एमएईसी–104
(MAEC – 104)

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

भाग 1
(Part 1)

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
फोन नं. 05946 – 261122, 261123
टॉल फ्री नं. 18001804025
फैक्स नं. 05946–264232, ई–मेल info@uou.ac.in
http://uou.ac.in

पाठ्यक्रम समिति

प्रो0 गिरिजा प्रसाद पाण्डे,
निदेशक समाज विज्ञान विद्याशाखा,
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

प्रो0 मधुबाला,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
इंदिरा गॉधी मुक्त विश्वविद्यालय,
नई दिल्ली

प्रो0 एम0 के0 धडोलिया,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,
कोटा, राजस्थान

प्रो0 आर0 सी0 मिश्र
निदेशक वाणिज्य एवं प्रबन्ध विद्याशाखा,
विशेष आमंत्रित सदस्य
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

प्रो0 एस0 पी0 तिवारी,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
डॉ0 आर0 एम0 एल0 अवध विश्वविद्यालय,
फैजाबाद उ0 प्र0

डॉ0 अमितेन्द्र सिंह
अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

पाठ्यक्रम संयोजन एवं संपादन

डॉ0 अमितेन्द्र सिंह
अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

इकाई लेखन

इकाई लेखक	इकाई संख्या
डॉ. वी. के. निगम असिस्टेन्ट प्रोफेसर अर्थशास्त्र विभाग ई.सी.सी. इलाहाबाद, उ. प्र.	**1,2,3,4**
डॉ. अंकिता गुप्ता असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, महात्मा गाँधी काशी विद्यापीठ वाराणसी, उ.प्र.	**5,6,7,8** **19,20,21,22**
डॉ. अनामिका चौधरी असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग वाई.डी.पी.जी. कालेज लखीमपुर खीरी, उ. प्र.	**9,10,11,12,** **26,27**
डॉ. मोनिका मल्होत्रा असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, आई.आई पी.एम. कॉलेज इलाहाबाद, उ. प्र .	**13,14,15**
डॉ. एस. वी. रावत असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, एन. आर. ई.सी.पी.जी. कालेज खुर्जा, उ.प्र.	**16,17,18,** **28,29**
प्रो. आर. पी. सेन प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग महात्मा गाँधी काशी विद्यापीठ वाराणसी, उ. प्र.	**23,24,25**

संस्करणः 2017
आई.एस.बी.एन.: 978-93-84632-99-1

प्रकाशकः कुल सचिव, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल – 263139
email: studies@uou.ac.in
मुद्रकः

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

एमएईसी – **104** (MAEC – 104)
भाग 1 (Part 1)

विषय–सूची

इकाई – 1 वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त

इकाई संरचना

1.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र के अन्तर्गत अध्ययन किए जाने वाले विषयों में परिमाणात्मक विश्लेषण सर्वाधिक महत्वपूर्ण होता है। अर्थशास्त्र के सिद्धान्तों को गणितीय संदर्शों द्वारा प्रभावी रूप से व्यक्त किया जाता है किन्तु सम्पूर्ण गणितीय प्रक्रिया के मूल में वास्तविक अंक प्रणाली होती है। इसी कारण अर्थशास्त्र के विद्यार्थीयों के लिए वास्तविक अंक प्रणाली से सुपरिचित होना नितान्त आवश्यक है। अर्थशास्त्र के अनेक विषय गणनाओं पर आधारित है जैसे– लागत, लाभ, आय, सन्तुष्टि, बचत आदि। साथ ही अनेक संदर्भों जैसे– मांग, पूर्ति, मूल्य, उपयोगिता, लागत आदि के ऋणात्मक मान नहीं हो सकते हैं। इन तथ्यों को भली प्रकार से समझने में वास्तविक अंक प्रणाली का ज्ञान बहुत सहायक होता है।

इसी प्रकार अर्थशास्त्र में समुच्चय की अवधारणा एवं समुच्चय सिद्धान्त का भी महत्वपूर्ण उपयोग होता है। जटिल आर्थिक क्रियाओं को सरलता से समझने के लिए आर्थिक क्रियाओं तथा उससे जुडी वस्तुओं का वर्गीकरण करके विश्लेषण करने से उन्हे समझना सरल हो जाता है। यह वर्गीकरण वस्तुतः प्रायः समुच्चय अवधारणा पर आधारित होता है। जैसेः– उपभोक्ता वस्तुएं, आगतें, पूँजीगत वस्तुएँ, बाजार शक्तियाँ, मौद्रिक संक्रियाएँ, राजकोषीय संक्रियाएँ आदि।

वास्तविक अंक प्रणाली व समुच्चय सिद्धान्त की अर्थशास्त्र के अध्ययन में महती भूमिका को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत इकाई में आपको इनसे अवगत कराया जा रहा है।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात–

(i) वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त की अवधारणा से अवगत हो जाएगें।

(ii) वास्तविक अंक प्रणाली एवं समुच्चय सिद्धान्त के माध्यम से अर्थशास्त्र में विभिन्न गणितीय विश्लेषण को समझने योगय हो जाएंगे।

1.3 वास्तविक अंक प्रणाली

1.3.1 प्राकृतिक संख्याएँ (N) :– जैसे कि हम सभी ने छोटी कक्षाओं में गिनती के रूप में संख्याओं $1,2,3,4,5 - - - -$ का अध्ययन किया है, इन संख्याओं को प्राकृतिक संख्या कहतें है। क्योंकि प्राकृतिक वस्तुओं का परिमाण इन्ही संख्याओं के द्वारा दर्शाया

जाता है। उदाहारण के लिए प्राकृतिक रूप से एक पेड़, दो पेड़ या पाँच भैंस ही उपलब्ध होती है। हम 2) व्यक्ति, या 3(बकरी की कल्पना प्राकृतिक रूप से नहीं कर सकते हैं।

1.3.2 पूर्णांक (I):– पूर्णांक धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों प्रकार के होते हैं प्राकृतिक संख्याएँ धनात्मक पूर्णांक होती हैं, इसी प्रकार इनके ऋणात्मक मान जैसे— $1, -2, -3,$ ………. आदि ऋणात्मक पूर्णांक होते हैं। इनके अतिरिक्त शून्य (0) भी पूर्णांक में आता है। शून्य न तो धनात्मक न तो ऋणात्मक होने के कारण अद्वितीय है। इस प्रकार सभी प्राकृतिक संख्याओं के ऋणात्मक मानों तथा शून्य को सम्मिलित रूप से पूर्णांक कहते हैं।

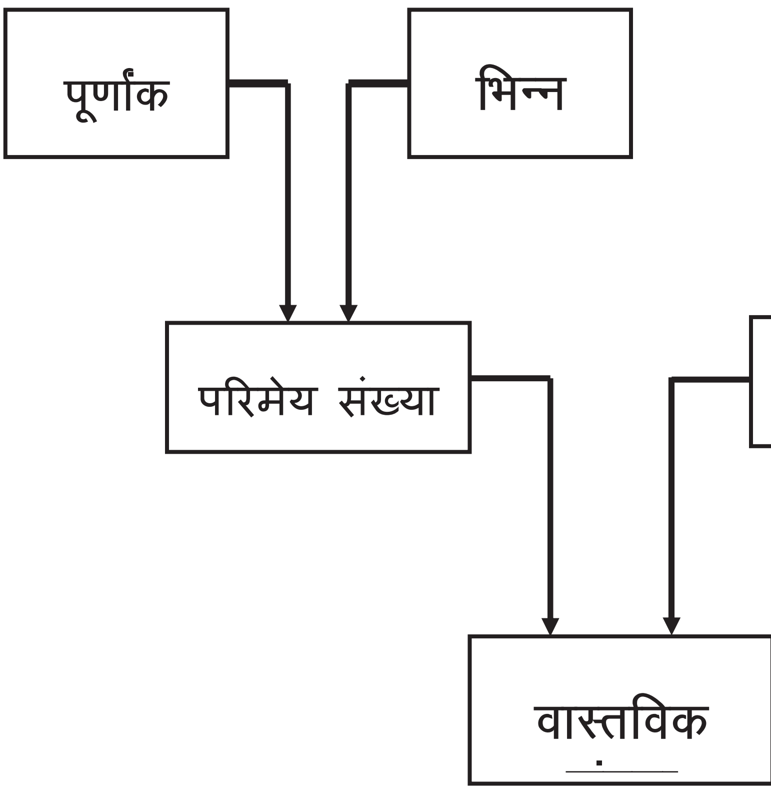
1.3.3 परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ:– अनेक ऐसी संख्याएं जो पूर्णांक नहीं होती हैं जैसे भिन्न $1\frac{1}{3}, -\frac{5}{7}, \sqrt{2}$ आदि ये ऐसी संख्याएं है जिनके मान पैमाने पर दो पूर्णाकों के बीच आते हैं। $1\frac{1}{3}$ का मान 3 एवं 4 के बीच, $-\frac{5}{7}$ का मान शून्य $'0'$ तथा $-\mathbf{1}$ के बीच एवं कर्णी 2 का मान 1 तथा 2 के बीच आता है। इस प्रकार हम कह सकतें है कि पूर्णांक सभी सम्भव संख्याओं को व्यक्त नहीं करते हैं।

1.3.3.1 परिमेय संख्या (Q): परिमेय संख्या वे संख्याएं है जिनके परिमाण को भिन्न के रूप में पूर्णतः दर्शाया जा सकता है। परिमेय संख्यायें धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकती है। चूँकि पूर्णांको को भी भिन्न के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है (यथा, 7 को $\frac{7}{1}$ अथवा -4 को $-\frac{4}{1}$ के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है) अतः पूर्णांक भी परिमेय संख्याओं के अन्तर्गत आते हैं।

1.3.3.2 अपरिमेय संख्याएं : परिमेय संख्याओं को जानने के पश्चात् यह स्पष्ट हो जाता है कि अनेक ऐसी संख्याएं भी होती है, जिनको भिन्न के रूप में व्यक्त करना सम्भव नहीं होता है इन संख्याओं को अपरिमेय संख्या कहते हैं, जैसे $\sqrt{\mathbf{2}} = 1.4142 \ldots\ldots\ldots\ldots$।

1.3.4. वास्तविक संख्या (R): प्रत्येक अपरिमेय संख्या दो परिमेय संख्याओं के मध्य स्थित होती है। अतः जिस प्रकार परिमेय संख्याएं दो पूर्णाको के बीच के अन्तराल को भरती है उसी प्रकार अपरिमेय संख्याएं परिमेय संख्याओं में मध्य के अन्तरालों को भरती हैं।

संख्याओं द्वारा रिक्तताओं को भरने की इस प्रक्रिया के परिणमस्वरूप अंको का एक सातत्य प्राप्त होता है। इन सभी संख्याओं को मिला कर वास्तविक अंक कहा जाता है अर्थात् प्राकृतिक संख्याएं, पूर्णांक, परिमेय व अपरिमेय संख्याएं सभी वास्तविक संख्याओं के अन्तर्गत आती हैं। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को R के द्वारा दर्शाया जाता है। जब सभी वास्तविक संख्याओं को एक सरल रेखा पर दर्शाया जाता है (विस्तारित पैमाने के रूप में) तो इसे वास्तविक रेखा कहते हैं।



चित्र सं0 1

1.4 समुच्चय सिद्धान्त

1.4.1 समुच्चय की अवधारणः– समुच्चय से तात्पर्य वस्तुओं के एक सुपरिभाषित समूह या संग्रह से है। सुपरिभाषित से तात्पर्य उस विशिप्टता के सुपरिभाषित होने से है जिसके आधार पर इन वस्तुओं को संग्रहीत कर एक समूह में रखा जाता है। उदाहरण के लिए फुटबाल टीम अर्थात फुटबाल खिलाडियों का समुच्चय, इस समुच्चय का आधार हर खिलाडी द्वारा फुटबाल खेले जाने की विशिष्टता है जो सुपरिभाषित है। जबकि कद, रंग, चेहरा आदि भिन्न– भिन्न हो सकते हैं।

समुच्चय में संग्रहीत प्रत्येक वस्तु को समुच्चय का अवयव कहते हैं। समुच्चय को दो वैकल्पिक पद्धतियों से व्यक्त किया जाता है।

(1) प्रथम पद्धति में समुच्चय के सभी अवयवयों को मँझले कोष्ठक के भीतर सूचिबद्ध कर दिया जाता है जैसे :–$S = \{-3,0,2,7\}$ समुच्चय को व्यक्त करने की इस विधि को सूची विधि कहते हैं।

(2) गुण विधि, समुच्चय निर्माण विधि अथवा वर्णन विधि :– इस विधि में समुच्चय के अवयवों को सूचिबद्ध करने के स्थान पर अवयवों के उस विशिष्ट गुण द्वारा समुच्चय को परिभाषित किया जाता है जो समुच्चय निर्माण का आधार बनता है। सामान्यतया इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब समुच्चय के अवयवों की संख्या बहुत अधिक हो।

उदाहरण के लिए–$R = \{$सभी वास्तविक संख्याएं$\}$ इस समुच्चय को

$R = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या ळें$\}$ लिखते है।

1.4.2 परिमित एवं अपरिमित समुच्चय : वे समुच्चय जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है उन्हे परिमित समुच्चय कहते हैं।

जैसेः– $S = \{8, -3, 0, 2, 7\}$

इसके विपरीत अपरिमित समुच्चय वे समुच्चय होते है जिनके अवयवों की संख्या अपरिमित होती है। जैसेः– $R = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

परिमित समुच्चय के अवयवों की एक – एक करके गणना की जा सकती है अर्थात परिमित अवयवों के समुच्चय गणनीय होते है जैसे उपरोक्त समुच्चय S। अपरिमित

समुच्चय के एक – एक अवयव की गणना करना सम्भव नही होता है अर्थात अपरिमित समुच्चय के अवयवों की संख्या अगणनीय होती है, जैसे :– उपरोक्त समुच्चय R।

समुच्चय के अवयवों की सदस्यता को ग्रीक अक्षर ϵ (अप्सायलन) की सहायता से इंगित किया जाता है। उदाहरण के लिए -3 उपरोक्त समुच्च S का एक अवयव है जिसे हम $' - 3 \in S$' द्वारा इंगित करते हैं, तथा इसे $' - 3$ समुच्चय S' का एक सदस्य है' पढते हैं। इसी प्रकार $\sqrt{2}$ एक वास्तविक संख्या होने के नाते उपरोक्त समुच्चय R का एक अवयव है जिसे हम $\sqrt{2} \quad \in R$ द्वारा इंगित करते हैं। किन्तु $\sqrt{2}$समुच्चय S का अवयव नहीं है, इस तथ्य को इंगित करने के लिए हम $\sqrt{2} \in S$ लिखते हैं, जिसका अर्थ है कि $\sqrt{2}$समुच्चय S का अवयव नहीं है।

इसी प्रकार कथन $'x$ एक वास्तविक संख्या है' को $x \in R$ लिखते हैं जहाँ R सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का प्रतीक चिन्ह है।

1.4.3 रिक्त समुच्चयः– यह एक ऐसा समुच्चय होता है जिसमें कोई भी अवयव नहीं होता है अर्थात $\emptyset = \{\}$। यदि समुच्चय में एक भी अवयव है तो उसे रिक्त समुच्चय नहीं कहा जाएगा। कोई भी अवयव न होने के कारण रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का उप समुच्चय होता है।

1.4.4 एकल समुच्चयः– ऐसे समुच्चय जिनमे केवल एक ही अवयव होता है। जैसेः– $\{0\}, \{a\}$, आदि।

1.4.5 समुच्चयों का समुच्चयः– जब किसी समुच्चय के अवयव स्वयं में एक समुच्चय हो तो उसे समुच्चयों का समुच्चय कहते हैं। उदाहरणार्थ– भारत की अर्थव्यवस्था विश्व की सभी अर्थव्यवस्थाओं के समुच्चयों का एक अवयव है। किन्तु भारत की अर्थव्यवस्था स्वयं में विभिन्न प्रान्तों की अर्थव्यवस्थाओं का एक समुच्चय है। इसी प्रकार एक प्रान्त की अर्थव्यवस्था उसके जिलों की अर्थव्यवस्थाओं का समुच्चय है।

1.4.6 समष्टीय समुच्चयः– यदि किसी निश्चित सन्दर्भ में सभी समुच्चय किसी निश्चित समुच्चय के उपसमुच्चय हो तो इस निश्चित समुच्चय को समष्टीय समुच्चय कहा जाता है। इसे अंग्रेजी भाषा के अक्षर $'U'$ द्वारा दिखाया जाता है। उदाहरणार्थ – यदि वास्तविक

संख्याओं का अध्ययन कर रहे हो तो सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय समष्टीय समुच्चय कहा जाएगा। इसी प्रकार यदि भारत की आर्थिक गतिविधियों का संदर्भ हो तो भारतीय अर्थव्यवथा समष्टीय समुच्चय होगी।

1.4.7 समुच्चयों के बीच सम्बन्धः– दो समुच्चयों के मध्य विविध प्रकार के सम्बन्ध स्थापित हो सकते हैं।

1.4.7.1 समसमुच्चयः– यदि दो समुच्चयों $'A'$ तथा $'B'$ के अवयव समान हो तो A तथा B को समसमुच्चय कहा जाता है। अर्थात् $[x \epsilon A = x \epsilon B$ तथा $x \epsilon B = x \epsilon A]$

उदाहरणार्थ यदि $A = \{3, \pi, 8, c\}$ तथा $B = \{8, c, 3, \pi\}$ तो $A = B$ होगा अर्थात $'A'$ तथा $'B'$ समसमुच्चय है। स्मरणीय है कि समुच्चय के अवयवों के क्रम का कोई महत्व नही होता। पुनः दो समुच्चयों A' तथा $'B'$ मे यदि एक भी ऐसा अवयव हो जो $'A'$ तथा $'B'$ में से किसी एक का ही सदस्य है तो $'A'$ तथा $'B'$ समुच्चय नहीं होगें।

उदाहरणार्थः– $A = \{1, x, 2, 3\}$

$B = \{1, y, 2, 3\}$

1.4.7.2 उपसमुच्चय, उचित उपसमुच्चय एवं घात समुच्चयः– यदि दो समुच्चयों $'A'$ तथा $'B'$ में से $'A'$ के सभी अवयव $'B'$ के भी अवयव हो तो $'A'$, $'B'$ का उपसमुच्चय होगा जिसे निम्न प्रकार लिखा जाता हैः– $A \subseteq B$

$A \subseteq B$ यदि और केवल यदि $x\epsilon A = x\epsilon B$

यदि $A \subseteq B$ तथा $\subseteq$ तो A और B सम समुच्चय होंगे।

उचित उपसमुच्चयः– यदि दो समुच्चयों A तथा B में A के सभी अवयव B के भी अवयव हों अर्थात $A \subseteq B$ किन्तु B के सभी अवयव A के अवयव न हो अर्थात $A \subseteq B$ तो A उचित उपसमुच्चय होगा B का जिसे $A \subset B$ लिखा जाता है।

उदाहरणार्थः– यदि $A = \{1, 3, a, b\}$ तथा $B = \{1,3, a, b, c\}$ है तो $A \subset B$ तथा B, A का अधिसमुच्चय होगा जिसे $B \supset A$ लिखा जाता है। इसी प्रकार प्राकृतिक संख्याएं $\subset$ पूर्णांक $\subset$ वास्तविक संख्या □ $\subset$ □ $\subset$ □

किसी समुच्चय □ के सभी उपसमुच्चयों की कुल संख्या $2^{□}$ (जहाँ □ □ के कुल अवयवो की संख्या है) होती है।

उदाहरणार्थः– यदि □ $= \{1,3,□,□\}$ तो □ के प्रत्येक अवयव को अलग–अलग धारण करने वाले उपसमुच्चय $\{1\},\{3\},\{□\},\{□\}$। इसी प्रकार दो–दो अवयवों को धारण करने वाले उपसमुच्चय $\{1,3\},\{1,□\},\{1,□\},\{3,□\}$ – – – – – – – – आदि। इसी प्रकार तीन तीन अवयवों को धारण करने वाले उप समुच्चय बनेंगे। साथ ही समुच्चय □ स्वयं का एक उपसमुच्चय होता हैं। इसके अतिरिक्त किसी भी समुच्चय को सबसे छोटा उपसमुच्चय रिक्त समुच्चय (जिसे { द्वारा दिखाया जाता है) होता है। उपर्युक्त उदाहरण मे कुल उप समुच्चयों की संख्या $2^4 = 16$ होगी। सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को घात समुच्चय कहते है। इसे $P(A)$ लिखते है।

दो समुच्चयों के तीसरे प्रकार का सम्बन्ध विसंघीतता का होता है।

1.4.7.3 विसंघीत समुच्चयः– यदि समुच्चयों A तथा B के मध्य एक भी अवयव उभयनिष्ठ न हो तो A और A को विसंघीत समुच्चय कहेंगे। उदाहरणार्थः–

$A = \{a : a \in$ धन पूर्णांक$\}$

$A = \{b : b \in$ ऋण पूर्णांक$\}$

दो समुच्चयों के बीच चौथे प्रकार का सम्बन्ध ऐसा भी हो सकता है जिसमें दोंनो समुच्चयो में कुछ अवयव उभयनिष्ठ हो किन्तु प्रत्येक समुच्चय में कुछ अवयव उसके अपने विशिष्टि अवयव हों। ऐसी स्थिति में समुच्चयों A और B न तो विसंघीत है न दोंनो में से कोई समुच्चय दूसरे समुच्चय का उपसमुच्चय है और न ही दोनो समुच्चय सम–समुच्चय है। उदाहरणार्थ $A = \{1,2,3,4\}$ तथा $B = \{2,3,7,8\}$

1.4.8 समुच्चय संक्रियाएंः– समुच्चयों के मध्य कुछ महत्वपूर्ण संक्रियाएं होती है जैसे संघ, प्रतिच्छेद, पूरक तथा अन्तर।

1.4.8.1 समुच्चयों का संघः– दो समुच्चयों A और B का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसके अवयव या तो A या B या A और B के उभयनिष्ठ अवयव होते है। इसे $A\,UB$ लिखते है। उदाहरणार्थ– $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,7,8\}$, $AUB =$

$\{1,2,3,4,7,8\}\ AUB = \{x : x \in A$ अथवा $x \in B\}$ देखें चित्र– 2 जिसका आच्छादित भाग AUB को दर्शाता है।

1.4.8.2 समुच्चयों का प्रतिच्छेदः– दो समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय A तथा B का प्रतिच्छेद होता है इसे $A \cap B$ लिखते है।

उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

$A \cap B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$ देखें चित्र– 3 जिसका आच्छादित भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।

1.4.8.3 पूरक समुच्चयः– समुच्चय A का पूरक समुच्चय $(\bar{A})$ ऐसे अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टिय समुच्चय के अवयव होते हैं किन्तु समुच्चय A के अवयव नहीं होते है।

$\bar{A} = \{x : x \in U$ और $x / \in A\}$ देखें चित्र– 4 जिसका आच्छादित भाग $\bar{A}$ को दर्शाता है।

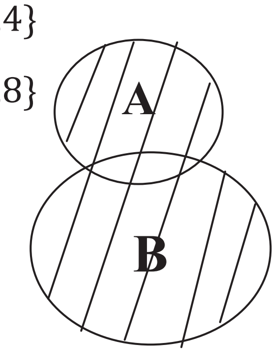
1.4.8.4 दो समुच्चयों का अन्तर :– दो समुच्चयों A तथा B का अन्तर वह समुच्चय होता है जिसके अवयव A के वे अवयव होते है जो B के अवयव न हो। इसे $A - B$ द्वारा दिखाया जाता है। $A - B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$ देखें चित्र– 5 जिसका आच्छादित भाग $A - B$ को दर्शाता है।

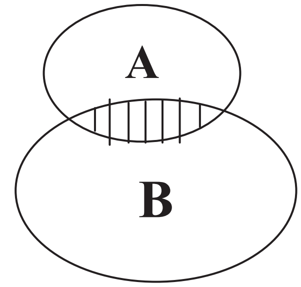
उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A - B = \{1,4\}$

$B - A = \{7,8\}$

1.4.8.5 वेन आरेख से निरूपणः–



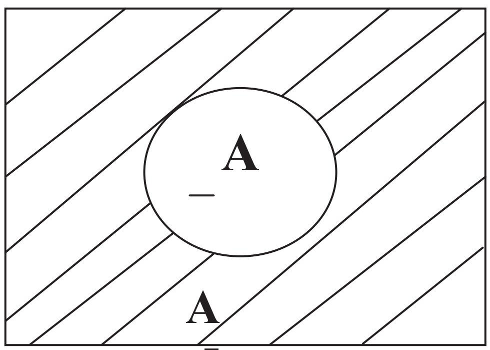


c

चित्र संख्या–2

A U B

संघ



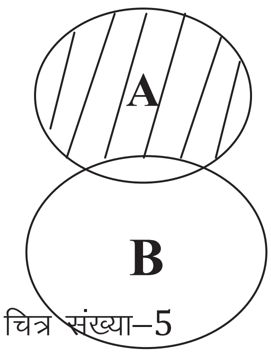
$\bar{A}$

पूरक

चित्र संख्या–3

। ∩ ठ

प्रतिच्छेद



चित्र संख्या–5

$A - B$

अन्तर

1.5. क्रमित युगम एवं सम्बन्ध

एक समुच्चय $\{a, b\}$ को लिखते समय हम अवयवों a और इ के क्रम को ध्यान में नहीं रखते हैं क्योंकि समुच्चय की परिभाषा के अनुसार समुच्चय $\{a, b\} = \{b, a\}$। किन्तु कभी–कभी वस्तुओं के कुछ ऐसे युगमों का विचार करना पड़ता है जिनमें क्रम महत्वपूर्ण होता है। उदाहरण के लिए यदि हम देशों और उनकी राजधानियों के युगम बनायें तो उनको एक निश्चित क्रम में रखना अनिवार्य होगा जैसे–(भारत, दिल्ली), (पाकिस्तान, इस्लामाबाद), (नेपाल, काठमाण्डू) आदि। यदि इनमें से किन्हीं एक दो जोड़ों में अवयवों का क्रम बदल जाये तो वह युगम निरर्थक हो जायेंगे। इसी प्रकार निर्देशांक ज्यामिती में यदि किसी बिन्दु को क्रमित युगम $(2,7)$ से दर्शाया गया हो तो इसका अर्थ है कि उस बिन्दु का X निर्देशांक 2 तथा Y निर्देशांक 7 है। अब यदि इस क्रमित युगम का क्रम बदलकर $(7,2)$ लिख दें तो यह एक भिन्न बिन्दु को इंगित करेगा जिसका X निर्देशांक 7 तथा Y निर्देशंक 2 होगा। अर्थात क्रमित युगम $(a, b) \neq (b, a)$। क्रमित युगम (a, b) क्रमित युगम (b, a) के बराबर तभी होगा जब $= b$ हो। इसी प्रकार $(a, b) =$

$(c, d) \Leftrightarrow a = c$ तथा $b = d$। क्रमित युगमों की यह अवधारणा दो से अधिक अवयवों वाले समुच्यों पर भी लागू होती है तथा इन्हें क्रमित समुच्च भी कहते हैं।

1.5.2 कार्तीय गुणनः—

यदि समुच्च $A = \{a_i\}$ तथा समुच्चय $B = \{b_j\}$ जहां $i = 1,2,3\ldots\ldots m$ तथा $j = 1,2,3\ldots\ldots n$ हो तो $A \ \ xB = \{a_i, b_j\}$, जहां $a_i \in$ तथा $b_j \in B$ तथा (a_i, b_j) क्रमित युगम है। इस प्रकार AxB (a, b) के सभी सम्भव क्रमित युगमों का एक समुच्चय होता है जिसे A क्रास B पढ़ते है तथा A तथा B का कार्तीय गुणनफल कहते है। जिसका नामकरण गणितज्ञ, दार्शनिक $MsdkrZ$ $(Descartes)$ के नामे पर किया गया है।

उदाहरणः यदि समुच्च $A = \{1,5\}$ तथा समुच्चय $B = \{2,4,6\}$ तो AxB ऐसे क्रमित युगमों का समुच्चय होगा जिनका पहला अवयव समुच्चय A का सदस्य हो तथा दूसरा अवयव समुच्चय B का अवयव हो अर्थात $AxB = \{(1,2),$ $(1,4), (1,6), (5,2), (5,4), (5,6)$ यहां । में दो अवयव तथा B में तीन अवयव है फलतः AxB में छः अवयव है अर्थात यदि $A = \{a_i\}$ जहाँ $i = 1,2,3\ldots\ldots m$ तथा $B = \{b_j\}$ जहां $j = 1,2,3\ldots\ldots n$ हो तो समुच्चय AxB में mxn अवयव (क्रमित युगम) होंगे। यहां यह ध्यान देने योगय है कि $AxB \neq BxA$ क्योंकि $AxB = \{a_i, b_j\}$ जबकि $BxA = \{(b_j, a_i)\}$ जिसे हम क्रमित युगम की अवधारणा में दिये गये निर्देशांक ज्यामिति के उदाहरण से भली प्रकार समझ सकते हैं। यदि हम अपने दायरे को व्यापक बनाये और यह मान लें कि ˙ तथा b वास्तविक संख्यायें है तो हम कहेंगे कि $˙\in R$ तथा $b \in R$ तथा कार्तीय गुणनफल $AxB = \{(a, b): a \in R$ तथा $b \in R\}$ जो वास्तविक मानों वाले अवयवों के सभी क्रमित युगमों के समुच्चय को प्रदर्शित करेगा। इनमें से प्रत्येक क्रमित युगम कार्तीय निर्देशांक समतल पर एक अद्वितीय बिन्दु को इंगित करता है। इसी प्रकार, कार्तीय समतल का प्रत्येक बिन्दु के अनुरूप एक अद्वितीय क्रमित युगम प्राप्त होता है। यदि अब हम समुच्चय A को X निर्देशांकों का समुच्चय और B को Y निर्देशांकों का समुच्चय

मान ले तो उक्त कार्तीय गुणनफल AxB को हम $Xxy = \{(x, y): xeR$ तथा $yER\}$ लिख सकते हैं जिसे निम्न चित्र द्वारा समझा किया जा सकता है।

इस दोहरी अद्वियतता के कारण कार्तीय गुणनफल में क्रमित युगमों के समुच्चय तथा समकोणीय निर्देशांक समतल के बिन्दुओं के बीच एकैकी अनुरूपता $(On\ to\ one\ correspondence)$ होती है। इस अवधारणा का विस्तार करके हम तीन समुच्चयों $x, y,$ तथाz में कार्तीय गुणनफल $XxYxZ$ को परिभाषित कर सकते है जिसका प्रत्येक त्रि–अवयवयी युगम त्रिआयामी व्याप $(Three - Dimensional\ Space)$ के एक अद्वितीय बिन्दु को निर्दिष्ट करेगा।

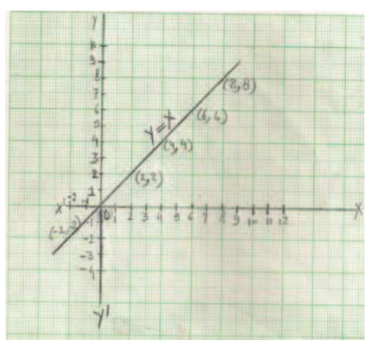
1.5.3 सम्बन्धः–क्रमित युगमों के विषय में अध्ययन करने के पश्चात हम यह कह सकते हैं कि क्रमित युगमों के समुच्चय में कुछ अथवा सभी क्रमित युगम ऐसे हो सकते है जिनके अवयवों के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ यदि हम पिछले अनुच्छेद में देंखें तो (भारत, नई दिल्ली), (पाकिस्तान, इस्लामाबाद) आदि सभी क्रमित युगमों के अवयवों के बीच एक निश्चित सम्बन्ध देश और उसकी राजधानी है।

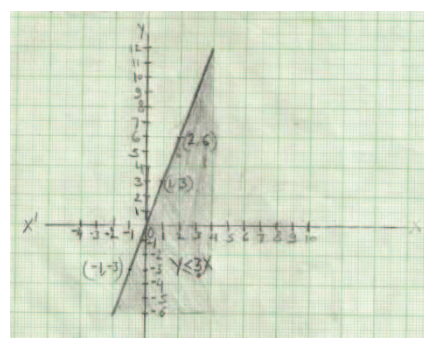
इसी प्रकार दूसरे उदाहरण में समुच्चय AxB के क्रमित युगमों $\{(1,2), (1,4), (1,6)$ तथा $(5,6)\}$ को लेकर एक ऐसा उपसमुच्चयै बनाया जा सकता है जिसके सदस्य सभी क्रमित युगमों के प्रथम एवं द्वितीय अवयव के बीच एक निश्चित सम्बन्ध R परिभाषित होता है। जिसे $a < b$ जहाँ $\dot{}a \in A$ तथा $b \in B$ के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

व्यापक रूप में यदि (a, b) के अवयव $\dot{a}$ और b किसी सम्बन्ध R से जुड़े हैं तो इसे $\dot{}aR_b$ लिखा जाता है तथा इसे $\dot{a}$ संबंध b पढ़ते है। यदि $\dot{}a$ और b सम्बन्ध R से सम्बन्धित नहीं है तो इसे aRb से निरूपित करते हैं और $'a$ नहीं सम्बन्धित b' पढ़ते हैं। उदाहरण के लिए AxB के वे सदस्य जो उपसमुच्चयै के सदस्य नहीं हैं– $\{(5,2)$ तथा $(5,4)\}$ उपरोक्त सम्बन्ध R से सम्बन्धित नहीं है। अतः हम इन्हें ${}_5R_2$ तथा ${}_5R_4$ लिख सकते हैं।

1.5.2 में कार्तीय निर्देशांक समतल पर X तथा y निर्देशांकों के क्रमित युगम के उदाहरण को लेकर सम्बन्ध की अवधारणा को अधिक व्यापकता से समझा जा सकता है। उक्त उदाहरण में कार्तीय गुणनफल $XxY = \{(x, y);\ x \in R$ तथा $y \in R\}$ x तथा y चरों के वास्तविक मानों वाले सभी सम्भव क्रमित युगमों का समुच्चय है। इस समुच्च्य के अनेक ऐसे उपसमुच्चय बनाये जा सकते हैं जिनके सदस्य क्रमित युगमों के अवयवों के बीच एक निश्चित सम्बन्ध हो।

उदाहरण के लिएः समुच्चय $\{(x, y);\ y = x\}$ के $(2,2), (1,1), (0,0), (-1,-1), (-2,-2)$ आदि सदस्य होंगें। ग्राफीय दृष्टि से यह एक सरल रेखा $y = x$ के बिन्दुओं का समुच्चय होगा। इसी प्रकार समुच्चय $\{(x, y);\ y < 3x\}$ जिसके सदस्य $(2,6), (2,2), (2,-1), (1,3),$ $(1,1), (1,-2)$ $(-1,-3), (-1,-6), (-1,-9)$ इत्यादि होंगे। सामूहिक रूप से चित्र में अंकित रेखा $y = 3x$ के बिन्दुओं तथा उसके नीचे आने वाले क्षेत्र में सभी बिन्दु, जिन्हें आच्छादित किया गया है, द्वारा प्रदर्शित होंगें।





उपरोक्त दोनो ही उदाहरण में x तथा y चरों के बीच एक निश्चित किन्तु पृथक सम्बन्ध है। जहां $y < 3x$ सम्बन्ध में x के एक ही मान जैसे–2 के लिए y के 6 और उससे कम अनेक मान प्राप्त होंगे। वहीं $y = x$ सम्बन्ध में x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान ही प्राप्त होगा। ऐसे सम्बन्ध जिनमें x चर के किसी एक मान के लिए y चर का एक अद्वितीय मान ही प्राप्त होता है उन्हें फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं जिसे

$y = f(x)$ लिखते हैं जिसके बारे में हम अगली इकाई में विस्तार से अध्ययन करेगें। इसके विपरीत, $y < 3x$ एक सम्बन्ध तो है किन्तु एक फलनात्मक सम्बन्ध नहीं है।

1.6 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित समुच्चयों को प्रतीकात्मक भाषा में लिखिए

क) 7 से बडी 36 से छोटे धन पूर्णांको का समुच्चय

ख) 3 से बडी 85 से छोटी परिमेय संख्याओं का समुच्चय

ग) सभी गैर–ऋणात्मक पूर्णांको का समुच्चय

घ) कृषि में प्रयोग होने वाली आगतों का समुच्चय

ड) क्रमित युगमों का समुच्चय जिनके अवयव परिमेय संख्या है।

2. रिक्त स्थानों को भरिए।

क) 1/7 एक .... संख्या है।

ख) शून्य एक .... पूर्णांक है।

ग) सभी .... संख्याएं पूर्णांक होती हैं।

घ) सभी पूर्णांक, परिमेय, तथा अपरिमेय संख्याएं मिलकर ....संख्याओं का समुच्चय बनाती हैं।

ड.) दो समुच्चयो के प्रतिच्छेद में दोनों समुच्चयों के ....अवयव होते है।

च) दो समुच्चयों का अन्तर प्रथम समुच्चय में से ....
अवयवों को हटाकर प्राप्त किया जाता है।

छ) किसी समुच्चय के सभी सम्भव उपसमुच्चयों के समुच्चय को ....
कहते हैं।

ज) विसंघीत समुच्चयों का प्रतिच्छेद ....होता है।

झ) जिस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता उसे ....
कहते है तथा इसे .... द्वारा दिखाते है।

(ञ) यदि A तथा B दो समुच्चय हों तो AxB....................को प्रदर्शित करता है।

(3) यदि $A = \{1,3,5,6\}$ तथा $B = \{2,3,4,5,6\}$ तो निम्न समुच्चयों को प्राप्त कीजिए।

(क) $\{(a, b) : a = b\}$

(ख) $\{(a, b): a < b\}$

(ग) $\{(a, b): a > b\}$

(घ) $\{(a, b): a2 = b\}$

4. यदि $A = \{1,3,5,6,7,8,9\}, B = \{2,4,6,8,10\}$ तो ज्ञात करिए तथा वेन आरेख निर्मित करें।

क. $A\ U\ B$

ख. $A \cap B$

ग. $A - B$

1.7 सारांश

इस इकाई के अध्ययन के बाद यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी भी वास्तविक स्थिति के परिमाण को वास्तविक अंक प्रणाली द्वारा व्यक्त किया जाता है। सभी प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्णांक, परिमेय व अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक अंक प्रणाली के अंग है। समुच्चय सिद्धान्त तथा समुच्चयों के बीच सम्बन्ध को समझने में वास्तविक अंक प्रणाली का महत्वपूर्ण योगदान है। समुच्चय की परिभाषा से हम यह समझ सके है कि किसी विशिष्ट सुपरिभाषित आधारों पर अनेक वस्तुओं को एक समूह में रखा जा सकता है तथा सुपरिभाषित आधार में परिवर्तन करके उपसमुच्चयों का निर्माण किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न प्रकार के समुच्चयों जैसे घात समुच्चय, विसंघीत समुच्चय, पूरक समुच्चय आदि से परिचित हुए है, समुच्चयों के बीच अनेक संक्रियाएँ जैसे संघ, प्रतिच्छेद, अंतर आदि से भी हम परिचित हुए है।

1.7 शब्दावली

अंक प्रणालीः– गणना के लिए विकसित शास्त्र– गणित का मूल आधार अंक प्रणाली है; जिस के द्वारा अंको का क्रम व मान निर्धारित होता है।

अवयवः– समुच्चय के सदस्यों को अवयव कहते है।

परिमितः– जिसका दायरा निश्चित है तथा जिसकी गणना करना सम्भव है।

अपरिमितः– जिसका दायरा निर्धारित न हो तथा जिसकी गणना करना असम्भव हो।

1.8 अभ्यास प्रश्न के उत्तर

1. (क) $S = \{x : x \in I$ तथा $7 < x < 36\}$

(ख) $S = \{x : x \in Q$ तथा $3 < x < 85\}$

(ग) $S = \{x : x \in I$ तथा $x \in I\}$ ।

(घ) $S = \{x : x$ कृषि में उत्पादन के लिए उपयोग की जाने वाली वस्तु है यथा खाद, भूमि, सिंचाई, बीज, श्रम, ऊर्जा/पशुबल, कीटनाशक/तकनीकि एवं उपकरण, अन्य उपयोगी रसायन।$\}$

(ड) $QxQ = \{(a, b) : a \in Q$ तथा $b \in Q\}$

2. (क) परिमेय (घ) वास्तविक (छ)घात समुच्चय

(ख) अद्वितीय (ड.) उभयनिष्ठ (ज) रिक्त समुच्चय

(ग) प्राकृतिक (च) उभयनिष्ठ (झ) रिक्त समुच्चय,

(ञ) कार्तीय गुणनफल

3.(क) $\{(3,3), (5,5), (6,6)\}$

(ख)$\{(1,2), (1,3), (1,4)(1,5)(1,6)(3,4), (3,5), (3,6)(5,6)\}$

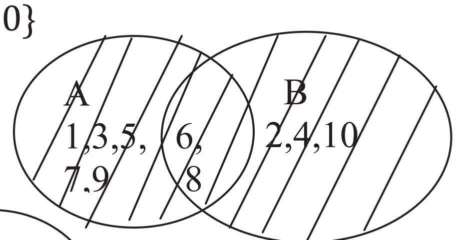
(ग) $(5,2)(5,3)(5,4)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)$

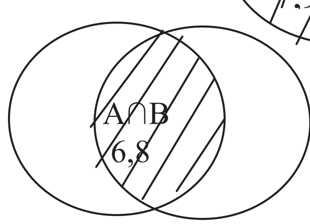
(घ) ϕ

4. (क) $A\ U\ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

आच्छादित क्षेत्र AUB

को दर्शाता है।

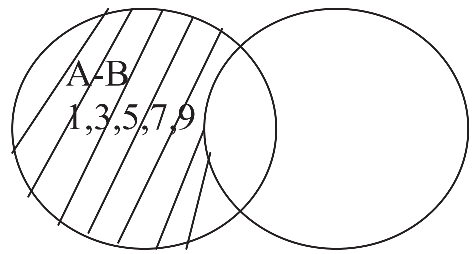




(ख) $A \cap B = \{6,8\}$

आच्छादित क्षेत्र $\boldsymbol{A \cap B}$ को दर्शाता है।

(ग) $A - B = \{1,3,5,7,9\}$



आच्छादित क्षेत्र $\boldsymbol{A - B}$ को दर्शाता है।

1.9 संदर्भ ग्रन्थः–

1. *Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; Mc GRAW – HILL.*
2. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

1.10 सहायक ग्रन्थः–

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।
2. *Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematicsand Statistics, Vrinda Pub.*
3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।
4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
5. ***Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics forEconomists Kitab Mahal Publication.***

1.11 निबन्धात्मक प्रश्नः

(1) वास्तविक संख्याओं की अवधारणा को स्पष्ट कीजिए।

(2) पूर्णांक को उदाहरण दे कर समझाइये।

(3) निम्न को परिभाषित कीजिएः–

क. समष्टीय समुच्चय ख. उप समुच्चय

ग. पूरक समुच्चय घ. विसंघीत समुच्चय

(4) सम्बन्ध से आप क्या समतझते हैं उदाहरण की सहायता से सम्बन्ध और फलनात्मक सम्बन्ध में भेद कीजिए।

इकाई 2 :–फलन एवं उनके आर्थिक अनुप्रयोग

इकाई संरचना

2.1 प्रस्तावना

दो परिवर्तनशील राशियों के बीच क्रियाशील कारण कार्य अथवा कारक–परिणाम सम्बन्ध की सम्पूर्ण (दिशा एवं परिमाणात्मक स्वरूप दोनों ही पक्षों को समाविष्ट करते हुए) व्याख्या करने में गणित की फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध की अवधारणा अत्यंत उपयोगी सिद्ध हुई है। प्रायः एक ही कार्य का सम्पादन अनेक कारकों का समवेत प्रभाव होता है। मनुष्य एवं समाज के जीवन के सभी नहीं तो अधिकांश विषय या बातें विशेषकर आर्थिक विषय या बातें सतत् परिवर्तनशीलता का परिचय देते आए हैं। आर्थिक जीवन से जुडे अनेक ऐसे विषय है जिनकी परिमाणात्मक माप सम्भव होती है और जो परिवर्तनशील होती हैं, इनको आर्थिक चर के रूप में देखा जाता है। यह आर्थिक सरल/जटिल, चर/कारक परिणाम सम्बन्धों की अनेक श्रृंखलाएँ उत्पन्न कर फलनात्मक सम्बन्धों का एक मकडजाल तैयार कर देते है। अर्थशास्त्र आर्थिक चरों के बीच क्रियाशील कारक परिणाम सम्बन्धों से बुने मकडजाल के मनुष्य की निर्णय प्रक्रिया एवं आर्थिक व्यवहार पर पडने वाले समवेत प्रभावों की जटिलता को सरल बना कर एक–एक करके समझने व इस समझ के आधार पर भविष्य में उत्पन्न होने वाली आर्थिक चुनौतियों के प्रति मनुष्य एवं समाज को सचेत करने तथा वर्तमान और भविष्य की आर्थिक चुनौतियों के कल्याणकारी समाधान ढूंढने के चनौतीपूर्ण दायित्व को स्वीकार करता है। अर्थशास्त्र द्वारा इस चुनौतीपूर्ण दायित्व के सफलतापूर्ण निर्वहन में गणित के फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध का एक उपकरण के रूप में महती योगदान रहा है।

2.2 उद्देश्य

फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध से आपको सुपरिचित कराने के पीछे निम्न उद्देश्य है।

क) विभिन्न आर्थिक विषयों यथा मांग, पूर्ति, मूल्य, आय, उत्पादन इत्यादि की परिवर्तनशील प्रकृति के परिमाणात्मक स्वरूप को आप आसानी से समझ सकें।

ख) विभिन्न आर्थिक चरों के बीच क्रियाशील कारक–परिणाम सम्बन्धों को भली प्रकार समझकर इन सम्बन्धों के आधार पर प्रतिपादित आर्थिक सिद्धान्तो को आत्मसात कर सके तथा आर्थिक फलनात्मक सम्बन्धों पर आधारित आर्थिक संदर्शो की कार्य प्रणाली की गूढताओं को सहजता से समझ सकें।

2.3 चर

चर संस्कृत भाषा का शब्द है। चर से आशय उस वस्तु से है जो चरायमान अथवा परिवर्तनशील होती है। गणित में ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनके मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकते हैं, जैसेः– पूर्णांक का मान –578,–189,–5, 0, 23, 94........................ .आदि कुछ भी हो सकता है। इसी प्रकार व्यवहारिक जीवन में भी चर के अनेक उदाहरण मिलते है जैसेः– जानवर–चूहा, बिल्ली, हाथी आदि कुछ भी हो सकता है। इस प्रकार 'चर वह वस्तु है जिसका मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकता है'। अर्थात्, चर वह है जो विभिन्न मानों को धारण कर सकता है। वस्तुतः चर के माध्यम से एक पूरे समूह अथवा समुच्चय को इंगित किया जाता है। अपने इसी गुण के कारण अर्थशास्त्र में इसकी उपयोगिता बन जाती है। उदाहरण के लिए मूल्य, लाभ, आगम, उपयोगिता, उपभोग स्तर, राष्ट्रीय आय, निवेश, आयात निर्यात आदि सभी संदर्भ एवं समय के साथ भिन्न–भिन्न मान धारण करते हैं। चूँकि प्रत्येक चर विभिन्न मान धारण कर सकता है इसलिए चर को संख्या के स्थान पर 'प्रतीक' द्वारा व्यक्त किया जाता है, यथा मूल्य को P, लाभ को π, आगम को R, लागत को C, उपयोगिता को U, उपभोग स्तर को C, राष्ट्रीय आय को Y, निवेश को I, आयात को M, निर्यात को X, आदि से दर्शाया जाता है। हालांकि, जब हम $P = 7$, $C = 35$ या $Y = 100$ लिखते हैं तो वस्तुतः हम एक विशेष स्थिति में इन चरों के निर्धारित विशिष्ट मानों का (उपयुक्त रूप से चयनित इकाइयों में) उल्लेख कर रहे होते है।

2.3.1 अन्तः चर :– वे चर जिनका मान गणितीय संदर्श की अन्तः शक्तियों द्वारा निर्धारित होता है अर्थात जिन चरों के मानों या परिमाणों का निर्धारण संदर्श के भीतर होता है उन्हें अन्तः चर कहते हैं। जैसे– बाजार मूल्य च का निर्धारण बाजार की आन्तरिक शक्तियों (माँग एवं पूर्ति) द्वारा होता है। अतः बाजार विश्लेषण में मूल्य एक अन्तः चर है। अर्थात् अन्तः चर वे चर हैं जिनका मान संदर्श को हल करने से प्राप्त होता है।

2.3.2 बाह्य चर :– वे चर जिनका निर्धारण संदर्श की आन्तरिक शक्तियों द्वारा नहीं होता अपितु प्रायः जिनका उपयोग करके संदर्श को हल किया जाता है और अन्तः चर का निर्धारण होता है। उदाहरणार्थ– एक उपभोक्ता के लिए बाजार मूल्य एक बाह्य चर है क्यूँकि एक अकेला उपभोक्ता बाजार मूल्य को परिवर्तित नहीं करा सकता। अर्थात

उपभोक्ता व्यवहार में उपभोग स्तर निर्धारण की दृष्टि से बाजार मूल्य दिया हुआ होता है तथा उपभोग स्तर इस दिए हुए बाजार मूल्य द्वारा निर्धारित होता है। इस प्रकार यह भी स्पष्ट हो जाता है कि एक चर जो एक संदर्भ के लिए अंतः चर है दूसरे संदर्भ के लिए बाह्य चर हो सकता है अर्थात् संदर्भ बदलने पर चर की भूमिका भी बदल सकती है।

2.4 अचर

चर के विपरीत अचर वह राशियाँ होती हैं जिनके परिमाण अथवा मान में परिस्थिति अथवा संदर्भ बदलने पर भी परिवर्तन नहीं होता है। जैसेः– गुरूत्वाकर्षण नियंताक $g = 9.8$ मी0/से^{2}, $\pi = 3.14$, इत्यादि।

अर्थशास्त्र में भी अचर राशि के उदाहरण मिलते है, जैसे– स्थिर लागत, स्वायत्त उपभोग, स्वायत्त निवेश आदि।

2.4.1 गुणांक :– प्रायः चर स्थिरांकों अथवा अचरों के साथ संयुक्त रूप से प्रयोग किए जाते हैं जैसे– 0-7 Y, 5P आदि। ऐसी अचर राशियों को गुणांक कहा जाता है। किन्तु अलग–अलग स्थितियों में गुणांक ो के मान अलग–अलग हो सकते है अतः इन गुणांक ों को व्यापकता देने के लिए निश्चित संख्याओं के स्थान पर a, b, α, β, आदि प्रतीकों से दर्शाया जाता है। उदाहरणार्थ 5 P के स्थान पर $\dot{}$P या 0-7 Y के स्थान पर cY लिखा जाता है। ये प्रतीक इस अर्थ में अनोखे होते हैं कि ये एक अचर राशि का प्रतिनिधित्व करते है तथापि इनके लिए कोई सर्वथा निश्चित मान प्रदान नहीं किया गया है। यह एक ऐसे अचर या स्थिरांक है जो चर होते हैं। इनके इस विशिष्ट गुण को स्पष्ट पहचान देने के लिए इन्हे 'परिमापक स्थिरांक' अथवा मात्र 'परिमापक' कहते है।

2.5 सम्बन्ध

चर विश्लेषण के अर्न्तगत हम सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं। यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि चर विश्लेषण के अन्तर्गत किसी एक चर के मान में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन नहीं किया जाता वरन दो या दो से अधिक चरों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। जैसे– $Y = 2X$, $Y= X^2$,

$Y = \underline{+}\sqrt{X}$ इत्यादि। गणितीय सम्बन्ध दो प्रकार के होते हैं–

(i) गैर–फलनात्मक **(ii)फलनात्मक**

2.5.1 गैर–फलनात्मकः– चरों के बीच के ऐसे सम्बन्ध जिनसे अद्वितीय परिणाम मिलना सुनिश्चित न हो तथा जिसके फलस्वरूप चरों के बीच कारण–कार्य सम्बन्ध स्थापित करना सम्भव न हो जैसेः– $Y = +\sqrt{X}$; X का मान -4 होने पर Y का मान 2 भी हो सकता है तथा –2 भी हो सकता है अर्थात् परिणाम (Y) अद्वितीय नहीं है। इसी प्रकार लॉटरी का टिकट खरीदने पर ईनाम मिल भी सकता है और नहीं भी मिल सकता है अर्थात परिणाम अद्वितीय नहीं है।

2.5.2 फलनात्मक सम्बन्धः– चरों के मध्य ऐसा सम्बन्ध जिसमें एक चर या एक से अधिक चरों के मान द्वारा किसी दिए हुए चर के मान का अद्वितीय निर्धारण होता हो उसे फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं। फलनात्मक सम्बन्धों में एक सुस्पष्ट कारण–कार्य सम्बन्ध निहित होता है। जैसे $Y = 2x$ इसी प्रकार यह कथन कि कोई व्यक्ति अपने खेत पर जितनी अच्छी किस्म के बीज का प्रयोग करेगा (सिंचाई, खाद एवं खेती की देखभाल आदि समान रहने पर) प्रति एकड़ फसल का उत्पादन उतना ही अच्छा होगा।

उपरोक्त उदाहरणों में Y का मान X पर निर्भर कर रहा है तथा उत्पादन की मात्रा बीज की किस्मों पर निर्भर कर रही है, अर्थात Y और फसल के उत्पादन का मान क्रमशः X के मान तथा बीज की किस्म पर आश्रित हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में वे चर जिनका परिमाण अथवा मान किसी अन्य चर अथवा चरों के मानों पर निर्भर करता है उनको आश्रित चर कहते हैं। आश्रित चरों के मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्ध को हल करने के परिणामस्वरूप होता है। इसी कारण इन्हे फलन भी कहते है। एक फलनात्मक सम्बन्ध में आश्रित चर उस फलनात्मक सम्बन्ध का अन्तः चर होता है। इसके विपरीत फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले वे चर जिनके परिमाण अथवा मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्धों की सीमाओं के बाहर होता है या दूसरे शब्दों में जो अपना मान या परिमाण स्वतन्त्र रूप से धारण करते हैं उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले स्वतन्त्र चर उस फलनात्मक सम्बन्ध के लिए बाह्य चर होते हैं। चहाँ यह ध्यान देने की बात है कि एक फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में जो चर 'स्वतन्त्र चर' होता है दूसरे फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में आश्रित चर हो सकता है।

एक फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक हो सकती है किन्तु आश्रित चर एक ही होता है।

फलनात्मक सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में निम्नवत दर्शाया जाता है:–

$Y = f(X)$ जहाँ Y= फलन या आश्रित चर

X = स्वतन्त्र चर तथा f फलनात्मक सम्बन्ध को दर्शाता है। जिसे 'Y(चर), X(चर) का फलन है' पढ़ते हैं।

यदि स्वतन्त्र चरों की संख्या n हो तो फलनात्मक सम्बन्ध को निम्नवत लिखते हैं–

$$Y = f(x_1, x_2, \text{- - - - - - - - - - - - -} x_n)$$

यह सम्भव है कि स्वतन्त्र चर के एक से अधिक मानों के लिए आश्रित चर का एक ही मान प्राप्त हो; महत्वपूर्ण यह है कि फलनात्मक सम्बन्ध मे स्वतन्त्र चर के प्रत्येक मान के लिए आश्रित चर का एक अद्वितीय मान होता है। किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि इसका व्युत्क्रम भी सत्य हो। जिन फलनात्मक सम्बन्धों का व्युत्क्रम भी एक फलनात्मक सम्बन्ध होता है उन्हें व्युत्क्रम (inverse) फलन कहते हैं।

एक दिए हुए सन्दर्भ में स्वतन्त्र चर X के सभी धारणीय मानों के समुच्चय को डोमेन (Domain) कहते हैं। स्वतन्त्र चर X के प्रत्येक मान के लिए Y का एक अद्वितीय मान होता है, Y के इस मान को X के मान का बिंब कहते हैं। यह बिंब जिस समुच्चय के अवयव होते है उस समुच्चय को परिसर कहते है। परिसर में कुछ ऐसे अवयव हो सकते है जो डोमेन के किसी भी अवयव का बिंब न हो।

हमारे दैनंदिन जीवन में घटित होने वाले आर्थिक व्यवहार के समीकरण सामान्यतया फलनात्मक सम्बन्ध होते हैं जिन्हें आधार बनाकर आर्थिक संदर्शों का निर्माण तथा आर्थिक सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है। चूँकि अधिकांश आर्थिक चर स्वभावतः गैर ऋणात्मक वास्तविक अंकों की सीमा से बंधे होते हैं फलतः अधिकांश आर्थिक संदर्शो या फलनात्मक सम्बन्धों के डोमेन भी इस सीमा से बंधित होते हैं।

2.5.3 फलनों के प्रकार :– प्रत्येक फलन में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्ध की व्याख्या उस सम्बन्ध को व्यक्त करने वाली गणितीय प्रक्रिया पर आधारित एक निश्चित समीकरण के द्वारा की जाती है। उदाहरणार्थ–

(i) $Y = f(X) : Y = mX + c$

(ii) $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1 X + a_2X^2 + \text{- - - - - - -} a_nX^n$

(iii) $Y = f(X) : Y = a \log X$ vkfnA

अतः फलनात्मक सम्बन्ध में अन्तर्निहित गणितीय संक्रिया के आधार पर फलनों को दो प्रमुख वर्गों में बाँटा जाता है।

1) बीजीय फलन 2) अबीजीय फलन

2.5.3.1 बीजीय फलन :– जिन फलनों में स्वतन्त्र चर व आश्रित चर के मध्य फलनात्मक सम्बन्ध को बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा पूर्णतः व्यक्त किया जा सकता है ऐसे फलन बीजीय फलन होते है।

उदाहरण के लिए $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1 X + a_2X^2 + \text{- - - - - - -} a_nX^n$

बीजीय फलनों को पुनः उपवर्गों में निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है।

2.5.3.1.1 अचर फलनः ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र चर के सभी मानों के लिए आश्रित चर या फलन का एक निश्चित मान होता है उन्हें अचर फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थः– $Y = f(X) : Y = 10$ (X के सभी मानों के लिए) अर्थात X के मान परिवर्तित होने के पश्चात् भी Y का मान 10 स्थिर बना रहता है। दूसरे शब्दों में अचर फलनों के ग्रफीय निरूपण से अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

राष्ट्रीय आय के संदर्श में जब विनियोग बाह्य रूप से दिया होता है तो विनियोग फलन $I = I_0$ या $I = j\ 2$ लाख करोड़ हो सकता है। जो अचर फलन का एक उदाहरण है। इसी प्रकार स्थिर लागत $FC = f(q); FC = j\ 100$ करोड अचर फलन का उदाहरण है।

2.5.3.1.2 रैखिक फलन :– रैखिक फलन एक घातीय फलन होते है जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक एक होता। रैखिक फलनों के प्रत्येक बिन्दु पर फलन की प्रवणता समान रहती है। रैखिक फलनों में स्वतन्त्र चर और आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों का अनुपात स्थिर बना रहता है अर्थात फलन में परिवर्तन की दर स्थिर रहती है। रैखिक फलन के ग्राफीय निरूपण से सरल रेखा प्राप्त होती है।

2.5.3.1.3 द्विघातीय फलन :– द्विघातीय फलन द्वितीय घात के फलन होते है जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक 2 होता। द्विघातीय फलनों में परिवर्तन की दर परिवर्तनशील होती है, ऐसे फलनों के ग्राफीय निरूपण से शांकव आकृतियाँ (Conic Section)प्राप्त होती है। जैसे – परवलय, वृत्त, दीर्घ वृत्त, अति परवलय।

2.5.3.1.4 बहुपद फलन :– जैसा कि इसके नाम से स्पष्ट है ऐसे फलनों में अनेक पद होते हैं इसका प्रत्येक पद एक गुणांक के साथ स्वतन्त्र चर का एक ऐसा पद होता है जिसका घातांक गैर ऋणात्मक पूर्णांक हो। जैसेः–

$$Y = f(X) : Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + - - - - - - + a_nX^n$$

हम जानते हैं कि $X^0 = 1$ एवं $X^1 = X$ होता है, उपरोक्त बहुपद में इन तत्वों को समावेशित कर के यह कहा जा सकता है कि

जब $n = 0$ तो $Y = a_0$ - - - - - एक अचर फलन होता है।

जब $n = 1$ तो $Y = a_0 + a_1X$ - . . . . . एक रैखिक फलन होता है।

जब $n = 2$ तो $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ . . . . . .एक द्विघातीय फलन होता है।

इसी प्रकार n का मान बढते जाने पर बढते घातांको के जटिल फलन प्राप्त होते हैं।

2.5.3.2 अबीजीय फलनः– ऐसे फलन जिनको मात्र बीजीय संक्रियाओं द्वारा व्यक्त करना सम्भव न हो तथा जिनको व्यक्त करने के लिए चर–घातांकीय, लघुगणिकीय या त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का सहारा लेना पड़ता है, अबीजीय फलन होते हैं।

2.5.3.2.1 चर–घातांकीय फलनः– वे फलन जिनकी व्याख्या ऐसे पदों की सहायता से की जाती है जिनमें घातांक में स्वतन्त्र चर की भूमिका होती है चर – घातांकीय फलन कहलाते है। उदाहरणार्थ–

$$Y = f(X) : Y = a^x$$

$$Y = f(t) : Y = ab^t$$

2.5.3.2.2 लघुगुणकीय फलनः– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए स्वतन्त्र चर के लघुगुणकों का प्रयोग किया जाता है अर्थात जिन फलनों में फलनात्मक सम्बन्ध लघुगुणकीय संक्रीयाओं द्वारा व्याख्यायित होते है उन्हें लघुगुणकीय फलन कहते हैं। उदाहरणार्थ– $Y = f(X) : Y = a \log_b X$

या, $Y = f(X) : Y = \alpha \log_e X$

2.5.3.2.3 त्रिकोणमितीय फलन :– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है त्रिकोणमितीय फलन कहलाते हैं। उदाहराणार्थ–

$Y = f(x) : Y = a \sin x$

या, $Y = f(x) : Y = x \sin \theta$

2.5.3.3 परिमेय फलनः– वे फलन जिनको दो बहुपदों के अनुपात के द्वारा व्यक्त किया जाता है, उन्हें परिमेय फलन कहते हैं।

जैसेः– $Y = f(X): Y = \dfrac{a_0 + a_1X}{b_0 + b_1X + b_2X^2}$ या

$Y = f(X): Y = \dfrac{1 - X}{1 + X + X^2}$

इसी प्रकार $Y = {}^a\!/\!_X$ एक विशेष परिमेय फलन है जिसका अर्थशास्त्र में अनेक संदर्भो में प्रयोग होता है। इस फलन को भिन्न प्रकार से $X.Y = {}^{\cdot}$ (एक अचर राशि) लिखा जा सकता है। जिसके ग्राफीय निरूपण से अति परवलय प्राप्त होता है जो X तथा Y अक्ष पर अनन्त स्पर्शी होता है।

माँग विश्लेषण में माँग फलन च्प्फ त्र ज्ञय औसत स्थिर लागत फलन (AFC) $= {}^{FC}{}_{Q}$ तथ्र्श उपभोक्ता व्यवहार में उपयोगिता फलन $U_0 = XY$ जहाँ U_0 उपयोगिता का एक निश्चित स्तर है अर्थात् इससे एक निश्चित तटस्थता वक्र प्राप्त होगाद्ध इत्यादि इसके उदाहरण हैं।

2.5.3.4 अपरिमेय फलनः– ऐसे बीजीय फलन जिनको बहुपद के मूल जैसे वर्गमूल के द्वारा व्यक्त किया जाता है, को अपरिमेय फलन कहते है।

उदाहरणार्थ– $Y = f(x) : Y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

2.5.3.5 अन्य आधारों पर फलनों का वर्गीकरणः–

2.5.3.5.1 स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन :– स्वतन्त्र चर के पदों में फलन को व्यक्त करने की स्पष्टता के आधार पर फलनों को दो वर्गों में बाँटा जाता है।

क) स्पष्ट फलनः– स्पष्ट फलन वे फलन होते है जिनमें फलन या आश्रित चर को स्वतन्त्र चर के पदों में स्पष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र व आश्रित चरों की स्पष्ट पहचान सम्भव होती है। उदाहरणार्थ–

1. $Y = f(X) : Y = a + bX$
2. $Y = f(X) : Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \text{- - - - - - - -} a_nX^n$
3. $Y : f(X) : y = a \log X$ आदि।

ख) अस्पष्ट या निहित फलनः– अस्पष्ट फलन वे फलन होते है जिनको स्वतन्त्र चर के पदों में पूर्ण स्पष्टता के साथ व्यक्त नहीं किया जा सकता है। अर्थात ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र व आश्रित चरों की स्पष्ट पहचान कर पाना सम्भव नहीं होता है। उदाहरणार्थ–

$$Y = f(X) : aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0$$

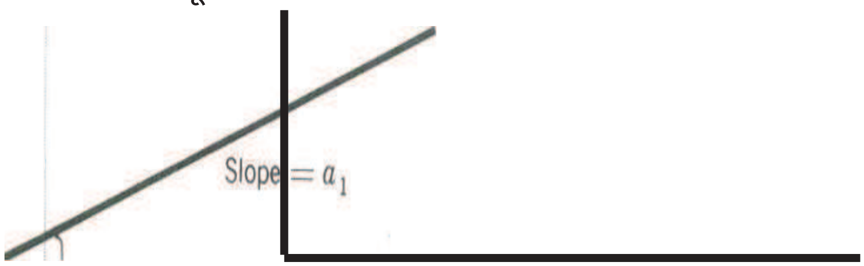
2.5.3.5.1.1 दो और दो से अधिक स्वतन्त्र चरों वाले फलनः–

जैसा कि फलन की अवधारणा का अध्ययन करते हुए हमने जाना था कि फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक भी हो सकती है, ऐसा तब होता है जब किसी फलन का मान एक से अधिक (कारको) स्वतन्त्र चरों द्वारा निर्धारित होता है, उदाहरण के लिए, यदि किसी चर मान दो स्वतन्त्र चरों X था Y पर आश्रित हो ता दो स्वतन्त्र चरों का फलन होगा इसे सांकेतिक रूप से $= f(X,Y)$ द्वारा दिखाया जाता है, इसी प्रकार यदि कोई चर Y,n स्वतन्त्र चरों (कारकों) – $X_1, X_2, \text{- - - -} X_n$ पर आश्रित हो तो Y,n स्वतन्त्र चरों का फलन होगा जिसे $Y = f(X_1, X_2, \text{- - -} X_n)$ लिखा जाता है।

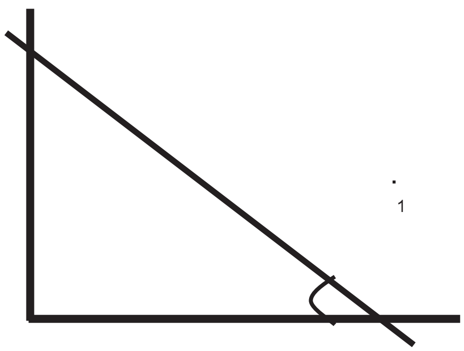
अर्थशास्त्र में ऐसे फलनों का बहुधा उपयोग किया जाता है, उदाहरण के लिए उपभोक्ता व्यवहार के सिद्धान्त में उपभोक्ता का उपयोगिता फलन U दो वस्तुओं X तथा Y के उपभोग स्तर पर निर्भर करता है जिसे $U = f(X, Y)$ लिखते हैं।

इसी प्रकार, उत्पादन सिद्धान्त में उत्पादन फ अनेक आगतों जैसे नाम (L), पूँजी (K), भूमि (N), साहस (E), तकनीकि (T) आदि पर निर्भर करता है जिसे $Q = f(L,K,N,E,T....)$ द्वारा दर्शाया जाता है। किन्तु विश्लेषण की सुविधा के लिए अन्य कारकों को अपरिवर्तनीय मान कर उत्पादन को मूलतः पूँजी और श्रम का फलन माना जाता है जिसे $Q = f(L, K)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

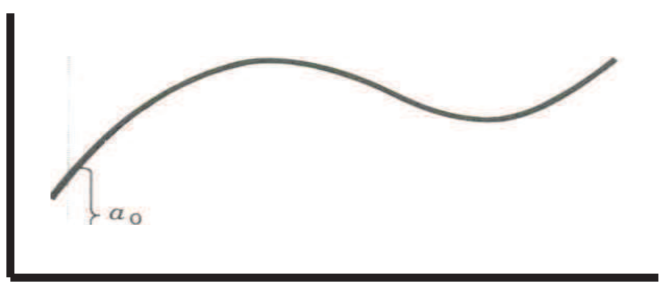
2.5.3.512 महत्वपूर्ण फलनों के ग्राफः–



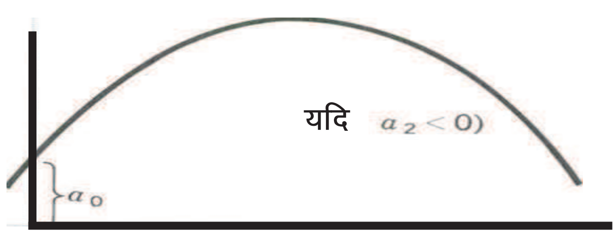
चित्र संख्या 1– रैखिक फलन $Y=a_0 + a_1X$



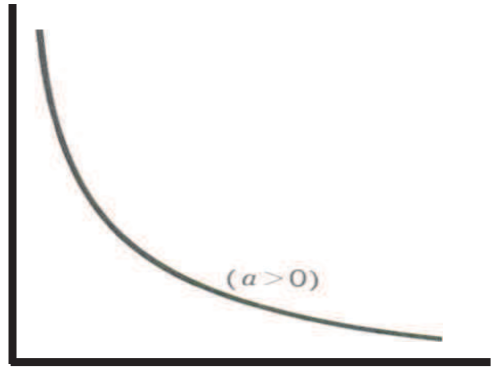
चित्र संख्या 2– ऋणात्मक ढाल का रैखीय फलन $Y = a_0 – a_1X$



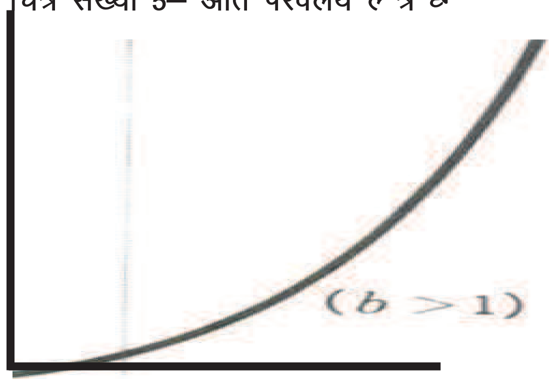
चित्र संख्या 3– द्वितीय घात के फलन $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$



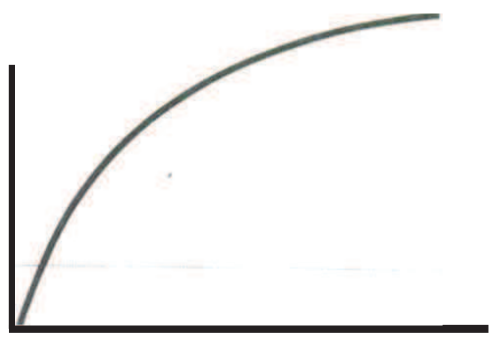
चित्र संख्या 4– तृतीय घात का फलन $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$



चित्र संख्या 5– अति परवलय ल त्र ंध्



चित्र संख्या – 6 चर घातांकीय फलन $Y = b^X$



चित्र संख्या 7– लघुगुणकीय फलन $Y = \log X$

2.5.3.5.2 फलन के मान में परिवर्तन की दिशा की सुनिश्चितता के आधार पर :–

क) एकदिष्ट फलनः– वे फलन जिनके मान या परिमाण में परिवर्तन की दिशा सुनिश्चित होती है अर्थात यदि फलन का मान बढ़ रहा होता है तो बढ़ता ही जाता है और यदि घट रहा होता है तो घटता ही जाता है। दूसरे शब्दों में, फलन के मान में परिवर्तन की दिशा

बदलती नहीं है; ऐसे फलनों को एक दिष्ट फलन कहते हैं। जैसेः– $Y = a + bX$; $Y = a - bX$; $Y = a^x$; आदि, जहाँ ̇,b > o

एकदिष्ट फलनों को पुनः दो वर्ग में वर्गीकृत किया जाता हैः–

(i) एकदिष्ट वर्धमान फलनः वे फलन जिनके मान या परिमाण निरन्तर बढते जाते हैं, एकदिष्ट वर्धमान फलन कहलाते हैं। जैसेः– $Y = a + bX$ तथा $Y = a^x$ आदि।

देखें चित्रः– 1

(ii) एकदिष्ट ह्रासमानः– वे फलन जिनके मान या परिमाण निरन्तर घटते जाते हैं, एकदिष्ट ह्रासमान फलन कहलाते हैं। जैसे $Y = a - bX$, तथा $Y = a^{-x}$ A

देखें चित्र 2।

ख) अदिष्ट फलनः– वे फलन जिनके मान या परिमाण में परिवर्तन की दिशा सुनिश्चित नहीं होती है, अदिष्ट फलन कहलाते हैं। अर्थात् अदिष्ट फलनों के मान बढने के बाद घटने लग सकते है अथवा घटने के बाद बढने लग सकते हैं अथवा क्रमशः कभी घटते कभी बढते हो सकते हैं। देखें चित्र–4।

जैसेः– $Y = ax^2 + bx + c$ एक परवलयाकार फलन का समीकरण है जिसके मान में परिवर्तन की दिशा एक सीमा के बाद बदल जाती है।

इसी प्रकार, $Y = a \sin x$ जिसका मान –a से ̣̇ के बीच दोलन करता रहता है।

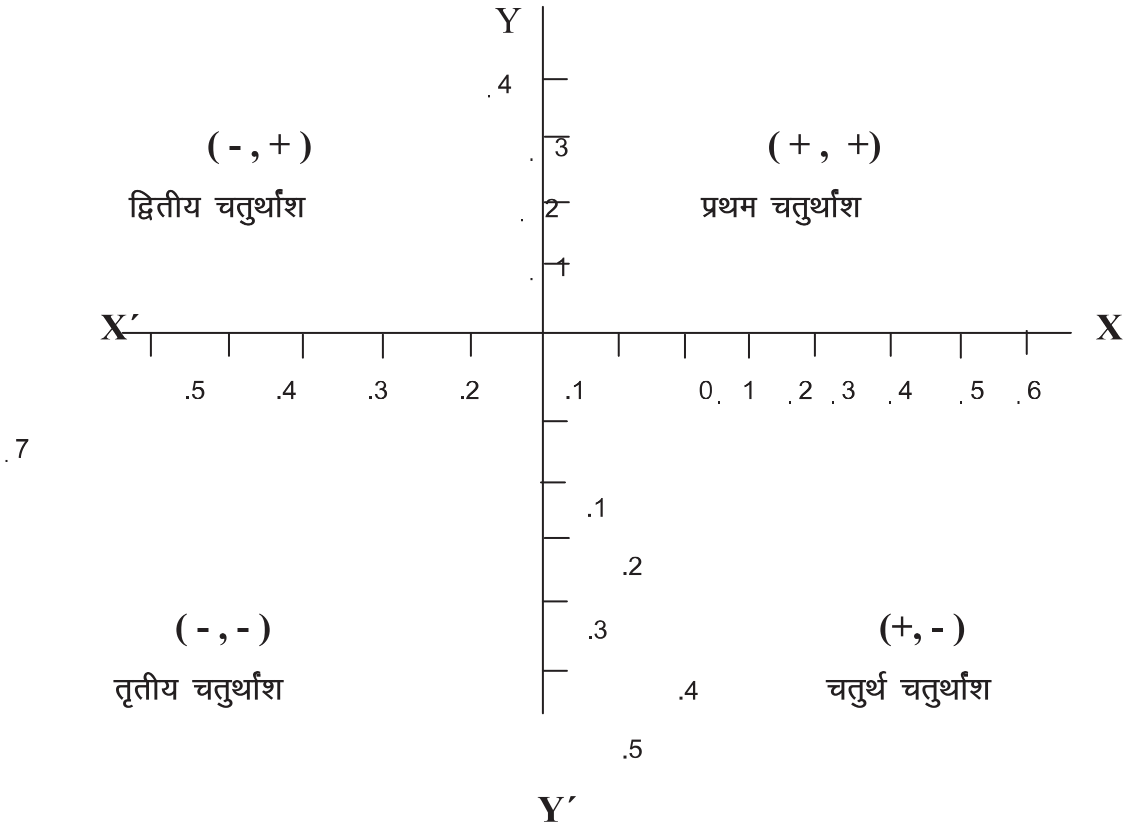
2.5.4 फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः– फलनों में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्धों को रेखाचित्र द्वारा सहजता से स्पष्ट किया जा सकता है। एक स्वतन्त्र चर वाले फलन का रेखचित्र आरम्भिक निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से द्विआयामी–समतल या पृष्ठ पर अंकित किया जा सकता है किन्तु दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर वाले फलनों (जब सभी स्वतन्त्र चर एक साथ परिवर्तनशील हो) को अंकित करने के लिए तीन या तीन से अधिक आयामों की आवश्यकता पड़ती है जिसे पुस्तिका पर दर्शाना जटिल तथा तीन से अधिक आयामों का अंकन व्यवहारिक रूप से असम्भव होता है। यही कारण है कि बहु–स्वतन्त्र चरीय आर्थिक फलनों के विश्लेषण को रेखाचित्र द्वारा दर्शाने के लिए प्रायः एक चर को परिवर्तनशील रखते हुए शेष को स्थिर मान लिया जाता है।

उदाहरण के लिए – किसी वस्तु की X मांग (Dx) उस वस्तु के मूल्य P_x उपभोक्ताओं की आय (Y) उपभोक्ता की अभिरूचि (T) अन्य वस्तुओं के मूल्य (P_0) आदि पर निर्भर करती है। जिसे $D_x=f(P_x, P_0, Y, T.....)$ लिखा जाता है।

किन्तु विश्लेषण की सरलता और रेखाचित्र द्वारा सहजता से दर्शाने के लिए वस्तु के अपने मूल्य के अतिरिक्त शेष सभी स्वतन्त्र चरों को स्थिर मान कर $D_x=f(P_x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिसका रेखाचित्रीय निरूपण करने पर धनात्मक चतुर्थांश में बायें से दायें गिरती हुई रेखा या वक्र प्राप्त होता है। इसी प्रकार बहुघातीय बीजीय फलन, लघुगणकीय फलन, चर घातंकी फलन एवं त्रिकोणमितीय फलनों का रेखाचित्र हाथ से अंकित करना प्रायः असम्भव जैसा होता है।

उपरोक्त तथ्यों को ध्यान रखते हुये सरल निर्देशांक ज्यामिति को प्रयोग करते हुए आप लोगों के अभ्यास की दृष्टि से रैखिक एवं परवलयाकार फलनों के अंकन की विधि का उल्लेख किया जा रहा है।

एक स्वतन्त्र चरीय फलनों के अंकन के लिए द्विआयामी पृष्ठ को दो अक्षों ; X अक्ष जो क्षैतिज अक्ष तथा Y- अक्ष जो ऊर्ध्व अक्ष होता है, जो परस्पर 90^0 का कोण बनाते हुए एक–दूसरे को मूल बिन्दु 0 पर काटते है, और इस प्रकार द्वि–आयामी पृष्ठ को चार अक्षांशों में विभक्त करते है। स्वतन्त्र चर की गणना X अक्ष के सहारे तथा स्वतन्त्र आश्रित चर की गणना Y अक्ष के सहारे की जाती है। मूल बिन्दु से दायीं तरफ X के मान धनात्मक तथा मूल बिन्दु से बायीं तरफ X के मान ऋणात्मक होते है। इसी प्रकार Y के मान मूल बिन्दु से ऊपर धनात्मक तथा मूल बिन्दु से नीचे ऋणात्मक होते हैं। परिणामस्वरूप प्रथम चतुर्थांश में $\mathbf{X}$ तथा Y दोनों चरों के मान धनात्मक होते है इसे धनात्मक चतुर्थांश भी कहते है। द्वितीय चतुर्थांश $\mathbf{X}$ के मान ऋणात्मक तथा Y के मान धनात्मक होते है। तृतीय चतुर्थांश में $\mathbf{X}$ तथा Y दोनों के मान ऋणात्मक होते है इसे ऋणात्मक चतुर्थांश भी कहते है तथा चतुर्थ चतुर्थांश में $\mathbf{X}$ के मान धनात्मक तथा Y के मान ऋणात्मक होते हैं। देखें चित्र संख्या– 8



