकता

iii) हमेशा धनात्मक होता है

iv) धनात्मक तथा ऋणात्मक हो सकता है।

6. श्रेणी क्रम सहसम्बन्ध विधि का संकेत चिन्ह है

i) r ii) rbis iii) ρ iv) r_t

7. सहसम्बन्ध गुणांक का मान होता है-

i) **1** से कम **ii) 1** से अधिक

iii) **-1** से **+1** के मध्य **iv)** शून्य से **1** के मध्य **1.** पपप

1- iii 2- ii 3- ii 4- ii 5- iv 6- iii 7- iii

7.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई (उ**0**प्र**0**)
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**
- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), *Statistical Methods- concept application and computation,* Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur (Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), *Statistics for Psychology*. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) *Basic Statistical Concepts*. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi
- Garrett, Henry E. (1981)) *Statistics in Psychology and Education*. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.

- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) *Fundamental Statistics for students of psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.
- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) *Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences.* McGraw Hill Book Company, New York.

7.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सहसम्बन्ध का अर्थ स्पष्ट करें। सहसम्बन्ध के विभिन्न प्रकारों का वर्णन कीजिये।

2. रेखीय तथा अरेखीय सहसम्बन्ध में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

3. निम्नलिखित प्रदत्तों द्वारा प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये:

(a)

X	Y
15	60
45	65
50	70
15	75
18	40
45	35
40	30
30	31
32	65
23	50

(b)

मनोविज्ञान के प्राप्तांक (Scores in Psychology)	संगीत के प्राप्तांक (Scores in Music)
40	30
44	35
60	40
65	45
60	48
55	45
45	47
42	36

(C)

भौतिक शास्त्र (Physics)	गणित (Maths)
35	33
40	35
50	40
45	35
40	40
39	41

(d)

X	Y
50	22
54	25
56	54
59	28
60	26
62	30
61	32

53	43	65	30
54	51	67	28
43	52	71	34
41	50	71	36
		74	40

(e)	X	Y	(f)	X	Y	(g)	X	Y
	0	10		6	6		25	52
	9	1		5	3		29	57
	7	6		4	5		38	69
	3	2		7	5		43	76
	7	5		5	7		45	79
	5	4		6	8		49	84
	10	0		7	5		55	92
	8	2		5	8		59	96
	3	5						
	4	5						
	3	6						

4. श्रेणी क्रम विधि अथवा कोटि अन्तर विधि द्वारा सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

(a)

कला के विद्यार्थी (Art Students)	विज्ञान के विद्यार्थी (Science Students)
15	20
12	15
8	5
5	25
6	20
5	10
12	12
10	16

18	8
20	8

(b)

X	Y
20	17
25	12
30	13
35	14
30	15
23	19
21	20

(c)

x	y
24	19
14	30
24	14
25	15
27	16
28	18
19	29
14	25
26	15
30	17

(d)

x	y
12	16
14	24
21	12
18	18
15	22
14	18
25	16
21	15

(e)

प्रथम परीक्षण (Test I)	द्वितीय परीक्षण (Test II)
41	68
55	75
60	54
73	92
59	70
56	87
72	102
82	91
41	75
35	59
35	49
48	50
52	85
71	79
47	75

इकाई-8 द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध गुणांक, बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध एवम आसंग गुणांक (Bi-serial correlation and Point Bi-serial Correlation coefficient; Contingency Coefficient)

इकाई सरंचना

8.1 प्रस्तावना
8.2 उद्देश्य
8.3 द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध
8.4 बिन्दु-द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध
8.5 द्विपांक्तिक तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में अन्तर
8.6 द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में परस्पर सम्बन्ध
8.7 फाई गुणांक
8.8 आसंग गुणांक
8.9 सारांश
8.10 शब्दावली
8.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
8.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
8.13 निबन्धात्मक प्रश्न

8.1 प्रस्तावना

इससे पूर्व आप ने सहसम्बन्ध का अर्थ प्रकार तथा सहसम्बन्ध गणना की प्रमुख विधियों के रूप में प्रोडेक्ट मोमेंन्ट विधि तथा क्रम अन्तर विधि को समझा था। साथ ही सहसम्बन्ध गुणांक के उपयोग को भी आप ने समझा था।

सहसम्बन्ध की अन्य महत्वपूर्ण विधियों में द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध विधियाँ भी हैं। इस इकाई में इन दोनों विधियों को समझाने का प्रयास करेगें। इसके अतिरिक्त फाई गुणांक की गणना करने के पश्चात किस प्रकार आसंग गुणांक की गणना की जा सकती है? इसे भी स्पष्ट किया जायेगा।

8.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के प्ष्चात् आप

- द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना करना समझ सकते हो।
- इसी प्रकार बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना करना भी जान सकते हो।
- द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में अन्तर समझ सकते हो।
- द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में कौन अधिक श्रेष्ठ है इसे भी जान सकते हो।
- फाई गुणांक की गणना कर आसंग गुणांक की गणना किस प्रकार करते हैं यह भी स्पष्ट रूप से समझ सकते हो।

8.3 द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध का उपयोग इस प्रकार की विशेष स्थिति में किया जाता है जबकि एक परिवर्ती (X) का मापन निरन्तर मापनी के रूप में होता है, जबकि दूसरा परिवर्ती (Y) दो भागों में विभाजित अथवा द्विविभाजित होता है। जब हम यह मान लेते हैं कि द्विविभाजित परिवर्ती सत्त एवं सामान्य रूप से वितरित है, तब ऐसी स्थिति में अधिक सूचना प्राप्त करने के उद्देश्य से द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (Biserial r)की गणना की जाती है। (When we can assume that the trait in which we made a two-way split would be found to be continuous and normally distributed were more information available, we may compute a biserial 'r' ......) Garrett

द्विविभाजित आँकड़ों (Dichotomous* Data) इस प्रकार के होते हैं कि उनके केवल दो ही प्रकार होते हैं, जैसे-पुरूष-महिला, विवाहित-अविवाहित, प्रशिक्षित-अप्रशिक्षित, जीवित-मृत, मध्यांक से ऊपर व मध्यांक से नीचे आदि।

उदाहरण-1 निम्नलिखित आँकड़ों के आधार पर द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (Biserial 'r')की गणना कीजिये-

प्राप्तांक (X परिवर्ती)	प्रशिक्षित (Y परिवर्ती)	अप्रशिक्षित	योग
40-45	8	4	12
35-40	12	6	18
30-35	16	8	24
25-30	18	12	30
20-25	14	24	38
15-20	10	20	30
5-10	3	10	13
0-5	2	4	6
N=	90	110	200

$$rbis = \frac{Mp - Mq}{S.D._t} \times \frac{pq}{u}$$

इसमें, rbis = द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध

Mp = श्रेष्ठ समूह का मध्यमान (Mean)

Mq = दूसरे समूह का मध्यमान (Mean)

SD_t = सम्पूर्ण समूह का प्रामाणिक विचलन (S.D.)

P = प्रथम समूह का अनुपात

q = द्वितीय समूह का अनुपात

u = कोटि का मान (Ordinate Value)

प्राप्तांक	प्रशिक्षित समूह			अप्रशिक्षित समूह			योग (Total)			
C.I.	f	d	fd	f	d	fd	f	d	f	fd^2(fd×d)
40-45	8	+4	32	4	+5	20	12	+4	48	192
35-40	12	+3	36	6	+4	24	18	+3	54	162
30-35	16	+2	32	8	+3	24	24	+2	48	96
25-30	18	+1	18	12	+2	24	30	+1	30	30
20-25	14	0	00	24	+1	24	38	0	0	00
15-20	10	-1	-10	20	0	0	30	-1	-30	30
10-15	7	-2	-14	22	-1	-22	29	-2	-58	116
5-10	3	-3	-9	10	-2	-20	13	-3	-39	117
0-5	2	-4	-8	4	-3	-12	6	-4	-24	96

$N_1=90$ $\quad \Sigma fd=77$ $\quad N_2=110 \Sigma fd=62$ $\quad N=200$ $\quad \Sigma fd=29 \Sigma fd^2=839$

श्रेष्ठ समूह का मध्यमान (प्रशिक्षित समूह) द्वितीय समूह का मध्यमान (अप्रशिक्षित समूह)

$$(Mp) = AM + \left(\frac{\sum fd}{N}\right) i \qquad (Mq) = AM + \left(\frac{\sum fd}{N}\right) i$$

$$= 22 + \frac{77}{90} \times 5 \qquad = 17 + \frac{62}{110} \times 5$$

$$= 22 + \frac{385}{90} \qquad = 17 + \frac{310}{110}$$

$$= 22+4.28 \qquad = 17+2.82$$

$$= 26.28 \qquad = 19.82$$

सम्पूर्ण समूह (Total Group) का मध्यमान

$$(M_t) = AM + \left(\frac{\sum fd}{N}\right) i$$

$$= 22 + \frac{29}{200} \times 5$$

$$= 22 + \frac{145}{200}$$

$$= 22 + .73$$

$$= 22.73$$

सम्पूर्ण समूह (Total Group) का प्रामाणिक विचलन

$$(S.D._t) = i\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{\frac{839}{200} - \left(\frac{29}{200}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{4.19 - (0.15)^2}$$

$$= 5\sqrt{4.19 - 0.02}$$

$$= 5\sqrt{4.17}$$

$$= 5 \times 2.04$$

$$= 10.20$$

$$\text{(p) प्रथम समूह का अनुपात} = \frac{\text{प्रथम समूह की आवृत्तियों का योग}}{\text{सम्पूर्ण समूह की आवृत्तियों का योग}}$$

$$= \frac{90}{200} = .45$$

$$\text{(q) द्वितीय समूह का अनुपात} = \frac{\text{द्वितीयसमूह की आवृत्तियों का योग}}{\text{सम्पूर्ण समूह की आवृत्तियों का योग}}$$

$$= \frac{110}{200} = .55$$

दोनों समूह के अनुपात का योग एक होता है।

$$0.45 + 0.55 = 1.00$$

(u) कोटि का मान (Ordinate value)

जिस बिन्दु पर p तथा q के अनुपात एक दूसरे के वक्र को काटते हैं, उस बिन्दु का कोटि मान ज्ञात करते हैं। सरल रूप में 0.50 से p अथवा q अनुपात का अन्तर ज्ञात कर, उसके मान के आधार पर सारणी A द्वारा कोटिमान (Ordinate value) ज्ञात किया जाता है।

.55-.50 =.05 के आधार पर सारणी Aद्वारा कोटिमान 0.396 ज्ञात हुआ।

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध $rbis = \frac{Mp - Mq}{S.D._t} \times \frac{pq}{u}$

सूत्र में सभी मान रखने पर

$$= \frac{26.28 - 19.82}{10.20} \times \frac{.45 \times .55}{.396}$$
$$= \frac{6.46}{10.20} \times \frac{.2475}{.396}$$
$$= .63 \times .63$$
$$= .3969$$
$$= +.40$$

गणना के चरण-

1. प्रथम समूह (प्रशिक्षित समूह) की आवृत्ति के आधार पर मध्यमान (M_p) ज्ञात किया जो कि 26.28 प्राप्त हुआ।
2. द्वितीय समूह (अप्रशिक्षित समूह) की आवृत्ति के आधार पर मध्यमान (M_q) ज्ञात किया जो कि 19.82 प्राप्त हुआ।
3. सम्पूर्ण समूह का प्रामाणिक विचलन (S.D.) प्रशिक्षित व अप्रशिक्षित समूह की योग आवृत्तियों के आधार पर 10.20 प्राप्त किया।
4. प्रथम समूह का अनुपात 0.45 (90/200) तथा द्वितीय समूह का अनुपात 0.55 (110/200) ज्ञात किया।
5. कोटिमान (Ordinate value) सारणी C द्वारा ज्ञात की गई, जो कि 0.396 प्राप्त हुई।
6. द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rbis) ज्ञात करने के उद्देश्य से सूत्र में सभी प्राप्त मानों को रखकर व गणना द्वारा सरल कर rbis+0.40 प्राप्त किया।

अन्य सूत्र द्वारा भी द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं-

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध ज्ञात करने के उद्देश्य से अन्य सूत्र का प्रयोग भी कर सकते हैं, इसके लिये सम्पूर्ण समूह का मध्यमान (M_t) ज्ञात किया जो कि 22.73 प्राप्त हुआ। सूत्र में सभी मानों को रखते हुए द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध rbis+0.40 प्राप्त हुआ।

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध $rbis = \frac{Mp - Mt}{S.D._t} \times \frac{p}{u}$

इसमें, Mp = श्रेष्ठ समूह का मध्यमान

(M_t) = सम्पूर्ण समूह का मध्यमान

SD_t = सम्पूर्ण समूह का प्रामाणिक विचलन

P = प्रथम समूह का अनुपात

q = द्वितीय समूह का अनुपात

u = कोटि का मान

सूत्र में सभी मान (value) रखने पर-

$$= \frac{26.28 - 22.73}{10.20} \times \frac{.45}{.396}$$
$$= \frac{3.55}{10.20} \times \frac{.45}{.396}$$
$$= .35 \times 1.14$$
$$= .399$$
$$= +.40$$

प्राप्त द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rbis) के आधार पर प्रामाणिक त्रुटि (standard error) की गणना भी कर सकते हैं।

$$\sigma_{rbis} = \frac{\left(\frac{\sqrt{pq}}{u} - r^2 bis\right)}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{rbis} = \frac{\left(\frac{\sqrt{.45 \times .55}}{.396} - .40^2\right)}{\sqrt{200}}$$

$$\sigma_{rbis} = \frac{\frac{\sqrt{.2475}}{.396} - .16}{14.14}$$

$$\sigma_{rbis} = \frac{\frac{.50}{.396} - .16}{14.14}$$

$$\sigma_{rbis} = \frac{1.26 - .16}{14.14}$$

$$\sigma_{rbis} = \frac{1.10}{14.14}$$

$$\sigma_{rbis} = 0.08$$

इसमें,

σ_{rbis} = द्वि पांक्तिक सहसम्बन्ध की प्रामाणिक त्रुटि

P = प्रथम समूह का अनुपात

q = द्वितीय समूह का अनुपात

u = कोटिमान

r^2bis = द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध का वर्ग

N = सम्पूर्ण समूह की आवृत्तियों का योग

8.4 बिन्दु-द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध

जब प्रथम X परिवर्ती निरन्तर व सामान्य वितरण के अनुरूप मात्रात्मक रूप में होता है, तथा द्वितीय Y परिवर्ती गुणात्मक रूप में द्विविभाजित होता है किन्तु असत्त एवं सामान्य वितरण के अनुरूप इसके प्राप्तांक नहीं होते हैं, तब बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) की गणना की जाती है। (If one variable is continuous and quantitative, but the other is qualitative and dichotomous with no underlying continuum, then the corresponding correlation coefficient is called point biserial.)

Minium, King & Bear

द्विविभाजित परिवर्ती के रूप में सफल-असफल, पुरूष-महिला, सामान्य-चिन्ताग्रस्त, समायोजित-कुसमायोजित आदि हो सकते हैं।

(Biserial correlation, as distinct from point biserial correlation, provides a measure of the relation between a continuous variable on the assumption that the variable underlying the dichotomy is continuous and normal.)

Ferguson & Takane

उदाहरण-2

15 विद्यार्थियों पर मनोवैज्ञानिक परीक्षण प्रशासित किया गया। सफल विद्यार्थी 1 से प्रदर्शित हैं, जबकि असफल विद्यार्थी 0 से प्रदर्शित हैं। बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना कर सार्थक अन्तर की जाँच कीजिये।

विद्यार्थी	मनौवैज्ञानिक परीक्षण प्राप्तांक(X परिवर्ती)	सफल/असफल (Y परिवर्ती)	d(X-AM(20)	d^2
1	22	0	2	4
2	21	1	1	1
3	15	0	-5	25
4	20	0	0	0
5	22	0	2	4
6	24	0	4	16
7	18	1	-2	4
8	24	1	4	16
9	25	1	5	25
10	23	1	3	9
11	22	1	2	4
12	23	1	3	9
13	24	1	4	16
14	19	0	-1	1
15	23	0	3	9
			$\Sigma d= 25$	$\Sigma d^2 =143$

सफल विद्यार्थियों का मध्यमान (Mean)

$$(Mp) = \frac{21+18+24+25+23+22+23+24}{8} = \frac{180}{8} = 22.50$$

असफल विद्यार्थियों का मध्यमान (Mean)

$$(Mq) = \frac{22+15+20+22+24+19+23}{7} = \frac{145}{7} = 20.70$$

सभी विद्यार्थियों का मध्यमान (Mean)

$$(M_t) = \frac{180+145}{8+7} = 21.67$$

सभी विद्यार्थियों का प्राप्तांकों का प्रामाणिक विचलन (S.D.)

$$= \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{143}{15} - \left(\frac{25}{15}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9.53 - 1.67^2}$$

$$= \sqrt{9.53 - 2.79}$$

$$= \sqrt{6.74}$$

$$= 2.596$$

$$= 2.60$$

$$P = \frac{\text{सफल विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{कुल विद्यार्थियों की संख्या}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{N_1}{N} = \frac{8}{15} = 0.53$$

$$q = \frac{\text{असफल विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{कुल विद्यार्थियों की संख्या}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{N_2}{N} = \frac{7}{15} = 0.47$$

बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) = $\frac{Mp - Mq}{S.D._t} \times \sqrt{p.q}$

इसमें, Mp = सफल विद्यार्थियों का मध्यमान (22.50)

Mq = असफल विद्यार्थियों का मध्यमान (20.71)

SD_t = सभी प्राप्तांकों का प्रामाणिक विचलन (2.60)

P = सफल विद्यार्थियों का अनुपात (proportion) (.53)

q = असफल विद्यार्थियों का अनुपात (.47)

सूत्र में मान रखने पर

$$rpbis = \frac{22.50 - 20.71}{2.60} \times \sqrt{.53 \times .47}$$

$$= \frac{1.79}{2.60} \times \sqrt{.2491}$$

$$= .69 \times .50$$

$$= +.345$$

बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) की गणना अन्य सूत्र द्वारा भी कर सकते हैं-

$$rpbis = \frac{Mp - M_t}{S.D._t} \times \sqrt{\frac{p}{q}}$$

इसमें Mp = सफल विद्यार्थियों का मध्यमान (22.50)

(M_t) = सभी विद्यार्थियों का मध्यमान (20.67)

SD_t =सभी प्राप्तांकों का प्रामाणिक विचलन (2.60)

P = सफल विद्यार्थियों का अनुपात (0.53)

q = असफल विद्यार्थियों का अनुपात (0.47)

सूत्र में सभी मान रखने पर

$$rpbis = \frac{22.50 - 21.67}{2.60} \times \sqrt{\frac{.53}{.47}}$$

$$= \frac{.83}{2.60} \times \sqrt{1.13}$$

$$= .32 \times .1.06$$

$$= +.339$$

$$= +.34$$

इसी प्रकार निम्नलिखित सूत्र द्वारा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं।

$$rpbis = \frac{M_t - Mq}{S.D._t} \times \sqrt{\frac{q}{p}}$$

सार्थक अन्तर की जाँच -

बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) के आधार पर सार्थक अन्तर की जाँच भी सरलता से कर सकते हैं। बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध का मान Mp व Mq के अन्तर पर निर्भर करता है। Mp तथा Mq में जितना अधिक

अन्तर होगा, सार्थक अन्तर होने की सम्भावना अधिक होती है। प्राप्त बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध मान के आधार पर ‘t’ का मान ज्ञात कर सार्थक अन्तर की जाँच कर सकते हैं-

$$t = rpbis\sqrt{\frac{N-2}{1-r^2 pbis}}$$

$$t = .34\sqrt{\frac{15-2}{1-.34^2}}$$

$$= .34\sqrt{\frac{13}{1-.11}}$$

$$= .34\sqrt{\frac{13}{.88}}$$

$$= .34\sqrt{14.77}$$

$$= .34 \times 3.84$$

$$= 1.305$$

$$= 1.31$$

13 स्वतन्त्रता के अंश (Degree of freedom) के आधार पर प्राप्त t का मान 1.31 सार्थक अन्तर को (0.05 स्तर पर) व्यक्त नहीं करता है। अतः सफल तथा असफल विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के मध्य सार्थक अन्तर 0.05 स्तर पर नहीं है।

8.5 द्विपांक्तिक तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में अन्तर

द्विपांक्तिक तथा बिन्दु द्विपांक्तिक दोनों प्रकार के सहसम्बन्धों की गणना इस प्रकार के दो परिवर्तियों के मध्य होती है, जिनमें प्रथम परिवर्ती (X परिवर्ती) सत्त व सामान्य वितरण के अनुरूप होता है, जबकि द्वितीय Y परिवर्ती द्विविभाजित होता है। द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना तब की जाती है, जबकि द्वितीय Y परिवर्ती (द्विविभाजित) सामान्य वितरण के अनुरूप हो, यदि यह द्विविभाजित परिवर्ती सामान्य वितरण के अनुरूप नहीं होता है, तब ऐसी स्थिति में बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना की जाती है। स्पष्ट है कि जब दोनों ही परिवर्ती X व Y सत्त तथा सामान्य वितरण से सम्बन्धित होते हैं, तब द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना करते हैं, किन्तु जब X परिवर्ती सत्त तथा सामान्य वितरण से सम्बन्धित होता है, एवं Y परिवर्ती असत्त व सामान्य वितरण से सम्बन्धित नहीं होता है तब बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना की जाती है।

द्विपांक्तिक तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध विधियों में कौन अधिक श्रेष्ठ -

X तथा Y परिवर्ती (द्विविभाजित) का सतत् (continuous) तथा सामान्य वितरण के अनुरूप होना प्रायः सम्भव नहीं होता है। (Perfect prediction of a continuous variable from two categoried variable is obviously impossible.) Ferguson & Takane अतः ऐसी स्थिति मे द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना करना उपयुक्त नहीं होता है। परिवर्तियों का वितरण सत्त नहीं है तथा सामान्य रूप से वितरित नहीं है, यह मानते हुए, बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध विधि ही अधिक विश्वसनीय व उपयुक्त परिणाम प्रदान करती है। मनौवैज्ञानिक परीक्षण के पदों का विश्लेषण करने में भी बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध अधिक उपयुक्त रहता है, क्योंकि इस विधि

से इस प्रकार की कोई बाध्यता नहीं होती है कि आँकड़ों का स्वरूप सत्त एवं सामान्य वितरण के अनुरूप होना चाहिये। rpbis के आधार पर पीयर्सन 'r' तथा 't' का मान भी ज्ञात कर सकते हैं एवं सार्थक अन्तर की जाँच भी कर सकते हैं। इस सम्बन्ध में गैरिट का विचार है कि ''अनेक गणनाओं में rbis की अपेक्षा rpbis अधिक उत्तम-अधिक आश्रित-सांख्यिकी है।'' (One must counts rpbis is a better–more dependable–statistic than rbis.) Garrett.

8.6 द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध में परस्पर सम्बन्ध

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध तथा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होता है। इस कारण से निम्नलिखित सूत्रों द्वारा एक प्रकार का सहसम्बन्ध ज्ञात होने पर दूसरे सहसम्बन्ध को ज्ञात किया जा सकता हैं-

$$rpbis = rbis\sqrt{\frac{u}{\sqrt{pq}}}$$

$$rbis = rpbis\sqrt{\frac{\sqrt{pq}}{u}}$$

इसमें, rbis = द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध rpbis = बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध

U = कोटि (ordinate) मान = दोनों समूह के अनुपातों का गुणनफल व उनका वर्गमूल

8.7 फाई गुणांक

फाई सहसम्बन्ध गुणांक को ग्रीक अक्षर फाई (ϕ) के रूप में प्रदर्शित करते हैं, अतः इस प्रकार के सहसम्बन्ध को फाई सहसम्बन्ध गुणांक कहा जाता है। फाई सहसम्बन्ध के अन्तर्गत दोनों ही परिवर्ती द्विविभाजित होते हैं, किन्तु सामान्य रूप से वितरित नहीं होते हैं। द्विविभाजित परिवर्ती के रूप में परीक्षण के पद भी हो सकते हैं, जिनको सही अथवा गलत, सफल अथवा असफल, हाँ अथवा नहीं, आदि प्रतिक्रिया रूप में रखा जा सकता है। ऐसी स्थिति में फाई गुणांक विधि द्वारा उपयुक्त सहसम्बन्ध ज्ञात किया जा सकता है। फाई गुणांक का चतुष्कोटिक सहसम्बन्ध विधि से वही सम्बन्ध है जो कि बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) विधि का द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rbis) विधि के साथ है। (Phi bears the same relation to tetrachoric r as the point biserial bears to biserial r.) Garrett.

उदाहरण-3 निम्नलिखित द्विविभाजित परिवर्तियों के मध्य फाई सहसम्बन्ध गुणांक (ϕ) की गणना कीजिये-

X परिवर्ती

Y परिवर्ती

उपसमूह	नहीं (Yes)	हाँ(No)	योग
हाँ	83(B)	187(A)	270
नहीं	102(D)	93(C)	195
योग	185	290	465

फाई गुणांक phi-coefficient(ϕ) =

$$\phi = \frac{AD - BC}{\sqrt{(A+B)(C+D)(B+D)(A+C)}}$$

सूत्र में सभी मान रखने पर-

$$\phi = \frac{187 \times 102 - 83 \times 93}{\sqrt{270 \times 195 \times 185 \times 280}}$$
$$= \frac{19074 - 7719}{\sqrt{52650 \times 51800}}$$
$$= \frac{11355}{\sqrt{2727270000}}$$
$$= \frac{11355}{52223.27}$$
$$= .217$$
$$= +.22$$

8.8 आसंग गुणांक

फाई गुणांक (ϕ)का काई वर्ग (χ^2) से निश्चित सम्बन्ध होता है। अतः आसंग सारणी (Contingency table)द्वारा प्राप्त काई वर्ग के आधार पर फाई गुणांक (ϕ)ज्ञात किया जा सकता है। इसी प्रकार प्राप्त फाई गुणांक के आधार पर काई वर्ग (χ^2) का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं-

$$(\chi^2) = N\phi^2$$

प्राप्त फाई गुणांक का मान (0.22) सूत्र में रखने पर

$$(\chi^2) = 465 \times .22^2$$
$$= 465 \times .05$$
$$= 23.25$$

यदि प्राप्त काई वर्ग (χ^2) के आधार पर फाई गुणांक (ϕ) का मान ज्ञात करना हो तब निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं-

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$
$$= \sqrt{\frac{23.25}{465}}$$
$$= +.22$$

इसी प्रकार प्राप्त फाई गुणांक का मान प्रोडेक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध (r) गुणांक ही है जो कि दो गुणात्मक तथा द्विविभाजित परिवर्तियों के मध्य ज्ञात किया जाता है।

(The ϕ coefficient is the Pearson correlation coefficient for two variables that are both qualitative and dichotomous.)

Minium, King & Bear

8.9 सारांश

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध का उपयोग ऐसी विशेष स्थिति में किया जाता है जबकि एक परिवर्ती का मापन निरन्तर मापनी के रूप में होता है जबकि दूसरा परिवर्ती दो भागों में विभाजित अर्थात द्विविभाजित होता है यह द्विविभाजित परिवर्ती सत्त एवं सामान्य रूप से वितरित होता है। इसके विपरीत बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध का उपयोग वहाँ किया जाता है जबकि परिवर्ती निरन्तर मापनी के रूप में होता है तथा दूसरा परिवर्ती द्विविभाजित व सामान्य वितरण के अनुरूप नहीं होता है। स्पष्ट है कि जब दोनों ही परिवर्ती X (एक्स) तथा Y (वाई) सत्त तथा सामान्य वितरण से सम्बन्धित होते हैं तब द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध की गणना करते हैं, किन्तु जब X (एक्स) परिवर्ती सत्त व सामान्य वितरण के अनुरूप होता है परन्तु Y (वाई) परिवर्ती असत्त व सामान्य वितरण से सम्बन्धित नहीं होता है तब बिन्दु द्विपांक्तिक की गणना की जाती है।

फाई गुणांक का काई वर्ग से निश्चित सम्बन्ध होता है। इसी आधार पर आसंग सारणी द्वारा प्राप्त काई वर्ग के आधार पर फाई गुणांक ज्ञात किया जा सकता है तथा फाई गुणांक के आधार पर काई वर्ग ज्ञात किया जा सकता है।

8.10 शब्दावली

- **द्विविभाजित आँकडे:** इसप्रकार के आँकड़ो के केवल दो प्रकार होते हैं- जैसे पुरूष महिला, विवाहित-अविवाहित, प्रषिक्षित अप्रषिक्षित जीवित-मृत आदि।
- **कोटि का मान:** जिस बिन्दु पर P तथा q के अनुपात एक दूसरे वक्र को काटते हैं उस बिन्दु का कोटि मान सारणी A द्वारा ज्ञात करते हैं।

8.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) फाई गुणांक सहसम्बन्ध विधि का संकेत चिन्ह हैः

i) r ii) ρ iii) r_t iv) ϕ

2) बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध (rpbis) ज्ञात करने का सूत्र हैः

i) $\frac{M_p - M_q}{S.D.t.} \times \sqrt{p.q}$ ii) $\frac{M_p - M_q}{S.D.t} \times \sqrt{\frac{p}{q}}$

iii) $\frac{M_p + M_q}{S.D.t} \times \sqrt{pq}$ iv) $\frac{M_p - M_q}{S.D.^2} \sqrt{p.q}$

1) iv 2) i

8.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- भाटिया, तारेश (**2009**) आधुनिक मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, लावण्य प्रकाशन, नया पटेल नगर, उरई (उ**0**प्र**0**)
- अस्थाना, विपिन(श्रीवास्तव, विजया तथा अस्थाना, निधि (**2009**) शैक्षिक अनुसन्धान एवं सांख्यिकी, अग्रवाल पब्लिकेशन्स, आगरा-**2**
- कपिल, एच.के. (**2005**) सांख्यिकी के मूल तत्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा-**2**
- गुप्ता, एस.पी. (**2003**) सांख्यिकीय विधियाँ, तृतीय संस्करण, शारदा पुस्तक भवन, इलाहाबाद (उ**0**प्र**0**)
- मिश्रा, बब्बन तथा त्रिपाठी, लाल बचन (**1994**) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी, हर प्रसाद भार्गव, आगरा-**4**
- सिंह, लाभ(प्रसाद, द्वारिका तथा भार्गव, महेश (**1997**) मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सांख्यिकी के मूल आधार, हर प्रसाद भार्गव, आगरा (उ**0**प्र**0**)
- Aggrawal, Y.P. (1986), *Statistical Methods- concept application and computation,* Sterling Publishers Pvt. Ltd. New Delhi.
- Aron, Arthur (Aron, Elaine N. and Coups, Elliot J. (2007), *Statistics for Psychology*. Pearson Prentice Hall, New Delhi.
- Bartz, Albert E. (1985) *Basic Statistical Concepts*. IInd Edition Surjeet Publications, Delhi
- Garrett, Henry E. (1981)) *Statistics in Psychology and Education*. Vakils Feffer and Simons Ltd. Bombay.
- Guilford, J.P. and Fruchter, B. (1978) *Fundamental Statistics for students of psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.

- Siegel, Sidney and Castellan, N. John (1988) *Non-Parametric Statistics for the Behavioural Sciences.* McGraw Hill Book Company, New York.

8.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1) निम्नांकित प्रदत्तों द्वारा बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये।

वर्गान्तर (CI)	श्रेणी 'अ' आवृत्ति Category 'A' (f)	श्रेणी 'ब' आवृत्ति Category 'B' (f)
125-129	9	1
120-124	8	1
115-119	7	2
110-114	5	2
105-109	4	3
100-104	3	3
95-99	2	2
90-94	1	4
85-89	1	6
	N_1=40	N_2=242

2)निम्नांकित आंकड़ों का द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिये

वर्गान्तर (C.I.)	प्रशिक्षण समूह Training Group f	अप्रशिक्षण समूह Non-Traning Group f	योग Total
85-89	5	6	11
80-84	2	16	18
75-79	6	19	25
70-74	6	27	33
65-69	1	19	20
60-64	0	21	21
55-59	1	16	17

$N_1=21$ $N_2=124$ $N=145$

2) 15 छात्रों पर प्रशासित .30 पदों वाले एफ परीक्षण में छात्रों के प्राप्तांक निम्नलिखित थे। छात्रों में से केवल छात्र संख्या 1,2,5, 8, 9,10, 13,14 तथा 15 के छात्र ही पद संख्या 3 को हल (उत्तीर्ण) कर पाये। इस पद का बिन्दु द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

छात्र संख्या Student No.	परीक्षण प्राप्तांक Test Score	पद संख्या 13 Item No. 13
1	25	उत्तीर्ण (Pass)
2	23	उत्तीर्ण (Pass)
3	18	अनुत्तीर्ण (Fail)
4	24	अनुत्तीर्ण (Fail)
5	23	उत्तीर्ण (Pass)
6	20	अनुत्तीर्ण (Fail)
7	19	अनुत्तीर्ण (Fail)
8	22	उत्तीर्ण (Pass)
9	21	उत्तीर्ण (Pass)
10	23	उत्तीर्ण (Pass)
11	21	अनुत्तीर्ण (Fail)
12	20	अनुत्तीर्ण (Pass)
13	21	उत्तीर्ण (Pass)
14	21	उत्तीर्ण (Pass)
15	12	उत्तीर्ण (Pass)

Table-A

द्विपांक्तिक सहसम्बन्ध **(bisr)** सामान्य सम्भाव्यता वक्र का सम्पूर्ण क्षेत्रफल 1.00 मानते हुए कोटि **u**
(Ordinate u)

Biserial correlation (bisr) Ordinates (u) for given areas measured from the mean of a normal distribution with total area of 1.00

Area from the Mean	Ordinates (*u*)	Area from the Mean	Ordinates (*u*)
.00	.399	.26	.311
.01	.399	.27	.304
.02	.398	.28	.296
.03	.398	.29	.288
.04	.397	.30	.280
.05	.396	.31	.271
.06	.394	.32	.262
.07	.393	.33	.253
.08	.391	.34	.243
.09	.389	.35	.233
.10	.386	.36	.223
.11	.384	.37	.212
.12	.381	.38	.200
.13	.378	.39	.188
.14	.374	.40	.176
.15	.370	.41	.162

.16	.366	.42	.149
.17	.362	.43	.134
.18	.358	.44	.119
.19	.353	.45	.103
.20	.348	.46	.086
.21	.342	.47	.068
.22	.337	.48	.048
.23	.331	.49	.027
.24	.324	.50	.000
.25	.318		

ईकाई- 9 क्रान्तिक अनुपात, टी परीक्षण एवं प्रसरण-विश्लेषण(Critical Ratio, '*t*' test and Analysis of Variance)

इकाई सरंचना

9.1 प्रस्तावना
9.2 उद्देश्य
9.3 क्रान्तिक अनुपात
9.4 टी-परीक्षण
9.5 प्रसरण विश्लेषण
9.6 टी-तालिका
9.7 सारांश
9.8 शब्दावली
9.9 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
9.10 सन्दर्भ ग्रन्ध सूची
9.11 निबन्धात्मक प्रश्न

9.1 प्रस्तावना

सामाजिक विज्ञानों में प्रदत्तों के विश्लेषण के लिए सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है। सांख्यिकी का प्रयोग केवल शिक्षा, समाजशास्त्र तथा मनोविज्ञान से सम्बन्धित आँकड़ों को करने के लिए ही नहीं किया जाता है बल्कि अर्थशास्त्र, भूगोल, कृर्षि, चिकित्सा शास्त्र आदि में भी वैज्ञानिक अध्ययन विश्लेषण एवं व्याख्या के लिए प्रयोग किया जाता है। मनोविज्ञान के विद्यार्थियों द्वारा विभिन्न विषयों के मूल आँकड़ो को मानक अंको में परिवर्तित करके उनको तुलनात्मक रूप प्रदान किया जाता है। ऐसा करने के लिए संख्यािकी के विभिन्न विधियों, जैसे टी-परीक्षण, प्रसरण विश्लेषण, क्रान्तिक अनुपात परीक्षण आदि का उपयोग किया जाता है। सांख्यिकीय विधियों के आधार पर मनोवैज्ञानिक प्रयोगों एवं परीक्षणों के ऐसे अभिकल्प बनाने में सहायता मिलती है, जिनसे मनोवैज्ञानिक तथ्यों का अध्ययन उच्च कोटि के कठोर वैज्ञानिक स्तर पर करना सम्भव होता है।

9.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अन्तर्गत हम प्रसरण विश्लेषण, क्रान्तिक अनुपात परीक्षण एवं टी-परीक्षण के बारे में जानकारी प्राप्त करेगें। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप जान सकेंगे कि-

- क्रान्तिक अनुपात क्या होता है।
- इसका उपयोग कब करते हैं।
- टी-परीक्षण किसे कहते है तथा इसका उपयोग कब करते हैं।
- क्रान्तिक अनुपात परीक्षण तथा टी-परीक्षण के बीच क्या अन्तर है।
- प्रसरण विश्लेषण क्या होता है तथा इसका उपयोग कब करते हैं।

- प्रसरण विश्लेषण और टी-परीक्षण में क्या अन्तर होता है।
- प्रसरण विश्लेषण एवं टी-परीक्षण में क्या सम्बन्ध होता है।

9.3 क्रान्तिक अनुपात

विभिन्न प्रकार के दो समूहों के मध्यमानों की सार्थकता की जाँच अलग-अलग विधि द्वारा की जाती है। मनोवैज्ञानिक अध्ययनों में प्रायोगिक समूह कई प्रकार के होते हैं जैसे (1) बड़े समूह तथा छोटे समूह (2) प्रायोगीक समूह तथा नियन्त्रित समूह (3) सह-सम्बन्धित समूह तथा असह-सम्बन्धित समूह। सह-सम्बन्धित समूहों को तुल्यात्मक समूह (Equivalent Groups) भी कहते है तथा असह-सम्बन्धित समूहों (Uncorrelated Groups) को स्वतन्त्र समूह भी कहते है। बड़े समूहों में मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच का आधार क्रान्तिक अनुपात का मान होता है, जिसकी गणना सम्बन्धित समूहों के मानक विचलनों अथवा मानक त्रुटियों के आधार पर की जाती है।

1) दो बड़े स्वतन्त्र प्रतिदर्शो में मध्यमानों की सार्थकता की जाँच-

जब दो बड़े स्वतन्त्र समूहों के मध्यमानों की जाँच करनी होती है तब क्रान्तिक अनुपात परीक्षण का उपयोग किया जाता है। इस परीक्षण के अन्तर्गत दोनों मध्यमानों के अन्तर को दोनों समूहों की अन्तर की मानक त्रुटि (Standard Error or Difference or SEd or d) से विभाजित करने पर जो मान प्राप्त होता है, वह क्रान्तिक अनुपात कहलाता है। जिस प्रकार एक मध्यमान की विश्वसनीयता की जाँच उसकी SD, संख्या (N), तथा SE पर निर्भर करता है, ठीक उसी तरह से, दो मध्यमानों की विश्वसनीयता की जाँच उनके मध्यमान अन्तर तथा सम्बन्धित अन्तर की मानक त्रुटि पर आधारित होती है।

क्रान्तिक अनुपात के मान की विवेचना ठीक उसी प्रकार होती है जिस प्रकार अन्तर की मानक त्रुटि (SEm)के मान की होती है। जिस प्रकार से अपने प्रतिदर्श के प्रति 1.96 का मान (Value) महत्तवपूर्ण होता है ठीक उसी प्रकार दो मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच में क्रान्तिक अनुपात का मान होता है, दूसरे शब्दों में जब क्रान्तिक अनुपात का मान 1.96 SEm हो जाता है, तब यह मान निरर्थक मान न रहकर क्रान्तिक कहलाता है, क्योंकि अब दोनों प्रतिदर्शों के मध्यमानों का अन्तर एक ऐसी स्थिति में पहुच जाता है, जबकि ऐसे अन्तर को संयोगजन्य (Due to chance) या फिर, प्रतिदर्श की त्रुटियों के कारण उत्पन्न हुआ नहीं कहा जा सकता है।

यहाँ पर अन्तर की मानक त्रुटि (SE_d)की गणना का आधार दोनों प्रतिदर्शो के मध्यमानों के मानक त्रुटियों के मान होते हैं, वेसे दोनो प्रतिदर्शो के मानक विचलनों के आधार पर SE_d की गणना प्रत्यक्ष रूप से भी की जा सकती है।

2) दो बड़े स्वतन्त्र समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच के चरण-

- प्रत्येक समूह के मध्यमान की मानक त्रुटि ज्ञात करना।
- दोनों समूहो के अन्तर की मानक त्रुटि ज्ञात करना।
- दोनों समूहों के मध्यमानों के अन्तर (Md) को अन्तर की मानक त्रुटि (SE_d)से विभाजित
- करना तथा क्रान्तिक अनुपात (CR) के मान को ज्ञात करना।
- दोनों समूहों की अलग-अलग संख्याओं (N1 तथा N2) के आधार पर उपयुक्त स्वतन्त्रता (d.f.)के अंशों को ज्ञात करना।

- दी गई टी तालिका में सम्बन्धित स्वतन्त्रता के अंशो (d.f.) पर तथा विश्वास के विभिन्न स्तरों पर सार्थकता की जाँच करना।

अब उपरोक्त चरणों को समझने के लिए निचे कुछ उदाहरण दिये जा रहे है। जिससे इसके बारे में समझने में आसानी होगी।

उदाहरण 1-

एक प्रयोगकर्त्ता ने दो विभिन्न प्रकार के प्रतिक्रिया कालों- साधारण प्रतिक्रिया काल (S.R.T) तथा चयनात्मक प्रतिक्रिया काल (D.R.T) के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए 100 निरीक्षण (Observations) अलग-अलग किये। दोनों प्रकार के प्रतिक्रिया कालों के मध्यमान, मानक विचलन व संख्या (N) नीचे दी गयी हैं। बताइये, क्या दोनों प्रकार के प्रतिक्रिया कालों के मध्यमानों में सार्थक अन्तर (significant difference) है ?

प्रतिकिया काल का प्रकार	परीक्षणों की संख्या (N)	मध्यमान (M)	मानक विचलन (S.D.)
A. Simple R.T.	100	.22	.03
B. Discriminatory R.T.	100	.25	.04

हल- मध्यमान की मानक त्रुटि (SE_m)का सूत्रः

$$SE_m = \frac{S.D.}{\sqrt{N}} \quad \text{(बड़े प्रतिदर्श में)}$$

यहाँ $$SE_{m1} = \frac{S.D._1}{\sqrt{N_1}} = \frac{\cdot 03}{\sqrt{100}} = \frac{\cdot 03}{10} = \cdot 003$$

इसी प्रकार $$SE_{m2} = \frac{S.D._2}{\sqrt{N_2}} = \frac{\cdot 04}{\sqrt{100}} = \frac{\cdot 04}{10} = \cdot 004$$

अन्तर की मानक त्रुटि (SE_d) का सूत्र :

$$SE_d = \sqrt{SE_{m1}^2 + SE_{m2}^2}$$

यहाँ $$SE_d \text{ or } (\sigma_d) = \sqrt{(\cdot 003)^2 + (\cdot 004)^2}$$
$$= \sqrt{\cdot 000009 + \cdot 000016}$$
$$= \sqrt{\cdot 000025}$$
$$= \cdot 005$$

क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio) का सूत्र :

$$= \frac{M_1 - M_2 - 0}{\sigma_d}$$

टिप्पणी- यहाँ अन्तर का मान ज्ञात करने में धनात्मक अथवा ऋणात्मक चिह्नों को ध्यान में नहीं रखा जाता है, केवल मध्यमान अन्तर (M_d) को ही देखा जाता है। दोनों के अन्तर में से सैद्धान्तिक रूप से परिकल्पनात्मक शून्य (Hypothetical Zero) को घटा दिया जाता है। व्यावहारिक रूप से शून्य के घटा देने का कोई महत्त्व ही नहीं है, अतएव इसका प्रयोग प्रायः छोड़ ही दिया जाता है। इस प्रकारः

$$C.R. = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_d} \quad \text{..... सूत्र} = (102)$$

यहाँ $C.R. = \frac{.22 - .25}{.005} = \frac{0.03}{.005} = 6$

यहाँ स्वतन्त्रता के अंश (d.f.) =100 + 100 - 2 = 198

198 के स्वतंत्रता के अंशों पर सार्थकता के लिए C.R. का आवश्यक मानः

5% विश्वास के स्तर पर = 1.97

1% विश्वास के स्तर पर = 2.60

यहाँ C.R. का प्राप्त 6 का मान उपरोक्त दानों मानों से बहुत अधिक है।

अतः प्रस्तुत उदाहरण में दोनों प्रकार के प्रतिकिया कालों में सार्थक अन्तर (significant difference) देखने में आता है, और इस कारण यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis) को .01 विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) किया जाता है, और यहाँ यह मानना पड़ेगा कि साधारण प्रतिक्रिया काल तथा चयनात्मक प्रतिक्रिया के मध्यमानों में सार्थक अन्तर देखने में आता है।

उदाहरण 2 -

एक अभियोजन अनुसूचित (Adjustment Inventory) को 60 लड़कियों व 50 लड़कों को दिया गया। उनके प्राप्तांकों के मध्यमान व मानक विचलन नीचे दिये गये हैं:

	मध्यमान **(M)**	मानक विचलन **(S.D.)**	संख्या **(N)**
लड़कियों	81	5-2	60
लड़के	90	6-3	50

बताइये क्या लड़के व लड़कियों के प्राप्तांकों में सार्थक अन्तर (Significant Difference) है ?