चित्र संख्या – 8

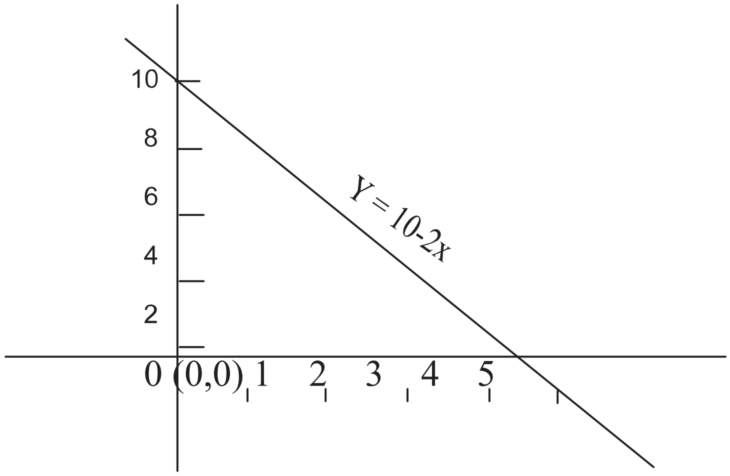
सामान्यतया फलन का हस्तनिर्मित आरेख बनाने के लिए स्वतन्त्र चर के पूर्णांक मानों को स्वेचछानुसार चुना जाता है तथा इन मानों को फलन के समीकरण में रखकर आश्रित चर या फलन के मान की ग्णना की जाती है। तत्पश्चात् समतल पर इन चर मानों के आधार पर निश्चित बिन्दुओं को चिन्हित किया जाता है इन बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से फलन का आरेख प्राप्त हो जाता है।

फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः– उदाहरण द्वारा प्रस्तुति।

उदाहरण 1.:– $Y = 10-2X$ का रेखाचित्रीय निरूपण कीजिए।

हलः–

X	0	1	2	3	4	5
Y	10	8	6	4	2	0

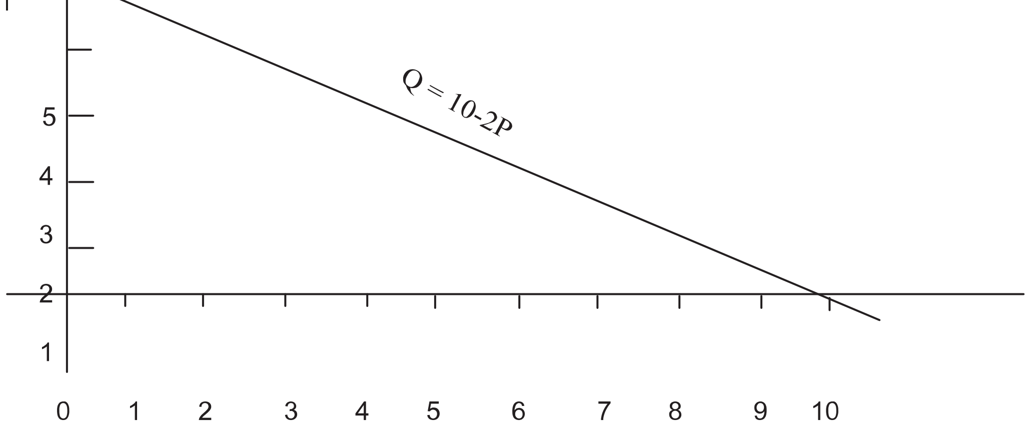


यद्यपि सारणी में X के शून्य से 5 तक के ही मान लिये ग्ये है परन्तु सभी वास्तविक संख्याएं इस फलन के डोमेन अर्थात X के मान हो सकते है।

चूँकि दिया गया फलन एक सरल रेखा को व्युत्पन्न करता है तथा सरल रेखा की ढाल अपरिवर्तित रहती है सारणी से प्राप्त पाँच बिन्दुओं को मिलाते हुए सरल रेखा को ग्राफ के पूरे विस्तार तक खींचा जाता है।

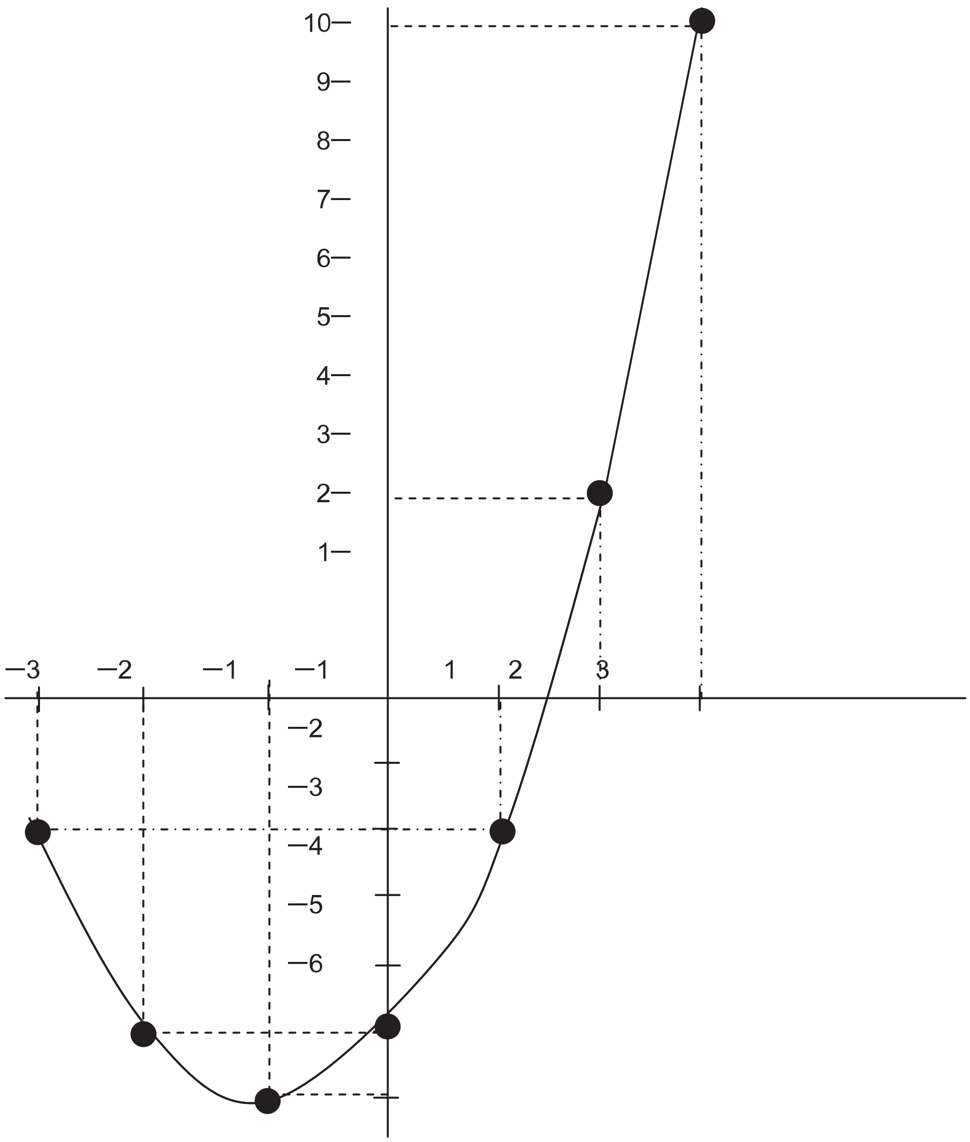
टिप्पणीः 1) यदि उपरोक्त फलन जैसा एक माँग फलन $Q = 10 - 2P$ हो तो P और Q के केवल XSj ऋण मान (शून्य अथवा धनात्मक मान) ही प्रासंगिक हों।

2) यद्यपि मूल्य स्वतन्त्र चर व माँग आश्रित चर है तथापि परम्परा के कारण मूल्य को Y अक्ष तथा माँग को X अक्ष पर अंकित किया जायेग और माँग फलन का ग्राफ निम्नवत् होगा।



उदाहरण 2 :– **$Y= X^2+2X-5$** का रेखाचित्रीय निरूपण कीजिए।

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-2	-5	-6	-5	-2	+3	10

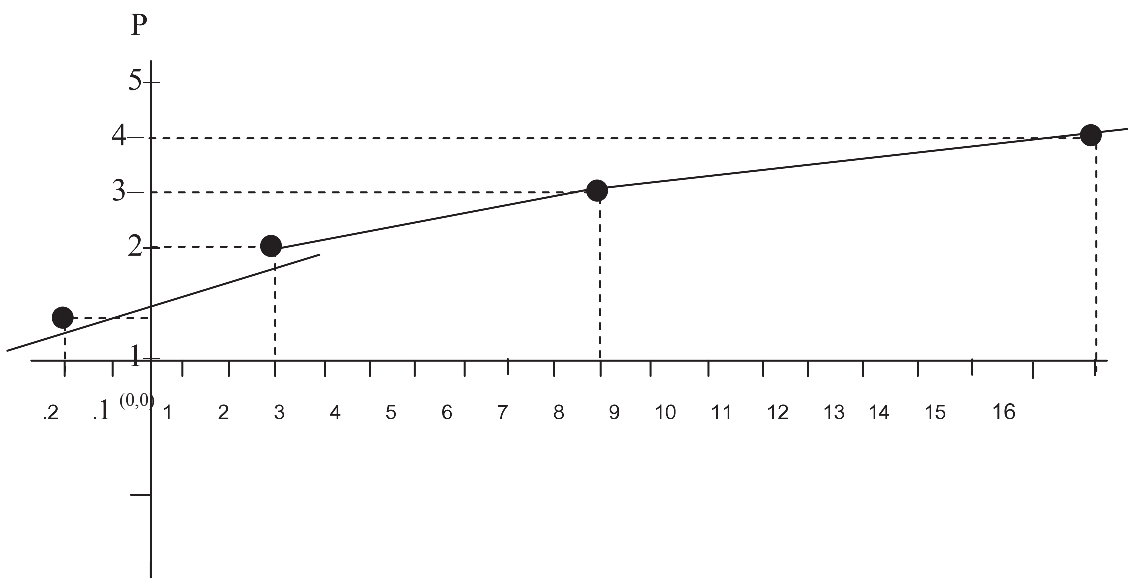


यद्यपि सारणी में X के .3 से .3 के बीच कुल 7 मान लिए गये है किन्तु X के सभी वास्तविक मान डोमेन के सदस्य होंगे। चूँकि दिया ग्या फलन एक परवलयाकार फलन है, इसका रेखाचित्रीय निरूपण करते समय इसके शीर्ष को चिह्नित कर उसका अंकन करना आवश्यक होता है सामान्यतया शीर्ष के बायीं तथा दायीं तरफ के दो या तीन बिन्दुओं को चिह्नित करना आवश्यक होता है, चूँकि परवलयाकार फलन की ढाल प्रत्येक बिन्दु पर परिवर्तित होती रहती है इसलिए अंकित किये गये बिन्दुओं को मुक्त–हस्त से मिलाया जाता है। इसी कारण परवलयाकार फलन का रेखाचित्र चिह्नित किये गये बिन्दुओं तक ही सीमित रहता है।

टिप्पणीः यदि उपरोक्त फलन जैसा एक पूर्ति फलन $Q= -5+2P+P^2$ का अंकन करना हो तो Q और P के केवल शून्य तथा धनात्मक मान ही प्रासंगिक होंगे अतः इसके अंकन के लिए तालिका निम्नवत बनेगी

P	1	2	3	4
Q	-2	3	10	19

तथा इसका ग्राफ निम्नवत बनेगा।



2.6 सारांश

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप गणितीय फलनों एवं फलनात्मक सम्बन्धों के विभिन्न पक्षों से सुपरिचित हो X, है। चर, अन्तः चर, वाह्य चर, अचर गुणांक आदि की अवधारणा से परिचित होने से अपको अर्थशास्त्र के अनेक तथ्यों को समझने में बहुत सुविधा होगी। फलनों के विभिन्न प्रकारों तथा फलनों के स्वरूप का निर्धारण करने में गणितीय संक्रियाओं की भूमिका के बारे में जो जानकारी इस इकाई में आप ने प्राप्त की है वह आर्थिक सिद्धान्तो व आर्थिक प्रणालीयों को समझने में सहायक सिद्ध होगी। फलनों के आर्थिक अनुप्रयोग सम्बन्धित जानकारी से आपको अर्थशास्त्र में फलनात्मक सम्बन्ध, चर व गुणांक आदि का आर्थिक विषयों में किस प्रकार प्रयोग किया जाता है, समझने में सहायता मिलेगी।

2.7 शब्दावली

प्रवणताः– फलन के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की ढाल उस बिन्दु पर फलन की प्रवणता कही जाती है। फलन की प्रवणता आश्रित चर में परिवर्तन व स्वतन्त्र चर में परिवर्तन के अनुपात ($\Delta Y/\Delta X$) अथवा फलन में परिवर्तन की दर को दर्शाती है।

गुणांक :– गुणांक अर्थात् गुणा + अंक अर्थात् स्वतंत्र चर में इकाई परिवर्तन का फलन पर कितने गुणा असर पडेग, इस बात का निर्धारण करने वाला अंक।

शांकव आकृतिः– शंकु का विभिन्न प्रकार से अनुच्छेद करने से प्राप्त होने वाली आकृतियाँ।

2.8 अभ्यास प्रश्न

1. रिक्त स्थानों को भरिएः–

क. $Y = mX + C$ एक ....फलन है। (बीजीय/अबीजीय)

ख. रैखिक की फलन की प्रवणता ....रहती है। (बदलती/समान)

ग. .... फलन का रेखाचित्र अक्ष के समानान्तर होता है। (अचर/रैखिक)

घ. द्विघात फलनों में .... आकृतियों प्राप्त होती हैं।(शांकव/ चक्रीय)

ड. पूर्ण प्रतियोगिता में मूल्य .... चर होता है। (अन्तः/बाह्य)

च. फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या .... हो सकती है। (एक /अनेक)

छ. आश्रित चर को .... कहते है। (फलन/परिमापक)

ज.माँग, पूर्ति एवं लागत फलन .... चतुर्थांश में सीमित रहते हैं।(चतुर्थ/प्रथम)

झ. आवर्ती फलन ....का एक विशेष प्रकार होता है। (एकदिष्ट फलन/अदिष्ट फलन)

2. निम्न कथनो का परीक्षण कीजिएः–

क. फलनात्मक सम्बन्ध कारण–कार्य अथवा कारक–परिमाण सम्बन्ध को व्यक्त करता है। सत्य/असत्य

ख. $Y = a^X$ एक बीजीय फलन है। सत्य/असत्य

ग. $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ एक अदिष्ट फलन है। सत्य/असत्य

घ. $Y = b - aX$ एकदिष्ट वर्धमान फलन है। सत्य/असत्य

ड0. सीमान्त आय फलन धनात्मक चतुर्थांश में सीमित रहता है। सत्य/असत्य

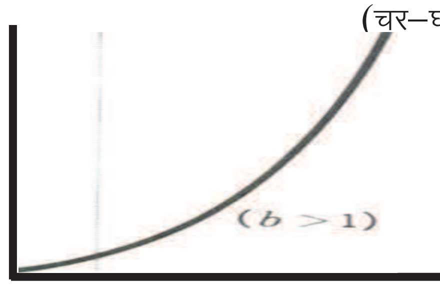
3. निम्न फलनों की पहचान कीजिएः–

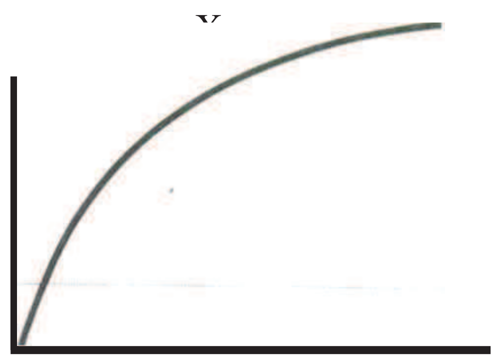
क. $X^2 + Y^2 = a^2$ (स्पष्ट/अस्पष्ट)

ख. $Y = aX^2 + bX + c$ (रैखिक/परवलय)

ग. $Q = a/p$ (परिमेय/अपरिमेय)

घ. Y (चर–घातांकी/लघु गुणकीय)





ड0. (चर–घातांकी/लघु गुणकीय)

2.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तरः—

1. क. बीजीय ड0. बाह्य ख. समान च. अनेक
   ग. अचर छ. फलन घ शांकव ज. प्रथम
   झ. अदिष्ट फलन
2. क. सत्य ग. सत्य ड0. असत्य ख. असत्य घ. असत्य
3. क. अस्पष्ट ग. परिमेय ड0. लघुगणकीय ख. परवलय घ.चर घातांकीय

2.10 संदर्भ ग्रन्थः—

i. Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; Mc GRAW – HILL.

ii. Allen, R.G.D.; Mathematical Analysis for Economists, The English Language Book Society and Mc-Millian & Co. Ltd. London.

iii. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

iv. Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematical treatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.

v. Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.

2.11 सहायक ग्रन्थः—

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।
2. Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.
3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।
4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित;लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
5. Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics for Economists Kitab Mahal Publication.

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

2.12 निबन्धात्मक प्रश्नः–

क. फलनात्मक सम्बन्ध किसे कहते है। फलनों के विभिन्न भेदों को स्पष्ट कीजिए।

ख. निम्न फलनों को रेखांति कीजिए।

1. पूर्ति फलन
2. लागत फलन

ग. चर से आप क्या समझते हैं। अन्तः तथा बाह्य चरों में भेद स्पष्ट कीजिए।

घ. निम्न में उदाहरण दे कर अन्तर स्पष्ट कीजिएः–

a. स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन
b. परिमेय तथा अपरिमेय फलन
c. बीजीय एवं अबीजीय फलन
d. एक दिष्ट एवं अदिष्ट फलन
e. लघुगुणकीय एवं चर घातांकीय फलन
f. अचर एवं रैखिक फलन

इकाई 3:–अवकलन निर्वचन एवं नियम

इकाई संरचना

3.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप फलनात्मक सम्बन्ध व फलनों का अध्ययन कर चुके है। जिसमें आपने यह देखा है कि प्रायः फलनात्मक सम्बन्ध सरल व समानुपाती नही होते है; वरन् इन्हें जटिल गणितीय प्रतिक्रियाओं द्वारा व्यक्त किया जाता है; और जो इस बात को स्पष्ट करते है कि प्रायः स्वतन्त्र चर (चरों) व आश्रित चर के मध्य सम्बन्ध सरल व समानुपाती नही होते है। वस्तुतः स्वतन्त्र चर (चरों) में समान परिमाण में क्रमिक परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों का परिमाण परिवर्तनशील होता है और फलन के परिमाण में परिवर्तन में होने वाले परिवर्तन भी परिवर्तनशील हो सकते है अर्थात् स्वतन्त्र चर में एक निश्चित परिमाण में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप फलन में एक निश्चित परिमाण में परिवर्तन होना अनिवार्य नही होता है। दूसरे शब्दों में कहे तो फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तित होती रह सकती है। इसी प्रकार फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर भी परिवर्तित होती रह सकती है, और यह श्रखंला उत्तरोत्तर आगे जा सकती है। कई बार फलन के मान में परिवर्तन की दर में परिवर्तन होते रहने के परिणाम स्वरूप फलन में परिवर्तन की दिशा भी बदल जाती है और किन्ही फलनों में यह दिशा बार–बार परिवर्तित होती है। जैसा कुछ त्रिकोणमितीय फलनों, आवर्ती फलनों या फिर ऋणात्मक अचर आधार के चर घातांकी फलनों $[-a^x]$ में दिखाई पडता है। ऐसी स्थितियों में फलनों में परिवर्तन की दर उनके प्रत्येक बिन्दु पर परिवर्तित होती रहती है। ऐसे फलन जिनके मान में परिवर्तन की दर स्थिर नही होती स्वतन्त्र चर एवं आश्रित चर की दो भिन्न–2 स्थितियों के बीच के छोटे अन्तरों $[\Delta]$ के माध्यम से परिवर्तन की दर की ग्णना करना त्रुटिपूर्ण परिणाम देता है। फलतः परिवर्तनशील दरों से परिवर्तित होने वाले फलनों के किसी बिन्दु पर परिवर्तन की दर, परिवर्तन की दर मे हो रहे परिवर्तनों की दर आदि तथा इनकी सहायता से फलन की प्रकृति आदि को समझने के लिए स्वतंत्र चर में शून्यसम या शून्योन्मुख परिवर्तन के द्वारा फलन के परिमाण मे होने वाले अत्य अल्प परिवर्तन के माध्यम से फलन में परिवर्तन की दर तथा अन्य उच्च काटि की दरों की ग्णना की जाती है । इस प्रक्रिया को अवकल प्रकिया तथा इस प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम को अवकलज और गणित की इस विधा को अवकलन कहते है।

अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों की विवेचना करने तथा उन्हे स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग किया जाता है। जिसका उल्लेख पिछली इकाई में हुआ है। ऐसे में विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था मे क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनका शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया की प्रविधि व विभिन्न कोटि के अवकलजों के अर्थ से सुपरिचित होना नितांत आवश्यक है।

3.2 उददेश्य

इस इकाई का उददेश्य आप विधार्थियों को एक चरीय फलनों के सरल अवकलन के आशय, अवकलन की अवधारणा, अवकलन करने की विधि तथा अवकलज के अर्थो से न केवल परिचित कराना वरन् विभिन्न फलनों के अवकलजों तथा जटिल फलनों यथा फलनों के योग, फलनों के अन्तर, फलनों के गुणनफल, फलनों के भाजफल तथा फलनों के फलन के अवकलन तथा उच्चतर कोटि के अवकलज, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ एवं नति परिवर्तन बिन्दु आदि ज्ञात करने के नियमों से परिचित कराते हुये विविध उदाहरणों की सहायता से विविध फलनों का अवकलन करने में कुशलता प्राप्त करने में आपका सहयोग करना है। साथ ही अर्थशास्त्र में सरल अवकलन के अनुप्रयोग के द्वारा अर्थशास्त्र में सरल अवकलन की उपयोग्तिा रेखांकित करने के साथ–2 आर्थिक सिद्धान्तों के मर्म को (उदाहरणों की सहायता से) समझने योगय बनाना है।

3.3 अवकलनः अवधारणा एवं निर्वचन

पिछली इकाई में फलनात्मक सम्बन्धों का अध्ययन करते हुए हमने देखा है कि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप फलनों के मान में परिवर्तन होता है; एवं विभिन्न प्रकार के फलनों में स्वतंत्र चर के मान और फलन के मान के बीच विभिन्न प्रकार के सम्बन्ध पाये जाते है। फलनात्मक सम्बन्ध को $y = f(x)$ जिसमें x कारण एवं y परिणाम है, द्वारा दिखाते हैं। अतः x के मान बदलने पर y अथवा $f(x)$ का मान परिवर्तित होता है। उदाहरण के लिए यदि x के किसी विशेष का मान x_i को लें तो फलन का मान y_i या $f\ (x_i)$ होग। और यदि x के विशेष मान x_j को ले तो फलन

का मान y_j या $f(x_j)$ होग। यदि ग और y के दोनों मानो के बीच के अन्तर को Δx तथा Δy द्वारा दर्शाया जाये तो–

$\Delta x = x_j - x_i$ तथा $\Delta y = y_j - y_i$ या $f(x_j) - f(x_i)$ होग।

फलनात्मक सम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता इस बात में निहित है कि स्वतंत्र चर (कारण) में कितना परिवर्तन करने से फलन (परिणाम) में वांछित मान प्राप्त किया जा सकता है।

इस सन्दर्भ में फलन के परिवर्तन की दर जिसे $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, की गणना महत्वपूर्ण है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{\Delta x}$$

यदि फलन फलन सरल रैखिक या अनुपातिक है तो फलन में परिवर्तन की दर सदैव समान बनी रहती है ऐसे में Δx का मान छोटा या बडा होने पर कोई अन्तर नही पडता किन्तु यदि फलन अरैखिक है तो Δx का मान बडा होने पर दो भिन्न–भिन्न स्थितियों के बीच घटित होने वाली विभिन्न परिवर्तन की दरों का एक औसत प्राप्त होग। ऐसे में जबकि प्रत्येक बिन्दु पर फलन की दर परिवर्तित हो रही हो किसी स्थिति विशेष में फलन स्वतंत्र चर के प्रभाव को समझने के लिए स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शुन्योन्मुख परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर को समझना महत्वपूर्ण हो जाता है। सांकेतिक रूप में स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शुन्योन्मुख परिवर्तन को $'\Delta x \to o'$ द्वारा तथा स्वतंत्र चर में अत्यल्प परिवर्तन की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर को $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ द्वारा दर्शाया जाता है। जिसे– $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ द्वारा दर्शाया जाता है इसको अवकलन का निर्वचन कहते है। अवकलज के सन्दर्भ में निम्न बातें स्मरणीय है–

1. फलन के सतत् भाग पर ही अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।
2. अवकलज स्वयं में एक फलन होता है।

उदाहरण -1 : $y = x^n$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज प्राप्त कीजिये।

हल – दिया है

$$y = f\,(x) = x^n$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$$

प्रथम सिद्धान्त से x^n का अवकलज

$$= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n\,x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\,x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{n\,x^{n-1} + n(n-1)\,(x^{n-2})\,\Delta x + ----\,(\Delta x)^{n-1}\}$$

$$= n\,X^{n-1}$$

स्वतंत्र चर मशुन्योन्मुख परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों की गणना की इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया या अवकलन तथा अवकल प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ या $\frac{d}{dx}\,(y)$ को अवकलज या अवकल गुणांक कहते हैं।

Δx को धीरे–धीरे शुन्योन्मुख अर्थात षून्य के समान छोटा बनाने की क्रिया प्रक्रिया के परिणाम स्वरूप $\frac{dy}{dx}$ (जो Δx के अत्यल्प न होने की स्थिति में वस्तुतः विभिन्न परिवर्तन की दरों का औसत होता है) का एक निश्चित मान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते है

कि अवकलन फलन के मान में परिवर्तन की दर का एक निश्चित मान प्राप्त करने की प्रक्रिया है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि $\frac{dy}{dx}$ में dy तथा dx दो अलगा–2 मान न होकर $\frac{dy}{dx}$, y के x के सापेक्ष अवकलन की प्रक्रिया $(\frac{dy}{dx})$ द्वारा प्राप्त परिणाम को दर्शाता है।

3.4 सीमा की अवधारणा

अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को x तथा y में परिवर्तनों के भाजफल की सीमा के रूप में दर्शाया जाता है। सरलता के लिये यदि हम $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को चर q तथा Δx को चर h द्वारा दर्शाये तो

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} q$ ।

जहाँ q h का फलन है तथा q का मान h के मान पर निर्भर है।

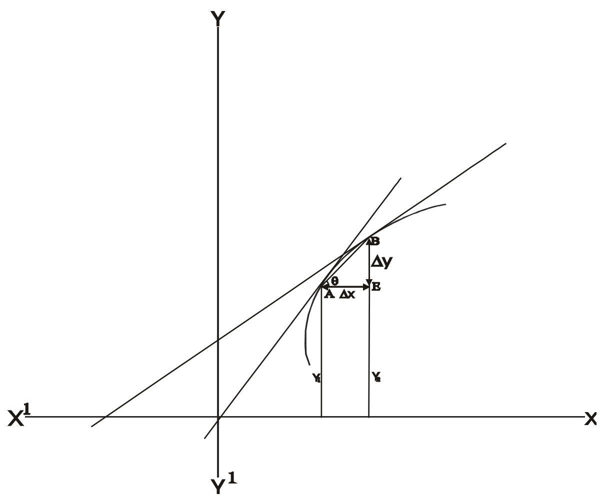
अतः अवकलन तथा अवकलज को पूर्ण रूप से समझने के लिए सीमा की अवधारणा को समझना आवश्यक है।

$h \to 0$ से तात्पर्य है कि चर x का मान चर x के एक विशिष्ट मान x_0 की ओर अग्रसर है यहा यह ध्यान देने योगय है कि x के विशिष्ट मान x_0 को दो दिशाओं – बायीं दिषा अर्थात x के मान क्रमशः बढते हुए x_0 की ओर अथवा दाहिनी दिशा से अर्थात क्रमशः घटते हुए x_0 की ओर – से अग्रसर हो सकते है। बायीं दिशा से x_0 की ओर अग्रसर होने की स्थिति में x का मान x_0 से छोटे होते है तथा $(x - x_o)$ अथवा $h < 0$ या ऋणात्मक होता है। जो अन्तर घटने के साथ शून्य की ओर अग्रसर होता है अर्थात h का मान ऋणात्मक से शून्य की ओर अग्रसर होता है जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^-} q$ तथा इसी प्रकार x के मान जब दाहिनी ओर से x_0 की ओर अग्रसर होते है तो h मान धनात्मक से शून्य की ओर अग्रसर होता है जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^+} q$ लिखते हैं।

3.5 अवकलज से आशय

1. अवकलज एक दिये हुये बिन्दु पर फलन में परिवर्तन की दर को बताता है।

2. अवकलज को $\frac{dy}{dx}$ के अतिरिक्त y' अथवा $f'(x)$ या महज f' अथवा Dy या $Df(x)$ द्वारा भी दर्शाया जाता है।
3. अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाली सीमान्त मानों की अवधारणा दिये ग्ये आर्थिक फलन के अवकलज के समतुल्य होती है अर्थात किसी आर्थिक फलन का सीमान्त मान ज्ञात करने के लिए उस फलन का अवकलज ज्ञात किया जाता है।
4. अवकलज एवं फलन की ढाल अथवा प्रवणता : फलन के एक दिये हुये बिन्दु पर फलन का अवकलज उस बिन्दु पर फलन की ढाल का मान बताता है। अर्थात फलन की ढाल फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या के समतुल्य होती है। जिसे हम निम्न रेखाचित्र के ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा समझ सकते है।



चित्र में फलन $f(x)$ पर दो बिन्दु $a(x_1, y_1)$ और $B\ (x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा x अक्ष के साथ तथा BE के साथ $\theta°$ का कोण बना रही है रेखा AB की ढाल $\tan\theta = \frac{BE}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ यदि बिन्दु B को खिसका कर A के इतने निकट ले आये कि A और B के बीच का अन्तर शून्य जितना हो जाये अर्थात $\Delta x \to 0$ तो AB

रेखा A बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा बन जायेगी तथा इसकी ढाल $\lim_{\Delta x \to 0} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{\Delta y}{\Delta x}$द्वारा मापी जायेगी।

<u>कुछ प्रमुख फलनों के प्रथम अवकलज</u>

1. $\frac{d}{dx} x \quad = \frac{dx}{dx} = 1$

2. $\frac{d}{dx} x^n \quad = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

3. $\frac{d}{dx} a.x^n = a \frac{dx^n}{dx} = a.nx^{n-1}$ $\quad$ ($a =$ अचर पद)

4. $\frac{d}{dx} a = \frac{da}{dx} = 0$ $\quad$ $a =$ (अचर पद)

5. $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d\,e^x}{dx} = e^x$

6. $\frac{d}{dx} e^{ax} = \frac{de^{ax}}{dx} = a.e^{ax}$

7. $\frac{d}{dx} \log x = \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$

8. $\frac{d}{dx} a.\log x = a.\frac{d \log x}{dx} = \frac{a}{x}$

9. $\frac{d}{dx}\, a^x = \frac{d a^x}{dx} = a^x \, \log a$

10. $\frac{d}{dx}\, \sin x = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

11. $\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

12. $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d \tan x}{dx} = \cot x$

3.7 एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के संयोगा से बनने वाले फलनों के अवकलन के नियम

कई बार फलन एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के योग अथवा फलनों के अन्तर या फलनों के गुणनफल या भाजफल के रूप में होते है। इस भाग में हम ऐसे ही फलनों के अवकलन करने की विधि से परिचित होंगे। सरलता के लिये एक ही चर के दो फलनों के विभिन्न संयोगो का अवकलन करने के नियम नीचे दिये है। दो से अधिक फलनों के संयोगो को इन्हीं नियमों की सहायता से अवकलित किया जा सकता है।

3.7.1 दो फलनों के योग अथवा अन्तर के अवकलन का नियमः यदि $y = f(x) : y = ax^2 + bx$ यहाँ y x का एक ऐसा फलन है जो x के दो फलनों (i) $a\,x^2$ तथा (ii) $b\,x$ का योग है। यदि हम $a\,x^2$ को $g(x)$ तथा $b\,x$ को $h\,(x)$ द्वारा चिन्हित करें तो

$$y = f\,(x) : \; f(x) = g\,(x) + h\,(x)$$

इसी प्रकार यदि

$$y = f\,(x) \; : \; y = ax^2 - b\,x \text{ तो}$$

$$y = f\,(x) : f\,(x) = g(x) - h\,(x)$$

इन दशाओं में y का अवकलज g तथा h के अवकलजों का तदानुसार योग अथवा अन्तर होग। अर्थात यदि $f\ (x) = \ g\ (x) \pm \ h\ (x)$ तो

$\frac{d}{dx}\ f(x) = \frac{d}{dx}\ g\ (x) \pm \frac{d}{dx}\ h\ (x)$ या

$$f'\ (x) = \ g'\ (x) \pm \ h'\ (x)$$

उपरोक्त उदाहरण में यदि $y = ax^2 + \ b\ x$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ (a\ x^2 + bx) = \frac{d}{dx}\ (a\ x^2) + \frac{d}{dx}\ (bx)$$

$$= \ a.\frac{d}{dx}\ x^2\ + \ b\ \frac{d}{dx}\ x$$

$$= \ a.2x + b.$$

$= 2\ +$

इसी प्रकार $y = \ ax^2\ - bx$ का अवकलज $\frac{dy}{dx} = 2ax - b$ होग।

3.7.2 दो फलनों के गुणनफल के अवकलन का नियम :–यदि $y = f\ (x)$: $y = \ x^n\ .e^x$ हो तो $y\ x$ के दो फलनों, x^n {जिसे $g(x)$ मानें} तथा e^x {जिसे $h(x)$ मानें} का गुणनफल है। इस फलन का अवकलन निम्नवत् किया जाता है।

$$y = f\ (x)\ = g\ (x).\ \ h\ \ (x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ f(x) = \frac{d}{dx}\ \ \{\ g\ (x).\ h\ (x)\ \}$$

$$= g(x).\frac{d}{dx}\ h(x) + \ h\ (x).\ \frac{d}{dx}\ g(x)$$

या $f'\ (x) = g\ (x).\ h'\ (x)\ +\ \ h(x)\ .\ g'\ (x)$

तदानुसार $y\ =\ x^n.e^x$ का अवकलन

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n, e^x) = x^n . \frac{d}{dx} e^x + e^x \frac{d}{dx} x^n$$

$$= x^n . e^x + e^x . n . x^{n-1}$$

$e^x . x^{n-1} (x + n)$ होगा।

3.7.3 दो फलनों के भाजफल के अवकलन का नियमः

यदि $y = f(x) : y = \frac{logx}{x}$ हो तो y x के दो फलनों $\log x$ {जिसे $g(x)$ माने} तथा x {जिसे $h(x)$ माने} तो $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ होग जिसके अवकलन का नियम निम्नवत् है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{h(x). \frac{d}{dx} g(x) - g(x). \frac{d}{dx} h(x)}{\{h(x)\}^2}$$

या

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{h(x). \ g'(x) - g(x). h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

तदानुसार $y = f(x) : y = \frac{\log x}{x}$ हो तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{x}\right) = \frac{x \frac{d}{dx} \log x - \log x \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x \frac{1}{x} - \log x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$= (1 - \log X) x^{-2}$$

3.7.4 श्रंखला नियम :– पिछले अनुभाग मे हमने फलनों के योग, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन करने के नियमों का अध्ययन किया है, इस अनुभाग में हम ऐसे जटिल फलनों के अवकलन करने की विधि का अध्ययन करेंगे, जिनकों सीधे–सीधें अवकलित करना जटिल तथा कईबार सम्भव नही होता है। अपितु जिनको फलनों के

फलनों की एक श्रंखला के रूप में समझकर सहजता से अवकलित किया जा सकता है अवकलन के इस नियम को अवकलन का श्रंखला नियम कहते है।

यदि $y = (x)$: $y = (3x + 2)^2$ तो $3x + 2$ को यदि हम t मान ले तो $y = t^2$ अर्थात y t का एक फलन है जिसे $y = g\ (t)$ मान सकते है। तथा t स्वयं x का फलन है। जहाँ $t = h\ (x)$: $h\ (x) = (3x + 2)$ है।

इस प्रकार अब $y = f\ (x) = g\ [h\ (x)]$ ऐसे फलनों का अवकलन का नियम निम्न प्रकार है – $\frac{dy}{dx} = \frac{d[g\{h\ (x)\}]}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{d(x)}$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

तदानुसार –

$$\frac{d}{dx}\ (3x + 2)^2 = \frac{d}{dt}\ t^2 \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 2\ t \cdot \frac{d(3x+2)}{dx} \quad t = 3x + 2 \text{ रखने पर}$$

$$= 2(3x + 2).3$$

$$= 6(3x + 2)$$

$$= 18x + 12$$

उदाहरणः–2 – यदि $y = a^{[sinx]^2}$ का अवकलन करना हो तो हम मान लेगे $[sinx]^2 = t$ अब $y = a^t$ होग तथा y, t के फलन के रूप में प्रस्तुत है जिसे हम $y = g(t)$: $y = a^t$ लिखेगे जहाँ t स्वयं $sinx$ का एक फलन है। जिसे $t = h(sinx)$; यदि $sinx = u$ मान लें तो $t = h(u) : t = u^2$ जहाँ u स्वयं x का एक फलन है $u = k(x) : k(x) = sinx$ होगा।

इस प्रकार

$$y = g(t) = g[h(u)] = g[h\{k(x)\}]$$

तथा $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ g(t)}{dt} \cdot \frac{d\ h(u)}{du} \cdot \frac{d\ k(x)}{dx}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

तदानुसार $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[a^{(sinx)^2}\right] = \frac{d}{dt}\, a^t . \frac{du^2}{du}\ \frac{d\, sinx}{dx}$

या $$\frac{dy}{dx} = a^{t} \cdot \ \log a\ .\ 2u\ :\ \cos x$$

$= \ a^{[\sin x]^2}\ .\ \log a\ .2 \sin x\ .\ \ \cos x$

[t तथा u का मान प्रतिस्थापित करने पर]

$$= \ a^{[\sin x]^2}\ .\ \log a\ .\ \ \sin 2\, x$$

3.8 उच्चतर कोटि के अवकलज

यदि किसी फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष एक बार अवकलन करते है तो इस प्रक्रिया को प्रथम कोटि का अवकलन तथा उससे प्राप्त अवकलज को प्रथम कोटि का अवकलज या प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ कहते है। यदि प्रथम कोटि के अवकलज को पुनः अवकलित किया जाये तो द्विती कोटि का अवकलज $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार अवकलन प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते जाने पर उच्चतरकोटि के अवकलज $\left(\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots..\right)$ प्राप्त होते जाते है।

उदाहरण :–

$a_o \ + a_, x + \ a_2 x^2 \ + \ a_3 \ x^3 \ + \ a_4 \ x^4$ का

प्रथम अवकलज :– $\frac{dy}{dx} = a_, + \ 2a_2 \ x + \ 3a_3 \ x^2 \ + \ 4a_4 \ x^3$

द्वितीय अवकलज :– $\frac{d^2y}{dx^2} = \ 2a_2 \ + \ 2a_3 \ x + 12a_4 \ x^2$

तृतीय कोटि का अवकलज :– $\frac{d^3y}{dx^3} = \ 6a_3 + \ 24a_4x$

चतुर्थ कोटि का अवकलज :– $\frac{d^4y}{dx^4} = \ 24a_4$

पंचम कोटि का अवकलज :– $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$

दिये हुये फलन के लिये इससे उच्च काटि के अवकलज प्राप्त करना सम्भव नहीं है।

प्रत्येक अवकलज अपने से पूर्व कोटि के अवकलज फलन में परिवर्तन की दर को बताता है। हम जानते है कि प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ फलन में परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल अथवा फलन के सीमान्त मान को बताता है। अतः द्वितीय कोटि का अवकलज फलन में परिवर्तन की दर में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन के सीमान्त मान में होने वाले परिवर्तन की दर को बताता है। उच्चतर कोटि के अवकलजों का आशय इसी प्रकार समझा जा सकता है।

3.9 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

जब किसी फलन $y = f\ (x)$ के लिये स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान आरम्भ में बढें किन्तु एक स्तर पर पहुँचने के बाद घटना आरम्भ हो जाये तो उस स्तर पर y का मान अपने ठीक पहले व ठीक बाद के मानों की तुलना में सर्वोच्च होता है। इसी प्रकार यदि स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान एक स्तर तक घटने के बाद बढने लगे तो उस स्तर पर फलन का मान ठीक पहले व ठीक बाद की तुलना में निम्नतम् होता हैं। किन्तु एक फलन में ऐसे सर्वोच्च तथा निम्नतम मान वाले अनेक बिन्दु प्राप्त हो सकते है। अतः इन बिन्दुओं को सामूहिक रूप से उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहा जाता है। किसी फलन का मान बढने के बाद घटने लगे तो यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा धनात्मक परिवर्तन घटते घटते ऋणात्मक हो जाये इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन के मान में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही स्थिति उच्चिष्ठ की होगी।

इसी प्रकार जब फलन का मान घटने के बाद बढनें लगे तब यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा ऋणात्मक परिवर्तन बढते–बढते (अर्थात परिवर्तन का परिमाण कम हो रहा हो) धनात्मक हो जाये। इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही निम्निष्ठ की स्थिति होगी।

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ दोनो ही स्थितियों में फलन में परिवर्तन की दर $\frac{dy}{dx} = 0$ – आवश्यक शर्त।

उच्चिष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर धनात्मक से लगातार घटकर ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार ऋणात्मक प्राप्त होता है अतः उच्चिष्ठ की स्थिति में $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ – पर्याप्त शर्त।

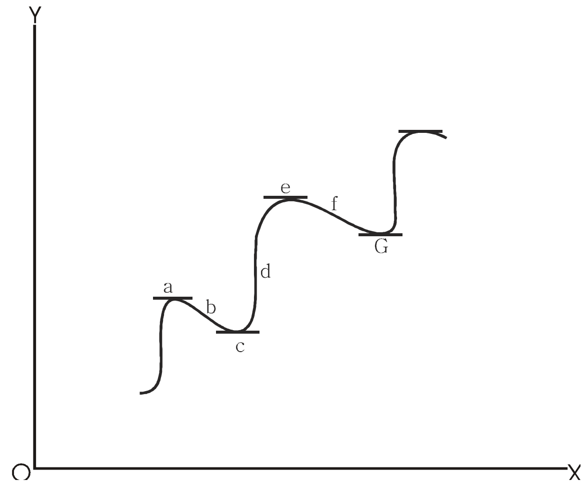
इसी प्रकार निम्निष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर ऋणात्मक से बढते–बढते धनात्मक हो जाती है अर्थात फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार धनात्मक प्राप्त होती है। अतः निम्निष्ठ की स्थिति में –

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ – पर्याप्त शर्त

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त :–

	आवश्यक शर्त	पर्याप्त शर्त
उच्चिष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
निम्निष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ को उभयनिष्ठ रूप से चरममान या अति मान भी कहते है।



चित्र 3.2 में बिन्दु a तथा e उच्चिष्ठ एवं c तथा g निम्निष्ठ बिन्दु है जिन पर स्पर्ष रेखा $x-$ अक्ष के समानान्तर है अर्थात जिनकी ढाल शून्य $(\frac{dy}{dx} = 0)$ है।

उदाहरण :— फलन में $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$ में चरम मान ज्ञात कीजिए एवं उनकी पहचान कीजिए।

हल – दिया है $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$

चरम मान ज्ञात करने हेतु दिये हुये फलन को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20$

चरममान की आवश्यक शर्तानुसार $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 10x - 2x + 20 = 0$$

$$=> \quad x(x-10) - 2(x-10) = 0$$

$$=> \ (x-2)\,(x-10)=0$$

$=>$ या $x-2 \ = 0$ या $x-10 \ = 0$

$=>$ या $x=2$ $=>$ या $x=10$

अब चरममान हेतु पर्याप्त शर्त के लिये $\frac{dy}{dx}$ को x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x-12$$

अब $x=2$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(2)-12 = 4-12 = -8 \ < 0$$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x=2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है।

पुनः $x=10$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(10)-12 = 20-12 = 8 \ > 0$$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x=10$ पर फलन का मान निम्निष्ठ है

3.10 नति परिवर्तन बिन्दु

नति परिवर्तन बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर फलन की नति या वक्रीयता परिवर्तित हो रही हो। अर्थात ऐसा बिन्दु जिस पर फलन की $x-$अक्ष के प्रति उत्तलता अवतलता में परिवर्तित हो रही हो अथवा फलन की अब $x-$अक्ष के प्रति अवतलता उत्तलता में परिवर्तित हो रही हो।

पिछले अनुभाग में हमने देखा है कि जब 'फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब ऋणात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} \ < 0$) तो फलन $x-$अक्ष के प्रति अवतल होता है। इसके विपरीत जब 'फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब धनात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} \ > 0$) तो फलन $x-$अक्ष के प्रति उत्तल होता है।

अतः स्पष्ट है कि फलन की नति परिवर्तित होने के लिये यह आवश्यक है कि $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य हो ($\frac{d^2y}{dx^2}$ को धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक होने के लिये शून्य से होकर गुजरना पडेग) उसे नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त कहते है अर्थात जिस बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ वह नति परिवर्तन बिन्दु हो सकता है क्योंकि नति के परिवर्तित होने के लिए यह आवश्यक है कि अग्ले ही बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य न हो ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ हो जाये या $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ हो जाये) अर्थात नति परिवर्तन बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ में परिवर्तन की दर $(\frac{d^3y}{dx^3})$ शून्य नही होगी; यह धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकती है।

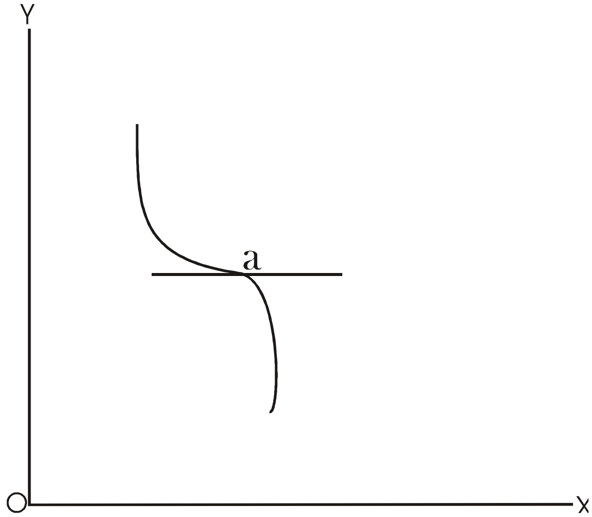
अतः नति परिवर्तन बिन्दु की पर्याप्त शर्त $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ होगी।

नति परिवर्तन बिन्दु के लिये –

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,;$ आवश्यक शर्त
2. $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0\,;$ पर्याप्त शर्त

चित्र 3.2 में बिन्दु $b\,, d,$ तथा f नति परिवर्तन बिन्दु है। नति परिवर्तन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखायें स्पर्श को काटती है।

यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य नही होता है। तो वह बिन्दु अस्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र 3.2 के बिन्दु $b\,, d, f$ किन्तु यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य हो तो वह बिन्दु स्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र 3.3। इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष के सामानान्तर होती है।



नति परिवर्तन बिन्दु

अस्थिर : $\frac{dy}{dx} \neq 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

स्थिर : $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

उदाहरणः–

फलन $y = f(x): y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 40x + 120$ के लिए नति परिवर्तन बिन्दुओं को प्राप्त कीजिए।

y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 40$

$\frac{dy}{dx}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x - 36$$

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त के अनुसार $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$=> \quad 12x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$=> \quad x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$=> \quad x(x-3) + 1(x-3) = 0$$

$$=> \quad (x-3) \quad (x+1) = 0$$

=> या $x - 3 = 0$ या $x + 1 = 0$

=> $x = 3$ => $x = -1$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x - 24$$

$x = -1$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(-1) - 24 = -48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x = -1$ एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

पुनः $x = 3$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(3) - 24 = 48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार $x = 3$ की एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

अतः दिये गये फलन में दो बिन्दुओं, $x = -1$ तथा $x = 3$ पर नति परिवर्तन हो रहा है अतः उक्त फलन में दो नति परिवर्तन बिन्दु प्राप्त हुए है।

3.11 आर्थिक अनुप्रयोग

3.11.1 प्रथम अवकलज के आर्थिक अनुप्रयोग :–

सीमान्त मान :– विभिन्न आर्थिक फलनों जैसे आय फलन, लागत फलन, उपयोग फलन, उत्पादन फलन आदि का प्रथम अवकलज उनके सीमान्त मानों को बताता है। जिसे विभिन्न उदाहरणों द्वारा नीचे स्पष्ट किया गया है।

उदाहरणः– किसी फर्म का लागत फलन $c = \frac{1}{3} q^3 - 2.5\, q^2 + 6q + 25$ दिया हो तो 5 वीं इकाई की उत्पादन की लागत ज्ञात कीजिए। जहाँ c कुल लागत तथा q उत्पादन स्तर है।

हल– दिया $c = \frac{1}{3} q^3 - 2.5q^2 + 6q + 25$

5 वीं इकाई की उत्पादन लागत वस्तुतः उत्पादन स्तर 5 वीं इकाई पर फर्म की सीमान्त लागत होगी अतः सीमान्त लागत $M\,C$ के लिये लागत फलन c को q के सापेक्ष अवकलित करने पर –

$$M\,C = \frac{dc}{dq} = q^2 - 5q + 6$$

$q = 5$ रखने पर $M\,C = (5)^2 - 5(5) + 6 = 6$

अतः 5 वीं इकाई की उत्पादन लागत $= 6$ होगी।

उदाहरणः– एक उत्पादक के लिये माँग फलन $P = 7 - 0.5x$ है तो उत्पादक को तीसरी इकाई के विक्रय से कितनी आय प्राप्त होगी।

हल– तीसरी इकाई से प्राप्त आय तीसरी इकाई के विक्रय से सीमान्त आय होगी। कुल आय $R =$ विक्रय मात्रा $(x) \times$ मूल्य (p)

अब कुल आय $R = x.p$

$= x \times (7 - 0.5x)$

$= 7x - 0.5\ x^2$

सीमान्त आय $M\,R = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (7x - 0.5\ x^2) = 7 - x$

$x = 3$ रखने पर $M\,R = 7 - 3 = 4$

अतः तीसरीं इकाई से प्राप्त सीमान्त आय $= 4$ है।

उदाहरणः–3 माँग फलन $x = 15 - p - 0.2\ \ p^2$ के बिन्दु $p = 5$ पर माँग की लोच ज्ञात कीजिये।

हल– दिया है $p = 5$ इस मूल्य पर मात्रा

$x = 15 - 5 - 0.2\ \ (5)^2$

$$= 15 - 5 - 5 = 5$$

अब माँग की लोच

$e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{p}{x}$ निकालने के लिये

x को p के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dx}{dp} = 0 - 1 - 0.4p$$

$p = 5$ रखने पर $\frac{dx}{dp} = -1 - 0.4\,(5) = -1 - 2 = -3$

अतः $e = -\{-3 \times \frac{5}{5}\} = 3$

उदाहरणः–4 औसत आय सीमान्त आय तथा माँग की लोच के बीच सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

हल– $R = p.\ x$ जहाँ R कुल आय, $p.$ कुल मूल्य स्तर तथा x माँग स्तर है।

सीमान्त आय $\quad MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (p.x)$

$$= p.\ \frac{dx}{dx} + x.\ \frac{dp}{dx}$$

{चूँकि p x का एक फलन है।}

$$= p + x\ \frac{dp}{dx}$$

$$= p\ \{1 + \frac{x}{p} . \frac{dp}{dx}\}$$

$$= p\ \{1 - \frac{1}{e}\}$$

{ चूँकि $e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{x}{p}$ }

या $\quad MR = AR\ \{1 - \frac{1}{e}\}$ $\quad$ चूँकि $p = AR$

3.11. 2 द्वितीय एवं उच्चतर कोटि के अवकलनों के आर्थिक अनुप्रयोग– उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के आथिक अनुप्रयोगः–

उदाहरण–5 एक उत्पादक के लिए माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$ दिया है; अधिकतम आय प्राप्त करने के लिये उत्पादक कितनी इकाइयों का विक्रय करेग।

हल– दिया है माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$

अब कुल आय $(R) = p.q$

$= (120 - 0.5p - 0.3p^2)\ x\ p$

$= 120p - 0.5p^2 - 0.3p^3$

आय के अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त $\frac{dR}{dp} = 0$

$=> \frac{d}{dp} \ (120p - 0.5p^2 - 0.3p^3) = 0$

या $120 - p - 0.9p^2 = 0$

या $-0.9p^2 - p + 120 = 0$

या $p = \frac{+1 \pm \sqrt{.1 - 4(120 \times -0.9)}}{2 \times -0.9}$

$= \frac{+1 \pm \sqrt{1+432}}{-1.8}$

$= \frac{+1 \pm 20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{+1+20.8}{-1.8}$ या $p = \frac{1-20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{21.8}{1.8}$ जो स्वीकार्य नही है क्योंकि मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः $p = \frac{19.8}{1.8} = 11$

$\frac{dR}{dp}$ का पुनः p के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8p$$

$p = 11$ रखने पर

$$\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8(11) = -1 - 19.8$$

$= -20.8 < 0$ जो कि R के अधिकतम होने की पर्याप्त शर्त है।

अतः हम कहेगें कि $p = 11$ पर आय अधिकतम है।

उदाहरण6ः– दर्शाइये कि सीमान्त लागत वक्र औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु पर उसको नीचे से काटता है।

हल– माना लागत फलन $c = f(Q)$है।

औसत लागत फलन $(AC) = \frac{C}{Q}$

औसत लागत फलन के न्यूनतम बिन्दु होने के लिये आवश्यक शर्त $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$

$$=> \frac{d}{dQ} \left(\frac{C}{Q}\right) = 0$$

$$=> \frac{Q.\frac{dc}{dQ} - c.\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = 0$$

$$=> Q.\frac{dc}{dQ} - c = 0 \; (\because Q \neq> 0)$$

$$=> \frac{dc}{dQ} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Q}} \quad => \quad MC = AC$$

अर्थात AC के न्यूनतम बिन्दु पर MC वक्र AC वक्र को काटता है।

औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q.MC - C}{Q^2}\right) > 0$$

$$=> \frac{Q^2.\{\frac{d}{dQ}\; Q.MC - \frac{dc}{dQ}\} - \{(QMC - C) \times \frac{d\; Q^2}{dQ}\}}{Q^4} > 0$$

$$=> Q^2[\{Q.\frac{d}{dQ}MC + MC.\frac{dQ}{dQ}\} - MC] - \{(QMC - C)2Q\} > 0$$

$$\because Q > 0$$

$$=> Q^3.\frac{d}{dQ}\ MC + MCQ^2 - MCQ^2 - 2MCQ^2 + 2QC\ > 0$$

$$=>\ Q^3\ \frac{d}{dQ}\ MC - 2Q^2\ \left(MC - \frac{2QC}{Q^2}\right) \lessgtr 0$$

$$[\because MC = AC\ and\ Q > 0]$$

$$=>\ \frac{d}{dQ}\ MC > 0$$

अर्थात जब MC वक्र MR वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है तो उस समय MC वक्र का ढाल धनात्मक होता है अर्थात MC वक्र बायें से दायें ऊपर की ओर उठ रहा होता है; अतः यह सिद्ध हुआ की MC वक्र AC वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है।

उदाहरण 7:– फर्म के सन्तुलन की शर्त समझाइये।

हल – फर्म का उद्‌देश्य लाभ अधिकतम करना होता है।

फर्म का लाभ = आगम – कुल लागत

या $\pi = R - C$ जहाँ $\pi, R, C,$ सभी उत्पादक स्तर (Q) के फलन है। फर्म के लाभ अधिकतम करने की आवश्यक शर्त $\frac{d\pi}{dQ} = 0$

$$=>\ \frac{d}{dQ}\ (R - C) = 0$$

$$=> \frac{dR}{dQ}\ - \frac{d}{Q}\ C = 0$$

$$=>\ \frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ}$$

या $MR = MC$

फर्म का लाभ अधिकतम करने की पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\left(\frac{d}{dQ}R - \frac{d}{dQ}\ C\right) \ < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ (MR - MC) \ \ < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ MR - \frac{d}{dQ}\ MC \quad < 0$$

$$=> \quad \frac{d}{dQ}\ MR \ < \frac{d}{dQ}\ MC$$

अर्थात जब लाभ अधिकतम होता है तो सीमान्त आगम (MR) तथा सीमान्त लागत(MC) बराबर होते है तथा सीमान्त आगम को सीमान्त लागत वक्र नीचे से काटता है।

इसी प्रकार उपभोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त उपभोग प्रवृत्ति (MPC), बचत फलन का अवकलन करने पर सीमान्त बचत प्रवृत्ति (MPS), विनियोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त विनियोग प्रवृत्ति (MPI) आदि प्राप्त होते है।

3.11.3 उत्पादक / फर्म पर करारोपण :

फर्म पर कई प्रकार से करारोपण किया जा सकता है। इस भाग में हम उदाहरणों की सहायता से करारोपण की विभिन्न विधियों को उत्पादन, मूल्य, लाभ आदि पर पडने वाले प्रभावों का अध्ययन करेगें।

(1) जब फर्म पर एकमुश्तकर लगा दिया जाए (अनुज्ञाशुल्क / लेवी)

यदि फर्म का माँग फलन $P = 21 - 0.6x$ तथा लागत फलन $C = x^2 + 5x + 5$ हो और सरकार फर्म पर एक मुश्त कर 10रू0 लगा दे तो संतुलन मूल्य, उत्पादन स्तर का फर्म के ऊपर क्या प्रभाव पडेगा।

करारोपण से पूर्व

फर्म का लाभ $\pi = R - C$

$$= (21 - 0.6x)x - (x^2 + 5x + 5)$$

या $\pi = -1.6x^2 + 16x - 5$

लाभ अधिकतम की आवश्यक शर्त

$\frac{d\pi}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या $x = 5$

पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = (-3.2x + 16) = -3.2 < 0$$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times 5 = 18;$ तथा

लाभ $\pi = 1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 5$

$$= -40 + 80 - 5 = 35$$

करारोपण के बाद लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + 10$

तथा $\pi = -1.6x^2 + 16x + 15$

$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या

$x = 5,\ P = 21 - 0.6 \times 5 = 18$

तथा लाभ $\pi = -1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 15 = 25$

अतः एकमुश्त कर लगने पर उत्पादन स्तर तथा बाजार मूल्य अपरिवर्तित रहता है किन्तु लाभ कर की मात्रा से कम हो जाता है अर्थात इस स्थिति में उत्पादक को पूरा कर स्वयं वहन करना पडता है।

(2) प्रति इकाई कर– माना प्रति इकाई रू01 कर लग दिया जाये तो लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + x \times 1 = x^2 + 6x + 5$

करोपरान्त लाभ फलन $\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - 6x - 5$

या $\pi_t = -1.6x^2 + 15x - 5$

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 15 = 0$$

या $x = \frac{150}{32} = 4.6875,$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times \frac{150}{32} = \frac{291}{16} = 18.19,$

लाभ $\pi = -1.6 \times (\frac{75}{16})^2 + 15 \times \left(\frac{75}{16}\right) - 5 = 30.1562$

अर्थात उत्पादन घटेग, मूल्य बढेगा तथा लाभ घटेगा।

ध्यान दें फर्म कर का पूरा भार उपभोक्ता पर डालने में सफल नही होती है कर का कितना भार उपभोक्ता पर डाला जा सकता है या माँग की लोच पर निर्भर करता है।

करारोपण से प्राप्त कर आय को अधिकतम करने वाली 'प्रति इकाई कर दर':–

माना कर अधिकतम करने वाली प्रति इकाई कर दर $= t/$इकाई

$$c_t = x^2 + 5x + 5 + tx$$

$$\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - (5 + t)x - 5$$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 - t =$$

$$=> \ x = \frac{16 - t}{3.2}$$

कर आय

$$T = t.x = \frac{16t - t^2}{3.2}$$

कर आय अधिकतम की आवश्यक शर्त

$$\frac{dT}{dt} = 0 => \frac{1}{3.2} \quad \frac{d}{dt} \ [16t - t^2] = \frac{16 - 2t}{3.2} = 0$$

$$=> t = \frac{16}{2} = 8$$

3.11.4 नति परिवर्तन बिन्दु :

उदाहरण 8:– एक उत्पादक केवल एक ही आगत का प्रयोग करता है और उसका उत्पादन फलन $Q = -8 + 5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ है; जहाँ xआगत की इकाई तथा

Q उत्पादन स्तर है। आग्त का वह इकाई स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर उत्पादन का प्रथम चरण अर्थात उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा है।

हल– उत्पत्ति वृद्धि का नियम लागू होने पर सीमान्त उत्पत्ति बढती है जिसके कारण उत्पादन फलन x अक्ष के प्रति उत्तल होता है। उत्पत्ति नियम समाप्त होने पर उत्पादन फलन अपनी नति परिवर्तित करके x के प्रति अवतल हो जाता है। अतः उत्पत्ति वृद्धि का नियम नति परिवर्तन बिन्दु तक लागू रहता है। अतः दिये ग्ये उत्पादन फलन का नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात करेगें।

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त –

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

पहले Q का एक बार x के सापेक्ष अवकलन $\frac{dQ}{dx}$ ज्ञात करेगें।

$$\frac{dQ}{dx} = 5 + 4x - x^2$$

$\frac{dQ}{dx}$ का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dQ}{dx}\right\} = 4 - 2x$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad => \quad 4 - 2x = 0$$

$$=> x = 2$$

नति परिवर्तन बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त के लिये

$$\frac{d^3Q}{dx^3} \neq 0$$

अब

$$\frac{d^3Q}{dx^3} = 2 \neq 0$$

अतः आग्त इकाई स्तर $x = 2$ पर उत्पादन का प्रथम चरण– उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा हैं।

3.12 शब्दावली

प्रथम अवकलज– जब किसी दिये हुये फलन को सिर्फ एक बार अवकलित किया जाये तो प्राप्त परिणाम।

सीमान्त– किसी चर की एक अकेली इकाई के द्वारा सकल परिणाम में लाया जाने वाला अन्तर।

चरममान– फलन के ऐसे बिन्दु जो अपने आस–पास के समीपवर्ती बिन्दुओं से उच्चतम तथा निम्नतम हो; इन्हें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहते है। एक ही फलन में एक से अधिक चरममान हो सकते है।

पूर्ण प्रतियोगिता– बाजार की वह दशा जिसमें एक ही वस्तु के असंख्य क्रेता एवं विक्रेता हों जिनका व्यक्तिगत रूप से बाजार की माँग पर कोई प्रभाव न पडता हो तथा जिनका बाजार में प्रवेश या निष्कासन निर्बाध हो।

3.13 सांराश– इस अध्याय के अध्ययन के पश्चात् आप अवकलन एवं इससे जुडे तमाम नियमों यथा दो फलनों के योगा, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन के नियम, श्रंखला नियम इत्यादि तथा उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ नति परिवर्तन बिन्दु आदि की अवधारणाओं से सुपरिचित हो गये है। अवकलन की समझ आपको विभिन्न आंशिक अवधारणाओं जैसे– सीमान्त मान (सीमान्त उपयोग्िता, सीमान्त उत्पादकता, सीमान्त लागत, सीमान्त आय आदि), माँग की लोच, पूर्ति की लोच आदि को समझने में सहायक होगी। फर्म के सन्तुलन का विश्लेषण उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की सहायता से किया जाता है।

3.14 अभ्यास प्रश्न

(1) रिक्त स्थान को भरिये।

(क) प्रथम अवकलज फलन के .... को व्यक्त करता है। (उभार/ढाल)

(ख) अवकलज फलन के .... मान को दर्शाता है। (सीमान्त/औसत)

(ग) अवकलज फलन में .... को दर्शाता है। (परिवर्तन की मात्रा/परिवर्तन की दर)

(घ) बार–बार अवकलन करने से अवकलज की .... बढती है। (कोटि/घात)

(ङ) उच्चिष्ठ बिन्दु फलन के .... बिन्दुओं में सर्वोच्च होता है। (सभी/आस– पास के)

(च) नति परिवर्तन बिन्दु पर स्पर्श रेखा फलन को .... हैं।

(स्पर्श करती है/दो भागें में बाटती है)

(2) निम्न कथनों में सत्य एवं असत्य को चिह्नित कीजिये।

(क) किसी एक घातीय फलन का प्रथम कोटि का अवकलज एक अचर राशि होती है। (सत्य/असत्य)

(ख) फलन के केवल सतत् भाग पर अवकलन सम्भव हैं। (सत्य/असत्य)

(ग) नति परिवर्तन बिन्दु पर फलन की ढाल स्थिर रहती है। (सत्य/असत्य)

(घ) चरम बिन्दुओं पर फलन की स्पर्श रेखा की ढाल शून्य होती है।(सत्य/असत्य)

(ङ) किसी दिये हुये फलन में एक से अधिक चरम मान प्राप्त हो सकते है। (सत्य/असत्य)

(च) दो फलनों के योगफल का अवकलज इन फलनों के अलग–2 अवकलजों के गुणनफल के बराबर होता है। (सत्य/असत्य)

3.15 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

(1) (क) ढाल, (ख) सीमान्त (ग) परिवर्तन की दर (घ) कोटि (ङ) आस पास के

(च) दो भागें में बॅाटती।

(2) (क) सत्य (ख) सत्य (ग) असत्य (घ) सत्य (ङ) सत्य

(च) असत्य।

3.16 सहायक ग्रन्थ

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।

2. *Agarwal, D. R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.*

3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवालपब्लिकेशन्स।

5. *Mehta, B. C. and Madnani G. M. K; Mathematics for EconomistsKitab Mahal Publication.*

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकी; शिव पब्लिकेशन्स।

3.17 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

3. *Monga, G.S.*; *Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R.G.D.*: *Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang*; *Alpha .Co.*: *Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

3.18 निबन्धात्मक प्रश्न

(1) निम्न फलनों के प्रथम कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिये।

(क) x^7 (ख) $x^{-7/2}$ (ग) $\frac{1}{x^{-\frac{5}{2}}}$ (घ) $4x^2 + \frac{2}{x}$ (ङ) $\frac{1}{x}(2x + 5x)^{3/2}$

(च) $(x^2 + 1)(x + 3x^2)$ (छ) $\frac{\sqrt{X}}{X-1}$

(2) निम्न फलनों के लिये x के वे मान ज्ञात करें जिन पर फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान प्राप्त होगे। फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान भी ज्ञात करें।

(क) $y = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x + 6$

(ख) $y = \sqrt{x(x^2 - 1)}$

(ग) $y = 4x - \frac{1}{x}$

(3) दिये हुये फलन की वक्रीयता की जाँच कीजिए एवं नति परिवर्तन बिन्दु भी ज्ञात करें। (यदि हो तो)

(क) $y = x^3 2x^2 + 30$ (ख) $y = -\frac{x^2}{5} + 24x$

(ग) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x^2} + 24x - 12$

(4) किसी एकाधिकारी फर्म का माँग फलन $P = 20 - 0.5q$ तथा लागत फलन $c = 0.4q^3 - 1094q^2 + 32.95q$ है तो फर्म का लाभ अधिकतम करने वाला मूल्य तथा उत्पादन स्तर एवं अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

इकाई 4: लघुगुणकीय एवं आंशिक अवकलन

इकाई संरचना

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने एक चरीय फलनों के अवकलन का अध्ययन किया है। इस इकाई में हम उसी क्रम को आगे बढ़ाते हुए एक चरीय लघुगुणकीय फलनों के अवकलन की प्रक्रिया व नियमों का अध्ययन करेगें। इसके साथ ही बहुचरीय फलनों के आंशिक व पूर्ण अवकलन, इन फलनों के निरपेक्ष अधिकतम/न्यूनतम, प्रतिबंधित अधिकतम/न्यूनतम तथा एक चर के सापेक्ष फलन अधिकतम तथा दूसरे चर के सापेक्ष न्यूनतम होने जैसी विशिष्ट स्थिति आदि का अध्ययन करेगें।

आंशिक अवकलन की सहायता से एक बहुचरीय फलन पर एक विशिष्ट स्वतंत्र चर (कारक) के पड़ने वाले प्रभावों की गणना की जाती है। अनेक स्वतंत्र चरों में से किसी एक चर का प्रभाव देखने के लिए अन्य सभी स्वतंत्र चरों को स्थिर रखा जाता है। जब सभी स्वतंत्र चर परिवर्तनशील होते हैं तो पूर्ण अवकलन की गणना होती है जो सभी स्वतंत्र चरों के परिवर्तित होने की स्थिति में फलन पर पड़ने वाले कुल प्रभावों को स्पष्ट करता है।

एक बहुचरीय फलन को प्रभावित करने वाले चरों की सीमा का निर्धारण यदि किसी बाह्य कारक द्वारा अथवा बाह्य रूप से हो रहा हो तो प्रतिबंधित अधिकतम/न्यूनतम की सहायता से फलन का सर्वोत्कृष्ट मान ज्ञात किया जा सकता है। प्रस्तुत इकाई में उक्त गणितीय विधियों का अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग करके उपभोक्ता व्यवहार, उत्पादन के सिद्धान्त, फर्म के सिद्धान्त आदि की गणितीय आख्या तथा पुष्टि का भी अध्ययन किया जायेगा।

4.2 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य विद्यार्थियों को लघुगुणकीय फलनों के अवकलन की प्रक्रिया तथा नियमों से परिचित तथा बहुचरीय फलनों के आंशिक अवकलन तथा पूर्ण अवकलन की अवधारणा, प्रक्रिया तथा नियमों से परिचित कराना है ताकि विद्यार्थियों में अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों को वैज्ञानिक विधि से समझने की क्षमता विकसित हो सके। साथ ही विद्यार्थियों में अर्थशास्त्र के अन्तर्गत आने वाली ऐसी समस्याओं का समाधान ढूढ़नें की क्षमता भी विकसित हो; जिन समस्याओं का समाधान उक्त गणितीय विधियों से प्राप्त करना सम्भव है। जो विद्यार्थी गणितीय विधियों में पारंगत हो जाते हैं, अर्थशास्त्र का अध्ययन उनके लिये अत्यन्त सरल बन जाता है।

4.3 लधुगुणकीय फलनों का अवकलन

यदि $y = f(x)$: $y = \ logx$ तो y का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{log_e(x+h) - log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e x\left(1+\frac{h}{x}\right) - log_e x}{h}$$

(चूंकि $\log m.n = \ logm + \ logn$)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e x + log_e\ \left(1+\frac{h}{x}\right) - log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{log_e\ \left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad \frac{\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ \ldots..\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad \frac{h\ \{\frac{1}{x} - \cancel{\frac{h}{2x^2}} + \frac{h^2}{3x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots..\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad \{\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{2x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ \ldots..\}$$

$$= \frac{1}{x}$$

अतः $\quad \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\ log_e x = \frac{1}{x}$

4.3.1 चर घातांकी फलनों का अवकलनः

यदि $y = f(x)$: $y = e^x$ तो $\frac{dy}{dx} = e^x$ होगा

चर घातांकी फलन के अवकलन का यह नियम लधुगुणकीय फलन के अवकलन के नियम से भी निर्गमित किया जा सकता है। $y = e^x$ का प्रतिलोम फलन $x = \log y$ होता है।

अतः प्रतिलोम फलन के नियम से $\frac{d}{dx}e^x \ = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$.

इसे प्रथम सिद्धान्त द्वारा निम्नवत् प्राप्त किया जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots-1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x h\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right)}{h}$$

$$= e^x$$

4.3.2 श्रृंखला नियम का उपयोगः किसी भी चर घांताकी फलन का अवकलन श्रृंखला नियम का प्रयोग करके सरलता से किया जा सकता है। यदि

$y = f(x): y = e^z$ जहाँ $z = g(x)$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}e^z . \frac{dz}{dx} = e^z . \frac{dz}{dx}$

उदाहरण– यदि $y = e^{x^3}$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d \quad e^{x^3}}{d(x^3)} \; . \; \frac{d \quad x^3}{dx}$

$$= e^{x^3} \; . \; 3x^2 = 3x^2 . e^x$$

इसी प्रकार किसी भी लघुगुणकीय फलन का अवकलन श्रृंखला नियम की सहायता से सरलता से किया जा सकता है।

यदि

$y = f(x): y = log_e z$ जहाँ $z = g(x)$

तो $$\frac{dy}{dx} = \frac{log_e z}{dz} . \frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{1}{z}\ .\frac{dz}{dx}$$

उदाहरणः यदि $y=\log(x^2+3x)$ इसका अवकलन करने के लिये मान लिया $z=x^2+3x$ तो

$$\frac{dz}{dx}=2x+3$$

तथा $y=\log z$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z}$$

अब $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dz}.\log z.\frac{dz}{dx}$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x^2+3x)}\times(2x+3)$ [z एवं $\frac{dz}{dx}$ का मान रखने पर]

यदि आधार कोई अचर a हो :–

$y=f(x): y=a^x$ तो लघुगुणक संक्रिया तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता है–

$$\log y=x$$

$$\frac{dy}{dx}=a^x\ log_e a$$

इसी प्रकार लघुगुणकीय फलनों के सन्दर्भ में यदि–

$y=f(x): y=log_a\ x$ तो

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ log_e a}$$

उदाहरणः– यदि $y=7^{4-x}$ तो

$$\frac{dy}{dx}=-(7)^{4-x}.\log 7$$

उदाहरण यदि $y=log4^x$ तो $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ log_e 4}$

4.4 आंशिक अवकलन

अभी तक हम लोगें ने एक चरीय फलन अर्थात ऐसे फलनों का अध्ययन किया है जो केवल एक स्वतन्त्र चर पर निर्भर करते हैं, फलतः एक ही स्वतन्त्र चर में परिवर्तनों के द्वारा फलन में होने वाले परिवर्तनों की व्याख्या कर पाना सम्भव था। इसीलिये अभी तक हमने अवकलन के जिन नियमों का अध्ययन किया वे एक ही स्वतन्त्र चर वाले फलनों के लिये उपयोगी हैं किन्तु अनेक फलन ऐसे होते हैं जो एक से अधिक स्वतन्त्र चरों पर निर्भर करते हैं; जिन्हें बहुचरीय फलन कहते हैं। जिनके विषय में हम इकाई–2 में अध्ययन कर चुके हैं। ऐसे फलनों में होने वाले परिवर्तन किसी एक या अनेक स्वतन्त्र चरों में होने वाले परिवर्तन के परिणाम होते हैं। किसी एक विशिष्ट स्वतन्त्र चर पर फलन की आश्रितता का आकलन करने के लिये यह आवश्यक होग कि अन्य स्वतन्त्र चरों में उस समय कोई परिवर्तन न हो, अर्थात वे स्थिर रहें, आश्रितता के इस सम्बन्ध का आकलन आंशिक अवकलन के द्वारा किया जाता है क्योंकि अवकलन की यह प्रक्रिया फलन में होने वाले परिवर्तन की आंशिक व्याख्या करती है।

4.4.1 आंशिक अवकलजः– माना कोई फलन $y = f(x_1 x_2 \dots \dots x_4)$ जहाँ $x_i(i = 1,2, \dots . n)$ परस्पर एक दूसरी से स्वतन्त्र चर हैं, अतः यदि केवल स्वतन्त्र चर x_1 में Δx_1 परिवर्तन होता है तो अन्य स्वतन्त्र चरों $x_{2\_\_\_} x_n$ पर इसका प्रभाव नही पडेग और वे स्थिर रहेगें। तथा इस कारण फलन y में होने वाला परिवर्तन Δy x_1 में हुये परिवर्तन Δx_1 का परिणाम होगा। इन अन्तरों के भाजफल को हम निम्न प्रकार लिख सकते है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(\,x_1 + \Delta x_1, x_2 \dots \dots . . x_n) - f(x_1 x_2 \dots \dots x_n)}{\Delta x_1}$$

यदि Δx_1 की शून्योन्मुखी सीमा लो तो हमें x_1 के सापेक्ष yका आंशिक अवकलज प्राप्त होगा।

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3 \dots \dots . . x_n) - f(x_1 x_2 \dots \dots x_n)}{\Delta x_1}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

जो x_1 के सापेक्ष y का आंशिक अवकलज है और यह इंगित करता है कि इस समय शेष सभी स्वतन्त्र चर $x_2 \ldots \ldots x_n$ स्थिर हैं।

इसी प्रकार फलन y का आंशिक अवकलज x_2 या x_3 या $\ldots\ldots x_n$ के सापेक्ष भी निकाला जा सकता है। सामान्य रूप से हम इसे $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ लिखते हैं जहाँ $i = 1,$ या $2,$ या $3,$ या n है। आंशिक अवकलज की प्रक्रिया को हम निम्न उदाहरण से समझ सकते है।

उदाहरणः– $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4): y = x_1^3 x_4 + 2x_2 \quad x_3 + \quad x_1^2\, x_2 x_3 x_4$ का x_1, x_2, x_3, x_4 के सापेक्ष आंशिक अवकलन कीजिए।

हलः– आंशिक अवकलज ज्ञात करते समय जिस स्वतन्त्र चर के सापेक्ष अवकलन करना है उसे छोड़कर शेष सभी स्वतन्त्र चर को स्थिरांक मान कर व्यवहार करते है; तथा अवकलन की शेष प्रक्रिया एक चरीय अवकलनों के जैसी होती है।

दिये हुये फलन का x_1 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ अन्य स्वतन्त्र चरों x_2, x_3, x_4 को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_4 + 0 + 2\, x_1 . x_2 . x_3 . x_4$$

दिये गये फलन का x_2 के सापेक्ष आंशिक अवकलज–यहाँ x_1, x_3, x_4 को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 + 2x_3 + x_1^2 x_3\, x_4$$

दिये ग्ये फलन का x_3 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ $x_1 x_2\, x_4$ को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 + 2x_2 + x_1^2 x_2\, x_4$$

दिये गये फलन का x_4 के सापेक्ष आंशिक अवकलज– यहाँ $x_1 x_2\, x_3$ को स्थिरांक मान लिया जायेगा।

$$\frac{\partial y}{\partial x_4} = x_1^3 + 0 + x_1^2\, x_2\, x_3$$

4.4.2 उच्च कोटि के आंशिक अवकलजः– दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चरों के किसी भी फलन के लिये द्वितीय या उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज निकाले जा सकते है। उदाहरण के लिये यदि कोई फलन $z = f\big(x_, y\big)$ दो स्वतन्त्र चरों का फलन है तो हम अध्ययन कर चुके है कि इसके प्रथम कोटि के दो आंशिक अवकलज ($\frac{\partial z}{\partial x}$ या $z_{(x)}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ या $z_{(y)}$) प्राप्त होते हैं। यदि इन आंशिक अवकलजों का पुनः आंशिक अवकलन कर दिया जाये तो द्वितीय कोटि के अवकलज प्राप्त होगे, जो निम्नवत् होगे।

(क) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(ख) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

(ग) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

(घ) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

यहाँ यह ध्यान दें कि ख और घ त्रियक आंशिक अवकलज कहे जाते हैं तथा इनमें 'हर' में कम बदलने से परिणाम अपरिवर्तित रहता है। अर्थात

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

दो से अधिक चरों वाले फलनों के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज भी इसी प्रकार प्राप्त किये जा सकते है।

द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों का पुनः आंशिक अवकलज करने पर तृतीय कोटि के आंशिक अवकलज तथा इसी प्रकार उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त किये जा सकते हैं।

उदाहरणः– यदि $z = f(x, y): z = ax^2 + 2hxy + by^2$

तो $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2hy + 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2hx + 2by$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2ax + 2hy) = 2h$$

या $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2h$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2hx + 2by) = 2h$$

या $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2h$

स्पष्ट है कि $\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

4.4.3 द्विचरीय फलनों के उच्चिष्ठ एवं निम्ननिष्ठ :–

द्विचरीय फलनों के उच्चिष्ठ एवं निम्मिष्ठ मानो के लिये आवश्यक शर्ते निम्न तालिका में दी है।

शर्ते	फलन $z = f(x, y)$ के	
	उच्चिष्ठ	निम्मिष्ठ
आवश्यक	$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} 0 = 0$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$

और$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$ और$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$

उदाहरणः– यदि $z = f(x, y): z = x^2 - xy + y^2$ हो तो z के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल– $z_{(x)}=2x-y, \quad z_{(xx)}=2$

$$z_{(y)}=-x+2y, \quad z_{(yy)}=2$$

$$z_{xy} \ = -1$$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिये आवश्यक शर्त–

$$z_x = z_y = 0$$

$2x - y = 0$ तथा $-x - 2y = 0,$ को हल करने पर $x = 0$ तथा $y = 0$

फलतः $z = 0,$ अर्थात मूल बिन्दु।

पर्याप्त शर्त

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} => 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \times 2 = 4$

और $\{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\}^2 = 1$

अतः $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\}^2$ अतः फलन में एक ही बिन्दु निम्निष्ठ है।

4.5 समांग फलन

किसी फलन को r घात का समांग फलन कहा जायेगा यदि फलन के समस्त स्वतन्त्र चरों में j का गुणा करने पर फलन का मान j^r गुना परिवर्तित हो जाये। अर्थात

यदि $f(jx_1, jx_2, \dots \dots jx_n) = j^r f(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$

तो फलन $f(\, x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ r घात का समांग फलन है।

उदाहरणः– फलन $z = f(x, y)$: $z = \frac{ax^2+2hxy+by^2}{(x-y)}$ की समांगता का परीक्षण कीजिए तथा समांगता की कोटि बताइये।

हल– $f(jx, jy) = \frac{a(jx)^2+2h(jx)(jy)+b(jy)^2}{(jx-jy)}$

$$= \frac{j^2 \; (x^2 + 2hxy + by^2)}{j(x-y)}$$

$$= \frac{j \; (x^2 + 2hxy + by^2)}{(x-y)}$$

$$= j \; f\,(x, y)$$

अतः दिया गया फलन समांगा है तथा समांगता की कोटि '1' है।

4.5.1 रैखिक समांग फलनों के गुणः– एक घात के समांगा फलन को रैखिक समांग फलन कहते है। जिसके गुण निम्नवत् है।

(i) रैखिक समांगा फलन $z = f(x, y)$ को $z = x.\, g(\frac{y}{x})$

अथवा $z = y.\, h(\frac{x}{y})$ भी लिख सकते है जहॉ g तथा h एक चरीय फलन है।

चूँकि $f(kx, ky) = \; kf(x, y)$

यदि $k = \frac{1}{x}$ लें तो

$$f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}.\, f(x, y)$$

या $f\left(1, \;\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.\, f(x, y)$

या $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.\, f(x, y)$

या $f(x, y) = x.\, g(\frac{y}{x})$

इसी प्रकार हम दिखा सकते है कि $f(x, y) = y.\, h\left(\frac{x}{y}\right)$

(ii) रैखिक समांग फलन $z = f(x, y)$ के आंशिक अवकलज $\frac{\delta z}{\delta x}$ तथा $\frac{\delta z}{\delta y}$ स्वतन्त्र चरों (x, y) के अनुपात के फलन होते हैं।

$$z = f(x,y) = x.g(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = x.\frac{\delta}{\delta x}\left[g\left(\frac{y}{x}\right)\right] + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

$= -\left(\frac{y}{x}\right)g'\left(\frac{y}{x}\right) + g(\frac{y}{x})$ जो कि $(\frac{y}{x})$ का फलन है।

इसी प्रकार $\frac{\delta z}{\delta y} = g'\left(\frac{y}{x}\right)$ जो y/x का एक फलन है।

(iii) रैखिक समांग फलन के आंशिक अवकलजों में संगत चर से गुणा कर के योगा करने पर वही फलन प्राप्त होता है। अर्थात

$$z = f(x,y) = x\,.\ \frac{\delta z}{\delta x} + y\,.\ \frac{\delta z}{\delta y}$$

जिसे आयलर प्रमेय या मांग प्रमेय भी कहते हैं।

गुण i तथा गुण ii से

$z = x.g(\frac{y}{x})$ तथा $\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{y}{x}\ g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\ (\frac{y}{x})$

एवं $\frac{\delta z}{\delta y} = g'\left(\frac{y}{x}\right)$ तो

$$x\ \frac{\delta z}{\delta x} + y.\frac{\delta z}{\delta y} = x.\left\{-\frac{y}{x}\ g'\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)\right\} + y.g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \ -y\,g'\left(\frac{y}{x}\right) + x.g\left(\frac{y}{x}\right) + yg'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= z$$

4.6 पूर्ण अवकलन

जब किसी बहुचरीय फलन के सभी चर एक ही समय में परिवर्तनशील हों तो समस्त स्वतन्त्र चरों में परिवर्तन के परिणाम स्वरूप फलन में हाने वाले परिवर्तन को पूर्ण अवकलन

द्वारा ज्ञात किया जाता है। यदि कोई फलन $z = f(x,y)$ में x तथा y एक साथ परिवर्तित हो तो z में परिवर्तन–

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}.dx + \frac{\partial z}{\partial y}.dy$$

जो फलन z का पूर्ण अवकलन हैं।

फलनों के योगा, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल से प्राप्त फलनों के फलन का पूर्ण अवकलन ऐसे सन्दर्भो में सामान्य अवकलनों के नियमों के अनुरूप ही किया जाता है।

उदाहरणः– यदि $z = (x^2 + y)(2x - y^2)$ तो

$$dz = (2x - y^2).d(x^2 + y) + (x^2 + y)d(2x - y^2)$$

$$= (2x - y^2)(2xdx + dy) + (x^2 + y)(2.dx - 2ydy)$$

$$=4x^2\,dx - 2xy^2dx + 2xdy - y^2dy + 2x^2dx + 2ydx - 2x^2ydy - 2y^2dy$$

$$= (6x^2 + 2y - 2xy^2)dx + (2x - 3y^2 - 2x^2y)dy\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4.7 बन्धित अतिमान (उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ)

पूर्व में हम फलनों के स्वतन्त्र अतिमानों (उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ) की गणना विधि का अध्ययन कर चुके हैं किन्तु अनेक सन्दर्भो में किसी फलन को एक दी हुई शर्त या बन्धन से बंध कर उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान धारण करने की स्थिति होती है। ऐसे सशर्त या बन्धित उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ को ज्ञात करने की विधि को 'लेग्रैन्ज' ने विकसित किया था। इस विधि को निम्न उदाहरण से समझ सकते हैं।

उदाहरणः– यदि फलन $y = f(x_1\,x_2)$ एवं प्रतिबन्ध $z = g(x_1\,x_2): a_1\,x_1 + a_2\,x_2 = c$ है तो इस प्रतिबन्ध से बन्धित करके फलन के उच्चिष्ठ/ निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये।

हलः दिये हुये फलन के प्रतिबन्धित अधिकतम हेतु लैंगैन्ज फलन

$$v = f\ (x_1\,x_2) + \lambda(c - a_1\,x_1 - a_2\,x_2)$$

प्रतिबन्धित उच्चिष्ठ/ निम्निष्ठ की आवश्यक शर्ते

(i) $\frac{\delta v}{\delta x_1} = 0 => f_1 - \lambda a_1 = 0$ या $\lambda = \frac{f_1}{a_1}$

(ii) $\frac{\delta v}{\delta x_2} = 0 => f_2 - \lambda a_2 = 0$ या $\lambda = \frac{f_2}{a_2}$

(iii) $\frac{\delta v}{\delta \lambda} = 0 => c - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$

पर्याप्त शर्ते

(a) उच्चिष्ठ हेतु सीमांकित हेसियन सारणिक $\overline{H} < 0$

(B) निम्निष्ठ हेतु सीमांकित हेसियन सारणिक $\overline{H} > 0$

जहॉ

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -z_1 & -z_2 \\ -z & v_{11} & v_{12} \\ -z_2 & v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}$$

उपरोक्त उदाहरण में $z_1 = -1$

$z_2 = -2$

$v_{11} = 2, \quad v_{12} = -1, \quad v_{21} = -1, \quad v_{22} = 0$

अतः सारणिक $\overline{H}$

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -(-1) & -(-2) \\ -(-1) & 2 & -1 \\ -(-2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.\{2x0 - (-1)(-1)\} - 10\{1x0 - (-1)(2)\} + 2\{(1)(-1) - (2)(2)\}$$

$$= 0 - 1(2) + 2(-1 - 4)$$

$$= -2 - 10 \qquad = -12 < 0$$

अतः $x_1 = \frac{1}{2}$ तथा $x_2 = \frac{5}{4}$ पर फलन दी गई शर्त से बन्धित होकर उच्चिष्ठ मान देगा।

उदाहरणः– यदि फलन $y = f(x_1 x_2) : y = x_1^2 x_1 x_2$ तथा शर्त $z = g(x_1 x_2) : x_1 + 2x_2 = 3.$ तो इस शर्त या बन्धन से बन्ध कर फलन के अतिमान ज्ञात करें।

हल– लैग्रेन्ज फलन $v =$ दिया हुआ फलन $+\lambda$ (दी हुई शर्त)

यहाँ $v = x_1^2 - x_1 x_2 + \lambda(3 - x_1 - 2x_2)$

अतिमानों के लिये आवश्यक शर्ते

$$\frac{\delta v}{\delta x_1} = 0 => 2x_1 - x_2 - \lambda = 0$$

या $$2x_1 - x_2 = \lambda ---------(i)$$

$$\frac{\delta v}{\delta x_2} = 0 \ => \ -x_1 - 2\,\lambda = 0$$

या $$\frac{-x_1}{2} = \lambda \ \_\_\_\_\_\_\_\_\_(ii)$$

$$\frac{\delta v}{\delta \lambda} = 0 => 3 - \ x_1 - 2x_2 = 0$$

या $$3 = x_1 + 2x_2 \ \_\_\_\_\_\_\_\_\_(iii)$$

(i) तथा (ii) से

$$2x_1 - x_2 = \frac{-x_1}{2}$$

या

$$\boxed{\frac{5x_1}{2} = x_2}$$

x_2 का मान (111) में रखने पर

$$3 = x_1 + 2\ (\frac{5x_1}{2})$$

या $6x_1 = 3$

$$x_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ .$$

अतः $x_2 = \frac{5\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$.

पर्याप्त शर्त या द्वितीय कोटि की शर्त

ऐसे सन्दर्भो में यदि हेसियन सारणिक $(\bar{H})$ का < 0 तो फलन का मान उच्चिष्ठ होग और यदि $\bar{H} > 0$ तो फलन का मान निम्निष्ठ होगा।

4.8 आर्थिक अनुप्रयोग

आंशिक अवकलन की सहायता से उपभोक्ता का व्यवहार, उत्पादक का व्यवहार, अल्पाधिकार, विभेदात्मक एकाधिकार, आडी मॉग लोच इत्यादि का अध्ययन किया जा सकता है।

4.8.1 आडी मॉग लोचः

उदाहरणः– वस्तु x का मांग फलन $Q_x = 2 - 0.3p_x + 0.25p_y$

हो तो $p_x = 2$ तथा $p_y = 4$ पर y के मूल्य के सापेक्ष x की आडी मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हलः– y के मूल्य के सापेक्ष x की आडी मांगा की लोच

$$e_{xy} = \quad \frac{\delta Q_X}{\delta Q_y}\ x\ \frac{p_y}{p_x}$$

मांगा समीकरण में p_x एवं p_y के मान रखने पर

$$Q_x = 2 - 0.3(2) + 0.25(4)$$
$$= 2 - 0.6 + 1 = 2.4$$

तथा $\frac{\delta Q_X}{\delta Q_y} = \frac{\delta}{\delta Q_y}\{2 - 0.3\, p_x + 0.25 p_y\}0.25.$

$$e_{xy} = \quad 0.25 \times \frac{4}{2.4.6} = 0.417$$

नोटः आडी मांगा लोच धनात्मक होने पर वस्तुएं स्थानापन्न होती हैं और ऋणात्मक होने पर पूरक होती है।

4.8.2 उपभोक्ता व्यवहारः—

उदाहरणः— उपयोग्िता फलन $U = xy$ के लिये x और y के लिये सीमान्त उपयोगिता ज्ञात कीजिए।

हलः

$MU_x = \frac{\delta U}{\delta x} = Y$ तथा $MU_x = \frac{\delta U}{\delta y} = x$

उदाहरणः— उपभोक्ता फलन $U = x^2 + 5xy + 2y^2$ के लिये सीमान्त प्रतिस्थापन दर फलन ज्ञात कीजिए तथा $x = 3$ एवं $y = 2$ पर सीमान्त प्रतिस्थापन की दर ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है $U = x^2 + 5xy + 2y^2$

तटस्थता वक्र के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर जाने में कुल उपयोगिता में परिवर्तन $dU = 0$

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x}.dx + \frac{\delta U}{\delta y}.dy$$

अब $\frac{\delta U}{\delta x} = 2x + 5y$

तथा $\frac{\delta U}{\delta y} = 5x + 4y$

अतः $dU = (2x + 5y).dx + (5x + 4y).dy$

या $o = (2x + 5).dx + (5x + 4y).dy$

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+5y)}{(5x+4y)}$

अब $x = 3$ एवं $y = 2$ पर $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2.3+5.2)}{5.3+4.2} = -\frac{6+10}{15+8}$

$$= -\frac{16}{32}$$

उदाहरणः यदि उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = x^2 + 3xy$ हो तथा वस्तु x की कीमत $p_x = 4$, वस्तु y की कीमत $p_y = 5$

और उसकी आय 140 हो तो x तथा y की वह मात्रा ज्ञात कीजिए जिस पर उपभोक्ता की संतुष्टि अधिकतम हो।

हलः दिया है $p_x = 4$, $p_y = 5$ तथा आय $I = 140$

अतः प्रतिबन्धन फलन होगा– $4x + 5y = 140$

दिये हुये उपयोगिता फलन $U = x^2 + 3xy$ को इस प्रतिबन्ध से बन्घ कर अधिकतम करने हेतु लैग्रेन्ज फलन–

$$v = x^2 + 3xy + \lambda(140 - 4x - 5y)$$

इसके अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्ते

(क) $\frac{\delta v}{\delta x} = 0 => 2x + 3y - 4\lambda = 0$

या $\frac{2x+3y}{4} = \lambda - - - - - - - - - - - (i)$

(ख) $\frac{\delta v}{\delta y} = 0 => 3x - 5\,\lambda = 0$

या $\frac{3x}{5} = \lambda - - - - - - - - - - - (ii)$

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\frac{2x + 3y}{4} = \frac{3x}{5}$$

या $10x + 15y = 12x$

या $-2x = -15y$

या
$$\boxed{x = \frac{15}{2}y}$$

(ग) $\frac{\delta v}{\delta \lambda} =$ $0 => 140 = 4x + 5y - -(iii)$

समीकरण– (iii) में $x = \frac{15}{2}y$ रखने पर $140 = 4^2.\frac{15}{2}y + 5y$

$$35y = 140$$

$$y = \frac{140}{35} = 4$$

तथा $x = \frac{15}{2}.4 = .30$

अतः $x = 30$ तथा $y = 4$

सन्तुष्टि अधिकतमीकरण हेतु द्वितीय क्रम की शर्त $I\overline{H}I < 0$ होनी चाहिए। इसके लिये

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = 2, \quad \frac{\delta^2 v}{\delta y \delta x} = 3$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 2, \quad \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} = 3$$

अतः

$$I\overline{H}I = \begin{vmatrix} 0 & -(-4) & -(-5) \\ -(-4) & 2 & 3 \\ -(-5) & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 4(-15) - 5(12 - 10)$$

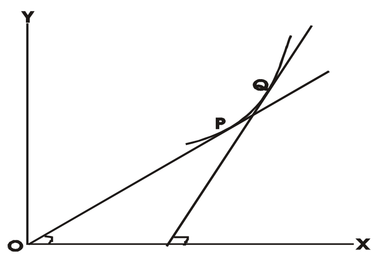
अतः $x = 30$ तथा $y = 4$ पर

$-60 - 10 = -70 < 0$ दी गयी आय सीमा से प्रतिबन्धित होकर उपभोक्ता की संतुष्टि अधिकतम होगी।

4.8.3 वक्र के नतोदर/उन्नतोदर होने की शर्ते

नतोदर/उन्नतोदर होने की शर्ते

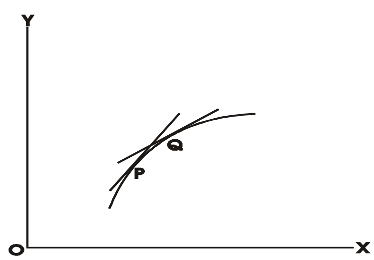
(क) X- अक्ष के प्रति उन्नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} > 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

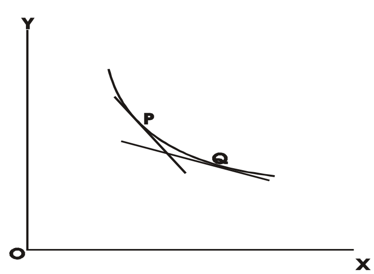
(ख) X- अक्ष के प्रति नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} > 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

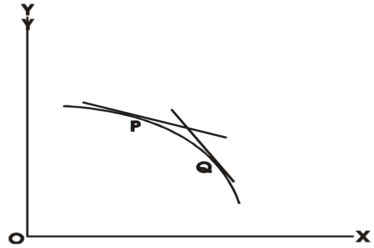
(ग) मूल बिन्दु के प्राति उन्नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} < 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

(घ) मूल बिन्दु के प्राति नतोदर



आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} < 0$

पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

पुनः समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{2x+3y}{4}=\frac{3x}{5}$$

या

$$\frac{2x+3y}{3x}=\frac{4}{5}$$

या

$$\boxed{MRS_{xy}=\frac{(MU_X)}{MU_Y}=\frac{\partial U/_{\partial x}}{\partial U/_{\partial y}}=\frac{P_X}{P_Y}}$$

उदाहरणः फलन $z=f(x,y): x^2y^2=c$, जहाँ $x,y>0$ तथा c अचर है। का परीक्षण कीजिए कि क्या यह फलन तटस्थता वक्र हो सकता है?

हलः यहाँ $y^2=c-x^2$

$$2y\frac{dy}{dx}=0-2x$$

या $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}<0$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\,.\,\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\,.\,\frac{-x}{y}}{y^2}$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=\frac{c}{y^3}<0$$

अर्थात दिया ग्या फलन मूल बिन्दु के प्रति नतोदर है अतः दिया गया फलन तटस्थता वक्र नहीं हो सकता है।

4.8.4 उत्पादन का सिद्वान्तः– आगतों की सीमान्त उत्पादकता,

(क) उत्पादन का सन्तुलन, सीमान्त तकनीकी प्रतिस्थापन दर, तथा समोत्पाद वक्र की मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदरता आदि ठीक इसी प्रकार ज्ञात की जाती है जैसे उपभोक्ता व्यवहार में अध्ययन किया हैं।

(ख) उत्पादन की लोचः यदि उत्पादन की मात्रा $q = f(L,K)$ जहाँ L श्रम तथा k पूँजी की मात्रा है तो

श्रम के सापेक्ष उत्पादन लोच $= \frac{\partial q}{\partial L} . \frac{L}{q}$ या $\frac{\frac{\partial q}{\partial L}}{\frac{q}{L}}$ या $\frac{MP_L}{AP_L}$

पूँजी के सापेक्ष उत्पादन लोच $= \frac{\partial q}{\partial k} . \frac{k}{q}$ या $\frac{\frac{\partial q}{\partial k}}{\frac{q}{k}}$ या $\frac{MP_k}{AP_k}$

(ग) कॉब–डगलस उत्पादन फलन :–

(i) $q = \frac{f(L,K)}{q} = AL^{\propto}k^{\beta}$ एक समांग उत्पादन फलन होता है जिसकी समांगता की कोटि $(\propto + \beta)$ होती है। [विद्यार्थी इसका सत्यापन स्वयं करें]

(ii) यदि $\propto + \beta > 1$ तो 'पैमाने का वर्धमान प्रतिफल'; यदि $\propto + \beta = 1$ तो 'पैमान का स्थिर प्रतिफल' तथा यदि $\propto + \beta < 1$ तो पैमाने का ह्रासमान प्रतिफल प्राप्त होता है। [विद्यार्थी स्वयं परीक्षण करें]

(iii) कॉब–डगलस उत्पादन फलन से प्राप्त समोत्पाद सदैव मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदर होते है।

$q = AL^{\propto} \ k^{\beta}$

समोत्पादक वक्र के सभी बिन्दुओं पर उत्पादन स्तर समान होता है। अतः $dq = \frac{\partial q}{\partial L} . dL + \frac{\partial q}{\partial K} . dK = 0$

या $A . k^{\beta} . \propto L^{1-\propto} dL + A . L^{\propto} \beta k^{\beta - 1} dk = 0$

या $\frac{dK}{dL} = -\frac{\propto K}{\beta L} < 0 \ [\because \propto, \beta, K, L > 0]$

तथा $\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left[-\frac{\propto K}{\beta L}\right] = -\frac{\propto}{\beta} . \frac{d}{dL}\left(\frac{K}{L}\right) = \left(-\frac{\propto}{\beta}\right)\left(L . \frac{dK}{dL} - K\right)$

$$= \frac{\left(-\frac{\propto}{\beta}\right)\left\{L . \left(-\frac{\propto K}{\beta L}\right) - K\right\}}{L^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{\propto}{\beta}\right)\left\{-\left(\frac{\propto}{\beta}+1\right)K\right\}}{L^2} > 0$$

अतः काब डगलस से प्राप्त समोत्पादक वक्र मूल बिन्दु के प्रति सदैव उन्नतोदर होते है।

नोटः– रिज रेखायें समोत्पाद वक्रों के उस भाग को रेखांकित करती है जो मूल बिन्दु के प्रति उन्नतोदर होता है। अर्थात इसके किसी भी बिन्दु पर उत्पादन तकनीकी सीमा के अन्दर होगा।

(iv) इस फलन की सीमान्त उत्पादकतायें $MP_L = \frac{\propto q}{L}$ तथा $MP_K = \frac{\beta q}{K}$ एवं उत्पादन लोंच श्रम के सापेक्ष $=\propto$ तथा पूँजी के सापेक्ष $= \beta$ होती है। [विद्यार्थी इसका सत्यापन स्वयं करें]

(v) कॉब–डगलस उत्पादन फलन में जब $\propto + \beta = 1$ होता है तो यह एक रैखिक समांग फलन होता है और योग प्रमेय का पालन करता है; अर्थात् $\frac{\partial q}{\partial L}.L + \frac{\partial q}{\partial K}.K = q$ [विद्यार्थी स्वयं परीक्षण करें] जो प्रतिष्ठित अर्थशास्त्र क वितरण सिद्वान्त की पुष्टि करता है, जिसके अनुसार उत्पादन के कारणों को उनकी सीमांत उत्पादकता के अनुसार पारितोषिक बॉटने से सम्पूर्ण उत्पादन वितरित हो जाता है।

(vi) प्रातिस्थापन की लोच और कॉब–डगलस उत्पादन फलन

प्रातिस्थापन की लोच $\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(\frac{P_L}{P_K})/(\frac{P_L}{P_K})} = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(MRTS)/MRTS}$

$\because$ सन्तुलन $MRTS = \frac{P_L}{P_K}$ तथा $MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$

अतः $\propto = \frac{d(\frac{K}{L})/\ (\frac{K}{L})}{d(\frac{MP_L}{MP_K})/(\frac{MP_L}{MP_K})}$

अब$MP_L = \frac{\propto q}{L}$ तथा $MP_K = \frac{\beta q}{K}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{d(\frac{\frac{\propto q}{L}}{\frac{\beta q}{K}})/(\frac{\frac{\propto q}{L}}{\frac{\beta q}{K}})}$$

या

$$\delta = \frac{d(\frac{K}{L})/(\frac{K}{L})}{\propto/\beta.\,d(\frac{K}{L})/\propto/\beta.\,(\frac{K}{L})}$$
$$= 1$$

कॉब–डगलस उत्पादन फलन के लिये प्रतिस्थापन की लोच सदैव $'1'$ होती है।

(vii) कॉब–डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा होता हैं।

विस्तार पथ सीधी रेखा होने के लिए (संकेत $q = QL^{\propto}K^{\beta}$ और लागत रेखा $P_L.L + P_K.K = C)$ और उत्पादन के संतुलन हेतु लागत प्रतिबन्धित उत्पादन अधिकतमीकरण की दृष्टि से लैग्रेन्ज फलन $v = QL^{\propto}K^{\beta} + \lambda(c - P_L.L + P_K.K)$

पर आवश्यक शर्तो के द्वारा $\frac{\propto Q}{L.P_L} = \frac{\beta Q}{K.P_K}$

$\frac{K}{K} = \frac{\beta P_L}{\propto P_K} =$ अचर

अतः कॉब–डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा होगा क्योंकि आग्तों का अनुपात स्थिर बना रहता है।

4.8.5 विभेदात्मक एकाधिकारः– एक विभेदात्मक एकाधिकारी का लागत फलन $c = f(q)$ जो q_i मात्रा P_i मूल्य पर विकय करता है जहाॅ $i = 1,2,3, - - - - n$ बाजारों की संख्या है।

अतः उत्पादन $q = \varepsilon q_i$

तथा $R = \varepsilon R_i = \varepsilon P_i\, q_i$

लाभ $(\pi) =$ आय $(R) -$ लागत (c)

कुल लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्ते

$$\frac{\delta\pi}{\delta q_i} = 0 => \frac{\delta}{\delta q_i}(\varepsilon R_i) - \frac{\delta}{\delta q_i} - (c).\frac{\delta q}{\delta q_i} = 0$$

$$=> \ MR_i - MC = 0$$

$$=> MR_i = MC$$

अर्थात $MR_i = MR_2 = - - - - MR_n = MC$

एक एकाधिकारी के लिए भारत में उसके उत्पादन x के लिये मांग फलन $P_1 = 10 - 0.5q_1$ तथा नेपाल में उसी उत्पादन के लिए मांग फलन $P_2 = 7 - q_2$ है, जबकि x की उत्पादन लागत प्रति इकाई 2 है तथा स्थिर लागत 100 है तो संतुलन में कुल उत्पादन भारत व नेपाल में विक्रय मूल्य तथा कुल लाभ की गणना कीजिए।

हलः कुल आय = भारत में आय+नेपाल में आय

या $R = (10 - 0.5q_1)q_1 + (7 - q_2)q_2 = 10q_1 - 0.5q_1^2 + 7q_2 - q_2^2$

लाग्त फलन $c = 200 + 2q$ जहॉ $q = q_1 + q_2$

लाभ $\pi = R - C$

$= 10q_1 - 0.5q_1^2 + \ 7q_2 - q_2^2 - 200 - 2(\ q_1 + q_2)$

लाभ अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त

$$\frac{\delta\pi}{\delta q_1} = 0 => 7 - 2q_2 - 2 = 0$$

$$q_2 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$q = q_1 + q_2 = 8 + 2.5 = 10.5$$

$$P_1 = 10 - 0.5(10)$$

$$= 10 - 4 = 6$$

$$P_2 = 7 - 2.5 = 4.5$$

लाभ $\pi = 6x8 + 4.5 \times 2.5 - (20 + 2 \times 10.5)$

$$= 48 + 11.25 - 41$$

$$= 18.25$$

4.8.6 अल्पाधिकारः– अल्पाधिकारी बाजार में मांग फलन $P = f(q)$ तथा अल्पाधिकारियों के लागत फलन $c_i = f_i(q_i)$

जहॉ $i = 1,2,3, - - - n < 10$ है तो अल्पाधिकारी बाजार में दो स्थितियॉ हो सकती हैः

(i) जब एकाधिकारी स्वतंत्र रूप से व्यवहार करते है अर्थात दूसरों के क्रिया कलाप को नजर अंदाज करते है। ऐसे में प्रत्येक अल्पाधिकारी स्वतन्त्र रूप से अपने लाभ को अधिकतम करता है, अर्थात संतुलन की आवश्यक शर्त पर $\frac{\delta \pi_1}{\delta q_i} = 0$

$\frac{\delta .}{q_i} = (R_i - C_i) = 0$ (जहॉ $R_i = i$ वें अल्पाधिकारी की कुल आय

$= P . q_i ½$

$=> MR_i = MC_i$

तथा पर्याप्त शर्त

$\frac{\delta^2 \pi}{\delta_i^2} < 0 => \frac{\delta}{q_i} (MR_i - MC_i) < 0$

$=> \frac{\delta MR_i}{\delta q_i} < \frac{\delta}{q_i} MC_i$

(ii) जब अल्पाधिकारी संन्धि कर ले– ऐसी स्थिति में सभी अल्पाधिकारी मिलकर उद्योग के कुल लाभ को अधिकतम करेगे जिसके लिए उद्योग के कुल लाभ को प्रत्येक अल्पाधिकारी के उत्पादन के सापेक्ष अधिकतम होना चाहिये। ऐसी स्थिति में संतुलन की आवश्यक शर्त $\frac{\delta \pi}{\delta q_i} = 0 => \frac{\delta}{q_i}(R - \sum c_i)$

(जहॉ $R = P . q$ तथा $q = \sum q_i$)

$$=> \frac{\delta}{q_i} R \frac{d}{q} R . \frac{dq}{\partial q_i} - \frac{\delta}{q_i} \sum c_i = 0)$$

$$=> MR - MC_i = 0$$

$$=> MR = MC_1 = MC_2 = - - - - MC_n ; n < 10$$

पर्याप्त शर्त $\frac{\delta^2\pi}{\delta_i^2} < 0$

$$=> \frac{\delta}{q_i}(MR - MC_i) < 0$$

$$=> \frac{\delta}{q_i}\ MR < \frac{\delta}{q_i} MC_i$$

उदाहरणः– एक द्वयाधिकारी बाजार का माँग फलन $p = 15 - 0.5q$ तथा दोनो फर्मो के लागत फलन क्रमशः $c_1 = 1 + 0.55q_1^2;$ तथा $c_2 = 1.5 + 0.75q_2^2$ हैं संतुलन की स्थिति में फर्मो के उत्पादन स्तर तथा लाभ ज्ञात कीजिए। यदि (।) फर्मे स्वतंत्र व्यवहार करें। (।।)

फर्मे संन्धि कर ले।

हलः बाजार माँग फलन $p = 15 - 0.5q$ तथा $q = q_1 + q_2$ फर्मो के लागत फलन $c_1 = 1 + 0.55q_1^2;$ तथा $c_2 = 1.5 + 0.75q_2^2$ है।

(।) जब फर्मे एक दूसरे से स्वतंत्र रहकर अपना अपना लाभ अधिकतम करती है। तो

$$\pi_1 = R_1 - C_1 = (15 - 0.5q)q_1 - (1 + 0.55q_1^2)$$

या $\pi_1 = 15q_1 - 0.5\ (q_1 + q_2)q_1 - 1 - 0.55q_1^2$

या $\pi_1 = 15q_1 - 1.05q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 1 - - - - - - -(i)$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त–

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = 0 => \frac{\partial}{\partial q_1}(15q_1 - 1.05q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 1) = 0$$

$$=> 15 - 2.1q_1 - 0.5q_2 = 0$$

$$=> 2.1q_1 + 0.5q_2 = 15 - - - - - - -(ii)$$

इसी प्रकार $\pi_2 = (15 - 0.5q)q_2 - (1.5 + 0.75q_2^2)$

या $\pi_2 = 15q_2 - 0.5q_1q_2 - 0.5q_2^2 - 1 - 0.75q_2^2$

या $\pi_2 = 15q_2 - 0.5q_1q_2 - 1.25q_2^2 - 1.5 - - - - - (iii)$

तथा $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 => \frac{\partial}{\partial q_2}\ (15q_2 - 0.5q_1q_2 - 1.25q_2^2 - 1.5) = 0$

या $15 - 0.5q_1 - 2.5q_2 = 0$

या $0.5q_1 + 2.5q_2 = 15 - - - - - - (iv)$

समीकरण (ii) तथा (iv) को हल करने पर $q_1 = 6$ तथा $q_2 = 4.8$ तथा कुल उत्पादन $q = 10.8$

बाजार मूल्य $p = 15 - 0.5(6 + 4.8) = 9.6$

प्रथम फर्म का लाभ– समीकरण (i) में q_1 तथा q_2 का मान रखने पर $\pi_1 = 36.8$

तथा इसी प्रकार समीकरण (iii) में q_1 तथा q_2 का मान रखने पर $\pi_2 = 25.3$

फर्मो की सीमान्त आय $MR_1 = 6.6,\ \ MR_2 = 7.2$

(।।) जब दोनो फर्मे संन्धि करके उद्योग का लाभ अधिकतम करती है

$\pi = R - C$ जहाँ $C = c_1 + c_2$

या $\pi = (15 - 0.5q)q - (1 + 0.55q_1^2 + 1.5 + 0.75q_2^2)$

या $\pi = 15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5 - - - - - - - (v)$

संयुक्त लाभ अधिकतमीकरण की आवश्यक शर्तः $\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0$ तथा $\frac{\partial \pi}{\partial q_2}$

अब $\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0\ \ => \frac{\partial}{\partial q_1}(15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5) = 0$

$$=> 15 - q - 1.1q_1 = 0$$

$$=>\ \ 2.1q_1 + q_2 = 15 - - - - - - - - - (vi)$$

तथा $\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 0\ \ => \frac{\partial}{\partial q_2}(15q - 0.5q^2 - 0.55q_1^2 - 0.75q_2^2 - 2.5) = 0$

$$=> 15 - q - 1.5q_2 = 0$$

$$=>\ q_1 + 2.5q_2 = 15 - - - - - - - - (vii)$$

समीकरण (vi) तथा (vii) को हल करने पर

$q_1 = \frac{90}{17}$ तथा $q_2 = \frac{66}{17}$ तथा $\ \ q = \frac{156}{17}$

अब पर्याप्त शर्तः– $\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1^2} < 0$ तथा $\frac{\partial^2\pi}{\partial q_2^2} < 0$

$$=> \frac{\partial}{\partial q_1}(15 - q - 1.1q_1)$$

$$= 0 - 1 - 1.1 < 0$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(15 - q - 1.5q_2)$$

$$= 0 - 1 - 1.5 < 0$$

समीकरण (v) में q_1, q_2 तथा q के मान रखने पर

संयुक्त लाभ $\pi = 66.04$

4.9 अभ्यास प्रश्न

(1) रिक्त स्थानों को भरिए।

(क) फलन $y = e^x$ का n कोटि का अवकलज .... होग। $.(ne^{nx}/e^x)$

(ख) जब वस्तु A के मूल्य में वृद्धि होने पर वस्तु B की मांग बढ जाये तो दोनो वस्तुयें एक दूसरे की .... वस्तुएं कहलायेगी।(पूरक/स्थानापन्न)

(ग) काबॅ–डगलस प्रातिस्थापन की लोच .... होती है। (इकाई/शून्य)

(घ) यदि किसी उत्पादन में समांगता की घात 1.5 हो तो यह फलन उत्पादन के .... हुए प्रतिफल देगा। (घटते/बढते)

(ङ) समोत्पाद वक्रों एवं सम–लागत रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं के बिन्दु पथ को .... कहते है। (विस्तार पथ/रिज रेखा)

(2) निम्न कथन में सत्य एवं असत्य को चिह्नित कीजिए।

(क) कॉब–डगलस उत्पादन फलन की समांगता की कोटि सदैव इकाई होती है। (सत्य/ असत्य)

(ख) पूरक वस्तुओं के लिये आडी मांग की लोच ऋणात्मक होती है। (सत्य/असत्य)

(ग) प्रतिस्थापन प्रभाव सदैव धनात्मक होता है। (सत्य/असत्य)

(घ) लाभ अधिकतमीकरण की आवश्यक शर्त $MR > MC$ है। (सत्य/असत्य)

(ङ) आंशिक अवकलन किसी बहुचरीय फलन में सभी चरों में एक साथ परिवर्तन के परिणाम स्वरूप फलन में होने वाले परिवर्तन की दर को बताता हैं। (सत्य/असत्य)

4.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तरः

(1) (क) e^x (ख) स्थानापन्न (ग) इकाई (घ) बढते (ड) विस्तार पथ

(2) (क) असत्य (ख) सत्य (ग) असत्य (घ) असत्य (ड) असत्य

4.11 सांराश

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप आंशिक अवकलज पूर्ण अवकलन एवं उनके आर्थिक अनुप्रयोग से सुपरिचित हो गये है। अर्थशास्त्र में बहुधा एक से अधिक चरों की बात होती है, जैसे, उपभोक्ता सिद्धान्त में उपभोक्ता द्वारा दो वस्तुओं के विभिन्न संयोगों का प्रयोगा, उत्पादन सिद्धान्त में उत्पादक द्वारा प्रायः दो साधनों पूँजी तथा श्रम का प्रयोग एवं माँग फलन में वस्तु की माँग का अपनी कीमत के अलावा अन्य कई चरों जैसे– आय, रूचि आदि पर निर्भर होना इत्यादि। ऐसे द्विचरीय या बहुचरीय सिद्धान्तों के विश्लेषण हेतु आंशिक अवकलज एवं पूर्ण अवकलज प्राप्त करने की विधियाँ अत्यन्त सहायक सिद्ध होगे।

4.12 शब्दावली

विभेदात्मक एकाधिकार– जब एकाधिकारी द्वारा एक ही वस्तु की भिन्न बाजारों में, जहाँ माँग की दशायें भिन्न–भिन्न हों अलग–अलग कीमत पर बेचा जाये।

अल्पाधिकार– बाजार की एक विशिष्ट दशा जिसमें कुछ विक्रेता हो जो एक दूसरे की लगभग स्थानापन्न वस्तुयें बेचते हो।

समांगा फलन– जिन फलनों के सभी पदों की घात समान हो।

आडी माँग लोच– जब किसी वस्तु की माँग में परिवर्तन का प्रतिशत किसी दूसरी वस्तु के मूल्य में परिवर्तन के प्रतिशत के सापेक्ष निकाला जाय।

4.13 सहायक ग्रन्थ

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्य भवन पब्लिकेशन।

2. *Agarwal, D. R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.*

3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

4.14 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

2. *Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematicaltreatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.*

3. *Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R.G.D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha .Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

4.15 निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न1: यदि किसी फर्म का उत्पादन फलन $q = 3KL^2 + K^2$ हो जहाँ उत्पादन में दो साधनों K तथा L का प्रयोग हो रहा हो तो दोनो साधनों की सीमान्त उत्पादकता ज्ञात कीजिए।

प्रश्न2: फलन $Q = x_1^2 - 2x_1y_2 + x_2^2$ का प्रथम घात का कुल अवकलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न3: फलन $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2y^2 + 1$ मे उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ एवं काठी बिन्दु का परीक्षण कीजिए।

प्रश्न4: फलन $L = f(x, y): L = 2x^3 + 3y^2$ को सीमा $5x + 6y = 0$ से बॉधकर बन्धित निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न5: किसी उपभोक्ता का उपयोग्िता फलन $U = f(q_1, q_2) = e^{q_1 q_2}$

है। यदि वस्तु q_1 की कीमत 1 रू0 तथा q_2 की कीमत 5 रू0 एवं उपभोक्ता की आय10 रू0 हो तो उपभोक्ता द्वारा अधिकतम संतुष्टि हेतु q_1 तथा q_2 की उपभोग की मात्रा ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6: कॉब–डगलस उत्पादन फलन $Q = AK^{\propto}L^{\beta}$ की समांगता की जॉच कीजिए। यदि $\propto = 0.73$ तथा $\beta = 0.85$ हो तो यह उत्पादन फलन पैमाने के कैसे प्रतिफल को

दर्शायेग। उपरोक्त फलन में श्रम (L) तथा पूँज (K) के सापेक्ष उत्पादन की लोच ज्ञात कीजिए।

प्रश्न7: किसी एकाधिकारी एक ही वस्तु को दो भिन्न–भिन्न बाजार में भिन्न–भिन्न मूल्य पर बेचता है यदि दोनो बाजारों के मांग फलन $P_1 = 80 - 5x_1$ तथा $P_2 = 180 - 20x_2$ हो और कुल लागत फलन $50 + 20(x_1 + x_2)$ हो तो एकाधिकारी द्वारा दोनो बाजारों में तथा मूल्य, मात्रा एवं लाभ ज्ञात कीजिए।

प्रष्न8: किसी द्वियाधिकारी बाजार में प्रचलित मांग फलन एवं लागत फलन निम्नलिखित हैं।

$$P = 90 - 0.5(q_1 + q_2)$$

$$c_1 = 0.5q_1$$

$$c_2 = 0.5q_2$$

यदि दोनो विक्रेता एक दूसरे से स्वतन्त्र होकर निर्णय लें तो दोनो के लाभ अधिकतमीकरण करने वाले मूल्य तथा मात्राएं ज्ञात कीजिए।

इकाई – 5 समाकलनन : अवधारणा एवं निर्वचन

5.1 प्रस्तावना

आर्थिक तथ्यों के विष्लेषण में हमें अनेंकों बार सूक्ष्म से व्यापक और व्यापक से सूक्ष्म की ओर आना पड़ता है। अत्यन्त सरल रूप में कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम ज्ञात करते हैं। अवकलन का अध्ययन करते समय हमने देखा कि कुल लागत / आगम दिये होने पर सीमान्त लागत / आगम का मान ज्ञात किया जा सकता है। समाकलनन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है जिसमें यदि सीमान्त लागत/आगम दिया हो तो कुल लागत/आगम ज्ञात किया जा सकता है।

5.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन द्वारा पाठक –

$\Rightarrow$ समाकलनन क्या है?

$\Rightarrow$ अवधारण, निर्वचन तथा मूल नियम

$\Rightarrow$ विभिन्न समाकलनन ज्ञात करने की विधि की जानकारी प्राप्त करेगें।

5.3 समाकलनन अवधारणा

समाकलनन की अवधारणा वास्तव में इसके दो भिन्न लक्षणों और दो भिन्न प्रयोगों में निहित है। एक दृष्टि में समाकलन एक निश्चित भौग्कि अभिव्यक्ति (Summation expression) का सीमांकित मूल्य है, जो गणितीय विष्लेषण में दृष्टिगेचर होता है, आरेखीय (diagrammatic) शब्दावली में एक वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। इस दृष्टिकोण से समाकलन को निश्चित समाकलन (definite integral) कहते हैं। दूसरे दृष्टिकोण से समाकलनन अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है। किसी चर के फलन का अवकलज उसी चर का फलन होता है। यदि इसका व्युत्क्रम प्रात किया जाए तो दूसरा फलन ऐसा प्राप्त होता है जिनका पहला फलन अवकलज था। यदि अवकलज का अस्तित्व है तो दूसरा फलन ही समाकलन होता है और इस दृष्टिकोण से समाकलन को अनिश्चित समाकलन कहते हैं। समाकलन प्राप्त करने की प्रक्रिया को समाकलनन कहते हैं। इस प्रकार समाकलन की अवधारणा निश्चित तथा अनिश्चित समाकलन में निहित है।

5.4 अनिश्चित समाकलनन (Indefinite Integral)

हम पहले अनिश्चित समाकलनन को ही लें। यदि F(X), X का ऐसो फलन हो कि

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

तो F(X) को X के सापेक्ष प्रति अवकलज (antiderivative) या f(X) का समाकलन कहते हैं और सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखते हैं।

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad (1)$$

समी0 (1) से प्रयुक्त संकेतों का अर्थ इस प्रकार है –

(i) f(X) समाकलनन किए जाने वाले फलन को व्यक्त करता है इसे समाकलनन (Integrand) भी कहते हैं।

(ii) dX यह व्यक्त करता है कि समाकलनन X के सापेक्ष किया जा रहा है।

(iii) f समाकलनन के चिन्ह को व्यक्त करता है जो अवकलन प्रक्रिया का विपरीत है।

(iv) dX, X का अवकल है अतः f(X) कग को मूल फलन F(X) का अवकल भी कहा जा सकता है। इस प्रकार –

$$d\,F(x)=f(x)\,dx$$

या $$F(x)=\int f(x)\,dx$$

$F(x), f(x)$ का X के सापेक्ष अनिश्चित समाकलन है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि –

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)$$

चूँकि अनिश्चित समाकलनन का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता (इसका कारण यह है कि फलन X के साथ परिवर्तित होता है) इसलिए समाकलनन के साथ एक स्थिरांक (Constant) C जोड़ देते हैं अर्थात् –

$$\left[\int f(x)\,dx\right]= F(x)+C$$

C को रखने का कारण इस प्रकार भी समझा जा सकता है।

फलन x^2, x^2+3 और x^2+6 पर विचार करें तो तीनों का अवकलज $2X$ ही है। इस प्रकार अवकलज समान रहते हुए भी फलन में स्थिरांक की भिन्नता स्वाभिक है, इसलिए हम समाकलनन के साथ स्थिर पद जोड़ देते हैं। स्थिर पद के जोड़ने की बात को आरेखीय पद्धति से भी समझा जा सकता है लेकिन हम यहाँ उसकी जरूरत महसूस नहीं कर रहे हैं।

5.5 समाकलनन के कुछ नियम

जिस प्रकार हम अवकलन को कुछ नियमों की सहायता से सुविधापूर्वक समझ लेते हैं उसी प्रकार समाकलनन के भी अपने कुछ नियम होते हैं। ये नियम बहुत कुछ अवकलन के नियमों पर निर्भर करते हैं।

(1) घातांक नियम (Power Rules)

हमने देखा कि यदि

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \text{ तो}$$

$$\int f(x).dx=F(x)+C$$

मान लेते हैं $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

अतः $\dfrac{d}{dx}=\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$ यदि $n\neq -1$

इसलिए $x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c\ (n\neq -1)$

इस नियम के आधार पर

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c$$

$$\int x^5\,dx=\frac{x^6}{6}+c$$

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{-x^{-2}}{2} + c$$ इत्यादि

इस आधार पर समाकलनन करते समय X के घातांक में एक जोड़कर नये घातांक से भाग देते हैं और एक स्थिर पद जोड़ देते हैं।

जैसे $$\int x^{4}\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^{5}}{5} + c$$

टिप्पणी

यदि फलन के साथ कोई स्थिर पद का गुणा हो तो समाकलनन करने समय स्थिर पद को बाहर ले लेते हैं जैसे –

$$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx = \frac{5x^{2}}{2} + c$$

(b) यदि केवल स्थिरांक का समाकलनन करना हो तो उसके साथ $\int 1.dx$ आ जाता है जिसका समाकलन X होगा।

$$\int 1.dx = \int x^{0}\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^{1}}{1} + c$$

$$= x + c$$

इस प्रकार $16\,dx = 16.1\,dx = 16x + c$

(2) चरधातांकीय नियम (The EXponential Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

इसलिए $\int e^{x}dx = e^{x} + c,\ dx$

(ii) $$\frac{d}{dx}a^{x} = a^{x}\log_{e} a$$

$$\int a^{x}\log_{e} a = a^{x} + c$$

अथवा $$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log_{e} a} + c$$

(3) लघुगुणकीय नियम (The Logarithmic Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

अतः $$\int \frac{1}{x}dx = \log x + c$$

(4) दो फलनों के योगा अथवा अन्तर का समाकलनन

$$\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

इस प्रकार दो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकलनन उन फलनों के अलग–अलग समाकलन का योग अथवा अन्तर होता है।

उदाहरणः –

निम्न फलनों का X के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

(i) $X^7, X^{-6}, 16X^3, 5X^{-2}$

(ii) $X^3 + 3X^2 + 7$

(iii) $(5\text{-}2X)$

(iv) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

(v) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{17}$

(vi) $5e^x + x^{\frac{3}{2}}$

(vii) $x^3 + 5x - \frac{6}{x^2}$

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x5} + \frac{1}{3\sqrt{x^9}}$

(ix) $5^x + bx^2 + 5e^x$

(x) $ax^2 + bx + \frac{c}{\sqrt{x}}$

हल –

(i) $\int x^7 dx = \dfrac{x^8}{8} + c$ क्योंकि हम जानते हैं कि $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int x^6 dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + c = \frac{-x^5}{5} + c$$

$$\int 16x^3 dx = 16\int x^3 dx = \frac{16x^4}{4} + c = 4x^4 + c$$

$$\int 5x^{-2} dx = 5\int x^{-2} dx = \frac{5x^{-1}}{-1} + c = -5x^{-1} + c$$

$$= \frac{-5}{x} + c$$

(ii) $\int (x^3 + 3x^2 + 7)\, dx = \int x^3 dx + \int 7dx$

$$= \int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 7\int 1dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + 7x + c = \frac{x^4}{4} + x^3 + 7x + c$$

(iii) $\int (5 - 2x)\, dx = \int 5dx - 2\int xdx$

$$= 5x - \frac{2x^2}{2} + c = 5x - x^2 + c$$

(iv) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{\frac{-3}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$

$$= \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2x^{\frac{-1}{2}} + c$$

(v) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{17}\right) dx = \int \dfrac{1}{x^2} dx + \int \dfrac{1}{x} dx - \dfrac{1}{17}\int 1dx$

$$= \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{17} 1dx$$

$$= -x^{-1} + \log x - \frac{1}{17}x + c$$

$$= -\frac{1}{x} + \log x - \frac{1}{17}x + c$$

(vi) $$\int\left(5e^x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = 5\int e^x dx + \int x^{\frac{3}{e}} dx$$

$$= 5e^x + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 5e^x + \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} + c$$

(vii) $$\int\left(x^3 + 5x - 6\right)\frac{dx}{x^2}$$

$$= \int\left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{6}{x^2}\right)dx$$

$$= \int x dx + 5\int \frac{1}{x} dx - 6\int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5\log x + 6x^{-1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5\log x + \frac{6}{x} + c$$

(viii) $$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^5} + \frac{1}{3\sqrt{x^9}}\right)dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{2}} dx + \int x^{-\frac{9}{3}} dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{1}{2x^2} + c$$

(iX) $$\int(5x^x + bx^2 + 5e^x)\,dx$$

$$= \int 5x^x dx + b\int x^2 dx + 5\int e^x dx$$

$$= \frac{5^x}{\log_e^5} + \frac{bx^3}{3} + 5e^x + c$$

(X) $$\int \left(\frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int ax^2.x^{\frac{-1}{2}} dx + \int bx.x^{\frac{-1}{2}} dx + \int cx^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= a\int x^{\frac{3}{2}} dx + b\int x^{\frac{1}{2}} dx + c\int cx^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{5} ax^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} bx^{\frac{3}{2}} + 2cx^{\frac{1}{2}} + c$$

5.6 कुछ फलनों के समाकलन

(i) $\int (a+sb)^n dx = \frac{1}{b}(n+1)(a+bx)^{n+1} + c$

(ii) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

(iii) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(iv) $\int \tan x \, dx = -\log \cos x + c$

(v) $\int \sec x . \tan x \, dx = \sec x + c$

(vi) $\int \operatorname{cosec} x . \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(vii) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$

(viii) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

5.7 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलनन

साधारणतया $\int f(x) dx$ को हम एक दूसरे फलन $f(u) du$ में बदल सकते हैं यदि X को उचित रूप में न द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सके। यह विधि विशेषकर दो फलनों के

गुणनफल का समाकलन ज्ञात करने में उपयोगी होती है। उदाहरण द्वारा हम इसे आसानी से समझ सकते हैं।

यदि हमें $3x^2(x^3+7)dx$ का मान ज्ञात करना हो तो मान लेते हैं $-t=x^3+7$

या $dt=3x^2dx$ (अवकल (differential) का प्रयोग करने पर) इसे हम इस रूप में भी देखें $t=x^3+7, x$ के सापेक्ष t का अवकलज

$$\frac{dt}{dx}=3x^2 \quad \text{या} \quad dt=3x^2.dx$$

t का मान मूल फलन में रखनें पर (ध्यान रहे dX को भी dt के सन्दर्भ में बदलना पड़ता है)

$$\int tdt \quad \text{क्योंकि} \quad 3x^2dx=dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(x^2+7)^2}{2}$$

इसी प्रकार यदि $\int(2+3x)^7 dx$ का मान ज्ञात करना हो तो

$2+3x=t$ मान लेते हैं।

या $3dx=dt$ या $dx=\frac{dt}{3}$

पुनः $\int t^7.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^7dt$ ए

$$\frac{1}{3}\frac{t^8}{8}+c=\frac{1}{24}t^8+c=\frac{1}{24}(2+3x)8+c$$

यदि $\int e^{ax}dx$ ज्ञात करना हो तो –

$t=ax$

$dt=adx$ या $dx=\frac{1}{adt}$

$$\int e^{ax}dx=e^t.\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int e^tdt=\frac{1}{a}e^t+c$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}+c$$

उदाहरण –

निम्न फलनों का X के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए –

(i) $4xe^{x^2+5}.8xe^{x^2+3}.e^{5x}$

(ii) $(3x^2+1)(x^3+x)$

(iii) $3x^5+\frac{1}{x^6}+2x$

(iv) $4x^2\sqrt{2}(x^3+3)$

हल –

(i) $\int 4xe^{x^2+5}dx$

मान लिया कि –

$t=x^2+5$

$dt=2x\,dx$

या $4XdX=2dt$ (2 से दोनों तरफ गुणा करने पर)

अतः $\int 4xe^{x^2+5}dx=\int e^t.2dt=2\int e^t dt$

$=2e^t+c=2e^{x^2+5}+c$

$\int 8xe^{x^2+3}dx$

मान लिया कि $t=x^2+3$

$dt=2xdx$

या $8xdx=4dt$

$\int 8xe^{x^2+3}dx=\int e^t 4dt=4\int e^t dt=4e^t+c$

$=4e^{x^2+3}+c$

$\int e^{5x}dx$

मान लिया कि $t = 5x$

$$dt = 5dx \quad \text{या} \quad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\int e^{5x} dx = \int e^t . \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + c$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

(ii) $\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\, dx$

मान लिया कि $t = x^3 + x$

$$dt = (3x^2 + 1)\ dx$$

$$\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\, dx$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(x^3 + x)^2}{2} + c$$

इस प्रश्न को एक अन्य तरीके से भी हल किया जा सकता है।

$$\int (3x^2 + 1)(x^3 + x)\ dx$$

$$= \int (3x^5 + 3x^3 + x^3 + x)\, dx$$ आपस में गुणा करने पर –

$$= \int 3x^5 dx + \int 3x^3 dx + \int x^3 dx + \int x dx$$

$$= \frac{3x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + \frac{4x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^6}{2} + x^4 + \frac{x^2}{2} + c$$

$$=\frac{(x^3+x)^2}{2}+c$$

(iii) $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx$

मान लिया कि –

$$t=x^6+2x$$

या $dt=(6x^5+2)\,dx$

$$\frac{dt}{2}=(3x^5+1)\,dx$$

अतः $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx=\int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}.dt=\frac{1}{2}\log\ r+c$

$$=\frac{1}{2}\log(x^6-2x)+c$$

(iv) $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}$

मान लिया कि –

$$t=x^3+3$$

$$dt=3x^2\ dx$$

या $x^2dx=\frac{dt}{3}$

या $4x^2dx=\frac{4}{3}dt$

अतः $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}\,dx$

$$=\int t^{\frac{1}{2}}.\frac{4}{3}dt=\frac{4}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{4}{3}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{4}{3}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{8}{9}.(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

निम्न को हल कीजिए –

(i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

(ii) $\int \sqrt{e^x}\,dx$

(iii) $\int \frac{3^{3x}}{e^{3x}+6}\,dx$

(iv) $\int \frac{1}{x}\log xdx$

हल –

(i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

मान लिया कि $t=1+x^2$

$dt = 2xdx$

या $xdx=\frac{dt}{2}$

अतः $\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}.2t^{\frac{1}{2}}+c=t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\sqrt{(1+x^2)}+c$$

(ii) $\int \sqrt{e^x dx}$

मान लिया कि –

$$=\int e^{\frac{x}{2}}dx \qquad t=\frac{x}{2}$$

$$dt=\frac{1}{2}dx \quad \text{या} \quad dx=2dt$$

अतः $\int x^x dx=\int e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=\int e^t.2dt=2e^t dt$$

$$=2e^t+c=2e^{\frac{x}{2}}+c=2\sqrt{e^x+c}$$

(iii) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6}dx$

मान लिया कि $t=e^{3x}+6$

$$dt=3e^{3x}dx \quad \text{या} \quad e^{3x}dx=\frac{dt}{3}$$

अतः $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6}dx=\int \frac{1}{t}.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt$

$$=\frac{1}{3}\log t+c=\frac{1}{3}\log(e^{3x}+6)+c$$

(iv) $\int \frac{1}{x}\log x dx$

$$=\int tdt \quad \text{क्योंकि} \quad t=\log x$$

$$=\frac{t^2}{2}+c \qquad dt \quad \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}(\log x)^2+c$$

5.8 खण्डः समाकलन

यह विधि काफी प्रचलित है। इसका प्रयोग दो फलनों के गुणनफल का समाकलन ज्ञात करने में किया जाता है। यदि X के दो फलन u और v हों तो हम जानते हैं कि –

d(uv) = udv + vdv (differential के नियम के अनुसार)

अब $udv = d(uv) - vdu$

समाकलन करने पर –

$$\int udv = uv - \int vdu$$

इसी खण्ड को खण्डः समाकलन कहते हैं।

खण्डः समाकलन को सुविधापूर्वक निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left[\frac{du}{dx}.vdx\right]dx \qquad \text{(i)}$$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समकलन

= पहला फलन × दूसरे फलन का समाकलन – पहले फलन का अवकलज और दूसरे फलन के समाकलन के गुणनफल का समाकलन।

यहाँ समी0 (1) में u और v दोनों X के फलन हैं। यहाँ पर एक बात ध्यान देने योगय है कि हम दोनों फलनों में से किसी को पहला और किसी को दूसरा फलन मान सकते हैं लेकिन दूसरा फलन उसे ही मानना चाहिए जिसका समाकलन सुविधापूर्वक ज्ञात किया जा सके।

उदाहरणः –

(1) निम्न का मान ज्ञात कीजिए –

(i) $\int x^3 ex\, dx$ (ii) $\int \log x\, dx$ (iii) $\int \log x^3 dx$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ (v) $\int x \log x^2 dx$

हल

(i) $\int x^3 ex\, dx$

यहाँ पर अगर हमने X^3 को दूसरा फलन माना तो दूसरे हिस्से के समाकलन में X की घात बढ़ती जाएगी। X^3 को पहला फलन मान लें तो खण्डषः समाकलन की विधि द्वारा –

$$\int x^3 e^x dx = x^3\int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}x^3\int e^x dx\right]dx$$

$$= x^3e^x - \int 3x^2e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x^2\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2xe^x dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left[x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left[xe^x - \int e^x dx\right]$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

(ii) $\int \log x \, dx = \int 1.\log x \, dx$

यहाँ पर $\log X$ को पहला फलन मानना पड़ेगा अतः

$$\int \log x \, dx = \log x \int 1.dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x \int \log x \int 1.dx\right]dx$$

$$= \log x.x - \int \frac{1}{x}.x.dx$$

$$= x\log x - \int 1.dx = x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

(iii) $\int \log x^3 dx = \int 1.\log x^3 dx$

$$= \log x^3 \int 1.dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x^3 1.dx\right]dx$$

$$= \log x^3.x - \int \frac{3x^2}{x^3}.xdx$$

$$= x\log x^3 - 3\int 1.dx = x\log x^3 - 3x + c$$

$$= x(\log x^3 - 3) + c$$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= (x+3)\int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx\right] dx$$

$$= (x+3).\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int 1 \times \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{-2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}.dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x+13) + c$$

(v) $\int x \log x^2 \, dx = \log x^2 \int x dx - \int \left[\frac{d}{dx}\log x^2 \int x dx\right] dx$

$$= \frac{x^2}{2}\log x^2 - \int \frac{1}{x^2} 2x \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x^2 - x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x^2 - \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\log x^2 - 1) + c$$

5.9 भाग देकर समाकलन (Integration by Division)

किसी उचित भिन्नात्मक रूप वाले फलन में यदि अंश की उच्चतम घात, हर की उच्चतम घात से अधिक हो तो अंश में हर का भाग देकर समाकलन प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण के तौर पर $\int \frac{x+1}{x-1}$ विचार करें। यहाँ अंश और हर दोनों में x की घात समान है अतः (X+1) में (X-1) से भाग किया जा सकता है अर्थात् –

$$\frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-1} \text{ अतः}$$

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \int 1dx + 2\int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= x + 2 \log (x-1) + c$$

5.10 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन की रीति काफी उपयोगी है। यदि उचित भिन्न में हर की घात दो या दो से अधिक हो, तथा हर का गुणनखण्ड किया जा सके तो उस उचित भिन्न में परिवर्तित करके उनका समाकलन किया जा सकता है।

आंशिक भिन्नों के बारे में वैसे तो पर्याप्त विवेचन बीजगणित में मिलेगा लेकिन संक्षेप में हमें भी समझ लेना आवश्यक है।

$$\frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots.. \alpha_n}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots.. \beta_n}$$

इस तरह के भिन्न को, जिसमें m तथा n धन पूर्ण संख्याएँ हो और $\alpha_0, \alpha_1, \ldots. \beta_0, \beta_1 \ldots.$ अचर हों, परिमेय बीजीय भिन्न (rational algebraic fraction) कहते हैं। ऐसे भिन्नात्मक व्यंजक का समाकलन उसे भिन्नहीन भाग अर्थात् बहुपद (Polynomial) और आंशिक भिन्नों में तोड़कर किया जा सकता है। बीजगणित हमें बताता है कि हरेक बहुपद के एकघात (linear) और द्विघात (quadratic) गुणनखण्ड किए जा सकते हैं। यह भी हो सकता है कि कुछ गुणनखण्ड कई बार आए अतः आंशिक भिन्नों के बारे में कुछ तथ्य निम्न हैं –

(i) यदि हर में अपुनरावृत्त (non-repeated) एक घात गुणनखण्ड (X-a) के संगत आंशिक भिन्न $\frac{A}{x-\alpha}$ रूप में होता है जैसे –

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$\frac{5x}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

(ii) हर के r बार पुनरावृत (repeated) गुणनखण्ड (X-b) r के संगत r आंशिक भिन्न का रूप इस प्रकार होता है –

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\frac{A_3}{(x-b)^3}+\ldots\frac{A_r}{(x-b)^r}$$ जैसे

$$\frac{2x}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{(x-5)^2}$$

(iii) हर के अपुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड $(aX^2 + bX + c)$ के संगत आंशिक भिन्न का रूप –

$\frac{Ar+B}{ax^2+bx+c}$ होता है जैसे –

$$\frac{x}{x^2+5}=\frac{Ar+B}{x^2+5}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+c}{x^2+3}$$

(iv) हर के बार पुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड के संगत आंशिक भिन्न का रूप निम्न होता है –

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\frac{A_sx+B_s}{(ax^2+bx+c)^s}$$

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\frac{A_2x+B_5}{(ax^2+bx+c)^5}$$

जैसे –

$$\frac{x}{(x^2+3)^2} = \frac{Ar+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+5)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{(x^2+5)} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2}$$

उपर्युक्त नियमों के प्रमाण की यहाँ आवश्यकता नहीं है। हमें इसे ज्यों का त्यों मान लेना चाहिए। आंशिक भिन्नों को हल करके A, B, C, D या A_1, A_2, A_3 .... इत्यादि का मान ज्ञात करते हैं जिसके लिए हम दोनों पक्षें में X के समान घातों के गुणांकों को बराबर करते हैं। कुछ उदाहरण लेकर हम इसे आसानी से स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण –

(1) $\int \frac{x+5}{x^2+5x+6}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए –

हल –

हम भिन्न $\frac{x+5}{x^2+5x+6}$ पर विचार करें। हर का गुणनखण्ड करने पर

$$\frac{x+5}{x^2+5x+6} = \frac{x+5}{(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$ (नियम i पर ध्यान दें)

$$= \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

चूँकि समीकरण के दाएं पक्ष (RHS) और बाएं पक्ष (LHS) में हर बराबर है अतः –

$$x+5 = Ax+Bx+3A+2B$$

या $(X+5)=x(A+B)+(BA+2B)$

दोनों तरफ X के गुणक को बराबर करने पर

$$1 = A+B \qquad \text{(i)}$$

पुनः दोनों तरफ स्थिर पदों को बराबर करने पर

$$5 = 3A + 2B \qquad \text{(ii)}$$

समी0 (i) और (ii) को यदि हल करें जिसके लिए समी0 (1) में 3 से गुणा करके इसे समी0 (ii) में से घटाया जाय तो

$$5 = 3A + 2B \qquad \text{(i)}$$

$$\underline{3} = 3\underline{A} \pm 3B \qquad \text{(ii)}$$

$$2 = -B \text{ or } B = -2$$

B का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$1 = A - 2 \quad \text{or} \quad A = 1 + 2 = 3$$

अतः $$= \frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+3}$$

इसलिए $$\int \frac{x+5}{x^2 5x+6}.dx = 3\int \frac{1}{x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= 3\log(x+2) - 2\log(x+3) + c$$

$$= \log\frac{(x+2)^3}{(x+3)^2} + c$$

(2) $\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$ [नियम (ii) याद करें,

$$= \frac{A(1-x)+B}{(1-x)^2}$$

अतः $$1+x = A - Ax + B$$

$$= -Ax + A + B$$

अब X के गुणक और स्थिर पद को दोनों तरफ बराबर करने पर

$$-A = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$A+B=1 \qquad \text{(ii)}$$

समी0 (i) तथा (ii) से

$$A=-1, B=2$$

अतः $\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{1-x}dx + 2\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

यदि $t=1-x$

$$dt=-dx \text{ or } dx=-dt$$

$$\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{t}(-) + 2\int \frac{1}{t^2}\,(-dt)$$

$$=\int \frac{1}{t}dx - 2\int \frac{1}{t^2-dt}$$

$$=\log t + 2t^{-1} + c$$

$$=\log \frac{t+2}{t+c}$$

$$=\log \frac{(1-x)+2}{1-x+c}$$

5.11 सारांश

⇒ समाकलनन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है।

⇒ कमाकलन द्वारा सीमान्त लागत / आगम दिये होने पर कुल लागत / आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं।

⇒ समाकलनन की अवधारणा निश्चित एवं अनिश्चित समाकलन में समाहित है।

⇒ कुछ फलनों के समाकलन देखें Section 5.6 ।

⇒ समाकलनन की प्रमुख विधियाँ हैं – (1) प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, (2) खण्ड – समाकलनन, (3) आंशिक भिन्न द्वारा समाकलनन, (4) भाग देकर समाकलनन।

⇒ समाकलनन के चार प्रमुख नियम होते हैं – (1) घातांक नियम (2) चरघातांकीय नियम, (3) लघुगुणकीय नियम, (4) वो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकलन।

5.12 सन्दर्भ ग्रन्थ

1.महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

2. *Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematicaltreatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.*

3. *Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

4. *Allen, R.G.D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha .Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

5.11 अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1. यदि $\frac{d}{dr}[f(x,)] = fx$ है, तो इसका समाकलनन क्या होग?

   (i) f(X) (ii) f(X)+c (iii)f(X)+c (iv) इनमें से कोई नहीं

2. निम्न में से कौन समाकलनन का नियम है–

   (i) घातीय नियम (ii) लघुगुणकीय नियम (iii) चरघातांकी नियम (iv) उपर्युक्त सभी

3. चूँकि अनिश्चित समाकलनन का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता, इसलिए समाकलन के साथ एक .... जोड़ देते हैं।

   (i) चर (ii) स्थिरांक (iii) घातांक (iv) लघुगुणक

4. (X-1) (X-2) का समाकलन क्या होगा?

   (i) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^3}{2} + 2x + c$ (ii) $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + c$

   (iii) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + 6x + c$ (iv) $X^3 - 3X^2 + 2X + c$

5. $\int_1^4 \sqrt{x dr}$ का समाकलन होगा

(i) $\frac{3}{14}$ (ii) $\frac{21}{2}$ (iii) $\frac{16}{3}$

(iv) $\frac{14}{3}$

उत्तर : 1. (iii), 2. (iv), 3. (ii), 4. (i), 5. (iv)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित कीजिए–

1. अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया को समाकलन कहते हैं।

2. $\int_a^a f(x)dx$ को निश्चित समाकलन कहते हैं जिसमें a तथा b क्रमशः उच्च एवं निम्न सीमाएँ कहलाती हैं।

3. $\int_a^a f(x)dx = 0,$ सही है।

4. यदि वक्र y = f (X) अन्तराल (a, b) के लिए धनात्मक है और वक्र X अक्ष से ऊपर है तो $\int_a^b f(x)dx$ धनात्मक होगा।

5. अर्थशास्त्र में कुल लागत फलन का समाकलन करने पर सीमान्त लागत फलन ज्ञात किया जाता है।

उत्तर : 1. (T), 2. (F), 3. (T), 4. (T), 5. (F)

(1) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^1 x(x^2+6)\,dx$ (ii) $\int_2^3 (e^{2x}+e^x)\,dx$

(iii) $\int_1^4 \sqrt{xdx}$ (iv) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(v) $\int_2^3 xe^x\ dx$ (vi) $\int_a^b \log\ xdx$

(vii) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (viii) $\int_4^5 \frac{x}{1+x^2}\ dx$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6 - \frac{c^4}{2} + e^3 - e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right) - a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) log 2 (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6 - \frac{c^4}{2} + e^3 - e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right) - a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) $\log 2$ (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

(2) निम्न वक्रों के भीतर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(i) $v = x^4, \quad 1 \le x \le 4$ $\left[\text{Ans. } \frac{31}{5}\right]$

(ii) $v = x^2 + 4x + 5 \quad -2 \le x \le 1$ [Ans.12]

(iii) $v = \frac{x^2}{2} + 1 \quad 0 \le x \le 4$ $\left[\text{Ans. } \frac{44}{3}\right]$

(iv) $y = 9 - x^2 \quad 1 \le x \le x$ $\left[\text{Ans. } \frac{28}{3}\right]$

(3) **y** का मान बताइए यदि –

(i) $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$ [Ans. $y = e^3x + c$]

(ii) $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 2$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{5x^3}{3} + 2x + c\right]$

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^2$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{x^3}{3} + c\right]$

(iv) $\frac{dy}{dx} = (a+bx)^n$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1} + c\right]$

इकाई – 6 समाकलनन का आर्थिक प्रयोग

6.1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई–5 में हमने समाकलन अवधारणा एवं निर्वचन पर चर्चा की थी। प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत, हम समाकलनन के अर्थशास्त्र में प्रमुख अपयोगों की व्याख्या करेगें। समाकलनन की प्रक्रिया के द्वारा सीमान्त फलन, औसत फलन तथा कुल फलन ज्ञात कर सकते हैं।

6.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोंपरान्त पाठक –

1) कुल लागत/आगम ज्ञात करने की विधि जबकि सीमान्त लागत दिया हो।
2) निश्चित समाकलन
3) समाकलन क्षेत्रफल उपागम विधि
4) समाकलन के अर्थशास्त्र में विभिन्न उपयोग पर जानकारी प्राप्त करेगें।

समाकलन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है विषय को समझाने के लिए कुछ उदाहरण (solved examples) दिये गये हैं, जो समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग, समझनें में सहायक होगें। अन्त में पाठकों से अनुरोध है कि अभ्यास के लिये प्रश्न तथा स्वपरीक्षण के द्वारा अपनी क्षमता का आकलन स्वयं करें।

6.3 लागत फलन

मूल रूप में लागत फलन तथा आगम विष्लेषण के विषय में हम जानते हैं। यहाँ इन पर संक्षिप्त चर्चा के उपरान्त हम समाकलन द्वारा इनका मान ज्ञात करने की विधि पर चर्चा करेगें।

निर्गत (output) तथा आगतों (inputs) के बीच फलनात्मक संबंधों को उत्पादन फलन कहते हैं – $Q = f(L, K)$ A जहाँ Q उत्पादन की मात्रा, तथा L एवम् K श्रम तथा पूँजी साधनों की मात्रायें हैं।

किसी दिये गये उत्पादन फलन में साधनों की मात्रा पर होने वाला व्यय उत्पादन की लागत का माप होग। इस प्रकार उतदन के आधार पर लागत–फलन को प्राप्त किया जा सकता है। अतः लागत–फलन एक व्युत्पन्न फलन (derived function) है, जिसे उत्पादन–फलन से प्राप्त किया जा सकता है।

उत्पादन–फलन की तरह लागत फलन के दो रूप हो सकते हैं – अल्पकालीन लागत फलन तथा दीर्घकालीन लागत फलन।

अल्पाकलीन लागतें (प्रति इकाई) – यद्यपि कुल लागत वक्र बहुत महत्वपूर्ण है पर प्रति इकाई लागत वक्र उपेक्षाकृत अधिक महत्वपूर्ण होता है, प्रमुख अल्पकालीन लागतें है –

1. औसत स्थिर लागत $(AFC)-\frac{TFC}{Q}$ जहाँ Q उत्पादन की मात्रा है।
2. औसत परिवर्तनशील लागत $(AVC)-\frac{TVC}{Q}$
3. औसत कुल लागत $(ATC)-\frac{TC}{Q}=\frac{TFC}{Q}+\frac{TVC}{Q}=AFC+AVC$
4. सीमान्त लागत $MC-\frac{dC}{dQ}$ जो कुल लागत का अवकलन है

6.4 आगम विश्लेषण

किसी फर्म द्वारा क्रय की गई वस्तुओं की कुल इकाइयों से जो आय प्राप्त होती है उसे कुल आय कहते हैं।

कुल आय (Total Revenue) = प्रति इकाई मूल्य $(P)\times$वस्तु की विक्रय की गई कुल इकाइयों की संख्या (Q) = $P\times Q$

कुल आय को यदि कुल विक्रय की गई इकाइयों से भाग दे दिया जाय तो प्राप्त राशि औसत आय के बराबर होगी।

औसत आय (AR) = कुल आय ÷ वस्तु की बिक्री की गई इकाइयों की संख्या।

या $AR=\frac{TR}{Q}=\frac{P.Q}{Q}=P$ (कीमत प्रति इकाई)

सीमान्त आय से तात्पर्य कुल आय की उस वृद्धि से है जो एक अतिरिक्त इकाई के विक्रय से प्राप्त होती है।

सीमान्त आय $(MR)=TR_n-TR_{n-1}$

यदि कुल आय फलन ज्ञात है, तो ऐसी स्थिति में, वस्तु की इकाइयों के सापेक्ष कुल आय की परिवर्तन दर को हम सीमान्त आय कहते हैं।

$$MR = \frac{d}{dQ}(TR) = \frac{d}{dQ}\{f(Q)\} = f'(Q)$$ ए

6.5 अर्थशास्त्र में निम्न प्रकार से समाकलनन का उपयोग किया जा सकता है

6.5.1 लागत फलन

अवकलन करते समय हमें कुल के मान द्वारा सीमान्त का मान ज्ञात होता है। चूँकि समाकलन अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है, अतः सीमान्त का समाकलन करके हमें कुल का मान ज्ञात हो सकता है –

$$MC = \frac{dc}{dx}$$

तो $$c = \int MC.dx = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

नोट – अल्पकाल में कुल लागत कभी भी शून्य नही होती क्योंकि स्थित लागत कभी शून्य नहीं होती। दीर्घकाल में उत्पादन शून्य होने की दशा में स्थिर लागत शून्य हो सकती है।

6.5.2 आगम फलन

जिस प्रकार हम कुल लागत के अवकलन से सीमान्त लागत ज्ञात करते हैं उसी प्रकार कुल आगम के अवकलन से सीमान्त आगम ज्ञात कर सकते हैं, तथा समाकलन विधि से सीमान्त आगम के द्वारा कुल आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं। यदि, सीमान्त आगम $(MR) = \frac{dR}{dx}$ के हैं तो, $TR = \int MR.dx = \int \frac{dR}{dx} \times dx$ तथा $X = 0$ होने की स्थिति में $TR = 0$ होग।

(i) कुल उपभोग (TC) का मान भी सीमान्त उपभोग (MC) के समाकलन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$c = \int \frac{dc}{dy} \times dy$$

(ii) कुल उपयोगिता (Tu) का मान सीमान्त उपयोगिता (Mu) के समाकलन द्वारा निकाला जा सकता है

$$Tu = \int \frac{du}{dx} \times dx$$

(iii) कुल उत्पादन (TP) का मान सीमान्त उत्पादन (MP) के समाकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं –

$$TP = \int \frac{dP}{dq} \times dq$$

6.5.3 लाभ

यदि हमें किसी फर्म के अधिकतम लाभ का मान ज्ञात करना है, तबकि हमारे सीमान्त लागत एवं सीमान्त आगम फलन दिये हुए हैं – तो

अधिकतम लाभ = कुल आगम – कुल लागत

or $\pi = TR - TC$

समाकलन द्वारा $TR = \int \frac{dR}{dx} \times dx$

$$TC = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

$$\pi = \int \frac{dR}{dx} \times dx - TP = \int \frac{dc}{dx} \times dx$$

6.5.4 पूंजी संचयन

पूंजी के वास्तविक स्टॉक में होने वाली वृद्धि को पूंजी संचयन कहते हैं। पूंजी संचयन की दर को $\frac{dk}{dt}$ द्वारा लिखते हैं जहाँ k समय का फलन है।

पूंजी संचयन की दर वही है जो निवल निवेश (It) किसी समय बिन्दु पर होता है।

$$\frac{dk}{dt} = I(t)$$

यदि कुल पूंजी स्टॉक का मान निकालना हो तो पूंजी संचयन की दर $\frac{dk}{dt}$ का समाकलन ज्ञात करना होगा –

$$k(t) = \int I(t)(dt) = \int \frac{dk}{dt} \times dt$$

$$k(t) = \int dk$$

6.5.5 पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त

पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त V. Pareto द्वारा निम्न आय वितरण का सिद्धान्त प्रतिपादित किया गया –

एक दिये हुये जनसंख्या के आकार 'a' में 'N' व्यक्ति जिनकी आय 'X' से अधिक है –

$N = aX^{-b}$ जहाँ 'b' (population parameter) जनसंख्या प्राचल है, जिसका मान 1.5 है।

(i) कुल व्यक्ति जो y_1 और y_2 आय के स्तर के अन्तर्गत है –

$$= \int_{y_1}^{y_2} ax^{-b}\,dx = a\left[\frac{x^{-b}+1}{-b+1}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a}{1-b}\left[y_2^{1-b} - y_1^{1-b}\right]$$

(ii) कुल आय जो y के स्तर से ऊपर है

जब $N = aX^{-b}$ तो

$$dN = a(-b)^{x-b-1}\,dx = abx^{-b-1}\,dx.$$

मान लें कि, $Ndx = dN = abx^{-b-1}\,dx$ जहाँ dN व्यक्ति संख्या में छोटा परिवर्तन है, जबकि आय में वृद्धि हुई हो।

हमें –dN प्राप्त होता है क्योंकि आय के स्तर में वृद्धि होने पर व्यक्ति संख्या कम होती जाती है, कुल आय का स्तर X –

$$xNdx = abx^{-b}.dx$$

कुल आय 'y' के स्तर के ऊपर $= \int_{y}^{\infty} x.Ndx$ होगी

$$= \int_{y}^{\infty} abx^{-b}\,dx = \frac{ab}{y-1}y^{1-b}$$

6.6 अर्थशास्त्र में समाकलन का प्रयोग

⇒ समाकलनन की प्रक्रिया द्वारा हम सीमान्त फलन ज्ञात होने पर कुल फलनों को ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे सीमान्त लागत $= \frac{d}{dq}$ (कुल लागत) होता है

कुल लागत $= \int$ (सीमान्त लागत $\frac{d}{dq}$)

$q =$ कुल उत्पादन है।

⇒ समाकलन – क्षेत्रफल उपागम विधि द्वारा हम उपभोक्ता की बचत को मांगा वक्र के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

⇒ यदि हमें X-axis के ऊपर किसी वक्र के नीचे, किसी तंदहम का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो तो निश्चित समाकलन द्वारा निकाला जा सकता है। पहले हम सीमान्त फलन ज्ञात होने पर कुल फलनों को ज्ञात करने की विधि कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेगें।

6.6.1 सीमान्त फलन से कुल फलन ज्ञात करना –

(i) यदि $MC = 2ax + b$ तो $TC = \int (2ax + b)dx$

$$= ax^2 + bx + c$$

(ii) यदि $MR = -2\alpha x + \beta$ तो

$$= -\alpha x^2 + \beta x + c. \ TR = \int (-2\alpha x + \beta)dx$$

(iii) यदि $MPS = f(y)$ तो $S = \int f(y)dy.$

उपरोक्त उद्धरणों द्वारा, सीमान्त फलन ज्ञात होने की स्थिति में कुल फलन का मान निकालना स्पष्ट किया है।

उदाहरण – यदि सीमान्त आय फलन $MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100$ तो $X = 10$ पर कुल आय ज्ञात कीजिए।

हल $X = 10$ पर कुल आय ज्ञात करने से पूर्व हम कुल आय फलन को ज्ञात करते हैं। तत्पष्चात, कुल आय फलन में $X = 10$ रखने पर हमें 10 इकाई विक्रय की कुल आय ज्ञात हो जाती है जब –

$$MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100$$

$$TR = \int (MR = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 100)\, dX = X^3/20 - 5X^2 + 100X$$

$TR = p.X.$ अर्थात् X का मान शून्य होने पर कुल आय भी शून्य होती है। TR फलन में अचर राशि अनुपस्थित होती है। इस कारण समाकलज फलन में समाकलन अचर 'C' अनुपास्थित है।

अब $X = 10$ रखने पर

$$TR = 10^3/20 - 5.(10^2) + 100(10)$$

$$= 1000/20 - 5(100) + 1000$$

$$= 50 - 500 + 1000 \quad = 550$$

उदाहरण : यदि एक उत्पादक का सीमान्त लागत फलन $MC = x^2 - 14x + 111$ है तथा 3 इकाई की कुल उत्पादन लागत 379 रू0 है तो उत्पादक का कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए।

हल – उत्पादक का सीमान्त लागत फलन,

$$MC = X^2 - 14X + 111$$

अतः $TC = \int (X^2 - 14X + 111)\, dX$

$$= X^2/3 - 14(X^2/2 + 111X + C)$$

$$TC = X^2/3 - 7X^2 + 111X + C$$

6.7 क्षेत्रफल समाकलन द्वारा उपभोक्ता का अतिरेक ज्ञात करना

उदाहरण – एक व्यक्ति का मांग फलन $P = 18 - \frac{x}{3}$ हैं। यदि व्यक्ति वस्तु की 30 इकाइयाँ क्रय करे तो व्यक्ति का उपभोक्ता अतिरेक (Consumer's Surplus) ज्ञात कीजिये।