हल- अन्तर की मानक-त्रुटि (SE_d) को निम्नलिखित सूत्र द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है:

$$SE_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$ ....सूत्र (103)

यहाँ $SE_d \text{ (or } \sigma_d) = \sqrt{\frac{(5\cdot2)^2}{60} + \frac{(6\cdot3)^2}{50}}$

$$= \sqrt{\frac{27\cdot04}{60} + \frac{39\cdot69}{50}}$$

$$= \sqrt{\cdot4506 + \cdot7938}$$

$$= \sqrt{1\cdot2444}$$

$$= 1\cdot1155$$

$$C.R. = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_d}$$

यहाँ $C.R. = \frac{81-90}{1\cdot52} = \frac{9}{1\cdot12} = 8\cdot068$

$= 8\ 07$ (दो दशमलव तक)

यहाँ $d.f. = (50+60-2) = 108$

108 d.f. पर सार्थकता के लिए आवश्यक C.R. का मान;

5% विश्वास के स्तर पर = 1.98

1% विश्वास के स्तर पर = 2.63

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त C.R. का 8.07 का मान उपरोक्त दोनों मानों से बहुत अधिक है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis) को 1% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) किया जाता है, और यहाँ यह मानना पड़ेगा कि लड़के व लड़कियों के प्राप्तांकों में सार्थक अन्तर पाये गये हैं।

उदाहरण 3-

एक बुद्धि-परीक्षण में लड़कियों व लड़कों के प्राप्तांकों के मध्यमान, मानक विचलन व उनकी सम्बन्धित संख्या नीचे दी गयी है:

	M	σ	N
लड़कियाँ	105-7	6-4	156
लड़के	109-9	8-1	144

अध्ययनकर्त्ता ने यहाँ लड़कों व लड़कियों के प्राप्तांकों के मध्यमानों के सम्बन्ध में निराकरणीय परिकल्पना की रचना की है, बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना सत्य है?

हल-

$$C.R. = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_d}$$

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

यहाँ $\sigma_d = \sqrt{\frac{(6.4)^2}{156} + \frac{(8.1)^2}{144}}$

$$= \sqrt{\frac{40.96}{156} + \frac{65.61}{144}}$$

$$= \sqrt{.2626 + .4556}$$

$$= \sqrt{.7182}$$

$$= .847$$

यहाँ $C.R. = \frac{109.9 - 105.7}{.85} = \frac{4.2}{.85}$

= 4.96 (Rounded off to two decimal places)

यहाँ d.f. = (156 – 1) +(144 - 1) = 298

298 d.f.पर सार्थकता के लिए C.R. का आवश्यक मान:

5% विश्वास के स्तर पर = 1.97

1% विश्वास के स्तर पर = 2.60

यहाँ यह प्राप्त C.R. का 4.96 का मान उपरोक्त दोनों मानों से बहुत अधिक है, अतएव यहाँ .01 विश्वास के स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना (H_0)की अस्वीकृत किया जाता है, तथा यहाँ यह मानना पड़ेगा कि दिये गये बुद्धि परीक्षण के आधार पर लड़के व लड़कियों के प्राप्तांकों में सार्थक अन्तर देखने में आता है।

अभी तक हमने जिन उदाहरणों को लिया है, उनमें परिकल्पना के स्वरूप के अनुसार अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (Test) द्वि-पक्षीय (Two-tailed) रहा है, क्योंकि उनमें अन्तर की दिशा को स्पष्ट नहीं किया गया है, तथा जिसमें महत्तव केवल इसी तथ्य को दिया है कि दोनों मध्यमानों में सार्थक अन्तर है, या नहीं ? इसके विपरीत, हमारी परिकल्पना का अधार एक-पक्षीय (One-tailed) भी हो सकता है।

9.4 टी-परीक्षण

टी-अनुपात की व्याख्या सबसे पहले डब्लू0एम0 गैसेट (W.M. Gosset) ने 'स्टूडेन्ट' (Student) नामक उपनाम (Pet name) के साथ सन् 1908 में किया। इसी कारण से टी-परीक्षण केा 'स्टूडेन्ट टी' नामक उपनाम के नाम से जाना जाता है। इस प्रकार के परीक्षण का उपयोग छोटे आकड़ो के लिए ही उपयुर्कत रहता है। प्रायः विद्यार्थी ही अपने प्रतिदिन के प्रयोगो और परीक्षणों में ऐसे छोटे आकड़ो का प्रयोग करते हैं, और प्रायः ऐसे परीक्षण का सम्बन्ध विद्यार्थी से ही रहता है, इसी कारण से इसे विद्यार्थी का परीक्षण भी कहाँ जाता है।

सामान्यतः 't' परीक्षण दो माध्यों के बीच के अन्तर की सार्थकता की जाँच करने का एक महत्तवपूर्ण प्राचलिक सांख्यिकी है लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि इसका प्रयोग सिर्फ माध्यों के अन्तर की सार्थकता की जाँच करने में किया जाता है। वास्तविकता तो यह है कि इसका प्रयोग अन्य सांख्यिकीय विधियों जैसे- पियरसन आर (Peroson r), Point-biserial r, कोटि अन्तर सह संबन्ध (rank-difference method) आदि की सार्थकता की जाँच करने में भी किया जाता है।

1) **क्रान्तिक अनुपात परीक्षण तथा टी-परीक्षण में अन्तर-**

i) क्रान्तिक अनुपात परीक्षण का उपयोग प्रायः दो बड़े समूहो के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए किया जाता है, जब कि टी-परीक्षण का उपयोग दो छोटे समूहों के मध्यमानों के अन्तर को सार्थकता की जाँच के लिए किया जाता है।

ii) क्रान्तिक अनुपात के मूल्य की सार्थकता की जाँच स्वतन्त्रता के अंशों पर ज्ञात करना प्रायः इतना आवश्यक नहीं होता, परन्तु टी-परीक्षण के मान (Value) की सार्थकता की जाँच सम्बन्धित स्वतन्त्रा के अंशों पर ही किया जाता है। जब स्वतन्त्रता के अंशों की संख्या 30 से कम होती है, तब ऐसी स्थिति में ऐसा करना आवश्यक होता है, परन्तु जब यह संख्या 10 या 10 से भी कम होती है, तब ऐसा करना और भी आवश्यक होता है। लेकिन क्रान्तिक अनुपात की विवेचना के लिए ऐसा करना आवश्यक नहीं होताहै, क्योंकि क्रान्तिक अनुपात के मूल्य की गणना प्रायः बड़े समूहो में ही की जाती है, जिनकी संख्या (N) अधिक होने के कारण विभिन्न स्वतन्त्रा के अंशों के लिए क्रान्तिक अनुपात के मान प्रायः एक से ही रहते है, परन्तु छोटे प्रतिदर्शो में विभिन्न स्वतन्त्रता के अंशों पर सार्थकता के लिए टी-मान (t-value) अलग-अलग होते हैं।

iii) क्रान्तिक अनुपात मान (C.R.Value) के लिए या फिर SEm की गणना में सम्बन्धित प्रतिदर्शो की संख्या में से एक-एक की संख्या घटाना इतना आवश्यक नहीं होता है, परन्तु टी-मान की गणना में ऐसा करना बहुत आवश्यक होता है। इसका मुख्य कारण यह है कि क्रान्तिक अनुपात की गणना बड़े प्रतिदर्शो में की जाती है, और वहाँ पर S.D. या SEm की गणना में 1 की संख्या घटाने से S.D. या SEm को मान पर प्रायः कोई प्रभाव नहीं पड़ता है जबकि छोटे प्रतिदर्शो में संख्या कम होती है इस कारण से 1 की संख्या घटाने या न घटाने पर इसका S.D. के मान पर प्रभाव पड़ता है।

iv) टी-परीक्षण द्वारा t-value की गणना C-Rकी गणना से आपेक्षाकृत बहुत सरल होता है।

v) विभिन्न स्वतन्त्रा के अंशों पर टी के मान भिन्न-भिन्न होते हैं लेकिन क्रान्तिक अनुपात के मान विभिनन d.f. पर प्रायः स्थायी से ही रहता है।

2) टी-परीक्षण की गणना-

- $$t = \frac{Md}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$
- $$t = \frac{Md}{\sqrt{\left(\frac{SS_1 + SS_2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$
- $$t = \frac{Md}{\sqrt{\frac{\Sigma X_1^2 / N_1 - (M_2)^2}{N_1 - 1} + \frac{(\Sigma X_2^2 / N_2) - (M_2)^2}{N_2 - 1}}}$$

टी-मान (t-value) ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं-

टी-मान ज्ञात करने में उपरोक्त तीनों प्रकार के सूत्रों का प्रयोग किया जाता है, परन्तु उपरोक्त तीनों सूत्रों में से तीसरा सूत्र सबसे अधिक सरल और सुविधाजनक होता है।

t-मान (t-value) की गणना के पहले सूत्र की व्याख्याः

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$

जबकिः

M_1 = पहले प्रतिदर्श का माध्य

M_2 = दूसरे प्रतिदर्श का माध्य

Σd_1^2 = पहले प्रतिदर्श के प्राप्तांकों के अपने मध्यमान से विचलनों के वर्गों (squares) का योग।

M_d = M_1 तथा M_2 का अन्तर

Σd_2^2 = दूसरे प्रतिदर्श के प्राप्तांकों के अपने मध्यमान से विचलनों के वर्गों (squares) का योग

N_1 = पहले प्रतिदर्श की संख्या

N_2 = दूसरे प्रतिदर्श की संख्या

यहाँ $\sqrt{\Sigma d_2^2 + \Sigma d_2^2 / N_1+N_2 - 2}$ सूत्र द्वारा दोनों प्रतिदर्शो (समूहों) का संयुक्त मानक विचलन (Combined S.D.) ज्ञात किया गया है, तथा यहाँ SE_d का सूत्र है:

$$\sigma_{d = S.D.\ comb.} \sqrt{N_1+N_2 / N_1N_2}$$

उदाहरण 4-

तात्कालिक स्मृति (Immediate memory) का एक परीक्षण एक कक्षा के 10 लड़कों व 10 लड़कियों को दिया गया। उनके परिणाम नीचे दिये गये है।

लड़कों की तात्कालिक स्मृति का विस्तार	7	5	6	5	6	6	7	9	8	6
लड़कियों की तात्कालिक स्मृति का विस्तार	7	6	5	8	9	8	8	9	6	9

यहाँ अध्ययनकर्त्ता ने निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis) की रचना की है। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना यहाँ सत्य है?

हल-

Group	Group				
A	B	d_1	d_2	d_1^2	d_2^2
7	7	+0.5	–0.5	.25	.25
5	6	–0.5	–1.5	2.25	2.25
6	5	–0.5	–2.5	.25	2.25

5	8	–1.5	+0.5	2.25	.25
6	9	–0.5	+1.5	.25	2.25
6	8	–0.5	+0.5	.25	.25
7	8	+0.5	+0.5	.25	.25
9	9	+2.5	+1.5	6.25	2.25
8	6	+1.5	–1.5	2.25	2.25
6	9	–0.5	+1.5	.25	2.25
ΣX_2=65	**ΣX_2=75**			**Σd_1^2=14.50**	**Σd_2^2=18.50**

$M_1 = \frac{65}{10} = 6.5$ $M_2 = \frac{75}{10} = 7.5$

t-अनुपात (t-Ratio) का सूत्रः

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$

यहाँ
$$t = \frac{6.5 - 7.5}{\sqrt{\left(\frac{14.50 + 18.50}{10 + 10 - 2}\right)\left(\frac{10 + 10}{10 \times 10}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{33}{18}\right)\left(\frac{20}{100}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1.8333 \times .2}}$$

$$= \frac{1}{1.354 \times .447}$$

$= \frac{1}{\quad}$ = 1.66 (दो दशमलव तक)

.605

यहाँ, Degrees of Freedom $= (N_1 - 1) + (N_2 - 1)$

$= (10 - 1) + (10 - 1) = 18$

18 d.f. पर सार्थकता के लिए t का आवश्यक मान:

5% विश्वास के स्तर पर = 2.10

1% विश्वास के स्तर पर = 2.88

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त t का मान उपरोक्त दानों मानों से बहुत कम है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना सत्य है, और यह मानना पड़ेगा कि लड़कों व लड़कियों के तात्कालिक स्मृति के विस्तार में सार्थक अन्तर नहीं है।

उदाहरण 5-

बोध-विस्तार (Span of Apprehension) के एक अध्ययन में दो संकायों (Faculties) के छात्रों को लिया गया। A समूह में कला संकाय तथा B समूह में विज्ञान संकाय के छात्र थे। उनके बोध-विस्तार के परिणाम नीचे दिये गये हैः

Group A	8	10	9	9	8	10	7	11	7	11
Group B	10	12	13	10	9	12				

अध्ययनकर्त्ता ने अपने अध्ययन में निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis) की रचना की है। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की कल्पना (Assumption) यहाँ स्वीकार योग्य (Acceptable) है?

हल-

Group	**Group**				
A	**B**	d_1	d_2	d_1^2	d_2^2
8	10	–1	–1	1	1
10	12	+1	+1	1	1
9	13	0	+2	0	4
9	10	0	–1	0	1
8	9	–1	–2	1	4

10	12	+1	+1	1	1
7		–2		4	
11		+2		4	
7		–2		4	
11		+2		4	
$N_1 = 10$ **$\Sigma X_2=90$** **$M_1 = 9$**	**$N_2 = 6$** **$\Sigma X_2=66$** **$M_2 = 11$**			**$\Sigma d_1^2=20$**	**$\Sigma d_2^2=12$**

t-अनुपात (t-ratio) का सूत्र-

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 \ N_2}\right)}}$$

$$\text{यहाँ } t = \frac{9 - 11}{\sqrt{\left(\frac{20 + 12}{10 + 6 - 2}\right)\left(\frac{10 + 6}{10 \times 6}\right)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{32}{14}\right)\left(\frac{16}{60}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{16}{7}\right)\left(\frac{4}{15}\right)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{64}{105}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{.6095}}$$

$$= \frac{2}{.78}$$

$$= 2.56$$

यहाँ d.f. – (10 – 1) + (6 – 1) = 14

14 d.f. पर सार्थकता के लिए का आवश्यक t मान:

5% विश्वास के स्तर पर = 2.14

1% विश्वास के स्तर पर = 2.98

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त t का मान 5% विश्वास स्तर पर सार्थक हे, परन्तु 1% विश्वास के स्तर पर सार्थक नहीं है। अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना को 5% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है, और यहाँ यह मानना पड़ेगा कि कला संकाय तथा विज्ञान संकाय के छात्रों में बोध-विस्तार (Span of Apprehension) के प्रति सार्थक अन्तर देखने में आये हैं। इस प्रकार अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना यहाँ 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर स्वीकार योग्य (Acceptable) नहीं है।

3) सम्बन्धित प्रतिदर्शो के मध्यमानों (Means)की गणना किये बिना सीधे प्राप्तांकों (Scores) के आधार पर ज के मान की गणना-

जब आँकड़े छोटे होते हैं, व संख्या (N) कम (Small) होती है, उस स्थिति में t का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र भी सुविधाजनक रहता है।

- $$t = \frac{Md}{\sqrt{\left(\frac{SS_1 + SS_2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$

जबकि SS_1 = Sum of Squares of Group I

SS_2 = Sum of Squares of Group I

तथा $SS_1 = \Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2 / N_1$

$SS_2 = \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2 / N_2$

N_1 = N of the I Group

N_2 = N of the II Group

M_1 = Mean of the I Group

M_2 = Mean of the II Group

M_d = Difference of M_1 and M_2

उदाहरण के लिए यहाँ t के दूसरे उदाहरण के आँकड़ों (Data)को ही प्रयोग में लाया गया है:

Group	Group	X_1^2	

8	10	64	100
10	12	100	144
9	13	81	169
9	10	81	100
8	9	64	81
10	12	100	144
7		49	
11		121	
7		49	
11		121	
$\Sigma X_1=90$ $N_1=10$ $M_1=9$	$\Sigma X_2=66$ $N_2=6$ $M_2=11$	$\Sigma X_1^2=830$	$\Sigma X_2^2=738$

यहाँ, $M_d = 11 - 9 = 2$

$SS_1 = \Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2 / N_1$

$= 830 - (90)^2 / 10$

$= 830 - 8100 / 10$

$= 830 - 810$

$= 20$

$SS_2 = \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2 / N_2$

$= 738 - (66)^2 / 6$

$= 738 - 4356 / 6$

$= 738 - 726$

$= 12$

प्राप्त SS_1 तथा SS_2 के मानों को सूत्र में रखने परः

$$t = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{20+12}{10+6-2}\right)\left(\frac{10+6}{10 \times 6}\right)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{32}{14} \times \frac{16}{60}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{64}{105}}}$$

$$= \frac{2}{.78}$$

$$= 2.56$$

यहाँ भी परिणाम वही आता है, जोकि पहले उदाहरण संख्या 2 में आया है।

t का मान एक तीसरी विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है जोकि अपेक्षाकृत और भी अधिक सरल है। इसके अनुसार:

$$t = \frac{Md}{\sqrt{\frac{\Sigma X_1^2 / N_1 - (M_2)^2}{N_1 - 1} + \frac{(\Sigma X_2^2 / N_2) - (M_2)^2}{N_2 - 1}}}$$

इस विधि द्वारा गणना करने पर ज का मान वही आयेगा, जो कि पहली दोनों विधियों में आया है। इन तीनों विधियों में तीसरी विधि अधिक सुविधाजनक है, क्योंकि इसके उपयोग से गणना का (calculation) कार्य-भार कुछ कम हो जाता है क्योंकि प्रथम विधि का उपयोग उसी स्थिति में सरल रहता है, जबकि दोनों समूहों के मध्यमान दशमलव में न आते हों, यदि दशमलव में आते हैं, तब d_1 तथा d_2 के मान भी दशमलव में आयेगे और इससे गणना का कार्य बढ़ जायेगा। t की दूसरी विधि के प्रयोग में भी SS_1 तथा SS_2 के मान अलग निकालने पड़ते है, परन्तु t के मान ज्ञात करने की तीसरी विधि में अलग से ऐसी कोई गणना नहीं करनी पड़ती। इस प्रकार सामान्यतः t के मान ज्ञात करने की तीसरी विधि ही अधिक उपयुक्त रहती है।

9.5 प्रसरण विश्लेषण

Analysis of Variance का ही हिन्दी रूपान्तरण प्रसरण विश्लेषण है ANOVA एक ऐसा सांख्यिकीय विश्लेषण है जिसके द्वारा शोधकर्त्ता दो या दो से अधिक समूहों के माध्यों के अन्तर की सार्थकता की जाँच करता

है। इस विधि का प्रतिपादन प्रोफेसर आर.ए. फिशर (R.A. Fisher) द्वारा किया गया, जिन्होंने इस विधि का प्रयोग कृषि सम्बन्धी अनुसन्धानों में किया। प्रोफेसर आर.ए. फिशर (R.A. Fisher) के सम्मान में उनके विषय जी.डब्लू. स्नेडेकर (G.W. Snedecor) ने इसे एफ अनुपात (F-Ratio) या एफ. परीक्षण (F-Test) भी कहा है।

प्रसरण विश्लेषण विधि का प्रयोग प्रायः उस स्थिति में किया जाता है जब कि प्रायः तुलनात्मक समूहों में हम विभिन्न अभिक्रियाओं का अध्ययन करते हैं, तथा यह पता लगाना चाहते है कि क्या विभिन्न अभिक्रियाओं के प्रभावों के कारण मध्यमानों में सार्थक अन्तर है? इस प्रकार प्रसरण विश्लेषण, टी-परीक्षण का ही एक विकसित रूप है। विभिन्न सांख्यिकी विद्वानो ने अपने-अपने तरीको से प्रसरण विश्लेषण को परिभाषित किये है-

फरय्यूसन (Ferguson) 1981 के अनुसार, "The analyisis of Variance is method for dividing the varriation observed in experimental data into different parts, each part assignable to a known source, cause or factor".

Mandenhall - Rormey (1973) के अनुसार, "एक आश्रित परिवर्त्य एवं एक या एक से अधिक स्वतन्त्र परिवर्त्यों के मध्य गुणात्मक अथवा परिमाणात्मक सम्बन्धों को खोजने के लिए अभिकल्पित सामान्य प्रक्रिया को प्रसरण विश्लेषण कहते है।"

Stratton - Hayss (1991) के अनुसार, "प्रसरण विश्लेषण एक सांख्यिकीय प्रक्रिया है जिसके द्वारा यह निर्धारित किया जाता है कि समूहो के प्राप्तांक एक दूसरे से भिन्न है या नहीं।''

1) प्रसरण विश्लेषण तथा टी-परीक्षण में सम्बन्ध-

प्रसरण विश्लेषण, टी-परीक्षण का ही एक तरह से विकसित और विस्तृत रूप है। सामान्य वितरण में जहाँ हम टी-परीक्षण के माध्यम से दो मध्यमानों के अन्तर्गत व्याप्त अन्तर की सार्थकता का अध्ययन करते हैं, वही प्रसरण विश्लेषण के माध्यम से हम प्रायः तीन या तीन से अधिक समूहों के मध्य व्याप्त अन्तरों की सार्थकता का अध्ययन करते हैं। वैसे तो इस तरह के सांख्यिकीय विश्लेषण में टी-परीक्षण का भी उपयोग कर सकते हैं लेकिन तीन समूहों के माध्य के अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए तीन टी (t) ज्ञात करना होगा, जिसमें शोधकर्ता को ज्यादा समय लग जायेगा।

2) प्रसरण विश्लेषण का प्रकार-

प्रसरण विश्लेषण को स्वतन्त्र चर के आधार पर दो भागों में बाटा जाता है-

i. साधारण प्रसरण विश्लेषण-

इस प्रकार के प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग तब होता है जब प्रतिदर्श का विभाजन यादृच्छिक (randomly) ढंग से किसी इस स्वतन्त्रचर के आधार पर विभिन्न समूहों में हुआ हो। चूंकि यहा पर वर्गीकरण का आधार एक ही स्वतन्त्र चर होता है, अतः इसे एक मार्गी प्रसरण विश्लेषण (one way analysis of variance) भी कहाँ जाता है। साधारण प्रकार के प्रसरण विश्लेषण में मूल प्रसरण को कुल दो भागों में बाँटकर विश्लेषण किया जाता है-

1. बाह्य प्रसरण (Between or among Variance)
2. आन्तरिक प्रसरण (Within Variance)

बाह्‌ प्रसरण को समूह के बीच का प्रसरण भी कहाँ जाता है। यह एक ऐसा प्रसरण है जिसमें सभी समूहों के प्राप्तांकों के आधार पर प्राप्त माध्य से प्रत्येक समूह के माध्य की भिन्नता का पता चलता है। प्रत्येक समूह में पाये जाने वाले प्राप्तांकों की औसत विभिन्नता को समूहों के भीतर का प्रसरण (Within Variance) भी कहाँ जाता है। प्रत्येक समूह का प्रसरण (Variance of SD2)अलग-अलग ज्ञात करके फिर उन सभी प्रसरणों का औसत ज्ञात किया जाता है और इस औसत को समूहो के भीतर का प्रसरण (Within Variance) कहाँ जाता है। वाह्य प्रसरण (Between Variance) तथा आन्तरिक प्रसरण (Within Variance) के अनुपात को एफ अनुपात (F-Ratio) कहाँ जाता है। जिसका सूत्र है।

$$F = \frac{\text{Between Variance}}{\text{within Variance}}$$

ii. जटिल प्रसरण विश्लेषण (Complex ANOVA)-

इस प्रकार के प्रसरण विश्लेषण का उपयोग तब किया जाता है, जब प्रयोज्यों को दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर के आधार पर कई भागों में यादृच्छिक (randomly) ढंग से आवंटित कर दिया गया हो। यहाँ पर वर्गीकरण या आवंटन के दो आधार होते हैं। जब वर्गीकरण के कम से कम दो आधार होते हैं तो उसे Two-way ANOVA कहते है जब कि वर्गीकरण के तीन स्पष्ट आधार होते हैं तो उसे Three-way ANOVA कहते है। इस प्रकार के प्रयोगात्मक अभिकल्प (Experimental Design) को कारक अभिकल्प कहते है जिसमें मुख्य प्रभाव (main effect) के आलावा अन्तः क्रिया प्रसरण (interaction effect) का भी विश्लेषण किया जाता है।

<u>उदाहरण 6-</u>

मान लिजिए कि कोई प्रयोगकर्त्त सीखने की प्रक्रिया पर अभ्यास तथा प्रेरणा के प्रभाव का अध्ययन करना चाहता है यहाँ पर प्रयोगकर्त्ता अभ्यास का दो स्तर लेता है A_1 और A_2 इसी प्रकार प्रेरणा का तीन स्तर लेता है B_1 , B_2 तथा B_3 तब कुल प्रयोगात्मक अवस्था 2x3=6 होगी। मान लिजिए प्रयोगकर्त्ता यहाँ पर 12 प्रयोज्य लेता है और प्रत्येक प्रयोगात्मक अवस्था में 2-2 प्रयोज्य यादृच्छिक ढंग से आवंटित कर देता है तब इस परिस्थिति में तालिका 2x6 निम्न प्रकार से होगी, जिसमें प्रत्येक प्रयोज्य के सीखने का निशपादन के प्रप्तांक को भी दिया गया है।

		प्रेरणा		
		B1	B2	B3
अभ्यास	A1	4.5	6.6	8.9
	A2	3.4	5.6	7.8

यहाँ पर B_1, B_2 तथा B_3 के प्रभाव को कालम प्रभाव (Column effect), तथा A_1 एवं A_2 के प्रभाव को Raw effect कहा जाता है इन दोनों तरह के प्रभाव को मुख्य प्रभाव (Main effect) तथा Raw एवं Column के संयुक्त प्रभाव को अन्तः क्रिया प्रभाव कहाँ जाता है।

iii. प्रसरण विश्लेषण में निहित मूल अभिग्रह (Basic Assumptions in Analysis of Variance) -

प्रसरण विश्लेषण में मुख्य रूप से निम्न मूल अभिग्रह निहित होता हैं-

- चयन किये गए प्रतिदर्श की मापन की जाने वाली विशेषता जनसंख्या में प्रसामान्य रूप से वितरित होनी चाहिए।
- जिस जनसंख्या से प्रतिदर्श का चयन किया गया हो, उस जनसंख्या में प्रसरण समजातीय (Homogeneous) होना चाहिए।
- चूने गये प्रतिदर्श एक ही जनसंख्या से होनी चाहिए।
- प्रायोगिक दशाओं का प्रभाव योगात्मक होता है इसलिए प्रसरण को विभाजित कर दिया जाता है।
- प्रदत्त में स्वतन्त्र निरीक्षणों का प्रयोग किया गया हो।
- चुने हुए समूहों में समान विसरण होना चाहिए।
- समूह की इकाइयों का चयन यादृच्छिक (Random Sampling) आधार पर किया गया हों।

iv. प्रसरण विश्लेषण (ANOVA) ज्ञात करने के मुख्य चरण-

प्रसरण विश्लेषण ज्ञात करने के लिए निम्नालिखित चरणों का प्रयोग करते हैं-

- संशोधन (Correction)- संशोधन ज्ञात करने के लिए सभी समूहों के प्राप्तांकों का योग ज्ञात करते हैं और उनका वर्ग करके कुल संख्या (N) से विभाजित कर देते हैं।

  सूत्र- $C = (\sum X)^2/N$

- समस्त वर्गों का योग (Total sum of squares)- सभी समूहों के समस्त प्राप्तांकों के वर्गों के योग ज्ञात करने के पश्चात सभी वर्गों के योग में से संशोधनमान को घटा देते हैं।

  सूत्र- $SStot = (\sum X_1^2 + X_1^2 + ... X_2^2 + X_2^2 ..... X_3^2 + X_3^2 ....) - C$

- समूहों में व्याप्त मध्यमानों के वर्गों का योग (Sum of Squares between Groups)- इस चरण के अन्तर्गत समूहो के प्राप्तांकों के योग के वर्ग को उस समूह के N से विभाजित कर दिया जाता है और प्राप्त सभी भागफल के योग में से C को घटा दिया जाता हैं-

  सूत्र- $SSbg = \sum X_1^2/N_1 + \sum X_2^2/N_2 .... - C$

- समूहों के अन्तर्गत वर्गों का योग (Sum of Squares within groups or Error Variance)- इस चरण के अन्तर्गत समस्त वर्गों के योग में से समूहों के मध्य वर्गों के योग को घटा दिया जाता है।

  सूत्र- $SSwg = SStot - SSbg$

- प्रसरण विश्लेषण की सारांश तालिका- उपरोक्त गणनाओं के पश्चात One way ANOVA के लिए निम्न तालिका का निर्माण करते हैं।

प्रसरण का स्रोत		स्वतन्त्रता के अंश	वर्गों का योग	मध्यमान वर्ग चरण	F	Level of Significance
Between group 5	चरण-3	K-1	2 ÷ K-1 (a)		a/b	0.05 - 0.01
Within groups	चरण-4	N-k	3 ÷ N-K (b)			
योग		N-1				

v. **प्रसरण विश्लेषण विधि द्वारा गणना-**

उदाहरण 7-

एक तात्कालिक स्मृति (Immediate memory) के परीक्षण में 21 बालकों को आयु के आधार पर तीन समूहों A, B तथा C में विभाजित किया गया। परीक्षण में प्राप्त उनके अंक नीचे दिये गये हैं। बताइये क्या यहाँ आयु के आधार पर तीनों समूह एक-दूसरे से सार्थक रूप से भिन्न हैं ?

समूह A	समूह B	समूह C	
3	4	5	
5	5	5	
3	3	5	
1	4	1	
7	9	7	$\sum X = 96$
3	5	3	$N = 21$
6	5	7	
$\sum X_1 = 28$	$\sum X_2 = 35$	$\sum X_3 = 33$	
$N_1 = 7$	$N_2 = 7$	$N_3 = 7$	

हल- **(A)** संशोधन = $(\sum X)^2/N$

$= (96)^2/21 \quad = 9216/21 \quad = 438.86$

(B) समस्त वर्गों का योग (Total Sum of Squares)

$= (X_1^2 + X_1^2 + \ldots\ldots\ldots + X_2^2 + X_2^2 + \ldots\ldots\ldots + X_3^2\ X_3^2) - C$

$=3^2+5^2+3^2+1^2+7^2+3^2+6^2+4^2+5^2+3^2+4^2+9^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2+1^2+7^2+3^2+7^2 - C$

$= 9+25+9+1+49+9+36+16+25+9+16+81+25+25+25+25+25+1+49+9+49 - C$

$= 518 - 438.86 \quad = 79.14$

(C) समूहों के मध्य में वर्गों का योग (Sum of Squares between Groups)

$= (\sum X_1)^2/N_1 + (\sum X_2)^2/N_2 + (\sum X_3)^2/N_3 - C$

$= (28)^2/7 + (35)^2/7 + (33)^2/7 - 438.86$

$= 784/7 + 1225/7 + 1089/7 - 438.86$

$= 3098/7 - 438.86$

$= 442.57 - 438.86 \quad = 3.71$

(D) समूहों के मध्य में वर्गों का योग (Sum of Squares within Groups)

$= SS_{tot} - SS_{bg}$

$= 78.14 - 3.7 \quad = 75.43$

Sources of Variation	**d.f**	**Sum of Squares**	**Mean Square or (Variance)**
Between Groups	2	3.71	1.85
Within Groups	18	75.44	4.19
Total	20	79.15	

$$F = \frac{\text{Mean Square between Groups}}{\text{Mean Square within Groups}}$$

$$= \frac{1.85}{4.19} = 0.44$$

d.f Between Groups = (K – 1) = (3 – 1) = 2

d.f Within Groups (N_{tot} – K) = (21 – 3) = 18

5% स्तर पर सार्थकता के लिए Fका मान = 3.55

1% स्तर पर सार्थकता के लिए F का मान = 6.01

प्रस्तुत समस्या में F का मान ऊपर दिये गये दोनों स्तरों पर सार्थकता के लिए आवश्यक मानों से बहुत कम है अतएव प्रस्तुत समस्या में निराकरणीय परिकल्पना सत्य है, अर्थत् तीनों समूहों A, B तथा C के बालकों में सार्थक अन्तर नहीं है तथा सब बालक एक ही समष्टि का प्रतिनिधित्व कर रहे हैं।

उदाहरण 8-

बुद्धि-लब्धि (I.Q.) के आधार पर विभाजित समूहों A, B, C तथा D को ध्यान-विस्तार (Span of Apprehension) का एक परीक्षण दिया गया। चारों समूहों के प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं। दिये गये प्राप्तांकों के आधार पर यह जाँच कीजिए कि क्या समूहों के मध्यमानों में सार्थक अन्तर है ?

समूह **A**	समूह **B**	समूह **C**	समूह **D**
9	6	4	5
7	6	5	1
8	9	8	4
9	7	6	2
7	4	2	3
$\sum X_1 = 40$	$\sum X_2 = 32$	$\sum X_3 = 25$	$\sum X_4 = 15$

$\sum X = 112$ N = 20

हल- (A) संशोधन (Correction) $= \frac{(\sum X)^2}{N}$

$$= \frac{(112)^2}{20}$$

$$= \frac{12544}{20} = 627.2$$

(B) Total Sum of Squares (SS_{tot})

$= (X_1^{\ 2}+X_1+....+X_2^{\ 2}+X_2^{\ 2}+...+X_3^{\ 2}\ X_3^{\ 2}+...+X_4^{\ 2}\ X_4^{\ 2}+....+X_n^{\ 2}\ X_n^{\ 2}) - C$

$SS_{tot} = (9^2+7^2+....+4^2+2^2+3^2) - 627.2$

$= 742 - 627.2 = 114.8$

(C) Sum of Squares between Groups

$= (\sum X_1)^2/N_1 + (\sum X_2)^2/N_2 + (\sum X_3)^2/N_3 + (\sum X_4)^2/N_4 - C$

$= (40)^2/5 + (32)^2/5 + (25)^2/5 + (15)^2/5 - 627.2$

$= \frac{1600 + 1024 + 625 + 225}{5} - 627.2$

$= \frac{3474}{5} - 627.2 = 694.8 - 627.2 = 67.6$

(D) Sum of Squares within Groups

$= SS_{tot} - SS_{bg}$

$= 114.8 - 67.6 = 47.2$

d.f Between Groups $= (K - 1) = (4 - 1) = 3$

d.f Within Groups $= (N - K) = (20 - 4) = 16$

(E) प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of Variance) –

Sources of Variation	d.f	Sum of Squares	Mean Square or (Variance)	S.D.
Between Groups	3	67.6	22.53	
Within Groups	16	47.2	2.95	1.72
Total	19	114.8		

$F = \frac{22.53}{2.95}$

$= 7.637 = 7.64$ (Rounded upto two decimal places)

सम्बन्धित स्वतन्त्रता के अंशों पर सार्थकता का आवश्यक मानः

5% स्तर पर = 3.24

1% स्तर पर = 5.29

प्रस्तुत परीक्षण में हमारा F का मान स्तर 1% पर सार्थकता के लिए आवश्यक मान से भी अधिक है, अतएव ऐसी स्थिति में निराकरणीय परिकल्पना अस्वीकृत (Reject)कर दी जाती है और यहाँ इस परीक्षण से यह स्पष्ट हो जाता है कि बुद्धि-लब्धि के आधार पर विभाजित समूहों में ध्यान-विस्तार में सार्थक रूप से अन्तर देखने में आया है, और हमारे इस कथन में विश्वास का स्तर 1% है।

vi. प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of Variance) द्वारा सह-सम्बन्धित आँकड़ों या समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच-

अब तक जिन समूहों के मध्यमानों के अन्तरों की सार्थकता की जाँच की गयी है, वे असह-सम्बन्धित थे। प्रायः दो समूह जब किसी एक आधार पर सह-सम्बन्धित होते हैं, तब उनके मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच F-अनुपात (F-Ratio) द्वारा भी सरलतापूर्वक की जा सकती हैं ऐसी स्थिति में मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच नीचे दिये गये प्रश्न में की गयी है, जिसमें Two way ANOVA का उपयोग किया गया है।

उदाहरण 9-

दस विद्यार्थियों के समूहों को दो स्थितियों के अन्तर्गत श्रवण सम्बन्धी तात्कालिक स्मृति (Auditory Immediate Memory) का एक परीक्षण दिया गया। Condition1 अर्थात् प्रथम स्थिति में उन्हें एक उत्तेजक औषधि दी गयी तथा Condition2 अर्थात् द्वितीय स्थिति में एक अवसादक औषधि दी गयी। दोनों स्थितियों में उनकी तात्कालिक स्मृति का विस्तार नीचे सारणी में दिया गया है। F-अनुपात के आधार पर ज्ञात कीजिए कि क्या औषधियों के प्रभाव के कारण दोनों स्थितियों में सार्थक अन्तर आता है?

तात्कालिक स्मृति का विस्तार (Span of Immediate Memory)

Subjects	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Condition 1 :	7	9	6	9	8	10	5	6	9	11
Condition 2:	5	6	3	2	4	3	5	3	7	2

हल- Conditions

I	II	Total
7	5	12
9	6	15
6	3	9
9	2	11
8	4	12
10	3	13
5	5	10
6	3	9
9	7	16
11	2	13
$\sum X_1 = 80$ $M_1 = 8$	$\sum X_2 = 40$ $M_2 = 4$	$\sum X = 25$ $N = (N_1 + N_2) = 20$

A. संशोधन $= \frac{(X)^2}{N} = \frac{(120)^2}{20}$

$= \frac{14400}{20} = 720$

B. समस्त वर्गों का योग (Total Sum of Squares)

$= (X_1^2 + X_1^2 + ...+ X_2^2 + X_2^2) - C$

$= (7^2 + 9^2 + ...+ 7^2 + 2^2) - C$

$= 860 - 720 = 140$

C. औषधियों के मध्यमानों के मध्य वर्गों का योग (Sum of Squares Between Means of Medicines)

$= (\sum X_1)^2/N_1 + (\sum X_2)^2/N_2 - C$

$= (80)^2/10 + (40)^2/10 - \text{Correction}$

$$= \frac{6400 + 1600}{10} - 720$$

$$= \frac{8000}{10} - 720$$

$$= 800 – 720 = 80$$

D. विद्यार्थियों के मध्य वर्गों का योग (Sum of Squares within Students) –

$$= \frac{(X_1+X_2)^2 + (X_1+X_2)^2 .... (X_1+X_2)^2}{K} – Correction$$

= ½∑[$(12)^2 + (15)^2 + (9)^2 + (11)^2 + (12)^2 + (13)^2 + (10)^2 + (9)^2 + (16)^2 + (13)^2$] – Correction

= ½∑[144+225+81+121+144+169+100+81+256+169] – 720

$$= \frac{(1490)}{2} – 720$$

= 745 – 720 = 25

E. विद्यार्थियों तथा औषधियों की अन्तक्रिया (Interaction)के कारण वर्गों का योग (Sum of Squares due to Interaction) –

= 140 – (80 + 25) = 35

F. प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of Variance) –

Sources of Variation	**d.f**	**Sum of Squares**	**(Variance)**	**S.D.**
Between Medicines	1	80	80.00	20.56
Between Students	9	25	2.78	0.71
Interaction	9	35	3.89	1.97
Total	10	140	86.67	

9.8 सांख्यिकीय तालिका

टी-तालिका

जबकि d.f. 24 है, तब 2.06 का t का मान .05 विश्वास के स्तर पर सार्थक है, तथा 2.80 का मान 0.01 विश्वास के स्तर पर सार्थक है।

Degrees of Freedom	Probability (P)			
	0.1	0.05	0.05	0.01
1	t=6.34	t=12.71	t=31.82	t=63.66
2	2.92	4.30	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.60
5	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.90	2.36	3.00	3.50
8	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.80	2.20	2.72	3.11
12	1.78	2.18	2.68	3.06
13	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.76	2.14	2.62	2.98
15	1.75	2.13	2.60	2.95
16	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.74	2.11	2.57	2.90

18	1.73	2.10	2.55	2.88
19	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.72	2.09	2.53	2.84
21	1.72	2.08	2.52	2.83
22	1.72	2.07	2.51	2.82
23	1.71	2.07	2.50	2.81
24	1.71	2.06	2.49	2.80
25	1.71	2.06	2.48	2.79
26	1.71	2.06	2.48	2.78
27	1.70	2.05	2.47	2.77
28	1.70	2.05	2.47	2.76
29	1.70	2.04	2.46	2.76
30	1.70	2.04	2.46	2.75
35	1.69	2.03	2.44	2.72
40	1.68	2.02	2.42	2.71
45	1.68	2.02	2.41	2.69
50	1.68	2.01	2.40	2.68
60	1.67	2.00	2.39	2.66
70	1.67	2.00	2.38	2.65
80	1.66	1.99	2.38	2.64
90	1.66	1.99	2.37	2.63
100	1.66	1.98	2.36	2.63
125	1.66	1.98	2.36	2.62

150	1.66	1.97	2.35	2.61
200	1.65	1.97	2.35	2.60
300	1.65	1.97	2.34	2.59
400	1.65	1.96	2.34	2.59
500	1.65	1.96	2.33	2.59
1000	1.65	1.96	2.33	2.58
∞	1.65	1.96	2.33	2.58

9.9 सारांश

क्रान्तिक अनुपात परीक्षण का उपयोग उस समय किया जाता है जब दो बड़े समूहों के मध्यमानों के बीच की सार्थकता की जाँच करनी होती है। जिस प्रकार एक मध्यमान की विश्वसनीयता की जाँच उसकी SD संख्या (N), तथा SE पर निर्भर करता है, ठीक उसी प्रकार से दो मध्यमानों की विश्वसनीयता की जाँच उनके मध्यमान अन्तर (Md)तथा सम्बन्धित अन्तर की मानक त्रुटि पर आधारित होती है। क्रान्तिक अनुपात के मान की विवेचना ठीक उसी प्रकार होती है जिस प्रकार से अन्तर त्रुटि के मानभी होती है। टी- परीक्षण का उपयोग प्रायः छोटे आकड़ो के बीच मध्यमानो की सार्थकता की जाँच के लिए किया जाता है। इस परीक्षण का प्रतिपादन डब्लू0एम0 गैसेट (W.M. Gosset) द्वारा किया गया। प्रायः इस प्रकार के परीक्षण का उपयोग विद्यार्थियों द्वारा ही किया जाता है, इसी कारण से इसे विद्यार्थी का परीक्षण भी कहा जाता है। प्रसरण विश्लेषण का प्रतिपादन प्राफेसर आर0ए0फिशर द्वारा किया गया। प्रसरण विश्लेषण एक ऐसा सांख्यिकीय विधि है जिसके द्वारा शोधकर्ता दो या दो से अधिक समूहो के माध्यों के अन्तर की सार्थकता की जाँच करता है। यह मुख्यतः दो प्रकार का होता है- पहला, सरल प्रसरण विश्लेषण एवं दूसरा जटिल प्रसरण विश्लेषण।

9.10 शब्दावली

- **क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio):** इस परीक्षण के अन्तर्गत दो बड़े समूहो के मध्यमानों के अन्तर को दोनों समूहों की मानक त्रुटि से विभाजित करने पर जो मान प्राप्त होता है, वह क्रान्तिक अनुपात कहलाता है।
- **टी-परीक्षण (t-test):** टी-परीक्षण या टी- अनुपात वास्तव में दो माध्यों के अन्तर तथा इस अन्तर के मानक त्रुटि का एक अनुपात होता है।
- **एफ. अनुपात:** बाह्य प्रसरण (between variance)तथा आन्तरिक प्रसरण (within variance) के अनुपात को एफ अनुपात (F-ratio) कहाँ जाता है।

- **बाह्य प्रसरण (between variance):** इस प्रसरण के अन्तर्गत सभी समूहों के प्राप्तांकों के आधार पर प्राप्त माध्य से प्रत्येक समूह के माध्य की भिन्नता का पता चलता है।
- **आन्तरिक प्रसरण (within variance):** प्रत्येक समूह में पाये जाने वाले प्राप्तांकों की औसत विभिन्नता को आन्तरिक प्रसरण कहा जाता है।

9.11 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) मनोवैज्ञानिक अध्ययनों में प्रायोगिक समूह कितने प्रकार के होते हैं?
2) किस प्रकार के प्रतिदर्शो के मध्यमानों के अन्तर की जाँच के लिए क्रान्तिक अनुपात का प्रयाग किया जाता है।
3) क्रान्तिक अनुपात का सूत्र क्या है?
4) टी-परीक्षण का प्रयोग कब करना चाहिए।
5) टी-परीक्षण के किसी एक सूत्र को लिखिए।
6) टी-परीक्षण का प्रयोग सर्व प्रथम किसने किया।
7) समस्त वर्गो के योग का सूत्र क्या है?
8) समूहों में व्याप्त मध्यमानों के वर्गो के योग का सूत्र क्या है?
9) प्रसरण विश्लेषण विधि के प्रतिपादक कौन है?