हल – उपभोक्ता अतिरेक से तात्पर्य उस कीमत अन्तर से है, जो उपभोक्ता वस्तु की एक निश्चित मात्रा के लिये चुकाने को तत्पर है, तथा जो कीमत वह वास्तव में चुकाता है।

उपभोक्ता वस्तु की 30 इकाइयों के लिये जो कुल कीमत देने को तत्पर है, वह $X = 30$ से $X = 30$ इकाइयों तक उत्तरोक्तर उच्चतम कीमतों के योग के बराबर होगी। इस राषि को निम्न छायांकित क्षेत्रफल Chart-1 (Shaded Area) OBCD द्वारा प्रदर्शित किया गया है। परन्तु उपभोक्ता वास्तव में 30 इकाई क्रय करने पर जो कुल कीमत अदा करता है, वह आयत OACD के क्षेत्रपल के बराबर है।

$X = 30$ पर वस्तु की कीमत ज्ञात करने के लिये हम मांग फलन के समीकरण में $X = 30$रखतेहैं–

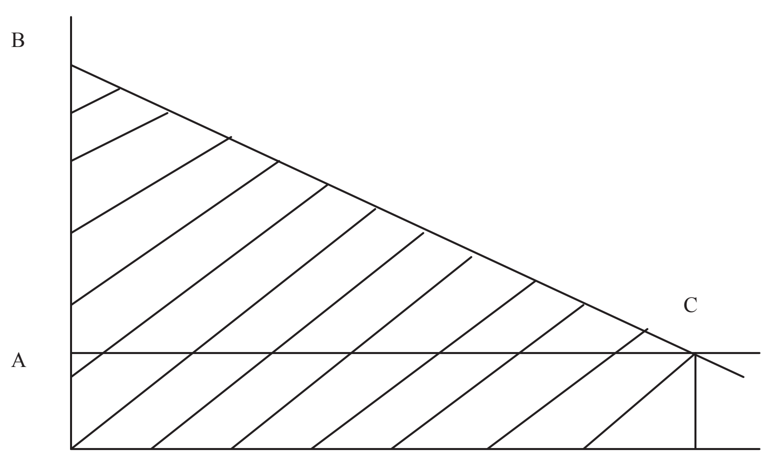


Chart-1 D

6.7.1 उपभोक्ता का अतिरेक

इस सिद्धान्त का प्रतिपादन प्रो0 मार्शल द्वारा किया गया है, किसी वस्तु से वंचित रहने की अपेक्षा उपभोक्ता जो अधिकतम कीमत उसके लिये चुकाने को तैयार है, और जो कीमत वह वास्तव में चुकाता है, इन दोनों कीमतों के अन्तर को ही उपभोक्ता की बचत कहते हैं।

मार्शल की परिभाषा– –'उपभोक्ता किसी वस्तु से वंचित रहने की अपेक्षा उस वस्तु के लिए वास्तव में दिये गये मूल्य की अतिरिक्त जो अधिक मूल्य देने को तैयार हो जाता है, वह इस अधिक संतुष्टि की आर्थिक माप है और इसको उपभोक्ता की बचत कहा जाता है।'

उपयोगिता विश्लेषण के अन्तर्गत, धन की सीमान्त उपयोगिता को स्थिर मानकर सभी उपभोक्ताओं का एक समान उपयोगिता फलन मान लिया जाता है। मांग वक्र द्वारा हम किसी वस्तु की मांग (X) एक दी गयी कीमत (p) पर ज्ञात करने हैं।

यदि $p = f(X)$ वस्तु का मांगा फलन है, तथा उपभोक्ता X_0 मात्रा का क्रय P_0 कीमत पर करता है तो उसका कुल व्यय–

$$TE = P_0 x_0 \text{ होग}$$

कुल उपभोक्ता P_0 से अधिक कीमत देने की तैयार, होंगे, यदि उपभोक्ता X मात्रा क्रय कर चुका है, तो वह dX मात्रा को $fX\,(dX)$ कीमत पर क्रय करने को तैयार होग। इस प्रकार उपभोक्ता द्वारा किया ग्या कुल व्यय X_0 मात्रा के लिये $\int_0^{x_0} f(x)dx$ के बराबर होग।

जहाँ उपभोक्ता अतिरेक–

$$= \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0\, x_0.$$

इसी प्रकार हम निश्चित समाकलन की सहायता से उपभोक्ता अतिरेक का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं।

$$P = 18 - \frac{x}{3}$$

यदि $x = 30$ तो $P = 18 - \frac{30}{3} = 18 - 10.$

$$= 8 \text{ रू0 प्रति इकाई}$$

अतः 30 इकाई वस्तु के लिये उपभोक्ता जो कीमत देने को तत्पर है, वह छायांकित क्षेत्रफल OBCD के बराबर है, परन्तु

क्षेत्रफल BODC $= \int_0^{30}\left(18-\frac{x}{3}\right)dx = \left[18x-\frac{x^2}{6}\right]_0^{30}$

$$= \left[18x30-\frac{30^2}{6}\right]-\left[18x0-\frac{0^2}{6}\right]$$

$$= \left[540-\frac{900}{6}\right] - [0-0]$$

$$= [540 - 150] - [0] = 390 \text{ रू0}$$

अतः उपभोक्ता का अतिरेक $= 390 - 240$

$= 150$ रू0

उपभोक्ता अतिरेक को हम निम्न प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं–

$$CS = \int_0^x P(x)dx-P.x.$$

जहाँ CS, उपभोक्ता का अतिरेक है, तथा $P(x)$ मात्रा के रूप में उपभोक्ता का मांग फलन है।

6.7.2 निश्चित समाकलन

निश्चित समाकलन एक महत्वपूर्ण दृष्टिकोण है, गणितीय रूप से यौगिक अभिव्यक्ति तथा अरेखीय शब्दावली मे वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। जहाँ अनिश्चित समाकलनन को कोई निश्चित अंकात्मक मान नही होता। वही निश्चित समाकलन का एक निश्चित अंकात्मक मान होता है। यदि $f(x)$ सीमा (a,b) के भीतर एक सतत् फलन है (सीमा ˙ और b के भीतर)

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

जहाँ $\int f(x)dx = f(x) + c$

इसमें a को निचली सीमा और b को ऊपरी सीमा कहते हैं। इसके आधार पर –

$$\int_1^2 x^3dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

और $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0.$

$= e - 1.$

किसी वक्र के भीतर के क्षेत्रफल के रूप में हम निश्चित समाकलन को व्यक्त कर सकते हैं। इसे ही समाकलनन का आधारभूत प्रमेय भी कहते हैं। मान लेते हैं कि f(X) एक सतत फलन है जिसे वक्र के रूप में दिखा रहे हैं। अन्तराल (a,b) पर इस वक्र के भीतर का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिये एक छोटी पट्टी (strip) जिसकी चौड़ाई (width) $\Delta x_1 (x_2 - x_1)$ को लेते हैं। इसकी ऊँचाई $g(x_1)$ है।

इस पट्टी का क्षेत्रफल $f(x_1).\ \Delta x_1$ होगा ।

इसी तरह यदि हम पट्टियाँ लें जिसकी चौड़ाई $\Delta x_i (i=1,2,....,\sim)$ हो तथा संगत ऊँचाई $f(x_i)(i=1,2,....,\sim)$ हो तो हम छोटे आयत प्राप्त करेगें जिसमें प्रत्येक का क्षेत्रफल $f(n_i)\Delta x_i \ \ i=1,2,...,\sim$ होगा।

इस क्षेत्रफल का योग $\sum_{i=1}^{\sim} f(x_i),\ \Delta x_i$ होगा।

वक्र के भीतर के वास्तविक क्षेत्रफल को व्यक्त करने के लिये आवश्यक है कि आयात की चौड़ाई बहुत सूक्ष्म है और यह तभी सम्भव है जब ~ बहुत बड़ा हो या ~ अनन्त की तरफ अग्रसर हो। इस स्थिति में आयत बहुत पतला होता जाएगा (लगभग एक सीधी रेखा की तरह) और अन्तराल (a,b) के लिये वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को एक सीमा के रूप में लिख सकेंगें।

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\sim} f(x_1).\Delta x_i$ इस रूप में प्रस्तुत क्षेत्रफल खण्डित योग है। यदि हम सीमा के रूप में प्रस्तुत करें तब सतत् प्रकृति का होगा । अर्थात् –

$$A = \int_a^0 f(x).dx$$

उपर्युक्त दोनों रूप में समानता पर ध्यान देना चाहिये। खण्डित संख्याओं $f(x_i)$ और Δx_i का fX और dX वास्तव में एक सतत् उपभाग है। इस स्थिति में खण्डित योग का

चिन्ह सतत् योग के चिन्ह $\int$ द्वारा प्रतिस्थापित हो जाता है। इस प्रकार वक्र $y=f(x)$ का क्षेत्रफल दो सीमाओं (a,b) के लिये निश्चित समाकलन के रूप में लिखा जा सकता है।

क्षेत्रफल $\quad abBA = \int_a^b f(x)x = F(b) - F(a)$

6.8 उत्पादक का अतिरेक

जिस प्रकार हम उपभोक्ता का अतिरेक धन की उपयोग्िता स्थिर होने की दशा में ज्ञात करनते हैं उसी प्रकार, उत्पादक अतिरेक में भी हम यही मानते हैं कि धन की उपयोग्िता समान है तथा सभी उत्पादकों के उत्पादन फलन एक समान है।

यदि $p=f(x)$ पूर्ति फलन है, तथा p बाजार कीमत है तो मान लेते हैं कि उत्पादक X_0 मात्रा विक्रय करता है p_0 कीमत पर यह संतुलन कीमत है तथा उत्पादक का आगम =

$$R = p_0 x_0$$

जहाँ बाजार में अन्य उत्पादक p_0 कीमत से कम कीमत पर विक्रय करेगें तो उत्पादक जो X मात्रा का विक्रय कर चुका है अब dX मात्रा का विक्रय $f(X)$ कीमत पर करेगा। अतः कग से कुल आगम बराबर होगा $f(X)\,dX$ के तथा कुल आगम X के विक्रय द्वारा –

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

उत्पादक अतिरेक $= p_0x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$

उत्पादक अतिरेक को निश्चित समाकलन द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है –

उत्पादक अतिरेक $= OP_0TX_0$ का कुल क्षेत्रफल $- OS_1TX_0$ वक्र का क्षेत्रफल = पूर्ति वक्र का हिस्सा P_0S_1T $= p_0x_0 - f(x)\,dx$

$$= p_0x_0 - \int_0^{x_0} p.dx$$

उदाहरण – 9. यदि सीमान्त आगम फलन $MR = \frac{ab}{(x-b)^2} - C$ तो समाकलन द्वारा कुल आगम फलन ज्ञात कीजिए। यदि एक स्थिति में TR = 0 जब X = 0 हो तो सिद्ध कीजिए कि $AR = \frac{a}{b-x} - C$ के हैं।

$$MR = \frac{dR}{dx} = \frac{ab}{(x-b)^2} - C$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर (X के लिये)

$$dR = \frac{ab}{(x-b)^2} dx - cdx$$

$$\int dR = ab \int \frac{dx}{(x-b)^2} - c \int dx$$

$$R = ab\ \frac{(x-b)^{-1}}{-1} - cx + k$$

हमें पता है कि $X = 0$ तथा $R = 0.$

$$0 = \frac{ab(-b)^{-1}}{1} + 0 + k$$

$$0 = -\frac{ab}{b} - 0 + k$$

or $k = -a$

अतः

$$R = \frac{-ab}{x-b} - cx - a$$

औसत फलन $= \frac{TR}{x} = -\frac{ab}{x(x-b)} - C - \frac{a}{x}$

$$AR = P = \frac{-ab}{x(x-b)} - \frac{a}{x} - C = \frac{-ab - ax + ab}{x(x-b)} - C$$

$$= \frac{-ax}{x(x-b)} - C = \frac{a}{x-b} - C = \frac{a}{b-x} - C$$ अतः सिद्ध

6.9 समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग

उदाहरण : 1

1. जब सीमान्त लागत फलन $MC = 2+5e^x$ (a) दिया हो तो (a) C का मान ज्ञात कीजिए जब $C(o) = 100$ (b) औसत लागत ज्ञात कीजिए (c) C, MC, AC का मान X =60 पर ज्ञात कीजिए ।

हल $$\frac{dc}{dx} = 2 + 5e^x$$

$$dc = 2\,dx + 5e^x dx$$

$$\int dc = 2\int dx + 5\int e^x\,dx$$

$$c = 2x + 5e^x + k$$

$$x = 0\ C(o) = 100$$

$$100 = 5e^o + k \text{ या } k = 95$$

$$C = 2x + 5e^x + k$$

$$AC = \frac{C}{x} = 2 + \frac{5e^x}{x} + \frac{95}{x}$$

जब $X = 0$ तो

$$AC = 2 + \frac{5e^{60}}{60} + \frac{95}{60}$$

$$MC = 2 + 5e^{60}.$$ (उत्तर)

उदाहरण : 2 यदि X इकाइयों सीमान्त लागत फलन $\frac{a}{\sqrt{ax+b}}$ तथा यदि लागत शून्य है तो x का कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\frac{dc}{dx} = MC = \frac{a}{(ax+b)^{1/2}}$$

$$dc = a(ax+b)^{-1/2}\,dx$$

समाकलित करते हुए,

$$\int dc = a\int (ax+b)^{-1/2}\ dx$$

$$c = a.\frac{(ax+b)^{1/2}}{\frac{1}{2} \times a} + k$$

$$c = 2(ax+b)^{1/2} + k$$

यदि $C(o) = 0$ दिया है तो

$$0 = 2(b)^{1/2} + k$$

$$k = -2\sqrt{b}.$$

$$C = 2(ax+b)^{1/2} - 2\sqrt{b}.$$

$$= 2\left[(ax+b)^{1/2} - (b)^{1/2}\right]$$ उत्तर

उदाहरण रू 3 लागत फलन ज्ञात कीजिए जब सीमान्त लागत फलन

$$MC = 1000 - 20x + x^2$$

जहाँ x उत्पादित इकाई हैं तथा स्थिर लागत Rs. 9000 है–

हल : $\frac{dc}{dx} = 1000 - 20x + x^2$

$$\int dc = 1000\int dx - 20\int x\ dx + \int x^2\ dx$$

$$C = 1000x - \frac{20x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k.$$

$$x = 0 \quad c = 9000$$

$$9000 = 0 - 0 + k.$$

$$k = 9000$$

$$c = 9000 + 1000x - \frac{20x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ (उत्तर)

उदाहरण : 4 यदि सीमान्त आगम फलन x इकाई के लिये $MR = \frac{6}{(x+2)^2} + 5$ है तो कुल आगम फलन तथा मांग फलन ज्ञात कीजिए –

हल : सीमान्त आगम $MR = \frac{6}{(x+2)^2} + 5$

$$R = \int MR\, dx = \int 6(x+2)^{-2}\, dx + 5\int dx$$

$$= \frac{6(x+2)^{-1}}{-1} + 5x + k.$$

$$x = 0 \quad R = 0.$$

$$0 = \frac{-6}{x+2} + 5x + k$$

$$0 = \frac{-6}{2} + 0 + k$$

$$k = 3$$

$$R = \frac{-6}{x+2} + 5x + 3$$

$$= 3 - \frac{6}{(x+2)} + 5x$$

$$= \frac{3x+6-6}{x+2} + 5x$$

$$= \frac{3x}{x+2} + 5x$$

मांग फलन $AR = P = \frac{R}{x}$

$$P = \frac{3}{x+2} + 5$$ उत्तर

उदाहरण 5 – ABC लिमिटेड कम्पनी वस्तु का सीमान्त आगम फलन $MR = 20x - 2x^2$ हैं, इस फर्म का अधिकतम लाभ पर उत्पादन, कुल लाभ इष्टतम उत्पादन पर ज्ञात कीजिए।

हल – लाभ अधिकतम उत्पादन, $MR = MC$

$20 - 2x^2 = 81 - 16x + x^2$

$-3x^2 + 36x - 81 = 0$

$3x^2 E - 36x + 81 = 0$

$x^2 - 36x + 81 = 0$

$x^2 - 12x + 27 = 0$

$(x-3)(x-9) = 0$

$x = 3$ तथा $x = 9$

लाभ अधिकतम करने के लिये –

$\frac{d}{dx}[MR - MC] < 0$ जहाँ $x = 3, 9$

$x = 3$ पर $\frac{d}{dx}[MR - MC] =$

$-6x + 36 = -18 + 36 = 18 > 0$ तथा

$x = 9$ पर $\frac{d}{dx}[MR - MC] = -6x + 36 = -54 + 36$

$= -18 < 0.$

अतः लाभ अधिकतम $x = 9$ पर $x = 9$ पर अधिकतम लाभ

$$= \int_0^9 (MR - MC)\,dx$$

$$= \int_0^9 \left(-3x^2 + 36x - 81\right)dx$$

$$= \left[-x^3 + 18x^2 - 81x\right]_0^9$$

$$= -(9)^3 + 18(9)^2 - 81(9)$$

$= 0$ उत्तर

उदाहरण : 6 एक वस्तु का मांग फलन $p = 10 - 29.$

इसका उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिए जब

(i) $p_0 = 0$ (ii) $p_0 = 1$ (iii) $p_0 = 5$.

हल p = 10-29. यदि $p_0 = 0$ तो q = 5.

C.S. = $\int$ मांग फलन - $p \times q$

$$= \int (10-2q)\,dq - p \times q$$

$$= \int_0^5 (10-2q)\,dq - 0 \times 5$$

$$= \left[10q - q^2\right]_0^5 - 0$$

$$= [50-25]$$

$$= 25.$$ उत्तर

(ii) $p_0 = 1;\ 1 = 10 - 2q;\ q = q/2 = 4\frac{1}{2}$

$$C.S. = \left[10q - q^2\right]_0^{q/2} - 1 \times \frac{9}{2}$$

$$= \frac{10 \times 9}{2} - \frac{81}{4} - \frac{9}{2}.$$

$$= \frac{180 - 81 - 18}{4}$$

$$= \frac{81}{4}$$ उत्तर।

(iii) $p_0 = 5;\quad t = 10 - 2q$

$$2q = 5 \qquad q = 5/2$$

$$C.S. = \left[10q - q^2\right]_0^{5/2} - 5 \times \frac{5}{2}$$

$$= 10 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{4} - \frac{25}{2}$$

$$= \frac{100 - 25 - 50}{4} = \frac{25}{4}$$ उत्तर।

उदाहरणः 7 यदि वस्तु के मांग एवं पूर्ति फलन निम्न है –

$$pd = 18 - 2x - x^2$$

$$P_s = 2x - 3$$

तो उपभोक्ता अतिरेक तथा उत्पादक अतिरेक ज्ञात कीजिए।

संतुलन कीमत पर $pd = ps$.

अतः $18 - 2x - x^2 = 2x - 3$

$\therefore x = 3$

$X = 3$ तथा $p = 3$ पर

(C.S.) उपभोक्ता अतिरेक $= \int_0^3 (18 - 2x - x^2)\, dx - 3 \times 3$

$$C.S. = \left[18x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 9$$

$$C.S. = [54 - 9 - 9] = 27 \text{ units}$$

(b) उत्पादक अतिरेक $3 \times 3 - \int_0^3 (2x - 3)\, dx$

$$P.S. = 9 - \left[x^2 - 3x\right]_0^3$$

$$= 9 - [9 - 9] = 9 - 9 + 9 = 9 \text{ units.}$$

उदाहरणरू 8. यदि शुद्ध प्रतियोगिता में मांग, पूर्ति फलन क्रमशः दिये हों –

$$p_d = \frac{8}{x+1} - 2 \quad P_s = \frac{1}{2}(x+3)$$

तो उपभोक्ता अतिरेक एवं उत्पादक अतिरेक ज्ञात कीजिए –

संतुलन कीमत पर $p_d = p_s$

अतः $\dfrac{8}{x+1} - 2 = \dfrac{x+3}{2}$

$$\frac{8 - 2x - 2}{x+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\frac{6-2x}{x+1}=\frac{x+3}{2}$$

$$12-4x \;=\; x^2+4x+3$$

$$x^2+4x+4x-9=0$$

$$x^2+8x-9=0$$

$$x^2+9x-x-9=0$$

$$x(x+9)-1(x+9)=0$$

$$x=-9,\;\; x=1$$

$p=2$ at $X=1$. क्योंकि $X=9$ संभव नहीं

उपभोक्ता अतिरेक $(C.S.)=\int_0^1\left(\frac{8}{x+1}-2\right)dx-2\times1$

$$C.S.=\left[8\log(x+1)-2x\right]_0^1-2$$

$$C.S.=8\log2-2-2$$

$C.S.=8\log2-4$ (उत्तर)

उत्पादक अतिरेक $(P.S.)=2\times1-\int_0^1\frac{x+3}{2}\,dx$

$$P.S.=2\times1-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}3x\right]_0^1$$

$$P.S.=2\times1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$P.S.=2-\frac{7}{4}$$

(उत्तर) $P.S.=\frac{1}{4}$ इकाई

6.10 चिन्ह

यदि वक्र $y = f(X)$ अन्तराल (a, b) के लिये धनात्मक है और वक्र X-अक्ष से ऊपर है तो धनात्मक होग। इसके विपरीत यदि $y=f(X)$ अन्तराल (a,b) के लिये ऋणात्मक है और वक्र अक्ष के नीचे है तो $\int_a^b f(x).dx$ ऋणात्मक होग। यदि $y = f(X)$ चिन्ह परिवर्तित करता है। (निश्चित अन्तराल) में तथा वक्र X-अक्ष को पार करता है तो एसी स्थिति में कुल क्षेत्रफल धनात्मक क्षेत्रफल और ऋणात्मक का बीजगणितीय योग होगा।

6.11 निश्चित समाकलन – विशेषताएँ

निश्चित समाकलन की कुछ महत्वपूर्ण विषेषताएँ होती हैं जो निम्न हैं –

(i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

(ii) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(iii) $\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)(a < b < c < d)$

(iv) $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

(v) $\int_a^b tf(x)dx = f\int_a^b f(x)\, dx$

(vi) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

6.12 सारांश

⇒ समाकलन विधि के प्रयोग से कुल लागत / आगम तथा औसत लागत / आगम का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है, जबकि सीमान्त लागत / आगम का मूल्य दिया हो।

$\Rightarrow$ आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन – यदि उचित भिन्न में हर की घात दो या दो से अधिक हो, तथा हर का गुणनखण्ड किया जा सके तो उसे उचित भिन्न में परिवर्तित कर के उनका समाकलन किया जा सकता है।

$\Rightarrow$ आंशिक भिन्न के प्रमुख तथ्य देखें –

$\Rightarrow$ यदि सीमान्त लागत $=\frac{d}{dq}$ हो समाकलन द्वारा कुल लागत $=\int\left(\frac{d}{dq}\right)$ जहाँ $q =$ कुल उत्पादन है।

सीमान्त आगम $=\frac{d}{dR}$ तो कुल आगम $=\int\left(\frac{d}{dR}\right)$

$\Rightarrow$ निश्चित समाकलन के द्वारा हम वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करते हैं।

$\Rightarrow$ निश्चित समाकलन का निश्चित अंकात्मक मान होता है। निश्चित समाकलन की विशेषताएँ देखें –

$\Rightarrow$ समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग सीमान्त लागत द्वारा कुल लागत; सीमान्त उपभोग द्वारा कुल उपभोग; सीमान्त उत्पादन द्वारा कुल उत्पादन ज्ञात करने के लिये किया जाता है।

6.13 शब्दावली

निश्चित समाकलनन	.	Definite Integral
सीमान्त	.	Marginal
पूंजी संचयन	.	Capital Formation
फलन	.	Function
आगम	.	Revenue
क्षेत्रफल समकलज	.	Area Integral

6.14 अभ्यास के लिये प्रश्न

Part-1 I- वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

i) यदि MC=2aX+b हो तो TC बराबर होगा –

1- $2aX+b/X$ 2- $4a^2X+0$

3- $aX+1$ 4- aX^2+bX+c

ii) यदि एक व्यक्ति का मांग फलन $P=18-X/3$ है तो 30 इकाई कय करने पर C.S. होगा –

1- 120 2- 240

3-380 4-कोई नहीं

iii) यदि $AC=100-2X-0.5X^2$ के तो (X=4) TC बराबर होग.

1- $100-4X+1.5X^2$ 2-$100X-2X^2+0.5X^3$

3- $200-4X-X^2$ 4- कोई नहीं

iv) यदि P_1 P_2 तथा Q_1 Q_2 दिये ग्ये हैं तो पूर्ति रेखा का समीकरन क्या होग.

1- $P_1+P_2=Q_1+Q_2/ Q_1+Q_2$ 2- $P_1-P_2 = P_2-P_1/Q_2-Q_1(Q_1-Q_2)$

3- $P_1/Q_1\ XQ_2/P_2$ 4. को ई नहीं

v) यदि उपभोग फळन दिया ग्या हो तो हम .... का मान निकाळ सकतें हैं.

1- MPC 2-MPC & MPS

3- MPS 4- कोई नहीं

उत्तर : 1-(iv) 2-(ii) 3-(ii) 4-(ii) 5-(ii)

II] सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

i) यदि उपभोक्ता का मांग वक्र दिया गया हो तो एक निश्चित मात्रा कय करनें पर C.S. ज्ञात की जा सकती है ।

ii) MC का समाकलनन MR है ।

iii) यदि mps दिया गया हो तो TC ज्ञात की जा सकती है ।

iv) यदि MR का मान $-2aX+b$ तो $TR=-aX^2+bX+c$ होगा ।

v) समाकलनन का मान निश्चित होने के कारन इसे निश्चित समाकलनन कहतें हैं

उत्तर : 1-(T) 2-(F) 3-(F) 4-(T) 5-(T)

(1) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_{2}^{3}(e^{2n}+e^{n})\,dx$ (ii) $\int_{1}^{4}\sqrt{xdx}$

(iii) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (iv) $\int_{2}^{3}xe^{x}\,dx$

(v) $\int_{a}^{b}\log ndx$ (vi) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$

(vii) $\int_{4}^{5}\frac{x}{1+x^{2}}\,dx$

(2) निम्न वक्रों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) $y = x^{4} \quad 1\le x\le 4$

(ii) $y=x^{2}+4x+5 - 2\le x\le 1.$

(iii) $y = \frac{x^{2}}{2}+1. \quad 0\le x\le 4$

(iv) $y=9-x^{2} \quad 1\le x\le x$

(3) y का मान बताइए यदि –

(i) $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = 5x^{2}+2$

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^{2}$

(iv) $\frac{dy}{dx} = (a+bx)^{\sim}$

Part.2 **अभ्यास के लिये प्रश्न**

प्र0 1 यदि मांग फलन $p = e^{-X}$ तथा $p = 0.5$ तो उपभोक्ता का अतिरेक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1 – $\frac{1}{2}[1-\log e^2]$ इकाई

प्र0 2 . यदि मांग एवं पूर्ति फलन दिये हैं क्रमशः $pd = (6\text{-}X)^2$ तथा $P_s = 14+X$ तो एकाधिकार के अन्तर्गत उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिये।

उत्तर 2 . $X = 1$ $C.S. = \frac{16}{3}$ इकाई

प्र0 3 . यदि सीमान्त आगम फलन दिया है –

$$MR = \frac{4}{(2x+3)^2} - 1.$$

तो सिद्ध कीजिए कि औसत आगम फलन बराबर होगा

$$= AR = \frac{4}{6x+9} - 1$$ के।

प्र0 4 . यदि सीमान्त लागत $MC = 3X+4$ है तथा कुल स्थिर लागत = Rs. 10 तथा $p = 40$ प्रति इकाई है तो ज्ञात कीजिए –

(i) कुल लागत फलन

(ii) आगम फलन

(iii) अधिकतम लाभ

उत्तर 4 . [X = 12, अधिकतम लाभ =2-6]

प्र0 5 . एकाधिकार के अन्तर्गत कीमत एवं उत्पादन इकाई का निर्धारण मांग फलन द्वारा किया जाता है। यदि मांग फलन (लाभ अधिकतम एकाधिकार में) $p = 274 - X^2$ तथा $MC = 4+3X$, तो उपभोक्ता अतिरेक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5. [C.S. = 486 इकाई ,

प्र0 6– यदि सीमान्त लागत $MC = 20000\text{-}320\ X - 3X^2$ जहाँ X उत्पादन की इकाई है, तथा स्थिर लागत = 18,000 तो ज्ञात कीजिए –

(i) लागत फलन

$$30(i)\ [4800x + 160x^2 - x^3 - 18000]$$

(ii) लाभ फलन

30(ii) $[4800x+160x^2-x^3-18000]$

(iii) आगम फलन

30(iii) $[6800x]$

(iv) अधिकतम लाभ पर उत्पादन इकाई

30 (iv) $[X=120]$

(v) लाभ जहाँ $X=120$ हो।

30(v) [Rs=1746000]

प्र0 7 यदि $MC=6+10x-6x^2$ है, तो कुल लागत एवं औसत लागत फलन ज्ञात कीजिए जबकि प्रति इकाई कुल लागत Rs. 12 है ।

30.7 $[TC=6x+5x^2-2x^3+3]$

$$\left[AC=6+5x-2x^2+\frac{3}{x}\right]$$

प्र0 8 यदि कुल लागत फलन $100+3x+4x^2+5x^3$ तो सीमान्त लागत फलन एवं समाकलनन द्वारा पुनः लागत फलन ज्ञात कीजिए।

30.8 $[MC=3+8x+15x^2]$

6.15 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) –परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई 7 आव्यूह

7.1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई में हम समाकलनन के अर्थशास्त्र में प्रमुख अपयोगों की व्याख्या की , प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत हम संख्याओं के आयताकार अंकायत अथवा क्रम विन्यास आव्यूह प्रमुख अपयोगों की व्याख्या करेगें। यह संख्याएँ या तो वास्तविक अथवा सम्मिश्र हो सकती है। इसका सामान्य रुप निम्न है . आव्यूह का स्वरुप।

$$\begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोंपरान्त पाठक –

आव्यूह– आव्यूह क्या है?एक आव्यूह के स्वरुप, क्रम , उपयोग्तिा, सारणिक तथा आव्यूह में अन्तर , आव्यूह के प्रकार, आव्यूह बीजगणित , आव्यूहों की समानता, आव्यूह का योग तथा आव्यूह का घटानाए अदिश गुणन, आव्यूह गुणन, परिवर्त्त आव्यूह की कुछ विशेषताएँ और संछेद, संछेद, आव्यूह की कोटि, आव्यूह का व्युत्क्रम, एक घातीय युगपत समीकरणों के हल में आव्यूह का प्रयोगए युगपत समीकरणों के द्वारा आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करनाए आव्यूह प्रथक्करण , पर जानकारी प्राप्त करेगें।

विषय को समझाने के लिए कुछ उदाहरण दिये गये हैं, जो आव्यूह के अर्थशास्त्र में प्रयोग को, समझनें में सहायक होंगें। अन्त में पाठकों से अनुरोध है कि अभ्यास के लिये प्रश्न तथा स्वपरीक्षण के द्वारा अपनी क्षमता का आकलन स्वयं करें।

7.3 आव्यूह का क्रम

यह mxn क्रम का एक आव्यूह है जहाँ m पंक्ति और g स्तम्भ के लिए प्रयुक्त है। किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या को आव्यूह का क्रम (order of Matrix) कहते हैं तथा इसे mby n (mxn) पढ़ते हैं। क्रम विन्यास की भीतर स्थित संख्याओं या उनके प्रतीकों को अवयव कहते हैं। सामान्य रुप में इन्हें सारणिकों की तरह ंपर से लिखते हैं। जहाँ 'I' पंक्ति और र स्तम्भ के लिये प्रयुक्त किया जाता है।

सामान्य आधार पर

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ 2X3 क्रम का आव्यूह है।

इसी प्रकार से

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 83 \\ 12 \end{bmatrix}$$ 2X3 क्रम का आव्यूह है।

आव्यूह को हम ब्रेकेट या [ ] या *AA* से प्रदर्शित करते हैं। सामान्यतया इसे '[ ]' से प्रदर्शित किया जाता है। अग्रेंजी के बड़े अक्षर A, B, C इत्यादि आव्यूह के लिए प्रयुक्त किए जाते हैं।

7.4 आव्यूह की उपयोगिता

आव्यूह गणितीय विश्लेषण में बहुत उपयोगी है क्योंकि हमें अनेकों बार एक अकेली संख्या नहीं बल्कि संख्याओं के समूह की आवश्यकता पड़ती है और इस समूह को आव्यूह के क्रम में व्यक्त किया जा सकता है। बीजगणित और रैखिक समीकरण में आव्यूह का व्यवस्थित प्रयोग निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो सकता है। यदि तीन समीकरण निम्न रुप से दिये गये हैं–

$$a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = d_1$$
$$b_1x_1 + b_2n_2 + b_3n_3 = d_2$$
$$c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3 = d_3$$

तो गुणांकों, चरों और स्थिर राशियों या प्राचलों को तीन क्रम विन्यास में निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & C_3 \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ और } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

और उपर्युक्त समीकरणों का रुप अब इस प्रकार होगा।

A X = D

7.5 आव्यूह का उपयोग

आव्यूह के द्वारा हमें–

(1)समीकरण लिखने की विधि

(2)समीकरण से सम्बद्ध होकर हल के अस्तित्व की जाँच तथा पता लगने की विधि प्रदान करती है।

7.6 सारणिक तथा आव्यूह में अन्तर

सारणिक और आव्यूह की धारणा एक दूसरे से जुड़ी है लेकिन इन दोनों में अन्तर इस प्रकार है।

सारणी – 1

आव्यूह	सारणिक
• विभिन्न संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है।	• एक संख्यात्मक मान होता है।
• आव्यूह में पंक्ति और स्तम्भों की भिन्न संख्याएँ भी हो सकती हैं।	• सारणिक सदैव m=n की स्थिति होती है।
• किसी अचर राशि से आव्यूह में गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता है।	• किसी अचर राशि से सारणिक में गुणा करने पर उसके किसी एक पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवों में गुणा होता है।

7.7 आव्यूह के प्रकार[1]

(1) शून्य आव्यूह (Null Matrix)

एक ऐसी आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाती है। इसे [0, लिखा जाता है–

$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 2X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

[1] (1) शून्य आव्यूह (2) वर्ग की आव्यूह (3) इकाई आव्यूह (4) विकर्ण आव्यूह (5) आदिश आव्यूह (6) त्रिभुजीय आव्यूह (7) सममित और विषम सममित आव्यूह (8) परिवर्त्त आव्यूह (9) सदिश आव्यूह (10) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह

$$0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 3X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

(2) वर्ग की आव्यूह (Square Matrix)

जिस आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं।

यदि m=n तो आव्यूह को nXn क्रम की या n क्रम का वर्ग आव्यूह कहते हैं।

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{2n}\\a_{n1}&a_{n2}&a_{nn}\end{bmatrix}n\times n$$ क्रम की वर्ग आव्यूह है।

इस आव्यूह में $a_{11}, a_{22},\ldots a_{nn}$ को मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) के अवयव कहते हैं।

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}=2\times 2$$ की वर्ग आव्यूह है।

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&3&7\\-1&5&9\end{bmatrix}=3\times 3$$ क्रम की वर्ग आव्यूह है।

(3) इकाई आव्यूह (Identity Matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण पर I हो और अन्य अवयव शून्य हो तो इस तरह के आव्यूह को इकाई आव्यूह कहते हैं। इसे 'I' के द्वारा चिह्नित किया जाता है।

क्रम को बताने के लिए I_2, I_3 या I_n लिख देते हैं जिसका अर्थ क्रमश 2X2, 3X3 और दग्द क्रम की इकाई आव्यूह से होता है।

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&I_n\end{bmatrix}$$

(4) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

ऐसे आव्यूह जो वर्ग आव्यूह हो और जिसके मुख्य विकर्ण के अवयवों को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हो विकर्ण आव्यूह कहलाती है।

इसके अन्तर्गत मुख्य विकर्ण पर समान अवयव होना आवश्यक नहीं है।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ एक 3X3 की विकर्ण आव्यूह है जिसका मुख्य विकर्ण पर 3,4,1 और अन्य जगह पर शून्य है।

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} 2x2$$ की विकर्ण आव्यूह है।

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ भी 3X3 की एक विकर्ण आव्यूह है।

विशेष नाम (आदिश आव्यूह) दिया जाता है।

(5) आदिश आव्यूह (Scalar Matrix)

एक ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण पर समान अवयव हो और अन्य जगह शून्य हो तो इसे आदिश आव्यूह कहते हैं। इस प्रकार अदिश आव्यूह, विकर्ण आव्यूह की एक विशेष दशा है।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ एक 3X3 का अदिश आव्यूह है।

(6) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix)

त्रिभुजीय आव्यूह एक ऐसी वर्ग आव्यूह है जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हो जैसे–

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

I. मुख्य विकर्ण के नीचे के अवयव शून्य है। इसे 'अपर त्रिभुजीय आव्यूह' (Upper Triangular Matrix) कहते हैं

ठ.मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य है। इसे लोअर त्रिभुजीय आव्यूह (Lower Triangular Matrix) कहते हैं।

(7) सममित और विषम सममित आव्यूह (Symmetric and Skew Symmetric Matrix)

ऐसी वर्ग आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं जिसमें aij = aji (सभी i और j के लिए) ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में इस प्रकार बदला जाए कि–

प्रथम पंक्ति – प्रथम स्तम्भ

द्वितीय पंक्ति – द्वितीय स्तम्भ

इस प्रकार नयी आव्यूह और पुरानी आव्यूह बराबार ही रहे तो ऐसी आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं।

ऐसे आव्यूह में मुख्य विकर्ण के दोनों तरप के अवयव एक दूसरे के समान होते हैं।–

उदाहरणार्थ–

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 3x3 की एक विषम सममित आव्यूह है।

सममित आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त्त (Transposed) मूल आव्यूह के बराबर होता है। अर्थात् $A^T = A$

(8) परिवर्त्त आव्यूह (Transposed Matrix)

यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो वही आव्यूह मूल आव्यूह की परिवर्त्त आव्यूह कहलाती है। परिवर्त्त आव्यूह को आव्यूह के ऊपर (T) या (-) लगाकर दिखाया जाता है। जैसे–

यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1\, b_1\, c_1 \\ a_2\, b_2\, c_2 \end{bmatrix}$

इसका परिवर्त्त आव्यूह A^T या A^1

$$=\begin{bmatrix} a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2 \\ c_1\, c_2 \end{bmatrix}$$

यह स्पष्ट है कि यदि मूल आव्यूह का क्रम उग्द होग तो परिवर्त्त आव्यूह का क्रम उग्द हो जायेग।

$A=\begin{bmatrix} 234 \\ 156 \end{bmatrix}$ 2X3 क्रम की आव्यूह है, इसका परिवर्त्त आव्यूह

$A^T=\begin{bmatrix} 21 \\ 35 \\ 46 \end{bmatrix}$ 3×2 क्रम की आव्यूह है।

(9) सदिश आव्यूह (Vector Matrix)

सदिश आव्यूह ही एक विशेष दशा है जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो उसे पंक्ति सदिश (Row vector) अथवा पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) कहते हैं। जैसे [a_1, a_2,…a_n] या [1,2,3] ;k [5,9,7] इसके विपरीत m x 1 क्रम की आव्यूह जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो, स्तम्भ सदिश या स्तम्भ आव्यूह कहलाती है। जैसे–

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix}_{m\times1}$ या $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times1}$ या $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ \end{bmatrix}_{2\times1}$

(10) अव्युक्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix)ऐसी वर्ग आव्यूह जिससे सम्बद्ध सारणिक का मान शून्य हो तो अव्युतक्रमणीय आव्यूह कहलाती है। हमने पूर्व में देखा था (Table-1) कि सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मूल्य है।

यदि आव्यूह A निम्न हो–

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तो इसका सारणिक

$$|A|=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

अतः आव्यूह अव्युतक्रमणीय आव्यूह है। यदि किसी आव्यूह के संगत सारणिक का मान शून्य न हो तो इसे व्युत्कमणीय (Non Singular Matrix) कहते हैं।

7.8 आव्यूह बीजगणित

आव्यूह बीजगणित के अन्तर्गत निम्न प्रमुख बिन्दु आते हैं–

(1) आव्यूहों की समानता

(2) आव्यूहों का योग और अन्तर

(3) आव्यूहों का गुणा

7.8.1 आव्यूहों की समानता

दो आव्यूह एक समान कहे जायेंगें यदि वे सर्वसम (Identical) हों अर्थात्

(1) दोनों आव्यूहों में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान हो अर्थात दोनों का क्रम समान हो।

(2) दोनों आव्यूहों की पंक्तियों और स्तम्भों के अवयव एक ही हों अर्थात सभी i और j के मानों पर aij=bij । इसी बात को हम इस प्रकार कह सकते हैं कि दोनों के अवयवों में स्थितिजन्य समानता हो।

यदि आव्यूह
$$[A]=\begin{bmatrix}a+b & 2c+d\\ a-b & c-d\end{bmatrix}$$
$$[B]=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

तो [A] और [B] बराबार होंगे यदि–,

b=3 तथा 2c+d=5

-b=1 तथा c-d=4

अतः =2, b=1, c=3, d=-1

7.8.2 आव्यूह का योग तथा आव्यूह का घटाना

एक ही क्रम (order) की दो आव्यूह A और B का योग एक ऐसी आव्यूह होती है जिसके अवयव आव्यूह A और B के संगत अवयवों को योग होते हैं। उदाहरणार्थ–

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

तो $A+B=\begin{bmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{bmatrix}$

यदि $A=\begin{bmatrix} 3 2 5 \\ 1 1 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 1 2 \\ 5 3 0 \end{bmatrix}$

तो $A+B=\begin{bmatrix} 3+4 & 2+1 & 5+2 \\ 1+5 & 1+3 & 4+0 \end{bmatrix}$

इस प्रकार यदि A = [aij] और B=[bij] एक ही क्रम की हों तो –

A+B = [cij] जहॉ˙ cij=aij=bij

यदि दोनों आव्यूह समान क्रम की नहीं हैं तो दोनों का योग परिभाषित नहीं होगा।

आव्यूहों का घटाना

जिस प्रकार से हम दो आव्यूहों को जोड़ते हैं उसी प्रकार से समान क्रम की दो आव्यूहों को घटाया भी जाता है।

$A=\begin{bmatrix} a_1 \, b_1 \\ a_2 \, b_2 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} c_1 \, d_1 \\ c_2 \, d_2 \end{bmatrix}$

उदाहरणार्थ–

तो $A-b=\begin{bmatrix} a_1-c_1 & b_1-d_1 \\ a_2-c_2 & b_2-d_2 \end{bmatrix}$ वास्तव में A-B=A+(-B)

यदि $A=\begin{bmatrix} 4 5 6 \\ 5 4 9 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

तो $A-B=\begin{bmatrix} 4-1 & 5-3 & 6-5 \\ 7-7 & 4-1 & 9-11 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण–

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

तो A+B तथा A-B ज्ञात कीजिए।

हल–

यहां A तथा B दोनों समान क्रम (2X2) के हैं अतः योग तथा घटाना सम्भव है, जो निम्न है–

(1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+1 \\ 3+7 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

(2) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 4-1 \\ 3-7 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

उदाहरण–

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

तो A+B तथा A-B का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

यहां पर A का क्रम 2X3 और B 2X2 है। अर्थात् दोनों समान क्रम के नहीं है। इसलिए योग करना और घटाना दोनों सम्भव नहीं है।

उदाहरण–

यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

तो योग का साहचर्य नियम सिद्ध कीजिए–

हल– यदि A,B और C एक ही क्रम (order) की तीन आव्यूह हों तो–

1. (A+B)C = A + (B+C) अर्थात् आव्यूह योग में साहचर्य नियम लागू होता है।

उपरोक्त उदाहरण में A, B तथा C एक समान क्रम (3X2) की आव्यूह हैं, अतः

योग का साहचर्य (Association) नियम

(A+B) + C = A (B+C)

प्रथमतया–

$$A+B=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7&12\\4&7&15\end{bmatrix}\text{-------------------- (1)}$$

L.H.S. बायें पक्ष का योग–

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}8&7&12\\4&7&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&9&8\\5&4&3\end{bmatrix}\text{-------------------------------------(2)}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}9&16&20\\9&11&8\end{bmatrix}\text{---(3)}$$

R.H.S. दांयें पक्ष का योग

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&9&8\\5&4&3\end{bmatrix}\text{---------------------------(4)}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}5&6&7\\2&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&10&13\\7&6&7\end{bmatrix}\text{-------------------------------------(5)}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}9&16&20\\9&11&8\end{bmatrix}\text{---(6)}$$

स्पष्ट है L.H.S. = R.H.S. समी. (3) व (6)

अतः सिद्ध (A+B)+C=A+(B+C)

उदाहरण–

यदि $x=\begin{bmatrix}5&7&3\\1&4&5\end{bmatrix}$ तथा $y=\begin{bmatrix}4&3&2\\1&5&9\end{bmatrix}$ हो तो () का मान ज्ञात कीजिए।

जहां n+y-X=0, 0 शून्य आव्यूह है।

हल–

मान लेते हैं–

$$z=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

L.H.S. बांया पक्ष –

$$x+y=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

तथा $x+y-z=\begin{bmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 2 & 19 & 14 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 9-a_1 & 10-b_1 & 5-c_1 \\ 2-a_2 & 19-b_2 & 14-c_2 \end{bmatrix}$$

चूँकि L.H.S. = R.H.S.

अतः $=\begin{bmatrix} 9-a_1 & 10-b_1 & 5-c_1 \\ 2-a_2 & 19-b_2 & 14-c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि दो आव्यूहों की समानता के लिए अवयवों का समान होना भी आवश्यक है अतः–

q9-a_1=0 अर्थात a_1=9

10-b_1=0 अर्थात b_1=10

5-c_1=0 अर्थात c_1=5

2-q_2=0 अर्थात a_2=9

9-b_2=0 अर्थात b_2=9

14-c_2=0 अर्थात c_2=14

अतः

$$z=\begin{bmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 2 & 19 & 14 \end{bmatrix}$$

7.9 अदिश गुणन

किसी अदिश K और आव्यूह A का गुणनफल KA या AK एक ऐसी आव्यूह है जिसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A के अवयव का K गुना होगा।

$$K\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ Ka_2 & Kb_2 & Kc_2 \end{bmatrix}$$

स्पष्ट है कि किसी आव्यूह में अचर राशि से गुणा करने पर उसके प्रत्येक अवयव में उस अचर राशि का गुणा लग जाता है।

यदि A तथा B समान क्रम की हों तथा K_1 और K_2 दो अचर राशियां हों तो–

1- $K_1K_2(A) = K_1(K_2A)$

2- $K_1(A+B)=K_1a+K_1B$

3- $(K_1+K_2)A=K_1A+K_2A$

4- $I.A = A.I = A$

उदाहरण– यदि $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

तो 2A तथा 4A का मान ज्ञात कीजिए–

यहां 2A में 2 अचर राशि है अतः–

$$2A=\begin{bmatrix} 2\times4 & 2\times6 & 2\times7 \\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 12 & 14 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

इसी प्रकार 4। में 4 अचर राशि है अतः

$$4A=\begin{bmatrix} 4\times4 & 4\times6 & 4\times7 \\ 4\times1 & 4\times2 & 4\times3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 24 & 28 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

(2) यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो

(I) 2A+ 3B तथा (II) 5A – 2B ज्ञात कीजिए

(1) 1A+3B में 2,3 अचर राशियां हैं–

$$\text{हल–2}\ 2A=\begin{bmatrix}2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 2\times4 & 2\times5 & 2\times6\\ 2\times7 & 2\times8 & 2\times9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{bmatrix}$$

$$3B=\begin{bmatrix}3\times5 & 3\times6 & 3\times7\\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times3\\ 3\times4 & 3\times5 & 3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21\\ 3 & 6 & 9\\ 12 & 15 & 3\end{bmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix}17 & 22 & 27\\ 11 & 16 & 21\\ 26 & 31 & 21\end{bmatrix}$$

(2) इसी प्रकार 5A+2B का मान निकालते हुए–

$$5A=\begin{bmatrix}5\times1 & 5\times2 & 5\times3\\ 5\times4 & 5\times5 & 5\times6\\ 5\times7 & 5\times8 & 5\times9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15\\ 20 & 25 & 30\\ 35 & 40 & 45\end{bmatrix}$$

$$2B=\begin{bmatrix}2\times5 & 2\times6 & 2\times7\\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 2\times4 & 2\times5 & 2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 12 & 14\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

$$5A-2B=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 1\\ 18 & 21 & 24\\ 27 & 30 & 43\end{bmatrix}$$

7.10 आव्यूह गुणन

दो आव्यूह A और B का गुणनफल तभी अस्तित्वमान होग जब आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

यदि A का क्रम 'mXn' हो तथा B का क्रम 'pXr' हो तो AB तभी अनुकूल होगा जब N=P के हो।

यदि– $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$ $B==\begin{bmatrix}m1 & n1\\ m2 & n2\\ m3 & n3\end{bmatrix}$

तो AB प्राप्त करने के लिये A की पंक्ति (Row) के अवयवों को B के स्तम्भ (Column) के अवयवों से निम्न प्रकार से गुणा किया जा सकता है।

यहां A का क्रम 2X3 तथा B का क्रम 3X2 है जहां A के स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के बराबर है। अब A की पंक्ति के अवयवों और B के स्तम्भ के अवयवों में क्रमागत गुणा करके जोड़ते हैं।

$$AB = \begin{bmatrix} \text{a1.m1} + \text{b1.m2} + \text{c1.m3} & \text{a1n1} + \text{b1.n2} + \text{c1.n3} \\ \text{a2.m1} + \text{b2.m2} + \text{c2.m2} & \text{a2.n1} + \text{b2.n2} + \text{c2.n3} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि यदि A का क्रम mXn तथा B का क्रम nXr हो तो AB का क्रम mXr होगा।

संख्यात्मक उदाहरण लेकर हम गुणा को आसानी से समझ सकते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} 2\times3 \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} 3\times2$$

स्पष्ट है कि 'A' में स्तम्भों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर है अतः AB प्राप्त करना सम्भव है।

$$AB = \begin{bmatrix} 2+9+5 & 4+12+2 \\ 4+15+10 & 8+20+4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 29 & 32 \end{bmatrix} 2\times2$$

इस प्रकार AB का क्रम 2X2 है।

उदाहरण– यदि $A = [1234]$ 1×4 B= $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ 4×1 B यहां AB सम्भव है

क्योंकि A में स्तम्भों की संख्या (4) B में पंक्तियों की संख्या (4) के बराबर है। यहां AB का क्रम 1X1 का होग अर्थात् केवल एक अवयव प्राप्त होगा

$AB = [1\times1 + 2\times2 + 3\times3 + 4\times4]$ $\qquad AB = [30] \quad 1X1$

इस प्रकार आव्यूह गुणन में निम्न बिन्दु ध्यान रखने चाहिए।

(1) सर्वप्रथम हमें यह पता लगना चाहिए कि A और B का गुणा सम्भव है अथवा नहीं– इसके लिए A में स्तम्भों (Column) की संख्या B में पंक्तियों (rows) की संख्या बराबर होनी चाहिए।

(2) यदि AB प्राप्त करना सम्भव हो तो A की पंक्ति (row) के अवयवों

(elements) का B के स्तम्भ (columns) के अवयवों से क्रमागत गुणा करके जोड़ते हैं जो इस प्रकार है–

A की प्रथम पंक्ति (row) को B के प्रथम स्तम्भ (column) से गुणा करके जोड़ देते हैं तो AB का प्रथम अवयव प्राप्त होता है।

इसी प्रकार A की दूसरी पंक्ति को B के सभी स्तम्भों में गुणा करते हैं और ऐसे ही आगे बढ़ते हैं।

सामान्य बीजगणित में 2X3 का वही अर्थ है जो 3X2 का है इस प्रकार ny=yn। परन्तु आव्यूह बीजगणित में स्थिति इससे भिन्न होती है। यदि AB परिभाषित है तो इसका यह अर्थ नहीं निकलता है कि BA भी परिभाषित होगी। यदि हम यह मान भी लें AB और BA दोनों परिभाषित हैं तो भी यह आवश्यक नहीं कि AB=BA होगा।

उदाहरण– यदि

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix} 2X3 \text{ तथा } B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix} 3X2$$

जहां AB परिभाषित है $A_{2\times3}$, $B_{3\times2} \rightarrow AB_{2\times2}$

तथा BA परिभाषित है $B_{3\times2}$, $A_{2\times3}$, $\rightarrow BA_{3\times3}$

जहां $AB \neq BA$

$$AB=\begin{bmatrix}16 & 18\\ 29 & 32\end{bmatrix}() \text{ तथा } BA=\begin{bmatrix}10 & 13 & 5\\ 22 & 29 & 11\\ 18 & 25 & 7\end{bmatrix}$$

जहां $AB \neq BA$

उदाहरण–

यदि । $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

तो AB और BA दोनों परिभाषित हैं तथा AB=BA है।

$$AB=BA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

यदि AB=0 (शून्य आव्यूह) हैं तो इससे यह तात्पर्य नहीं निकाला जा सकता कि या तो A=0 अथवा B=0 है। निम्न उदाहरण से स्पष्ट है–

यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

तो $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$

यहां AB में A को पूर्व गुणक (Pre-multiplier) तथा B को उत्तर गुणक(Post multiplier) कहते हैं। इसी प्रकार AB आव्यूह को A आव्यूह का B आव्यूह से उत्तर गुणन (Post Multiplying Matrix A by Matrix B) अथवा आव्यूह B का आव्यूह A से पूर्व गुणन (Premultiplying Matrix B by A) कहते हैं।

आव्यूह गुणन के नियम–

(1) साहचर्य नियम लागू होता है यदि AB और C का गुणा सम्भव हो तो (AB)C=A(BC) है।

(2) बंटन का नियम (Distributive law) लागू होता है। यदि AB, AC तथा B+C का अस्तित्व हो– A(B+C)=AB+AC

(3) किसी अचर राशि के साथ K(AB) = (KA) B = A(KB) सत्य सिद्ध होता है।

(4) आव्यूह गुणन के संबंध में क्रम विनियम (Cummulative) नियम लागू नहीं होता क्योंकि साधारणतया AB=BA इन नियमों को हम निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेगें।

उदाहरण–

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि A(B+C)=AB+AC

हल

$$B+C=\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2\times6+3\times3 & 2\times5+3\times1\\1\times6+4\times3 & 1\times5+4\times1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}21 & 13\\18 & 9\end{bmatrix}\text{----------------------------------}(1)$$

इसी प्रकार

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2\times5+3\times3 & 2\times4+3\times2\\1\times5+4\times3 & 1\times4+4\times2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}19 & 14\\17 & 12\end{bmatrix}$$

तथा

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2\times1+3\times0 & 2\times1+3\times(-1)\\1\times1+4\times0 & 1\times1+4\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & -3\end{bmatrix}$$

अब

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 17 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} \text{---------------------------------}(2)$$

समी. (1) तथा (2) से

A(B+C)= AB+AC

उदाहरण– यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि–

(a) A.I=I.A=A

(b)=$I=I^2=I^3$

हल

() यहां A और I दोनों (3×3) की वर्ग आव्यूह है अतः AI और IA दोनों परिभाषित हैं।

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times0+2\times0 & 1\times0+3\times1+2\times0 & 1\times0+3\times0+2\times1 \\ 4\times1+1\times0+5\times0 & 4\times0+1\times1+5\times0 & 4\times0+1\times0+2\times3 \\ 1\times1+1\times0+2\times0 & 1\times0+1\times1+2\times0 & 1\times0+1\times0+2\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

अतः AI=A --------------(i)

अब $IA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 1 & 5\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times4+0\times1 & 1\times3+0\times1+0\times1 & 1\times2+0\times5+0\times2\\0\times1+1\times4+0\times1 & 0\times3+1\times1+0\times1 & 0\times2+1\times5+0\times2\\0\times1+0\times4+1\times1 & 0\times3+0\times1+1\times1 & 0\times2+0\times5+1\times2\end{bmatrix}$$

$IA=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 1 & 5\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}=A$---------------------------(i)

समीकरण (i) तथा (ii) से

A.I=I.A=A

(इ) किसी वर्ग आव्यूह में $A^2=A.A$ इसी आधार पर $I^2=I.I$

$$I.I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times1+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times1\\0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times1+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times1\\0\times1+0\times0+1\times0 & 0\times0+0\times1+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

अतः $I^2=I$

अब $I^3=I^2.I\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$

या $I^3= I$

समी (i) तथा(ii) से

$I^3=I^2=I$

नोट– यदि आव्यूह वर्ग आव्यूह नहीं है तो A^2, A^3, B^2, B^3 का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

7.11. परिवर्त्त आव्यूह की कुछ विशेषताएँ और संछेद

हमने देखा कि यदि किसी आव्यूह । की पंक्तियों को और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो नयी आव्यूह । की परिवर्त्त आव्यूह कहलाती है और इसे A से चिह्नित करते हैं। परिवर्त्त आव्यूह की कुछ महत्वपूर्ण विशेशताएँ होती हैं जो निम्न हैं–

(1) $(A+B)^T= A^T+B^T$

(2) $(kA)^T= kA^T$ जहां k एक आदिश राशि है।

(3) $(A^T)^T= A$

(4) $(AB)^T= B^T.A^T$

(5) $(A, A_2,......A_k)^T = {}_{Ak}{}^T \ldots\ldots A_2{}^T$

7.11.1 संछेद

किसी वर्ग आव्यूह A के मुख्य विकर्ण के अवयवों के योग को आव्यूह का संछेद कहते हैं और $t_r(A)$ से लिखते हैं। संछेद के संबंध में निम्न दो बातें ध्यान देने योग्य हैं–

(1) दो आव्यूहों के योग का संछेद प्रत्येक आव्यू हके संछेद का योग होता है अर्थात् –

$t_r(A+B)= t_r(A)+t_r(B)$

(2) यदि (A) और (B) इस प्रकार की दो आव्यूह है जिनके लिए AB और BA दोनों परिभाषित है तो AB का संछेद वही होग जो BA का संछेद है अर्थात्

$t_r(AB)= t_r(BA)$ if and only if AB and BA exist.

यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ $t_r(A) = 3+1+7=11$

7.12 आव्यूह की कोटि

आव्यूह की कोटि आव्यूह में रेखीय–स्वतंत्र पंक्तियों अथवा स्तम्भों की अधिकतम संख्या होती है या किसी आव्यूह (A) की कोटि उस आव्यूह से बनी सारणिक के सबसे बड़े (largest) XSj शून्य (non-zero) अपसारणिक के क्रम के बराबर होती है।

7.12.1 आव्यूह की कोटि ज्ञात करने की विधि–

(1) यदि आव्यूह वर्ग आव्यूह वर्ग आव्यूह है तो उसका सारणिक–मान ज्ञात करते हैं, यदि यह मान शून्य नहीं है तो आव्यूह की कोटि उस सारणिक के क्रम के बराबर होगी आव्यूह की कोटि ज्ञात करने के लिए इसे सारणिक बना कर मान ज्ञात करते हैं।

(2) यदि वर्ग आव्यूह में बनी सारणिक का मान शून्य हो तो हम 1 कम क्रम की अपसारणिक देखते हैं। इन अपसारणिकों में यदि एक भी शून्य न हुई तो इस उपसारणिक का क्रम ही आव्यूह की कोटि होगी। यदि ये सभी उपसारणिक शून्य हुई तो एक क्रम कम करके पुनः अपसारणिक का मान ज्ञात किया जाता है।

7.13 आव्यूह का व्युत्क्रम

आव्यूह बीजगणित, साधारण बीजगणित से भिन्न होता है इसमें निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए–

(1) आव्यूह वर्ग आव्यूह हो।

(2) आव्यूह व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह हो।

यदि किसी वर्ग आव्यूह A के साथ कोई दूसरी आव्यूह का संबंध इस प्रकार हो कि $AB=BA=I$ जहां I इकाई आव्यूह है।

तो आव्यूह A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह तथा B को A का व्युत्क्रम या प्रतिलोम कहते हैं और $B=A^{-1}$ लिखते हैं जैसा कि स्पष्ट है

$A.A^{-1}=A^{-1}=I$

यदि A और B, क्रम की इस प्रकार की वर्ग आव्यूह हो कि $AB=I_n=BA$ तो A और B एक दूसरे कि गुणात्मक व्युत्क्रम (multiplicative inverse) है।

7.13.1 व्युत्क्रम आव्यूह के संबंध में निम्न परिणाम सत्य सिद्ध होते हैं–

(1) $A.A^{-1}=A^{-1}A=I$ (4) $A^{-n}=(A^{-1})^n$

(2) $(A^{-1})^{-1}=A$ (5) $(adjA)^{-1}=adj(A^{-1})$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

7.13.2 आव्यूह ज्ञात करने की विधियां

मुख्य रुप से आव्यूह का व्युत्क्रम दो प्रकार से ज्ञात किया जाता है–

(1) आव्यूह की सारणिक तथा सहखण्डन द्वारा

(2) मूल क्रियाओं द्वारा

इन दोनों विधियों में पहली विधि ही सरल एवं प्रचलित है।

7.14 एक घातीय युगपत समीकरणों के हल में आव्यूह का प्रयोग

यदि निम्न समीकरण को आव्यूह के प्रयोग से हल किया जाए तो –

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

इसे आव्यूह रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$\underset{(A)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{(X)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{(B)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

इसे सामान्य रूप में $AX = B$ लिख सकते हैं

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ गुणांकों की आव्यूह है।

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ चरों का सादिश है।

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ स्तम्भ सदिश (vector) है।

यदि $A \neq 0$ तो इसका व्युत्क्रम इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

क्योंकि $A^{-1}A = I$.

समीकरण $AX = B$ से

दोनों तरफ A^{-1} से गुणा करने पर

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

प्रदत्त समीकरण का हल है

उदाहरण – सकीकरणों

$$x+y+z=6$$

$$x-y+z=2$$

$$2x+y-z=1$$

को हल कीजिए ।

हल –

$$x+y+z=6$$

$$x-y+z=2$$

$$2x+y-z=1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

प्रथम पंक्ति के अनुरूप विस्तार करने पर

$$= 6-0=6$$

सहखण्डों के संबंध में

$$C_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 3, \quad C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$C_{21} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3, \quad C_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad C_{32} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

सहखण्डों से बनी आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

आव्यूह के प्रयोग द्वारा समीकरणों में अज्ञात राषियों का हल इस प्रकार होता है –

$$X = A^{-1}B \quad \text{जहाँ} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

7.14.1 युगपत समीकरणों के द्वारा आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करना

आव्यूह के व्युत्क्रम प्राप्त करने की विधियाँ पूर्व में बताई जा चुकी हैं। यहाँ हम युगपत समीकरणों द्वारा किसी आव्यूह के व्युत्क्रम प्राप्त करने पर चर्चा करेगें।

उदाहरण – $2x_1 + 3x_2 = 13$

$$-2x_1 + 4x_2 = 8$$

यदि हम X_1 X_2 से बने गुणांकों की आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त करना है तो हम पहले x_1 और x_2 का मान ज्ञात करेगें जो निम्न प्रकार है –

सारणिकों का प्रयोग हुए अज्ञात राशियों के मान ज्ञात करने (क्रैमर का नियम) की विधि से सुपरिचित हैं।

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x_1}{28} = \frac{1}{14} \quad \text{या} \quad x_1 = 3$$

इसी प्रकार $\frac{x_2}{42} = \frac{1}{14}$ या $x_2 = 3$

हम यह भी जानते हैं कि $AX = B$ या $x = A^{-1}B$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix}$$

7.15 आव्यूह प्रथक्करण

आव्यूह का विभाजन स्तम्भों तथा पंक्तियों के समानान्तर रेखा खींचकर किया जाता है

उदाहरण –

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$ को विभाजित करते हुए

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$ इसमें

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad A_{21} = [a_{31} \quad a_{32}]_{1\times2}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad A_{22} = [a_{33} \quad a_{34}]_{1\times2}$$

अब आव्यूह । को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

इसे निम्न प्रकार से भी पृथक्करण किया जा सकता है।

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

7.16 सारांश

- आव्यूह– संख्याओं के आयताकार अंकायत अथवा (Matrix) क्रम विन्यास को आव्यूह कहते हैं।
- आव्यूह का क्रम (order of Matrix)– आव्यूह की पंक्ति (m) तथा स्तम्भ (n) की संख्याओं को आव्यूह का क्रम कहते हैं, इसे (m X n) पढ़ते हैं। आव्यूह को हम ख, द्वारा लिखते हैं जैसे $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} n \times n$ क्रम की वर्ग आव्यूह है। आव्यूह का प्रयोग हम समीकरण लिखने की विधि तथा समीकरण

से संबंध होकर हल के अस्तित्व की जांच का पता लगने की विधि के लिए करते हैं।

- आव्यूह संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है, इसमें पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या भिन्न हो सकती है, किसी अचर राशि से आव्यूह में गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता हे।
- आव्यूह के प्रकार – देखें सेक्सन 7.7
- दो आव्यूह सर्वसम कहे जायेंगे यदि (1) उनके स्तम्भों तथा पंक्तियों की संख्या समान हो (2) दोनों आव्यूहों की पंक्तियों और स्तम्भों के अवयव एक ही हों, अर्थात् सभी (i) और (j) के मानों पर ($a_{ij}=b_{ij}$)
- दो आव्यूहों का योग सभी परिभाषित होगा, जब वे समान क्रम की हो। यही नियम आव्यूहों के घटाने पर लागू होता है।
- आदिश गुणन में (k) अदिश का (A) आव्यूह के प्रत्येक अवयव का (k) गुना होगा।
- आव्यूह गुणन में (AB) का गुणन तभी अस्तित्वमान होगा जब आव्यूह (A) में स्तम्भों (n) की संख्या आव्यूह (B) में पंक्तियों (m) की संख्या के बराबर हो।
- परिवर्त आव्यूह की विशेषताएँ तथा संछेद 7.11.1, 7.11.2
- आव्यूह की कोटि में आव्यूह में रेखीय–स्वतंत्र पंक्तियों अथवा स्तम्भों की अधिकतम संख्या होती है।
- आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए आव्यूह का वर्ग आव्यूह होना आवश्यक है, तथा आव्यूह व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह होना आवश्यक हो।
- व्युत्क्रम आव्यूह के परिणाम– देखें 7.13.1
- व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करने की विधियॉं हैं– सारणिक तथा सहखण्डज, Xkl विधि ।
- लाम्बिक आव्यूह– एक वर्ग आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह कही जाती है। यदि (।.A^T=I) जहां (I) इकाई आव्यूह और (A^T) परिवर्त्त आव्यूह है।

- समवर्ग आव्यूह यदि कोई वर्ग आव्यूह (A) ऐसी है कि (A^2=A) तब (A) को समवर्ग आव्यूह कहते हैं।

7.17 शब्दावली

(1) परिभाषित - defined

(2) क्रम - order

(3) चिन्हित - denoted

(4) अवयव - elements

(5) विकर्ण - diagonal

(6) सदिश –vector

(7) व्युत्क्रमणीय - non-singular

(8) अव्युत्क्रमणीय - singular

(9) अस्तित्वमान – सम्भव

(10) पूर्व गुणन – pre-multiplying

(11) उत्तर गुणन – post-multiplying

(12) परिवर्त्त आव्यूह- transposed Matrix

7.18 अभ्यास प्रश्न

Part-1

A वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1. आव्यूह वास्तव में .... का एक समूह है।

   (i) अवयवों (ii) सहखण्डों (iii) संदेशों (iv) अपसारणिकों

2. जिस आव्यूह में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर हो उसे क्या कहते हैं?

   (i) इकाई आव्यूह(ii) वर्ग आव्यूह (iii) सदिश आव्यूह (iv)सममित आव्यूह

3. किस आव्यूह के मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य होते हैं?

   (i)विकर्ण आव्यूह (ii)सदिश आव्यूह (iii)त्रिभुजीय आव्यूह (iv)शून्य आव्यूह

4. यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो नयी आव्यूह मूल की .... आव्यूह कहलाती है।

(i) परिवर्त्त (ii)सममित (iii) अव्युतक्रमणीय (iv)सदिश

5.आव्यूह गुणन के सम्बन्ध में निम्न में से कौन सा नियम लागू नही होता?

(i) साहचर्य (ii) क्रम विनिमय नियम (iii) बंटन का नियम (iv)सभी

उत्तर : 1. (iii), 2. (ii), 3. (iii), 4. (ii), 5. (ii)

B सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें–

1. दो आव्यूहों A तथा B का योग तभी तथा केवल तभी हो सकता है, यदि उनकी कोटि, पंक्तियाँ तथा स्तम्भ तीनों ही एक दूसरे के बराबर हो।
2. यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य शून्य हों तथा अन्य अवयव इकाई हो तो इस तरह से आव्यूह को इकाई आव्यूह कहते है।
3. आव्यूह की कोटि, पंक्तियों की अथवा स्तम्भों की संख्या, जो भी कम हो, से अधिक नहीं हो सकती।
4. दो आव्यूहों A और B का गुणनफल तभी अस्तित्वमान होग तब आव्यूह A में पंक्तियों की संख्या B में स्तम्भों की संख्या के बराबर हो।
5. सममित आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त्त मूल आव्यूह के बराबर होता है।
6. एक ऐसी वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण पर समान अवयव हो और अन्य जग्ह शून्य हो तो इसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं।
7. सदिश आव्यूह की एक दशा हैं जिसमें केवल एक ही पंक्ति अथवा स्तम्भ होते है।

उत्तर : 1. (T), 2. (F), 3. (T), 4. (F), 5. (T), 6. (F), 7. (T)

Part-2

I **अभ्यास के लिए** लघु प्रश्न

(I) निम्न की व्याख्या कीजिए.

(1) आव्यूह और सारणिक में अन्तर

(2) पूर्व गुणन तथा उत्तर गुणन

(3) परिवर्त्त आव्यूह की विशेषताएँ

(4) व्युत्क्रम आव्यूह के मुख्य गुण

(5) आव्यूह प्रथक्करण

B- सिद्ध कीजिए

(1) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(2) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(3) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$

(4) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ तो AA' तथा $A'A$ ज्ञात कीजिए

(5) यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ तो करण ज्ञात कीजिए

(1) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(2) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(3) A की व्युत्क्रमणीय आव्यूह A^{-1} ज्ञात कीजिए

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए

(5) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$A^3 = A^{-1}$

C- सिद्ध कीजिए

(1) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ दिया गया है तो सिद्ध कीजिए कि

$(AB) = B'A'$

उत्तर– $(AB) = B'A' = \begin{bmatrix} 20 & 17 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}$

(2) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = [123]$ दिया है तो सिद्ध कीजिए कि

$(AB) = B'A'$

उत्तर–

(3) आव्यूह A की $AdjA$ ज्ञात कीजिए

$|A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर– $adjA = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(4) आव्यूह A की $(adjA)$ तथा व्युत्क्रम (A^{-1}) ज्ञात कीजिए

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 6\end{bmatrix}$$

उत्तर– $adjA=\begin{bmatrix}6 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}$

व्युत्क्रम $\begin{bmatrix}6/7 & -5/7\\-1/7 & 2/7\end{bmatrix}$

(5) आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए–

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & -4\\1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

उत्तर $A=\begin{bmatrix}7/2 & -3 & 1/2\\-1/2 & 0 & 1/2\\-1/2 & 1 & -1/2\end{bmatrix}$

7.19 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) –परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई : 8 सारणिक

8.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पष्चात पाठक युगपत समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में सारणिक के प्रयोग पर जानकारी प्राप्त करेगें। इनकी सहायता से समीकरणों के अज्ञात चरों के मूल्य निर्धारित किये जाते हैं। इसीलिये सारणिक को निर्धारक भी कहते हैं।

8.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई में सारणिक के प्रयोग की विधि एवं सामान्य नियम पर चर्चा की जायेगी.

- युगपत समीकरणों के आसान हल के लिए बीजगणित में सारणिक के प्रयोग
- सारणिक प्रसार
- उपसारणिक (Minors)
- सारणिकों के विस्तार के सामान्य नियम
- सारणिक की विषेषताएँ (गुण)
- सारणिकों का गुणा
- क्रेमर का नियम
- सारणिक का अवकलज

8.3 परिभाषा

यह युग्मपद विभिन्न पदों के योग अथवा अन्तर के रूप में व्यक्त होते हैं तथा ये पद कई संख्याओं के गुणनफल (Product) होते हैं।

इस प्रकार सारणिक दो या दो से अधिक गुणनफलों के अन्तर की सांकेतिक अभिव्यक्ति है। विभिन्न पदों को दो खड़ी रेखाओं (Vertical Lines) के बीच व्यक्त किया जाता है जैसे

$a_1\, b_2 - a_2 - b_1$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (8.1)$$

सारणिक के अवयव एवं मौलिक अंश

यहाँ पर a_1, b_1, a_2, b_2 को सारणिक का मौलिक अंश और इनके गुणनफल a_1b_2, a_2b_1 को अवयव कहते हैं। सारणिक का क्रम – किसी सारणिक के अन्तर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है।

उदाहणार्थ (Eq. 2)

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ इसमें दो पंक्ति (rows) और दो स्तम्भ हैं, अतः यह द्वितीय क्रम (second order) की सारणिक है।

(B) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ इसमें तीन पंक्ति (rows) और तीन स्तम्भ हैं, अतः यह तृतीय क्रम की सारणिक है। तात्पर्य यह है कि, किसी भी सारणिक का क्रम अथवा कोटि उसकी पंक्ति और स्तम्भों की संख्याओं से तय होती है। यदि 2 पंक्ति और 2 स्तम्भ हैं, तो कोटि दो (second) होगा। यदि 3 पंक्ति और तीन स्तम्भ हैं, तो सारणिक तृतीय कोटि की होगी। सारणिक के स्तम्भों (columns) और पंक्तियों (rows) मौलिक अंशों (constituents) और तत्वों (elements) में सम्बन्ध किसी सारणिक के स्तम्भों (columns) और पंक्तियों (rows) – मौलिक अंशों (constituents) और तत्वों में क्या सम्बन्ध होता है, इसे निम्न प्रकार से समझा जा सकता है।

Table 1

सारणिक का क्रम (order)	स्तम्भ (columns)	पंक्तियाँ (rows)	मौलिक अंश (constituents)	तत्व (elements)
Order	c	r	(a_1a_2, b_1b_2,...)	(a_1b_2 .... a_2b_1...)
~ ok¡	~	~	$\sim^2$	~ L
द्वितीय	2	2	2^2	2L
तृतीय	3	3	3^2	3L

इस प्रकार स्पष्ट है कि यदि सारणिक द्वितीय क्रम का है तो उसके मौलिक अंशों की संख्या $2^2 = 4$ होगी, तथा तत्वों की संख्या $2L = 2$ होगी। यदि सारणिक तृतीय क्रम का है तो मौलिक अंषों की संख्या $3^2 = 9$ होगी और तत्वों की संख्या $3L = 6$ होगी।

8.4 सारणिक के अवयवों का स्थान

किसी सारणिक के अवयवों का एक निश्चित स्थान भी होता है, जैसे कोई अवयव पहली पंक्ति और तीसरे स्तम्भ का हो सकता है, तथा कोई अवयव दूसरी पंक्ति तथा पहले स्तम्भ का हो सकता है। संकेत रूप में प्रत्येक अवयव का स्थान निर्धारित करने के लिये, उप संकेतों का प्रयोग किया जाता हैं। इनमें पहला उपसंकेत पंक्ति को तथा दूसरा उपसंकेत स्तम्भ को दिखाता हैं।

उदाहरण – (1)यदि अवयव के उपसंकेत a_{11} हैं – यहाँ aa प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का है।

(2) यदि अवयव के उपसंकेत a_{32} हैं – यहाँ तृतीय पर्वत तथा द्वितीय स्तम्भ में स्थित है।

पंक्ति को प से तथा स्तम्भ को र से व्यक्त करने का सर्वमान्य प्रचलन है। इस संदर्भ esa $a_{i\,j}$ का अर्थ i^{th} row (पंक्ति) तथा j^{th} column (स्तम्भ) के अवयव से है।

उदाहरण – निम्न सारणि (जो तृतीय कोटि का है) के अन्तर्गत अवयवों के स्थान का बोध स्पष्ट कराने का प्रयास किया ग्या है।

$$\text{पंक्ति (row)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

स्तम्भ (columns)

किसी क्रम विन्यास में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्याएँ कई हो सकती हैं, तथा अनेक हो सकती है। परन्तु सारणिक के अन्तर्गत पंक्ति और स्तम्भों की संख्या बराबर होती है।

इसीलिये यदि हम आव्यूह के संदर्भ में देखें तो सारणि वर्ग आव्यूह (Square Matrix) से सम्बद्ध संख्या है।

यदि सारणिक में कुल पंक्ति की संख्या ‘m’ तथ कुल स्तम्भ की संख्या ‘n’ है तो, सारणिक में $m = n$ की स्थिति होती है।

जबकि ‘i’ और ‘j’ विशेष पंक्ति और विशेष स्तम्भ को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होते हैं।

8.5 सारणिक प्रसार (Determinants’s Expansion)

किसी सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए उस सारणिक को सिी पंक्ति तथा स्तम्भ के अवयवों के रूप में प्रदर्षित करना सारणिक का प्रसार कहलाता है। सारणिक का प्रसार उपसारणिक की सहायता से किया जाता है। किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है। किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है, लेकिन पदों में चिन्ह के क्रम को ध्यान में रखना चाएि। यह क्रम निम्न है:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \ldots \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \end{vmatrix} \qquad \text{Eq. 4}$$

वास्तव में चिन्हों का यह क्रम सहखण्ड (Co-factor) पर आधारित है। हमें प्रसार को समझने के लिए उप सारणिक और सहखण्ड की धारणा को समझना होगा।

8.6 उपसारणिक (Minors)

सारणिक के प्रसार में किसी अवयव को गुणा करने वाले छोटे सारणिक को उसका उपसारणिक कहतें हैं। वास्तव में किसी सारणिक के किसी अवयव की उपसारणिक एक छोटे क्रम की सारणिक ही है जो उस अवयव से सम्बद्ध पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ देने

पर प्राप्त होती है। किसी कोटि की सारणिक में अवयव a_{ij} की उपसारणिक $(\eta-1)$ कोटि की सारणिक होगी जो i^{th} row और j^{th} row column को छोड़ने पर प्राप्त होगीं।

यदि हमें a_{11} की उपसारणिक ज्ञात करनी हो तो प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ को छोड़ देने पर जो बच जाता है वही उपसारणिक है। उदाहरण के लिये 3 क्रम की निम्न सारणिक पर ध्यान दें।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq-5$$

इस प्रकार a_{11} की उपसारणिक है –

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq-6$$

इस प्रकार a_{22} की उपसारणिक है –

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Eq-7$$

तथा a_{13} की उपसारणिक है–

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad Eq-8$$

उपसारणिक को संगत अवयव के स्थान को ध्यान में रखते हुए M से व्यक्त करते हैं उपसारणिक (Minors) $-M_{11}, M_{22}, M_{13}$ इत्यादि। जहाँ $M_{11}-\alpha_{11}$ को उपसारणिक है तथा $M_{12}-a_{12}, M_{13}-a_{13}$ के उपसारणिक हैं।

8.6.1 सारणिक का प्रसार

इस प्रकार उपसारणिक की सहायता से A का प्रसार आसानी से किया जा सकता है–

$$A = a_{11}\,M_{11} - a_{12}\,M_{12} + a_{13}\,M_{13} \qquad Eq-9$$

सारणिक के प्रसार में प्रयुक्त चिन्हों के क्रम को ध्यान में रखते हुये (Fig – 4) (Eq-1) को विस्तार से निम्न प्रकार से प्रसार किया जा सकता है।

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$Eq - 10$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ & \end{vmatrix} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{32}\ a_{23}) - a_{12}\ (a_{21}\ a_{33} - a_{31}\ a_{23})$$

$$+a_{13}(a_{21}.a_{32} - a_{31}\ a_{22})$$

उपसंकेत प्रसार में a_{11} को उसके उपसारणिक M_{11} से गुणा किया गया है, इसी प्रकार को M_{12}, तथा a_{13} को M_{13} से गुणा किया ग्या है, तथा प्रथम पंक्ति के पहले पद का चिन्ह प्रदन्त चिन्ह होगा। इस प्रकार चिन्ह एकान्तर रूप से बदलते हैं।

8.7 सहखण्ड (Co-factor)

सहखण्ड की अवधारणा, उपसारणिक से जुड़ी है। किसी अवयव की उपसारणिक ही अग्र चिन्ह $\left[(-1)^{i+j}\right]$ के साथ लिखी जाए तो वह उस अवयव का सहखण्ड है। इस प्रकार अवयव a_{ij} का सहखण्ड–

$$Co - factor\ of\ a_{ij} -$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$$

अतः अवयव a_{ij} का सहखण्ड उसके उपसारणिक में $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है जहाँ i पंक्ति के लिये तथा j स्तम्भ के लिये प्रयुक्त है। यदि $i + j =$ समसंख्या है तो सहखण्ड और उपसारणिक का चिन्ह एक ही होग। और यदि $i + j$ विषम संख्या है तो सहखण्ड का चिन्ह उपसारणिक के चिन्ह के विपरीत होग। साराणिक प्रसार के समय, चिन्हों का क्रम $(+,-,+,\ldots)$ इसी सहखण्ड की धारणा का परिणाम है। यदि हम प्रथम पंक्ति से सारणिक का प्रसार करते हैं तो पहले $+$ चिन्ह इसलिए आता है कि प्रथम अवयव (a_{11}) प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ का है अर्थात्–

$i = 1,\ j=1$ इसलिए $i + j = 1 + 1 = 2$ और

$(-1)^2 = +1$ इसलिए सहखण्ड का चिन्ह धनात्मक है।

इसके आगे (-1) चिन्ह इसलिए आता हैं कि संषत अवयव (a_{12}) में

$$i=1,\ j=2 \text{ और } (-1)^{1+2}=(-1)^3=-1,$$

अर्थात सहखण्ड ऋणात्मक है इसी तरह से यह क्रम चलता रहता है।

उदाहरण – 1

सारणिक $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$ में 5,8 और 11 की उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल – a. 5 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

b. 8 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

c.11 का उपसारणिक तथा सहखण्ड

a.(i) 5 का उपसारणिक

(Eq. 6 में दिये ग्ये उदाहरण के अनुसार)

$$= \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 9\times13\text{-}12\times10=117\text{-}120=\text{-}3$$

(ii) 5 का सहखण्ड

$$= (-1)^{1+1} \text{ उपसारणिक का मान}$$

$$1\times(-3) = -3.$$

b. (i) 8 की उपसारणिक

$$= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 6\times13\text{-}12\times7=78\text{-}84=\text{-}6$$

(ii) 8 का सहखण्ड

$$=(-1)^{2+1}\times(-6) = 6$$

c. 11 की उपसारणिक

$$= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 6\times10\text{-}9\times7=60\text{-}63=\text{-}3$$

(ii) 11का सहखण्ड

$= (-1)^{3+1} \times (-3) = 1 \times (-3) = -3.$

उहारण 2 – उदाहरण 1 में दियें गये सरणिक का प्रसार कीजिए –

I. हल – प्रथम पंक्ति से विस्तार द्वारा–

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} -6 \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} +7 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 5(117 - 120) -6 (104 - 110) +7 (96 - 99)$$

$$= 5(-3) -6 (-6) +7 (-3)$$

$$= -15 + 36 - 27 = 36 - 36 = 0$$

II. हल – प्रथम स्तम्भ से विस्तार द्वारा

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} -8 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} +11 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 5(117 - 120) -8 (78 - 84) +11 (60 - 63)$$

$$= 5(-3) -8 (-6) +11 (-3)$$

$$= -15 + 48 - 33 = 0$$

इस प्रकार प्रथम स्तम्भ अथवा पंक्ति से विस्तार करने पर उत्तर समान है।

उदाहरण 3.

सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

(1) प्रथम स्तम्भ से विस्तार द्वारा मान निकालने पर

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left[1 \times -(-2)(3)\right] - 2\left[0 \times 4 - (-2)(8)\right] + 7\left[4 \times 3 - 8 \times 1\right]$$

$$= 3\,(6)-2(16)+7(4)$$

$$= 14$$

उदाहरण (4)

सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

हल – प्रथम पंक्ति के अनुरूप विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6-8)-1(9-4)+0(6-2)$$

$$= 2(-2)-1(5)=-4-5=-9.$$

यह प्रसार हमने प्रथम पंक्ति से किया था यदि तृतीय स्तम्भ के अनुरूप विस्तार करें तो

$$= 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0\,(6-2)-4(4-1)+3(4-3)$$

$= 0-4\times 3+3\times 1=-1+3=-9 \Rightarrow$ उत्तम समान

टिप्पणी

इस प्रकार प्रसार चाहे जिस पंक्ति और जिस स्तम्भ से करें सारणिक के मान में कोई अन्तर नही आता।

इसे निम्न उदाहरण द्वारा और स्पष्ट किया जा सकता है –

उहारण : 5

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ का मान निकालो ।

हल – $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1\left((2\times5)-(-1)1\right) - 3\,(0\times5 - (-1)(4)) +$$

$$2\left(0\times1 - 2\times4\right) =$$

$$= 1(10+1) - 3(4) + 2(-8) = 11 - 12 - 16 = -17.$$

यह प्रसार हमने प्रथम पंक्ति से किया था। यदि द्वितीय स्तम्भ से प्रसार करें तो –

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 33 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(0+4) + 2\,(5-8) -1(-1-0) = -17$$

अतः प्रसार किसी भी स्तम्भ अथवा पंक्ति से करें सारणिक के मान में कोई अन्तर नहीं आता।

8.8 सारणिकों के विस्तार के सामान्य नियम

यदि सारणिक निम्न प्रकार है –

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

और इसके उप सारणिक क्रमशः A_{11}, A_{12} और A_{13} हैं तो सारणिक का विस्तार बराबर

$$a_{11}\left[(-1)^{1+1}A_{11}\right] + a_{12}\left[(-1)^{1+2}A_{12}\right] + a_{13}\left[(-1)^{1+3}A_{13}\right]$$

प्रथम खण्ड का चिन्ह $+$ तथा दूसरे का और तीसरे का धन होग $-$ऐसा इसलिये क्योंकि प्रथम $(1+1=2)$ सम संख्या है तथा तृतीय $(1+3=4)$ भी सम संख्या है, तथा द्वितीय खण्ड $(1+2=3)$ विषय संख्या है। जब $i+j$ में $i+j$ का जोड़ सम होता है तो चिन्ह '$+$' और जब $i+j$ का जोड़ विषय होता है तो चिन्ह '$-$'होता है ।

8.9 सारणिक की विशेषताएँ (गुण)

सारणिक की विशेषताएँ इस दृष्टि से काफी महत्पूर्ण हैं, कि इनका उपयोग करके सारणिक का मान आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

8.9.1 विशेषता – 1 यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदला जाए तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण –– 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{तथा}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

जहाँ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.\, a_{22} - a_{12}.a_{21} \qquad (i)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.\, a_{22} - a_{21}.a_{21} \qquad (ii)$$

समीकरण (i) = (ii)

मूल सारणिक $|A|$ को पंक्ति तथा स्तम्भ परिवर्तित करने के बाद $|A'|$

इसी प्रकार तृतीय क्रम के सारणिक को भी सिद्ध किया जा सकता है।

तृतीय क्रम के सारणिक का अंकगणितीय उदाहरण निम्न प्रकार है –

उदाहरण – 7

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = |A^*|$$

जहाँ सारणिक |A| के स्तम्भ के मौलिक अंश सारणिक A* के पंक्ति के मौलिक अंश के बराबर है जैसे |A| के प्रथम स्तम्भ के मौलिक अंश 2, 1, 5. |A*| के प्रथम पंक्ति के मौलिक अंश 2, 1, 5 के बराबर है।

8.9.2 विशेषता – 2.

यदि किसी पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के सभी मौलिक अंशों को किसी अचर राशि (K) से गुणा कर दिया जाए तो सारणिक के मान में उस राशि K का गुणा हो जाता है। उदाहरणार्थ – यदि सारणिक A की प्रथम पंक्ति में स्थिर राशि K से गुणा किया जाय तो सारणिक का रूप

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{होगा।}$$

$$= Ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - Kb_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + Kc_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= K\left[a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3. & b_3. & c_3 \end{vmatrix} = KA.$$

उदाहरण – B

एक संख्यात्मक उदाहरण द्वारा इसे समझा जा सकता है –

पूर्व के उदाहरण तीन में निम्न सारणिक

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{का मान (-9) था – (देखें उदाहरण – 3)}$$

यदि इस सारणिक के प्रथम स्तम्भ में 2 से गुणा कर दिया जाए तो –

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 4\,(6-8) - 1\,(18-8) + 0$

$= (-2) - 1\times 10 = -8-10 = -18.$

$2\times(-9) = 18.$

विशेषता के अनुसार सारणिक का मान भी 2 के गुणनफल से प्राप्त होता है – सारणिक की इस विशेषता के कारण किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ में से सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड (common factor) बाहर ले सकते हैं।

8.9.3 विशेषता – 3.

यदि किसी सारणिक में समीप की दो पंक्तियों अथवा स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाय तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है लेकिन चिन्ह बदल जाता है . उदाहरणार्थ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2)$$

Changing the consecutive row

$$= -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार से $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

यदि समीप की पंक्ति अथवा स्तम्भ को क्रमशः आपस में बदला जाए तो सारणिक के चिन्ह में परिवर्तन होता है परन्तु इसका मूल्य समान रहता है।

उदाहरण – 9 : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ or } -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

Note : यदि पंक्ति तथा स्तम्भ को विषय संख्या बार आपस में बदला जाए तो सारणिक का चिन्ह परिवर्तित होता है, जबकि सम संख्या बार परिवर्तित करने से चिन्ह समान रहता है।

8.9.4 विशेषता – 4

यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम (Identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उदाहरण : 10 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

परिवर्तित करने पर

तथा – $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

Proof $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$

यहाँ प्रथम तथा द्वितीय पंक्ति सर्वसम हैं

विशेशता – 3 का प्रयोग करते हुये यह सारणिक इस प्रकार भी लिखा जा सकता है–

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta$$

or $\Delta + \Delta = 0$

or $2\Delta = 0$

$\Delta = 0$

इसी प्रकार दो स्तम्भ सर्वसम होने पर सारणिक का मान शून्य होता है, इसे निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है–

उदाहरण : 11

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$[3\times4 - 3\times4 = 0]$

$\Rightarrow 1(30\text{-}30) - 4\,(12\text{-}15) + 4(12-15)$

$\Rightarrow 12 - 12 = 0$

8.9.5 विशेषता: 5

यदि सारणिक में कोई पंक्ति अथवा स्तम्भ किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का गुणा हो तो सारणिक का मान शून्य होता है। उदाहरणार्थ

उदाहरण – $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

यहाँ दूसरी पंक्ति प्रथम पंक्ति की ज्ञ का गुना है।

विशेशता – 2^1 के आधार पर K को बाहर लिया जा सकता है – अतः

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के सभी मौलिक अंशों को किसी अचर राशि (k) से गुणा कर दिया जाए तो सारणिक को मान में उस राशि k का गुणा हो जाता है।,

विशेशता – 4^2 के आधार पर –

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$ क्योंकि प्रथम और द्वितीय पंक्ति सर्वसम हैं।

इसे संख्यात्मक उदाहरण द्वारा निम्न सारणिक से समझाया गया है –

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$ द्वितीय पंक्ति में से 2 बाहर लेने पर

$= 2 \times 0 = 0$ विशेषता – 4 के आधार पर।

8.9.6 विशेषता – 6

यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का प्रत्येक अंश दो राशियों के योग अथवा अन्तर के रूप में हो तो साराणिक को उसी क्रम की दो सारणिकों के योग अथवा अन्तर के बराबर प्रकट किया जा सकता हैं। जैसे

उदाहरण–13 यदि सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

तो

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + k_1)b_2 - (a_2 + k_2)b.$$

$$= a_1b_2 + k_1b_2 - a_2b_2 - k_2b_1$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 + k_1b_2 - k_2b_1$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम (Identical) हो तो सारणिक का मान शून्य होता है ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & + & k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & + & k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & + & k_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ तो}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & + & k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & + & k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & + & k_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 + k_1)\, M_{11} - (a_2 + k_2) M_{21} + (a_3 + k_3) M_3$$

(M उपसारणिक को व्यक्त करता है।)

$$= (a_1M_{11} - a_2M_{21} + a_3M_{31}) + (k_1M_{11} - k_2M_{21} + k_3M_{31})$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8.9.7 विशेषता – 7

यदि कोई पंक्ति (अथवा स्तम्भ) या पंक्ति (स्तम्भ) का कोई गुणित (multiple) किसी दूसरी पंक्ति में जोड़ा या घटाया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है। उदाहरणार्थ

यदि सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ है तथा इसके द्वितीय स्तम्भ को किसी अचर (k) से गुणा करके इसे प्रथम स्तम्भ में से घटा दिया जाय तो सारणिक अपरिवर्तित रहती है। अर्थात –

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & - kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & - kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & - kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसी विशेषता के आधार पर किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को किसी दूसरी पंक्ति या पंक्तियों के योग अथवा अन्तर से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो सारणिक के मान में परिवर्तन नहीं होता है।

उदाहरण : 14 जहाँ $c \rightarrow \text{column}$; $R \rightarrow \text{Rows}$ हैं।

$c_1 \rightarrow c_1 + c_2$ या $c_1 + c_3$ या $c_1 + c_2 + c_3$ इत्यादि ।

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2$ या $R_1 + R_2$ या $R_1 + 3R_2$ इत्यादि ।

8.9.8 विशेषता – 8

यदि किसी सारणिक के x वाले अवयव x में बहुपद हों और यदि x के स्थान पर a रखने पर सारणिक शून्य हो जाती होतो $(x-a)$ इसका एक गुणनखण्ड होग।

उदाहरणः 15

$$\text{यदि } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

यदि द्वितीय पंक्ति को $b = a$ से प्रतिस्थापित किया जाए, तो दो समान पंक्ति प्राप्त होती हैं। इस प्रकार Δ शून्य हो जाता है अतः $(a-b)$ Δ का गुणनखण्ड है।

हल प्रश्न (उदाहरण)

उदाहरण – 16 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल – इस सारणिक का मान हम सीधे प्रसार (उपसाणिक की सहायता से) करके ज्ञात कर सकते हैं –

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6+9) - 6(-4-9) - 1(-6-9)$$

$$= 3 + 78 + 15 = 96$$

या फिर इस सारणिक का मान नियमों का प्रयोग करते हुए पंक्ति स्तम्भ क्रियाओं द्वारा ज्ञात कर सकते हैं –

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \to C_1 + C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$=0(0+3)-7(-10-3)-1(-5-0)$$

$$=-7\times(-13)+1\times5 = 96.$$

उदाहरणः 17

सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} = 4abc$

हल

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(b+c) & 2(c+a) \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

यदि (Applying) $R_1 \to R_1 - R_2$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} o & c & c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2c\begin{vmatrix} o & 1 & c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

यदि (Applying) $C_2 \to C_2 - C_2$

$$\Delta = 2c\begin{vmatrix} o & o & 1 \\ a+b & b-a & a \\ b & b & c \end{vmatrix}$$

$$=2c\left[b(a+b)-b(b-a)\right]$$

$$=2c\left[ba+b^2-b^2+ab\right]$$

$$=2c[2ab]=4abc$$

अतः सिद्ध।

उदाहरणः 18

$\begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 17 & 3 & 3 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल .

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 17 & 3 & 3 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 6 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_2 \to R_2 + R_3$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 0 & -5 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_1 \to R_1 + 2R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{vmatrix} R_1 \to R_1 + R_2$$

$$=-4(-24-0)=96$$

उदाहरणः 19

सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} + xy$

हल – इस सारणिक में प्रथम स्तम्भ में से तीसरे स्तम्भ को घटाने पर अर्थात् –

$C_1 \rightarrow C_1 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 \\ -y & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

अब प्रथम स्तम्भ के संदर्भ में विस्तार करने पर –

$$= -y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+x & 1 \end{vmatrix} = -y(1-1-x) = xy$$ ए

8.10 सारणिकों का गुणा

सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मान है। आव्यूह के गुणा पर विस्तर से चर्चा हम अग्ली इकाई में करेगें। यहाँ यह जान लेना आवश्यक है कि, दो सारणिकों का गुणा तभी किया जा सकता है, तब वे समान कोटि के हों जैसे –

$|A| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ और $|B| \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ दो सारणिक दिये हैं

तो पहली सारणिक $|A|$ की पंक्ति के अवयवों का दूसरी सारणिक $|B|$ के स्तम्भ के अवयवों से गुणा किया जाता है, तो निम्न प्रकार है –

$$\begin{vmatrix} a_1c_1 + b_1.c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2.c_2 & a_2d_1 + b_2.d_2 \end{vmatrix} |A| \times |B|$$

8.11 क्रेमर का नियम (Cramer's Rule)

सारणिक की सहायता से युगपत समीकरणों को हल करने की विधि को क्रेमर का नियम कहते हैं। इस नियम को ध्यान में रखते हुए ही हम आव्यूह के द्वारा युगपत समीकरणों का हल प्राप्त करते है। अतः यह महत्वपूर्ण नियम है।

यहाँ हम दो अज्ञात राशियों के समीकरण पर विचार करते हैं।

उदाहरणः 20

$$a_1 x + b_1 y = m_1 \qquad \text{(i)}$$

तथा $$a_2 x + b_2 y = m_2 \qquad \text{(ii)}$$

समी0 (i) में b_2 से (ii) में (b_1) से गुणा करने पर –

$$a_2 b_2 x + b_1 b_2 y = m_1 b_2 \qquad \text{(iii)}$$

$$a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = m_2 b_1 \qquad \text{(iv)}$$

समी0 (iii) में से समी0 (iv) को घटाने पर –

$$n(a_1 b_2 - a_2 b_1) = m_1 b_2 - m_2 b_1 \qquad \text{(v)}$$

इसी प्रकार

$$y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 m_2 - m_1 q_2 \qquad \text{(vi)}$$

समी0 (v) से

$$n = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(vii)}$$

इसी प्रकार

$$y = \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \left| \frac{\begin{matrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \right| \qquad \text{(viii)}$$

समी0 (vii) से

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{(ix)}$$

तथा समी0 (viii) से

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

समी0 (ix) और (x) से

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}} \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{|A_1|} = \frac{y}{|A_2|} = \frac{1}{|A|}$$

जहाँ

$|A_1| = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}$ = सारणिक में X के गुणांकों की जगह अचर पद लिखने से बनी स्तम्भ वाली सारणिक।

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

8.12 सारणिक का अवकलज (Derivative of a determinant)

किसी सारणिक का अवकलज ज्ञात किया जा सकता है यदि उसे अवयव किसी चर के सापेक्ष अवकलनीय (differentiable) हो। यदि हमें –

उदाहरणः 20

$\begin{matrix} x^3 & 2x+3 \\ 3x^2 & x^4 \end{matrix}$ का अवकलज ज्ञात करना हो तो यह निम्न प्रकार किया जायेगा।

$$\frac{d}{dx} = \begin{vmatrix} x^3 & 2x+3 \\ 3x^2 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2 \\ 3x^2 & x^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & 2x+3 \\ 6x & 4x^3 \end{vmatrix}$$

यहाँ R_1, R_2 सारणिक के अवयवों का अवकलन करने पर –

$$= [3x^6 - 6x^2] + [4x^6 - 12x^2 - 18x]$$

$$= 7x^6 - 18x^2 - 18x$$

स्पष्ट है कि यदि $n \times n$ आव्यूह $A = [a_{ij}]$ के अवयव X के अवकलनीय फलन (Differentiable function) हों तो X के सापेक्ष सारणिक का अवकलज n सारणिकों

का योग होता है, जिसमें सारणिक A के एक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) अवयवों को उनके अवकल गुणांकों से प्रतिस्थापित किया ग्या हो।

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 0 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2 & 3 & 3x^2 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 2 \\ 2x & 3x+1 & x^3 \\ 0 & 3 & 2x \end{vmatrix}$$

8.13. अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1.किसी सारणिक के कितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का .... कहलाती है।

(i) अंश (ii) अवयव (iii) क्रम (iv) विस्तार

2.सारणिक के प्रसार में किसी अवयव को गुणा करने वाले छोटे सारणिक को उसका .. कहते है।

(i)सहखण्ड़ (ii)उपसारणिक (iii) गुणनखण्ड़ (iv) इनमें से कोई नहीं

3.यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ अथवा स्तम्भ सर्वसम हों तो सारणिक का मान क्या होता है?

(i) शून्य (ii) एक (iii) अनन्त (iv) इनमें से कोई भी

4.यदि कोई पंक्ति या पंक्ति का कोई गुणित किसी दूसरी पंक्ति में जोड़ा या घटाया जाय तो सारणिक का मान क्या रहता है?

(i)परिवर्तित (ii) अपरिवर्तित (iii) एक (iv) शून्य

5. अगर पंक्ति या स्तम्भ को किसी मानक (λ) से गुणा करें तब नये सारणिक का मान पुराने सारणिक के मा का कितना गुना होग?

(i)एक गुना (ii) दूसरा गुना (iii) मानक (λ) गुना (iv) इनमें से कोई नहीं

उत्तर : 1. (i), 2. (ii), 3. (iii), 4. (iv), 5. (iii)

II. सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

1. किसी सारणिक का मान दोनों विकर्णों पर स्थित अवयवों के गुणनफल के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
2. यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
3. सारणिक एक वर्ग आव्यूह का मान है।
4. यदि सारणिक में कोई पंक्ति अथवा स्तम्भ किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ का गुणा हो तो सारणिक का मान इकाई के बराबर होता है।
5. अगर दो पंक्तियों या स्तम्भों का स्थान परिवर्तित किया जाय तो चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

उत्तर : 1. (F), 2. (T), 3. (T), 4. (F), 5. (T)

प्र0 1 निम्न समीकरणों को क्रेमर के नियम द्वारा हल कीजिए।

(i)
$$3x+3y-Z=11$$
$$2x-y+2Z=9$$
$$4x+3y+2Z=25 \qquad [\text{Ans. } x=2, y=3, z=4]$$

(ii)
$$x+y+z=9$$
$$2x+5y+7z=52$$
$$2x+y-z=0 \qquad [\text{Ans. } x=1, y=3, z=5]$$

प्र0 2 सिद्ध कीजिए

लघु प्रश्न

(i)
$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \text{ ए}$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(iii) $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

(iv) $$\begin{vmatrix} x+a & x+2a & x+3a \\ x+2a & x+3a & x+4a \\ x+4a & x+5a & x+6a \end{vmatrix} = 0$$

प्र0 3 सिद्ध कीजिए – (दीर्घ प्रश्न)

(i) $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

प्र0 4 X का मान ज्ञात कीजिए जब –

$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ x & x & x \\ b & n & b \end{vmatrix} = 0$$

8.13.1 अभ्यास के लिए प्रश्न (दीर्घ)

प्रश्न 1 – एक व्यक्ति जिसकी आय 1200 रू0 है, वस्तु X और वस्तु y के क्रय के निम्नांकित संयोगों के मध्य उदासीन रहता है क्योंकि दोनों संयोगों से उसे समान संतुष्टि मिलती है।

(i) x की 10 इकाइयाँ y की 20 इकायाँ

(ii) x की 15 इकायाँ y की 10 इकायाँ

वस्तु x और y की कीमत ज्ञात कीजिए ?

[Ans. 60, 30]

प्रश्न . 2 – यह ज्ञात है कि उपभोग (c) और बचत (s) आय (y) के फलन होते हैं और $c+s=y$| यदि किसी अर्थव्यवस्था में $c=100+0.5y$, $s=50+0.35\,y$ वो c, s और y के संतुलित मूल्य ज्ञात कीजिए।

[उत्तर – $c=600$, $s=400$, $u=1000$]

प्रश्न – 3 सिद्ध कीजिए –

(i) $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = O$

(ii) $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix} = O$

(iii) $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix} = O$

(iv) $\begin{vmatrix} 38 & 7 & 63 \\ 16 & 3 & 29 \\ 27 & 5 & 46 \end{vmatrix} = O$

(v) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(vi) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

(vii) $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+b \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$

प्र0 4. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

प्र0 5. हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} 6-x & 3 & 3 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 5 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

प्र0 6. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x(x+a+b+c)$$

प्र0 7. सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

प्र0 8. हल कीजिए –

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log x^z \\ \log y^x & 1 & \log y^z \\ \log z^x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$$ जहाँ x, y, z धनात्मक $(+ve)$ हैं।

Ans. $(0,$ क्योंकि $c_1 = c_2 = c_3).$

प्र0 9. x, y का मान मूल्य ज्ञात कीजिए जब –

$$\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x+iy$$

Ans. $(x = 0 \;\; y = 0)$

8.14 शब्दावली

1.) **तकनीकी गुणांक** – इसे आगत निर्गत अनुपात भी कहते हैं। इसका परिकलन वांक्षित क्षेत्र के आग्त में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग देने पर ज्ञात किया जाता है।

2.) **तकनीकी व्यूह** – ऐसा व्यूह जिसमें विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगों के तकनीकी गुणांक को पंक्ति एवं स्तम्भों में दर्शाया जाय।

8.15 सारांश

प्रस्तुत अध्याय में प्रमुख बिन्दु निम्न हैं –

- युगपत समीकरणों में आसन हल के लिये बीजगणित में विषेष विधि का प्रयोग किया जाता है जिसे सारणिक कहते हैं।
- सारणिक दो या दो से अधिक गुणनफलों के अन्तर की सांकेतिक अभिव्यक्ति है।
- सारणिक का क्रम – किसी सारणिक के अन्तर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियाँ होती हैं, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है।
- सारणिक में संख्याओं जैसे $(a_1, b_1 \ldots\ldots x_x)$ को मौलिक अंश (Constituents) तथा इनके गुणनफल $(a_1 b_2, a_2 b_1 \ldots m_n n_m)$ को अवयव (elements) कहते हैं।
- सारणिक के मौलिक अंशो की संख्या उसके क्रम द्वारा निर्धारित होती है जैसे द्वितीय क्रम के सारणिक मे $2^2 = 4$ मौलिक अंश होंगे तथा तृतीय क्रम के सारणिक में $3^3 = 9$ होंगे।
- सारणिक के क्रम द्वारा ही तत्वों का निर्धारण होग, जैसे द्वितीय क्रम में तत्वों की संख्या $2L = 2$ होगी तथा तृतीय क्रम में तत्वों की संख्या $3L = 6$ होगी।
- सारणिक के अवयव को उपसंकेतो द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जैसे a_{11}, a_{21}, a_{ij}, जिसमें i = पंक्ति j = स्तम्भ का मान होता है।
- सारणिक में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान होती है।
- सारणिक का प्रसार उपसारणिक द्वारा किया जाता है, किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है।
- उपसारणिक (Minor) – किसी सारणिक के किसी अवयव की उपसारणिक, एक सारणिक ही है जो अवयव से सम्बन्धित पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ देने पर प्राप्त होती है। इसे M_{ij} से प्रयुक्त करते हैं।

- किसी अवयव की उपसारणिक ही अगर चिन्ह $\left[\left(-1^{i+j}\right)\right]$ के साथ लिखी जाए तो वह उस अवयव का सहखण्ड (cofactor) है –
- जैसे a_{ij} का सहखण्ड $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- जहाँ M_{ij} - a_{ij} का उपसारणिक है।
- सारणिक विस्तार के सामान्य नियम के अन्तर्गत प्रथम खण्ड (+), द्वितीय (–), तृतीय (+) होग क्योंकि जब $i+j$ का जोड़ सम तब चिन्ह (+) तथा जब $i+j$ का जोड़ विषम तब चिन्ह (–v) होता है।
- सारणिक की विषेषताएँ देखे खण्ड 8.9
- दो सारणिकों का गुणा तभी किया जा सकता है, जब वे समान कोटि के हों।
- क्रेमर का नियम – सारणिक की सहायता से युगपत समीकरणों के हल की विधि।
- किसी सारणिक का अवकलन ज्ञात किया जा सकता है जबकि उसके अवयव किसी चर के सापेक्ष अवकलनीय हों।

8.16 संदर्भ ग्रन्थ

- RGD Allen (1998) – 'Mathematical Analysis for Economists', Macmillan India Limited, Delhi.
- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेसन्स, नई दिल्ली।
- D.R. Agarwal (2001) – Mathematics for Economists – Vrinda Publications (P) Ltd., Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) – परिमाणात्मक विष्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई – 9 आगत निर्गत सारिणी विश्लेषण

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में सांख्यिकी तकनीकों की विस्तारपूर्वक समीक्षा की गयी है। प्रस्तुत इकाई क्रियात्मक शोध तकनीकों के माध्यम से व्यवसायिक उपक्रम के अन्तर्गत प्रबन्धकों द्वारा समय–समय पर कार्यक्रमिक निर्णय लेने में सहायक होगी।

आगत निर्गत सारिणी विश्लेषण पिछले तीन दशकों से विकास नियोजन में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रही है। यह तकनीक एक तरफ अर्थव्यवस्था की प्रकृति को सम्ग्र रूप से समझने में तथा दूसरी ओर घरेलू अर्थव्यवस्था की सामाजिक आर्थिक उद्देश्यों बनाम बाहरी अर्थव्यवस्था के आर्थिक उद्देश्यों को चिन्हित करने में, नियोजित करने में तथा उसे लागू करने में अत्यन्त सहायक है।

यह तकनीक अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करती है। तथा इस धारणा पर आधारित है कि समस्त अर्थव्यवस्था में औद्योग्कि अंतः सम्बन्ध और अन्तः निर्भरताएं होती हैं।

9.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से हम यह समझ सकेंगे कि

1.) आगत निर्गततकनीक किस पर आधारित है।
2.) आगत निर्गतसारणी किस प्रकार निर्मित होती है।
3.) आगत निर्गत गुणांक का परिकलन कैसे किया जाता है।
4.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल क्या है और यह उनके आगत निर्गत बन्द मॉडल से किस रूप में भिन्न है।
5.) लियोनतिफ का प्रावैगिक मॉडल किस प्रकार से स्थैतिक आगत निर्गतमॉडल से भिन्न है।
6.) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या सीमाएं है।

9.3 मुख्य भाग

9.3.1 आगत निर्गत विश्लेषण का इतिहास

आगत निर्गतविश्लेषण को सर्वप्रथम फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने (Quesnay) ने अपने सिद्धान्त Tableau Economique के अर्न्तग्त प्रस्तुत किया था। परन्तु इसका विकास *''आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति''* के रूप में हारवर्ड विश्वविद्यालय के प्रो0 वैसिली. डब्लू.

लियोनतिफ (Wassily. W. Leontief) ने किया। इस आर्थिक विश्लेषण के क्षेत्र में महान योगदान के लिये उन्हे 1973 में नोबेल पुरस्कार भी प्रदान किया गया।

आगत निर्गत विश्लेषण को अन्तः औद्योगिक प्रवाह विश्लेषण या अन्तः औद्योगिक सम्बन्ध विश्लेषण, क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण तथा बहु–क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण भी कहा जाता है। आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था की परस्पर निर्भरताओं तथा जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के अध्ययन हेतु किया जाता है। यह विश्लेषण अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करते हुये विभिन्न क्षेत्रों में निर्गतों के आवंटन को प्रस्तुत भी करता है। लियोन्तिफ ने अमेरिका के लिये वर्ष 1919, 1929 एवं 1939 के लिये ऐसे ही सारिणियों का प्रस्तुतीकरण दिया था।

इस तकनीक का मूल आधार अर्थव्यवस्था के विभिन्न उद्योगें की परस्पर निर्भरता की मान्यता है जो आगत निर्गत के सम्बन्धों के रूप में उदय होती है। एक उद्योग की आग्त दूसरे की निर्गत होती है और विलोमशः भी। अंततः उनके परस्पर सम्बन्धों के फलस्वरूप समस्त अर्थव्यवस्था में पूर्ति और मांग का सन्तुलन स्थापित हो जाता है।

9.3.2 आगत निर्गत विश्लेषण की मान्यताएं

1.) सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था दो क्षेत्रों में विभाजित है। अंतः उद्योग क्षेत्र और अंतिम मांग क्षेत्र सामान्यतः यह मान लेते हैं कि n उद्योग और n वस्तुएं हैं।
2.) प्रत्येक क्षेत्र का उप विभाजन किया जा सकता है।
3.) प्रत्येक उद्योग मात्र एक समांग वस्तु की समांग इकाइयों का उत्पादन करता है। यदि कोई उद्योग दो या अधिक वस्तुओं का एक निश्चित अनुपात में उत्पादन करता है, तो उन्हे एक समांग वस्तु के रूप में लिखा जा सकता है।
4.) किसी एक उद्योग का निर्गत किसी अन्य उद्योग के आगत के रूप में काम में लाया जाता है।
5.) उत्पादन की तकनीक समान रहती हैं
6.) आगत तथा निर्गत मुद्रा मूल्य के रूप में व्यक्त किये जाते हैं।
7.) उत्पादन की बाहय मितव्ययिताएं तथा अमितव्ययिताएं नहीं पायी जाती।
8.) अर्थव्यवस्था पूर्णतः सन्तुलित हैं

9.) सभी आगतों को एक स्थिर अनुपात में प्रयुक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में उत्पादन स्थिर प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत होता है।

10.) श्रम एकमात्र प्राथमिक आगत है।

9.3.3 आर्थिक समस्या

आगत निर्गतविश्लेषण के अध्ययन में तीन महत्वपूर्ण बिन्दुओं को रेखांकित करना आवश्यक है।

1.) यह विश्लेषण उत्पादन से सम्बन्धित है। मांग फलन का कोई स्थान नहीं है। यहां समस्या तकनीकी है। एक उत्पादक प्रायः यह निर्धारित करने को उत्सुक होता है कि क्या उत्पादित करना है और कितनी मात्रा में आग्तों को उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त करना है।

2.) यह विश्लेषण आनुभविक अनुसंधान पर आधारित है। यह विशेषता इसे वालरस के सामान्य संतुलन विश्लेषण से भिन्न करती है। आगत निर्गतमॉडल एक संकुचित मॉडल है क्योंकि यह उत्पादन पक्ष का ही अवलोकन करता है और अर्थव्यवस्था के मांग पक्ष की पूर्णतया अवहेलना करता है।

3.) इस तकनीक से ज्ञात किया ग्या निर्ग्त बाजार की संतुलन दशाओं का संतुष्ट नहीं करता है। यहां समान्य संतुलन विश्लेषण का प्रयोग मात्र आगत निर्गतविश्लेषण के अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के परस्पर निर्भरता के ही संदर्भ में लिया गया है।

यह अन्तः सम्बन्ध इसलिये उत्पन्न होता है क्योंकि प्रत्येक उद्योग दूसरे उद्योग के निर्गत को आगत के रूप में प्रयुक्त करता है। उदाहरण के लियेः स्टील का प्रयोग रेलवे उद्योग एवं पेट्रोलियम उद्योग के द्वारा होता है। इसी प्रकार रेलवे और पेट्रोल स्टील उद्योग के द्वारा प्रयोग किया जाता है। अतः मूल समस्या इस बात को जानना है कि अंतिम उपभोग के लिये क्या बच सकता है और इस निर्गत की कितनी मात्रा उत्पादन प्रक्रिया के आगतों के रूप में प्रयोग की जाय जिससे कि ये शुद्ध निर्गत प्राप्त हो सके यदि मांग ब्यौरा प्राप्त हो जाय तो इस विश्लेषण का प्रयोग अग्रिम उत्पादन आवश्यकताओं की भविष्यवाणी में किया जा सकता है। आर्थिक नियोजन तथा पिछड़े इलाकों की आर्थिक विकास की समस्या में भी इस विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। इसका अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रयोग राष्ट्रीय आय लेखांकन आव्यूह की रचना में है।

9.4 लियोनतिफ का आगत निर्गत मॉडल

आगत निर्गतविश्लेषण के अध्ययन हेतु लियोनतिफ ने मान्यताओं के आधार पर तीन मुख्य मॉडल को प्रस्तुत किया–

1.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल
2.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत बन्द मॉडल
3.) लियोनतिफ का प्रोवैगिक मॉडल

9.4.1 लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गतखुला मॉडल

खुले मॉडल के अन्तर्गत n उत्पादक क्षेत्रों द्वारा निर्मित n X n क्रम के आगत निर्गत व्यूह में खुला क्षेत्र (open sector) ले लिया जाता है। खुले क्षेत्र के अन्तर्गत तथ्यों की सूचना बाहरी रूप द्वारा प्राप्त होती है। तथा इसका सम्बन्ध अन्य उत्पादक क्षेत्रों से नहीं होता। अर्थात इसका तात्पर्य उस क्षेत्र से है जहां उद्योगें के प्राप्त निर्गतों के एक भाग कर पूर्ण रूप से उपभोग हेतु मांग की जाती है।

उदाहरणः

अर्थव्यवस्था तीन क्षेत्रों में विभाजित है। यहां पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि कृषि एवं उद्योग अन्तः उद्योग के रूप में तथा घरेलू क्षेत्र को अंतिम क्षेत्र के रूप में प्रदर्शित किया गया है। आगत निर्गत सारिणी में तीनों क्षेत्रों के निर्गत को पंक्तियों (rows) द्वारा क्षैतिज रूप में दर्शाया गया है एवं इन क्षेत्रों के आगत को स्तम्भों (column) द्वारा लम्बवत् रूप में दर्शाया गया है।

प्रथम पंक्ति का कुल योग 300 इकाइयां है जो कृषि का कुल निर्गत प्रदर्शित करती है। इसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र में, 200 इकाइयां उद्योग तथा शेष 50 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में आगत के रूप में प्रयोग में लाई जाती हैं।

सारिणी की द्वितीय पंक्ति में उद्योग क्षेत्र के कुल उत्पादन को प्रदर्शित किया गया है। उद्योग क्षेत्र में कुल 150 इकाइयों का उत्पादन होता है। जिसमें से 55 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 70 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में प्रयुक्त होती हैं।

इसी प्रकार से स्तम्भों में इन क्षेत्रों के लागत को दर्शाया गया है। प्रथम स्तम्भ इस बात को सूचित करता है कि कृषि क्षेत्र में 300 इकाइयों का कुल उत्पादन करने के लिये 125 इकाइयों की लागत होती है, जिसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र से, 55 इकाइयां उद्योग

तथा 20 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं। द्वितीय स्तम्भ यह दर्शाता है कि उद्योग की 150 इकाइयों के उत्पादन के लिये 225 इकाइयों के बराबर लागत लगाई जाती है। जिसमें से 200 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 30 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं।

तृतीय स्तम्भ में शून्य यह प्रकट करता है कि घरेलू क्षेत्र उपभोग क्षेत्र है जो कुछ भी विक्रय नहीं करता।

सारिणी –1 : आगत निर्गत सारिणी

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	50	200	50	300
	2. उद्योग	55	25	70	150
	3. घरेलू	20	30	0	50
	कुल लागत	125	255	120	500

इस मॉडल में न सिर्फ विभिन्न उद्योगों के लिये आवश्यक आगतों पर अपितु उपभोक्ताओं द्वारा प्रस्तुत उपभोग मांग (अंतिम भोग) को भी प्रदर्शित किया गया है। अतः यह खुला मॉडल है।

उपर्युक्त सारिणी की सहायता से सामान्य प्रदेश व्यूह की रचना की जा सकती है।

सारिणी –2 : प्रदेश व्यूह

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल निर्गत
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	X_{11}	X_{12}	D_1	X_1
	2. उद्योग	X_{21}	X_{22}	D_2	X_2
	3. घरेलू	X_{31}	X_{23}	O	X_3

स्तम्भों को लेने पर निम्न उत्पादन फलन बनेगा।

$$X_1 = f_1 (X_{11}, X_{21}, X_{31})$$

अथवा $300 = f_1 (50, 55, 20)$ (सारिणी 1 के अनुरूप)

$$X_2 = f_2 (X_{12}, X_{22}, X_{23})$$

अथवा $150 = f_2 (200, 25, 30)$

इसी प्रकार यदि 'n' उत्पादक क्षेत्र हैं तो क्षेत्र n का उत्पादन फलन इस प्रकार होगा

$$X_n = f_n (X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{nn})$$

सारिणी की पंक्तियां प्रत्येक उत्पाद की मांग एवं पूर्ति के बीच समन्वय को प्रदर्शित करती हैं।

अर्थात $X_1 = X_{11} + X_{12} + D_1$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + D_2$$

$$X_3 = X_{31} + X_{32}$$

यदि अब यह मान लिया जाय कि i उद्योग का कुल उत्पादन n उद्योगों द्वारा आग्त के रूप में काम में लाया जाता है, तब ऐसी दशा में

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{in} + D_i$$

चूंकि लियोनतिफ ने स्थिर तकनीकी गुणांक (आगत निर्गत अनुपात) की धारणा को स्वीकार किया है, अतः ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक होगा –

$$a_{ij} = X_{ij} / X_j$$

यहां X_{ij} = i वां उद्योग का उत्पादन जो कि j वें उद्योग द्वारा काम में लाया जाता है।

X_{ij} = j वें उद्योग का कुल उत्पादन

तकनीकी व्यूह (आगत निर्गत गुणांक)

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	0.16	1.33	50	300
	2. उद्योग	0.18	0.16	70	150
	3. घरेलू	0.06	0.20	0	50

तकनीकी गुणांक

इसको आगत ज्ञात करने के लिये वांक्षित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग दे दिया जाता है। उदाहरणार्थ, कृषि क्षेत्र का कुल उत्पादन 300 इकाइयां हैं तथा कृषि क्षेत्र का आगत 50, 55 तथा 20 इकाइयां हैं, ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक 50/300 = 0.16 ,55/300 = 0.18 तथा 20/300 = 0.06 इसी प्रकार से दूसरे क्षेत्रों का तकनीकी गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

खुले मॉडल का उदाहरण

मान लीजिये एक सामान्य माडल है।

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots\dots\dots\dots X_{in} + D_i$$

जहां $Xi = i$ वें क्षेत्र का कुल उत्पादन, $i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots n$

$X_{ij} = i$ वें क्षेत्र के उत्पादन का वह भाग जो j वें क्षेत्र द्वारा आग्त के रूप में काम में लाया जाता है।

इस मॉडल को n क्षेत्रों के लिये इस प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + \dots\dots\dots\dots X_{1n} + D_1$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + \dots\dots\dots\dots X_{2n} + D_2$$

$$X_3 = X_{31} + X_{32} + \dots\dots\dots\dots X_{3n} + D_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots\dots\dots\dots X_{nn} + D_n$$

तकनीकी गुणांक $= a_{ij} = X_{ij} / X_j$

$$X_{ij} = a_{ij}.X_j$$

$X_{11} = a_{11}X_1, X_{12} = a_{12}X_2$ आदि।

समीकरण इस प्रकार से होंगे

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots a_{1n}X_n + D_1$$

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots\dots a_{2n}X_n + D_2$$

$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{nn}X_n + D_n$$

मॉडल को निम्नवत रूप में व्यक्त किया जा सकता है:–

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_i$$

अथवा $X = AX + D$

यहां $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ X_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & & & \\ & & & . \\ & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ . \\ D_n \end{pmatrix}$

अतः $D = X - AX = [I - A]\, X$

I = इकाई आव्यूह (Identity Matrix) है

A = आगत गुणांको का व्यूह (Impact Coeff. Matrix)

अतः $X = [I\text{-}A]^{-1} D$

$[I - A]^{-1}$ व्यूह $[I\text{-}A]$ का प्रतिलोम है।

9.4.2 लियोनतिफ का आगत निर्गतबन्द मॉडल

लियोनतिफ के आगत निर्गत खुले मॉडल के अन्तर्गत अन्तिम भोग क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) को वाहय रूप में प्रदर्शित किया गया था। परन्तु यदि इसका भी विलय एक उद्योग मानकर आर्थिक व्यवस्था में कर दिया जाय तो कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं रह जाता है जिसका सम्बन्ध वाहय क्षेत्र से हो।

घरेलू अथवा परिवार क्षेत्र जिसका आग्त उपभोग है तथा निर्गत श्रम है उसे भी आन्तरिक रूप से निर्धारित किया जाता है। ऐसी दशा में प्रत्येक वस्तु की प्रकृति माध्यमिक वस्तुओं जैसी होगी क्योंकि इस (n+1) उद्योग व्यवस्था से उत्पादित निर्गतों को इन्हीं निर्गतों के उत्पादन हेतु प्रयोग किया जाता है। इस दशा में आगत निर्गत मॉडल को एक बन्द मॉडल के रूप में देखा जा सकता है।

मान्यता

1.) यहां पूर्ण प्रयोगिकता की स्थिति विद्यमान मानी जाती है।
2.) साथ ही साथ किसी तरह का सरकारी हस्तक्षेप की संभावना को भी नकार दिया जाता है।
3.) बन्द मॉडल के अन्तर्गत विदेशी व्यापार तथा पूंजी निवेश सम्बन्धी समस्याओं एवं अन्य प्रावैगिक तत्वों की उपेक्षा कर दी जाती है।

यहां (n+1) उद्योगें में से प्रत्येक एक भिन्न निर्गत की X_i (i=1, ..., n+1) मात्रा का उत्पादन करता है। अंतिम क्षेत्र घरेलू क्षेत्र है, जिसका उत्पादन अथवा निर्गत X_{n+1} है। यहां X_{ij} = i वें उद्योग का निर्गत, जो j वें उद्योग को जाता है। X_{n+1}, i वें श्रम की वह मात्रा है जो कि i वें उद्योग में प्रयोग की जाती है।

बन्द मॉडल के सन्तुलन समीकरणों का प्रथम समूह

गणितीय रूप में बन्द मॉडल को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं–

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \text{ -------------------- } (1)$$

$$(i= 1,2, ... n+1)$$

$$\sum X_{ij} = 0 \qquad \text{ -------------------- } (2)$$

स्थिर तकनीकी गुणांक की दशा में

$$X_{ij} = a_{ij} X_i \qquad \text{ ------------------ } (3)$$

समी. (3) का मान समी0 (1) में रखने पर

n+1

$$X_i = \sum_{j=1} X_i$$

अथवा

$$X_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_i = 0 \text{ ----------------- } (4)$$

समी0 (4) सन्तुलन समी0 का प्रथम समूह है।

बन्द मॉडल के समीकरणों का द्वितीय समूह

इस द्वितीय समूह के अन्तर्गत हम मूल्यों Pi (j=1,2, ... n+1) पर विचार करते हैं। यहां Pi अन्तिम क्षेत्र (घरेलू क्षेत्र) की श्रम दर है।

यह मानते हुये कि प्रत्येक उद्योग में प्राप्तियां तथा लागतें समान है, सन्तुलन समी0 को निम्नवत व्युत्पादित किया जा सकता है। iवें उद्योग के लिये

$$\text{प्राप्तियां} = X_i P_i$$

तथा लागतें
$$\sum_{j=1}^{n+1} P_i X_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} (a_{ij} X_i P_i)$$

जहां
$$X_{ij} = a_{ij} X_i$$

सन्तुलन की दशा में

$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}.X_i P_i$$

अथवा
$$X_i P_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}.X_i P_i = 0 \text{ ------------- } (5)$$

समी0 (5) सन्तुलन समी0 का द्वितीय सेट है।

9.4.3 लियोनतिफ का प्रावैगिक मॉडल

स्थैतिक मॉडल के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के तकनीकी गुणांकों की सहायता से उनकी पारस्परिक निर्भरता का अध्ययन किया जाता है। परन्तु ये गुणांक अर्थव्यवस्था में स्टॉक की वास्तविक आवश्यकता पर प्रकाश नहीं डालते। न ही इस पर प्रकाश डालते हैं कि साधन की वह मात्रा जो उद्योग द्वारा खपत की जाती है के लिये कितनी पूंजी की आवश्यकता होगी। इस पूंजी की मांग स्थिर पूंजी विनियोग जैसे निर्माण, मशीन इत्यादि अथवा उत्पादन के लिये कच्चे माल का स्टॉक बनाये रखने के लिये की जाती है। अब यदि स्थैतिक आगत निर्गत मॉडल (खुला मॉडल) के अन्तर्गत पूंजी का प्रभाव सम्मिलित कर लिया जाय तब यह व्यवस्था गुणात्मक हो जाती है। अतः, पूंजी निवेशक प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल का एक विशिष्ट लक्षण है।

लियोनतिफ का प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल स्थैतिक मॉडल का सामान्यकिरण है अतः इसकी मान्यताएँ स्थैतिक मॉडल के अनुरूप होगी ।

1.) एक उद्योग एक ही समरूप वस्तु का उत्पादन करता है।
2.) उत्पत्ति की तकनीक दी हुयी है।
3.) उत्पत्ति के साधनो का संयोग स्थिर है।

मान लीजिये Xi (t).t अवघि में t वें उद्योग के निर्गत का कुल प्रवाह है, जिसका प्रयोग तीन उद्देश्यों के लिये किया जाता है।

1.) अगली अवधि की उपभोग मॉग Ci(t+1) के लिये
2.) n उद्योग में पूँजी वस्तुओं के स्टॉक में शुद्ध वृद्धि करने के लिये $\Delta Si(t) = S(i)(t+1) - Si(t)$ जहां Si(t) चालू अवधि t में पूंजी के संचित स्टॉक को प्रकट करता है तथा अगले वर्ष के स्टॉक को, मूल्य ह्रास को नहीं लिया जाता।
3.) उस अवधि में अर्थव्यवस्था के n उद्योगें Xj1(t), Xj2(t) इत्यादि में उत्पादन के लिये।

इन दशाओं में सन्तुलन समी0 निम्नवत होगाः

$$Xi(t) = Ci(t+1) + Si(t+1) - Si(t) + Xi_1(t) + Xi_2(t)$$

अर्थव्यवस्था में कुल पूंजी स्टॉक समस्त उद्योगों के पूंजी स्टॉक का योग होगा

$$Si(t) = Si_1(t) + Si_2(t)$$

स्थैतिक मॉडल की ही भांति पूंजी गुणांक को निम्नवत व्युत्पन्न किया जा सकता है:

$$bij = Sij/Xj$$

जहां Sij = jवें उद्योग के उत्पादन को i वें उद्योग द्वारा किया गया शोधन

Xj = j वें उद्योग का कुल उत्पादन तथा bij = पूंजी गुणांक

bij गुणांक शून्य होने की दशा में प्रावैगिक मॉडल स्थैतिक मॉडल बन जाता है, क्योंकि इसका अर्थ है कि किसी स्टॉक की आवश्यकता नहीं है। bij न तो ऋणात्मक हो सकता है, न ही अनन्त। पूंजी गुणांक ऋणात्मक होने का अर्थ है कि आगत ही उद्योग की निर्गत होती है।

9.5 आगत निर्गत विश्लेषण की सीमाएं

1.) **मान्यताओं की अव्यावहारिकता** :–गुणांक का स्थिर होना, अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूंजी संरचना समान होना अवास्तविक है। क्योकि अधिक उत्पादन हेतु आग्तों में परिवर्तन सम्भव है और प्रत्येक क्षेत्र में पूंजी की मांग भिन्न ही होती है।

2.) **जटिलता**–अनेक संरचनात्मक समीकरण एवं गणितीय तकनीकों की सहायता लेने के लिये उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है जो अत्यन्त जटिल हैं

3.) **समरूप उत्पाद**–एक उद्योग में केवल समरूप अथवा समांग वस्तुओं का उत्पादन की मान्यता भी सही नहीं है क्योंकि आज एक ही उद्योग के अन्तर्गत कई प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन किया जाना सम्भव है।

4.) **रेखीय सम्बन्धों का न होना**–

यह माना गया है कि एक उद्योग का आग्त दूसरे उद्योग का निर्गत है, अतः उद्योगों में रेखीय सम्बन्ध विद्यमान है जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों कर अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि सदैव आगत में वृद्धि के बराबर नहीं होती।

5.) **भौतिक इकाइयों का प्रयोग**–भौतिक इकाइयों के रूप में आगत निर्गत विश्लेषण के सन्तुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान लगना कठिन होता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न वस्तुओं की भौतिक माप भी भिन्न होती है।

6.) **साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा**—तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता का साधन प्रतिस्थापन की सम्भावनाओं को नकार देती है। परन्तु प्रतिस्थापन की सम्भावनाएं अल्प काल में भी बनी रहती हैं।

7.) **कुछ साधनों की उपेक्षा**—इस विश्लेषण में उत्पादन क्षेत्रों का निर्माण करते समय केवल उद्योगें को ही सम्मिलित किया जाता है। आगत निर्गत विश्लेषण बैंकिग सेवाओं तथा बीमा व्यवसाय आदि की अवहेलना करता है अथवा इन्हें अन्य क्षेत्रो में समाहित कर लेता है।

9.6 महत्व

आगत निर्गत विश्लेषण का नियेाजन एवं भारत के इस पंचवर्षीय योजनाओं में प्रयोग बहुता के साथ किया ग्या। एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था उन त्रुटियों को दूर करने का प्रयास करता है जो एक गैर नियोजित अर्थव्यवस्था अन्तः उद्योग सम्बन्धों को मुक्त बाजार के भरोसे छोड़ देता है जो Trial and error के प्रयोग से इसमें सामन्जस्य स्थापित कर पाती है। वहीं दूसरी ओर एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था इन जरूरी सम्बन्धों को पूर्ववत ही संचालित करके उद्योगों को उसी तरीके से निर्देशित कर देती है।

सोवियत यूनियन और कुछ दूसरी अर्थव्यवस्था ने (भारत सहित) नियोजन को एक बड़े पैमाने पर लागू किया जिससे कि अर्थव्यवस्था में गतियुक्त विकास हो सके।

लियोनतिफ के इस आगत निर्गतविश्लेषण को अन्तः उद्योगों सम्बन्धों के अतिरिक्त भी प्रयोग में लाया जा सकता है। जैसे कि देश अथवा देशों के प्रशासनिक क्षेत्रों के सन्दर्भ में। आगत निर्गत विश्लेषण में कुछ तकनीकी सुधार करके देश औद्योगिक एवं कृषि advancement को प्राप्त कर सकता है, यदि अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र के विभिन्न क्षेत्रों के सम्बन्धों को सही प्रकार से जोड़ दिया जाय।

P.P.Pillai ने सर्वप्रथम केरल की अर्थव्यवस्था के लिये आगत निर्गत का ढांचा तैयार किया। इस ढांचे का विश्लेषण करने के लिये उन्होने 24 औद्योगिक क्षेत्रों को चिन्हित किया और 24 X 24 आगत निर्गत आव्यूह के लिये बड़े पैमाने पर आंकड़े एकत्रित करने की कठिनाई के कारण पिल्लई जी ने अपने अध्ययन को राज्य की अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र तक ही सीमित किया और 17 क्षेत्रों को समावेश किया।

उनके अध्ययन का यह निष्कर्ष था कि केरल एक निश्चित रूप से खुली अर्थव्यवस्था है जो शेष भारत एवं दूसरे अन्य देशों के साथ व्यापार करती है।

सम्पूर्ण भारत स्तर पर Indian Statistical Institute द्वारा सन 1950–51 में आगत निर्गत सारिणी की शुरुआत हुयी। जिसमें अर्थव्यवस्था के बड़े क्षेत्रों की सीमित संख्या का अध्ययन किया ग्या क्योंकि पर्याप्त आंकड़े उपलब्ध नहीं थे। 36X36 का प्रदेश आव्यूह 1951–52 में तैयार किया गया जिसमें बाद में कुछ संशोधन किये ग्ये। 1952 में योजना आयोग ने CSO के माध्यम से आगत निर्गत विश्लेषण पर कार्य करना प्रारम्भ किया। 1960–61 में Long Run Planning Cell द्वारा एक आव्यूह तैयार किया गया।

पांचवी पंचवर्षीय योजना (1975–79) की उत्पादन लक्ष्य की draught outline 66X66 आव्यूह के आधार पर निर्धारित की ग्यी। साथ 4X4 आव्यूह को उत्पादन लक्ष्य तय करने के उद्देश्य से प्रयुक्त किया ग्या। अतः आगत निर्गत विश्लेषण, भारत की आर्थिक नियोजन में एक महत्वपूर्ण स्थान रखती है।

9.7 सारांश

फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने द्वारा प्रस्तुत किया गया आगत निर्गत विश्लेषण और तदुपरान्त इसको विकसित करते हुये लियोनतिफ द्वारा आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था की परस्पर निर्भरताओं और जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के सम्बन्धों के अध्ययन हेतु किया गया।

इस विश्लेषण का आधार सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था में औद्योगिक अन्तः सम्बन्ध और अर्न्तगत निर्भरताएं है। एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिये आगत का स्वरूप ले लेता है।

लियोनतिफ ने स्थैतिक आगत निर्गत खुला एवं बन्द मॉडल के साथ गत्यात्मक आगत निर्गत मॉडल भी प्रस्तुत किया। स्थिर तकनीकी गुणांक के माध्यम से आगत निर्गत अनुपात की धारणा को स्वीकार किया। पूंजी का प्रभाव सम्मिलित करके प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल का एक विशिष्ट लक्षण प्रस्तुत किया।

9.8 शब्दावली

3.) **आगत** – उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त होने वाली वस्तु।

4.) **निर्गत** – उत्पादन प्रक्रिया से निर्मित होने वाली वस्तु।

5.) **आगत निर्गत सारिणी** – विभिन्न क्षेत्रों के निर्ग्त को पंक्तियों द्वारा एंव आग्तों को स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित करती सारिणी, जिसमें कुल उत्पादन एवं कुल लागत भी दर्शायी जाय।

6.) **प्रदेश व्यूह** – आगत निर्गत सारिणी की सहायता से सामान्य व्यूह जिसमें अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगें को पंक्तियों और स्तम्भों में दर्शाया जाय जहां पंक्ति क्षेत्रों की मौद्रिक प्राप्तियां एवं स्तम्भ क्षेत्रों की कुल लागत को प्रदर्शित करते हैं। भौतिक रूप में पंक्ति निर्गत की पूर्ति या वितरण को प्रदर्शित करती है और स्तम्भ उद्योगों की आग्तों को।

7.) **आगत निर्गत बन्द मॉडल** – इसके अन्तर्गत घरेलू क्षेत्र अथवा अंतिम मांग क्षेत्र को वाहय रूप में प्रदर्शित करते हैं।

8.) **आगत निर्गत खुला मॉडल** – इसके अन्तर्गत उद्योगों से प्राप्त निर्गतों के एक भाग की पूर्ण रूप से उपभोग हेतु मांग की जाती है।

9.) **प्रावैगिक आगत निर्गतमॉडल** – यदि स्थैतिक आगत निर्गत मॉडल (खुला मॉडल) के अन्तर्गत पूंजी का प्रभाव सम्मिलित कर लिया जाय तब यह व्यवस्था गत्यात्मक हो जाती है।

9.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1.) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते हैं ?

2.) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं हैं ?

3.) लियोनतिफ के आगत निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।

4.) आगतनिर्गत विश्लेषण कोसर्वप्रथम प्रस्तुत करने वाले अर्थशास्त्री का नाम क्या था ?

5.) लियोनतिफ के आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति का विकास करने के लिये उन्हे क्या सम्मान दिया गया ?

6.) प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल में किस की भूमिका एक विशिष्ट लक्षण का रूप लेती है ?

7.) तकनीकी गुणांक   को और किस नाम से जाना जाता है ?

उत्तर 4. केने 5. 1973 का नोबेल पुरस्कार 6. पूंजी निवेश की 7. आगत निर्गत अनुपातं

9.10 सन्दर्भ सहित ग्रन्थ

1.) एस0 एम0 शुक्ला एवं सहायः (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
2.) Agarwal.H.S: (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy",LaXmi Narayan Agrawal, Agra
3.) Mehta.P.L: (2007) Managerial Economics, "Analysis, Problems & Cases", Sultan Chand & Sons, New Delhi

9.11 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

1. Kumar, Anil (2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

2. Singh,. S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .

3. Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.

4. Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

9.12 निबन्धात्मक प्रश्न

1) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते है।

2) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं है।

3) लियोत्तिफ के आगत निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।

4) निम्नलिखित आगत निर्गत सारणी से सम्बन्धित प्रावैधिक गुणांक सारणी बनाइये।

उद्योग	1	2	अंतिम योग	कुल उत्पादन
1	20	20	60	100
2	15	15	20	50
श्रम	10	15		

इकाई 10. रैखिक प्रोग्रामिंग

10.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में आपने सीमान्त विश्लेषण के विभिन्न पहलुओं का अध्ययन किया। किसी भी अर्थव्यवस्था की केन्द्रीय समस्या व्यवसाय में अधिकतम लाभ अर्जित करने की होती है। इस लक्ष्य की प्राप्ति करने हेतु, अर्थव्यवस्था में उपलब्ध सीमित साधनों का अनुकूलमत प्रयोग करना होता है। इन सीमित साधनों का विभिन्न क्षेत्रों में आवंटन करना, किसी भी अर्थव्यवस्था के लिये कठिनाई का कार्य होता है। सीमान्त विश्लेषण इन समस्याओं का समाधान करने में पूर्ण रूप से सफल नहीं हो सका।

प्रस्तुत इकाई में इन्ही व्यावहारिक समस्याओं का समाधान करने के उद्देश्य से रेखीय प्रायोजन तकनीक का विकास हुआ जो जटिल गणित के प्रयोग से उत्पादन की विभिन्न समस्याओं का हल करता है।

प्रस्तुत इकाई में रेखीय प्रोग्रामिंग की गणितीय तकनीक, उत्पत्ति एवं विकास, इसके अनुप्रयोग एवं ग्राफीय और सिम्पलेक्स विधि को उदाहरणों के माध्यम से विस्तार से समझाया गया है।

10.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप यह जान सकेंगें कि

7.) रेखीय प्रोग्रामिंग किस प्रकार उत्पादन निर्णयों में अधिक यर्थाथता लाता है।
8.) निश्चित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत लागत न्यूनतम एवं लाभ अधिकतम कैसे किया जा सकता है।
9.) रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के हल की ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि का विस्तृत से अध्ययन कर सकेंगे।
10.) रेखीय प्रोग्रामिंग को उद्योग एवं व्यवसाय के अतिरिक्त अन्य किन क्षेत्रों में प्रमुख निर्णयन तकनीक के रूप में प्रयोग किया जाता है।

10.3 रेखीय प्रोग्रामिंग या रेखीय प्रायोजन की परिभाषा

रेखीय प्रायोजन दो शब्दों से मिलकर बना है– रेखीय जिसका अर्थ है सरल रेखा एवं प्रायोजन जिसका तात्पर्य है सुव्यवस्थित योजना। रेखीय प्रायोजना एक ऐसी तकनीक है जो निश्चित प्रकार की समस्याओं, विशेषकर उत्पादन की समस्याओं के समाधान के लिये जटिल गणित का प्रयोग करती है। कोई भी फर्म अपने उत्पादन को अधिकतम करने के

लिये एक सुव्यवस्थित योजना का निर्माण करती है। एक निश्चित मात्रा का उत्पादन विभिन्न वैकल्पिक विधियों द्वारा हो सकता है परन्तु एक फर्म का उद्देश्य यही होता है कि कुछ निश्चित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत इस प्रकार का निर्णय करने में सहायक हो जिससे कि लागत न्यूनतम तथा लाभ अधिकतम प्राप्त हो सके। इसे न्यूनतम लागत संयोग की विधि के अन्तर्गत किया जाता है। रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा विभिन्न साधनों की उन मात्राओं का निर्धारण गणित की सहायता से किया जा सकता है जिससे कि वस्तु की एक निश्चित मात्रा का उत्पादन न्यूनतम लागत में संभव हो सके।

10.4 रेखीय प्रोग्रामिंग की उत्पत्ति एवं विकास

रेखीय प्रोग्रामिंग का सर्वप्रथम रूसी गणितज्ञ श्री एल0 बी0 कांत्रोविच ने प्रस्तुत किया। अन्य अर्थशास्त्री जिसमें डार्फमैन, कपूर तथा कूपमैन्स प्रमुख हैं, ने भी इस तकनीक के विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया। किन्तु इसका सर्वोत्तम विकास द्वितीय विश्व युद्ध के पश्चात् 1946 में अमेरिकन गणितज्ञ डी0 बी0 डैटजिग द्वारा किया गया। इन्होने रेखीय प्रायोजना तकनीक के माध्यम से गणितीय समस्याओं के समाधान की अपेक्षाकृत श्रेष्ठ विधि का आविष्कार किया।

10.5 रेखीय प्रोग्रामिंग के उद्देश्य

रेखीय प्रोग्रामिंग के निम्नलिखित उद्देश्य हैं–

1.) सबसे प्रमुख उद्देश्य उत्पादन क्रिया की इस समस्या का समाधान करना है कि लाभ कैसे अधिकतम किया जाय एवं लागत कैसे न्यूनतम की जाय।
2.) ऐसी नीति का विकास किया जाय जिससे अर्थव्यवस्था में भविष्य की मांग को पूरा करने के साथ–साथ उत्पादन योजना का निर्माण भी हो सके जिसमें अन्वेषण नीति की लागत को न्यनतम किया जा सके।
3.) आग्तों की आपूर्ति को सुनिश्चित करने के साथ–साथ उत्पादन में प्रयुक्त होने वाली मशीनों, श्रम आदि का पर्याप्त ढंग से वितरण किया जा सके जिससे कि इन संसाधनों का अनुकूलतम प्रयोग हो सके।
4.) उत्पादित होने वाली वस्तु की संख्या इस प्रकार निश्चित हो जिससे कि अधिकाधिक लाभ अर्जित किया जा सके।

5.) उत्पाद का सर्वोत्तम ढंग से विज्ञापनों के माध्यम से अधिकाधिक प्रचार हो। ऐसा करने के लिये विभिन्न विज्ञापन माध्यमों का उचित अनुपात में निश्चित विज्ञापन बजट निर्धारण करना भी इस तकनीक का उद्देश्य है।

6.) उत्पादन करने के साथ–साथ वितरण की व्यवस्था भी इस प्रकार हो जिससे कि परिवहन लागत न्यूनतम हो सके।

10.6 रेखीय प्रोग्रामिंग की आधारभूत मान्यताएं

1.रेखीय सम्बन्ध

स्थिर पैमानों के प्रतिफल नियम पर आधारित रेखीय प्रायोजना सरलता बनाये रखने के लिये रेखीय समीकरण द्वारा व्यक्त किया ग्या है। जिससे आग्त–निर्गत सम्बन्ध को एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इसका अभिप्राय यह है कि उत्पादन फलन रेखीय समरूप होते हैं।

2.स्थिर कीमतें

यह मान लिया जाता है कि साधन तथा उत्पादन की कीमतें स्थिर रहती हैं। इससे किसी भी फर्म द्वारा अधिक या कम मात्रा में साधनों की मात्रा का प्रयोग करने से उनकी कीमतों पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। उत्पादक द्वारा उत्पादन की मात्रा परिवर्तित करने से भी कीमतें अपरिवर्तित ही रहती हैं।

3.उद्देश्य फलन

किसी भी फर्म का लक्ष्य जैसे लाभ अधिकतम करना या लागत न्यूनतम करना ही उद्देश्य फलन अथवा वस्तुपरक फलन कहा जाता है। इसे मानदण्ड फलन भी कहते हैं। जिस रैखिक फलन की प्रोग्रामिंग होती है, उसे ही उद्देश्य फलन कहते हैं। इस फलन के दो भाग होते हैं– प्रमुख एवं द्वैत। यदि उद्देश्य फलन में उत्पादन को अधिकतम करना प्रमुख है तो लागत न्यूनतम करना द्वैत होता है।

4.अवरोध या प्रतिबन्ध

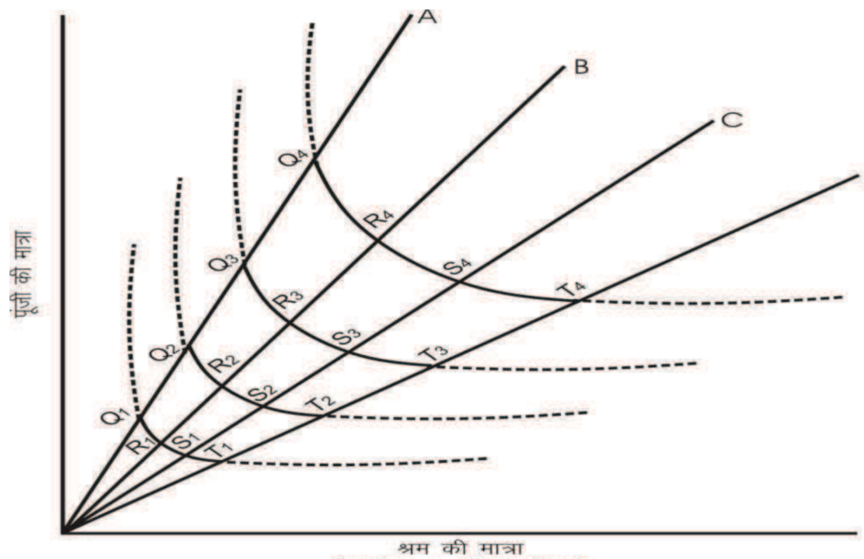
साधनो की उपलब्धता सीमित होने के कारण यह प्रतिबन्ध का रूप ले लेते हैं। इन्ही सीमित साधनों को प्रयुक्त करके ही लाभ अधिकतम या लागत न्यूनतम किया जा सकता है। प्रतिबन्धों को प्रायः असमानताएं या असमिका भी कहा जाता है क्योंकि इन्हे प्रायः असमानताओं के रूप में व्यक्त किया जाता है।

5.निर्माण प्रक्रिया के विकल्प

किसी कार्य को करने की विधि को प्रक्रिया कहते हैं। उत्पादन में प्रयुक्त साधनों के संयोग को उत्पादन प्रक्रिया कहते हैं। उत्पादन प्रक्रिया की एक से अधिक विधियां होनी चाहिये जिससे कि सर्वोत्तम विधि का चुनाव इस विधि के माध्यम से चुना जा सके।

6.प्रक्रिया किरणें

रेखीयता की मान्यता के अनुसार चूंकि प्रत्येक प्रक्रिया में श्रम तथा पूंजी का अनुपात स्थिर रहता है अर्थात साधन अनुपात स्थिर रहता है, अतः प्रत्येक प्रक्रिया को सरल रेखा द्वारा प्रकट किया जाता है। मूल बिन्दु से ऊपर दाहिनी ओर उठने वाली इस सरल रेखा को ही प्रक्रिया किरणें कहते हैं।



रेखाचित्र 1. प्रक्रिया किरणें

दिये गये रेखाचित्र 1 में X अक्ष पर श्रम की मात्रा एवं Y अक्ष पर पूंजी की मात्रा को लिया गया है। OA, OB, OC तथा OD प्रक्रिया किरणें हैं जो निश्चित श्रम–पूंजी संयोग को व्यक्त करते हैं। OA बिन्दु पर स्थित बिन्दु Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 यह प्रकट करते हैं कि उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन बढ़ाने पर श्रम–पूंजी की मात्रा किस प्रकार बदलेगी। जबकि उनका अनुपात समान रहता है। अतः Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 समान दूरी पर स्थित हैं।

प्रक्रिया किरण OA एक निश्चित श्रम तथा पूंजी के संयोग को व्यक्त करती है। इसी प्रकार OB, OC तथा OD भी भिन्न–भिन्न संयोगों को प्रकट करती हैं। परन्तु प्रत्येक प्रक्रिया किरण साधनों के एक निश्चित अनुपात को दर्शाती है। प्रत्येक प्रक्रिया किरण पर स्थित बिन्दु यह दर्शाते हैं कि उत्पादन बढ़ानें पर साधनों की मात्राएं किस प्रकार बदलेंगी, परन्तु उनमें अनुपात समान रहेगा।

इसी प्रकार प्रक्रिया किरण OB पर स्थित विभिन्न बिन्दु OR_1, OR_2, OR_3, OR_4 भी बराबर दूरी पर स्थित हैं। इसी प्रकार OC प्रक्रिया किरण पर स्थित OS_1, OS_2, OS_3 तथा OS_4 एवं OD प्रक्रिया किरण पर स्थित OT_1, OT_2, OT_3 तथा OT_4 भी बराबर दूरी पर स्थित है। Q_1, R_1, S_1 तथा T_1 बिन्दुओं को परस्पर सरल रेखाओं से मिलाने पर जो कोणदार वक्र प्राप्त होता है उसे समोत्पाद वक्र कहते हैं।

7. सुनिश्चितता

यह भी माना जाता है कि क्रियाविधि को ही नही बल्कि अवरोधों की भी निश्चित संख्या होनी चाहिये जिससे कि ग्णना सही प्रकार की जा सके।

8. योगात्मक – अलग– अलग क्रियाकलापों में प्रयुक्त किसी साधन की मात्राओं का योग सम्भव होना चाहिए।

9. विभाज्यता – अनुकूलतम हल प्राप्त करते समय निर्णय चरों को सतत माना जाता है अर्थात उनके भित्रात्मक मान हो सकते है।

10.सम्भाव्य क्षेत्र

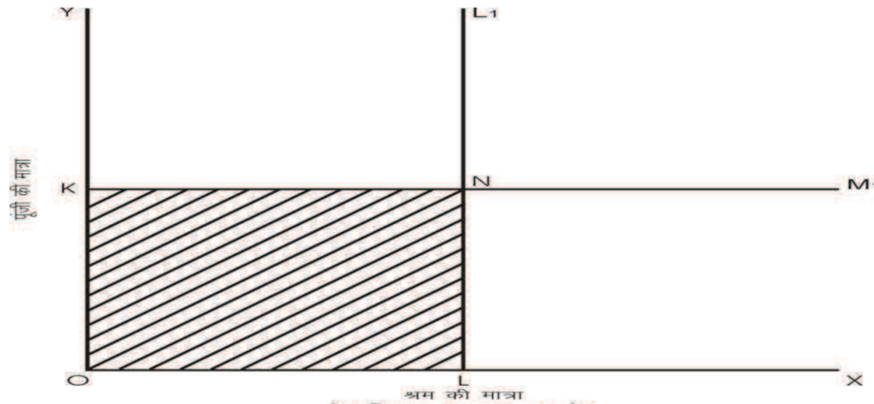
रैखिक समीकरणों के द्वारा प्राप्त किया ग्या ग्रफ जिसमे रेखीय कार्ययोजना की समस्या प्रतिबन्ध सम्मिलित हों, उस रेखीय कार्ययोजना की समस्या का सम्भाव्य क्षेत्र कहलाता है। सम्भाव्य क्षेत्र अवरोधों की संख्या एवं उनकी प्रकृति पर निर्भर करता है।

11.सम्भाव्य हल

सम्भाव्य क्षेत्र में स्थित प्रत्येक बिन्दु सम्भाव्य हल कहलाता है। दो साधनों की स्थिति में आगतों के वे सभी संयोग जो सम लागत रेखा पर अथवा उनकी बांयी ओर स्थित हैं, सम्भाव्य हल हैं। इसे एक रेखाचित्र से स्पष्ट किया जा सकता है।

मान लीजिये, एक उत्पादक के पास श्रम और पूंजी की एक निश्चित मात्रा उपलब्ध है। ये निश्चित मात्रा उत्पादन करने के प्रतिबन्ध अथवा परिसीमाएं हैं। रेखाचित्र 2 में श्रम की

OL मात्रा एवं पूंजी की OK मात्रा को लम्बवत एवं क्षैतिज सरल रेखा द्वारा क्रमशः दर्शाया गया है। ये दोनो रेखाएं एक दूसरे को ON पर काटती हैं। अतः OKNL क्षेत्र जिसे रेखांकित किया ग्या है, सम्भाव्य हल का क्षेत्र है।



रेखाचित्र 2. सम्भाव्य हल क्षेत्र

12.असम्भाव्य हल

ऐसा प्रत्येक बिन्दु जो सम्भाव्य क्षेत्र से बाहर हो, असम्भाव्य हल कहलाता है। ऐसा बिन्दु दी हुई कार्ययोजना के प्रतिबन्धों को स्वीकार नहीं करता है।

13. अनुकूलतम सम्भाव्य हल

अनेक सम्भाव्य हलों में से सर्वोत्तम हल को अनुकूलतम हल कहा जाता है, यह वह हल है, जो वस्तुपरक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करता है। यह सम्भाव्य क्षेत्र पर स्थित वह बिन्दु है जिस पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम अथवा न्यूनतम होता है।

रेखीय प्रोग्रामिंग में अनुकूलतम हल ज्ञात करने की दो वैकल्पिक विधियां हैं–

1.) गैर गणितीय अथवा रेखाचित्रीय विधि

2.) सिम्पलेक्स विधि

रेखाचित्रीय विधि द्वारा रेखीय प्रायोजना की केवल सरल समस्याओं का अनुकूलतम हल प्राप्त किया जा सकता है, जबकि सिम्पलेक्स विधि के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों द्वारा अनेक सम्भाव्य हलों की परीक्षा करके अपेक्षाकृत निर्बल हलों को क्रमशः त्याग दिया जाता है। जब तक कि एक अनुकूलतम हल न प्राप्त हो जाये। दो भिन्न तरीके होते हुए भी इनसे निकले परिणाम समान होते हैं।

10.7 ग्राफीय विधि के प्रमुख चरण

1. सर्वप्रथम रेखीय प्रायोजन समस्या का अवरोधों एवं उद्देश्य फलन के रूप में सूत्र प्रस्तुत करना चाहिये।
2. सभी दी हुयी असमिकाओं को समिका मान लेना चाहिये। समिकाओं अथवा असमिकाओं में X^2, y^2 या Xy के कोई पद नहीं होने चाहिये।
3. सुसंगत बहुभुज क्षेत्र सदैव प्रथम चतुर्थांश में होना चाहिये।
4. सभी समिकाओं एवं अवरोधों का ग्राफ बनाना होता है, जिसमें समिकाओं की संख्या के बराबर रेखाएं प्राप्त होती हैं।

इस प्रकार खींची गयी रेखाओं से परिबद्ध सुसंगत बहुभुज प्राप्त हो जाता है। बहुभुज की भुजाएं सभी अवरोधों को सन्तुष्ट करती हैं।

5. उद्देश्य फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान सुसंगत बहुभुज के क्षेत्र के शीर्षों पर ही होने चाहिये।
6. सुसंगत बहुभुज क्षेत्र के अन्तर्गत किसी बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान बहुभुज के किन्ही दो शीर्षों पर प्राप्त न्यूनतम तथा अधिकतम मानों के बीच प्राप्त होता है।

10.7.1 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या के हल की रेखाचित्रीय अथवा ग्राफीय विधि

इस ग्राफीय विधि में रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की आवश्यकता होती है।

1.) रैखिक असमिका का ग्राफ–

माना $aX+by+c*o$ ––––––– (1)

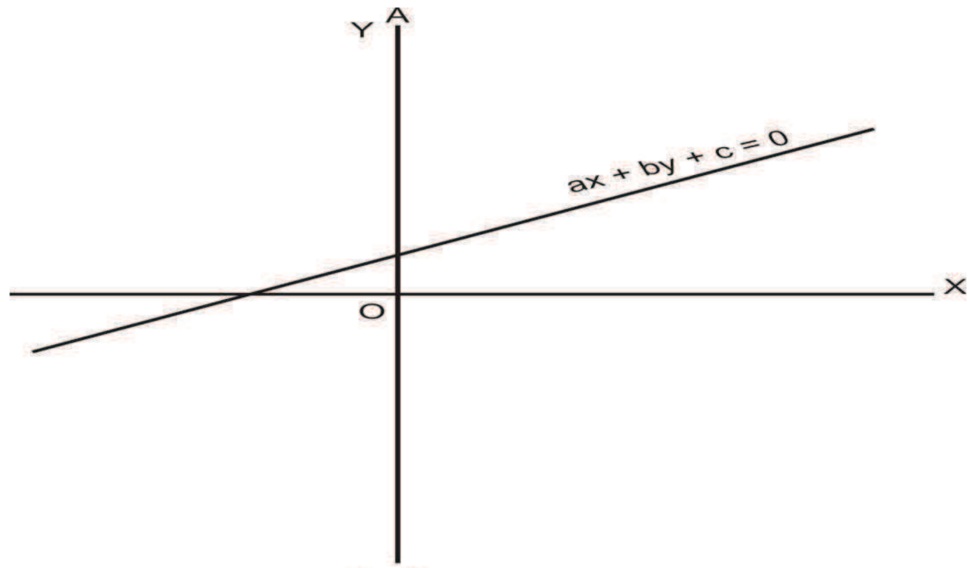
जहां पर X, y चर एवं a, b, c अचर मान हैं। चिन्ह * के स्थान पर $<$ या $\leq$ या $>$ या $\geq$ हो सकता है।

उपर्युक्त असमिका के अनुरूप रैखिक समीकरण निम्नलिखित है–

$aX + by + c = 0$ ––––––––– (2)

इस समीकरण का ग्राफ खींचने के लिये X-y तल में कोई भी दो बिन्दु लेना पर्याप्त है जिसको मिलाने से प्राप्त रेखा ही इसका ग्राफ है। यह सरल रेखा X-y तल को दो भागें में विभाजित करती है जिसे अर्धतल कह सकते हैं। इन दो भागें मे से एक भाग निश्चित ही

रैखिक असमिका का ग्राफ है जिसे रेखाचित्र 3 में दर्शाया गया



रेखाचित्र 3.