उत्तर: 1)मनोवैज्ञानिक प्रयोगो में प्रायोगिक समूह मुख्यतः तीन प्रकार के होती है-

a) बड़े समूह तथा छोटे समूह
b) प्रायोगिक समूह तथा नियन्त्रित समूह
c) सह-सम्बन्धित समूह तथा असह सम्बन्धित समूह।

2) बड़े समूह के प्रतिदर्शो के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता के जाँच के लिए क्रान्तिक अनुपात का प्रयोग किया जाता है।

3) क्रान्तिक अनुपात का सूत्र-

$$CR = \frac{M_1 - M_2 - 0}{\sigma d \text{ or } SE_d}$$

4) टी-परीक्षण का प्रयोग उस समय किया जाता है जब प्रतिदर्श का आकार छोटा होता है।

5) टी- परीक्षण का सूत्र-

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$

6) टी- परीक्षण का सर्व प्रथम प्रयोग डब्लू-एम0गोसेट (W.M. Gosset) ने सन् 1908 में किया।

7) समस्त वर्गों के योग का सूत्र-

$$SS_{tot} = (X_1^2 + X_1^2 + \ldots\ldots\ldots + X_2^2 + X_2^2 \ldots\ldots\ldots + X_3^2 \ldots\ldots\ldots) - C$$

8) समूहो में व्याप्त मध्यमानों के वर्गों के योग का सूत्र-

$$SS_{bg} = \frac{\sum X_1^2}{N_1} + \frac{\sum X_2^2}{N_2} \ldots\ldots\ldots - C$$

9) प्रसरण विश्लेषण विधि के प्रति पादक एफ-डब्लू फिशर है।

9.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- Anastasi, Anne, Psychological Testing, New York: The MacMillan Co., 1954.
- Garrett, H.E., Statistics in Psychology and Education, Bombay: Vakils, Feffer and Sinons P.Ltd., 1967.
- भागर्व एम0 (1999) आधुनिक मनोवैज्ञानिक परीक्षण एवं मापन, हरप्रसाद भार्गव, आगरा।
- सिंह, अरूण कुमार (2002) मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में सांख्यिकी, नोवेल्टी एण्ड कम्पनी, पटना-8।
- कपिल, एच. के. (1994) सांख्यिकी के मूलतत्त्व, विनोद पुस्तक मंदिर, आगरा।
- रामजी श्रीवास्तव (2003), मनोविज्ञान, शिक्षा तथा समाजशास्त्र में सांख्यिकीय विधियाँ, मोतीलाल बनारसीदास बंगलोरोड, दिल्ली।

9.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1. प्रसरण विश्लेषण किसे कहते हैं। टी-परीक्षण तथा प्रसरण विश्लेषण के बीच सम्बन्धों का वर्जन कीजिए।
2. एक कक्षा के 10 लड़कों तथा 10 लड़कियों पर एक परीक्षण किया गया, जिसका परिणाम नीचे दिया गया है,यहाँ पर शोधकर्ता ने शून्य उपकल्पना बनाई है। टी-परीक्षण का प्रयोग करके बताइये कि शोधकर्ता की उपकल्पना यहाँ सत्य है।

लड़को का प्राप्तांक	12	15	14	11	10	6	7	13	9	10
लड़कियों का प्राप्तांक	12	14	16	18	20	6	8	9	10	11

3. टी-परीक्षण का उपयोग कब करते हैं। टी-परीक्षण तथा क्रान्तिक अनुपात परीक्षण के बीच अन्तर को स्पष्ट कीजिए।
4. एफ परीक्षण के तीन स्थितियों के अन्तर्गत तीन तुल्यात्मक समूहों के प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं। यहाँपर शोधकर्ता ने तीनों स्थितियों के प्राप्तांकों के विषय में शून्य उपकल्पना की रचना की है बताइये क्या शोधकर्ता की उपकल्पना यहाँ पर सत्य है।
5.

समूह	समूह	समूह
4	3	6
5	2	7
7	6	10
8	9	11
4	1	13

ईकाई-10 काई-वर्ग परीक्षण एवं मध्यांक परीक्षण (Chi-Square and Median Test)

इकाई संरचना

10.1 प्रस्तावना

10.2 उद्देश्य

10.3 काई वर्ग परीक्षण

10.4 मध्यांक परीक्षण

10.5 सांख्यिकीय तालिका

10.6 सारांश

10.7 शब्दावली

10.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

10.9 सन्दर्भ ग्रन्ध सूची

10.10 निबन्धात्मक प्रश्न

10.1 प्रस्तावना

अभी तक इसके पूर्व की इकाई में प्रसरण विश्लेषण (ANOVA),टी-परीक्षण (T-Test) और क्रान्तिक अनुपात के विषय में बताया गया है। इस प्रकार की सांख्यिकी विधियों को प्राचलिक सांख्यिकी के नाम से जाना जाता है। प्राचलिक सांख्यिकी वे सांख्यिकी है जिसका सम्बन्ध- एक समष्टि (Universe) के किसी एक विशेष प्राचल (Parameter) से होता है। अभी तक जिस प्रकार के आँकड़ो का अध्ययन टी-परीक्षण, क्रान्तिक अनुपात और प्रसरण विश्लेषण (ANOVA) के आधार पर किया गया है, वह आँकड़े प्रायः प्रतिदर्श के रूप में रहे हैं, तथा उनका सम्बन्ध सम्पूर्ण समष्टि तथा प्रसामान्य वितरण से रहा है, लेकिन कुछ प्रदत्त ऐसे भी होते हैं जिनका सम्बन्ध ऐसी संख्याओं से होता है जो कि दो या दो से अधिक संवर्गों जैसे-हाँ, नहीं, अनिश्चित या सफल-असफल अथवा very unfavourable, unfavourable, indifferent favourable, very favourable आदि में विभाजित रहते हैं। ऐसे आंकड़ों का स्वरूप प्रायः वर्गित संख्याओं अथवा वर्गित आवृत्तियों में ही रहता है इस प्रकार के आँकड़ों को अप्राचल (Non-Parameter)कहते हैं, और इस प्रकार के आंकड़ो के विश्लेषण के लिए सांख्यिकी के जिन विधियों का प्रयोग किया जाता है वे अप्राचल सांख्यिकी के अन्तर्गत आते हैं, जैसे- x^2 काई-वर्ग परीक्षण, मध्यांक परीक्षण, Median test, Sign test आदि।

10.2 उदेश्य

प्रस्तुत इकाई के अन्तर्गत ऐसे आँकड़ो का सांख्यिकीय विश्लेषण किया जायेगा जिनका सम्बन्ध प्रायः समाज के विभिन्न वर्गों तथा व्यक्तियों के अधिमानात्क मूल्यों ,किसी एक साजिक समस्या के प्रति समाज के व्यक्तियों की अभिवृत्तियों के मापन, विज्ञापनों की तुलनात्मक प्रभावशीलता, प्रौढ़ व्यक्तियों के मानसिक स्वास्थ्य पर पड़ने वाले प्रभावों या किसी विशेष वस्तु या व्यक्ति के प्रति पसन्द-नापसन्द आदि से होता है। ऐसे आँकड़ो का स्वरूप प्रतिचयन (Sampling) जैसे आँकड़ो से भिन्न होता है। इस इकाई के अन्तर्गत ऐसे आँकड़ो के विश्लेषण हेतु काई-वर्ग और मध्यांक परीक्षण (Median test) का प्रयोग किया जायेगा।

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप जान पायेंगे कि-

- काई वर्ग परीक्षण की सामान्य विशेषताएँ क्या-क्या होती है।
- काई वर्ग परीक्षण की उपयोगिता क्या है।
- काई वर्ग परीक्षण का आधार क्या है।
- काई वर्ग की गणना के विभिन्न चरण कौन -कौन से होते हैं।
- काई वर्ग की गणना विधि
- मघ्यांक परीक्षण क्या होता है, तथा उसका उपयोग कब करते हैं।
- मध्यांक परीक्षण की गणना विधि।

10.3 काई वर्ग परीक्षण

काई-वर्ग परीक्षण एक ऐसा प्राचलिक सांख्यिकी (Non-Paramatric Statistics) है जिसका प्रयोग बहुत सी दशाओं में पूर्व निर्धारित तथ्य और उपकल्पना में पायी जाने वाली सहमति या भिन्नता के अध्ययन के लिए किया जाता है। इस सांख्यिकी विधि का आविष्कार हल्मर्ट (Helmert,1876) तथा कार्ल पीयरसन (Kal Pearson,1900) ने किया जिसका वास्तविक और अवलोकित आवृत्तियों में विद्यमान भिन्नता के लिए किया जाता है। कार्ल पियरसन ने ग्रीक अक्षर काई-वर्ग का सर्वप्रथम प्रयोग सन् 1900 ई0 में किया। उनका उदेश्य प्रेक्षित घटना (Observed Phenomena) तथा सिद्धान्त आधारित प्रत्याशित घटना (Expected Phenomenon) के अन्तर की व्याख्या करना था।

काई-वर्ग परीक्षण को गिलफोर्ड (1956) ने सामान्य- उदेश्य सांख्यिकी (general purpose statistics) कहाँ है। कर्टज तथा मेयो के अनुसार, काई- वर्ग का प्रयोग प्रायः यह निश्चित करने के लिए किया जाता है कि क्या प्रेक्षित आवृत्तियों का सेट ऐसा है जो मात्र संयोग परिवर्तनों के कारण उन आवृत्तियों से भिन्न है जो किसी तरह के सिद्धान्त के आधार पर प्रत्याशित है।

1) काई-वर्ग परीक्षण की सामान्य विशेषताएँ-

काई-वर्ग परीक्षण की सामान्य विशेषताएँ निम्न हैं-

- काई-वर्ग के प्रयोग के लिए यह आवश्यक है कि आँकड़े आवृत्तियों या अनुपात अथवा प्रतिशत के रूप में व्यक्त किये गये हों।
- काई-वर्ग की एक विशेषता यह है कि परीक्षण द्वारा एक ही समय में एक ही उपकल्पना के अन्तर्गत एक से अधिक चरों की सार्थकता की जाँच की जा सकती है।
- काई वर्ग ऐसे अनुपातों का योग होता है, जो कि एक परीक्षण में प्रेक्षित आवृत्तियों तथा किसी एक सिद्धान्त अथवा उपकल्पना के आधार पर प्रत्याशित आवृत्तियों के बीच पाये जाने वाले अन्तर पर आधारित होता है।

2) काई-वर्ग (x^2) की उपयोगिता-

काई-वर्ग परीक्षण का अनुसन्धान कार्य में उपकल्पनाओं के परीक्षण हेतु महत्वपूर्ण उपयोग है। जिनमें निम्नलिखित प्रमुख है-

- काई-वर्ग का प्रयोग वितरण की सामान्यता की जाँच करने में की जाती है। काई-वर्ग के इस प्रयोग को समानुकता (Goodness-of-fit)की संज्ञा दी जाती है।
- इसका उपयोग प्रेक्षित आवृत्तियों तथा प्रत्याशित घटनाओं की व्याख्या करना होता है।
- काई-वर्ग परीक्षण द्वारा एक समय पर एक से अधिक चरों का, अन्य चरों पर प्रभाव का अध्ययन एक हीउपकल्पना के अन्तर्गत एक साथ किया जा सकता है।
- काई-वर्ग परीक्षण का प्रयोग ऐसी स्थितियों में विशेषतः उपयोगी रहता है, जहाँकि परीक्षण के प्रतिदर्श (Sample) की संख्या छोटी रहती है।
- काई-वर्ग का प्रयोग समान प्रायिकता प्राकल्पना (equal probability hypothesis) पर प्रत्याशित आवृत्तियों की तुलना प्रेक्षित आवृत्तियों से करने में की जाती है।
- काई-वर्ग परीक्षण का प्रयोग कई महत्तवपूर्ण सांख्यिकी की सार्थकता की जाँच करने में किया जाता है, जैसे फाई-गुणांक (Phi-coefficient), केण्डाल संगति गुणांक (Kendall's Coefficient of Concordance), क्रुस्कल-वालिश एच परीक्षण (Kruskal-Wallis H Test), असंगत गुणांक (Coefficient of contigency) आदि की सार्थकता की जाँच करने में सफलता पूर्वक प्रयोग किया जाता है।
- काई-वर्ग परीक्षण का उपयोग चिकित्सा क्षेत्र में विशेषतः उल्लेखनीय है, क्यों कि वहाँ पर प्रायः एक ही समय पर एक से अधिक चिकित्सा पद्धतियों के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है।
- मनोविज्ञान के क्षेत्र में भी प्रायः मुख्य अनुसन्धान से पूर्व इसका प्रयोग अग्रगामी अध्ययन (Pilot Study) में किया जाता है।

3) काई-वर्ग परीक्षण के लाभ एवं परिसीमायें-

(क) लाभ- काई-वर्ग परीक्षण के निम्न लाभ हैं-

i) यदि आँकड़े आवृत्ति में हो तो काई-वर्गका प्रयोग किया जाता है।

ii) काई-वर्ग परीक्षण द्वारा यह पता आसानी से चल जाता है कि प्राप्त आवत्तियाँ (Obtained Frequencies)किसी प्राकल्पना (Hypothesis)या सिद्धान्त पर आधारित आवृत्तियों के आकार में अच्छी तरह फिट बैठता है या नहीं।

(ख) काई-वर्ग परीक्षण की कुछ परिसीमाएँ (Limitations) भी हैं जो निम्न हैं-

i) काई-वर्ग परीक्षण द्वारा मात्र यह पता चलता है कि किसी एक चर पर वर्गीकरण दूसरे चर पर वर्गीकरण से असंयोगवश सम्बन्धित है या नहीं।

ii) काई-वर्ग परीक्षण ऐसे सम्बन्ध की शक्ति के बारे में कुछ नहीं कहता है।

iii) काई-वर्ग परीक्षण का उपयोग उन आँकड़ो पर नहीं हो सकता है जिनकी अभिव्यक्ति प्राप्तांकों के रूप में व्यक्त हुई है, तथा जिन्हें आवृत्ति या प्रतिशत समानुपात में बदलना संभव नहीं है।

iv) काई-वर्ग परीक्षण एक अत्यन्त ही सरल प्रकार की सांख्यिकी है इसकी सरलता एवं सुगमता का लाभ उठाकर इसका प्रयोग प्रायः शोधकर्त्ता वैसी परिस्थिति में भी कर देते हैं, जहाँ पर इसे नहीं करना चाहिए।

4) काई-वर्ग परीक्षण की गणना के विभिन्न चरण-

काई-वर्ग परीक्षण के अन्तर्गत निम्नलिखित चरणों का प्रयोग करते हैं-

- प्रेक्षित आवृत्तियों को उनकेा उपयुक्त कोष्ठकों (Cells)में लिखना।
- इसके बाद प्रत्याशित आवृत्तियों को उनके उपयुक्त कोष्ठकों (Cells)में लिखते हैं।
- प्रेक्षित आवृत्तियों में से प्रत्याशित आवृत्तियों को घटाकर अलग-अलग अन्तर ज्ञात करतें हैं।
- प्रत्येक f_o - f_e के मान को वर्गित (Square) करना अथवा $(f_o - f_e)^2$ ज्ञात करते हैं।
- प्रत्येक वर्गित मान को उससे सम्बन्धित प्रत्याशित आवृत्तियों के मान से विभाजित करते हैं।
- इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक संवर्ग के मान का योग ज्ञात करते हैं।
- इसके पश्चात स्वतन्त्रता के अंशो (d.f.) को ज्ञात करते हैं।
- प्राप्त काई-वर्ग परीक्षण के मान की सार्थकता की जाँच दिये गये स्वतन्त्रता के अंशो पर सम्बन्धित सारणी में सार्थकता के विभिन्न स्तरों (0.05 अथवा 0.01) पर देखते हैं।

5) काई-वर्ग परीक्षण की गणना-

काई-वर्ग परीक्षण में प्रत्याशित आवृत्यिों की गणना के लिए प्रायः तीन निम्नलिखित परिकल्पनाओं का प्रयोग किया जाता है-

(क) समान वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Equal Distribution)

(ख) प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Normal Distribution)

(ग) स्वतन्त्र वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Independent Distribution)

(क) समान वितरण की परिकल्पना- इस विधि के अन्तर्गत एक तालिका बनाई जाती है। तालिका की पहली पंक्ति में प्रेक्षित आवृत्तियाँ होती हैं तथा दूसरी पंक्ति में प्रत्याशित आवृत्तियाँ होती हैं जोकि शून्य उपकल्पना पर निर्भर करती है। इसके अन्तर्गत यह शून्य परिकल्पना बना ली जाती है कि प्रत्याशित आवृत्तियाँसभी वर्गों में समान होती है।

उदाहरण 1-

एक परीक्षण में व्यक्तियों से राजनीति के सम्बन्ध में प्रश्न पूछा गया कि क्या आप वर्तमान राजनैतिक नेताओं की प्रतिष्ठा को दृष्टिगत रखते हुए राजनीति में प्रवेश करना पसन्द करेंगे। परीक्षण के आधार पर व्यक्तियों के आंकन की आवृत्तियाँ नीचे दी गई हैं,अब यदि यह मान लिया जाता है कि समस्त व्यक्तियों की पसन्द समान है, तब उस स्थिति में क्या प्रेक्षित आवृत्तियों में यहाँपर सार्थक अन्तर देखने में आता है।

	पक्ष	तटस्थ	विपक्ष	योग
प्रेक्षित (f_o)	40	25	25	90
प्रत्याशित (f_e)	30	30	30	90
$(f_o - f_e)$	10	-5	-5	
$(f_o - f_e)^2$	100	25	25	

$(f_o - f_e)^2/ f_o$

or x^2 = 3.33 0.833 0.833

x^2 = (3.33 + 0.833 + 0.833)

= 4.999

d.f. = (Colums – 1) (Rows – 1)

or (r – 1) (C – 1) = (3 – 1) (2 – 1) = 2

x^2 की सारणी को 2d.f. पर देखने से ज्ञात होता है कि 5 प्रतिशित विश्वास के स्तर पर यह मान 5.99 तथा 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर यह मान =9.21 होना चाहिए। परन्तु प्रस्तुत उदाहरण में x^2 का मान इन दोनों स्तरो से नीचे है अतः एवं यहाँ यह विश्वास हो जाता है कि व्यक्तियों के पसन्दों में किसी भी विश्वास के स्तर पर सार्थक अन्तर देखने में नहीं आता है अतः यहाँ पर शून्य उपकल्पना को किसी भी स्तर पर अस्वीकृत नहीं किया जा सकता है।

(ख) प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना के आधार पर काई. वर्ग की गणना - समान वितरण के अतिरिक्त एक स्थिति ऐसी भी हो सकती है,जबकि हमारी परिकल्पना प्रसामान्य वितरण पर आधारित हो। ऐसी स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियों (f_o) को ज्ञात करने का आधार प्रसामान्य वितरण के सिद्धान्त पर आधारित होते हैं। इस विधि में हम इस परिकल्पना का निर्माण करते हैं कि प्रेक्षित आवृत्तियों में सामान्य वितरण पाया जाता है।

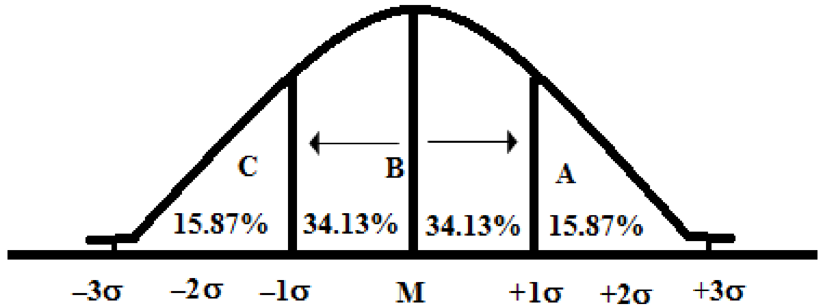
उदाहरण 2-

एक समायोजन सूची के परिणाम के आधार पर 50 विद्यार्थियों को समायोजन स्तर पर निम्न तीन श्रेणियों में विभाजित किया गया है। यदि समायोजन के स्तर पर विद्यार्थियों के वितरण का आधार प्रसामान्य वितरण मान लिया जाये, तब बताइये कि क्या इस आधार पर तथा परीक्षण के आधार पर प्राप्त विभिन्न श्रेणियों में विद्यार्थियों की संख्याओं में सार्थक अन्तर देखने में आते हैं।

	समायोजन के आधार पर 50 विद्यार्थियों की तीन श्रेणियाँ			
समायोजन स्तर	असन्तोष जनक	सन्तोष जनक	अधिक सन्तोष जनक	योग
प्रेक्षित संख्या (f_o)	16	24	10	50

हल-

प्रसामान्य वितरण के सिद्धान्त के अनुसार एक वितरण अपने मध्यमान सें $\pm 3\sigma$ के अर्न्तगत वितरित रहता है, प्रस्तुत उदाहरण में सभी विद्यार्थियों की संख्या तीन श्रेणियों में विभाजित है अतएव प्रत्येक श्रेणी 6/2 = 3 की दूरी तक फैली है। और अधिक समझने के लिए नीचे दिये गये प्रसामान्य वितरण में तीन श्रेणियों की स्थिति दी गई है।



A) श्रेणी में विद्यार्थियों की संख्या = 50 - 34.13 = 15.87 प्रतिशत

B) श्रेणी में विद्यार्थियों की संख्या = 34.13 + 34.13 = 68.25 प्रतिशत

C) श्रेणी में विद्यार्थियों की संख्या = 50 - 34.13 = 15.87 प्रतिशत

चूंकि प्रस्तुत उदाहरण में विद्यार्थियों की कुल संख्या 50 है। अतः प्रसामान्य वितरण के आधार पर प्रत्येक श्रेणी में प्रत्याशित विद्यार्थियों की संख्या निम्न होगी।

A) श्रेणी 15.87/2 = 7.935 अथवा 8

B) श्रेणी 68.25/2 = 34.13 अथवा 34

C) श्रेणी 15.87/2 = 7.935 अथवा 8

x^2 का मान-

समायोजन स्तर	असन्तोष जनक	सन्तोष जनक	अधिक सन्तोष जनक	योग
f_o	16	24	10	50
f_e	8	34	8	50
$f_o - f_e$	8	-10	2	
$(f_o - f_e)^2$	64	100	4	
$(f_o - f_e)^2/f_e)$	8	2-94	-5	

x^2 = 8 +2-94 + -5 =11-44

सार्थकता के लिए x^2 की आवश्यक मान-

5% स्तर पर 5.99

1% स्तर पर 9.21

प्राप्त x^2 का मान उपरोक्त दोनों मानों से अधिक अर्थात 11.44 है, अतः यहाँ पर शून्य उपकल्पना को अस्वीकृत किया जायेगा, और 1% विश्वास के स्तर पर कहाँ जा सकता है कि विद्यार्थियों में समायोजन के स्तर पर सार्थक अन्तर होता है।