इन दो भागें में से कौन सा भाग असमिका(1) का ग्राफ है, इसके लिये एक बिन्दु Q लेते हैं जिसका मान (h, l) है जो X-y तल पर स्थित है किन्तु समीकरण (2) से प्राप्त सरल रेखा पर स्थित नहीं है। इस स्थित में दो सम्भावनाएं उत्पन्न होती हैं–

1.) प्रथम स्थिति–

यदि बिन्दु Q असमिका (1) को सन्तुष्ट करता है तो वह अर्धतल ही असमिका (1) का ग्राफ है, जिसमे Q बिन्दु स्थित

2.) द्वितीय स्थिति–

यदि बिन्दु Q असमिका (1) को सन्तुष्ट नहीं करता है तो दी हुयी असमिका का ग्राफ वह अर्धतल होता है जिसमें बिन्दु Q स्थित नहीं है।

10.7.2 पदार्थों का चयनः अधिकतम लाभ की प्राप्ति

उदाहरण –1

उद्देश्य फलन $z = 3X + 5y$ को निम्नलिखित अवरोधों के लिये अधिकतम कीजियेः–

$$X + 2y \leq 20$$

$$X - y \leq 15$$

$$X \geq 0$$

$$y \geq 0$$

हल : उद्देश्य फलन $z = 3X + 6y$ के लिये अवरोध है:–

$$X + 2y \leq 20 \text{ ------- } (1)$$

$$X + y \leq 15 \text{ ----------- } (2)$$

$$X \geq 0 \text{ ----------- } (3)$$

$$y \geq 0 \text{ ----------- } (4)$$

अवरोध (1) के अनुरूप रेखीय समीकरण

$$X + 2y = 20 \text{ --------- } (5)$$

समी0 (5) में यदि $X=0$, तो $y = 10$

यदि $y = 0$ तो $X = 20$

अतः बिन्दु $(0,10)$ तथा $(20,0)$ समी0 (5) की ग्राफ रेखा पर स्थित है।

मूल बिन्दु इस रेखा पर स्थित नहीं है।

अब माना मूल बिन्दु समी0 (5) के अवरोध अर्थात $X+2y<=20$ के अर्धतल में स्थित है, तो

$$0 + 2(0) \leq 20$$

$$0 \leq 20$$

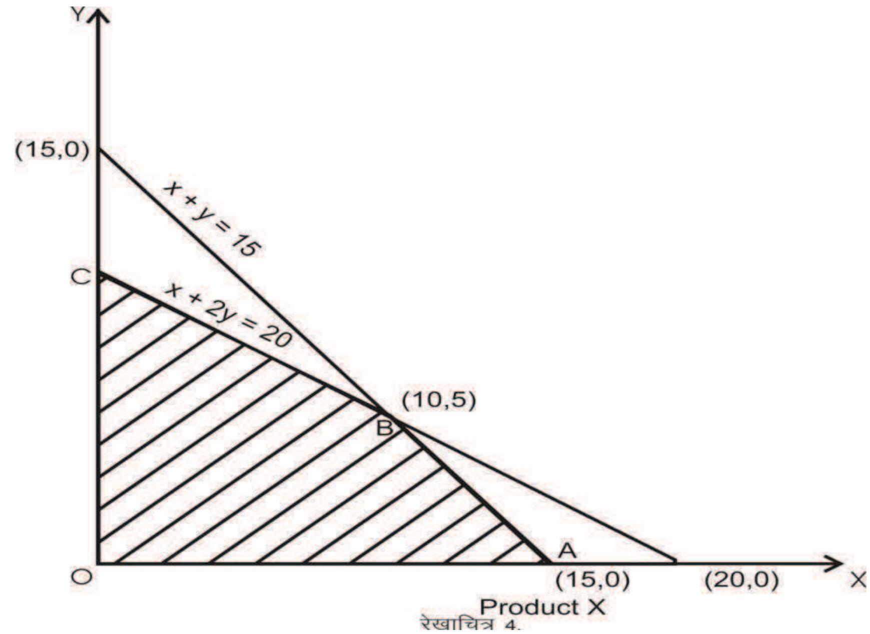
जो कि सत्य है।

अतः मूल बिन्दु अवरोध (1) के बन्द अर्धतल में स्थित है।

अवरोध (2) के अनुरूप रेखीय समी0

$$X + y = 15 \text{ -------------- } (6)$$

समी0 (6) को हल करने पर दो बिन्दु $(0, 15)$ तथा $(15, 0)$ प्राप्त होते हैं। जिन्हे मिलाने पर समी0 (6) की ग्रााफ रेखा प्राप्त होती है। इसी प्रकार मूल बिन्दु अवरोध (2) के भी बन्द अर्धतल में स्थित है। जो कि सत्य है।



रेखाचित्र 4.

अतः यह रेखाचित्र से स्पष्ट होता है कि OABC ही सम्भाव्य हल क्षेत्र है।

उद्देश्य फलन $= Z = 3X + 5y$

बिन्दु O (0,0) लेने पर $Z = 3(0) + 5(0) = 0$

बिन्दु A (15, 0) लेने पर $Z = 3(15) + 5(0) = 45$

बिन्दु B (10,5) लेने पर $Z = 3(10) + 5(5) = 55$

बिन्दु C (0,10) लेने पर $Z = 3(0) + 5(10) = 50$

अतः उद्देश्य फलन $Z= 3X + 5y$ पर अधिकतम मान 55 है जब $X=10, y=5$ है।

उदाहरण 2

एक कम्पनी A तथा B दो प्रकार के खिलौने बनाती है। A की एक इकाई को बनाने में 4 घण्टे मशीन का समय तथा 4 घण्टे कारीग्र का समय लग्ता हैं। B की एक इकाई को बनाने में 6 घण्टे मशीन का समय तथा 2 घण्टे कारीगर का समय लगता हैं। कम्पनी के पास मशीनों की 180 घण्टे तथा कारीग्रों की 170 घण्टे की क्षमता है। A की एक इकाई पर 80 रूपये तथा B की एक इकाई पर 60 रूपये का लाभ होता है । यदि कम्पनी पूरी क्षमता से कार्य करें तो अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये उसे A तथा B की कितनी इकाइयॉ बनानी चाहिये ?

हल–माना कम्पनी A की X इकाइयां तथा B की y इकाइयां बनाती है।

1.) खिलौनो की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती, लेकिन शून्य हो सकती है। अतः $X \geq 0, y \geq 0$

2.) मशीनों के कुल घण्टे $= 4X + 6y$

3.) लेकिन 180 घण्टे के अवरोध के अनुसार

$$9X + 6y \leq 180$$

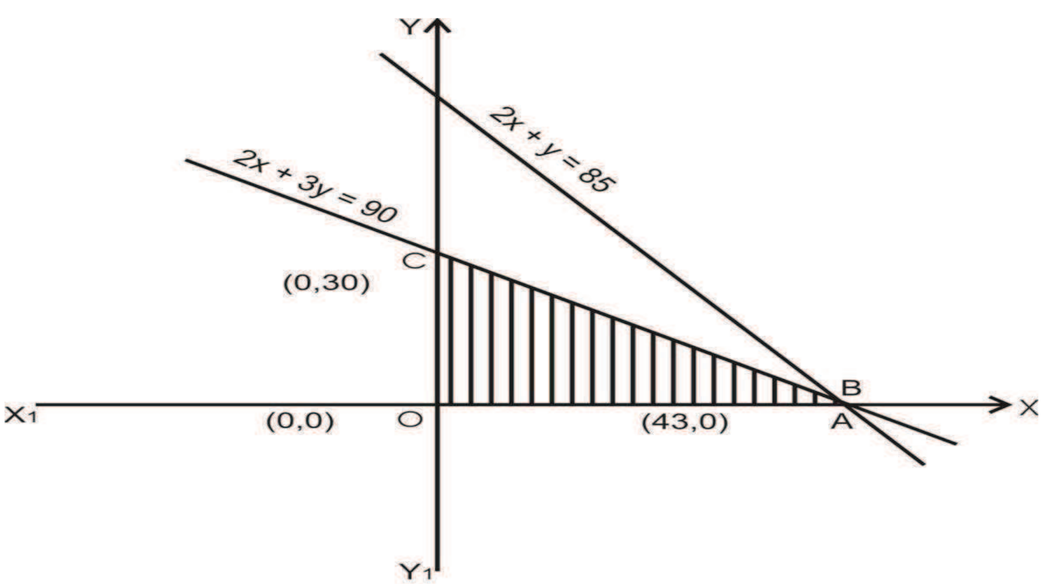
कारीगरों के कुल घण्टे $= 4X + 2y$

4.) लेकिन 170 घण्टे के अवरोध के अनुसार

$$4X + 2y \leq 85$$

5.) अधिकतम लाभ प्राप्त करना ही उद्देश्य फलन है। अतः

$$P = 80X + 60y$$



रेखाचित्र 5.

सम्भाव्य हल क्षेत्र OABC से दर्शाया गया है।

इसके निर्देशांक क्रमश (0,0) (43,0) (41,3) तथा (0,30)

चूंकि लाभ $P = 80X + 60y$

बिन्दु O (0,0) पर $P = 80 \times 0 + 60 \times 0 = 0$

बिन्दु A (43,0) पर $P = 80 \times 43 + 60 \times 0 = 3440$

बिन्दु B (41,3) पर $P = 80 \times 41 + 60 \times 3 = 3460$

बिन्दु C (0,30) पर $P = 80 \times 0 + 60 \times 30 = 1800$

इन सभी मानों में P का अधिकतम मान 3460 है जो कि बिन्दु B पर प्राप्त होता है तथा A की 41 इकाइयां तथा B की 3 इकाइयां बनाने पर प्राप्त होती है।

10.7.3 लागत न्यूनतम करना

उदाहरण 3

एक डाक्टर अपने मरीज को प्रतिदिन अपने आहार में कम से कम 2000 इकाई विटामिन, 25 इकाई खनिज लवण तथा 700 इकाई कैलोरी लेने को परामर्श देता है। दो भोजन योग्य पदार्थ A तथा B उपलब्ध हैं जिनका मूल्य क्रमशः 4 रु तथा 3 रु प्रति इकाई है। A की प्रत्येक इकाई में 100 इकाई विटामिन, 0.5 इकाई खनिज लवण तथा 20 इकाई कैलोरी है। B की प्रत्येक इकाई में 50 इकाई विटामिन, 1 इकाई खनिज लवण तथा 20 इकाई कैलोरी है। मरीज को आवश्यक पोषक तत्व प्राप्त करने के लिये प्रत्येक प्रकार के आहार की कितनी इकाईयां लेनी चाहिये। इस समस्या की रैखिक कार्य योजना का गणितीय सूत्रण लिखिये। समस्या को ग्राफीय विधि से हल कीजिये।

हल–

1.) माना मरीज अपने आहार मे प्रतिदिन भोज्य पदार्थ A की X इकाई तथा B की y इकाई लेता है।

2.) भोज्य पदार्थ की इकाईयों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है, लेकिन शून्य हो सकती है। अतः

$$X \geq 0, y \geq 0$$

3.) A की X इकाईयों से प्राप्त पोषण

विटामिन्स $= 100X$

खनिज लवण $= 0.5X$

कैलोरी $= 20X$

4.) B की y इकाईयों से प्राप्त पोषण

विटामिन्स $= 50y$

खनिज लवण $= 1y$

कैलोरी $= 20y$

5.) अवरोधों के अनुसार, विटामिन्स की मात्रा न्यूनतम 2000 इकाई होनी चाहिये। अतः

$2000 \leq A$ से विटामिन्स + B से विटामिन्स

$$2000 \leq 100X + 50y$$

$$100X + 50y \geq 2000$$

6.) पुनः प्रतिरोधों के अनुसार, खनिज लवण की न्यूनतम मात्रा 25 इकाई होनी चाहिये।

अतः $0.5X + y \geq 50$

7.) पुनः प्रतिरोधों के अनुसार, कैलोरी की न्यूनतम मात्रा 700 इकाई होनी चाहिये। अतः

$$20X + 20y \geq 700$$

8.) इस समस्या का उद्देश्य फलन व्यय को न्यूनतम रखना है। अतः

$$P = 4X + 3y$$

9.) अतः इस समस्या की रैखिक कार्य योजना का गणितीय सूत्रण इस प्रकार हैः–

$$X \geq 0$$

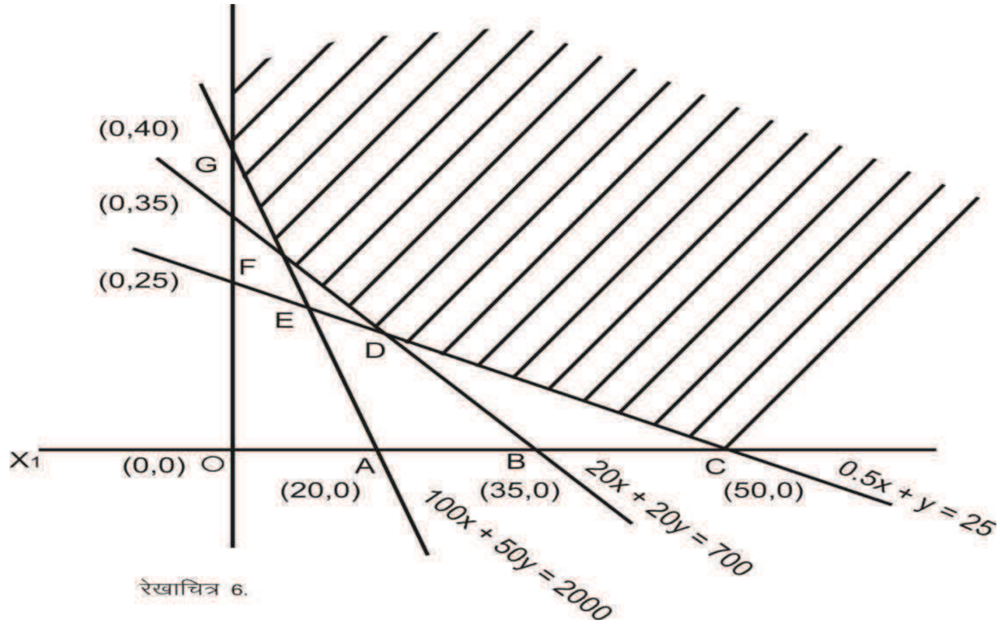
$$y \geq 0$$

$$100X + 50y \geq 2000$$

$$0.5X + y \geq 25$$

$$20X + 20y \geq 700$$

$$P = 4X + 3y$$



रेखाचित्र 6.

ग्राफ का रेखांकित असीमित क्षेत्र ही सम्भाव्य क्षेत्र है जिसका शीर्षों C, D, F, G मे से किन्ही एक या अधिक शीर्षों पर P का मान न्यूनतम होगा।

उद्देश्य फलन : $P = 4X + 3y$

बिन्दु C(50,0) पर $= P = 4 X 50 + 3 X 0 = 200$ रु.

बिन्दु D(20,15) पर $= P = 4 X 20 + 3 X 15 = 125$ रु.

बिन्दु F(5,30) पर $= P = 4 X 5 + 3 X 30 = 110$ रु.

बिन्दु G(0,40) पर $= P = 4 X 0 + 3 X 40 = 120$ रु.

अतः न्यूनतम व्यय 110 रु. जबकि मरीज A की 5 इकाई तथा B की 30 इकाई लेता है।

10.8 सिम्पलेक्स विधि

सिम्पलेक्स विधि का आविष्कार जार्ज बी डैन्जलिग ने 1947 में किया। इसके अन्तर्गत रेखीय प्रकमन समस्या को मानक रूप में लिखा जाता है। एक सम्भाव्य हल से प्रारम्भ किया जाता है और फिर पुनरावृत्ति विधि से हल में सुधार किया जाता है।

10.8.1 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल करना

चरण 1

असमिका के रूप में प्रदत्त प्रत्येक रेखीय निबाध को समी0 में बदलें। इसके लिये **न्यूनतम चर स्लेक चर और अतिरेक चर सरप्लस चर** को प्रयुक्त किया जाता है। ये नये अऋणात्मक चर निबाध की असमिका के बाईं ओर जोड़े जाते है। यदि चिन्ह ($\leq$) का है और इन्हे **स्लेक चर** कहा जाता है। ये नये अऋणात्मक चर निबाध की असमिका के बांई ओर घटाये जाते हैं। यदि चिन्ह ($\geq$) का है और इन्हे ऋणात्मक स्लेक चर या **सरप्लस चर** कहते हैं।

प्रायः सरप्लस चर के स्थान पर स्लेक चर शब्द भी प्रयुक्त किया जाता है, परन्तु चिन्ह का ध्यान रखना होता है।

उदाहरण (1) रेखीय निबाध $2X_1 + 5X_2 <= 15$ को समी0 में बदलने के लिये स्लेक चर s_1 के बांई ओर जाड़ने पर,

$$2X_1 + 5X_2 + s_1 = 15$$

(2) रेखीय निबाध $3X_1 + 7X_2 >= 18$ को समी0 में बदलने के लिये सरप्लस चर s_2 को बाईं ओर घटाने पर,

$$3X_1 + 5X_2 - s_2 = 18$$

उद्देश्य फलन में स्लेक तथा सरप्लस चरों के गुणांक शून्य लिये जाते हैं। जैसेः

उद्देश्य फलन $Z = 8X_1 + 11X_2$ को

$$Z = 8X_1 + 11X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$$

लिखा जायेग जिससे उद्देश्य फलन में इनका योगदान शून्य रहे।

चरण 2

प्रत्येक समी0 निबाध के दाईं ओर के अचर को धनात्मक बनायें। इसके लिये समी0 के दोनो ओर (-1) का गुणा करें।

जैसे– $3X_1 - 5X_2 + s_1 = -11$

$-3X_1 + 5X_2 - s_1 = 11$ लिखा जायेगा।

चरण 3

यदि किसी चर के लिये अऋणात्मक शर्त न दी गई हो तो उसे अऋणात्मक बनायें।

जैसे– X_2 को अऋणात्मक बनाने के लिये इसे दो चरों के अन्तर के रूप में लिखें–

$$X_2 = X_3 - X_4 \text{ या } X_2^* - X_2^{**} \text{ जहां } X_2^* \geq 0; X^{**} \geq 0$$

चरण 4

उद्देश्य फलन को अधिकतमकिरण के रूप में लिखें।

न्यूनतम कीजियेः $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nX_n$

अधिकतम कीजियेः$(-Z) = -c_1X_1 - c_2X_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - c_nX_n$

परिकलन विधि

1.) स्लेक चरों की सहायता से असमिकाओं को समीकरणों में बदला जाता है।

2.) प्रदत्त सूचना को एक सारिणी में रखते हैं जिसे सिम्पलेक्स तालिका कहते हैं।

3.) एक प्रारम्भिक बेसिक सम्भाव्य हल का पता लगते हैं और आगे की प्रक्रिया शुरू करते हैं।

4.) इस हल का परीक्षण करते हैं और वह देखते हैं कि यह अनुकूलन है या नहीं।

5.) यदि यह हल अनुकूलतम नहीं होता तो संशोधित तालिका बनाई जाती है। इसके लिये अन्तर्गमन चर या प्रवेश करने वाले चर व बहिर्गमन या बाहर जाने वाले चर निश्चित करते हैं जिससे कि अग्ला हल निकाला जा सके।

6.) इस हल का परीक्षण करते हैं और यह देखते हैं कि यह अनुकूलतम है या नहीं।

दो चरों के लिये सिम्पलेक्स तालिका का खाका

माना उद्देश्य फलन, अधिकतम किरण $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$

दो निर्बाध $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + 1.s_1 + 0.s_2 = b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + 0.s_1 + 1.s_2 = b_2$

सिम्पलेक्स सारणी

C_B	C_j / आधार	c_1 X_1	c_2 X_2	0 s_1	0 s_2	X_B	अनुपात
0	s_1	a_{11}	a_{12}	1	0	b_1	न्यूनतम (कोरौं)
0	s_2	a_{21}	a_{22}	0	1	b_2	
		बाडी आव्यूह		तत्समक आव्यूह			
	$\bar{c}_j = c_j - z_j$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	अधिकतम की कालम		Z= ___

स्पष्टीकरण

1.) **C_j पंक्ति या उद्देश्य पंक्ति–** उद्देश्य फलन के निर्णायक चरों, स्लेक चरों तथा सरप्लस चरों के गुणांक ।

2.) **C_B स्तम्भ या उद्देश्य पंक्ति–** उद्देश्य फलन में उन चरों के गुणांक जो तत्समक आव्यूह बनाते हैं।

3.) **आधार स्तम्भ–** इसमें वे बेसिक चर लिखे जाते हैं जिनके गुणांक स्तम्भ C_B में लिखे हैं। चरों का क्रम तत्समक आव्यूह में 1 के सामने होता है।

4.) **बॉडी आव्यूह–** निबाधों के बांई ओर के चरों के गुणांको द्वारा बनती है जो एक आव्यूह में नहीं हैं।

5.) **तत्समक आव्यूह–** बेसिक चरों के गुणांकों से निर्मित आव्यूह।

6.) **X_B स्तम्भ या मात्रा स्तम्भ–** आधार स्तम्भ में आये चरों का नाम।

7.) **सदिश पंक्ति–** बॉडी आव्यूह तथा तत्समक आव्यूह में आए चरों के संगत सदिश।

8.) **इण्डेक्स पंक्ति–** या शुद्ध मूल्यांकन पंक्ति या C_j पंक्ति

$$C_j \quad = \quad C_j - Z_j = C_j - C_B^{|}X_j$$

$=$ $C_j - C_B$ और X_j का आन्तरिक गुणनफल बेसिक चरों के लिये $C_j = 0$, सदैव C_j के आधार पर अनुकूतम हल का परीक्षण किया जाता है।

a) यदि सभी $C_j \leq 0$, हल अनुकूलतम है।

यदि कोई भी $C_j > 0$ नहीं है, परन्तु कुछ शून्य हैं तब अन्य अनुकूलतम हल विद्यमान है।

यदि सभी $C_j < 0$ तब हल अद्वितीय अनुकूलतम हल है।

b) यदि $C_j > 0$ कुछ $_j$ के लिये तब हल अनुकूलतम नहीं है। अतः आगे पुनरावृत्ति की जायेगी।

c) यदि C_j के अधिकतम सम्भव मान के संगत स्तम्भ X_j के सभी अवयव ऋणात्मक या शून्य तो हल असमित है।

9.) **की स्तम्भ–** वह स्तम्भ जिसमें धनात्मक C_j अधिकतम है इसके संगत सदिश X_j प्रवेश करता है जिसे ऊपर की ओर तीर के $(\uparrow)$ का निशान लगकर व्यक्त करते हैं।

10.) **इण्डेक्स स्तम्भ–** या अनुपात स्तम्भ। इस स्तम्भ में अनुपात ज्ञात किया जाता है। जहां

पहली पंक्ति के लिये अनुपात = b_1/ संगत की स्तम्भ का मान

दूसरी पंक्ति के लिये अनुपात = b_2/ संगत की स्तम्भ का मान

11.) की पंक्ति या पायवट पंक्ति– वह पंक्ति जिसमें अऋणात्मक अनुपात सबसे कम है। $(\downarrow)$ से व्यक्त किया जायेगा।

12.) की फैक्टर या की अवयव– वह अवयव जो की कॉलम तथा की पंक्ति के कटान बिन्दु पर स्थित है मुख्य पंक्ति के नये मान लिखने के लिये इस संख्या को 1 में परिवर्तित कर लिया जाता है।

उदाहरण

निम्नलिखित रेखीय प्रकमन समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल कीजिये

अधिकतम कीजिये MaXimise $Z = 4X_1 + 5X_2$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$2X_1 + X_2 \leq 16$$

तथा $X_1 + X_2 \geq 0$

हल– रेखीय प्रकमन समस्या का मानक रूप

अधिकतम कीजिये $Z = 4X_1 + 5X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$

$$2X_1 + 3X_2 + 1.s_1 + 0.s_2 = 24$$

$$2X_1 + X_2 + 0.s_1 + 1.s_2 = 16$$

$$X_1, X_2 >= 0$$

सिम्पलेक्स सारणी

C_B	c_j / आधार हल के लिए चर	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	X_B मात्रा	अनुपात
0	S_1	2	$\boxed{3}$	1	0	24	$\frac{24}{3}=8$ न्यूनतम की पक्ति
0	S_2	2	1	0	1	16	$\frac{16}{1}=16$
		X_1	X_2	S_1	S_2		
		0	0	0	0		
$X_1=0$ $X_2=0$	$\bar{c}_j = c_j - z$	4	5	U	0		$Z=0$
			अधिकतम की स्तम्भ				

प्रारम्भिक बेसिक सम्भाव्य हलः

$$X_1 = 0, X_2 = 0, s_1 = 24, s_2 = 16$$

$$Z_1 = C_B' X_1 = [0\ 0]\ [2/2] = 0$$

$$Z_2 = C_B' X_2 = [0\ 0]\ [3/1] = 0$$

$$Z_3 = C_B' S_1 = [0\ 0]\ [1/0] = 0$$

$$Z_4 = C_B' S_2 = [0\ 0]\ [0/1] = 0$$

चूंकि $C_1, C_2 \geq 0$ हल अनुकूलतम नहीं है। यहां C_2 अधिकतम है, अतः वेक्टर X_2 प्रवेश करेगा।

अतः अनुपात स्तम्भ में अनुपात ज्ञात करें। अनुपात S_1 के संगत न्यूनतम है अतः वेक्टर S_1 बाहर होग। की अवयव 3 है, नई पंक्ति बनाने के लिये निम्न क्रिया अपनायें।

तालिका (1) में पहली पंक्ति के प्रत्येक अवयव को 3 से भाग देने पर ''की पंक्ति'' के अवयव होंगेः

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{o}{3}$	$\frac{24}{3}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	o	8

दूसरी पंक्ति के अवयव होंगें:

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$2-\frac{2}{3}$	1 - 1	$o-\frac{1}{3}$	1 - o	16 - 8
4	o	$\frac{-1}{3}$	1	8

सिम्पलेक्स संशोधित सारणी – 2

C_B	C_j / आधार हल के लिए चर	4 x_1	5 x_2	O s_1	O s_2	X_B	अनुपात
5	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	O	8	$8 \div \frac{2}{3} = 12$
O	x_2	$\frac{4}{3}$	O	$\frac{-1}{3}$	1	8	$8 \div \frac{4}{3} = 6$ न्यूनतम की पक्ति
		x_1	x_2	s_1	s_2		
	z_j	$\frac{10}{3}$	5	$\frac{5}{3}$	O		
x_1=O x_1=O	$\overline{C}_j = c_j - z_j$	$\frac{2}{3}$	O	$\frac{-5}{3}$	O		Z = 40

चूंकि $C_1>0$ है अतः हल $X_1=0$, $s_1=0$, $X_2=8$, $s_2=8$ अनुकूलतम हल नहीं है अर्थात उद्देश्य फलन के माने में और सुधार किया जा सकता है।

चूंकि C_1 अधिकतम है अतः' X_1 प्रवेश करने वाला वेक्टर होगा।

चूंकि अनुपात s_2 के संगत न्यूनतम है अतः बाहर जाने वाला वेक्टर s_2 होग। ''की'' अवयव 4/3 होगा।

पुनः संशोधित सारिणी की दूसरी पंक्ति निम्न प्रकार होगी।

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{4}{3} / \frac{4}{3}$	$0 / \frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3} / \frac{4}{3}$	$1 / \frac{4}{3}$	$8 / \frac{4}{3}$
1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	6

पहली पंक्ति निम्न प्रकार होगी

x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
$\frac{2}{3} - 1X\frac{2}{3}$	$1 - 0X\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} - (-\frac{1}{4}X\frac{2}{3})$	$0 - \frac{3}{4}X\frac{2}{3}$	$8 - 6X\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	4

सिम्पलेक्स (संशोधित) तालिका (3)

सिम्पलेक्स (संशोधित) तालिका – 3

C_B	C_j / आधार हल के लिए चर	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	X_B	अनुपात
5 4	X_2 X_1	0 1	1 0	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$	4 6	कोई आवंश्यकता नहीं
		X_1	X_2	S_1	S_2		
	Z_j	4	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$S_1=0$ $S_2=0$	$\overline{C}_j = C_j - Z_j$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$		Z = 44

वर्तमान हल $X_1 = 6, X_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 0$

$$Z = 4X_1 + 5X_2 + 0 + 0 = 24 + 20 = 44$$

चूंकि कोई भी C_1 धनात्मक नहीं है, अतः वर्तमान हल अनुकूलतम है। अर्थात $X_1 = 6, X_2 = 4$, Z अधिकतम = 44

10.9 रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या का द्वैत

प्रत्येक रेखीय प्रक्रमन समस्या से सम्बन्धित एक दूसरी रेखीय प्रक्रमन समस्या होती है। जिसे पहली समस्या का द्वैत कहते हैं। इस समस्या में पहली समस्या को प्राथमिक या प्राइमल कहते हैं। किसी द्वैत का द्वैत स्वयं में प्राइमल होग। प्राथमिक द्वैत के जोड़े में किसी को भी प्राथमिक माना जा सकता है, फलस्वरूप दूसरी द्वैत होगी।

प्राथमिक द्वैत जोड़े के दो महत्वपूर्ण रूप हैं–

1.) सममित (Symmetric)

2.) असममित (Unsymmetric)

प्राथमिक द्वैत जोड़े को सममित रूप में कहा जाता है यदि सभी चर अऋणात्मक हैं तथा सभी निबाध असमिकाएं हैं। (<= अधिकतमकरण की स्थित में तथा >= न्यूनतम किरण की स्थित में) परन्तु प्राचलों a_{ij}, b_i, c_j के चिन्ह स्वैच्छिक हैं। अन्यथा इसे असममित रूप में कहा जाता है।

दूसरे वर्गीकरण के अनुसार प्राथमिक दो प्रकार के होते हैं–

1.) मिश्रित प्राथमिक रूप– यदि किसी प्राथमिक निबाधों मे समीकरण और असमिकाओं (किसी भी दिशा में) का मिश्रण हो, अऋणात्मक तथा अनियन्त्रित चर हो, तब इसे मिश्रित प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

2.) मानक प्राथमिक रूप– यदि सभी निबाधों का एक प्रकार का चिन्ह हो, तो वह मानक प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

10.9.1 किसी प्राथमिक का द्वैत बनाना

नियम

1.) मिले जुले प्रतिबन्धों को एक दिशा में बदलें, अधिकतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (छोटा या बराबर <=) के रूप में तथा न्यूनतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (बड़ा या बराबर >=) के रूप में रखें।

2.) असममित रूप को सममित रूप में बदलें। यदि कोई निबाध समीकरण के रूप में है तो उसे दो असमिकाओं के रूप में व्यक्त किया जाता सकता है।

यदि कोई दो चर चिन्ह में अनियन्त्रित हैं तो उसे दो धनात्मक चरों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

3.) चर n और प्रतिबन्ध m हों तो

अधिकतम कीजिये $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots c_nX_n$

जबकि $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \le b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n \le b_2$

....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mnxzn} \le b_m$$

तथा $X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_n \ge 0$

इसका द्वैत बनाने के लिये

1.) प्रत्येक प्राथमिक निर्बाध के लिये एक द्वैत चर परिभाषित

अर्थात m प्राथमिक निबाध –> m द्वैत चर

प्रत्येक द्वैत चर को $W_1, W_2 \ldots\ldots\ldots, W_m$ से व्यक्त कीजिये।

2.) अचर पद तथा उद्देश्य फलन के गुणांक ो को परस्पर बदलिये

अर्थात n प्राथमिक चर –> n द्वैत निबाध

गुणांक का आव्यूह A $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \end{pmatrix}$ का Transpose A_1^T ज्ञात कीजिये

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} \quad a_{m2} \quad \ldots\ldots\ldots a_{mn} \quad m \times n$$

$$A^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{pmatrix}$$

$$a_{1n} \quad a_{2n} \quad \ldots\ldots\ldots a_{mn} \quad n \times m$$

इस प्रकार प्राथमिक निबाधों के दांयी ओर के अचर द्वैत के उद्देश्य फलन के गुणांक होंगे तथा प्राथमिक उद्देश्य फलन में चरों के गुणांक द्वैत के निबाधों के दांयी ओर के अचर होंगे।

4.) निबाधों की दिशा बदले (अर्थात यदि प्राथमिक में चिन्ह $\ge$ है तो द्वैत में $\le$ होगा तथा यदि प्राथमिक में चिन्ह $\le$ है तो द्वैत में $\ge$ होगा।

5.) अनुकूलतम की दिशा बदलें (अधिकतम के लिये न्यूनतम तथा न्यूनतम के लिये अधिकतम)

इस प्रकार द्वैत निम्न प्रकार का होगा

न्यूनतम कीजिये $Z_D = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots\ldots.. + b_mw_m$

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}w_m \geq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots\ldots\ldots\ a_{m2}w_m \geq c_2$$

$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots\ldots.. + a_{mn}w_m \geq c_n$$

$$w_1, w_2 \ldots\ldots., w_m \geq 0$$

तथा आव्यूह संकेतन में

यदि प्राथमिक, अधिकतम कीजिये $X= cX$

जबकि $AX \leq B$

तथा $X \geq 0$

तब द्वैतः न्यूनतम कीजिये $Z_D = B^T w$

जबकि $A^T w \geq C^T$

तथा $w \geq 0$

10.10 रैखिक प्रोग्रामिंग के लाभ

1.) सीमित एवं उपलब्ध संसाधनों का अनुकूलतम प्रयोग करने में यह प्रायोजन सहायक है।

2.) किसी उत्पादक के लिये इस प्रायोजन क द्वारा यह निर्णय लेना सुविधाजनक हो जाता है कि वह अपने उत्पादनों में किस प्रकार साधनों का चयन करे तथा सर्वोत्तम ढंग से किस प्रकार वितरण करे कि अनुकूलतम लाभ प्राप्त हो।

3.) तकनीक प्रबन्धन के अन्तर्गत किसी भी क्रियाविधि अथवा कार्य करने के एक से अधिक विकल्पों को चुनने में सहायता मिलती है।

4.) यह अर्थव्यवस्था की समस्याओं के सम्भव तथा व्यवहारिक हल प्रस्तुत करती है।

5.) यह विश्लेषण गणित का विस्तृत करता है जिसके कारण उत्पादन निर्णयों में अधिक यथार्थता आ जाती है।

6.) यह तकनीक यातायात लागत, आहार की लागत तथा व्यवसायिक जगत में अनेक वस्तुओं की उत्पादन लागत को न्यूनतम करने में प्रयुक्त की जाती है।

10.11 रेखीय प्रोग्रामिंग की सीमाएं

- रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक के अन्तर्गत चरों में रेखीय सम्बन्ध की कल्पना की जाती है जबकि व्यवहार में ऐसा कोई सम्बन्ध नहीं पाया जाता अपितु अरेखीय सम्बन्ध प्रायः देखने को मिलता है।
- वे समस्याएं जिनमें चर योज्य नहीं है, उनका हल तकनीक से नहीं किया जा सकता।
- इस तकनीक की संकल्पना "प्रतिफल निरन्तर प्राप्त होता रहता है" यथार्थवाची नहीं है।
- यह भी देखा गया है इस तकनीक से प्राप्त हल फर्म अथवा कम्पनी के लिय उचित नहीं हो।

10.12 सारांश

रैखिक प्रोग्रामिंग अनुकूलतम परिणाम प्राप्त करने के लिये एक गणितीय विधि है। यह उस तकनीक को कहते हैं जो कि उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल ज्ञात करने में प्रयुक्त होते हैं। इस विधि को उपलब्ध सीमित साधनों के परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है। जहां सभी चरों के बीच रेखीय सम्बन्धों के समीकरणों अथवा असमिकाओं के द्वारा दर्शाया जाता है।

किसी निर्णयाात्मक समस्या को रेखीय प्रोग्रामिंग के मॉडल में प्रस्तुत करने के लिये निर्णायक चरों को चिन्हित करना, उद्देश्य फलन को घोषित करना, निबाधों को परिभाषित करना, चरों का अऋणात्मक मान होना आदि चरणों को अपनाकर रेखीय मॉडल के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। यह गणितीय विधि कुछ सीमाओं अथवा प्रतिबन्धों जैसे रेखीय, अऋणात्मक, योगात्मकता, विभाज्यता की शर्तों की मान्यता पर आधारित है।

रैखिक प्रोग्रामिंग को ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि से हल किया जा सकता है। हर रेखीय प्रोग्रामिंग को एक दूसरी रेखीय प्रक्रमन समस्या होती है जिसे पहली समस्या का द्वैत कहते हैं।

10.13 शब्दावली

1.) **निर्णय चर**– सीमित साधनों के अन्तर्गत वस्तुओं की मात्रा को चरों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
2.) **उद्देश्य फलन**– प्रयुक्त चरों में रेखीय फलन जिसका अधिकतमकरण तथा निम्नतीकरण किया जाता है।
3.) **निर्बाध**– अनुकूलतम हल निकालने के लिये जो सीमाएं निर्धारित की जाती है।
4.) **रेखीय एवं अ–ऋणात्मक शर्त**– उद्देश्य फलन तथा निबाध सभी निर्णय चर के रेखीय फलन है और यह निर्णय चर ऋणात्मक नहीं होने चाहिये।
5.) **सम्भाव्य हल**– चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिये हुए रेखीय प्रतिबन्धों के साथ साथ अऋणात्मक प्रतिबन्धों को भी सन्तुष्ट करता है, समस्या का सम्भाव्य हल कहलाता है।
6.) **अनुकूलतम हल**– वह सम्भाव्य हल जो दिये हुए उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान हो।

टिप्पणी–

रेखीय प्रक्रमन समस्या को हल करने में प्रायः निम्नलिखित स्थितियां हो सकती हैं–

1.) समस्या का कोई सम्भाव्य हल न हो।
2.) समस्या के अनेक हल हो।
3.) समस्या का सम्भाव्य हल असमि या अपरिबद्ध हो।

10.14 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1.) रेखीय प्रोग्रामिंग की प्रमुख विशेषताएं क्या हैं ?
2.) रेखीय प्रोग्रामिंग का प्रतिपादन सर्वप्रथम किसने किया ?
3.) रेखीय प्रोग्रामिंग का विकास करने का श्रेय किस अर्थशास्त्री को जाता है ?
4.) रेखीय प्रोग्रामिंग शब्द का क्या तात्पर्य है ?
5.) रेखीय प्रोग्रामिंग को हल करने की कौन सी विधियां हैं ?
6.) सिम्पलेक्स विधि का आविष्कार किसने किया ?
7.) रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या से सम्बन्धित दूसरी रेखीय प्रोग्रामिंग समस्या को क्या कहते हैं ?

उत्तर –

1.) (a) निर्णय चर (b) उद्देश्य फलन (c) निबाध (d) वैकल्पिक समाधन
(e) रेखीय एवं अऋणात्मक शर्त (f) योगात्मकता (g) विभाज्यता
(h) निर्धारित

2.) एल. बी. कान्टरोविच

3.) जी. बी. डान्टसिग

4.) रेखीय शब्द का तात्पर्य– दो या दो से अधिक चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध
प्रक्रमन का अर्थ– किसी समस्या का अनुकूलतम हल किसी व्यवस्था के अन्तर्गत किया गया है जिसकी एक निश्चित योजना है तथा गणितीय तकनीक पर आधारित है।

5.) ग्राफीय विधि एवं सिम्पलेक्स विधि

6.) जार्ज बी. डान्टसिग

7.) द्वैत

10.15 संदर्भ ग्रन्थ

- एस0 एम0 शुक्ला एवं सहायः (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आग्रा
- एच0 एस0 अग्रवाल : (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy", LaXmi Narayan Agrawal, Agra
- पी0 एल0 मेहता : (2007) Managerial Economics, "Analysis, Problems & Cases", Sultan Chand & Sons, New Delhi

10.16 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

1.Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

2. Singh,S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .

3. Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.

4. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

10.17 निबन्धात्मक प्रश्न

1.) रैखिक प्रोग्रामिंग के ग्राफ की विधि को एक सरल संख्यात्मक उदाहरण की सहायता से हल कीजिये।

2.) रेखीय प्रोग्रामिंग की उत्पत्ति एवं विकास पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये।

3.) निम्नलिखित की परिभाषा लिखिये–

    1.) स्लेक तथा सरप्लस चर

    2.) बेसिक हल तथा बेसिक सम्भाव्य हल

4.) सिम्पलेक्स विधि किसे कहते हैं ? इसे हल करने की प्रक्रिया को लिखो।

5.) उद्देश्य फलन $z = 3X + 5y$ को निम्नलिखित अवरोधों के लिये अधिकतम कीजियेः–

$$X + 2y \leq 20$$

$$X + y \leq 15$$

$$X \geq 0$$

$$y \geq 0$$

इकाई 11 अनुकूलतम समीकरण निवर्चन एवं प्रयोग

11.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में अपने रैखिक प्रोग्रामिंग एवं आग्त–निर्गत विश्लेषण के माध्यम से यह ज्ञात किया कि अपने सीमित व निश्चित साधनों से अधिकतम लाभ कैसे अर्जित किया जाता है एवं अर्थव्यवस्था के विभिन्न उद्योगें की परस्पर निर्भरता की मान्यता को आग्त–निर्गत के सम्बन्ध के रूप में उदय होती है।

प्रस्तुत इकाई में अनुकूलतम समीकरणों से माध्यम से उस सर्वोतम क्रिया का निर्धारण करने का प्रयास किया जायेग जिससे वांछित उद्देश्य की प्राप्ति हो सके।

अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई अनुकूलतम समस्याओं को हल करने का एक प्रयास किया जायेग। विभिनन अनुकूलतम तकनीकों का अवलोकन करके ऐसी समस्याओं का हल निकाला जायेग जिससे उत्पादन एवं उपभोक्ता के उद्देश्य की पूर्ति हो सकें।

11.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान सकेंगे कि–

1– अनुकूलतम समीकरण क्या होते है।

2– विभिन्न अनुकूलतम तकनीक जिनके सहायता से आर्थिक समस्याओं को हल किया जा सकता है।

3– अवकलनों का अनुकूलतम समस्याओं में प्रयोग।

4– अधिकतमकरण एवं न्यूनतमीकरण जैसे आर्थिक समस्याओं के लिये अनुकूलतम समीकरण का प्रयोग।

11.3 मुख्य भाग

आदर्शवादी आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारिण करता है जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सके। इसका तात्पर्य है कि ऐसी क्रिया जो एक उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिये एक कीमत–उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सकें। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती है।

अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है।

समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिन्हित करना है जिससे, निबाधों को ध्यान में रखते हुये,एक दिये हुये उद्देश्य फलन को प्राप्त किया जा सके और फिर उन साघनों में से उस वैकल्पिक को चयन करना जिससे कि उद्देश्य की प्राप्ति सबसे कुशलतम तरीके से हो सके,

गणितीय रूप में इस समस्या को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है।

अनुकुलतम कीजिये (optimize) $y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ ---------(A)

Subject to $b_j(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_j \ldots. j = 1, 2, \ldots. M$ ------(B)

समी० (A) उद्देश्य फलन है जबकि समी० (B) निबाधों के सेट को व्यक्त करता है। समस्या की प्रकृति को देखते हुये, अनुकूलतम का तात्पर्य उद्देश्य/फलन को अधिकतम करना या न्यूनतम करने से होता है। समी० (B) में चिन्ह इस बात को इंगित करते है कि हर निबाध समिका अथवा असमिका के सम्बन्ध का रूप ले सकता है।

11.3.1 अनुकूलतम करने में जटिल घटक –

बहुत सारे ऐसे घटक होते है जो अनुकूलतम समस्याओं को जटिल बना देते हैं और हल करने में मुश्किल पैदा करते है। ऐसा ही एक जटिल घटक है समस्या में बहु निर्णायक चर का विद्यमान होना। एक उत्पादक फर्म के लिये लाभ अधिकतम उत्पादन का निर्धारिण सरल ढंग से किया जा सकता है। परन्तु एक बड़ी फर्म अक्सर बड़ी तादाद में विभिन्न उत्पादों को उत्पाद करती है। फल स्वरूप के लिये ऐसी फर्म का लाभ अधिकतमकरण समस्या हर उत्पादन के लिये असंख्य उत्पादक निर्णयों की जरूरत होती हैं ।

दूसरा घटक जो ऐसी समस्या को हल करने में मुश्किल पैदा करती है वो है – निर्णायक चर एवं सम्बन्धित नतीजों के बीच जटिल प्रकृति का सम्बन्ध। उदाहरण के लिये – लोक नीति निर्णयों में ये निर्धारण करना अत्यन्त कठिन हो जाता है कि एक दिये हुये व्यय और बड़ी हुयी आय, रोजगार और उत्पादकता लाभ के बीच सम्बन्ध कैसे निर्धारण किया जाय। चरों के बीच कोई सरल सम्बन्ध नहीं विद्यमान होता।

तीसरा जटिल घटक है निर्णायक चर में एक या एक से अधिक जटिल निबाधों का विद्यमान होना। उदाहरणता वस्तुता हर संग्ठन में ऐसे सीमीत साधनो के निबाध होते है जो निर्धायक चर पर थोपे जाते है जैसे पूँजी, आदि जिन पर उनका वश होता है। इन निबाधों को निर्णायक समस्या में समाहित करना चाहिये नही ंतो अनुकूलतम तकनीक ऐसा हल प्रस्तुत करेग जो व्यावहारिक दृष्टि से अस्वीकृति होगा।

अन्य जटिल घटक है अनिश्चितता का होना। प्रस्तुत अध्ययन में हम निर्णय करने के विश्लेषण को निश्चितता तक ही सीमित करेगें।

11.3.2 निर्बाध एवं अबाध अनुकूलतम

अबाध अनुकूलतम तकनीक के अन्तर्गत समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता और अवकलन के माध्यम से उसका विश्लेषण किया जाता है। दूसरा अत्यन्त सरल रूप जिससे कि अनुकूलतम समस्या का निवारण किया जा सकता है, वो है समस्या के प्रतिबन्धों को बराबरी अथवा समिका समबन्ध द्वारा स्पष्ट करना।

निर्बाध अनुकूलतम समस्या को लेग्रेनजियन गुणक (lagrangian Mulliplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अक्सर हालांकि, आर्थिक निर्णय चरों में निबाध एक असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं।

रैखिक प्रायोजन समस्या उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल करने में प्रयुक्त होती है इसके अन्तर्गत, दोनों ही उद्देश्य एवं निबाध सम्बन्धों को निर्णय चेरों के रेखीय सम्बन्ध द्वारा किया जाता है। इसके अलावा द्विघाती प्रायोजन समस्या भी होती है जहाँ उद्देश्य फलन निर्णय चरों का द्विघाती रूप ले लेती है।

11.4 अवकलन

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेखा चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते है या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन केत्र महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है।

11.4.1 सीमान्त विश्लेषण एवं अवकलन सम्बन्ध

मान लिजिये कि एक उद्देश्य फलन है, Y को अनुकूलतम करना जिसे बीजगणितीय रूप में निर्णायक चर X के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$Y = f(X)$$

सीमान्त लाभ – उत्पादन की एक अतिरिक्त इकाई में परिवर्तन करने से लाभ में होने वाला परिवर्तन सीमान्त लाभ होता है। सामान्य रूप में किसी चर Y के सीमान्त मान को जो अन्य चर X का फलन है। उसे X इकाई में एक इकाई परिवर्तन करने पर Y में होने वाले परिवर्तन के द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

Y, (M_y) के सीमान्त मान को Y, (Δy) में होने वाले परिवर्तन के द्वारा निकाला जा सकता है। जो X, (ΔX) में दिये गये परिवर्तन के फलस्वरूप होता है।

$$M_y = \Delta y / \Delta X$$

इस दिये गये व्यक्तत्व की गणना करने पर X के परिवर्तन के आकार के परिवर्तन पर निर्भर करते हुए Y के सीमान्त मान के विभिन्न मान प्राप्त होते है।

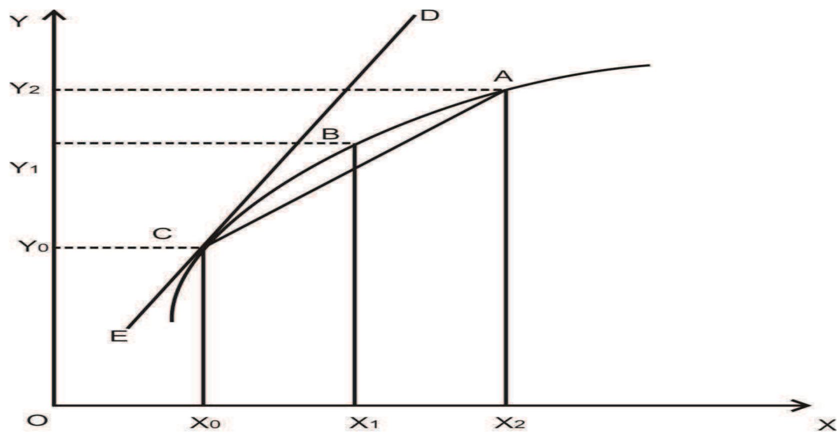
यदि ΔX एक सतत चर जो विभिन्न fractional मान ले सकता है, तो M_y की गणना करते समय हम यह मान सकते है कि ΔX शून्य तक जा सकता है। अवधारणा में इस विचार को अवकलन कहा जाता है।

फलन का पहला अवकलज को परिभाषित करते हुये $\Delta y / \Delta X$ के अनुपात को सीमित करना है जैसे ΔX शून्य की ओर बढता है।

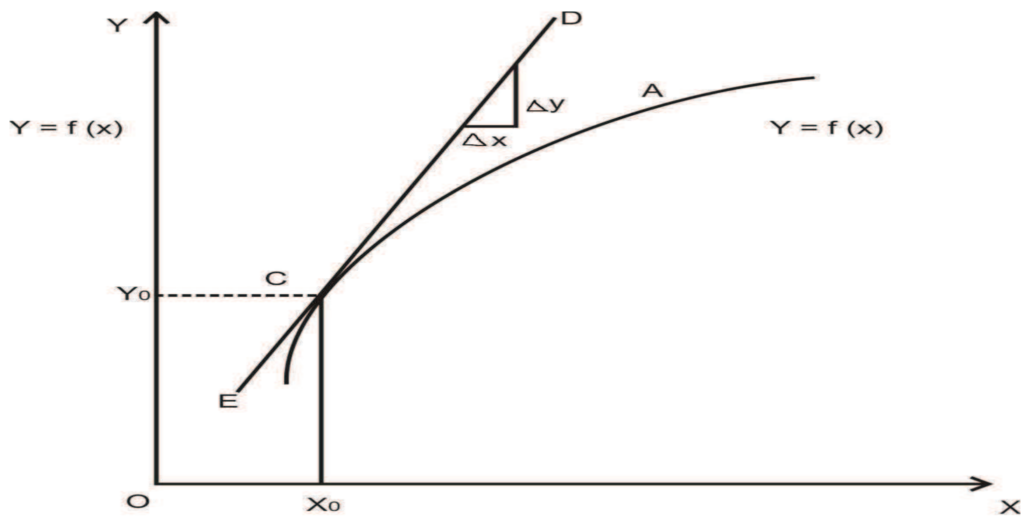
$$dy / dX = \text{limit } \Delta y / \Delta X$$

$$\Delta X \rightarrow 0$$

ग्राफीकीय विधि से किसी भी फलन का पहला अवकलन उस दिये गये वक्र के ढाल के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। मान लीजिये, हम बिन्दु X_0 पर $Y = f(X)$ का अवकलन निकालना चाहते है। dy / dX tangent रेखा CD की ढाल को मापती है।



Marginal Charge in Y -f (x) as
Δ x approaches o



Measurement of the slope Y = f (x)
at pt.C

उदाहरण के लिये ,यदि Y की सीमान्त माप की गणना एक सूक्ष्म अंतराल X_o से X_1 से की जाय तो रेखा C से B की ढाल बराबर होगी –

$$M''_y = \Delta y / \Delta X$$

$$= Y_1 - Y_0 / X_1 - X_0$$

यह ECD tangent रेखा की ढाल को व्यक्त करने की एक बेहतर गणना करती है। अतः हम देखते है कि ΔX का मान जितना कम होगा, वक्र की ढाल का अधिक बेहतर प्रस्तुतीकरण हो सकेगा। जब $\Delta X \rightarrow 0$ है तो C बिन्दु पर $Y = f(X)$ वक्र का ढाल पता किया जा सकता है।

11.5 अवकलन की प्रक्रिया

अवकलन की प्रक्रिया – अर्थात फलन के अवकलन को ज्ञात करना $\Delta Y/\Delta X$ के अनुपात के सीमित मान को निर्धारित करने में निहित है। एक फलन के अवकलन को ज्ञात करने के लिये, बीज गणित प्रक्रिया के माध्यम से इसको प्राप्त कर सकते है। इस प्रक्रिया के विशिष्टि नियमों को नीचे प्रस्तुत किया जा रहा है।

मान लीजिये लाभ को उत्पादन मात्रा के फलन में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\pi = -40 + 140Q - 10Q^2 \qquad \text{------ 1}$$

$d\pi/dQ$ को ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम सीमान्त लाभ $\Delta\pi/\Delta Q$ को ज्ञात करेगें जैसे$\Delta Q \rightarrow 0$

मान लीजिये लाभ का नया स्तर $(\pi + \Delta\pi)$ पर व्यक्त करने पर उत्पादन में वृद्धि$(Q + \Delta Q)$

समी० 1 से यह ज्ञात है कि

$$(\pi + \Delta\pi) = -40 + 140(Q + \Delta Q) - 10(Q + \Delta Q)^2 \qquad \text{----- 2}$$

इस समीकरण को विस्तार करने पर और फिर बीजगणित द्वारा हल करने पर

$$(\pi + \Delta\pi) == -40 + 140Q + 140\Delta Q - 10[Q^2 + 2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2]$$

$$= -40 + 140Q - 10Q^2 + 140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2 \text{-------}3$$

समी० 3 को समी० 1 से हटाने पर

$$\Delta\pi = 140\,\Delta Q - 20Q\,\Delta Q - 10\,(\Delta Q)^2$$

सीमान्त लाभ अनुपात $\Delta\pi/\Delta Q$ बनाने पर –

$$\Delta\pi/\Delta Q = [140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2]/\Delta Q$$

$$= 140 - 20Q - 10\,\Delta Q \qquad \text{-------- 4}$$

समी० 4 की सीमा लेते हुये जैसे जैसे Q शून्य की ओर अग्रसर होता है, लाभ फलन को अवकलन के रूपजी में इस प्रकार व्यक्त कर सकते है।

$$d\pi/dQ = \text{limit}\,[140 - 20Q - 10\Delta Q]\ \Delta Q \rightarrow 0$$

$$= 140 - 2\,Q \qquad \text{---------5}$$

यदि हमें Q के किसी निश्चित मान पर लाभ फलन का अवकलन निकालना हो तो समी० 5 को इस मान के लिये व्याख्या कर सकते है। यदि Q = 3 units पर लाभ फलन की ढाल अर्थात सीमान्त लाभ कितना होग तो Q = 3 को समी० 5 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\partial\pi/\partial Q = 140 - 20\ (3) = \text{Rs } 80 \text{ प्रति इकाई}$$

11.5.1 अवकलन के नियम

सामान्य नियमों की एक श्रृंखला, उपर्युक्त प्रक्रिया से व्युत्पन्न विभिन्न प्रकार के फलनों को अवकलन करने के लिए विद्यमान हैः

स्थिर फलन – स्थिर फलन को इस रूप में व्यक्त कर सकते है।

$$Y = a$$

जहाँ a स्थिरांक है (अर्थात Y, X से स्वतन्त्र है)। स्थिर फलन का अवकलन शून्य के बराबर होता है

$$dy / dy = 0$$

उदाहरण के लिये, स्थिर फलन :

$$Y = 4$$

को ग्राफ A में दिखाया ग्या है। क्योंकि यह स्थिर फलन अक्ष की समान्तर रेखा है जिसकी ढाल शून्य है। अतः इसका अवकलन (dy/dX)शून्य के बराबर है।

घात फलन – घात फलन का रूपजी है।

$$Y = aX^b$$

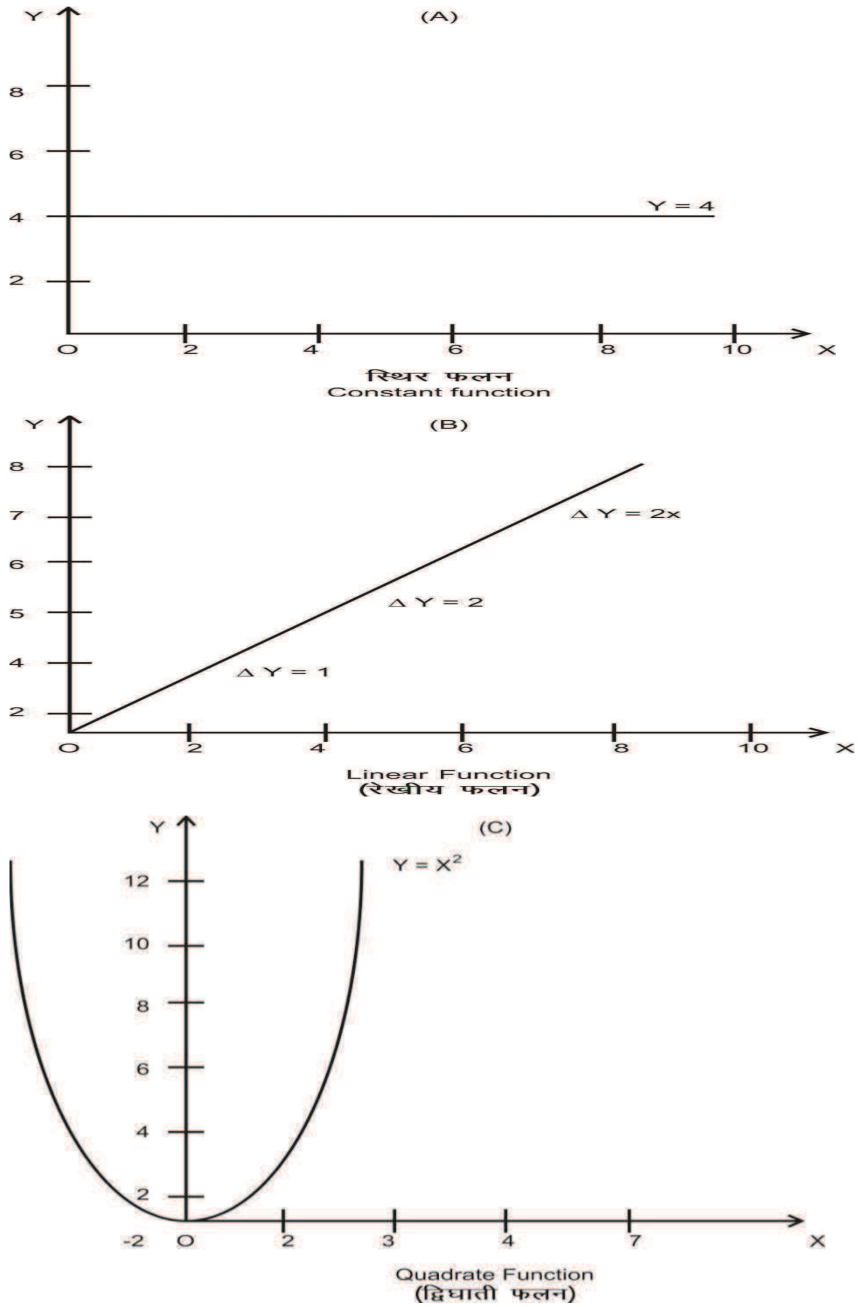
जहाँ a & b स्थिरांक है। घात फलन का अवकलन b गुणा a है गुणा X पर घात (b-1)

$$dy / dy = b.a.X^{b-1}$$

उदाहरण Y = 2X को ग्राफ B में प्रस्तुत किया ग्या है। फलन की ढाल = 2 और यह X के सभी मान के लिय स्थिर है। Power फलन को लागू करने पर जहाँ a = 2 & b = 1

$$= dy / dy = 1.2.X^{1-1} = 2X^0$$

$$= 2$$



यह ध्यान देने योग्य है कि किसी चर पर शून्य हमेशा 0 के बराबर होती है।

अब मान लीजिए $Y = X^2$ (चित्र C)

Power फलन नियम को लागू करने पर ($a = 1, b= 2$)

$dy / dX = 2.\ 1.X^{2-1} = 2\ X$

यह देखा जा सकता है कि अवकलन ऋणात्मक होता है जब $X<O$, O जब $X = O$ और घनात्मक जब $X > O$

फलनों का योगफल का अवकलन

मान लीजिए $Y = f(X)$ दो यह उससे अधिक भिन्न फलनों के जोड़ को व्यक्त करती है।

$$f_1(X), f_2(X)$$

$$Y = f_1(X) + f_2(X)$$

Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करने के लिये हर फलन को अवकलन करने के पश्चात परिणाम को जोड़ देना है।

$$dy / dX = (df_1(X) / dX) + (df_2(X)/dX)$$

इस परिणाम को कई भिन्न फलनों के जोड़ के अवकलन को ज्ञात करने के प्रयुक्त किया जा सकता है।

दो फलनों का गुणन का अवकलन

मान लीजिये कि चर Y दो अलग अलग फलनों $f_1(X)$ और $f_2(X)$ का गुणन है।

दो फलनों के गुणनफल का अवकलन, प्रथम फलन X द्वितीय फलन का अवकलन + द्वितीय फलन X प्रथम फलन का अवकलन के बराबर होता है।

$$dy / dX = f_1(X), df_2(X) / dX + f_2(X), df_1(X) / dX$$

उदाहरण अवकलन कीजिये

$$Y = X^2(2X - 3)$$

$$dy / dX = X^2. D / dX [(2X - 3)] + (2X - 3). D / dX (X^2)$$

$$= X^2(2 - 0) + (2X - 3). (2X)$$

$$= 2X^2 + 4X^2 - 6X$$

$$= 6X^2 - 6X$$

$$= 6X(X - 1)$$

फलन के भागफल का अवकलन –

दो फलनों के भाग्फल का अवकलन निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है –

$Y = f_1(X) / f_2(X)$

$dy / dX = [\{f_2(X). (df_1(X) / dX)] - [f_1(X). (df_2(X) / dX)\}] / [f_2(X)]^2$

उदाहरण

$Y = 10X^2 / 5X-1$

$dy / dX =[(5X - 1). 20X] - [10X^2. 5 / (5X-1)^2] /(5X-1)^2$

$=(100X^2 - 20X - 50X^2) /(5X-1)^2$

$= 50X^2 - 20X / (5X - 1)^2$

$= 10 X (5X - 2) / (5X-1)^2$

फलन के फलन का अवकलन (श्रृंखला नियम)

मान लीजिये Y, Z चर का फलन है, $Y = f_1(Z)$ और Z, X चर का फलन है ,$Z = f_2(X)$ तब Y का अवकलन X के सापेक्ष में निर्धारित करने के लिये सर्वप्रथम dy / dz और dz / dX ज्ञात करें और फिर दोनों को गुणन करें।

$dy / dX = (dy / dX) . (dz / dX)$

$= (df_1(Z) / dz) . (df_2(X) / dX)$

उदाहरण Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करें

जब $Y = 10z - 2z^2 - 3$

जहाँ Z का सम्बन्ध X से इस प्रकार से है

$Z = 2X^2-1$

हल – $dy / dz = 10 - 4z$

$dy / dX = 4X$

तब $dy /dX = (10-4z) . 4X$

X को Z के स्थान के प्रतिस्थापित करने पर

$dy / dX= [10 - 4 (2X^2 - 1)] .4X$

$= (10 - 8X^2 + 4) . 4X$

$$= 40X - 32X^3 + 16X$$
$$= 56X - 32X^3$$
$$= 8X(7 - 4X^2)$$

11.6 अनुकूलतम समस्याओं में अवकलन का प्रयोग

प्रबन्धकीय अर्थशास्त्र में अधिकतम अब न्यूनतम समस्याओं के प्रयोग अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये अवकलनों का प्रायः प्रयोग किया जाता है।

11.6.1 अधिकतम करण समस्या

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये (उदाहरण के लिये अधिकतम लाभ) एक आवश्यक शर्त (किन्तु पूंजीर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो इसी शर्त को अवकलन के माध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $Y = f(X)$ की अधिकतम मान को ज्ञात करने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर dy/dX अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीजगणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

11.6.2 प्रथम क्रम शर्त : लाभ अधिकतमकरण

लाभ फलन को प्रयोग करते हुये

$$\pi = - 40 + 140Q -+ 10Q^2$$

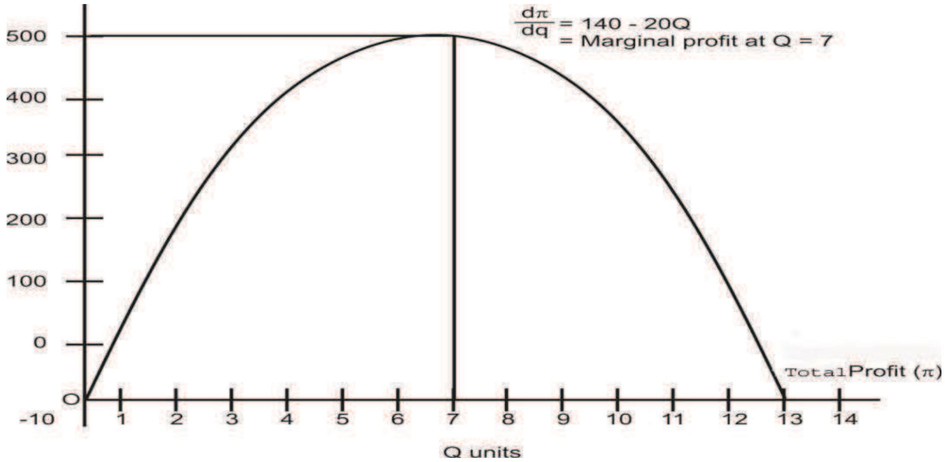
फलन का प्रथम अवकलन शून्य रख कर निकालने पर

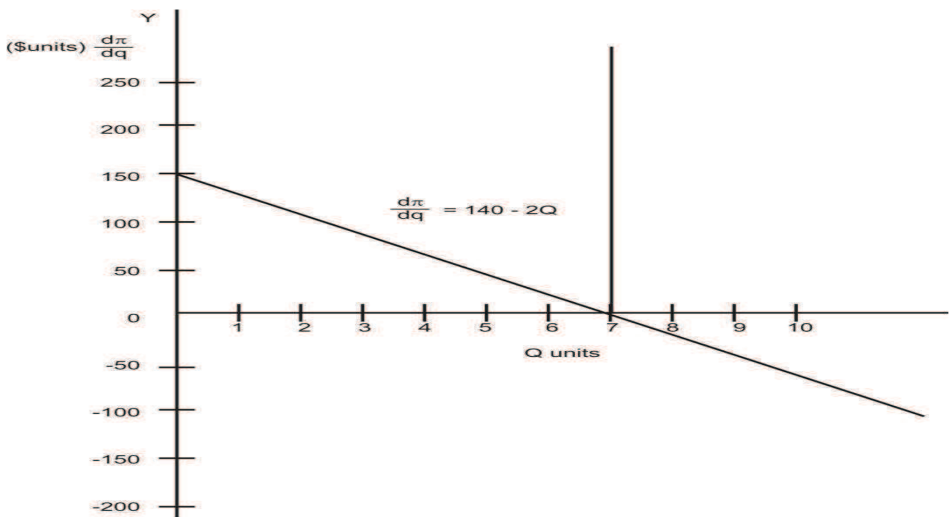
$$d\pi/dQ = 140 - 20Q$$

$$O = 140 = 20Q$$

इस समी० को के लिये हल करने पर इकाई प्राप्त होता है जो लाभ अधिकतम उत्पादन स्तर है।

यह लाभ और प्रथम अवकलन फलन अनुकूलतम हल है चित्र 4 में हम देख सकते है कि लाभ अधिकतम उस बिन्दु पर होता है जहाँ फलन न बढ़ रहा है न घट रहा है। दूसरे शब्दों में, जहाँ ढाल (या प्रथम अवकलन) शून्य के बराबर होती है।





11.6.3 द्वितीय अवकलन एवं द्वितीय क्रम शर्त फलन के अवकलन को शून्य के बराबर कर देने से और प्राप्त समी० को निर्णायक चर के मान का हल निकालने से यह साक्ष्य नहीं हो जाता कि वह बिन्दु ही प्राप्त होगा जिस पर फलन एक अधिकतम माने लेता है। एक U आकृति फलन की ढाल निम्नतम बिन्दु पर भी शून्य के बराबर होती है और फलन अपना न्यूनतम मान इस दिये पर बिन्दु पर प्राप्त करता है। दूसरे शब्दों में, अवकलन को शून्य पर तय करना फलन अधिकतम मान निकालने के लिये एक आवश्यक शर्त तो अवश्य है पर पूंजी पर्याप्त नहीं। दूसरी शर्त, जिसे द्वितीय क्रम शर्त कि प्रथम क्रम शर्त से प्राप्त किया गया बिन्दु, बीजगणितीय फलन का अधिकतम बिन्दु है अथवा न्यूनतम बिन्दु।

इस स्थिति को नीचे दिये चित्र के माध्यम से समझाया गया है। चित्र 5 में दोनों बिन्दु A तथा B पर फलन का ढाल (प्रथम अवकलन dy/dX) शून्य के बराकर है। हालांकि सिर्फ बिन्दु B पर ही फलन अपना अधिकतम मान प्राप्त करती है। हम यह देख सकते है कि फलन $Y = f(X)$ के अधिकतम मान B के पड़ोस में सीमान्त मान (अथवा ढाल) निरन्तर घटता जा रहा है।

पहले dy / dX के बिन्दु तक तो ढाल घनात्मक है और पश्चात ढाल ऋणात्मक हो जाती है अतः हमें यह आवश्यक रूपजी से निर्धारित कर लेना चाहिये कि ढाल की सीमान्त मान (ढाल की ढाल) घटती रही है। यह देखने के लिये कि सीमान्त मान घट रही है एक परीक्षण किया जा सकता है। सीमान्त मान का अवकलन निकालना और फिर यह जांच करना कि फलन के दिये गये बिन्दु पर यह ऋणात्मक है अथवा नहीं। असरदार रूपी से, हमें अवकलन का अवकलन निकालने को आवश्यकता होगी अर्थात फलन का द्वितीय अवकलन और फिर परीक्षण कैसा कि शून्य से कम है अथवा नहीं।

फलन $Y = f(X)$ का द्वितीय अवकलन इस प्रकार लिखा जाता है। d^2y / dX^2 एक अधिकतम बिन्दु तब प्राप्त होता है जब द्वितीय अवकलन ऋणात्मक होता है $d^2y / dX^2 < O$

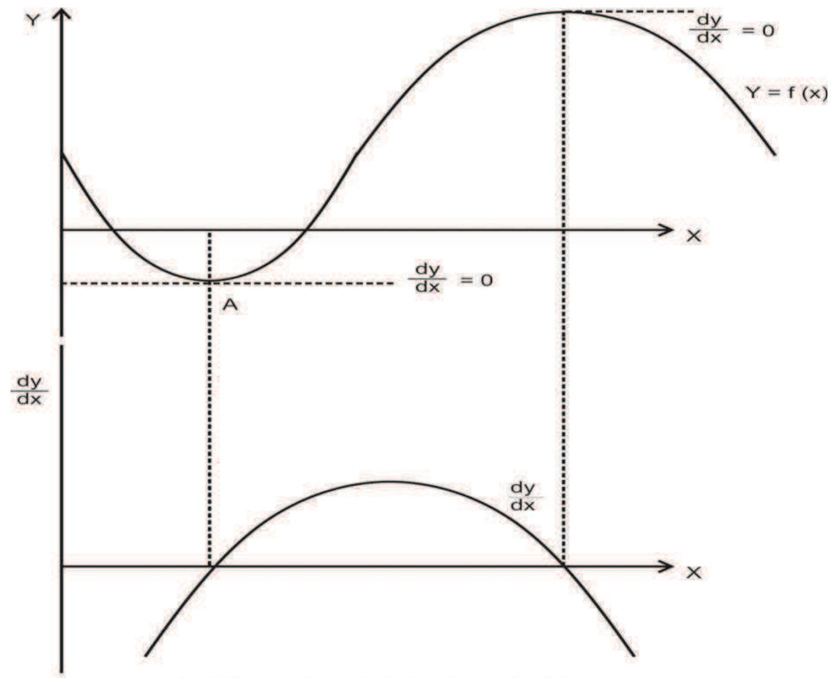
उदाहरण – ऊपर दिये ग्ये लाभ अधिकतम करण उदाहरण को ही लेते हुये प्रथम अवकलन से ही द्वितीय अवकलन प्राप्त किया जाता है।

$$d\pi/dQ = 140 – 20Q$$

$$d^2\pi/dQ^2 = 0 + 1. (-20) – Q^{1-1}$$

$$= -20$$

क्योंकि $d^2\pi/dQ^2 = < 0$, हम जानते है कि लाभ अधिकतम बिन्दु प्राप्त हो गया फलन के न्यूनतम मान को ज्ञात करने के लिये विपरीत शर्त को लिया जाता है चित्र में $Y = f(X)$ फलन के लिये बिन्दु A (न्यूनतम मान) के पड़ोस में सीमान्त मान (ढाल) निरन्तर बढ़ रहा है। प्रथम तो ढाल उस बिन्दु तक ऋणात्मक है जहाँ $dy / dX = 0$ और उसके पश्चात ढाल धनात्मक हो जाती है। अतः हम यह परीक्षण करके देखते है कि यदि d^2y / dX^2y किसी बिन्दु पर है तो यह न्यूनतम बिन्दु है।



फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान

11.7 न्यूनतमीकरण समस्या

निर्णय लेने की स्थितियों में, लवण न्यूनतमीकरण भी एक उद्देश्य होता है। लाभ अधिकतमकरण समस्याओं की भांति अवकलन को इस संदर्भ के अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उदाहरण – $C = 15 – 040\ Q + .\ 000080Q^2$

जहाँ C = लागत एवं Q = उत्पादन स्तर

C को Q के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$dc / dQ = -.040 + .000160Q$

इस अवकलन को O के लाकर रखने पर और Q हल करने पर

$O = -.040 + .000160Q$

$Q^* = 250$

द्वितीय अवकलन निकालने पर

क्योंकि द्वितीय अवकलन धनात्मक है, Q का उत्पादन स्तर = 250 वह मात्रा है जब औसत कुल लागत न्यूनतम होगी।

सारांश रूप में, हम देखते है कि किसी फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिये उपर्युक्त दो शर्तों की आवश्यकता होती है। प्रथम क्रम शर्त उस बिन्दु को निर्धारित करती है जहाँ अवकलन $dy / dX = 0$। एक से अधिक बिन्दु होने पर द्वितीय क्रम शर्त को प्रयुकत किया जाता है जिससे फलने के दिये ग्ये बिन्दुओ का अधिकतम या न्यूनतम मान निर्धारित किया जा सकें। द्वितीय d^2y/dX^2 अवकलन यह इंग्ति करता है कि दिया ग्या बिन्प्दु फलन का अधिकतम माना है।($d^2y / dX^2 < O$) अथवा न्यूनतम मान ($d^2y / dX^2 > O$)

11.7.1 आंशिक अवकलन और बहुचर अनुकूलतम

अब तक का विश्लेषण चर Y को एक निर्णय चर X के फलन के रूपजी में व्यक्त किये जाने तक सीमित था। हालांकि आमतौर पर आर्थिक सम्बन्धों दो या उससे अधिक निर्णय चरों पर निर्भर करते है। उदाहरण के लिये एक उत्पादन फलन किसी फर्म, उद्योग आदि के निर्ग्त को उसे निर्मित करने वाले आग्रे जैसे पूंजी, श्रम, कच्चा माल आदि से सम्बन्धित होता है। अन्य उदाहरण है मांग फलन जो किसी उतपाद या सेवा की बिक्री या विक्रय अन्य चरों जैसे कीमत, विज्ञापन सीानापन्न वस्तुओं की कीमतें, आय आदि से सम्बन्धित होते हैं।

11.7.2 आंशिक अवकलन

मान लीजिये, अंक आश्रित चर दो स्वतन्त्र निर्णय चरों (X_1 & X_2) का फलन है।

$$Y = f (X_1, X_2)$$

X_1 या X_2 में परिवर्तन के कारण में होने वाने परिवर्तन की समीक्षा की जाय। X_1 के दिये गये परिवर्तन से ($\Delta y/\Delta X$) पर होने वाले सीमान्त प्रभाव को दूर करने के लिये, X_2 को स्थिर मान लिया जाता है। इसी प्रकार से X_2 में परिवर्तन से Y पर X_2 के कारण सीमान्त प्रभाव को दूर करने के लिये ($\Delta y/\Delta X_2$) चर को स्थिर मान लिया जाता है।

यदि अन्य चरों को स्थिरांक या अचर मानकर किसी एक चर में परिवर्तन के सीमान्त प्रभाव का मान y में परिवर्तन लायें, तो यह फलन का आंशिक अवकलन कहा जायेगा।

उदाहरण के लिये यदि $Z = f(s, y)$ है

तो (i) यदि को अचर या स्थिरांक मानकर Z का अवकलन X के सापेक्ष किया जा तो अवकलन को dz / dz लिखा पाता है तथा इसे "X के सापेक्ष का आंशिक अवकलन" कहा जाता है। को "डेल्टा Z वाई डेल्टा X पढ़ा पाता है।"

यदि X को अचर या स्थिरांक मानकर z का अवकलन y के सापेक्ष किया जाय, तो अवकलन को dz / dy लिखा जाता है।

उदाहरण – आंशिक अवकलन निकालने के लिये हम लाभ चर π को दो उत्पादों (तेल और गैस) Q_1 और Q_2 का फलन लेते है।

$$\pi = -60 + 140\ Q_1 + 10\ Q_2 - 10\ Q_2 - 10\ Q_1^{2} - Q_2^{\ 2} - 6\ Q_1 Q_2$$

Q_2 को स्थिर मानकर का आंशिक अवकलन Q_1 के सापेक्ष में

$$d\pi/dQ = 0 + 140 + 0 + 2.\ (-10).\ Q_1 - 0 - 6Q_2$$

$$= 140 - 20\ Q_1 - 6Q_2$$

इसी प्रकार से Q_1 को स्थिर लेते हुये, π का आशिक अवकलन Q_2 के सापेक्ष में

$$d\pi/dQ_2 = 0 + 0 + 100 - 0 + 2.\ (-8).\ Q_2 - 6Q_1$$

$$= 100 - 16\ Q_2 - 6Q_1$$

उदाहरण $Q = 3.0\ P^{\ -.50}\ A^{.25}$

जहाँ Q = बेची गयी उतपादन की मात्रा विक्रय कीमते A = विज्ञापन पर व्यय

Q का आंशिक सन्तुलन P के सापेक्ष में

$$dQ / dp = 3.0A^{\ .25}\ (-.50P^{-50-1})$$

$$= -\ 1.5\ P^{\ -1.50}\ A^{.25}$$

इसी प्रकार से Q का आंशिक अवकलन A के सापेक्ष में

$$dQ / dA = 3.0P^{\ -.50}\ (.25A^{\ .25-1})$$

$$= .75\ P^{\ -.50}\ A^{\ -.75}$$

आंशिक अवकलन को दो या उससे अधिक X चर वाले अधिकतमकरण एवं न्यूनतमीकरण समस्या के अनुकूलतम हल को प्राप्त करने में प्रयुक्त किया जा सकता है।

11.8 सारांश

निश्चितता के अन्तर्गत निर्णय बनाने के क्षेत्र में समस्याओं के दो विस्तृत क्षेत्र है – अबाध अनुकूलतम समस्या एवं बाधित अनुकूलतम समस्या सीमान्त विश्लेषण किसी भी आर्थिक क्रिया के विस्तार एवं संकुचन की निर्णय संरचना में महत्व रखती है। अवकलन का सीमान्त विश्लेषण से एक निकट सम्बन्ध है जिसे किसी भी बीजगणितीय सम्बन्ध को व्यक्त करने में प्रयुक्त किया जाता है। (निर्णायक चर एवं उद्देश्य चर के मध्य) प्रथम अवकलन दिये ग्ये बिन्दु पर किसी फलन के परिवर्तन की दर अथवा ढाल को मापता है। और यह सीमान्त फलन की सीमित मान के बराबर होता है।

विशिष्ट प्रकार के फलों के अवकलन को ज्ञात करने के लिये विभिन्न नियम दिये ग्ये है।

किसी फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये एक आवश्यक किन्तु अपर्याप्त शर्त यह है कि प्रथम अवकलन शून्य के बराबर है। इसे प्रथम क्रय शर्त कहते हैं।

द्वितीय क्रम शर्त की आवश्यकता यह निर्धारित करने की होती है कि दिया ग्या बिन्दु अधिकतम है अथवा न्यूनतम द्वितीय अवकलन यह इंग्ति करता है कि दिया ग्या बिन्दु अधिकतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से कम है और न्यूनतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से अधिक है।

किसी बहुचर फलन का आंशिक अवकलन अन्य चरों को स्थिर रखते हुये फलन के मान पर किसी एक चर में परिवर्तन करने पर होने वाले सीमान्त प्रभाव को मापता है। बाधित अनुकूलतम समस्या में लेगरेन्जज गुणांक तकनीक को फलन की अनुकूलतम मान को ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है। अन्य चरों को संलग्न करने पर लेगरेन्जज गुणक तकनीक एक बाधिक समस्या से अबाध समस्या में बदल जाता है। जिसे अवकलन विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

11.9 शब्दावली

फलन का अवकलन – यदि $\Delta X \rightarrow 0$ तो भिन्न $\Delta y / \Delta X$ की सीमा को $f(X)$ का X के सापेक्ष अवकलन का अवकल गुणांक कहते हैं

अवकलन – किसी फलन $f(X)$ का अवकलन ज्ञात करने की गणितीय क्रिया को अवकलन कहा जाता है।

अनुकूलतम तकनीक – ऐसे उपकरण जिनसे किसी उद्यमी के सांधनों को कुशलपूर्वक प्रबन्धन किया जा सके जिससे लाभ अधिकतम किया जा सके।

निबाध अनुकूलतम समस्या – ऐसी अनुकूलतम समस्या जिसे उद्देश्य एवं निबाध फलनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ निर्णायक चारों पर प्रतिबन्ध होना है।

अबाध अनुकूलतम समस्या – ऐसी अनुकूलतम समस्या जहाँ निर्णय चरो पर कोई प्रतिबन्ध लागू नहीं होता है और अवकलन के माध्यम से इसे हल किया जा सकता है।

लेगरेन्जेज गुणांक – इस तकनीक का प्रयोग ऐसी समस्याओं के हलों को ज्ञात करने के लिये प्रयुकत किया जाता है। जहाँ समस्याओं के प्रतिबन्धों का समिका सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जा सके।

11.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. कौन से दो प्रकार के उद्देश्य फलन होते हैं।
2. कीमत उत्पाद निर्णय सम्बन्धी समस्या में उद्देश्य क्या होता है।
3. उत्पादन समस्या में उद्देश्य क्या होता है।
4. अनुकूलतम समस्याओं के किस प्रकार हल किया जा सकता है।
5. अबाधित अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के लिये कौन सी तकनीक प्रयुकत की जाती है।
6. आर्थिक निर्णय सम्बन्धी समस्याओं में प्रतिबन्धों को किस प्रकार के सम्बन्धों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
7. किस प्रकार की समस्याओं के अन्तर्गत दोनों उद्देश्य और प्रतिबन्ध सम्बन्धों को रेखीय फलनों द्वारा व्यक्त किया जाता है।
8. सीमान्त विश्लेषण एवं अवकलन के मध्य क्या सम्बन्ध है ?

उत्तर – (1) लाभ अधिकतम एवं लागत न्यूनतम (2) लाभ अधिकतम करना

(3) लागत न्यूनतम करना(4) अवकलन, रेखीय प्रायोजन

(5) अवकलन (6) असमिका(7) रेखीय प्रायोजन

11.11 संदर्भ सहित ग्रन्थ

1. Webchapter:OptimizationTechniques;www.shsu.edu/~eco_dgf/web_chapter_a.pdf.
2. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

11.12 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

- Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
- Singh,S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House .
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.

11.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1. अनुकूलतम समीकरणों द्वारा आर्थिक समस्याओं का निवर्चन किस प्रकार होता।
2. अवकलन के नियम कौन–कौन से है।
3. अनुकूलतम तकनीक के विभिन्न प्रकार क्या है।
4. अवकलन प्राप्त करने की क्या विधि है।

इकाई 12 द्विघात समीकरण

12.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में आगत–निर्गत विश्लेषण, रैखिक प्रोग्रामिंग, एवं अनुकूलतम समीकरणों का निर्वचन एवं उसके प्रयोग का अवलोकन किया। प्रस्तुत इकाई में द्विघात समीकरणों के माध्यम से आर्थिक विश्लेषण में प्रयुक्त विभिन्न चरों के मध्य व्याप्त परस्पर सम्बन्धों का अध्ययन किया गया है।

द्विघातीय फलनों में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है। द्विघातीय समीकरणों की सहायता से उत्पादन लागत के लिये एक अनुकूलतम मॉडल को प्राप्त किया जा सकता है। एक द्विघातीय फलन, रेखीय फलन के समान ही श्रेष्ठ रास्ता है और निश्चित रूप से उससे बेहतर भी माना गया है।

12.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान सकेंगे कि–

1– द्विघात समीकरण कैसे हल किया जाता है।
2– द्विघात समीकरण को हल करने की कितनी विधियां है।
3– द्विघात लागत वक्र किस प्रकार निर्मित किया जाता है।
4– द्विघात समीकरण अथवा फलन को रेखाचित्र में किस प्रकार दर्शाया जा सकता है।
5– आर्थिक विश्लेषण में द्विघातीय समीकरणेां का क्या महत्व है ?

12.3 द्विघात समीकरण की परिभाषा

किसी चर राशि में दिया हुआ गणितीय व्यंजक उस राशि का फलन कहलाता है। उदाहरण के लिये X^2+5X+7, X^3+9X^2-7X+3, $\sin X$, e^X, $\log X$ आदि चर राशि X के फलन है। फलन को प्रतीकात्मक रूप में $\phi(X)$, $f(X)$ आदि से लिखते हैं।
समीकरण का उच्चतम घात समीकरण का घात कहलाता है।
इस प्रकार :

- प्रथम घात के समीकरण को एकघात (linear)समीकरण कहते है।
- द्वितीय घात को समीकरण के द्विघात (quadratic) समीकरण कहते है।
- तृतीय घात को समीकरण के त्रिघात (cubic) समीकरण कहते हैं।
- चतुर्थ घात को समीकरण के चतुर्घात (biquadratic) समीकरण कहते है।

गणितीय दृष्टिकोण से फलनों को मुख्यतः रैखिक फलन, द्विघातीय फलन, त्रिघातीय एवं चरघातांकी फलन के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। इन समस्त फलनों से प्राप्त रेखाचित्रों अथवा वक्रों का स्वरूव भिन्न–भिन्न होता है। अन्य शब्दों में , वक्रों का स्वरूप देखकर यह ज्ञात किया जा सकता है कि 9.4.3 मुख्य भाग फलन रैखिक, द्विघातीय , त्रिघातीय अथवा चरघातांकी है।

जिस समीकरण में चर राशि का महत्तम मान 2 हो, उसे द्विघात समीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिये $ax^2+bx+c=0$ के अनुरूप समीकरण, द्विघात समीकरण है।
द्विघातीय फलनों में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है। सामान्य रूप में एक द्विघातीय फलन को निम्नवत व्यक्त किया जाता है :–

$$y=ax^2+bx+c$$

जहां a,b तथा c ज्ञात अचर राशियां है, यहां अज्ञात चर का घात 2 है। द्विघाती फलन को वर्गत्मक फलन भी कहा जाता है।

$x^2-y^2=16$, x तथा y द्विघाती है।

सामान्य वर्गत्मक फलन $y=ax^2+bx+c$ में a,b तथा c के भिन्न मूल्यों के लिये भिन्न भिन्न वर्गत्मक फलन प्राप्त होते हैं और तद्नुरूप इनका रेखाचित्र स्वरूप भी भिन्न–भिन्न होता है।

1. $3X^2 + 2X-1 = 0$ एक द्विघाती समीकरण हैं यहाँ $a = 3, b = 2, c = -1$
2. $2X^3 + 5 = 0$ द्विघाती समीकरण नहीं है।
3. द्विघातों समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ को अधूरा कहा जायेगा यदि कम से कम अचर राशि b या c शून्य के बराबर है।

दो रेखीय बहुपदीय व्यंजकों के गुणनफल से भी द्विघात समीकरण प्राप्त होता है।
मान ले कि $(lx+m)$ एवं $(px+q)$ दो रेखीय बहुपदीय व्यंजक है, यहां l/o , p/o तब इन दोनों बहुपदों का गुणनफल एक बहुपदीय द्विघात समीकरण $lpx^2+(lq+mp)x+mq$ देगा। इसका मानक रूप ax^2+bx+c है। यहां $a=lp,\ b=(lq+mp)$ एवं $c=mq$ है।

12.4 द्विघाती समीकरण का मूल

$$\mathbf{aX^2 + bX + c = 0}$$

परिभाषा – X के वे मान जो समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ को संतुष्ट करते है, द्विघाती समीकरण $aX^2+bX+c =0$ के मूल है। समीकरण के मूल को द्विघाती समीकरण के शून्य भी कहे जाते है।

यह दर्शाने के लिये कि हर द्विघाती समीकरण के दो और मात्र दो मूल होते है

मान लें = $aX^2 + bX + c = 0$

जहाँ = $a \neq 0$

Now $aX^2 + bX + c = 0$ or $a^2X^2 + abX + ac = a.0 = 0$ (a से गुणा करने पर)

or $(aX)^2 + 2.aX - b/2 + (b / 2)^2 – b^2/4 + ac = 0$

or $(aX + b/2)^2 = b^2/4 – ac = b^2 – 4ac/4$

or $aX + b/2 = + \sqrt{}b^2 – 4ac/2$ or $aX = - b/2 + \sqrt{}b^2 – 4ac/2$

$X = -b + \sqrt{}b^2 – 4ac / 2a$

अतः हम देख सकते है कि द्विघाती समीकरण के दो मूल है α और βहर द्विघाती समीकरण के सिर्फ दो मूल होते है अर्थात दो से अधिक मूल नहीं हो सकते

यदि हम यह मान ले कि एक द्विघाती समीकरण aX^2+bX+c के तीन मूल α, β & γ है।

क्योंकि α, β & γ समीकरण $aX^2+bX+c=0$ के मूल है

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ (i)

$a\beta^2+b\beta+c=0$ (ii)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (iii)

(II) को (i) से घटाने पर

$(\alpha^2-\beta^2)+b\ (\alpha-\beta)=0$ or $(\alpha-\beta)\ [a\ (\alpha+\beta)+b]=0$

लेकिन $\alpha \neq \beta \quad a\ (\alpha+\beta)+b=0$ --------- (v)

(III) को (II) से घटाने पर

$a\ (\beta^2-\gamma^2)+b\ (\beta-\gamma)=0,$ or $(\beta-\gamma)\ [a\ (\beta+\gamma)+b]=0$

किन्तु $\beta \neq \gamma \ \ a\ (\beta+\gamma)+b]=0$

(v) को (iv) से घटाने पर

$a\ (\alpha-\gamma)=0$ or $\alpha-\gamma=0\ [a \neq 0]$

$\alpha=\gamma$ जो हमारी मान्यता का खण्डन करता है कि अलग– अलग हैं अतः हर द्विघाती समीकरण के सिर्फ दो मूल है।

12.4.1 मूल के योग और गुणनफलन

यदि α और β समीकरण aX^2+bX+c के मूल है तो

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{-b^2-4ac}}{2a}$$

<u>मूल का योग</u>

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{-b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

<u>मूल का गुणनफल</u>

$$\alpha.\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

अतः मूल का योग = (X की अचर राशि) / (X^2 की अचर राशि)
मूल का गुणनफल = (स्थिरांक) / (X^2 की अचर राशि)

टिप्पणी: द्विघाती समीकरण का विवेचक या विविक्त कर $b^2 - 4aX$ द्विघाती समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ का कहलाता है इसे D से व्यक्त किया जाता है। राशि $b^2 - 4ac$ को समीकरण का विविक्त कर (D) कहते है। अतः समीकरण के मूल क्रमशः वास्तविक, बराबर और अधिकल्पित होगें और उसका विविक्त कर $>, <, = 0$ है।

12.4.2 द्विघाती समीकरण के मूल की प्रकृति :

मान लो द्विघात समीकरण $aX^2 + bX + c = 0$ के मूल α और β है।
जहाँ a, b, c वास्तविक संख्या है।

Case I जब $D < 0$ ie $b^2 - 4ac < O$
तो $\sqrt{b^2 - 4ac}$ काल्पनिक होग
अतः α एवं β दोनों काल्पनिक होगें

Case II जब $D = 0$ i.e $b^2 - 4ac = 0$
तो $\sqrt{b^2 - 4ac} = 9$ from (1) $\alpha = -b / 2a$ एवं $\beta = -b / 2a$
अतः एवं दोनो वास्तविक एवं बराबर होगें।

Case III यदि $D > 0$ i.e $b^2 - 4ac > 0$
$\sqrt{b^2 - 4ac}$ वास्तविक होगा।
मूल α एवं β दोनों वास्तविक एवं भिनन – भिन्न होगें।

Case IV जब D i.e $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग है और a, b, c परिमेय है।
$\sqrt{b^2 - 4ac}$ = परिमेय संख्या
मान ले $\sqrt{b^2 - 4ac} = k$, तब मूल α एवं β दोनों परिमेय होगें।

- यदि $b^2 - 4ac$ धनात्मक है अर्थात् $b^2 \succ 4ac$ तो $\sqrt{b^2 - 4ac}$ वास्तविक है। अतः दोनों ही मूल वास्तविक एवं असमान होगे।
- यदि $b^2 - 4ac$ अर्थात् $b^2 = 4ac$ तो और वास्तविक एवं बराबर होगें और प्रत्येक का मान होगा
- यदि $b^2 - 4ac$ ऋणात्मक अर्थात् $b^2 \prec 4ac$ तो $\sqrt{b^2 - 4ac}$ अधिकल्पिक है।

- अतः α और β दोनों अधिकल्पित एवं असमान होगें।
- यदि b^2-4ac पूर्ण वर्ग है और a, b, c परिमेय है तो दोनों मूल α और β परिमेय एवं असमान होगें।
- यदि b^2-4ac एक पूर्ण वर्ग नहीं है तो α और β अपरिमेय होगें, चाहे a, b, c परिमेय ही क्यों न हों

उदाहरण – समीकरण के मूलों के लक्षण ज्ञात करों।
हल– समीकण का विविक्त कर जो ऋणात्मक है, अतः मूल अधिकल्पित है।
उदाहरण – 2 सिद्ध करो कि समीकरण के मूल परिमेय होंगे, यदि और परिमेय हो।
हल– विविक्त कर = , जो एक पूर्ण वर्ग है, अतः मूल परिमेय होगे।

उदाहरण – एक कार 500 किमी. के सफर मे एक बस से 25 किमी./घंटा तेज गति से चलती है। बस कार से 10 घंटे अधिक समय लेती है। कार एवं बस की गति ज्ञात कीजिए।

हल – मान लीजिये बस की गति = X किमी./घंटा एवं कार की गति =(X + 25) किमी./घंटा

500 किमी. का सफर तय करने में बस समय लेती है = 500/X घंटा

500 किमी. का सफर तय करने में कार समय लेती है = 500/(X+25) घंटा

अतः $500/X = (500/(X+25))+10$

$50 / X = (50 / (X + 25)) + 1$

$(50 / X) - (50 / (X + 25)) = 1$

$(50 (X + 25) – 50X) / (X(X+25)) = 1$

$1250 = X^2 + 25X$

$X^2 + 25X – 1250 = 0$

$X^2 + 50X - 25X – 1250 = 0$

$(X+ 50) (X-25) = 0$

$X \neq - 50, X = 25$ किमी./घंटा

अतः बस की गति = 25 किमी./घंटा एवं कार की 50 किमी./घंटा है।

12.5 द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना

द्विघात बहुपद ax^2+bx+c का गुणनखण्ड तभी निकाला जा सकता है जब r एवं s दो ऐसी संख्या विद्यमान हो, जिसके लिये

1– $r=lq,\ s=mp$

2– $r+s=b=x$ का गुणांक $=lq+mp$

3– $r\times s=ac=lpmq=x^2$ का गुणांक x अचर

साधित उदाहरण $2x^2+11x+5$ का गुणनखण्ड निकाले–

1– यहां $a=2, b=11\ , c=5$

2— दो संख्याओं $r \& s$ का पता लगाइये ताकि $r+s=b=11$ तथा $r \times s = a \times c = 2 \times 5 = 10$ जो कि 10 तुल्य 1 है।

3— अब मध्य पद $11x$ को दो भागें में तोड़िये।

$$11x = 10x + 1x$$
$$2x^2 + 11x + 5 = 2x^2 + 10x + 1x + 5$$
$$2x(x+5) + 1(x+5) = (2x+1)(x+5)$$

12.5.1 द्विघात समीकरण के गुणनखण्ड की शर्तें—

सभी द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना सम्भव नहीं होता है। किसी द्विद्याात समीकरण का गुणनखण्ड निकालना सम्भव है या नहीं, यह निम्नलिखित ढंग से जाना जा सकता है—

1— यदि $b^2 - 4ac > o,$ तब प्रदत्त द्विघात समी0 का गुणनखण्ड निकाला जा सकता है।

2— यदि $b^2 - 4ac < o,$ तब इसका गुणनखण्ड निकालना सम्भव नहीं है।

12.5.2 द्विघात समीकरण का हल—

किसी भी द्विघात समीकरण को हल करने पर चर के हमेशा दो मान प्राप्त होते हैं। चर के इन मानों की समीकरण का मूल (roots) कहा जाता है। कोई भी द्विघात समीकरण या तो गुणखण्ड विधि या सूत्र विधि या द्रुत विधि (यदि मूल परिमय) हो से हल किया जा सकता है।

1— **गुणनखण्ड विधि**

2— **सूत्र विधि**—यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करना हो तो निम्नलिखित सूत्री का इस्तेमाल किया जाता है—

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

धन एवं ऋण चिन्हों को अलग करने पर x के दो मान प्राप्त होते हैं। $b^2 - 4ac$ को विविस्तर कहा जाता है। द्विघात समीकरण को हल करने से प्राप्त चर के दोनों मानों को समीकरण का मूल (roots of the quation) कहते हैं। इन मूलों के α एवं β से निर्दिष्ट किया जाता है।

पाया गया कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दोनेां मूलों का योग $\frac{-b}{a}$ के बराबर होता है अर्थात $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ एवं मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a}$ के बराबर होता है।

अर्थात $\alpha + \beta = \frac{c}{a}$

किसी द्विघात समी0 $ax^2+bx+c=0$ के लिये

1– मूल बराबर होंगे यदि $b^2=4ac$

2– मूल वास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2>4ac$

3– मूल अवास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2<4ac$

3– द्रुत विधि– (यदि मूल परिमय हो) यदि द्विघात समी $ax^2+bx+c=0$ के रूप में हो तो निम्नलिखित विधि द्वारा मूल निकाला जा सकता है।
उदाहरण द्वारा विधि को समझा जा सकता है।

मान लिया गया कि समी0 $10x^2-x-21$ का मूल निकालना है।

I- $10x^2-x-21$

-21 X 10 = -210

II- 14 15 (–210 के ऐसे गुणखण्डों को ज्ञात करे जिसका योगफल x के गुणांक के बराबर हो यानि (–1)14X(–15)=–210 एवं 14+(–15)–1)

III- $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ $\frac{-15}{10} = \frac{-3}{2}$ (द्वितीय चरण में प्राप्त गुणनखण्डों में x^2 के गुणांक से भाग दें।)

IV- $\frac{-7}{5}$ $\frac{3}{2}$ (प्राप्त चिन्हों के बदल दें)

इस प्रकार $\frac{-7}{5}$ एवं $\frac{3}{2}$ प्रदत्त समीकरण के मूल है।

12.6 प्रदत्त मूलों के आधार पर द्विघात समी0 का निर्माण

यदि द्विघात समी0 के मूल दिये ग्ये हो एवं उनके आधार पर द्विघात समी0 का निर्माण करना हो तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

समी0 x^2-x (मूलों का योग + मूलों का गुणनफल = 0) उदाहरण के लिये यदि प्रदत्त मूल 2 एवं 3 हो तो अभीष्ट समी0 = $x^2-(3+2)x+3\times2=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

नोट–1 द्विघात समी0 $ax^2+bx+c=0$ के मूल एक दूसरे के व्युतक्रम होंगे यदि $a=c$ हो।

2– यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल शून्य हो तो $c=0$

3– यदि द्विघात समीरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का ऋणात्मक व्युत्क्रम हो तो $c=-a$

4– यदि दोंनों मूल शून्य के बराबर हो तो $b=0$ एवं $c=0$

5– यदि एक मूल अनन्त हो तो $a=0$ और यदि हो मूल अनन्त हो तो $a=0$ एवं $b=0$

6— यदि मूल परिमाण में समान हो पर चिन्ह में विपरीत हो तो $b=0$

7— यदि दो द्विघात समीकरणों $ax^2+bx+c=0$ एवं $a, x^2+b_1x+c_1=0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो तो $(bc_1-b_1c)\ (ab_1-a_1b)=(ca_1-c_1a)^2$

8— यदि इनके दोनों ही मूल समान हो तो $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$

12.7 द्विघात लागत वक्र का निर्माण

द्विघातीय फलनों (Quadratic functions) में अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो होती है।

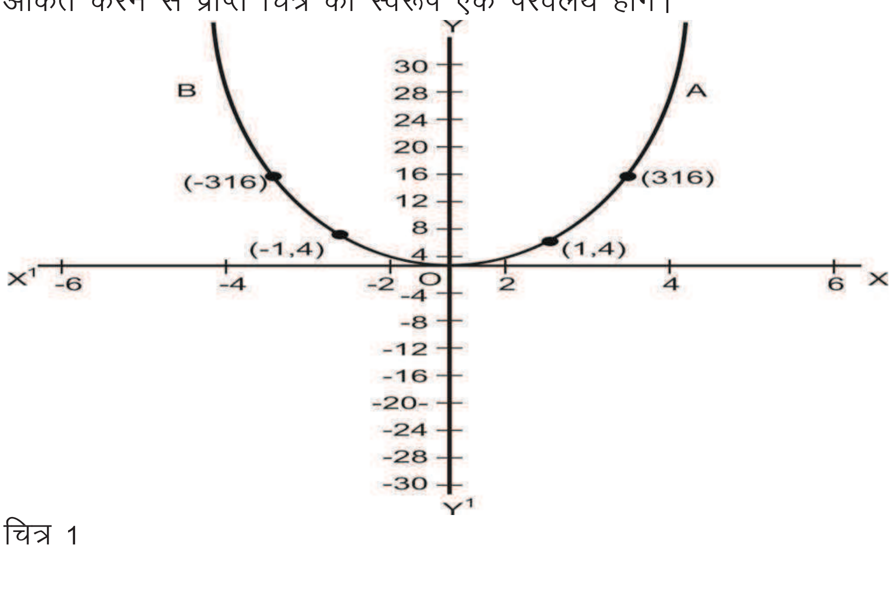
फलन $y=ax^2+bx+c$ में यदि $b=0$ तथा $c=0$ तब $y=ax^2$ प्राप्त होता है। फलन $y=ax^2$ का रेखाचित्र एक परवलय होता है। यदि $a=4$ मान लिया जाय तो फलन $f=4x^2$ का स्वरूप ग्रहण करेग। इस फलन का रेखाचित्र खींचने के लिये x के अलग अलग मूल्यों के लिये y के संगत मूल्य प्राप्त किये जाते हैं।

फलन $f=4x^2$ के लिये

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	36	16	4	0	4	16	36

निदेशांक (–3, 36) (–2, 16) (–1,4) (0, 0) (1 , 4) (2 , 16) (3,36)

इस तरह में युगमों के रूप में (–3, 36) (–2, 16) (–1,4) (0, 0) (1 , 4) (2 , 16) तथा (3,36) अलग–2 बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित करने से प्राप्त चित्र का स्वरूप एक परवलय होग।



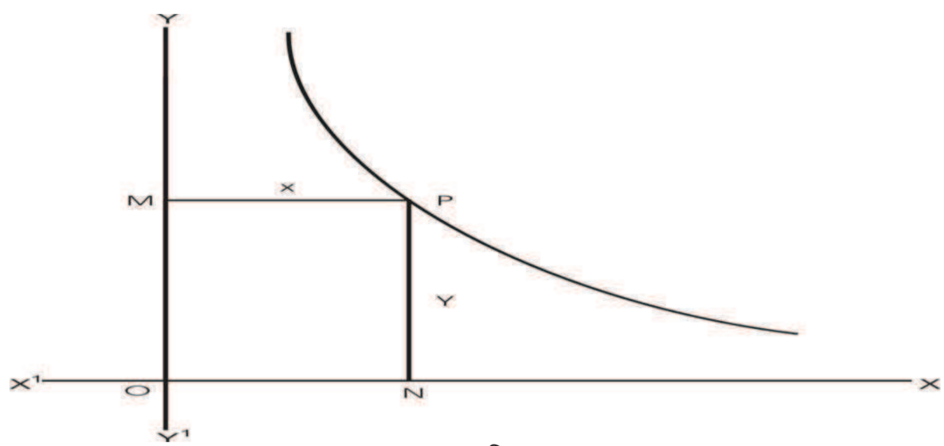
चित्र 1

चित्र में रेखा yy^1 परवलय AOB का अक्ष है। परवलय AOB अपने अक्ष OY में समनित है।

12.7.1 समकोणीधर या (आयतीत) अतिपरवलय का रेखाचित्र खींचना–

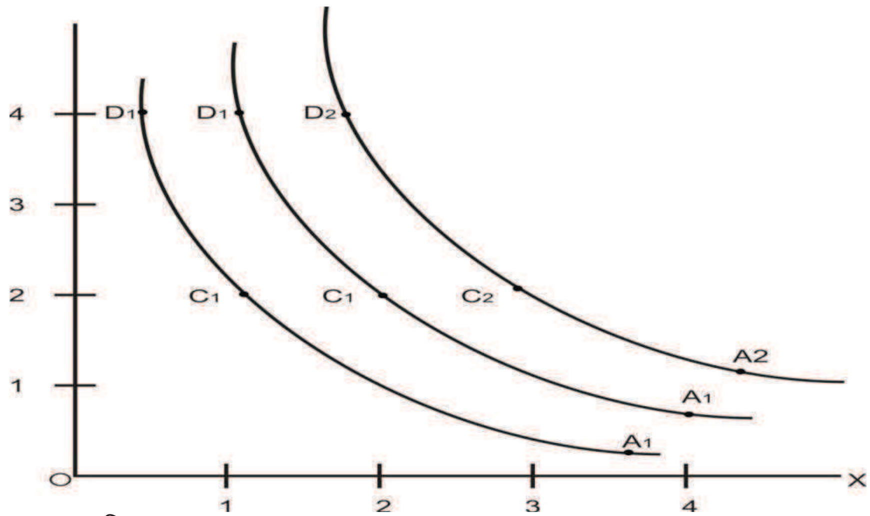
यदि फलन का स्वरूप $x, y = a$ है तब इसका रेखाचित्र खीचंने पर हमें समगेणीय अतिपरवलय प्राप्त होता है हम जानते हैं कि समकोणीय अथवा आयतीय अतिपरवलय का केन्द्र कहते हैं। यदि मूल बिन्द की अतिपरवलय का केन्द्र है तो OX, OY ही उपगमी रेखांश है और इससे दूरी का गुणा $x, y = a$ होगा जैसा चित्र 2 में प्रदर्शित किया गया है। इस तरह $x = \frac{a}{y}$ या $y = \frac{a}{x}$ होग। जैसे जैसे x बढ़ता है, y घटता है और विलोमशः न कभी x शून्य होता है और न कभी y ही वक्र उपगमी रेखाओं को कभी स्पर्श नहीं करता।

यदि फलन $xy - a$ में $a = 1$ हो तो फलन $xy = 1$ अथवा $y = \frac{1}{x}$ का रेखाचित्र खींचने के लिये x के विभिन्न मूल्यों के लिऐ y का संगत मूल्य प्राप्त करते हैं। फलन $x\ y = 1$ के लिये



चित्र 2

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4
निर्देशांक	(1,1)	$(2, \frac{1}{2})$	$(4, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(\frac{1}{4}, 4)$



चित्र 3

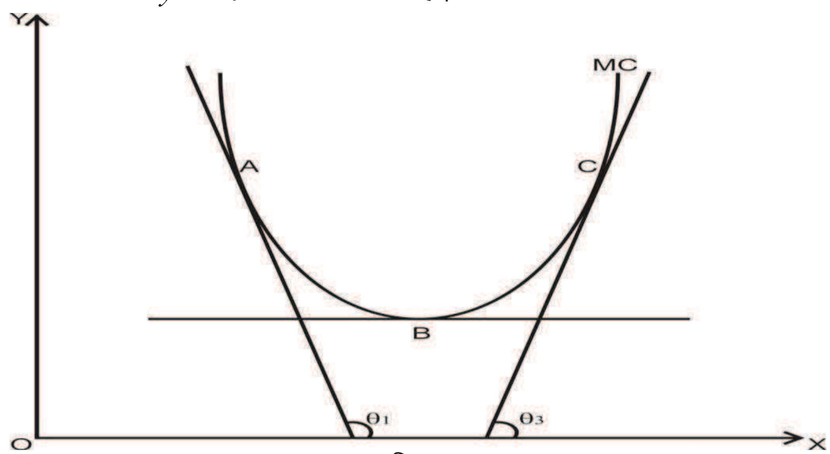
इस तरह हमें x तथा y चरों के जोड़ों के रूप में (1,1) (2, $\frac{1}{2}$) (4, $\frac{1}{4}$) ($\frac{1}{2}$,2) तथा ($\frac{1}{4}$,4) अलग अलग बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर प्राप्त चित्र (3) का स्वरूप आयातीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbole) होगा।

इसी तरह $a=2 \,\&\, a=4$ मान लेने पर क्रमशः आयातीय अतिपरवलय वक्र $A_1B_1C_1\,D_1$ तथा $A_2B_2C_2D_2$ प्राप्त होते हैं।

12.8 द्विघात समीकरण एवं फलन का अर्थशास्त्र में महत्व

अर्थशास्त्र के अध्ययन एवं विश्लेषण में परवलय तथा समकोणीय (अथवा आयतीय) अति परवलय वक्रों के वाल के अध्ययन उपयोगी एवं महत्वपूर्ण होता है, क्योंकि इससे इस तथ्य की जानकारी प्राप्त होती है कि एक आर्थिक चर में परिवर्तन होने पर दूसरे आर्थिक चार पर क्या प्रभाव पड़ता तथा उसके परिवर्तन की दशा क्या होगी ?
हम जानते हैं कि एक वक्र के किसी बिन्दु पर उसकी ढाल ज्ञात करने के लिये उस बिन्दु पर एक स्पर्श रेखा खींचते हैं और फिर देखते हैं कि यह स्पर्श रेखा x अक्ष से बनाया गया कोण ही उस बिन्दु के ढाल के रूप में जाना जाता है।
सीमान्त लागत वक्र जिसका स्वरूप परवलय की तरफ होता है, के अलग–अलग बिन्दुओं पर इसकी ढाल ज्ञात कर इसकी विशेषताओं को स्पष्ट किया जा सकता है। MC वक्र का ऋणात्मक ढाल इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि उत्पादन बढ़ने के साथ–साथ सीमान्त लागत घटती है, परन्तु बढ़ते हुये ढाल के अनुरूप कम होती जाती है और डाक न्यूनतम बिन्दु के दांई ओर बढ़ने पर वक्र का ढाल धनात्मक हो जाता है जो यह संकेत

करता है कि कुल उत्पादन के बढ़ने के साथ–साथ सीमान्त लागत भी बढ़ती है परन्तु एक बिन्दु (चित्र में बिन्दु C) के बाद कुल उत्पादन के बढ़ने के साथ साथ समस्त लागत के बढ़ने की दर बढ़ती जाती है।
इस स्थिति को चित्र y में देखा जा सकता है।



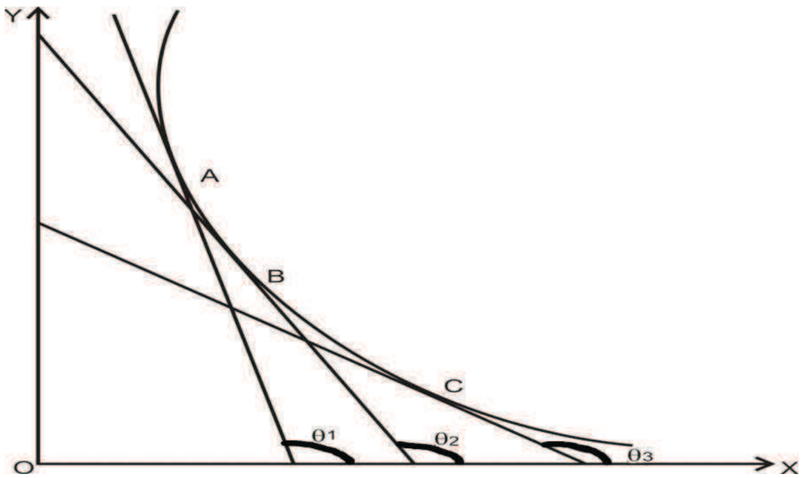
चित्र 4

चित्र 4 में A बिन्दु पर MC वक्र का ढाल $\theta_1 > 90^o$ अत $\tan\ \theta_1$ का मान ऋणात्मक B, बिन्दु पर $\theta_2 = 0$ (क्योंकि स्पर्श रेखा X अक्ष के समान्तर है) तथा C बिन्दु पर $\theta_3 < 90^o$ अतः $\tan\theta_3$ का मान धनात्मक होग। इस तरह बिन्दु A पर MC वक्र का ढाल धनात्मक, B बिन्दु पर शून्य तथा C बिन्दु पर. ऋणात्मक होगा।

लागत सिद्धान्त में प्रयुक्त औसत तथा सीमान्त लागत फलन द्विघातीय फलनों को प्रदर्शित करते हैं। आयतीय अतिपरवलय वक्र द्वारा अनधिमान वक्रों की इस विशेष को समझा जा सकता है। कि जैसे जैसे उपभोक्ता अनधिमान वक्र पर बांये से दाएं तरफ बढ़ेग , X वस्तुओं की उत्तरोक्तर इकाइयों को प्राप्त करने के लिये उसे y वस्तु की घटती हुयी मात्राओं का त्याग करना होगा।

चित्र 5 अनधिमान वक्र IC, A, B तथा C तीन बिन्दुओं से होकर गुजरता है। इन बिन्दुओं से होकर गुजरता है। इस बिन्दुओं से होकर खींची ग्यी स्पर्श रेखाएं अक्ष से क्रमशः θ_1 , θ_2 तथा θ_3 कोण निर्मित करती है। इन बिन्दुओं का ढाल क्रमशः $\tan\theta_1, \tan\theta_2$ तथा $\tan\theta_3$ होगा। चूंकि तीनों कोण θ_1 , θ_2 तथा θ_3 90^o से अधिक है अतः इनके tangent का मान ऋणात्मक होगा। इस तरह वक्र के प्रत्येक बिन्दु का ढाल ऋणात्मक है।

समकोणीय या आयातीय अतिपरवलय वक्र औसत स्थिर लागत वक्रों के लक्षणों को भी स्पष्ट करता है।



चित्र 5

उदाहरण– एक मशीन निर्माता ऑसतन 4 मशीनों को रू0 18000/– प्रति मशीन की दर से प्रतिदिन बेचता है। अपने उत्पादन को ऑसतन $4\frac{1}{2}$ मशीन प्रतिदिन बढ़ाने के लिये उसे कीमत को रू0 17000 प्रति मशीन की दर से घटाने पड़ता है जिससे कि वो अपना समस्त उत्पादन विक्रय कर सके। उसके लाभ फलन को ज्ञात कीजिये–

हल– उपरोक्त समस्या अवास्तविक मान्यताओं जैसे पारम्परिक लागत लेखांकन की कीमत स्थिर रहती है अतः आगम फलन रेखीय है को दूर करता है।
प्रतिदिन बेची गयी मशीनों को मानते हुये उसे कीमत का रेखीय फलन रखा जा सकता है।

$$x = ap + b$$

$a \,\&\, b$ ज्ञात करने पर उनके मानों को सूत्र $\Rightarrow x = 22 - p$

आगय R = कीमत X बेची गयी मशीनों की संख्या

$$R = P \text{ X } X$$

$$R = PX$$

Break even बिन्दु को ज्ञात करने के लिये p को x के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

तब R x का द्विघात फलन बन जाता है।

$P = 22 - x$ (उपरोक्त सूत्र $x = 22 - p$ दिये होने पर)

$R = px$ में p के मान f को प्रतिस्थापित करने पर

$$R = px = (22 - x)x = 22x - x^2$$

रेखीय लागत फलन (τ) को 32+7X मान लेने पर जो पहले ज्ञात कर लिया गया कुल लाभ G X, का द्विघात फलन बन जाता है।

$$G = R - T$$

$$= ((22x - x)^2 - (32 + 7x) = -x^2 + 15x - 32$$

यह निर्माता का लाभ फलन है।

12.9 सारांश

जिस समीकरण में चर राशि का महत्तम मान 2 हो, उसे द्विघात समीकरण कहते हैं। दो रेखीय बहुपदीय व्यंजकों के गुणनफल से भी द्विघात समीकरण प्राप्त होता है। इसका मानक रूप ax^2+bc+c है।
सभी द्विघात समीकरणों का गुणनखण्ड निकालना संभव नहीं है। द्विघाती फलन को वर्गत्मक फलन भी कहा जाता है।
फलन $y=ax^2$ का रेखा चित्र एक परवलय होता है। यदि फलन का स्वरूप $xy=a$ है। तब इसका रेखाचित्र खींचने पर हमें समकोणीय अतिपरवलय प्राप्त होता है।
अर्थशास्त्र के अध्ययन एवं विश्लेषण में परवलय तथा समकोणीय अथवा आयातीय अतिपरवलय वक्रों के ढाल का अध्ययन उपयोगी एवं महत्वपूर्ण होता है। क्योंकि इससे इस तथ्य की जानकारी मिलती है कि एक आर्थिक चर में परिवर्तन होने पर दूसरे आर्थिक चर पर क्या प्रभाव पड़ता है, तथा उसके परिवर्तन की दिशा क्या होगी।
लागत सिद्धान्त में प्रयुक्त औसत तथा सीमान्त लागत फलन द्विघातीय फलनों को प्रदर्शित करते है। आयातीय अतिपरवलय द्वारा अनधिमान वक्रों की विशेषता को समझा जा सकता है। समकोणीय या आयातीय अतिपरवलय वक्र औसत स्थिर लागत वक्रों के लक्षणों को भी स्पष्ट करता है।

12.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1– $2x^2+11x+5$ का गुणनखण्ड निकाले
2– $b^2-4ac<0$ का गुणखण्ड निकालना संभव है अथवा नहीं ?
3– द्विघात समीकरण को हल करने पर चर के हमेशा .... में प्राप्त होते हैं।
4– कोई भी द्विघात समीकरण किन तीन विधियों द्वारा हल किया जा सकता है।
5– $91x^2+20x+1=0$ के मूल निकाले।
$6x^2-x-35=0$ के मूल निकाले।
6– द्विघाता समीकरणों के विविक्त (Discriminant)ज्ञात करें।
(i) $x^2-4x-3=0$
(ii) $3x^2+4x-3=0$

उत्तर–

1–$(2x+1)(x+5)$, 2–नहीं ,3–2 ,4–गुणनखण्ड विधि, सूत्र विधि, द्रुत विधि

5–$\frac{-1}{3}$, $\frac{-1}{7}$ 6–$\frac{5}{2}$, $\frac{-7}{3}$

12.11 संदर्भ सहित ग्रन्थ

- शुक्ला एवं सहाय (2004) ''परिमाणात्मक पद्धतियां'' साहित्य भवन पब्लिकेशन्स आगरा।

- एम0टायरा एवं के0 कुन्दन (2011)– ''क्विकर मैथ्स'' बी0एस0सी0 पब्लिशिंग कं0 प्रा0लि0 दिल्ली।
- Punjab Technical University (2006): Quantitative Techniques MBA (104)
- K. C. Sinha (1999) : A TeXt book of Algebra, Students' Friends Publisher, Patna
- R. D. Sharma (2007) : Objective Mathematics, Dhanpati Rai Publication, New Delhi
- M. L. Uprety & Dr. S. Sharma (2011-12) : Intermediate Algebra, Ravi Offset Printers & Publisher, Agra

12.12उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

- P.N. Mishra: QuantitativeTechnique for Managers , eXel Books
- E.R. Jufee: "The usual display of Quantitative Information, Graphic Press
- D.R.D.J. Jweezy and T.A. Williane Anderson Quantitative Methods for business, 5th edition, west Publishing Company.

12.13 निबन्धात्मक प्रश्न

1– द्विघात समीकरणों का स्पष्ट व्याख्या कीजिये।
2– द्विघात समीकरण की मान्यता लिखिये।
3– द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों को विस्तार से समझाइये।
4– सिद्ध करो कि समीकरण $X^2 + X + 1 = 0$ के मूलों के व्युत्क्रमों से बना समीकरण यही रहता है।

इकाई 13 – आंकड़ों के संकलन की विधियां, आँकड़ों का सम्पादन एवं वर्गीकरण

इकाई की रूपरेखा

13.0 प्रस्तावना

आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी को अन्यन्त ही महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त है। आर्थिक समस्याओं के अध्ययन तथा उसके सम्बन्ध मे नीति निर्धारण आर्थिक नियमों के प्रतिपादन तथा उनके परीक्षण की दिशा में सांख्यिकीय अध्ययन का उपयोगी योगदान है। अतः इस इकाई में आप आँकड़ों के संकलन की विधियां, उनका वर्गीकरण एवं आँकड़ों के सम्पान के विषय में महत्वपूर्ण जानकारी प्राप्त करेगें।

सांख्यिकीय विश्लेषण का कार्यक्षेत्र मुख्य रूप से मात्रात्मक आँकड़ों (quantitative data) तथा उनमें पायी जाने वाली विविधताओं से सम्बन्धित है। मात्रात्मक आँकड़ों से हमारा अभिप्राय ऐसे आँकड़ों तथा संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सके। आँकड़ों के आधार पर ही माल्थस ने जनसंख्या के महत्वपूर्ण सिद्धान्त का प्रतिपादन किया है। अतः यह इकाई आप सभी के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

13.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप

1. समंकों की परिभाषा एवं उनका उद्देश्य ज्ञात करेगें।
2. समंकों के विभिन्न प्रकारों की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।
3. समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीकरण का अर्थ जान सकेंगे।
4. समंकों का सम्पादन किस प्रकार किया जाता है इस विषय में पूर्ण जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

आँकड़ों के संकलन का आशय आँकड़ों के एकत्र किये जाने से है। सांख्यिकीय रीतियों या अनुसन्धानों में आंकड़ों का संकलन प्रथम महत्वपूर्ण चरण है। सांख्यिकीय अनुसंधान के विशाल भवन का निर्माण संकलित समंकों की नींव पर होता है, यदि इसमें कोई रोष या त्रुटि रहे तो यह सारे अनुसन्धान को प्रभावित करेग और निष्कर्ष अशुद्ध होगा।

आंकड़ों का संकलन किसी भी प्रकार से क्यों न किया जाये इसमें कमी रह जाना स्वाभाविक है। इसी कमी को दूर करने के लिए जो क्रिया अपनाई जाती है उसे सम्पादन कहते हैं। सम्पादन की प्रक्रिया में समंकों का क्रमबद्ध आयोजन, जाँच तथा संशोधन, शुद्वता का स्तर आदि निश्चित किये जाते हैं। समंकों के संकलन के बाद सम्पादन का कार्य किया

जाता है। संकलित समंकों का देर अत्यवस्थित एवं अर्थहीन होता है जिसे व्यवस्थित एवं अर्थपूर्ण करने के लिए अनुसन्धानकर्ता उसका सम्पादन करता है। बिना सम्पादन की क्रिया के संकलित समंकों का कोई उचित उपयोग सम्भव नहीं हो पाता है। सम्पादन के अभाव में, कितना भी महत्वपूर्ण अनुसंधान क्यों न हो व्यर्थ हो जायेगा।

क्रम, पैटन एवं टेबल के शब्दों में, ''सम्पादन की प्रक्रिया किसी भी प्रकार महत्वहीन व नैत्यिक क्रिया नहीं है, बल्कि इस प्रक्रिया के लिए विशिष्ट योगयता, सतर्कता, सावधानी तथा वैज्ञानिक निष्पक्षता का दृढ़ता से पालन करना आवश्यक होता है।'' यही कारण है कि सांख्यिकीय आंकड़ों के सम्पादन पर अधिक बल दिया जाता है। सम्पादन का कार्य अत्यधिक कठिन कार्य है, इसमें उच्चस्तरीय सम्पादन, तकनीक तथा कुशलता की आवश्यकता होती है। वर्गीकरण तथा सारणीयन की सुविधा के लिए संकेतों का प्रयोग भी इस प्रक्रिया के अन्तर्गत आता है।

13.2 आंकड़ों के संकलन का आशय

सांख्यिकीय अनुसंधान का आयोजन समंकों के संकलन की प्रक्रिया की प्राथमिकता की आवश्यकता है। अनुसंधान सम्बन्धी प्रारम्भिक व्यवस्था के बाद उसकी चर्चा हमने ऊपर की है, समंकों के संकलन का कार्य आरम्भ किया जाता है। अनुसंधान से सम्बन्धित इकाइयों से अनुसंधान के उद्देश्य की दृष्टि से जानकारी प्राप्त करना ही 'समंक संकलन' कहलाता है।

संग्रहण के विचार से समंकों के प्रकार

संग्रहण के विचार से समंक दो प्रकार के होते हैं:

(क) प्राथमिक समंक (Primary Data) एवं

(ख) द्वितीयक समंक (Secondary Data) ।

(क) प्राथमिक समंक (Primary Data) –ये वे समंक हैं जिन्हें अनुसन्धान करने वाला अपने प्रयोग में लाने के लिए पहली बार इकट्ठे करता है। प्रथम बार संकलित होने के कारणइन्हें प्राथमिक समंक कहा जाता है। **होरेस सेकाइस्ट** के कथनानुसार , ''प्राथमिक आंकड़ों से यह आशय है कि वे मौलिक हैं अर्थात् जिनका समूहीकरण बहुत ही कम या नहीं हुआ है, घटनाओं का अंकन या ग्णन उसी प्रकार किया ग्या है जैसा पाया ग्या है।

मुख्य रूप से वे कच्चे पदार्थ होते हैं।'' जैसे, यदि कोई व्यक्ति ग्रमीण ऋण के विषय में प्रथम बार नये सिरे से आंकड़े एकत्र करता है तो संकलित साम्ग्री उसके लिए प्राथमिक कहलायेगी।

(ख) द्वितीयक समंक (Secondary Data)– ये वे समंक हैं जिनका संकलन पहले से किसी अन्य व्यक्ति या संस्था द्वारा किया जा चुका है और अनुसन्धानकर्ता उनको ही अपने प्रयोग में लाता है। यहां वह संग्रहण नहीं करता वरन् किसी अन्य उद्देश्य के लिए संकलित सामग्री को ही प्रयोग में लाता है। उदाहरण के लिए, यदि कोई व्यक्ति सरकार द्वारा प्रकाशित विदेशी आयात–निर्यात के समंकों का प्रयोग भुगतान–सन्तुलन ज्ञात करने के लिए करता है तो यहां आयात–निर्यात के समंक उसके लिए द्वितीयक समंक होंगे। इस प्रकार की साम्ग्री अपने मौलिक रूप में नहीं होती है, वरन् सारणी, प्रतिशत, आदि में व्यक्त होती है। **ब्लेयर** के शब्दों में, ''द्वितीयक समंक वे हैं जो पहले से अस्तित्व में हैं और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर में नहीं बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्रित किये ग्ये हैं''

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की रीतियां

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की प्रमुख रीतियां (चाहे संगणना अनुसंधान हो या निदर्शन अनुसंधान हो) निम्नलिखित हैं:

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान
2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान
3. स्थानीय स्रोतों या सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति
4. सूचना देने वालों (अर्थात् सूचकों) द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करना
5. प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों का भरना

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिग्त अनुसन्धान

इस रीति में अनुसन्धानकर्ता सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्ध स्थापित करके समंक एकत्र करता है। यह रीति बहुत सरल है। इसमें अनुसन्धानकर्ता स्वयं उन लोगें के सम्पर्क में आता है जिनके विषय में आंकड़े एकत्र करना चाहता है। यदि अनुसन्धनकर्ता

व्यवहारकुशल, धैर्यवान व मेहनती है तो इस रीति द्वारा संकलित आंकड़े बहुत विश्वसनीय होते हैं।

उपयुक्तता यह प्रणाली निम्नलिखित परिस्थितियों में उपयुक्त हैः

(1) जहां शुद्धता पर अधिक जोर देना हो। (2) जहां अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित तथा स्थानीय प्रकृति का हो। (3) जहां अनुसन्धान की जटिलता के कारण यह आवश्यक समझा जाता हो कि अनुसन्धानकर्ता स्वयं उपस्थित रहे। (4) जहां आंकड़ों की मौलिकता पर जोर देना हो।

गुण (1) उच्च स्तर की शुद्धता–अनुसन्धानकर्ता के स्वयं उपस्थित रहने के कारण परिणाम में उच्च स्तर की शुद्धता मिलती है।

(2) मौलिकता–समंकों में मौलिकता रहती है।

(3) लोचदार–यह प्रणाली लोचदार है क्योंकि अनुसन्धानकर्ता आवश्यकतानुसार प्रश्नों में हेर–फेर कर सकता है।

(4) सजातीयता व तुलनीयता–अनुसन्धानकर्ता द्वारा आंकड़े स्वयं एकत्र किये जाते हैं, अतः उनमें सजातीयता के साथ–साथ तुलनीयता का भी गुण पाया जाता है।

(5) शुद्धता की जांच का अवसर–अनुसन्धानकर्ता अपने निरीक्षण में ही सूचना देने वाले की सत्यता की जांच कर सकता है।

दोष (1) विस्तृत क्षेत्रों के लिए अनुपयुक्त–विस्तृत क्षेत्रों के अध्ययन के लिए यह रीति उपयुक्त नहीं है, क्योंकि अनुसन्धानकर्ता स्वयं बड़े क्षेत्र में कार्य नहीं कर सकता।

(2) व्यक्तिगत पक्षपात–इस रीति में अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिग्त पक्षपात के आ जाने की पूरी सम्भावना रहती है और इस प्रकार निष्कर्ष के अशुद्ध हो जाने का डर रहता है।

(3) समग्र की विषेषताओं का प्रकट न होना–अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित होने के कारण सम्भव है कि प्राप्त परिणाम निर्धारित क्षेत्र की विशेषता को पूरी तरह से प्रकट न कर सकें और निष्कर्ष भ्रामक निकल आयें।

(4) समय एवं धन का अधिक व्यय–इस रीति के अन्तर्गत समय अधिक लग्ता है तथा धन भी अधिक खर्च होता है। अनुसन्धान के परिणाम भी विलम्ब से प्राप्त होते हैं।

सावधानियां

(1) अनुसन्धानकर्ता को व्यवहारकुशल, परिश्रमी व धैर्यवान होना चाहिए ताकि यह सूचना देने वालों का विश्वास व सहयोग प्राप्त कर सके। (2) प्रश्न थोड़े, सरल, स्पष्ट और ऐसे होने चाहिए जिससे उत्तर देने वाले को बुरा न लगे। (3) यथासम्भव अनुसन्धानकर्ता को अपनी व्यक्तिग्त भावनाओं और पक्षपात भाव को दूर रखना चाहिए, ताकि उनका प्रभाव अनुसन्धान पर न पड़े।

2. **अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान**

अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत होने पर अनुसन्धानकर्ता के लिए यह सम्भव नहीं हो पाता कि वह प्रत्यक्ष रूप से अनुसन्धान के क्षेत्र की सभी इकाइयों से प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित कर समंक एकत्रित कर सके। ऐसी दशा में वह किसी ऐसे व्यक्ति से सूचनाएं प्राप्त करता है जिसे उस विषय की जानकारी है। इस रीति में अनुसन्धानकर्ता अप्रत्यक्ष एवं मौखिक रूप से सम्बन्धित व्यक्तियों के बारे में अन्य जानकार व्यक्ति से जिन्हें साक्षी कहते हैं, सूचना प्राप्त करता है।

उपयुक्तता

आंकड़ों के संग्रहण की इस रीति का प्रयोग निम्न दशाओं में किया जा सकता है।

(1) यदि अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत हो।

(2) सूचना देने वाले व्यक्तियों से व्यक्तिग्त सम्पर्क करना सम्भव न हो, वे उसमें रुचि न ले रहे हों, वे जान–बूझकर सूचना देना न चाहते हों या सूचना देने में असमर्थ हों, आदि।

(3) जब व्यक्तियों के किसी समस्या के सम्बन्ध में विरोधी विचार हों।

(4) जब समस्या से सम्बन्धित व्यक्तियों से सम्पर्क करना उचित नहीं समझा जाये।

गुण (1) मितव्ययिता–यह रीति मितव्ययी है क्योंकि इस रीति में समय, धन व परिश्रम कम खर्च होता है।

(2) विस्तृत क्षेत्र–यह रीति वहां के लिए उपयुक्त है जहां अनुसन्धान क्षेत्र विस्तृत क्षेत्र हो या सूचक रुचि न ले रहे हों या और कोई ऐसी ही पेचीदा बात हो।

(3) विषेषज्ञों की सम्मति–विशेषज्ञों की सम्मति तथा सुझावों का लाभ अनायास ही इस रीति में प्राप्त हो जाता है।

(4) पक्षपात का कम प्रभाव–अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिग्त पक्षपात का प्रभाव नहीं पड़ता है।

(5) गुप्त सूचना प्राप्त—इस विधि के अन्तर्गत उन सूचनाओं को भी प्राप्त किया जा सकता है जिनको देने के लिए सूचना देने वाला या तो तैयार नहीं होता अथवा सही सूचना नहीं देता।

दोष (1) उच्च मात्रा की शुद्धता नहीं—परिणाम में उच्च मात्रा की शुद्धता की आशा नहीं रहती क्योंकि अनुसन्धानकर्ता प्रत्यक्ष रूप से सूचना देने वालों के सम्पर्क में नहीं आता।

(2) सूचना देने वाले की पक्षपात—भावना—जिन व्यक्तियों की सहायता से आंकड़े एकत्र किये जाते हैं उनकी पक्षपात की भवना का प्रभाव अनुसन्धान पर पड़ता है।

(3) सूचना देने वालों की अरुचि—जिन व्यक्तियों से सूचना एकत्र की जाती है वे प्रश्नों के उत्तर देने में लापरवाही बरतते हैं क्योंकि उनका निजी हित या अहित प्रत्यक्ष रूप में इस प्रश्न में नहीं होता है। इस प्रकार अधिकतर टालू काम करते हैं।

(4) एकरूपता की कमी—विभिन्न साक्षियों द्वारा अलग—अलग व्यक्तियों से सूचना एकत्र किये जाने के कारण कभी—कभी समंकों की एकरूपता समाप्त हो जाती है जिससे सही परिणाम पर पहुंचने में बाधा पहुंचती है।

सावधानियां

(1) जिनकी सहायता से आंकड़े एकत्र किये जा रहे हों उनकी बात पर बिना पुष्टि किये हुए पूर्ण विश्वास नहीं कर लेना चाहिए। (2) यह पूर्ण रूप से निश्चित कर लेना चाहिए कि सूचना देने वालों को तथ्यों का पूर्ण ज्ञान है तथा सूचना देने में वे रुचि रखते हैं। (3) इस बात को ध्यान में रखना आवश्यक है कि जिस व्यक्ति की सहायता से सामग्री एकत्र की जा रही है वह उस विषय के पक्ष व विपक्ष में पक्षपातपूर्ण धारणाएं नहीं रखता है। यदि ऐसा हुआ तो परिणाम भ्रामक होगा।

3. स्थानीय सम्वाददाताओं द्वारा जानकारी प्राप्ति

इस रीति को स्थानीय स्रोतों द्वारा सूचना—प्राप्ति भी कहा जाता है। इस रीति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्ता विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्ति नियुक्त कर देता है जो समय—समय पर अपने अनुभवों के आधार पर अपेक्षित सूचनाएं भेजते रहे हैं। वे व्यक्ति **सम्वाददाता** कहलाते हैं।

सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति के गुण–

(1) **विस्तृत क्षेत्र**–इस रीति द्वारा दूर–दूर तक फैले अनुसन्धान क्षेत्र से सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।

(2) **मितव्ययी**–इस रीति में धन, समय व श्रम की बचत होती है।

(3) **नियमितता**–इस रीति द्वारा सूचनाएं नियमित रूप से प्राप्त की जा सकती हैं।

सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति के दोष

(1) मौलिकता का अभाव–यदि सम्वाददाता अपने अनुमान को ही अधिक महत्व देकर सूचनाएं भेजता है तो उनमें मौलिकता की कमी हो जाती है।

(2) एकरूपता का अभाव–विभिन्न सम्वाददाताओं द्वारा विभिन्न स्थानों तथा विभिन्न विधियों द्वारा सूचना एकत्र किये जाने के कारण आंकड़ों में एकरूपता का अभाव रहता है।

(3) पक्षपात–सम्वाददाताओं के पक्षपात व पूर्व–धारणाओं के कारण निष्कर्ष अभिनत हो सकते हैं।

(4) सूचना–प्राप्ति में विलम्ब–कभी–कभी सम्वाददाता सूचना भेजने में इतनी देरी कर देते हैं कि उस सूचना का महत्व ही समाप्त हो जाता है।

सावधानियां

(1) निष्पक्ष, कुशल एवं अनुभवी तथा व्यक्तिगत धारणाओं की भावना से दूर रहने वाले व्यक्तियों को सम्वाददाता नियुक्त किया जाना चाहिए।

(2) सम्वाददाता को अनुसन्धान के विषय में परिचित होना चाहिए।

(3) क्षतिपूरक त्रुटियों के सिद्धान्त पर अशुद्धियां समाप्त करने के लिए यथासम्भव कई सम्वाददाता होने चाहिए।

(4) सम्वाददाता ज्यादा आशावादी या निराशावादी नहीं होना चाहिए।

4. सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करना

इस रीति के अन्तर्गत अनुसनधानकर्ता समंक एकत्र करने के लिए प्रश्नावली (प्रश्नों की एक सूची जो सूचकों द्वारा स्वयं भरी जाती है) तैयार करता है और उन व्यक्तियों को भरने के लिए दे देता है जिनसे उसे सूचनाएं प्राप्त करनी है यदि सूचकों के पास प्रश्नावली को डाक द्वारा भेजा जाता है तो इस रीति को **डाक प्रश्नावली रीति** कहा जाता है।

सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करने की रीति के गुण

(1) **विस्तृत क्षेत्र**–यह रीति विस्तृत क्षेत्र के लिए प्रयोग की जा सकती है। अनुसन्धान का क्षेत्र जितना बड़ा होग प्रश्नावली भरने की त्रुटियों की सम्भावना उतनी ही कम होगी।

(2) **मितव्ययिता**–यह एक मितव्ययी रीति है क्योंकि इसमें परिश्रम, समय व धन कम खर्च होता है।

(3) **मौलिकता एवं विष्वसनीयता**–इस रीति द्वारा प्राप्त समंक मौलिक एवं विश्वसनीय होते हैं क्योंकि प्रश्नावलियां स्वयं सूचकों द्वारा भरी जाती हैं।

सूचकों द्वारा प्रष्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करने की रीति के दोष

(1) **सीमित उपयोग**–इस रीति का उपयोग केवल शिक्षित व्यक्तियों के बीच में ही किया जा सकता है, क्योंकि अशिक्षित व्यक्ति प्रश्नावली को पढ़ की नहीं सकते हैं।

(2) **अपर्याप्त एवं अपूर्ण सूचना**–सूचकों पर किसी प्रकार का प्रतिबन्ध न होने से अधिकतर सूचक प्रश्नावलियों को भरकर वापस नहीं भेजते हैं तथा जो प्रश्नावलियां आती भी हैं वे अपूर्ण होती हैं।

(3) **सूचकों की अरुचि एवं भय**–सूचकों की उदासीनता, अरुचि, आलस्य, भय, शंका, आदि के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर भरे ही नहीं जाते हैं।

(4)**भ्रमात्मक निष्कर्ष**–अधूरी सूचनाएं अभिनति तथा विभ्रमों को जन्म देती है, अतः अनुसन्धान के निष्कर्ष भ्रमात्मक हो सकते हैं।

(5) **विश्वसनीयता की कमी**–कभी–कभी सूचक सही बात न बताकर ग्लत सूचना भर देते हैं, फलस्वरूप समंक विश्वसनीय नहीं हो पाते हैं।

(6) **प्रश्नावली पर निर्भरता**–यदि प्रश्नावली में पूछे ग्ये प्रश्न अस्पष्ट व बहु–अर्थी होंगे तो प्रश्नों के उत्तर अस्पष्ट एवं अबोधगम्य हो सकते हैं।

सावधानियां

(1) सूचकों का सहयोग प्राप्त करना आवश्यक है इसके लिए उन्हें अनुसन्धान के उद्देश्य आदि के बारे में स्पष्ट रूप से बता देना चाहिए। अनुरोध पत्र की भाषा नम्र परन्तु प्रभावशाली होनी चाहिए।

(2) प्रश्नावली सरल एवं स्पष्ट होनी चाहिए। पूछे ग्ये प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए जिससे सूचक की मानसिक, धार्मिक, साम्प्रदायिक, सामाजिक, आदि भावनाओं को ठेस न पहुंचती हो।

(3) प्रश्नावलियों की वापसी का प्रबन्ध ऐसा होना चाहिए जिससे कि वे शीघ्र प्राप्त हो सकें।

(4) सूचकों के उत्तरों की प्रति–जांच कराने की व्यवस्था भी होनी चाहिए।

5. प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों का भरना

इस रीति के अन्तर्गत प्रग्णकों को अनुसूचियां (प्रश्नों की एक सूची जिसे प्रग्णक स्वयं भरता है) देकर भिन्न–भिन्न क्षेत्रों में भेजा जाता है वहां वह सूचकों से सम्पर्क करके उनके उत्तर अनुसूची में लिखते हैं।

प्रगणकों द्वारा अनुसूचियां भरने की रीति के गुण

(1)**विस्तृत क्षेत्र**–इस रीति के द्वारा एक व्यापक क्षेत्र से सूचना प्राप्त की जा सकती है।

(2)**शुद्धता**–प्रगणक प्रशिक्षित, चतुर, परिश्रमी व व्यवहार–कुशल होता है, अतः उसके द्वारा अनुसूचियों में भरी ग्यी सूचनाओं में शुद्धता की पूर्ण आशा होती है।

(3)**विश्वसनीयता**–सूचकों से प्रग्णकों का व्यक्तिग्त सम्पर्क रहता है। फलस्वरूप प्राप्त सूचनाएं अधिक विश्वसनीय होती है क्योंकि प्रग्णक सूचकों को समझा–बुझाकर जटिल और सन्देहप्रद प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर सकता है तथा पूरक प्रश्न पूछकर उनके उत्तरों की प्रति–जांच भी कर सकता है।

(4)**निष्पक्षता**–प्रगणक प्रायः दोनों प्रकार की मनोवृत्तियों (अर्थात पक्ष व विपक्ष) के होते हैं अतः इस रीति में पक्षपात की सम्भावना कम रहती है।

(5)**अशिक्षित सूचकों में भी उपयोगी**–सूचकों के अशिक्षित होने की स्थिति में भी इस रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

प्रग्णकों द्वारा अनुसूचियां भरने की रीति के दोष

(1)**अधिक खर्च**–इस रीति में प्रग्णकों के वेतन व प्रशिक्षिण पर भी खर्च करना पड़ता है। इस रीति में समय भी अधिक लग्ता है।

(2)**जटिलता**–यह अनुसन्धान की एक जटिल रीति है क्योंकि प्रगणकों का चयन, उनके प्रशिक्षण की व्यवस्था, उनके कार्यों का निरीक्षण, आदि कठिन कार्य हैं। अनुसूचियों का बनाना भी सरल कार्य नहीं है।

(3)**पक्षपात की सम्भावना**–यदि प्रग्णकों में पक्षपात की सम्भावना हुई तो उसका प्रभाव निष्कर्ष को अविश्वसनीय बना देता है।

(4)**आंकड़ों में भिन्नता**–प्रग्णकों की चतुराई, कुशलता, आदि में भिन्नता होने के कारण प्राप्त आंकड़ों में भी भिन्नता हो सकती है।

सावधानियां–

(1)**अनुसूचियां बनाना**–अनुसूचियों में प्रश्न सरल, कम व स्पष्ट होने चाहिए। प्रश्नों को एक सुव्यवस्थित क्रम में रखा जाना चाहिए। प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए जिससे सूचक की मानसिक, धार्मिक, साम्प्रदायिक, सामाजिक, आदि भावनाओं को ठेस न पहुंचती हो। एक अनुसूची को भरकर प्रग्णक को नमूने के रूप में दे दिया जाना चाहिए।

(2)**प्रगणक**–अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत होने के कारण अनुसन्धानकर्ता कुछ व्यक्तियों की सहायता लेता है जो अनुसन्धान के क्षेत्र में सूचकों (जिनसे सूचनाएं प्राप्त करनी हैं) से व्यक्तिग्त सम्पर्क स्थापित करके आंकड़ों का संग्रहण करते हैं।

द्वितीयक समंकों के प्रमुख स्रोत

द्वितीयक समंकों के प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं:

(अ) प्रकाशित स्रोत

(ब) अप्रकाशित स्रोत

(अ)प्रकाशित स्रोत –विभिन्न विषयों पर सरकारी व गैर–सरकारी संस्थाएं तथा अन्य अनुसन्धानकर्ता महत्वपूर्ण समंक एकत्र करके उन्हें समय–समय पर प्रकाशित करते रहते हैं। प्रकाशित समंकों के प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं –

1. **सरकारी प्रकाशन** – प्रत्येक देश की सरकारें सम्बन्धित समंक एकत्रित और प्रकाशित करवाती रहती हैं। ये समंक बहुत विश्वसनीय और महत्वपूर्ण होते हैं। आजकल भारत में लगभग सभी मन्त्रालयों द्वारा अनेक प्रकार की सूचनाएं व समंक प्रकाशित कराये जाते हैं। प्रमुख सरकारी प्रकाशन हैं :

(1) भारतीय रिजर्व बैंक बुलेटिन–नासिक

(2) स्टैटिस्टिकल एब्ट्रैक्ट ऑफ इण्डिया –वार्षिक

(3) आर्थिक सर्वेक्षण –वार्षिक

2. **अर्ध–सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन** –नगरपालिकाएं, नगर निगम, जिला बोर्ड, आदि विभिन्न प्रकार के आंकड़े संकलित कराकर प्रकाशित करवाते हैंः जैसे–जन्म–मरण, स्वास्थ्य, शिक्षा से सम्बन्धित आंकड़े।
3. **अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन** – अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाएं जैसे, संयुक्त राष्ट्र संघ अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संघ ;अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष ;प्एडएथ्एद्ध, आदि समय–समय पर आंकड़ों का संकलन तथा प्रकाशन करती हैं।
4. **आयोग व समितियों की रिपोर्टें** –सरकार या किसी अन्य संस्था द्वारा आयोग या समितियां नियुक्त की जाती रहती हैं। देश की विभिन्न समस्याओं के अध्ययन के लिए ये आयोग या समितियां सम्बन्धित आंकड़े संकलित करके अपना प्रतिवेदन प्रस्तुत करती हैं, जैसे,

   (1) वित्त आयोग के प्रतिवेदन

   (2) वेतन आयोग के प्रतिवेदन

   (3) योजना आयोग के प्रतिवेदन ।
5. **व्यापारिक व वित्तीय संस्थाओं के प्रकाशन** –व्यापार परिषदें जैसे–भारतीय उद्योग व वाणिज्य संघ, जूट मिल्स एसोसिएशन, आदि सस्थाएं, हिन्दुस्तान लिवर लि., बिड़ला ग्रुप, टाटा एण्ड सन्स लि़, स्कन्ध विपणियां उपज विपणियां भी अनेक प्रकार के समंक एकत्र करके प्रकाशित करवाती हैं।
6. **विश्वविद्यालय एवं शोध संस्थाओं के प्रकाशन** –विश्वविद्यालय, रिसर्च व्यूरो व शोध संस्थाओं द्वारा अनेक प्रकार के आंकड़े एकत्र किये जाते हैं और प्रकाशित किये जाते हैं,।
7. **समाचार–पत्र एवं पत्रिकाएं** –बहुत से पत्र एवं पत्रिकाएं अनेक प्रकार के आंकड़े एकत्र करके प्रकाशित करती हैं। जैसेः

   (1) इकॉनॉमिक टाइम्स –दैनिक

   (2) दी फाइनैन्शियल एक्सप्रेस –दैनिक

द्वितीयक समंकों के प्रयोग में सावधानियां

द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय बहुत सावधानी रखने की आवश्यकता है, क्योंकि द्वितीयक समंक अनेक त्रुटियों से पूर्ण हो सकते हैं। त्रुटियों के अनेक कारण हो सकते हैं,

जैसे, सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा में परिवर्तन, सूचना की अपूर्णता, पक्षपात, क्षेत्र व उद्देश्य की भिन्नता, आदि। अतः यह आवश्यक है कि द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय उनकी आलोचनात्मक जांच तथा विश्वसनीयता की परख कर लेनी चाहिए। **बॉउले** के अनुसार –

''प्रकाशित समंकों को बिना उनका अर्थ व सीमाएं जाने जैसा का तैसा स्वीकार कर लेना खतरे से खाली नहीं और यह सर्वथा आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचना कर ली जाये जो उन पर आधारित किये जा सकते हैं''।

इसीलिए द्वितीयक सामग्री का प्रयोग करने से पूर्व उनकी विश्वसनीयता, उपयुक्तता तथा पर्याप्तता की जांच करने के लिए निम्न बातों की ओर ध्यान देना आवश्यक है:

(1) पिछले अनुसन्धानकर्ता की योगयता–जिस अनुसन्धानकर्ता द्वारा समंक एकत्र किये ग्ये थे उसकी योगयता, कार्यक्षमता, साधन व ईमानदारी पर विचार करना होग। यदि अनुसन्धानकर्ता योग्य व ईमानदार तथा पक्षपातरहित है तो समंक विश्वसनीय हो सकते हैं।

(2) जांच का अभिप्राय–प्राथमिक जांच का अभिप्राय (उद्देश्य एवं क्षेत्र) क्या था? यदि प्राथमिक जांच का प्रयोजन और बाद का प्रयोजन समान या मिलता–जुलता है तब आप भी उन समंकों का प्रयोग कर सकते हैं, अन्यथा नहीं।

(3) अनुसन्धान का प्रकार एवं संग्रहण करने की रीति–आंकड़ों को एकत्र करने की संग्णना तथा निदर्शन रीतियां प्रयोग में लायी जा सकती हैं।

समंकों का वर्गीकरण तथा सारणीकरण

संकलित समंकों जिन्हें उनके मूल रूप से कच्चे आंकड़े कहा जाता है को समझने के लिए व्यवस्थित करने की प्रक्रिया को समंकों का व्यवस्थितीकरण कहा जाता है। इसके अंतर्गत मुख्य रूप से दो प्रक्रियाएं आती हैं–

(1) समंकों का वर्गीकरण

(2) समंकों का सारणीकरण

वर्गीकरण

अर्थ एवं परिभाषा

संकलित आंकड़ों को किसी गुण के आधार पर समान व असमान कर अलग–अलग वर्गों में बांटने की प्रक्रिया को वर्गीकरण कहा जाता है। **कॉनर** के शब्दों में, ''वर्गीकरण आंकड़ों को

(वास्तविक रूप से या काल्पनिक रूप से) समानता तथा सदृश्यता के आधार पर वर्गं या विभागों में कमानुसार रखने की किया है और यह व्यक्तिगत आंकड़ों के वर्गीकरण के मुख्य लक्षण

(1)सांख्यिकीय अनुसन्धान के उद्देश्य, क्षेत्र एवं स्वरूप के अनुसार वर्गीकरण के अन्तर्गत संकलित आंकड़ों को विभिन्न वर्गों में बांटा जाता है।

(2)वर्गीकरण किसी गुण या विशेषता या माप के आधार पर होता है।

(3)वर्गीकरण वास्तविक या काल्पनिक हो सकता है।

(4)वर्गीकरण पदों की विभिन्नता के बीच उनकी एकता स्पष्ट करता है।

वर्गीकरण के उद्देश्य या कार्य आंकड़ों को सरल व संक्षिप्त बनाना—वर्गीकरण का मुख्य उद्देश्य आंकड़ों की जटिलता को दूर करके उन्हें सरल तथा संक्षिप्त रूप देना है।

1. **तुलना में सहायता करना**—वर्गीकरण से आंकड़ों का तुलनात्मक अध्ययन सम्भव होता है। जैसे—दो महाविद्यालयों के छात्रों में बौद्धिक स्तर की तुलना प्राप्तांकों को प्रथम, द्वितीय व तृतीय श्रेणी के आधार पर वर्गं में विभाजित करके सरलता से की जा सकती है।
2. **समानता व असमानता में स्पष्टता व निश्चितता लाना**—वर्गीकरण से सांख्यिकीय तथ्यों की समानता स्पष्ट रूप से प्रकट होती है इससे उन्हें समझने में सहायता मिलती है।
3. **तर्कपूर्ण एवं वैज्ञानिक व्यवस्था करना**—वर्गीकरण की सहायता से आंकड़ों की मौलिक विशेषताओं के अनुसार, उनको वैज्ञानिक एवं तर्कपूर्ण ढंग से प्रस्तुत करने की व्यवस्था की जाती है। जैसे—जनसंख्या आंकड़ों को आयु, जाति, धर्म, लिंग, आदि वर्गं में व्यक्त करना एक तर्कपूर्ण किया है।
4. **पारस्परिक सम्बन्ध स्पष्ट करने में सहायक**—आंकड़ों का वर्गीकरण उनके बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध के अध्ययन को सम्भव बनाता है। जैसे—चेचक की बीमारी से आंकड़ों को वर्गीकृत करने से यह ज्ञात किया जा सकता है कि जिन व्यक्तियों को टीका लगया ग्या था, उनकी अपेक्षा जिन व्यक्तियों को टीका नहीं लगया गया था, कम चेचक निकली या नहीं।

5. **एक मानसिक चित्र प्रस्तुत करना**–वर्गीकरण से यह सम्भव हो जाता है कि अनुभव तथा विचाार का एक मानसिक चित्र खींचा जा सके। इससे मस्तिष्क का बोझ कम हो जाता है तथा समंकों के ढेर को संक्षिप्त रूप से समझा व याद रखा जा सकता है तथा उन्हें गणितीय विवेचना के योग्य बना लिया जाता है।
6. **अन्य सांख्यिकीय विधियों का आधार प्रस्तुत करना**–वर्गकरण द्वारा सांख्यिकीय साम्ग्री के सारणीयन तथा विश्लेषण के लिए आधार तैयार किया जाता है। बिना वर्गीकरण के आंकड़ों का सारणीयन असम्भव है और सारणीयन के अभाव में सांख्यिकीय विश्लेषण अव्यावहारिक है।

वर्गीकरण की आवश्यकता/महत्व

संकलित आंकड़े अपने मूलरूप में अव्यवस्थित होते हैं। इन्हें सरल व समझने योगय बनाने के लिए वर्गीकरण की आवश्यकता होती है। वर्गीकरण के अभाव में समंकों का प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं उनकी परस्पर तुलना असम्भव हैं। वर्गीकरण, सारणीयन का आधार है।

वर्गीकरण की सीमा

वर्गीकरण की एक सीमा आंकड़ों के संक्षिप्तीकरण की प्रक्रिया में कुछ विवरणों का समाप्त हो जाना है। संक्षिप्तीकरण जितना अधिक होग उतना ही अधिक विवरणों के छूट जाने की सम्भावना रहेगी। अतः सांख्यिक को आवश्यक विवरण समाप्त होने से बचने के लिए संक्षिप्तीकरण बहुत ही सावधानी से करना चाहिए।

आदर्श वर्गीकरण के आवश्यक तत्व

अनुसन्धान की प्रकृति, उद्देश्य, क्षेत्र, आदि को ध्यान में रखते हुए यह आवश्यक है कि वर्गीकरण में निम्न विशेषताएं हों:

1. **असंदिग्धता तथा स्पष्टता** –विभिन्न वर्गों की परिभाषा अथवा निर्धारण अथवा योजना स्पष्ट, सरल व निश्चित होनी चाहिए जिससे किस इकाई को किस वर्ग में रखा जाना है इस प्रकार की संदिग्धता व अनिश्चित ता की गुंजाइश न रहे।
2. **निःषेषी** –वर्गीकरण के लिए यह आवश्यक है कि प्रत्येक इकाई किसी न किसी वर्ग में सम्मिलित हो।

3. **पारस्परिक पृथक्ता** –विभिन्न वर्गों में पारस्परिक पृथक्ता होनी चाहिए अर्थात् विभिन्न वर्ग परस्पर अपवर्जी होने चाहिए।
4. **स्थिरताः**–वर्गीकरण एक ही सिद्धान्त के आधार पर किया जाये और प्रत्येक स्तर पर उसी आधार को बनाये रखा जाये।
5. **अनुकूलता** –वर्गीकरण अनुसन्धान के अनुरूप होना चाहिए।
6. **लचीलापन** –वर्गीकरण लोचदार होना चाहिए जिससे नवीन परिस्थितियों के अन्तर्गत आवश्यकतानुसार संशोधन किया जा सके।
7. **सजातीयता** –प्रत्येक वर्ग की इकाइयों में सजातीयता होनी चाहिए।
8. **गणितीय शुद्धता** –मापन, योग, आदि शुद्ध एवं सही होने चाहिए।

वर्गीकरण का आधार एवं प्रकार

यद्यपि आंकड़ों के वर्गीकरण के अनेक सम्भव आधार हैं परन्तु अधिकतर जिन आधारों पर आंकड़ों का वर्गीकरण किया जाता है वे इस प्रकार हैंः

1. आकार के आधार पर,
2. स्थान के आधार पर,
3. प्रकार या गुण के आधार पर,
4. समय के आधार पर।

आकार के आधार पर वर्गीकरण को संख्यात्मक वर्गीकरण कहा जाता है।

स्थान के आधार पर वर्गीकरण को भौगेलिक वर्गीकरण कहा जाता है। प्रकार व गुण, आदि के आधार पर वर्गीकरण को वर्णनात्मक वर्गीकरण कहा जाता है।

समय के आधार पर वर्गेकरण को कालानुसार वर्गीकरण कहा जाता है।

वर्गीकरण की रीतियां

किसी पूर्व उद्देश्य के लिए सुव्यवस्थित रूप से सांख्यिकीय विषय–सामग्री जिनमें प्रायः संख्यात्मक तथ्य होते हैं, का संकलन किया जाता है। ये तथ्य जिन्हें संख्याओं में व्यक्त किया जाता है, दो प्रकार के हो सकते हैंः

(1) इकाइयों की किसी गुणात्मक विशेषता (गरीबी, ईमानदारी, जाति, साक्षरता, अन्धापन, बुद्धिमत्ता, आदि) जिसे प्रायः गुण कहा जाता है की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति के आधार पर गणना द्वारा प्राप्त आंकड़े। जैसे, गरीब कितने हैं, बेरोजगार कितने हैं।

(2) इकाइयों की किसी मापन या गणना योग्य विशेषता जिसे प्रायः चर कहा जाता है, के आधार पर गणना या मापन द्वारा प्राप्त आंकड़े। जैसे, आयु, बच्चों की संख्या, वस्तुओं के मूल्य, ऊंचाई, भार, दूरी, आदि।

इन दो प्रकार के तथ्यों के आधार पर वर्गीकरण की दो रीतियां हैः

(क) गुणात्मक वर्गीकरण

(ख) संख्यात्मक वर्गीकरण ।

(क) गुणात्मक वर्गीकरण,

गुणों की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति के आधार पर किया गया वर्गीकरण गुणात्मक वर्गीकरण कहलाता है। गुणात्मक वर्गीकरण दो प्रकार का हो सकता हैः

(1) **द्वन्द्वभाजन वर्गीकरण** –यदि इकाइयों के समूह को एक गुण के आधार पर उसकी उपस्थिति या अनुपस्थिति के अनुसार दो वर्गों में बांटते हैं तो ऐसे गुणात्मक वर्गीकरण को द्वन्द्वभाजन वर्गीकरण या साधारण वर्गीकरण या एक गुण वर्गीकरण कहते हैं।

(2) **बहुगुणी वर्गीकरण** या लगतार द्वन्द्वभाजन वर्गीकरण –यदि एक गुण (मान लो A) के आधार पर वर्गीकरण किया जाता है तो दो वर्ग बनेंगे। फिर प्रत्येक वर्ग को दूसरे गुण (मान लो B) के आधार पर वर्गीकरण किया जाये तो प्रत्येक वर्ग के दो उपवर्ग होंगे। इस प्रकार दो गुणों के आधार पर लगतार द्वन्द्वभाजन द्वारा चार वर्ग बनेंगे। जैसेः वर्ग के दो उपवर्ग होंगे। इस प्रकार दो गुणों के आधार पर लगतार द्वन्द्वभाजन द्वारा चार वर्ग बनेंगे।

सावधानियां –इस प्रकार का वर्गीकरण करना सरल है परन्तु निम्न सावधानियां रखना वांछनीय हैः

(1) **आधार का स्पष्ट होना**–गुण की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति का आधार स्पष्ट रूप से निश्चित होना चाहिए। जैसे, यदि वयस्क और अवयस्क दो वर्गों में बांटना है तो यह निश्चित होना चाहिए कि किस आयु तक अवयस्क माना जायेगा।

(2) **परिवर्तनों को ध्यान रखना**–एकत्रित आंकड़ों में परिवर्तन होता रहता है जैसे–अशिक्षित शिक्षित हो जाते हैं। इसका ध्यान रखना बहुत आवश्यक है।