- **कम आवृत्तियाँ तथा काई-वर्ग परीक्षण-** जब किसी अध्ययन में प्रेक्षित आवृत्तियाँ कम रहती है तब ऐसी स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियों के मानो में कुछ संशोधन की आवश्यकता पड़ती है। इस तरह के संशोधन को येटस संशोधन (Yates Correction) कहते है तथा इसका मान -0.5 होता है। इस प्रकार के संशोधन के अन्तर्गत fo – fe के मान में से 0.5 की संख्या घटा दी जाती है जिससे काई वर्ग परीक्षण के परिणाम के सार्थकता स्तर में वृद्धि हो जाती है। इस संशोधन को एक उदाहरण के द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 3- एक विद्यार्थी ने 16 प्रश्नों में से 12 सही उत्तर दिये। काई-वर्ग परीक्षण का उपयोग करके यह ज्ञात किजिए कि प्राप्त परिणाम शून्य परिकल्पना के अनुरूप है।

	सही उत्तर	गलत उत्तर	योग
f_o	12	4	16
f_e	8	8	16
$f_o - f_e$	4	-4	2

संशोधन (.5) 3.5 3.5

$(f_o - f_e)^2$ = 12.25 12.25

$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ = $\frac{12.25}{8}$ $\frac{12.25}{8}$

x^2 = 1.53 + 1.53 = 3.06

d.f. = 1 पर काई वर्ग का मान-

5% स्तर पर 2.76

1% स्तर पर 5.412

प्राप्त काई वर्ग का मान 5 प्रतिशत स्तर पर सार्थकता के लिए आवश्यक मान से अधिक है जबकि 1 प्रतिशत स्तर पर सार्थकता के मान से कम है अतएवं अध्ययनकर्त्ता की शून्य परिकल्पना 5 प्रतिशत स्तर पर अस्वीकृत की जाती है।

- **2x2 की आसंग सारणी में काई-वर्ग की गणना-**

इस विधि का सूत्र निम्न है- $$x^2 = \frac{N(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(B+D)(A+C)}$$

उदाहरण 4-

एक कक्षा में लड़को तथा लड़कियों को एक चित्र दिखाया गया और सौन्दर्यात्मक आधार पर उसका आंकन सुन्दर तथा असुन्दर दो श्रेणियों में किया गया। शून्य परिकल्पना के आधार पर बताइयें कि क्या लड़कों तथा लड़कियों के आंकन में सार्थक अन्तर है।

लिंग	सुन्दर	असुन्दर	योग
लड़के	16	10	26
लड़किया	10	20	30
योग	26	30	56

2x2 आसंग सारणी-

A 16	B 10	A+B 16+10= 26
C 10	D 20	C+D 10+20= 30
A+C 26	B+D 30	A+B+C+D 56

सारणी के अनुसार-

A + B = 26

B + D = 30

C + D = 30

A + C = 26

AD = 16 X20 = 320

BC = 10X10 = 100

N = 16 + 10 + 10 + 20 = 56

सूत्र के अनुसार-

$$x^2 = \frac{56\,(320 - 100)^2}{26 \times 30 \times 30 \times 26}$$

$$x^2 = \frac{56\,(220)^2}{26 \times 30 \times 30\ 26}$$

$$x^2 = \frac{2710400}{608400} = 4.454$$

$$d.f. = (r - 1)(C - 1)$$
$$= (2 - 1)(2 - 1) = 1$$

1 d.f. पर सार्थकता के लिए आवश्यक x^2 का मान-

5 प्रतिशत स्तर पर 3.84

1 प्रतिशत स्तर पर 6.635

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त काई-वर्ग का मान 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक है परन्तु 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक नहीं है।

- **काई वर्ग तथा प्रेक्षित आवृत्तियों की प्रतिशत के आधार पर गणना -**

वैसे तो प्रेक्षित आँकड़ों को प्रतिशत में परिवर्तित करके काई-वर्ग परीक्षण का उपयोग करना गलत होता है फिर भी यादि ऐसा करना पड़ता है तब उस स्थिति में प्राप्त काई-वर्ग के प्रतिशत के मान को मूल आँकड़ो के अनुपात में कम करना पड़ता है अर्थात इसमें भी येट्स संशोधन (5%) करना पड़ता है।

(ग) स्वतन्त्र वितरण की परिकल्पना- काई-वर्ग परीक्षण के अन्तर्गत अभी तक हम इस उद्देश्य को लेकर अध्ययन किये कि क्या दो घटनाओं के मध्य प्रेक्षित आवृत्तियों (Fo) तथा प्रत्याशित आकृत्तियों (Fe) में समानता है या कोई सार्थक विचलन है। इसके अतिरिक्त अभी तक के अध्ययन में प्रेक्षित आवृत्तियों का आधार प्रायः एक चर ही रहा है, लेकिन ऐसे चर के आधार एक से अधिक भी हो सकते हैं, ऐसी स्थिति में, चर के स्वरूप पर कोई प्रतिबन्ध नहीं रहता है और इस प्रकार की परिकल्पना को स्वतन्त्रता की परिकल्पना कहाँ जाता है। इसके अन्तर्गत एक चर के कई भाग हो सकते हैं तथा उन भागों के समरूप दूसरे प्रेक्षित चर भी हो सकते हैं। इस प्रकार के चरो के प्रयोग हेतु बनने वाली सारणी को आसंग सारणी (Contigency Table) कहते है।

उदाहरण 5- एक कक्षा में लड़के तथा लड़कियों की तीन पर्यटन स्थलों के बारे में पसन्द जानने के लिए अध्ययन किया गया। अध्ययन के परिणाम नीचे दिये गये है। क्या लड़के और लड़कियों की पर्यटन स्थलों के पसन्द में सार्थक अन्तर है।

लिंग/पर्यटन स्थल	पचमढ़ी	शिमला	नैनीताल	योग
लड़के	25	35	30	90
लड़कियाँ	15	50	25	90
योग	40	85	55	180

ऐसी स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए हमें लड़कों तथा लड़कियों का योग करना होता है उसके बाद प्रत्येक पर्यटन स्थलों के लिए लड़के और लड़कियों के संयुक्त पसन्द के आधार पर दोनों के लिए अलग-अलग प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकालते है। लड़के तथा लड़कियों का योग = 90+90 = 180 है। इस संख्या में

25+15 = 40 पंचमढ़ी के लिए, 35+50 = 85 शिमला के लिए तथा 30+25 = 55 नैनीताल के लिए पसन्द करते हैं। अतः यहाँ पर प्रत्येक लिंग के लिए प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए निम्न प्रकार से गणना करते हैं-

जबकि 180 की संख्या में पचमढ़ी की पसन्द 40 है।

तब 90 की संख्या में $\frac{40x90}{180}$ =90

180 की संख्या में शिमला की पसन्द 65 है

तब 90 की संख्या में शिमला $\frac{85x90}{180}$ = 42.5

इसी तरह से 180 की संख्या में नैनीताल की पसन्द 55 है

तब 90 की संख्या में नैनीताल $\frac{55x90}{180}$ = 27.5

लड़के तथा लड़कियां की संख्या समान होने के कारण दोनों की पसन्द की प्रत्याशित आवृत्तियां निम्न हुई-

लिंग/पसन्द	पंचमढ़ी	शिमला	नैनीताल	योग
लड़के	20	42.5	27.5	90
लड़कियाँ	20	42.5	27.5	90
योग	40	85	55	180

x^2 की गणना-

लड़के f_o	25	35	30	90
f_e	20	42-5	27-5	90
$f_o - f_e$	5	7-5	2-5	
$(f_o - f_e)^2$	25	56-25	6-25	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	1	1-61	-08	
लड़कियाँ f_o	15	50	25	90
f_e	20	42-5	27-5	90

$f_o - f_e$	-5	7-5	2-5
$(f_o - f_e)^2$	25	56-25	6-25
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	1	1-61	-08

$$x^2 = 1 + 1.61 + .08 + 1 + 1.61 + .08 = 5.38$$

$$d.f = (r - 1)(C - 1) = (2 - 1)(3 - 1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

2 d.f. पर सार्थकता के लिए ग2 की आवश्यक मान-

5% विश्वास के स्तर पर = 5.99

1% विश्वास के स्तर पर = 9.21

उपरोक्त उदाहरणमें प्राप्त x^2 का मान 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक है। परन्तु 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक नहीं है। अतः यहाँ पर 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर शून्य उपकल्पना को अस्वीकृत किया जाता है।

10.4 मध्यांक परीक्षण

मध्यांक परीक्षण के अन्तर्गत दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शो के मध्यांको की तुलना की जाती है। दूसरे शब्दों में किसी एक स्वतन्त्रचर के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए दो समूहों- एक प्रायोगिक तथा दूसरा नियन्त्रित समूह का तुलनात्मक अध्ययन किया जाता है। इसके लिए सबसे पहले दो समूहों को किसी एक दिये गये परीक्षण में प्राप्तांकों को एक समूह में मिला लिया जाता है और इस तरह से दोनों समूहों के प्राप्तांकों का एक संयुक्त मध्यांक ज्ञात कर लिया जाता है। अनुसन्धानकर्ता को यह ध्यान में रखना चाहिए कि कोटि सूचक मापनी (Ordinal Scale) प्राप्त प्रदत्त (data) पर ही मध्यांक परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए। मध्यांक परीक्षण से यह ज्ञात किया जाता है कि दोनों स्वतन्त्र प्रतिदर्शो, जिनकी जनसंख्या भिन्न-भिन्न हो सकती है, के मध्यांक एक समान है, जिसके सम्बन्ध में यह शून्य उपकल्पना होगी कि दोनों प्रतिदर्शो के मध्यांक एक समान है।

संयुक्त मध्यांक निकालने के पश्चात, दोनों समूहों के प्राप्तांकों को दो श्रेणियों में विभाजित किया जाता है। वे प्राप्तांक जिनका मान संयुक्त मध्यांक (Common Median) से अधिक रहता है, उसके पहले धनात्मक चिन्ह (+) लगा दिया जाता है तथा जिन प्राप्तांकों का मान संयुक्त मध्यांक से कम रहता है, उनके पहले ऋणात्मक चिन्ह (-) लगा देते हैं। इसके पश्चात दोनों समूहों के धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (-) चिन्ह वाले प्राप्तांकों का अलग-अलग योग कर लिया जाता है। इस तरह से इस परीक्षण के लिए 2x2 की सारणी तैयार हो जाती है।

मध्यांक परीक्षण की गणना-

मध्यांक परीक्षण में प्रदत्त को व्यवस्थित करने के लिए निम्न प्रकार के प्रारूप का प्रयोग करते हैं।

	प्रथम समूह	द्वितीय समूह	योग
संयुक्त मध्यांक से ऊपर प्राप्तांकों की संख्या	A	B	A + B
संयुक्त मध्यांक से नीचे प्राप्तांकों की संख्या	C	D	C + D
$N = n_1 + n_2$	A+C	B+D	A+B+C+D

यदि प्रदत्त को मध्यांक से ऊपर और नीचे दो भागों में बाँटकर गणना किया जा रहा है तब अनुसन्धनकर्त्ता को उस स्थिति में फिशर परीक्षण तथा x^2 परीक्षण में से किसी एक का चयन करते समय निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए-

- जब N 40 से अधिक हो तब ऐसी स्थिति में संशोधन के साथ ग2 परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए-

$$x^2 = \frac{N[(AD-BC)\ N/2]^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

- जब N = 20 से 40 के बीच हो तब ऐसी स्थिति में कोष्ठिकाओं को ध्यान में रखकर परीक्षण का चयन करना चाहिए। जैसे जब किसी कोष्ठिका (cell) का fe5 से कम नहीं है तो x^2 का प्रयोग करना चाहिए लेकिन जब से कम हो तो ऐसी स्थिति में फिशर परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए।
- जब N = 20 से कम होगे फिशर परीक्षण का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण 6-

एक कक्षा के 15 छात्रों तथा 15 छात्राओं पर एक परीक्षण प्रशासित किया गया। क्या दोनों समूह समान मध्यांक वाली जन संख्या से लिए गये है।

छात्र-छात्राओं का प्राप्तांक			
छात्र	चिन्ह	छात्राएँ	चिन्ह
15	-	18	-
18	-	20	-
14	-	25	-
20	-	27	+

28	+	29	+
16	-	31	+
17	-	33	+
19	-	32	+
30	+	34	+
32	+	36	+
28	+	38	+
26	-	30	+
25	-	28	+
27	+	26	-
29	+	24	-

उपरोक्त प्राप्तांकों का Common Median इस प्रकार ज्ञात किया जाता है-

वर्गान्तर	आवृत्तियाँ
34-38	3
29-33	8
24-28	10
19-23	3
14-18	6

Mdn = U + [N/2 – F/fm] x i

x^2 = 23.5 + [30/2 – 9/10] x 5

= 26.5

Mdn = U – [N/2 – F/fm] x i

x^2 = 28.5 – [30/2 – 11/10] x 5

= 26.5

मध्यांक ज्ञात करने के पश्चात मध्यांक के ऊपर और उसके नीचे के प्राप्तांक को ज्ञात किया जाता है। उसके पश्चात 2x2 आंसग सारणी का निर्माण करते हैं।

	मध्यांक से ऊपर A	मध्यांक से नीचे B	योग
छात्र	6	9	A+B =15
छात्राएँ	10	5	C+D =15
योग	16	14	30

$$x^2 = \frac{N[(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

$$x^2 = \frac{30(30 - 90)^2}{15+15+16+14}$$

= 2.14

d.f. = (r – 1) (c – 1) = (2 – 1) (2 – 1) = 1

5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर = 3.841

1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर = 6.635

x^2 परीक्षण का प्राप्त मान सार्थकता स्तर के दोनों ही मानों से कम है अतः यहाँ पर शून्य उपकल्पना स्वीकृत होती है अर्थात दोनों ही प्रतिदर्शो का मध्यांक समान है।

10.5 सांख्यिकीय तालिका

काई-वर्ग के मान की सार्थकता की जाँच की तालिका

उदाहरणार्थ यदि 2d.f. पर x^2 का मान 6.01 है, (और हमारी निराकरणीय परिकल्पना द्विपक्षीय है) तब यह मान .05 विश्वास के स्तर पर सार्थक है, क्योंकि यह मान यहाँ दिये गये आवश्यक मान 5.991 से अधिक है, परन्तु यह मान (6.01) विश्वास के .01 स्तर पर सार्थक नहीं है, क्योंकि यह Table में दिये आवश्यक मान 9.210 से कम है।

d.f.	0.10	0.05	0.02	0.01
1	2.706	3.841	5.412	6.635
2	4.605	5.991	7.824	9.210
3	6.251	7.815	9.837	11.345
4	7.779	9.488	11.668	13.277
5	9.236	11.070	13.388	15.086
6	10.645	12.592	16.033	16.812
7	12.017	14.067	15.622	18.475
8	13.362	15.507	18.168	20.090
9	14.684	16.919	19.679	21.666
10	15.987	18.307	21.161	23.209
11	17.275	19.675	22.618	24.725
12	18.549	21.026	24.054	26.217
13	19.812	22.362	25.472	27.688
14	21.064	23.685	26.873	29.141
15	22.307	24.996	28.259	30.578
16	23.542	26.296	29.633	32.000
17	24.769	27.587	30.995	33.409
18	25.989	28.869	32.346	34.805
19	27.204	30.144	33.687	36.191
20	28.412	31.410	35.020	27.566
21	29.615	32.671	36.343	38.932
22	30.813	33.924	37.659	40.289

23	32.007	35.172	38.968	41.638
24	33.196	36.415	40.270	41.980
25	34.382	37.652	41.566	44.314
26	35.563	38.885	42.856	45.642
27	36.741	40.113	44.140	46.963
28	37.916	41.337	45.419	48.278
29	39.087	42.557	46.693	49.588
30	40.256	43.773	47.962	50.892

10.6 सारांश

काई-वर्ग परीक्षण का सामाजिक विज्ञानों में विशेष महत्तव हैं। इस परीक्षण का आविष्कार Helmert (1876) और कार्ल पियरसन (1900) ने किया। इस परीक्षण को हम परिमाणात्मक तथा गुणात्मक दोनों प्रकार के प्रदत्तों पर उस समय प्रयोग कर सकते हैं जब हम दो तरह की आवृत्तियों में पायी जाने वाले सम्बन्धों की सार्थकता का मापन करना चाहते है। काई-वर्ग में प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना के लिए प्रायः तीन प्रकार की परिकल्पनाओं का प्रयोग किया जाता है- समान वितरण की परिकल्पना, प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना और स्वतन्त्र वितरण की परिकल्पना। मध्यांक परीक्षण के अन्तर्गत एक स्वतन्त्र चर का अध्ययन करने के लिए दो समूहो- एक प्रायोगिक समूह तथा दूसरा नियन्त्रित समूह का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं। इस परीक्षण में भी शून्य उपकपना को आधार बनाया जाता है। इस परीक्षण के अन्तर्गत सर्वप्रथम संयुक्त मध्यांक निकाला जाता है तत्पश्चात 2x2 आसंग सारणी का निमार्ण करते हैं और उसके बाद आवश्यकतानुसार फिशर परीक्षण या x^2 परीक्षण का उपयोग करते हैं।

10.7 शब्दावली

- **काई-वर्ग परीक्षण (x^2):** काई-वर्ग परीक्षण प्रेक्षित और प्रत्याशित आवृत्तियों के भिन्नताओं की मात्रा का वर्णानात्मक माप है।
- **प्रेक्षित आवृत्ति (Observed frequency):** काई-वर्ग परीक्षण में प्रेक्षित आवृत्तियाँ वह होती है जो अनुसन्धानकर्त्ता अपने अध्ययन के आधार पर प्राप्त आकड़े को आवृत्ति के रूप में प्राप्त करता है।
- **प्रत्याशित आवृत्ति (Expected Frequencies):** प्रत्याशित आवृत्ति इस प्रकार की आवृत्ति होती है जो किसी सिद्धान्त पर आधारित होती है।
- **मध्यांक परीक्षण (Median test):** मध्यांक परीक्षण एक अप्राचल सांख्यिकी है जिसके द्वारा यह जाँच की जाती है कि दो स्वतन्त्र समूहों में माध्यिका के रूप में अन्तर है या नहीं।

- **येट्स संशोधन (Yates Correction):** जिन अध्ययनों में प्रेक्षित आवृत्तिया कम रहती है, उनमें x^2 परीक्षण में प्रत्याशित आवृत्तियों के मानों में कुछ संशोधन किया जाता है। इस संशोधन को ही येट्स संशोधन कहाँ जाता है।

10.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) x^2 शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम किस सन् में किया गया।
2) काई वर्ग परीक्षण का आविष्कार सर्व प्रथम किसने किया।
3) काई-वर्ग परीक्षण को सामान्य उद्देश्य सांख्यिकी किसने कहाँ है।
4) मध्यांक परीक्षण अप्राचल सांख्यिकी है या प्राचल सांख्यिकी।
5) मध्यांक परीक्षण से क्या ज्ञात किया जाता है।

उत्तर:

1) काई-वर्ग शब्द का प्रयोग सर्व प्रथम सन् 1900 में किया गया।
2) काई-वर्ग परीक्षण का आविष्कार हेल्मर्ट (1876) और कार्ल पियरसन (1900) ने किया।
3) काई-वर्ग परीक्षण को गिलफोर्ड (1956) ने सामान्य उद्देश्य सांख्यिकी कहाँ है।
4) मध्यांक परीक्षण एक अप्राचल सांख्यिकी है।
5) मध्यांक परीक्षण के द्वारा दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शो में केन्द्रिय प्रवृत्ति के रूप में विशेषतः माध्यिका के रूप में अन्तर है या नहीं, की जाँच की जाती है।

10.9 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- Anastasi, Anne, Psychological Testing, New York : The MacMillan Co., 1954.
- Garrett, H.E., Statistics in Psychology and Education, Bombay : Vakils, Feffer and Sinons P.Ltd., 1967.
- भागर्व एम0 (1999) आधुनिक मनोवैज्ञानिक परीक्षण एवं मापन, हरप्रसाद भार्गव, आगरा।
- सिंह, अरूण कुमार (2002) मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में सांख्यिकी, नोवेल्टी एण्ड कम्पनी, पटना-8।
- कपिल, एच. के. (1994) सांख्यिकी के मूलतत्त्व, विनोद पुस्तक मंदिर, आगरा।
- रामजी श्रीवास्तव (2003), मनोविज्ञान, शिक्षा तथा समाजशास्त्र में सांख्यिकीय विधियाँ, मोतीलाल बनारसीदास बंगलोरोड, दिल्ली।

10.10 निबन्धात्मक प्रश्न

1. काई-वर्ग परीक्षण से आप क्या समझते है इसकी उपयोगिता तथा विभिन्न चरणों के विषय में सविस्तार वर्णन कीजिए।
2. मध्यांक परीक्षण से आप क्या समझते है। इस परीक्षण के अन्तर्गत कौन-कौन सी सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जाता है सविस्तार वर्णन किजिए।
3. एक परीक्षण में तीन रंगो के विषय में विद्यार्थियों की पसन्द को नीचे दिया गया है, बताइये क्या रंग-पसन्द के आधार पर विद्यार्थियों में सार्थक अन्तर है।

रंग	गुलाबी	हरा	नीला	योग
विद्यार्थियों की संख्या	20	10	12	42

4. आर्थिक स्तर के आधार पर एक चिकित्सालय में मानसिक रोगियों की विभिन्न रोगों से पीड़ित होने की संख्या निम्न है, क्या यहाँ विभिन्न आर्थिक स्तरों के आधार पर रोगों के होने में सार्थक अन्तर है।

स्तर/रोग	Psychotic	Neurotic	Organic	Total
Upper	80	60	10	150
Middle	60	30	20	110
Lower	50	40	30	120
योग	190	130	60	380

ईकाई-11 सार्थकता स्तर, स्वतन्त्रता के अंश तथा प्रथम एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Level of Significance, Degree of Freedom and Type I & Type II Error)

इकाई सरंचना

11.1 प्रस्तावना
11.2 उद्देश्य
11.3 सार्थकता स्तर
11.4 स्वतन्त्रा के अंश
11.5 प्रथम प्रकार एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि
11.6 सारांश
11.7 शब्दावली
11.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
11.9 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची
11.10 निबन्धात्मक प्रश्न

11.1 प्रस्तावना

संख्यिकीय तकनीक एवं प्राकल्पनाओं की परख के अन्तर्गत यह 11 वीं इकाई है। इससे पहले की इकाईयों के अध्ययन के पश्चात आप को ज्ञात हो गया होगा कि विभिन्न स्रोतों से प्राप्त प्रदत्तों का विश्लेषण विभिन्न सांख्यिकीय विधियों के द्वारा कैसे ज्ञात किया जाता है। किसी मनोवैज्ञानिक या शैक्षिक शोध का उद्देश्य कुछ विशेष परिकल्पनाओं की जाँच करना होता है। जिन सांख्यिकीय विधियो कें माध्यम से जो परिणाम प्राप्त किये है उनके आधार पर हम आगे का अनुमान लगा सकते हैं। इसके अतिरिक्त यह भी अनुमान लगाने का प्रयत्तन करते हैं कि प्रतिदर्श का मध्यमान कहाँ तक सम्पूर्ण जनसंख्या के मध्यमान का प्रतिनिधित्व करता है। अन्य शब्दों में उसके कितना निकट है, या फिर उससे कितना दूर है तथा हम कितने विश्वास के साथ कह सकते हैं कि हमारे प्रयोग के अन्तर्गत प्राप्त मध्यमान सम्पूर्ण जनसंख्या के मध्यमान से मिलता-जुलता है कि नहीं।

11.2 उद्देश्य

जब अनुसन्धानकर्ता किसी जनसंख्या का अध्ययन करना चाहता है तब वह सम्पूर्ण जनसंख्या से एक प्रतिनिधि भाग जिसे प्रतिदर्श कहते है, का चयन कर लेता है और यह कल्पना करके उस प्रतिदर्श का अध्ययन करता है कि जनसंख्या के सभी गुण प्रतिदर्श में विद्यमान है। प्रतिदर्श से प्राप्त प्रदत्त के आधार पर जनसंख्या के बारे में अनुमान लगाया जाता है। इस इकाई का प्रमुख उद्देश्य है कि हम किस प्रकार प्रतिदर्श विशेषताओं के आधार पर जनसंख्या की विशेषताओं का अनुमान करने के लिए किस प्रकार विभिन्न विश्वास के स्तरों, स्वतन्त्रता के अंशों एवं प्रथम प्रकार तथा द्वितीय प्रकार में त्रुटियों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकते हैं।

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप जान सकेंगे-

- सार्थकता एवं विश्वास के विभिन्न स्तरों का अर्थ।

- स्वतन्त्रता की मात्रा का अर्थ
- संख्यिकीय विश्लेषण की प्रमुख त्रुटियों (प्रथम एवं द्वितीय) के विषय में जानकारी।

11.3 सार्थकता या विश्वास के विभिन्न स्तर

मनोवैज्ञानिक अध्ययनों में शून्य उपकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए अनुसन्धानकर्ता प्रायः सार्थकता के दो स्तरां प्रथम 0.05 तथा द्वितीय 0.01 का उपयोग करते हैं। शून्य उपकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए जिस कसौटी का चुनाव किया जाता है उसे ही सार्थकता का स्तर (Level of Significance) कहाँ जाता है। किसी शून्य उपकल्पना को अस्वीकृत होने के लिए यह आवश्यक है कि प्राप्त सांख्यिकीय मान 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत पर दिये गये सांख्यिकीय मान के बराबर या अधिक हो। यदि किसी शून्य उपकल्पनाओं को 1 प्रतिशत या 0.01 स्तर पर अस्वीकृत कर दिया जाता है तब ऐसी स्थिति में वह स्वयं ही 0.05 या 5 प्रतिशत पर अस्वीकृत हो जाता है। लेकिन यदि कोई शून्य उपकल्पना (Null hypothesis) 5 प्रतिशत या 0.05 स्तर पर अस्वीकृत होती है, तब ऐसी स्थिति में वह 1 प्रतिशत या 0.01 स्तर पर भी अस्वीकृत होगी ही ऐसा नहीं कहां जा सकता है। वह शून्य उपकलपना 0.01 स्तर पर अस्वीकृत हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है। शून्य उपकल्पना 0.05 स्तर पर जब अस्वीकृत होती है तब इसका अर्थ यह हुआ कि यदि संबन्धित प्रयोग या परीक्षण जिनसे आकड़े प्राप्त हुए है उसको 100 बार दोहराया जाय, तो उसमें से 5 बार शून्य उपकल्पना सत्य होगी और 95 बार असत्य होगी। इसी प्रकार से जब शून्य उपकल्पना को 0.01 स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है तब इसका अर्थ यह हुआ कि यदि प्रयोग या परीक्षण जिसके द्वारा प्रदत्त प्राप्त हुए है को 100 बार दोहराया जाये तो उसमें से एक बार शून्य उपकल्पना सत्य होगी और 100 में से 99 बार असत्य होगी। शोधकर्त्ता 100 बार में से मात्र 1 बार सही होने की स्थिति में इसे और अधिक विश्वास के साथ अस्वीकृत करने में सक्षम हो जाता है। सार्थकता का यह स्तर उच्चकोटि का माना जाता है और इसका उपयोग विशेषतः प्रायोगिक अध्ययनों में किया जाता है, क्योंकि प्रायोगिक अध्ययनों में स्वतन्त्र चर तथा आश्रित चर के सम्बन्ध में सार्थकता का स्तर प्रायः उच्चश्रेणी का ही होना चाहिए। सामान्य अध्ययनों में, जिनमें मनोवैज्ञानिक, शैक्षिक तथा समाज वैज्ञानिक अध्ययन सम्मिलित है, और इसके अतिरिक्त साधारण प्रायोगिक अध्ययन भी सम्मिलित है, उस स्थिति में 5 प्रतिशत विश्वास या सार्थकता का स्तर सन्तोषजनक रहता है, क्योंकि यहाँ पर प्रायः उच्च कोटि की परिशुद्धता के स्तर की इतनी अधिक आवश्यकता नहीं रहती है। उपरोक्त सभी क्षेत्रों में अध्ययन व अनुसन्धानों में 5 प्रतिशत विश्वास या सार्थकता का स्तर व्यावहारिक व वैज्ञानिक मानदण्ड से स्वीकृत रहता है।

विश्वास के एक और स्तर 0.001 का उपयोग किया जाता है इस सार्थकता के स्तर का उपयोग प्रायः ऐसे अनुसन्धानों में किया जाता है जिनमें वैज्ञानिक परिशुद्धता की अत्यन्त कठोरतम् स्तर की आवश्यकता होती है। जब एक नई औषधि के बड़े पैमाने पर निर्माण की आवश्यकता हो तब उसकी प्रभावशीलता की विश्वास का स्तर प्रायः 0.001 होना अत्यन्त आवश्यक होता है। विश्वास के इस स्तर के अनुसार किसी एक औषधि का प्रभाव 1000 में से 999 स्थितियों में प्रायः होकर रहेगा, केवल 1000 में से एक संयोग ऐसा आ सकता है, जबकि औषधि का अपेक्षित प्रभाव न देखने में आयें। स्पष्टतः विश्वास का यह स्तर अत्यन्त उच्च कोटि का होता है।

सिग्मा दूरियों से हमें विश्वास के विभिन्न स्तरों का ज्ञान होता है जैसे $M \pm 1.96\sigma$ के अन्तर्गत किसी एक वितरण की 95 प्रतिशत स्थितियाँ आ जाती है। इसका अर्थ है कि 95 प्रतिशत स्थितियों में हमारा मध्यमान $M \pm 1.96\sigma$ की सीमाओं के अन्तर्गत रहेगा और हमारे विश्वास की सीमायें $M \pm 1.96\sigma$ के अन्तर्गत रहेगी और

इस सम्बन्ध में हमारे विश्वास का स्तर 5 प्रतिशत (0.05) होगा। इसी प्रकार से $M \pm 2.58\sigma$ की सीमाओं के अन्तर्गत किसी एक वितरण की 99 प्रतिशत स्थिमियाँ (Cases) आ जाती है, जिसका अर्थ यह है कि हमारा वास्तविक मध्यमान 99 प्रतिशत स्थितियों में $M \pm 2.58\sigma$ की सीमाओं के अन्तर्गत रहेगा।

उदाहरणार्थ यदि हमारे प्रतिदर्श का मध्यमान 105 है एवं $\sigma\ m_1$ है तब 99 प्रतिशत दशाओं में हमारा वास्तविक मध्यमान-

= 105 + 2.58 (1) = अर्थात 105 + 2.58 x 1 = 107.58

तथा = 105 - 2.58 (1) = अर्थात 105 – 2.58 x 1= 102.42

अर्थात 102 एवं 108 (107.58) की विश्वास आश्रित सीमाओं के अन्तर्गत रहेगा। दूसरे शब्दों में 1 प्रतिशत सार्थकता के स्तर पर हम यहाँ यह अनुमान निकाल सकते हैं कि सम्बन्धित जनसंख्या का वास्तविक मध्यमान 102.42 तथा 107.58 के अन्तर्गत रहेगा।

प्रसम्भाव्यता सिद्धान्त एवं विश्वास के विभिन्न स्तरों की विवेचना-

किसी एक घटना के घटित होने की प्रसम्भाव्यता (Probability) की व्याख्या विभिन्न स्तरों के आधार पर ही की जाती है। एक उदाहरण के द्वारा इसको स्पष्ट किया जा सकता है। कल्पना कीजिए कि हमारे पास एक डिब्बे में 100 गोलियाँ है, उनमें से 90 गोलियाँ सफेद रंग की है, और 10 गोलियां काली रंग की है। सभी गोलियों का आकार, भार और गोलाई एक समान है। अब यदि हम सभी गोलियों को अच्छी तरह से मिला देते हैं। अब यदि आँख बंद करके बारी-बारी से एक-एक करके डिब्बे में से गोली निकालते है तब प्रश्न यह उठता है कि प्रत्येक बार निकाले जाने वाली गोली का रंग सफेद है या काला है। मान लिजिए कि प्रत्येक बार गोली के रंग के बारे में हमारा उत्तर सफेद होता है तब ऐसी स्थिति में प्रश्न यह उठता है कि गोली के सफेद रंग की होने की क्या प्रायिकता है। चूँकि डिब्बे में 100 गोलियां में से 90 गोली सफेद है तथा शेष 10 काले रंग की है तब 10 में से 9 बार हमारा ठीक उत्तर हो सकता है गोली का रंग सफेद होगा। अब मान लिजिए कि डिब्बे में से एक-एक करके 100 गोली निकाली जाय और प्रत्येक बार हमारा उत्तर सफेद गोली का हो तब हमारा यह उत्तर 90% स्थितियों में सही होगा और 10% स्थितियों में गलत भी हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में सफेद रंग की प्रसम्भाव्यता यहाँ पर 90 होगी अर्थात $P = .90$ और गलत होने की प्रसम्भाव्यता 10 प्रतिशत अर्थात $P = .10$ होगी। 100 में से जितने प्रतिशत हमारे गलत रहने की प्रसम्भाव्यता रहती है उसे हम विश्वास का स्तर कहते है। उपरोक्त उदाहरण में 100 में से 10 बार गलत रहने की प्रसम्भाव्यता है अतः यहाँ पर हमारे विश्वास का स्तर 10 प्रतिशत है अर्थात 0.1 के स्तर पर है।

इसी प्रकार से 100 में से 95 गोली का रंग सफेद और 5 गोली का रंग काला है और यदि उपरोक्त प्रक्रियाँ को यहाँ पर अपनाया जाय तब सफेद रंग की गोली के निकलने की प्रसम्भाव्यता 95 प्रतिशत अर्थात $P = .95$ और उसके सफेद रंग न होने की प्रसम्भाव्यता 100 में से 5 है अर्थात $P = .05$ होगी। ऐसी स्थिति में सांख्यिकी भाषा में हम कह सकते हैं कि यहाँ पर हमारे विश्वास का स्तर 5 है अर्थात .05 है।

उपरोक्त उदाहरण की तरह हम 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर (.01) तथा 0.1 प्रतिशत विश्वास के स्तर (.001) की व्याख्या भी कर सकते हैं।

11.4 स्वतन्त्रता के अंश

प्रायः एक प्रतिदर्श की संख्या जितनी अधिक होती है, उसका मध्यमान भी अपने प्राचल (True mean) से उतना ही निकट रहता है, और उतना ही अपेक्षाकृत अधिक विश्वसनीय रहता है। इस आधार पर एक प्रतिदर्श के मध्यमान की मानक त्रुटि का मान ही प्रतिदर्श की विश्वसनीयता की कसौटी बन जाता है, और यहाँ हमें प्रसम्भाव्यता सिद्धान्त के आधार पर प्रतिदर्श के मध्यमान की मात्रा की विवेचना प्रायः विश्वास के मानक स्तरों 5 प्रतिशत तथा 1 प्रतिशत पर की जाती है तथा स्वतन्त्रता के अंशो (Degree of Freedom) को भी ध्यान में रखना पड़ता है। इस तर्क के आधार पर यदि एक बड़े प्रतिदर्श की मानक त्रुटि का मान 1.96 रहता है तब इससे यह पता लगता है कि प्रदिर्श का मानक विचलन का मान एक ऐसी क्रान्तिक स्थिति पर पहुँच गया है कि जहाँ पर इतना मानक विचलन का मान 95 प्रतिशत स्थितियों में अवश्य आयेगा। अतः ऐसा मध्यमान अपनी जनसंख्या का प्रतिनिध्यात्मक नहीं है, और वह इस कारण अविश्वसनीय है। अतः मानक त्रुटि का मान जैसे-जैसे बढ़ता जाता है वेसे ही अधिक विश्वास के स्तर पर प्रतिदर्श के मध्यमान को अस्वीकृत करना पड़ता है। छोटे प्रतिदर्शो के मध्यमान की विश्वसनीयता की जाँच करने के लिए स्वतन्त्रता के अंशो को अवष्य देखना पड़ता है। वैसे बड़े प्रतिदर्शो में भी सवतन्ता के अंशो पर मानक त्रुटि के सार्थक मान को ज्ञात करना परिशुद्धता के दृष्टिकोण से आवश्यक रहता है लेकिन बहुत आवश्यक नहीं होता है। परन्तु छोटे आकार वाले प्रतिदर्शों में ये मानक मान स्वतन्त्रता के अंशो पर दिये गये आवश्यक तथा सार्थक मानो से अपेक्षाकृत बहुत भिन्न होते हैं और उनका प्रभाव अन्तिम गणना पर बहुत अधिक पड़ता है। इस कारण छोटे प्रतिदर्शो में मानक त्रुटि के सार्थक मान को सम्बन्धित स्वतन्त्रता के अंशो पर ही देखा जाता है।

स्वतन्त्रता के अंश से तात्पर्य प्राप्ताकों को स्वतन्त्र रूप से परिवर्तित होने से होता है। उदाहरण के लिए मान लिजिए कि 6 प्राप्तांक है और इन सभी 6 प्राप्तांकों का माध्य (Mean) 10 होता है। ऐसी स्थिति में 6^{th} प्राप्तांक शेष 5 प्राप्तांकों के साथ मिलकर इस प्रकार का समायोजन करेगा कि माध्य हमेशा 10 ही होगा। मान लिजिए कि 5 प्राप्तांक इस प्रकार है- 10, 12, 18, 13 तथा 3 है। अब ऐसी स्थिति में माध्य को 10 होने के लिए 6^{th} प्राप्तांक को अवश्य ही 4 होना होगा। एक दूसरा उदाहरण लीजिए- यदि प्रथम पाँच प्राप्तांक 2, 8, 4, 10 तथा 10 है तो ऐसी स्थिति में 6^{th} को 2 होगा। कहने का अर्थ यह है कि प्रथम पांच प्राप्तांक तो कुछ भी हो सकता है किन्तु 6जी प्राप्तांक का अंक अपने आप पूर्व निश्चित हो जाता है क्योंकि उपरोक्त उदाहरण में माध्य प्रत्येक में 10 है। अतः यहा स्वतन्त्रता के अंश N - 1 यानि 6-1 = 5 के बराबर है।

iii) मानक त्रुटि की सार्थकता के निर्धारण में स्वतन्त्रता के अंशो का महत्व -

किसी प्रतिदर्श के मध्यमान की विश्वसनीयता की जाँच उसकी मानक त्रुटि के मान के आधार पर की जाती है, और मानक त्रुटि की सार्थकता की जाँच प्रतिदर्श की संख्या (N) अथवा स्वतन्त्रता के अंशों के आधार पर भी जाती है, कम से कम छोटे प्रतिदर्शों द्वारा अध्ययन में स्वतन्त्रता के अंशों का विशेष महत्व रहता है। अतः छोटे प्रतिदर्शों की गणना में स्वतन्त्रा के अंशों का महत्व बढ़ जाता है।

यह माना जाता है कि जब किसी एक वितरण की संख्या (N) 30 से कम होती है, तब वह एक प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) नहीं होता। यही कारण है कि छोटे प्रतिदर्श में मध्यमान से विचलन

की दूरियों पर प्रसामान्य वितरण के सामान्य नियम पूरी तरह लागू नहीं होते हैं। जैसे- प्रसामान्य वितरण में M±1.96σ के अन्तर्गत एक वितरण की 95.44 प्रतिशत संख्या आ जाती है, लेकिन यदि हमारा प्रतिदर्श छोटा है, और मान लिजिए कि उसकी संख्या 25 है तब t(टी) सारणी के अनुसार उस स्थिति में मध्यमान से सिग्मा(σ) दूरी M±1.96σ न होकर M±2.06σ हो जाती है। इसी तरह से प्रसामान्य वितरण में एक वितरण की M±2.58σ के अन्तर्गत 99 प्रतिशत संख्या आ जाती है, परन्तु छोटे प्रतिदर्श के लिए यह दूरी M±2.58σ न रहकर M±2.80σ हो जाती है। इसका मुख्य कारण यह है कि जब एक प्रतिदर्श की संख्या छोटी रहती है तब प्रतिदर्श की इकाईयों का विक्षेपण अपने मध्यमान से अपेक्षाकृत दूर-दूर रहता है परन्तु प्रसामान्य वितरण में अधिकतर इकाईयाँ अपने मध्यमान के आस-पास ही रहती है। यही कारण है कि छोटे प्रतिदर्श में वितरण वक्र मध्य में चपटा रहता हैं।

जैसा कि यह हमें मालूम है कि प्रसामान्य विवरण में वितरण वक्र (distribution Curve) घंटाकार रहता है, तथा उसमें मध्यमान से थोड़ी ही सिग्मा दूरी पर काफी संख्या आ जाती है। यही कारण है कि बड़े प्रतिदर्शों में विश्वास के विभिन्न स्वीकृत स्तरों पर- जैसे 5%, 2% तथा 1% विश्वास के स्तरों पर प्रायः जहाँ मानक त्रुटि के मान क्रमशः 1.96, 2.33 तथा 2.58 निश्चित से ही रहते है, इसके विपरीत छोटे प्रतिदर्शों के लिए ये मान (Value)विभिन्न स्वतन्त्रता के अंशो पर बहुत भिन्न-भिन्न होते हैं। इसीलिए परिशुद्धता के लिए मानक त्रुटि की सार्थकता की जाँच सम्बन्धित स्वतन्त्रता के अंशो पर ही की जानी चाहिए छोटे प्रतिदर्शों में करना तो बहुत ही आवश्यक है।

iv) **सह-सम्बन्धित समूह में स्वतन्त्रता के अंशो की गणना-**

जब एक ही समूह को एक परीक्षण दो बार दिया जाता है, तब उस स्थिति में स्वतन्त्रता के अंशो (d.f.) की गणना दोनों समूहों की संख्या, प्रथम स्थिति वाले समूह की संख्या तथा द्वितीय स्थिति वाले समूह की संख्या के आधार पर गणना नहीं की जाती है। ऐसी स्थिति में केवल एक ही समूह की संख्या के आधार पर स्वतन्त्रता के अंशो (d.f.) की गणना की जाती है। जैसे- यदि प्रथम स्थिति में संख्या 20 है तब यहाँ पर d.f. का सूत्र निम्न होगा।

$$d.f. = (N - 1)$$

इसके अतिरिक्त, यदि 40 व्यक्तियों को किसी एक विशेष आधार पर सह-सम्बन्धित करके दो समतुल्यात्मक समूहों (Matched groups) में विभाजित कर दिया जाता है, उस स्थिति में भी d.f. का सूत्र दोनों समूहों के लिए n-1 ही रहेगा जैसे- 20-1= 19 होगा। ऐसा प्रायः उस स्थिति में भी होता है, जब कि दो समूहों को समरूप युग्मों के आधार पर तुल्यात्मक किया जाता है।

लेकिन, यदि एक समूह को किसी एक आधार पर तुल्यात्मक (Match) न करके संयोग (Random) के आधार पर दो समान समूहों में विभाजित करते हैं तब ऐसी स्थिति में d.f. की गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैः-

$$d.f. = (N_1 - 1) + (N_2 - 1) - 1$$

यदि 40 व्यक्तियों को दो समान समूहो में संयोग के आधार पर विभाजित किया जाता है तब d.f. = (20 – 1)+(20 – 1) – 1 ± 37 होगा।

जब दो समूह किसी एक आधार पर समरूप रहते है, उससे उनकी विचलनशीलता कम हो जाती है, इससे उनकी मध्यमान की मानक त्रुटि (SEm) तथा उसके अनुसार, अन्तर की मानक त्रुटि (SEd)का मान भी कम हो जाता है। SEd के मान के कम हो जाने से क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio) का मान बढ़ जाता है, ऐसी स्थिति में दो मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता को निश्चित करने के लिए कठोर माप दण्ड अपनाया जाता है और d.f. की मात्रा को कम करना पड़ता है, क्योंकि d.f. का मान जितना कम होगा, सार्थकता के लिए उतना ही अधिक C.R. के मान की आवश्यकता पड़ती है। यही कारण है कि सह-सम्बन्धित समूहों में d.f. की संख्या को सामान्यतः कम रखा जाता है।

उदाहरण 1-

एक तात्कालिक स्मृति (Immediate memory) के परीक्षण में 21 बालकों को आयु के आधार पर तीन समूहों A,B तथा C में विभाजित किया गया। परीक्षण में प्राप्त उनके अंक नीचे दिये गये हैं। बताइये क्या यहाँ आयु के आधार पर तीनों समूह एक-दूसरे से सार्थक रूप से भिन्न हैं ?

समूह A	समूह B	समूह C	
3	4	5	
5	5	5	
3	3	5	
1	4	1	
7	9	7	$\sum X = 96$
3	5	3	$N = 21$
6	5	7	
$\sum X_1 = 28$	$\sum X_2 = 35$	$\sum X_3 = 33$	
$N_1 = 7$	$N_2 = 7$	$N_3 = 7$	

हल- **(A)** संशोधन $= (\sum X)^2/N$

$$= (96)^2/21$$

$$= 9216/21$$

$$= 438.86$$

(B) समस्त वर्गों का योग (Total Sum of Squares)

$$= (X_1^2 + X_1^2 + ... + X_2^2 + X_2^2 + ... + X_3^2\ X_3^2) - C$$

$= 3^2+5^2+3^2+1^2+7^2+3^2+6^2+4^2+5^2+3^2+4^2+9^2+5^2+5^2+5^2+5^2+5^2\ +1^2+7^2+3^2+7^2 - C$

$= 9+25+9+1+49+9+36+16+25+9+16+81+25+25+25+25+25\ +1+49+9+49 - C$

$= 518 - 438.86$

$= 79.14$

(C) समूहों के मध्य में वर्गों का योग (Sum of Squares between Groups)

$= (\sum X_1)^2/N_1 + (\sum X_2)^2/N_2 + (\sum X_3)^2/N_3 - C$

$= (28)^2/7 + (35)^2/7 + (33)^2/7 - 438.86$

$= 784/7 + 1225/7 + 1089/7 - 438.86$

$= 3098/7 - 438.86$

$= 442.57 - 438.86$

$= 3.71$

(D) समूहों के मध्य में वर्गों का योग (Sum of Squares within Groups)

$= SS_{tot} - SS_{bg}$

$= 78.14 - 3.7 \qquad = 75.43$

Sources of Variation	d.f	Sum of Squares	Mean Square or (Variance)
Between Groups	2	3.71	1.85
Within Groups	18	75.44	4.19
Total	20	79.15	

$$F = \frac{\text{Mean Square between Groups}}{\text{Mean Square within Groups}}$$

$= \frac{1.85}{} = 0.44$

4.19

d.f Between Groups = (K – 1) = (3 – 1) = 2

d.f Within Groups (N_{tot} – K) = (21 – 3) = 18

5% स्तर पर सार्थकता के लिए Fका मान = 3.55

1% स्तर पर सार्थकता के लिए F का मान = 6.01

प्रस्तुत समस्या में F का मान ऊपर दिये गये दोनों स्तरों पर सार्थकता के लिए आवश्यक मानों से बहुत कम है अतएव प्रस्तुत समस्या में निराकरणीय परिकल्पना सत्य है, अर्थत् तीनों समूहों A,B तथा C के बालकों में सार्थक अन्तर नहीं है तथा सब बालक एक ही समष्टि ;च्वचनसंजपवदद्ध का प्रतिनिधित्व कर रहे हैं।

उदाहरण 2-

तात्कालिक स्मृति (Immediate Memory) का एक परीक्षण एक कक्षा के 10 लड़कों व 10 लड़कियों को दिया गया। उनके परिणाम नीचे दिये गये है।

लड़कों की तात्कालिक स्मृति का विस्तार	लड़कियों की तात्कालिक स्मृति का विस्तार
7	7
5	6
6	5
5	8
6	9
6	8
7	8
9	9
8	6
6	9

यहाँ अध्ययनकर्त्ता ने निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis) की रचना की है। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना यहाँ सत्य है?

हल-

Group	Group				

A	**B**	**d_1**	**d_2**	**d_1^2**	**d_2^2**
7	7	+0.5	–0.5	.25	.25
5	6	–0.5	–1.5	2.25	2.25
6	5	–0.5	–2.5	.25	2.25
5	8	–1.5	+0.5	2.25	.25
6	9	–0.5	+1.5	.25	2.25
6	8	–0.5	+0.5	.25	.25
7	8	+0.5	+0.5	.25	.25
9	9	+2.5	+1.5	6.25	2.25
8	6	+1.5	–1.5	2.25	2.25
6	9	–0.5	+1.5	.25	2.25
ΣX_2=65	**ΣX_2=75**			**Σd_1^2=14.50**	**Σd_2^2=18.50**

$M_1 = \frac{65}{10} = 6.5$ $M_2 = \frac{75}{10} = 7.5$

t-अनुपात (t-ratio) का सूत्रः-

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}}$$

यहाँ $$t = \frac{6.5 - 7.5}{\sqrt{\left(\frac{14.50 + 18.50}{10 + 10 - 2}\right)\left(\frac{10 + 10}{10 \times 10}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{33}{18}\right)\left(\frac{20}{100}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1.8333 \times .2}}$$

$$= \frac{1}{1.354 \times .447}$$

$$= \frac{1}{.605}$$

= 1.66 (दो दशमलव तक)

यहाँ, Degrees of Freedom $= (N_1 - 1) + (N_2 - 1)$

$= (10 - 1) + (10 - 1) = 18$

18 d.f. पर सार्थकता के लिए t का आवश्यक मान:

5% विश्वास के स्तर पर = 2.10

1% विश्वास के स्तर पर = 2.88

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त t का मान उपरोक्त दोनों मानों से बहुत कम है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना सत्य है, और यह मानना पड़ेगा कि लड़कों व लड़कियों के तात्कालिक स्मृति के विस्तार में सार्थक अन्तर नहीं है।

11.5 प्रथम प्रकार एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि

सांख्यिकीय विश्लेषण में कई प्रकार की त्रुटियाँ पाई जाती है जिसमें प्रथम प्रकार एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि प्रमुख है। इन दोनों प्रकार की त्रुटियों के कारण प्रायः शोधकर्त्ता के मनमाने विश्वास के स्तर होते हैं। मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता के परीक्षण के लिए अध्ययनकर्त्ता अपने अध्ययनों में विश्वास के दो स्तरों क्रमशः 5 प्रतिशत

विश्वास के स्तर तथा 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर का प्रयोग करता है। कभी-कभी शोधकर्ता निराकरणीय (शून्य) परिकल्पना (Hypothesis) को गलत सिद्ध करने के लिए अपने विश्वास के स्तर को अपनी इच्छा से ही नीचा कर देता है। सामान्यतः शून्य उपकल्पना को 5 प्रतिशत विश्वास के नीचे के स्तर पर अस्वीकृत नहीं किया जाता है परन्तु यदि शोधकर्ता अपने आकड़ों के आधार पर यह देखता है कि शून्य उपकल्पना को 10 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत किया जा सकता है और वह यदि ऐसा करता है तब वह शून्य उपकल्पना को अस्वीकृत करने में प्रथम प्रकार की त्रुटि (Type I error) करता है दूसरे शब्दों में शोधकर्त्ता जब शून्य उपकल्पना को सत्य रहने पर भी उसे अस्वीकृत कर देता है या उसे अस्वीकृत कर देना पड़ता है तो इसे प्रथम प्रकार की त्रुटि कहां जाता है। इस प्रकार की त्रुटि को अल्फा त्रुटि (Alfa error) भी कहाँ जाता है। स्पष्टतः ऐसा करना एक त्रुटि है, क्योंकि विश्वास के स्तर की स्थापना उपकल्पना की रचना के समय ही हो जाती है, इस कारण से उसमें परिवर्तन करना उचित नहीं होता हैं फिर भी यदि ऐसा किया जा रहा है तब यह उस अध्ययन में प्रथम प्रकार की त्रुटि मानी जाती है। गैरट (1967) के शब्दों में, “Type I errors are made when we reject a nul hypothesis, by making a difference significant although no true difference exists.” इसमें शून्य परिकल्पना सत्य होती है, लेकिन अस्वीकृत कर दी जाती है।

इसके ठीक विपरीत द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Type II error) उस समय होती है जब अनुसंधानकर्त्ता गलत उपकल्पना को अस्वीकार नहीं करता है। ऐसी स्थिति में अनुसंधानकर्ता अनावश्यक रूप से अपने विश्वास स्तर को इतना ऊँचा कर देता है कि शून्य उपकल्पना 0.05 और 0.01 विश्वास स्तर पर असत्य होते हुए भी सत्यमान ली जाती है। दूसरे शब्दों में जहाँ शोधकर्त्ता शून्य उपकल्पना को गलत रहने पर भी उसे सवीकार करता है या स्वीकार करने के लिए बाध्य होता है। इस तरह की त्रुटि को द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Type II error) कहाँ जाता है। इसको बीटा त्रुटि (Beta error) भी कहाँ जाता है। उदाहरण के लिए, टी की गणना मूल्य 0.05 तथा 0.01 स्तर पर सार्थक है परिणाम स्वरूप शून्य उपकल्पना अस्वीकृत हो जायेगी। परन्तु जब अनुसंधानकर्त्ता विश्वास स्तर को 0.05 तथा 0.01 से बढ़ाकर 0.001 कर देता है तब ऐसी स्थित में टी (t) का मूल्य निरर्थक हो जायेगा और शून्य उपकल्ना सत्य सिद्ध हो जायेगी। यहाँ स्पष्ट रूप से सार्थक अन्तर देखने में आ रहा है, परन्तु फिर भी शोधकर्त्ता शून्य उपकल्पना को अस्वीकृत नहीं करता।

गैरेट के शब्दों में, “Type II errors made when we accept a null hypothesis by making a difference not significant, when a true difference actually exists.”

प्रथम एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि को दूर करने के उपाय-

उपरोक्त दोनों प्रकार की त्रुटियों को यथा संभव नियन्त्रित करने का प्रयास करना चाहिए। वैज्ञानिक अध्ययनों में दोनों प्रकार की त्रुटियों के भ्रामक परिणाम हो सकते हैं। अतः प्रथम प्रकार की त्रुटि को दूर करने के लिए अध्ययनकर्त्ता को चाहिए कि वह अपने विश्वास के स्तर को नीचा न करे, बल्कि अपने अध्ययन की पुनरावृत्ति करे या फिर अपने निरीक्षणों की संख्या (N) में वृद्धि करें। निरीक्षणों की संख्या में वृद्धि करने से प्रतिदर्श की मानक त्रुटि घट जाती है, तथा प्रतिदर्श की विश्वसनीयता बढ़ जाती है। ऐसा करने से उसे अपने परिणामों को कम से कम 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक बनाने में सहायता मिलेगी और वह अपने अध्ययन में प्रथम प्रकार की त्रुटि से बच जायेगा। प्रथम प्रकार की त्रुटि को कम करने का एक तरीका यह भी है कि अल्फा स्तर को 0.01 या 0.001 पर रखा जाए। ऐसी स्थिति में स्वभावतः प्रथम प्रकार की त्रुटि की संभावना क्रमशः 100 में से 1 बार

तथा 1000 में 1 बार होगी जोकि न गण्य है, परन्तु इस प्रकार से जब हम प्रथम प्रकार की त्रुटि को कम करने का प्रयास करते हैं तो साथ ही साथ द्वितीय प्रकार की त्रुटि के अधिक हो जाने की संभावना में वृद्धि हो जाती है।

द्वितीय प्रकार की त्रुटि प्रायः कम प्रभावशील होती है। परन्तु यदि किसी एक रोग के इलाज के लिए कोई गुणकारी औषधि उपलब्ध न हो, और नई औषधि के निर्माण को इस आधार पर अस्वीकृत कर दिया कि इसके उपयोग द्वारा परिणाम केवल 0.01 विश्वास के स्तर पर ही सार्थक है परन्तु 0.001 विश्वास के स्तर पर सार्थक नहीं है, तब यहाँ पर द्वितीय प्रकार की त्रुटि अवष्य हानिकारक होगी। क्योंकि इससे एक अच्छी प्रभावशाली औषधी का उपयोग सम्भवतः न हो सकेगा। जबकि व्यवहारिक रूप से उसका उपयोग होना चाहिए था। इसके विपरीत ऐसी परिस्थातियों में विश्वास के स्तर को उच्च श्रेणी का अवश्य होना चाहिए जब कि शून्य उपकल्पना के अस्वीकृत हो जाने के दुष्परिणाम निकलते हो।

सामान्यतः सामाजिक अध्ययनों में 5 प्रतिशत विश्वास का स्तर सन्तोषजनक रहता है, जबकि उच्च श्रेणी के वैज्ञानिक अध्ययनों में 1 प्रतिशत विश्वास का स्तर आवश्यक होता है। 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर को अधिक ऊँचा-जैसे 0.005 अथवा 0.001 उसी स्थिति में उठाना चाहिए जबकि शून्य उपकल्पना के अस्वीकृत किये जाने के परिणाम अत्यन्त गंभीर होने की संभावना अधिक हो।

11.6 सारांश

किसी भी शून्य उपकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए शोधकर्त्ता प्रायः दो विश्वास के स्तरों का चयन करता है। मनोविज्ञान तथा शिक्षा के क्षेत्र में अनुसंधानकर्त्ता 0.05 तथा 0.01 सार्थकता स्तर पर ही उपकल्पनाओं का परीक्षण करते हैं 0.05 तथा 0.01 सार्थकता स्तरो के लिए क्रमशः 95 प्रतिशत वर्गान्तर सीमा तथा 99 प्रतिशत वर्गान्तर सीमा जैसे शब्दों का प्रयोग किया जाता है। 0.01 सार्थकता स्तर का अर्थ है कि मध्यमान प्राचल का मान 99 प्रतिशत इस सीमा के अन्तर्गत है तथा शेष 1 प्रतिशत के इस सीमा से बाहर होने की संभावना है। इसी तरह से 0.05 सार्थकता स्तर से तात्पर्य है कि मध्यमान प्राचल का मान 95 प्रतिशत इस सीमा के अन्तर्गत है तथा शेष 5 प्रतिशत इसके बाहर होने की संभावना है। प्रसामान्य वितरण के अन्तर्गत $M \pm 1.96\sigma$ के बीच 95 प्रतिशत तथा $M \pm 2.58\sigma$ के बीच 99 प्रतिशत प्राप्तांक पड़ते है। इस प्रकार कहाँ जा सकता है कि प्रसामान्य संभावना वक्र (Normal Probability Curve) में 95 प्रतिशत तथा 99 प्रतिशत क्षेत्र क्रमशः $M \pm 1.96\sigma$ तथा $M \pm 2.58\sigma$ के अन्तर्गत पड़ते है। सार्थकता का स्तर वह स्तर होता है जिस पर शोधकर्त्ता किसी निराकरणीय प्राकल्पना को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत करता है।

स्वतन्त्रता के अंश से तात्पर्य प्राप्तांकों को स्वतन्त्र रूप से परिवर्तित होने से होता है। छोटे प्रतिदर्शों के मध्यमान की विश्वसनीयता की जाँच करने के लिए स्वतन्त्रता के अंशो को अवश्य देखना पड़ता है। जबकि बड़े प्रतिदर्शों की स्थिति में यह बहुत आवश्यक नहीं होता है, क्योंकि बड़े प्रतिदर्शों में ये मानक मान स्वतन्त्रता के अंशों पर दिये गये आवश्यक तथा सार्थक मानो से अपेक्षाकृत बहुत अधिक भिन्न नहीं होते, और उनका प्रभाव अन्तिम गणना पर बहुत कम ही रहता हैं, फिर भी परिशुद्धता के दृष्टिकोण से देख लेना आवश्यक रहता है।

संख्यिकीय विश्लेषण में कई प्रकार की त्रुटियां पाई जाती है जिसमें प्रथम प्रकार एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि मुख्य है। जब अनुसंधानकर्त्ता शून्य उपकल्पना को असत्य सिद्ध करने के लिए विश्वास स्तर को इच्छा

अनुसार नीचाकर देता है तब शून्य परिकल्पना के अस्वीकृति में प्रथम प्रकार की त्रुटि पाई जाती है। इसमें शून्य परिकल्पना सत्य होती है लेकिन अस्वीकृत कर दी जाती है। इसके विपरीत जब अनुसंधानकर्त्ता गलत उपकल्पना को अस्वीकार नहीं करता है और ऐसी स्थिति में शोधकर्त्ता अनावश्यक रूप से अपने विश्वास स्तर को इतना ऊँचा कर देता है कि शून्य उपकल्पना 0.05 ओर 0.01 विश्वास स्तर पर असत्य होते हुए भी सत्यमान ली जाती है। प्रथम प्रकार की त्रुटि को कम करने का सबसे अच्छा तरीका यह है कि जहाँ तक हो सके प्रतिदर्श की संख्या को और अधिक बढ़ाकर ही अध्ययन करना चाहिए।

द्वितीय प्रकार की त्रुटि को कम करने का तरीका यह है कि अपने अध्ययन के सार्थकता, महत्तव और उपयोगिता को ध्यान में रखकर ही विश्वास के स्तर को ऊँचा उठाना चाहिए, अनावश्यक रूप से विश्वास के स्तर को ऊँचा नहीं उठाना चाहिए।

11.7 शब्दावली

- **प्रथम प्रकार की त्रटि (Type I error):** शोधकर्त्ता जब शून्य उपकल्पना को सत्य रहने पर भी उसे अस्वीकृत कर देता है या उसे अस्वीकृत (Reject)कर देना पड़ता है, तो इसे प्रथम प्रकार की त्रुटि कहाँ जाता है।
- **द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Type II error):** जब शोधकर्त्ता शून्य उपकल्पना को गलत या असत्य रहने पर भी उसे स्वीकार करता है या स्वीकार करने की लिए बाध्य होता है, तब इस तरह की त्रुटि को द्वितीय प्रकार की त्रुटि कहाँ जाता है।
- **प्रतिदर्श (Sample):** प्रतिदर्श एक निश्चित संख्या में समष्टि या जीवसंख्या से चयन किया गया सदस्यों का एक समूह होता है।
- **प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution):** प्रसामान्य वितरण वह वितरण होता है जिसमें बहुत सारी संख्या मापनी के बीच में आते है तथा बहुत कम संख्या मापनी की ऊपरी छोर तथा निचली छोर पर आते है।
- **प्रसामान्य वितरण वक्र (Normal Distribution Curve):** प्रसामान्य वितरण के आकड़ो के आधार पर जो वक्र बनता है उसे प्रसामान्य वितरण वक्र कहाँ जाता है।
- **प्रसम्भाव्यता (Probability):** प्रसम्भवयता का अर्थ किसी एक घटना के घटित होने के पूर्वानुमान से होता है।
- **शून्य उपकल्पना (Null hypothesis):** शून्य उपकल्पना वह उपकल्पना है जिसके द्वारा हम चरों के बीच कोई अन्तर नहीं होने के सम्बन्ध का उल्लेख करते हैं।
- **स्वतन्त्रता के अंश (Degree of Freedom):** स्वतन्त्रता के अंश से तात्पर्य प्राप्तांकों को स्वतन्त्र रूप से परिवर्तित होने से होता है।
- **सार्थकता स्तर (Level of Significance):** शून्य उपकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए जिस कसौटी को चुना जाता है, उसे सार्थकता के स्तर कहाँ जाता है।

11.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न

1) 0.05 सार्थकता के स्तर क्या अर्थ होता है?
2) सार्थकता के स्तर से आप क्या समझते है?
3) 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थकता का मान कितना होता है।

4) 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थकता का मान कितना होता है।
5) यदि 10 संख्याआं का माध्य 12 है और उनमें से 9 संख्याएँ क्रमशः 11, 13, 14, 12, 9, 8, 7, 10 व 18 है तब अन्तिम संख्या कितनी होगी?
6) अल्फा त्रुटि किस प्रकार की त्रुटि को कहते है?
7) बीटा त्रुटि किस प्रकार की त्रुटि को कहते है?
8) अध्ययनकर्त्ता अपने निरीक्षणों (N) में वृद्धि करके किस प्रकार की त्रुटि को कम कर सकता है?

उत्तर:

1) जब कोई शून्य उपकल्पना 0.05 सार्थकता के स्तर पर अस्वीकृत होती है, तब इसका अर्थ यह हुआ कि यदि संबंधित प्रयोग या परीक्षण जिनसे आँकड़े प्राप्त किये गये है, को 100 बार दोहराया जाय, तो उसमें से पांच बार शून्य उपकल्पना सत्य होगी और 95 बार असत्य होगी।
2) जब शून्य उपकल्पना को 0.01 सार्थकता के स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है, तब इसका अर्थ यह हुआ कि यदि सम्बन्धित प्रयोग या परीक्षण जिनसे आँकड़े प्राप्त हुए है, उसे 1000 बार दोहराया जाय तो उसमें से 1 बार शून्य उपकल्पना सत्य होगी और 999 बार असत्य होंगी।
3) 5 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थकता का मान $M \pm 1.96\sigma$ होता है जिसके अन्तर्गत 95 प्रतिशत प्राप्तांक आते है।
4) 1 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थकता का मान $M \pm 2.58\sigma$ होता है जिसके अन्तर्गत 99 प्रतिशत प्राप्तांक आते है।
5) 10 संख्याओं को 12 माध्य होने के लिए कुल योग 120 होना आवश्यक है। इसलिए अन्तिम संख्या का मान ज्ञात करने के लिए शेष 9 संख्याओं को पहले जोड़ करेगें। जैसे- (11+13+14+12+9+8+7+10+18) =102

   12 माध्य होने के लिए कुल योग 120 होना आवश्यक है अतः 120-102 = 18

6) प्रथम प्रकार की त्रुटि को अल्फा त्रुटि कहाँ जाता हैं।
7) द्वितीय प्रकार की त्रुटि को बीटा त्रुटि कहाँ जाता है।
8) अध्ययनकर्ता अपने निरीक्षणो में वृद्धि करके प्रथम प्रकार की त्रुटि को कम कर सकता है।

11.9 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- Anastasi, Anne, Psychological Testing, New York: The MacMillan Co., 1954.
- Garrett, H.E., Statistics in Psychology and Education, Bombay: Vakils, Feffer and Sinons P.Ltd., 1967.
- भागर्व एम0 (1999) आधुनिक मनोवैज्ञानिक परीक्षण एवं मापन, हरप्रसाद भार्गव, आगरा।
- सिंह, अरूण कुमार (2002) मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में सांख्यिकी, नोवेल्टी एण्ड कम्पनी, पटना-8।
- कपिल, एच. के. (1994) सांख्यिकी के मूलतत्त्व, विनोद पुस्तक मंदिर, आगरा।

- रामजी श्रीवास्तव (2003), मनोविज्ञान, शिक्षा तथा समाजशास्त्र में सांख्यिकीय विधियाँ, मोतीलाल बनारसीदास बंगलोरोड, दिल्ली।

11.10 निबन्धात्मक प्रश्न

1. प्रथम प्रकार की त्रुटि एवं द्वितीय प्रकार की त्रुटि से आप कया समझते है तथा इस प्रकार की त्रुटियों को कैसे कम कर सकते हैं?
2. सार्थकता के स्तर से क्या अभिप्राय है तथा शोधकार्य में इसके महत्व को स्पष्ट किजिए।
3. सांख्यिकीय विश्लेषण में स्वतन्त्रता के अंश की उपयोगिता को स्पष्ट कीजिए?