(ख) चरों के अनुसार वर्गीकरण

चर दो प्रकार के होते हैंः

(1) **खण्डित चर** –वह चर जिसके मान परिमित हों या अपरिमित परन्तु अलग–अलग ग्णनीय हों, खण्डित या असतत् चर कहा जाता है। जैसे–छात्रों की संख्या, प्रति पृष्ठ गलतियों की संख्या, कर्मचारियों का मासिक वेतन, आदि।

(2) **अखण्डित चर** –वह चर जो किसी अन्तराल या अन्तरालों में सैद्धान्तिक रूप से (व्यावहारिक रूप से सम्भव हो या न हो) प्रत्येक मान ले सकता है, सतत् चर या खण्डित चर कहलाता है। जैसे, छात्रों की आयु, कर्मचारियों की कुल आय, व्यक्तियों की ऊंचाई, आदि।

सारणीयन

सारणीयन अथवा आंकड़ों को सारणियों के रूप में प्रदर्शन सांख्यिकीय विश्लेषण का एक अत्यन्त महत्वपूर्ण भाग है। वास्तव में आंकड़ों को व्यवस्थित रूप में प्रदर्शित करने की तीन विधियाँ हैं–

(1) उद्धरण रूप में (2) सारिणी के रूप में (3) ग्राफ अथवा आरेखों के रूप में । प्रस्तुत अध्याय में सारणीयन से सम्बन्धित सामान्य तथ्यों की चर्चा करेगें, तथा उद्धरण रूप में प्रस्तुत आंकड़ों को सारणीयों के द्वारा कैसे प्रदर्शित किया जाता है–इसकी व्याख्या करेगें।

सारिणी हमारा अभिप्राय आंकड़ों की पंक्तियों में कमबद्ध व्यवस्था से है जिससे समंकों की विशेषतायें उभर कर स्पष्ट रूप से सामने आ जायें। सारणीयों के रूप में प्रदर्शित आंकड़े न केवल सांख्यिकीय विश्लेषण के दृष्टिकोण से सुविधाजनक होते हैं, वरन् यह मूल आंकड़ों की जटिलताओं को कम करने में भी सहायक होते हैं। **कॉनर** के अनुसार, ''सारणीयन आंकिक सामग्री को किसी व्यवस्थित एवं कमबद्ध ढंग से प्रदर्शित करने की एक रीति है जिसका उद्देश्य किसी विचाराधीन समस्या पर पर्याप्त प्रकाश डालना है।'' सारणीयन के प्रमुख उद्देश्य निम्नांकित हैं–

(1) सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य विशाल तथा बिखरे समंकों को संक्षिप्त रूप में व्यवस्थित कम से सामने लाना।

(2) अनुसन्धान का उद्देश्य सुलभ रूप में प्रस्तुत करना।

(3) न्यूनतम स्थान में तथ्यों को सामने रखना।

(4) सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग को सुगम बनाना।

सारणीयन करते समय निम्नांकित बातों को ध्यान में रखना चाहिए।

(1) प्रत्येक सारणी के ऊपर स्पष्ट रूप से शीर्षक लिखा होना चाहिए जिससे यह स्पष्ट हो जाय कि सारिणी में दी गयी सूचनायें किस विषय से सम्बन्धित हैं।

(2) सारणी उचित मात्रा में स्तम्भों तथा पंक्तियों में विभाजित होनी चाहिए, जहाँ तक सम्भव हो पंक्तियों की संख्या अधिक रखनी चाहिए।

(3) सारिणी की रचना के पूर्व खानों की संख्या तथा विस्तार आदि को निश्चित कर लेना चाहिए।

(4) प्रत्येक स्तम्भ पर उपशीर्षक तथा उसकी संख्या स्पष्ट रूप से दी जानी चाहिए।

(5) जहाँ तक सम्भव हो सारणीयन की प्रक्रिया सरल, श्रम को बचाने वाली तथा कम खर्चीली हो।

(6) सारणी इस प्रकार से तैयार की जानी चाहिए जिससे प्रस्तुत तथ्यों की जाँच दूसरी ओर से भी की जा सके जिससे अशुद्धियाँ कम हों।

इन सामान्य उद्‌देश्यों को दृष्टिगत रखते हुए एक सांख्यिकीय सारिणी निम्न तत्वों का होना आवश्यक है–

1. सारिणी को सरल, संक्षिप्त, आकर्षक तथा स्वतः स्पष्ट होना चाहिए।
2. सारिणी का शीर्षक सारिणी के ऊपर स्पष्ट रूप से अंकित होना चाहिए, तथा इसमें किसी प्रकार की अस्पष्टता अथवा सन्दिग्धता नहीं होना चाहिए।
3. शीर्षक के नीचे सारिणी में दर्शायी गई राशियों की माप की इकाइयों का उल्लेख करना चाहिए।
4. सारिणी में प्रयुक्त पंक्तियों के शीर्षक जिन्हें कि अनुशीर्षक कहा जाता है, स्पष्ट रूप से दर्शाये जाने चाहिए। इस प्रकार स्तम्भों के शीर्षक जिन्हें कि उपशीर्षक कहा जाता है स्पष्ट रूप से अंकित होने चाहिए।
5. सारिणी के मुख्य भाग में प्रविष्टियों अथवा सम्बन्धित आंकड़ों को पंक्तियों तथा स्तम्भों के शीर्षकों के अनुसार भरा जाना चाहिए। यदि किसी तथ्य से समबिन्धत आंकड़े उपलब्ध नहीं हैं, तो सारिणी में संबंधित स्थान/खानों पर स्पष्ट रूप में अंकित करना चाहिए।

   यदि आंकड़ों के सापेक्षित मानों अथवा प्रतिशतों को भी विश्लेषण में प्रयुक्त किया

जाना है, तो इन्हें मूल आंकड़ों के नीचे कोष्टकों में दर्शाया जाता है।

6. सारिणी में दर्शाये गये वे आंकड़े, जिनकी व्याख्या मुख्य शीर्षक अनुशीर्षक अथवा उपशीर्षक के अन्तर्गत नहीं की जा सकी है, उन्हें स्पष्ट करने के लिये सारिणी के मुख्य–भाग के नीचे व्याख्यात्मक टिप्पणी लिखी जानी चाहिए।
7. सारिणी के नीचे आंकड़ों के स्रोत अथवा सन्दर्भ ग्रन्थों के विषय में जानकारी अंकित होनी चाहिए।

14.0 संग्रहीत समंकों का सम्पादन

समंकों का संकलन किसी भी प्रकार से क्यों न किया जाए उनमें कमी रह जना स्वाभाविक है। इसी कमी को दूर करने के लिये जो क्रिया अपनाई जाती है। उसे सम्पादन कहते हैं। सम्पादन की प्रक्रिया में समंकों को क्रमबद्ध आयोजन, जांच तथा संशोधन, शुद्धता का स्तर आदि निश्चित किये जाते हैं। संक्षेप में समंकों के सम्पादन का आशय संकलित समंकतों की शुद्धता की जांच करना, त्रुटियों को दूर करना, अधूरी सूचनाओं को पुनः संकलित करने का उनको अनुमानित करने का निर्णय लेना, आदि से है। समंकों के सम्पादन में शुद्धता स्तर, उपसादन या सन्निकटीकरण और सांख्यिकीय विभ्रमों के विश्लेषण का समावेश होता है।

क्रम, पैटर्न एवं टेबट के शब्दो में, ''सम्पादन की प्रक्रिया किसी भी प्रकार महत्वहीन व नैत्यिक क्रिया नहीं है बल्कि इस प्रक्रिया के लिये विशिष्ट योग्यता, सतर्कता, सावधानी तथा वैज्ञानिक निष्पक्षता का दृढ़ता से पालन करना आवश्यक होता है।'' यही कारण है कि सांख्यिकीय आंकड़ों के सम्पादन पर अधिक बल दिया जाता है। वर्गीकरण तथा सारणीयन की सुविधा के लिये संकेतों का प्रयोग भी इस प्रक्रिया के अंतर्गत आता है। यथायोग्य सम्पादन यह भी पता कर सकता है कि समंकों के संकलन में कोई पक्षपात तो नहीं किया या है अथवा प्रग्णकों द्वारा सूचना संकलन मं लापरवाही तो नहीं बरती गयी है।।

यह कथन बिल्कुल सही है कि सम्पादन का कार्य अत्यधिक कठिन कार्य है इसमें उच्चस्तरीय सम्पादन तकनीक तथा कुशलता की आवश्यकता होती है। यद्यपि इस कार्य में समय बहुत लगता है फिर भी यह अनिवार्य है क्योंकि इसके अभाव में अनुसंधान का कार्य केवल एक औपचारिकता रह जाती है।

प्राथमिक समंकों का सम्पादन – मौलिक (प्राथमिक) समंकों का संकलन अनुसूचियों अथवा प्रश्नावलियों के आधार पर किया जाता है।

सम्पादन की प्रक्रिया –

1–संगति के लिए सम्पादन – प्रश्नावलियां तथा अनुसूचियां तैयार करते समय बहुत से ऐसे प्रश्न बनाये जाते हैं। जिनके उत्तरों के परस्पर मिलान करने पर यह पता चल जाता है कि प्राप्त परिणामों में असंगति तो नहीं है।

2– एकरूपता के लिए सम्पादन – प्रश्नावली/अनुसूचियों में दिये ग्ये प्रश्नों के उत्तरों में एकरूपता अनिवार्य है। अतः यदि प्रश्नों के उत्तरों में एकरूपता का अभाव दृष्टिगेचर हो तो सम्पादन का एक महत्वपूर्ण कार्य प्राप्त उत्तरों में एकरूपता लाना भी है इससे कि विश्लेषण सम्भव हो सके।

3–पूर्णता के लिए सम्पादन – सम्पादक को यह भी देखना होता है कि प्रश्नावली में सम्मिलित सभी प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर लिये ग्ये हैं या नहीं,. यदि कुछ प्रश्नों के उत्तर प्राप्त नहीं हुए हों तो उनको सूचना देने वालों से सम्पर्क स्थापित करके प्राप्त कर लेना चाहिए।

4–शुद्धता के लिए सम्पादन – संग्रहीत समंकों की वास्तविकता एवं शुद्धता का परीक्षण करना सम्पादन का एक कठिन कार्य है। क्योंकि पूर्ण शुद्धता व्यवहार में नहीं पायी जाती अतएव शुद्धता के निर्धाति स्तर के अनुरूप ही सम्पादक को अपना कार्य करना पड़ता है।

द्वितीयक समंको का सम्पादन – द्वितीयक समंको का सुचारू रूप से तथा अत्यधिक सावधानी से सम्पादन करने के लिए सम्पादक को निम्न बातों पर विचार करना आवश्यक है –

1– **द्वितीयक समंको का उद्गम –**द्वितीयक समंकों का सम्पादन करने से पूर्व उनके स्रोत का पता लगना आवश्यक है।

2– **समंक संकलन की विधि –** सम्पादन करने से पूर्व यह जानना भी आवश्यक है कि समंक संकलन की कौन सी विधि का प्रयोग किया ग्या था।

3– **मूल अनुसंधान का उद्देश्य, क्षेत्र एवं सीमाएं –** अत्यधिक सावधानी से सम्पादन करने के लिये् यह देख लेना आवश्यक है कि पूर्व संकलनकर्ता के समंक संकलन का उद्देश्य, क्षेत्र तथ्र सीमाएं क्या थीं।

4— **मौलिक समंक संकलन का समय** — द्वितीयक समंकों का सम्पादन करते समय उनके संकलित किये जाने का समय भी ज्ञात होना चाहिए।
5— **शुद्धता का स्तर** — समंक संकलन में शुद्धता का स्तर क्या निर्धारित किया ग्या था, सम्पादन में इसकी भी महत्वपूर्ण स्थान है।
6— **मापन तथा विश्लेषण की इकाइयां** — सम्पादन कार्य में मापन तथा विशेषण की इकाइयों का ध्यान रखना भी आवश्यक है।
7— **मौलिक अुसन्धानकर्ता की योग्यता एवं ईमानदारी** — द्वितीयक समंकों का सम्पादन करते समय अनुसंधानकर्ता की योग्यता एवं ईमानदारी की जाकारी भी कर लेनी चाहिए।
8— **विभिन्न स्रोतं से प्राप्त समंकों की परस्पर तुलना एवं परीक्षात्मक जांच** — यदि द्वितीयक समंकों को प्राप्त करने के विभिन्न स्रोत रहे हों तो उनकी तुलना करना भी आवश्यक है।

समंक सम्पादन के विशिष्ट पहलू

1— **परिशुद्धता की मात्रा** — सांख्यिकीय समंकों की शुद्धता का आशय शुद्ध मापन से है। **डॉ0 बाउले** के अनुसार — **''पूर्ण रूप से शुद्ध माप भौतिक या आर्थिक अस्तित्व में नहीं है, ठीक उसी प्रकार जैसे पूर्णतया सीधी रेखा या पूर्ण द्रव नहीं है।''**
2— **सन्निकटन या उपसादन** — बड़ी—बड़ी संख्याओं को किसी स्थानीय मान के आधार पर निकटवर्ती पूर्णांक संख्याएं बनाकर उन्हें संक्षिप्त तथा सरल व बनाने की प्रक्रिया, जिससे परिणम में कोई विशेष अन्तर न पड़े को उपसादन कहा जाता है।
3— **सांख्यिकीय विभ्रम** — सांख्यिकीय में 'विभ्रम' शब्द से अभिप्राय 'अशुद्धि' या त्रुटि से नहीं है यहां विभ्रम शब्द एरक विशेष अर्थ में प्रयुक्त होता है। सांख्यिकीय में विभ्रम 'किसी पद के वास्तविक मूल्य और अनुमानित मूल्य के अन्तर को कहते हैं।' **कॉनर** के अनुसार **''सांख्यिकीय अर्थ में विभ्रम अनुमानित मूल्य अथवा वास्तविक मूल्य अथवा आदर्श मूल्य जिसका शुद्धता से निर्धारण करना असम्भव हो, का अन्तर मात्र है।''**

13.5 अभ्यास प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्न

संग्रहण के अनुसार समंक कितने प्रकार के होते हैं —

(A) 3
(B) 4
(C) 2
(C) 10

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1 — प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों का अर्थ एवं अन्तर बताइये ?
प्रश्न 2 — आंकड़ों के वर्गीकरण की आवश्यकता क्यों है ?

13.6 पाठ सारांश

इस प्रकार हम कह सकते हैं सर्वेक्षण का अनुसंधान का आयोजन सांख्यिकीय प्रक्रीय की प्रथम अवस्था है। सांख्यिकीय अनुसंधान एक जाँच है जिसमें किसी समस्या के समाधान के लिए परिकल्पना की सत्यता की जाँच की जाती है। इस हेतु समंकों का महत्वपूर्ण स्थान है।

13.7 संदर्भ ग्रन्थ

1. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
2. Bhardwaj, R. S. (2000), Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
3. Singh, S. P. (2010), Principales of Statistic, S & Chand Publishing House.
4. Kumar, Anil (2008), Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

13.8 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण में प्रयुक्त विभिन्न रीतियों को समझाइए। इनमें से आप किसको ठीक समझते हैं।
2. प्राथमिक समंक एकत्र करने की प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान तथा अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान विधियों के गुण–दोष बतलाइए।
3. समंक संकलन (सांख्यिकीय अनुसंधान) की संग्णना विधि ओर निदर्शन विधि के गुण–दोषों की तुलना कीजिए।
4. द्वितीयक समंक क्या होते हैं? द्वितीयक समंकों को अगले अनुसंधान में प्रयोग करते समय क्या सावधानियां ली जानी चाहिए?
5. ''समंक संकलन में सामान्य बुद्धि मुख्य आवश्यकता और अनुभव मुख्य शिक्षक है।'' इस कथन का आलोचनात्मक विवेचन कीजिए।
6. द्वितीयक समंक क्या होते हैं? इनके प्रमुख स्रोत बताइए। इनके उपयोग से पहले क्या सावधानियां रखनी चाहिए ?

इकाई 14 – आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण की विधियाँ – बिन्दुरेखीय

इकाई की रूपरेखा

14.0 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप लोगें ने समकों के एकत्रीकरण और उनके मूल्यांकन की विधियों के विषय में ज्ञान प्राप्त किया। इस इकाई में आप लोग समंकों/आंकड़ों को किस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है, की जानकारी प्राप्त करेगें।

इस इकाई में मुख्य रूप से बिन्दुरेखीय विधि की विवेचना की जायेगी और इसके विभिन्न तरीकों से आपको अवग्त कराया जायेग।

14.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्यनोपरांत आप

- आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की सबसे मुख्य इकाई बिन्दुरेखीय विधि का अर्थ जान सकेंगें।
- चित्र तथा बिन्दुरेखीय में अंतर जान सकेंगे।
- बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोग्ति जानेंगे।
- बिन्दुरेखीय विधि से प्रदर्शन के गुण और दोषों की विवेचना कर सकेंगे।
- बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता प्राप्त कर सकेंगे।

14.2 बिन्दुरेखा का अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकीय आंकड़ों का ग्राफ पेपर पर प्रदर्शन ग्राफ या बिन्दुरेख कहलाता है। अधिकांश सांख्यिकीय आंकड़ें इतने विशाल और जटिल होते हैं कि जन–सामान्य के लिए उनका समझना अत्यन्त कठिन है। वर्गीकरण व सारणीयन समंकों को व्यवस्थित व सुन्दर ढंग से प्रस्तुत करते हैं, परन्तु इनके द्वारा आंकड़ों की विशेषताओं को ठीक प्रकार से प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

एम. एम. ब्लेयर के अनुसार **''समझने में व रचना में सरलतम, सर्वाधिक चल और सबसे अधिक प्रयोग में लाया जाने वाला चित्र बिन्दुरेख है।''**

आई. आर. वेसेलो के कथन से स्पष्ट है –**''संख्यात्मक पाठन की सबसे सरल एवं सामान्य विधि बिन्दुरेख है। यह संख्याओं का चित्र इस प्रकार प्रस्तुत करती है कि नेञ्ञों को उनके सम्बन्ध तत्काल पता लग जाते हैं। संख्याओं को स्पष्ट बनाने में इसका सर्वाधिक महत्त्व है।''**

14.3 चित्र तथा बिन्दुरेखा में अन्तर

यद्यपि चित्र तथा बिन्दुरेख (या रेखाचित्र) मुख्य रूप से एक ही उद्देश्य की पूर्ति करते हैं फिर भी दोनों में अन्तर निम्न प्रकार किया जा सकता है –

आधार	चित्र	रेखाचित्र
1. प्रयोग सम्बन्धी अन्तर	चित्रों का प्रयोग विशेष रूप से स्थानीय श्रेणियों के प्रदर्शन के लिए किया जाता है।	रेखाचित्रों का प्रयोग काल–श्रेणी तथा आवृत्ति वितरणों के प्रदर्शन के लिए किया जाता है।
2. रचना सम्बन्धी अन्तर	चित्रों की रचना सादे कागज पर की जाती है और इनका निरूपण दण्डों, आयतों, वर्गों, वृत्तों आदि द्वारा किया जाता है। इनकी रचना कठिन है।	रेखाचित्र प्रायः बिन्दुरेखीय पत्र पर बनाये जाते हैं तथा इनको बनाने के लिए विभिन्न प्रकार के बिन्दुओं या रेखाओं आदि का प्रयोग किया जाता है। इनकी रचना सरल है। इनमें श्रम तथा समय कम लगता है।
3. कार्य सम्बन्धी अन्तर	चित्रों की कार्य तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है।	बिन्दुरेखों का कार्य तुलनात्मक अध्ययन की सम्भव बनाना है।
4. तुलना सम्बन्धी अन्तर	चित्रों द्वारा एक ही श्रेणी के विभिन्न मूल्यों की तुलना की जाती है।	रेखाचित्र द्वारा एक से अधिक श्रेणियों में आने वाले परिवर्तन की तुलना की जा सकती है।
5. माध्यों का निर्धारण	चित्रों से संख्यिकीय मापों का अनुमान सम्भव नहीं है।	रेखाचित्र से मध्यका, बहुलक आदि के मूल्य ज्ञात किया जा सकते हैं।
6. सार्थकता सम्बन्धी अन्तर	चित्र किसी विषय की केवल सन्निकट सूचना प्रकार करते हैं। ये आंकड़ों के अर्थ में किसी प्रखार की वृद्धि नहीं करते, अतः अनुसन्धान में विवेचन के लिए उपयोगी सिद्ध नहीं होते।	बिन्दुरेख अधिक स्पष्ट, संक्षिप्त तथा शुद्ध होते हैं और अनुपात, ढाल, परिवर्तन दर आदि के अध्याय में काफी सहायक होते हैं।

14.4 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के कार्य

1– बिन्दुरेखा विश्लेषक को अनुसन्धान से सम्बन्धित सामान्य विधि, गणना तथा नियोजन में मार्गदर्शन करती है।

2– बिन्दुरेखा का प्रयोग गणितीय ग्णना के स्थान पर समय व श्रम बचाने के लिए किया जाता है।

3– गणितीय वक्र के स्थान पर मुख्त हस्त वक्र समंकों की प्रवृत्ति के अधिक अनुरूप बनायी जा सकती है।

4– बिन्दुरेखा जटिल समंकों को चित्रित करके उन्हें सरल व बोधग्म्य बनाता है।

5– सम्बन्धित तथ्यों को पास–पास प्रदर्शित करके तुलना को सरल बना देता है।

14.4.1 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के गुण या लाभ या उपयोगिता

1– आकर्षक व प्रभावशाली – बिन्दुरेख बहुत आकर्षक होते हैं। सुन्दर ढंग से बनाकर उन्हें और भी आकर्षक बना लिया जाता है।

2– समझने में सरल – समंकों की अव्यवस्थित और विशाल राशि बिन्दुरेखा के द्वारा सरल व सुबोध बन जाती है और वह जन–सामान्य के समझने योग्य हो जाती है।

3– समय व श्रम की बचत – इस रीति द्वारा आंकड़ों को प्रस्तुत करने में समय व श्रम अपेक्षाकृत कम लगता है। जो आंकड़ों का अध्ययन करते हैं उनका भी समय व श्रम बचता है।

4– तुलनात्मक अध्ययन में सरलता – रेखाओं द्वारा दो प्रकार के समंकों की तुलना में बहुत सुविधा रहती है। दोनों प्रकार से समंकों की दिशा का ठीक–ठीक ज्ञान सरलता से हो जाता है और उनके तुलनात्मक अध्ययन में भी सरलता रहती है।

डिकसन हार्टबेल के अनुसार, ''चार्ट एवं बिन्दुरेखा के उदाहरण सांख्यिकीय साम्ग्री एवं प्रवृत्तियों की तुलना को सरलता से स्पष्ट करते हैं।''

5– स्थायी भाव – संख्या सम्बन्धी सूचनाओं को प्रायः हम लोग कुछ समय के उपरान्त भूल जाते हैं क्योंकि सभी संख्याओं को याद रखना सरल नहीं। परन्तु बिन्दुरेखों का प्रभाव पर्याप्त अंशों में स्थायी होती है तथा उन्हें हम जल्दी नहीं भूलते हैं।

6– आन्तरगणन, ब्राह्मग्णन व पूर्वानुमान में सुविधा – बिन्दुरेखों की सहायता से आन्तरगणन, वाह्यग्णन व पूर्वानुमान सरलता व शीघ्रता से किया जा सकता है। इनके द्वारा

इन क्रियाओं के करने में बहुधा सरलता होती है। न सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है और न संख्या सम्बन्धी अधिक क्रियाएं ही करनी पड़ती हैं।

7– सहसम्बन्ध का अनुमान – बिन्दुरेखों की सहायता से सहसम्बन्ध का बहुत अंशों में अनुमान लगया जा सकरता है। वक्रों की गति इसे स्पष्ट रूप से प्रकट करती है।

8– भूयिष्ठक, मध्यका एवं चतुर्थकों का ज्ञान – बिन्दुरेखीय प्रदर्शन द्वारा भूयिष्ठक मध्यका तथा चतुर्थकों का ज्ञान सरलता से हो जाता है।

9– ऐतिहासिक तथा कालिक सूचनाएं – ऐतिहासिक तथा कालिक सूचनाएं, जो कि आंकड़ों के द्वारा प्रकट की जाती हैं, बिन्दुरेखीय प्रदर्शन द्वारा अधिक प्रभावशाली रूप में दिखायी जा सकती हैं।

14.4.2 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष/सीमाएं

सरल रेखा चित्रों से भी उन्हें पूर्णतः समझे बिना गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के प्रमुख दोष निम्नलिखित हैं –

1– शुद्धता की जांच न होना – वक्रों के द्वारा विग्त का प्रदर्शन होता है, परन्तु वास्तविक मूल्य का अनुमान नहीं हो पाता है। इसलिए शुद्धता की जांच नहीं हो पाती।

2– तर्कसंगत न होना – बिन्दुरेखों का प्रभाव कभी–कभी आंखों तक ही रहता है।

3– दुरुपयोग सम्भव – मापदण्ड में थोड़ा परिवर्तन कर देने पर वख्र के आकार में बहुत अन्तर पड़ जाता है, इसलिए मापदण्डों को लेकर समंकों को विभिन्न ढंगें से प्रस्तुत किया जा सकता है और इनका दुरुपयोग भी किया जा सकता है।

4– उद्धरण के रूप में प्रस्तुत न किया जाना – किसी तथ्य की पुष्टि के लिए बिन्दरेखों को उद्धरण के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता।

5– अपर्याप्त सूचना देना – बिन्दुरेखा के द्वारा सभी सांख्यिकीय साम्ग्री को प्रस्तुत नहीं किया जा सकता है और न ये सभी प्रकीर की समस्याओं के समाधान में सहायक हो सते हैं इसलिए इनकी सूचनाएं अपर्याप्त होती हैं।

14.4.3 बिन्दुरेखा की रचना

बिन्दुरेखों की रचना सामान्यतः बिन्दुरेखीय–पत्र पर अंकित किये जाने वाले बिन्दुओं को आपस में मिला देने से होती है। उदग्र रेखा को उदग्र माप श्रेणी या **कोटि अक्ष** और

क्षैतिज रेखा को क्षैतिज रेखा पर क्षैतिज माप श्रेणी या **भुजाक्ष** कहते हैं। भुजाक्ष के लिये **यय** तथा कोटि अक्ष के लिए **रर** संकेतों का प्रयोग प्रचलन में है।

इस प्रकार बिन्दुरेखीय–पत्र चार भागें में बंट जाता है जिनमें से प्रत्येक भाग को चरण कहते हैं। बिन्दुरेखीय–पत्र पर किसी भी बिन्दु को प्रांकितकरते समय उदग्र एवं क्षैतिज श्रेणियों का अध्ययन करके उसे निश्चित करते हैं।

14.4.4 बिन्दुरेख बनाने के सामान्य नियम

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन करते समय निम्न नियमों का पालन करना आवश्यक है :–

1– उपयुक्त व पूर्ण शीर्षक – प्रत्येक रेखाचित्र का उपयुक्त व पूर्ण शीर्षक होना चाहिए ताकि देखते ही यह समझ में आ जाए कि वह किससे सम्बन्धित है।

2– बिन्दुरेखों की गति – बिन्दुरेखों की गति क्षैतिज पैमाने पर सामान्यतः बायें से दायें और उदग्र्र पैमाने पर नीचे से ऊपर होती है अतः मूलबिन्दु को यथास्थान रखना चाहिए।

3– कृत्रिम आधार रेखा – उदग्र मापदण्ड का चुनाव ऐसा होना चाहिए कि शून्य रेखा–पत्र पर दिखायी दे। यदि किसी कारण ऐसा करना सम्भव न हो तो मूलबिन्दु के पास शून्य रेखा से प्रारम्भ करके कुछ ऊपर जाकर इसे तोड़कर **कृत्रिम आधार रेखा बना लेनी चाहिए और फिर उसके ऊपर अपनी आवश्यकतानुसार निश्चित किये हुए पैमाने के अनुसार अंकित कर लेनी चाहिए।**

4–मापदण्ड का चुनाव – मापदण्ड का चुनाव एक महत्वपूर्ण कार्य है।

5–भुजाक्ष की लम्बाई – सामान्यतः इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि लम्बाई में भुजाक्ष कोटि–अक्ष की डेढ़ गुनी है।

6–मापदण्ड का विवरण – मापदण्ड का विस्तृत विवरण दिया जाना चाहिए ताकि यह सरलता से समझ में आ जाए कि आकार क्या प्रकट करता है।

7–स्पष्ट प्रदर्शन– रेखाचित्रों में बिन्दुओं का प्रदर्शन स्पष्ट होना चाहिए, जो रेखा विभिन्न बिन्दुओं को मिलाये वह भी स्पष्ट था समान रूप में पतली या मोटी होना चाहिए। यदि एक ही चित्र में कई रेखाओं का प्रदर्शन करना हो तो वहां विभिन्न प्रकार की रेखाएं खींची जा सकती हं या अलग–अलग रंग व्यवहार मे प्रयोग किये जाते हैं।

8–क्षैतिज मापदण्ड या उदग्र मापदण्ड– क्षैतिज मापदण्ड व उदग्र्र मापदण्ड अलग–अलग लिए जा सकते हैं।

9—समंकों का प्राप्ति स्थान व आवश्यक टिप्पणियां—जहां आवश्यकता हो वहां समंकों का प्राप्ति स्थान तथा आवश्यक टिप्पणियां भी दे देनी चाहिए ताकि उनका स्रोत ठीक से पता रहे और उनकी शुद्धता की जांच की जा सके।

10—संकेत—यदि कुछ संकेत हैं तो उन्हें ऊपर की ओर दे देना चाहिए।

11—परिणाम कोट—अक्ष पर— सामान्यतः समय, स्थान, परिस्थिति, आकार आदि की इकाइयों को भुजाओं पर और समंकों के परिणाम, आश्रित चलों व आवृत्ति को कोटि—अक्ष पर प्रदर्शित करना चाहिए।

12—वक्रों के पास समंकों को देना— रेखाचित्र के साथ समंकों को पास ही सारणी में देना चाहिए ताकि यदि कभी चाहे तो विस्तृत अध्ययन कर सके या शुद्धता की जांच कर सके।

13—अनुपात माप—श्रेणी का प्रयोग करना—आनुपातिक श्रेणियों को प्रदर्शित करने के लिए अनुपात मापदण्ड का प्रयोग करना चाहिए।

14—धनात्मक संख्याएं—जहां संख्याएं केवल धनात्मक हों वहां भुजाक्ष के नीचे या कोटि—अक्ष की बायीं ओर का भाग बिन्दुरेखीय—पत्र पर दिखाना व्यर्थ है।

14.4.5 बिन्दुरेखीय वक्रों का प्रयोग

बिन्दुरेखीय वक्रों का प्रयोग दो प्रकार से किया जाता है :—

1—कालमालाओं के प्रदर्शन के लिए

2—आवृत्ति वितरण के प्रदर्शन के लिए

कालमालाओं के रेखाचित्र — कालमालाओं को प्रदर्शित करने के लिए जो बिन्दुरेख बनता है, उसे **कालिक चित्र** कहते हैं। कालिक चित्र की रचना में समय (वर्ष, माह इत्यादि) को सदा भुजाक्ष पर तथा मूल्यों को कोटि—अक्ष पर अंकित किया जाता है। काल श्रेणी के रेखाचित्र दो प्रकार के मापदण्ड पर बनाये जा सकते हैं — (i) प्राकृतिक या साधारण मापदण्ड पर या (ii) आनुपातिक मापदण्ड पर।

प्राकृतिक मापदण्ड पर कालमाला चित्र—इस विधि के अन्तर्गत बिन्दुरेखीय—पत्र में मापदण्ड प्राकृतिक होता है। प्राकृतिक मापदण्ड पर भी कालमाला के रेखाचित्र निम्न दो प्रकार के हो सकते हैं :—

(i) **निरपेक्ष कालिक चित्र** – जब कालिक चित्रों के लिए मौलिक समंकों को ही प्रांकित किया जाता है तो उसे निरपेक्ष कालिक चित्र कहते हैं। ये एक चर–मूल्य को या दो या अधिक चर–मूल्यों को प्रदर्शित करने के लिए बनाये जा सकते हैं।

(ii) **निर्देशांक कालिक चित्र** – जब वास्तविक मूल्यों या मौलिक समंकों के स्थान पर उनके निर्देशांकों अर्थात् सापेक्षिक मूल्यों को बिन्दुरेखीय–पत्र पर प्रांकित किया जाता है तो वह निर्देशांक कालिक अक्ष कहलाता है।

14.4.6 कृत्रिम आधार रेखा

बिन्दुरेख बनाते समय इस महत्वपूर्ण नियम का पालन करना आवश्यक है कि उदग्र माप पर शून्य मूलबिन्दु से प्रारम्भ किया जाये। यह नियम क्षैतिज माप के लिए आवश्यक नहीं। इस नियम के अनुसार उदग्र माप पर शून्य से प्रारम्भ करने में कभी–कभी कठिनाइयां आती हैं। जैसे यदि वे मूल्य जो उदग्र पाल पर शून्य से प्रारम्भ करने हों, बहुत बड़े हों और उनमें आपस में अन्तक कम हो तो शून्य से प्रारम्भ करने पर निम्न सुविधाएं सामने आयेंगी।

(1) वक्र आधार रेखा से बहुत दूर बनेग और आधार रेखा के बीच का बिन्दुरेख–पत्र बेकार रहेगा।

(2) यदि मूल्य बड़े हों परन्तु इनमें होने वाले परिवर्तन बहुत कम हों अर्थात् आपसी अन्तर कम हों तो उसे भी स्पष्ट रूप में प्रदर्शित नहीं किया जा सकेगा।

इन असुविधाओं को दूर करने और बिन्दुरेख को प्रभावशाली बनाने के उद्देश्य से कृत्रिम आधार रेखा का सहारा लिया जाता है। इसमें उदग्र माप–श्रेणी का वह भाग छोड़ दिया जाता है जो मूलबिन्दु से लेकर निम्नतम मूल्य, जिसे प्रांकित करना है, तक है।

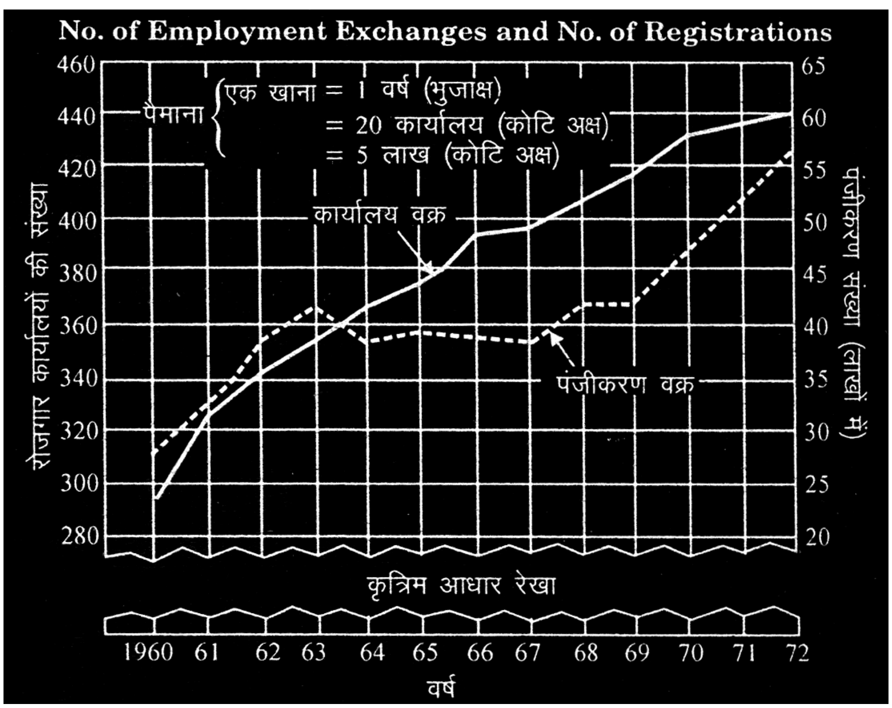
14.4.7 दो मापदण्डों के रेखाचित्र

कहीं–कहीं कोटि–अक्ष पर दो मापदण्ड लेकर संख्याओं को प्रांकित करना पड़ता है क्योंकि वे दोनों ही विभिन्न इकाइयों को प्रकट करती हैं। उनकी इकाइयां सजातीय हों, किन्तु उनके विस्ताओं में बहुत अन्तर होता है तो भी वहां दो मापदण्डों का सहारा लेना पड़ता है। ऐसी स्थिति में बायीं ओर के कोटि–अक्ष पर एक चर–मूल्य तथा दाहिनी ओर को कोटि–अक्ष पर दूसरा चल–मूल्य दिखाया जाता है। ऐसा करने के लिए दोनो चर–मूल्यों के

समान्तर माध्य एक सीध में रेका–पत्र के म्य मे रखकर मापदण्ड निर्धारित किये जाते हैं।

निम्न को रेखाचित्रों द्वारा प्रस्तुत कीजिए –

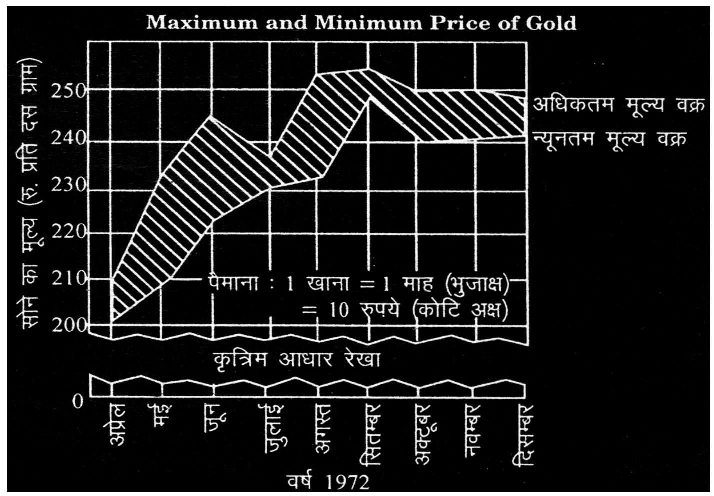
Year(Jan-Dec.)	No. of Exchanges at the end of the Year	No. of Registratoin effected during the Year (in Lakh)
1960	296	27.33
1961	325	32.30
1962	342	38.45
1963	353	41.52
1964	365	38.32
1965	376	39.58
1966	396	38.71
1967	399	39.12
1968	405	40.39
1969	416	42.01
1970	429	45.16
1971	437	51.31
1972	441	57.65



14.4.8 अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के रेखाचित्र : कटिबन्ध चित्र तथा वक्र

कभी–कभी किसी चर के किसी समय के अधिकतम व न्यूनतम उतार–चढ़ाव को अंकित

करने की आवश्यकता पड़ती है; जैसे किसी दिन या माह में किसी वस्तु का निम्नतम व अधिकतम भाव या किसी रोगी का आधिकतम व निम्नतम तापमान। ऐसी दशा में अधिकतम मूल्यों का वक्र और न्यूनतम मूल्यों का वक्र अलग–अलग खींचकर फिर उनके बीच के स्थान को किसी रंग या चिह्न से भर देते हैं। इन्हें कटिबन्ध वक्र कहते हैं।



उदाहरण – **मुम्बई में सोने की अधिकतम न न्यूनतम कीमत निम्न प्रकार है। इनमें रेखाचित्र बनाओं –**

वर्ष	माह	रु. प्रति दर ग्राम	
		अधिकतम	न्यूनतम
1972	अप्रैल	210.50	202.00
	मई	236.50	208.50
	जून	245.00	224.00
	जुलाई	235.50	230.50
	अगस्त	255.50	233.50
	सितम्बर	256.50	250.00
	अक्टूबर	250.00	241.00
	नवम्बर	251.00	241.00
	दिसम्बर	249.50	242.00

14.4.9 जी–रेखाचित्र या Z.वक्र

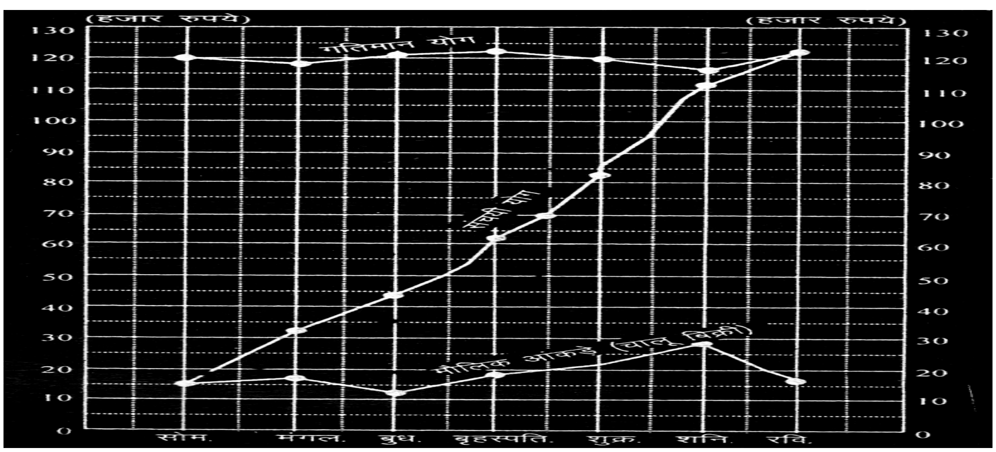
यह वक्र एक प्रकार रा रेखाचित्र है जो अधिकतम व्यापारिक क्षेत्रों में प्रयोग होता है। यह वक्र अंग्रेजी के अक्षर जेड (Z) के आकार का होता है। इसीलिए इसे जी (Zee) या Z –वक्र कहते हैं। इसमें तीन वक्र तीन बातों को प्रदर्शित करते हुए खींचे जाते हैं। तीनों के लिए अलग–अलग पैमाने लिए जाते हैं। ये तीन वक्र निम्न प्रकार होते हैं :–

1–मौलिक समंकों का वक्र

2–संचयी समंकों का वक्र
3–चल योगें का वक्र

उदाहरण – निम्न आंकड़ों को Z–वक्र के रूप में प्रस्तुत कीजिए :

दिन	बिक्री	संचयी योग		गतिमान योग
सोमवार	15	15	120	गत सप्ताह के 6 दिनों के योग सहित
मंगलवार	17	32	119	गत सप्ताह के 5 दिनों के योग सहित
बुधवार	12	44	121	गत सप्ताह के 4 दिनों के योग सहित
गुरुवार	18	62	123	गत सप्ताह के 3 दिनों के योग सहित
शुक्रवार	21	83	121	गत सप्ताह के 2 दिनों के योग सहित
शनिवार	28	111	117	गत सप्ताह के 1 दिनों के योग सहित
रविवार	11	122	122	गत सप्ताह के 7 दिनों के योग सहित



14.5 चित्रों की तुलना में बिन्दुरेखों के गुण

चित्रों की तुलना में बिन्दुरेखों में निम्न गुण हैं –

1–लोकप्रिय – बिन्दुरेखों का प्रयोग चित्रों की अपेक्षा अधिक होता है। यह बहुत लोकप्रिय है और लगभग सभी प्रकार के अध्यनों में प्रयुक्त होता है।

2– गणितीय प्रश्न का हल सम्भव– बिन्दुरेखों की सहायता से कई प्रकार के गणितीय प्रश्न भी हल किये जा सकते हैं, इसलिए गणित की दृष्टि से ये चित्रों की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण हैं।

3–भूयिष्टक, चतुर्थक आदि निकालना सम्भव– बिन्दुरेखों की सहायता से भूयिष्ठक, चतुर्थक, दशमक, शतमक आदि निकाले जा सकते हैं।

4–सबके लिए लाभप्रद– बिन्दुरेख की रचना करने वाला स्वयं अपने लाभ के लिए भी उनकी रचना कर सकता है क्योंकि किसी भी अध्ययन के लिये ये बड़े लाभप्रद होते हैं। परन्तु चित्र सामान्यतः दूसरों के लिए बनाये जाते हैं।

5–समय–श्रेणी का अच्छा प्रदर्शन– समय श्रेणी या काल–माला के प्रदर्शन के लिए बिन्दुरेख बहुत आवश्यक है ताकि परिवर्तन को ठीक प्रकार से देखा जा सके। चित्रों की सहायता से यह उतना सम्भव नहीं है।

14.6 बिन्दुरेखा की तुलना में चित्रों के गुण

बिन्दुरेखा की तुलना मे चित्रों में निम्न विशेष गुण होते हैं :

(अ) समझने में सरल – चित्र बिन्दुरेखों की अपेक्षा समझने मे अधिक सरल होते हैं। देखते ही वे समझ में आ जाते हैं।

(ब) प्रभाव स्थायी – चित्रों का प्रभाव मस्तिष्क पर बिन्दुरेखों की अपेक्षा अधिक स्थायी होता है।

(स) आकर्षण तत्व – चित्रों में आकर्षण तत्व अधिक होता है क्योंकि ये कई आकृतियों मे तथा कई रंगें या चिन्हों की सहायता से बनाये जाते हैं।

14.7 अभ्यास प्रश्न

सत्य / असत्य

रेखा चित्र द्वारा एक से अधिक श्रेणियों में आने वाले परिवर्तन की तुलना की जा सकती है –

(A) सत्य (B) असत्य **Ans- A**

बहुविकल्पीय प्रश्न

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन में आवश्यक है –

(A) शीर्षक (B) लम्बाई

(C) मापदण्ड का चुना (D) इनमें से सभी Ans- C

लघु उत्तरीय प्रश्न

- चित्रों द्वारा प्रस्तुतीकरण या बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता स्पष्ट कीजिए?
- बिन्दुरेखीय प्रदर्शन क्या है?

- बिन्दुरेखीय प्रदर्शन से कौन–कौन से लाभ हैं?
- निम्न आंकड़ों को कालिक चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए –

वर्ष	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
बिक्री('000रु.)	24	39	29	49	54	68	80

14.8 पाठ सारांश

इस प्रकार इस इकाई में हमने बिन्दुरेख से सम्बन्धित उन तमाम बातों की जानकारी प्राप्त की जो कि एक अच्छे आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण के लिये आवश्यक है।

चूंकि बिन्दुरेखीय विधि सरल एवं आकर्षक है इसीलिए आज लगभग हर क्षेत्र में आंकड़ों के प्रदर्शन हेतु इस विधि का प्रयोग किया जा रहा है।

14.9 संदर्भ ग्रन्थ

1. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
2. Bhardwaj, R. S. (2000), Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
3. Singh, S. P. (2010), Principales of Statistic, S & Chand Publishing House.
4. Kumar, Anil (2008), Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

14.10 निबंधात्मक प्रश्न

14.9.1 निम्नलिखित आंकड़ों को बिन्दुरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए –

वर्ष	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
चावल का उत्पादन (मिलियन टन)	10	15	18	20	22	30	32	35	38
गेहूँ का उत्पादन (मिलियन टन)	15	18	20	25	28	32	34	36	40

14.9.2 ध्यान आकर्षित करने की दृष्टि से रेखाचित्र आंकड़ों के प्रदर्शन की अन्य रीतियों की अपेक्षा अधिक प्रभावशाली होते हैं।' इस तथ्य की उदाहरण साहित व्याख्या कीजिए।

इकाई 15 – आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की 'ग्राफीय' विधियां

इकाई की रूपरेखा

15.0 प्रस्तावना

मोरोने के अनुसार, ''अधिकांश व्यक्तियों के लिए नीरस संख्याएं प्रेरणा शून्य होती हैं। चित्र किसी जटिल स्थिति के स्वरूप को देखने (समझने) में हमारी सहायता करता है।''

जैसा कि आप सभी को ज्ञात है जटिल आंकड़ों को इस प्रकार प्रकार प्रदर्शित करना चाहिए जिससे वह देखने तथा समझने में सुन्दर और आसान बन जाये। इसीलिए इस इकाई में हम आपको आंकड़ों को आरेखीय प्रदर्शन के विषय में पूर्ण जानकारी प्रदान करेगें।

15.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्यनोपरांत आप :

- आंकड़ों के विश्लेषण का ग्राफीय विधि से अवगत होंगे।
- आंकड़ों के आरेखात्मक विश्लेषण की पूर्ण जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।
- काल श्रृंखला तथा आरेखी प्रदर्शन के विभिन्न प्रकारी को जान सकेंगे।
- रेखा चित्रीय आरेख, दण्ड चित्र, पाई आरेख तथा वृत्त चित्रों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है इस विषय की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- इसके अतिरिक्त आवृत्ति वक्रों की विभिन्न प्रक्रियाओं से अवग्त हो सकेंगे।

15.2 आंकड़ों का प्रदर्शन (ग्राफीय)

पिछले अध्यायों के अध्ययन के पश्चात् आप इस बात को भली–भाँति समझ चुके होंगे कि 'जैसे–जैसे संख्याओं की किसी भी सूची की लम्बाई बढ़ती जाती है, वैसे–वैसे वह कम ग्रह्य होती जाती है। इसी प्रकार का विचार प्रो0 किंग ने भी दिया।'' संख्याओं के अपने सबसे अच्छे रूप में भी तुलना करने के उद्देश्य से मस्तिष्क के लिए समझना और देर तक भाव रखना सरल बात नहीं है।

अतः यदि हम अपनी बातों को अंकों द्वारा प्रस्तुत करने के बजाय किसी अन्य सरल साधन द्वारा प्रस्तुत करें जहां अंकों का प्रयोग कम से कम किया जेये तो हमारी बात जन–साधारण के लिए सरल, समझने तथा याद करने योग्य हो जाती है।

15.3 चित्र एवं ग्राफ

'अधिकांश व्यक्तियों के लिए नीरस संख्याएं प्ररेणा शून्य होती हैं। चित्र किसी जटिल स्थिति के स्वरूप को देखने समझने में हमारी सहयता करते हैं। जिस प्रकार एक मानचित्र हमारे सामने किसी विशाल देश का विहंग्म दृश्य प्रस्तुत करता है, ठीक उसी प्रकार चित्र एक दृष्टि में संख्यात्मक जटिल तथ्यों का सम्पूर्ण अर्थ समझने में हमारी सहयता करते हैं।'' – **मोरोने** जटिल आंकड़ों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाये कि वे देखने में सुन्दर तथा समझने में बहुत सुन्दर बन जायें। वर्गीकरण व सारणीयन इसी उद्देश्य को लेकर किये जाते हैं।

सांख्यिकी में समंकों को प्रदर्शित करने की दो विधियों हैं –

(अ) चित्रमय प्रदर्शन

(ब) बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

15.3.1चित्रों की उपयोगिता एवं लाभ –

1– चित्र समंकों को सरल व सुबोध बनाते हैं – चित्रों के द्वारा जटिल, अव्यवस्थित और विशाल समंक राशि सरल हो जाती है और वह जनसाधारण के समझने के योग्य हो जाती है। केवल अंकों को देखकर कोई निष्कर्ष निकालना कठिन होता है।

प्रसिद्ध विद्वान **प्रो. स्टीफेन जुल्क** के शब्दों में, **''एक चित्र अधिक स्पष्ट तथा चित्र को सीधे आकर्षित करने वली तस्वीर प्रदान करता है।''**

2–अधिक समय तक स्मरणीय – अंकों को बहुत समय तक याद करना अत्यन्त कठिन है। कुछ समय बाद मनुष्य अंको को भूल जाता है, परन्तु चित्रों द्वारा आंकड़ों की एक अमिट छाप मस्तिष्क पर पड़ती है जो बहुत दिनों तक बनी रहती है।

3– चित्रों को समझने के लिए विशेष शिक्षा या ज्ञान की आवश्यकता नहीं – चित्रों की समझना जनसामान्य के लिए बहुत सरल है।

4– समय या श्रम की बचत – चित्रों की सहायता से आंकड़ों के समझने व उनसे निष्कर्ष निकालने में बहुत कम समय तथा परिश्रम की आवश्यकता होती है। बिना किसी परिश्रम के बड़ी सरलता से और एक दृष्टि में आंकड़ों पर्याप्त मात्रा में समझ में आ जाते हैं।

5–आकर्षक एवं प्रभावशाली – चित्र बहुत आकर्षक होते हैं। ये बरबस ध्यान अपनी ओर खींच लेते हैं। **सी. डब्लू लोव** के शब्दों में **'सभी प्रकार के समंकों को अत्यन्त प्रभावशाली रूप में निरूपण करने के लिए चित्रों का प्रयोग किया जा सकता है।''**

6–सूचना के साथ–साथ मनोरंजन होना – सुन्दर चित्र सूचना तो देते ही हैं, परन्तु साथ ही साथ मनोरंजन भी देते हैं। इनकी सहायता से विभिन्न सूचनाओं के अध्ययन में थकावट प्रतीत नहीं होती है।

7–तुलना करने में सहायक – चित्रों की सहायता से विभिन्न सूचनाओं की प्रभावशाली तुलना की जा सकती है।

8– समंको का संक्षिप्त रूप – चित्र समंको को संक्षिप्तता प्रदान करते हैं। इनका निर्माण समस्या पर विचार करने एवं पर्याप्त विश्लेषण करने के उपरान्त होता है।

चित्रों द्वारा प्रदर्शन की परिसीमाएं अथवा हानियां

चित्रमय प्रदर्शन उन व्यक्तियों के लिए भ्रमात्मक होते हैं जो सावधानीपूर्ण अध्ययन के बिना ही उनसे निष्कर्ष निकालते हैं। एम. जे. मोरोने के अनुसार 'किसी चित्र का अध्ययन कनरे के लिए पर्याप्त चौकन्ना रहना आवश्यक होता है। वह इतना सरल, स्पष्ट तथा मनभावी होता है कि असावधान व्यक्ति बड़ी आसानी से मूर्ख बन जाता है।' इस तकनीकि का प्रयोग करते समय तथा निष्कर्ष निकालते समय विशेष सावधानी की आवश्यकता है। इन चित्रों की परिसीमाएं निम्नलिखित हैं –

1–तुलना के लिए गुण व स्वभाव की समान आवश्यकता–चित्रों में तुलना तभी ठीक होगी जब वे समान गुण के आधार पर बनाये जाएं। यदि वे दो विभिन्न गुणों के आधार पर बनाये जायें तो उनमें तुलना करना भ्रामक व अशुद्ध होगा।

2–केवल तुलनात्मक अध्यय सम्भव – चित्रों की सहायता से केवल तुलमात्मक अध्ययन

सम्भव हो पाता है।

3–सूक्ष्म अन्तर दिखाना सम्भव नहीं– चित्रों द्वारा बहुत सूक्ष्म अन्तर को प्रदर्शित करना सम्भव नहीं है।

4–बहुमुखी सूचनाओं का प्रदर्शन सम्भव नहीं – चित्रों द्वारा बहुमुखी विशेषताओं को प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

5–संख्यात्मक प्रदर्शन असम्भव – चित्रों द्वारा आंकड़ों का पूर्ण शुद्ध रूप में प्रदर्शन सम्भव नहीं होता है। चित्र अनुमानित रूप से आंकड़ों का प्रदर्शन करते हैं। चित्र वहीं के लिए उपयुक्त होते हैं जहाँ संख्या में मूल्य प्राप्त करना उद्देश्य न हो बल्कि उनके मूल्य का अनुमान चित्रों को देखर लगया जा सके।

6–सरलतापूर्वक दुरुपयोग–अनुचित और अशुद्ध चित्र बनाकर उनका दुरुपयोग किया जा सकता है।

7–निष्कर्ष निकालने का एक उचित साधन– चित्रों को देखर पूर्ण सत्य निष्कर्ष निकाला जाना सम्भव नहीं है।

8–पर्याप्त ज्ञान के अभाव में भ्रमोत्पादक–यदि चित्र बनाने वाले को विषय का पर्याप्त ज्ञान नहीं है तो चित्र ऐसा बन सकता है जो वस्तुस्थिति का ठीक ज्ञान न करा सके और भ्रम पैदा करे।

9–आंखों का धोखा–यदि आंकड़ों के अनुरूप चित्र न बनाये जायें तो इससे आंखों को भारी धोखा हो सकरता है और देखने वाला गलत परिणाम पर पहुंच सकता है।

10–आगे विश्लेषण असम्भव–चित्रों की एक यह भी सीमा है कि इनका आगे विश्लेषण सम्भव नहीं है।

15.3.2 चित्र बनाने का सामान्य नियम – सांख्यिकीय चित्रों को आकर्षक व प्रभावशाली बनाने के लिए निम्न बातों को ध्यान मे रखना आवश्यक है :

1–शुद्धता – चित्र आकर्षक व कलात्मक हों, शुद्धता उनकी जान है। चाहे कितना भी आकर्षक चित्र क्यों न हो, यदि शुद्धता नहीं तो वह व्यर्थ है।

2–आकर्षक–चित्रों को आकर्षक बनाना सबसे अधिक आवश्यक है।

3–रेखापत्र का प्रयोग –चित्र बनाते समय रेखापत्र का प्रयोग ठीक रहता है। इससे सुन्दरता व शुद्धता दोनों की रक्षा हो जाती है।

4–शीर्षक–यह अत्यन्त आवश्यक है कि चित्र के ऊपर उसकी संख्या व शीर्षक दिया जाए।

5–आकार–चित्र का आकार प्राप्त स्थान के अनुसार होना चाहिए ताकि वह देखने में सुन्दर लगे।

6–मापदण्ड–चित्र बनाने से पहले मापदण्ड निश्चित कर लेना आवश्यक होता है। मापदण्ड निश्चित करते समय प्राप्त स्थन व अंकित करने वाली सूचना दोनों को ध्यान में रखा जाता है। मापदण्ड ऐसा होना चाहिए कि चित्र स्थान को ध्यान में रखते हुए न तो बहुत बड़े बन जायें और न बहुत छोटे रहें।

7– चिह्नों या रंगें का प्रयोग–चित्रों में आवश्यकतानुसार विभिन्न प्रकार की सूचनाओं को

प्रदर्शित करने के लिए विभिन्न प्रकार की चिह्नों व रंगें का प्रयोग करना चाहिए और उनके विषय में संकेत चित्र के नीचे बायें कोने पर दे देना चाहिए।

8–चित्रों को घेरना–चित्रों को मीटी या दोहरी रेखाओं से घेर देना चाहिए ताकि वे देकने में अधिक आकर्षक लगें।

9–उपयुक्त चित्र का चुनाव–चित्र कई प्रकार के होते हैं ओर इस प्रकार की चित्र सभी प्रकार के समंकों के लिए उपयुक्त नहीं हो सकते।

10–सरलता–चित्र ऐसा होना चाहिए कि वह सरलता से एक बार देखने से समझ में आ जाय।

11–महत्वपूर्ण बातें गहरे रंग से–चित्र बनाते समय यह भी ध्यान मे रखना आवश्यक है कि आंकड़ों के महत्वपूर्ण अंशों को गहरे रंग से या ऐसे ढंग से प्रदर्शित किया जाए।

12–मितव्ययिता–यह भी ध्यान मे रखना आवश्यक है कि चित्र बनाते समय धन व अन्य साधनों का दुरुपयोग न हो।

15.3.3 चित्रों के प्रकार – सांख्यिकीय में साधारणतः निम्न प्रकार के चित्रों का प्रयोग किया जाता है :

1–एक–विमा या एक–विस्तार वाले चित्र
2– द्विविमा या दो–विस्तार वाले चित्र
3– त्रिविमा या तीन–विस्तार वाले चित्र
4–मानचित्र
5–चित्र–लेख

1–एक–विमा या एक–विस्तार वाले चित्र–जब पदमाला विच्छिन्न रहती है और केवल गुण की तुलना करनी होती है तो एक विमा या एक–विस्तार वाले चित्रों का रचना की जाती है। एक विमा चित्र निम्न प्रकार के होते हैं –

(क) रेखाचित्र (ख) दण्ड चित्र

(क) रेखाचित्र–इन रखाओं की रचना विभन्न पदों के मूल्यों के अनुसार होती हैं। रेखाचित्रों की रचना तब की जाती है जबकि सम्बन्दित पद–मूल्यों की संख्या अधिक हों तथा न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात कम हो।

(ख) दण्ड चित्र – दण्ड चित्र एवं रेखा चित्र में बहुत साधारण अन्तर होता है और यह कि यहां रेखाओं को मोटा बना देते हैं। मोटा बनाते समय मूल्य का कोई ध्यान नहीं रखा जाता है।

विभिन्न प्रकार के दण्ड चित्र

1. सरल दण्ड चित्र–ये दो प्रकार के होते हैं
(क) उदग्र दण्ड,
(ख) क्षैतिज दण्ड

(क) उदग्र दण्ड–जब दण्ड सीधे खड़े बनाये जाते हैं तो उदग्र कहलाते हैं। यथा सम्भव यह प्रयास होना चाहिए कि सबसे ऊंचा दण्ड वायें और ऊँचाई के क्रम में अन्य दण्ड बनाते हुए सबसे छोटा दण्ड दांये बनाना चाहिए। यह क्रम विपरीत भी हो सकता है। परन्तु जब समंक समय या किसी अन्य महत्वपूर्ण क्रम में दिये हों तब छोटे या बड़े का विचार किये बिना दण्ड इसी क्रम में बनाया जाना चाहिए।

15.4 आंकड़ों का विश्लेषण

आंकड़ों का विश्लेषण दो प्रकार से किया जाता है –

1– आरेखों द्वारा

2– सांख्यिकीय गणना के द्वारा

आरेखात्मक विश्लेषण के अन्तर्गतहम आंकड़ों को क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित करने के बाद उन्हें उपयुक्त आरेखों के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। तत्पश्चात आरेखो के आधार पर आंकड़ों से सम्बन्धित निष्कर्ष ज्ञात किये जाते हैं। गणनात्मक विश्लेषण के अन्तर्गत हम सांख्यिकीय गुणांकों के मान ज्ञात करते हैं तथा गुणांकों के मानों के आधार पर आंकड़ों से संबन्धित निष्कर्ष निकालते हैं। ये सांख्यिकीय गुणांक हैं–माध्य, आंकड़ों का क्षितराव, आवृत्तियों का संकेन्द्रण इत्यादि।

सबसे पहले हम आंकड़ों के आरेखात्मक विश्लेषण की चर्चा करेगें। परन्तु इससे पूर्व आंकड़ों तथा चरराशिओं से सम्बन्धित कुछ संकल्पनाओं की व्याख्या करना आवश्यक है। आंकड़ों को प्रायः निम्न श्रेणियों में विभक्त किया जाता है–

1. मात्रात्मक तथा गुणात्मक आंकड़े
2. काल श्रृंखला आंकड़े तथा अनुप्रस्थ आंकड़े

मात्रात्मक तथा गुणात्मक आंकड़ें की चर्चा हम पहले भी कर चुके हैं।

काल–श्रृंखला आंकड़ें हम उन आंकड़ों को कहते हैं जिनका प्रत्येक मान अलग–अलग समय बिन्दु से अथवा अलग–अलग माह, वर्ष अथवा समयावधियों से सम्बन्धित हों, जैसे–किसी देश की जनसंख्या के आंकड़े, किसी फैक्ट्री के उत्पादन के वार्षिक आंकड़े, किसी अस्पताल में उपचार के लिये आने वाले रोगियों की साप्ताहिक संख्या, किसी नगर में घण्टेवार तापमान के आंकड़े इत्यादि–इत्यादि।

अनुप्रस्थ आंकड़े – ऐसे आंकड़ों को कहते हैं, जिनका प्रत्येक मान एक ही समय बिन्दु एक ही तिथि, एक ही माह, वर्ष अथवा एक ही समाधावधि से सम्बन्धित हों. अनुप्रस्थ आंकड़ें के उदाहरण हैं– सिविल सेवा प्रारम्भिक परीक्षा में सम्मिलित परीक्षार्थियों के प्राप्तांकों के

आंकड़े, सिविल सेवा परीक्षा में सम्मिलित परीक्षार्थियों की आयु के आंकड़े, व्यक्तियों की ऊंचाई, वजन, आय सम्बन्धी आंकड़े।

स्पष्ट है कि सिविल सेवा प्रारम्भिक परीक्षा, 29 सितम्बर 1991 को आयोजित की गई थी, तथा इस परीक्षा में सम्मिलित विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के सभी आंकड़े इसी तिथि से सम्बन्धित होंगे। अतः इन आंकड़ों को हम अनुप्रस्थ आंकड़ें कहेंगे।

इसी प्रकार हम जानते हैं कि सिविल सेवा परीक्षा में सम्मिलित होने वाले परीक्षार्थियों की अधिकतम आयु सीमा 28 वर्ष है, (परीक्षा, वर्ष की तिथि 1 अग्स्त को) तथा परीक्षा में बैठने के लिये आवेदन करते समय प्रत्येक परीक्षार्थी प्रवेश फार्म में वर्ष के 1 अग्स्त को अपनी आयु का विवरण (वर्ष, माह तथा दिनों से) देता है। अन्य शब्दों में संघ लोक सेवा आयोग के पास परीक्षार्थियों की आयु के सभी आंकड़ों एक ही तिथि (परीक्षा वर्ष के 1 अगस्त) से सम्बन्धित होंगे। अर्थात आयु के इन आंकड़ों को हम अनुप्रस्थ आंकड़े कहेंगे। इसी प्रकार आयकर विभाग के पास लोगें की आय के आंकड़ें एक वित्तीय वर्ष विशेष (विशिष्ट वित्तीय वर्ष में 1 अप्रैल से परवर्ती 31 मार्च की समयावधि) से सम्बन्धित हैं, इसलिए ये अनुप्रस्थ आंकड़े होगे। इसी प्रकार लोगें की ऊंचाई तथा वचन के आंकड़े भी अनुप्रस्थ आंकड़ों की श्रेणी मे आते हैं।

15.4.1 काल श्रृंखला तथा आरेखीय प्रदर्शन –

काल श्रृंखला आंकड़ों को तीन प्रकार के आरेखों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है–

- बिन्दु रेखीय अथवा रेखाचित्रीय आरेख
- दण्ड चित्र
- प्रतीक चित्र

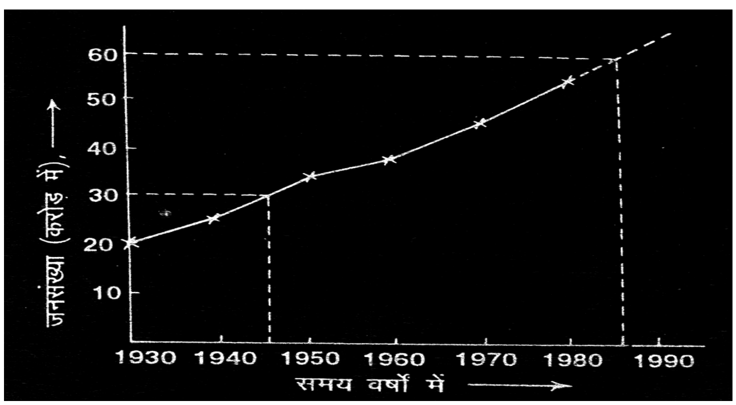
15.4.1.1 रेखाचित्रीय आरेख – उपर्युक्त जनंख्या आंकड़ों का रेखाचित्रीय आरेख बनाने के लिये सर्वप्रथम हम चरराशियों के परिसर को ज्ञात करते हैं। आंकड़ें को देखने से स्पष्ट है कि स्वतंत्र चरराशि समय के मान 1930 से 1980 के मध्य तथा आश्रित चरराशि जनसंख्या में मान 20 करोड़ (चरराशि का न्यूनतम मान) तथा 54.96 करोड़ (चरराशि का अधिकतम) मान के मध्य हैं।

अब एक ग्राफ पेपर (सेन्टीमीटर अथवा इंच ग्राफ पेपर) पर हम सबसे पहले अक्षों को अंकित करते हैं। X–अक्ष पर हम स्वतंत्र चरराशि समय (वर्षों में) के मानों को तथा इसी प्रकार Y–अक्ष पर आश्रित चरराशि, जनसंख्या (करोड़ों में) के मानों को इनके दिये हुए परिसरों के अनुसार अंकित करते हैं।

स्पष्ट है कि समय का न्यूनतम मान, 1930 चूंकि शून्य से अत्यधिक दूरी पर है,. अतः समय के न्यूनतम मान को हम मूल बिन्दु पर ही प्रदर्शित करते हैं। इस प्रक्रिया से ग्राफ पेपर का एक बड़ा भाग बर्बाद होने से बच जाता है। जनसंख्या के मानों में न्यूनतम मान (20 करोड़) चूंकि शून्य से अधिक दूरी पर नहीं है, अतः Y–अक्ष पर जनसंख्याके मानों को शून्य से लग्भग 60 करोड़ तक अंकित किया गया है।

अब आंकड़ों में दिये हुए वर्षों एवं सम्बन्धित जनसंख्या के आंकड़ों को ग्राफ बिन्दुओं के रूप में अंकित किया जाता है। प्राप्त बिन्दुओं को क्रम से सीधी रेखाओं द्वारा जोड़ने पर टेढ़ी–मेढ़ी रेखाओं का जो आरेख प्रापत होता है उसे रेखाचित्रीय आरेख अथवा बिन्दुरेखीय आरेख कहते हैं।

रेखाचित्रीय आरेख हमें तीन तथ्यों की जानकारी देते हैं – (1) आंकड़ों की सामान्य अथवा दीर्घकालीन प्रवृत्ति, (2) किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य रेखा चित्रीय आरेख के रेखीय खण्ड जनसंख्या के वार्षिक परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करते हैं। (3) रेखीचित्रीय आरेख चरराशि के अनुमान अथवा पूर्वानुमान ज्ञात करने में भी सहायक होते हैं।



चित्र से स्पष्ट है कि समयोपरि जनसंख्या के मानों का आरेख दाहिनी ओर उठता हुआ है, अतः जनसंख्या की सामान्य (अथवा दीर्घकालीन) प्रवृत्ति बढ़ने की है। आरेख उच्चावचनों अथवा अत्यधिक उतार–चढ़ाव से रहित है, अन्य शब्दों में समयावधि 1930 से 1980 के मध्य देश की जनसंख्या स्थाई दर से बढ़ती रही है। विभिन्न दशकों में जनसंख्या की वार्षिक संवृद्धि दर (अर्थात् जनसंख्या के मानों में प्रतिवर्ष बढ़ोत्तरी) ज्ञात करने के लिये हम रखा चित्रीय आरेख के विभिन्न रेखीय खण्डों (अर्थात् आरेख पर बिन्दुओं को जोड़ने वाली सीधी रेखाओं) के मध्य जनसंख्या के वार्षिक परिवर्तनों को ज्ञात करते हैं। इनका सूत्र निम्न प्रकार है–

$$\text{समयावधि विशेष में जनसंख्या का वार्षिक परिवर्तन} = \frac{\text{समयावधि में जनसंख्या का परिवर्तन}}{\text{वर्षों की संख्या}}$$

अब हम समयावधि 1930 – 1940 के मध्य जनसंक्य के औसत वार्षिक परिवर्तन को ज्ञात कर सकते हैं। आरेख से –

वर्ष 1930 की जनसंख्या = 20 करोड़

समयावधि में जनसंख्या का परिवर्तन = 4.9 करोड़

समयावधि (1930–1940) के मध्य वर्षों की संख्या= 4.9/10 =0.49 करोड़ प्रतिवर्ष

अर्थात् समाधावधि 1930–1940 मे देश की जनसंख्या औसतन 0.49 करोड़ अथवा 29 लाख प्रतिवर्ष बढ़ती रही है। इसी प्रकार अन्य समयावधियों में हम जनसंख्या के औसत वार्षिक परिवर्तन की दरों को भी ज्ञात कर सकते हैं। इनकी गणना को निम्न सारिणी में प्रदर्शित किया गया है –

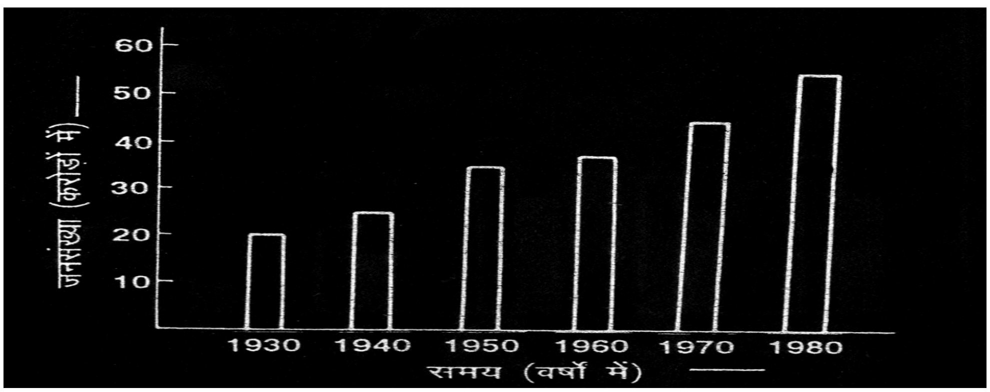
वर्ष	जनसंख्या (करोड़ों में)	समयावधि	समयावधि में जनसंख्या परि. (करोड़ों में)	वर्षों की संख्या	औसतवार्षिक परिवर्तन (करोड़ों में)
1930	20				
1940	24.9	1930–40	4.9	10	0.49
1950	35.1	1940–50	10.2	10	1.02
1960	38	1950–60	2.9	10	0.29
1970	45	1960–70	7.0	10	0.70
1980	54.9	1970–80	9.9	10	0.99

गणितीय अवधारणाओं के परिचित विद्यार्थी समझ गए होंगे कि विभिन्न समयावधियों में जनसंख्या की निरपेक्ष दर वास्तव में रेखाचित्रीय आरेख के संगत रखीय खण्डों के ढाल के बराबर है तथा अधिक तिरछी रेखाओं का ढाल अधिक तथा कम तिरछी रेखाओं का ढाल कम होता है। आरेख मं समयावधि 1930–40 से सम्बन्धित रेखीय खण्ड, 1940–50 समयावधि से सम्बन्धित रेखीय खण्ड की तुलना में कम तिरछा है (अथवा अपेक्षाकृत समानान्तर है) तथा जनसंख्या परिवर्तन की निम्न वार्षिक वृद्धि (49 लाख प्रतिवर्ष) को प्रदर्शित करता है। समयावधि 1940–50 मं जनसंख्या की वार्षिक वृद्धि 1.02 करोड़ प्रतिवर्ष है।

15.4.1.2 दण्ड चित्र – दण्ड चित्र का तात्पर्य है – आंकड़ों का दण्डों के द्वारा प्रदर्शन। आंकड़ों को प्रदर्शित करने की यह सर्वाधिक प्रचलित विधि है।

वास्तव में सांख्यिकीय आरेखों का रचना का मुख्य उद्देश्य आम व्यित्ति को सांख्यिकीय तथ्यों की जानकारी देना होता है। आरेखों का प्रभाव मस्तिष्क पर अधिक स्थाई तथा प्रभावपूर्ण होता है, तथा ये सांख्यिकीय तथ्यों की सहज/सुलभ व्याख्या करने में सुलभ होते हैं।

रेखाचित्रीय आरेख की भाँति ही यहां भी हम स्वतन्त्र चरराशि के मानों (वर्षों को) X–अक्ष पर तथा आश्रित चरराशि, जनसंख्या के मानो को Y–अक्ष पर दर्शाते हैं। अब प्रत्येक समय बिन्दु (वर्ष) पर हम सम्बन्धित जनसंख्या के बराबर ऊंचाई के दण्ड निर्मित करते हैं। सभी दण्डों की चौड़ाइयां परस्पर समान होती हैं तथा विभिन्न दण्डों के बीच लग्भग दण्डों की चौड़ी के बराबर दूरी छोड़ी जाती है। जनसंख्या आंकड़ों से सम्बन्धित दण्ड चित्र को चित्र द्वारा प्रदर्शित किया ग्या है। दण्ड चित्र आंकड़ों की आवृत्ति के अतिरिक्त और कोई महत्वपूर्ण जानकारी नहीं देता है – न तो यह विभिन्न समयावधि में चरराशि के परिवर्तन की दर को दर्शाता है, तथा नहीं दण्ड चित्र का प्रयोग आंकड़ों के अनुमान अथवा पूर्वानुमान ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है। दण्ड चित्र का महत्व दृष्टिगत अधिक है, विश्लेषण के दृष्टिकोण से इस आरेख की उपयोगिता सीमित है।

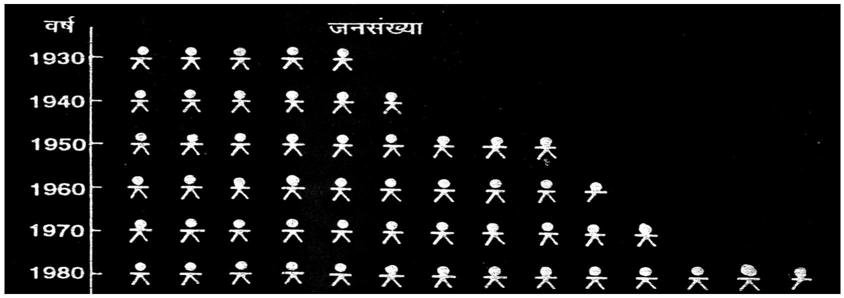


यहां इस तथ्य की ओर संकेत करना आवश्यक है कि यहां सारिणी में आंकड़ों के वास्तविक मानों को ही दर्शाया जाता है, वहाँ चित्रों अथवा आरेखों में केवल उनके सन्निकट मानों को ही दर्शाया जा सकता है।

15.4.1.3 प्रतीक चित्र – प्रतीक चित्र का अर्थ है, आंकड़ों की प्रतीकों अथवा चिह्नों के द्वारा प्रदर्शित करना है। इस विधि के अन्तर्गत विभिन्न समय बिन्दुओं पर चरराशि के परिमाण को प्रतीकों अथवा आकृतियों का संख्या के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

इस प्रस्तुतीकरण का उद्देश्य सांख्यिकीय आंकड़ों के मुख्य तथ्यों को सहज तथा सरलतम रूप में व्यक्त करना होता है। आरेख बनाने के लिये सर्वप्रथम हम आंकड़ों से सम्बन्धित एक उपयुक्त प्रतीक का चुनाव करते हैं, तत्पश्चात् आंकड़ों के मानं को प्रतीकों की संख्या के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। जैसे–मानव जनसंख्या को प्रदर्शित करने के लिये सर्वाधित उपयुक्त प्रतीक है–मनुष्य की आकृति।

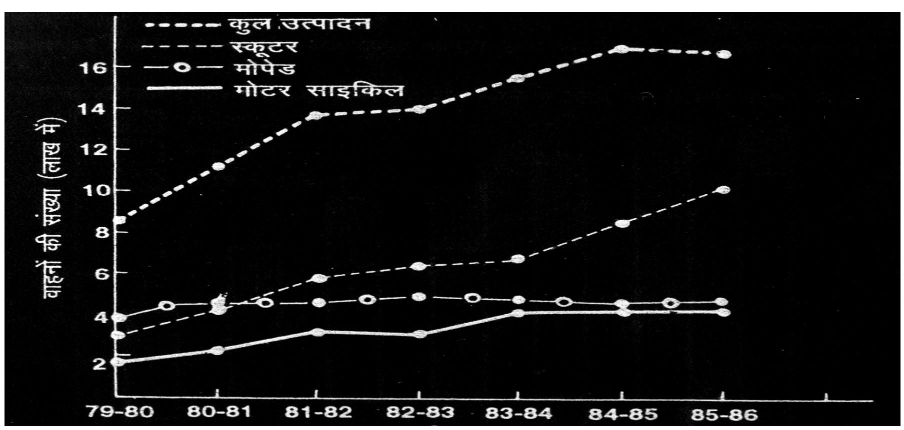
इस प्रकार के आरेखों का प्रयोग समाचार–पत्र पत्रिकाओं तथा टी.वी. परिचर्चाओं में प्रचुर रूप से किया जाता है। इस आरेख में बहुधा तकनीकों का प्रयोग भी किया जाता है, जैसे चरराशि के मानों को गड्डियों की लम्बाई अथवा संख्या के द्वारा भी प्रदर्शित किया जाता है।



यदि समय अन्तराल के आंकड़ों में एक चरराशि के मानों को दर्शाया गया हो तो इस प्रकार के आंकड़ों को एक चरीय कालश्रृंखला आंकड़े कहा जाता है। यदि समयोपरि दो चरराशियों के मानों से सम्बन्धित आंकड़ो दिये हुए हों तो आंकड़ों को द्विचरीय काल श्रृंखला आंकड़े कहते हैं। द्विचरीय काल–श्रृंखला आंकड़ों को मुख्यतः निम्न आरेखों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है –

- रेखाचित्रीय आरेख
- बहुदण्ड चित्र
- संघटक–भाग दण्ड चित्र
- प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र

1. **रेखाचित्रीय आरेख** – आंकड़ों से सम्बन्धित रेखाचित्रीय आरेख निम्न प्रकार है– आरेख में X.अक्ष पर स्वतंत्र चरराशि समय (वर्षों में) को तथा Y–अक्ष पर सभी प्रकार के वाहनों की संख्या (लाखो में) दर्शाया गया है। चारों चरराशियों के आरेखों को अलग–अलग प्रकार की रेखाओं के द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा इनके सूचक को ग्राफ पर दाहिनी ओर ऊपर की दिशा में अंकित किया गया है।

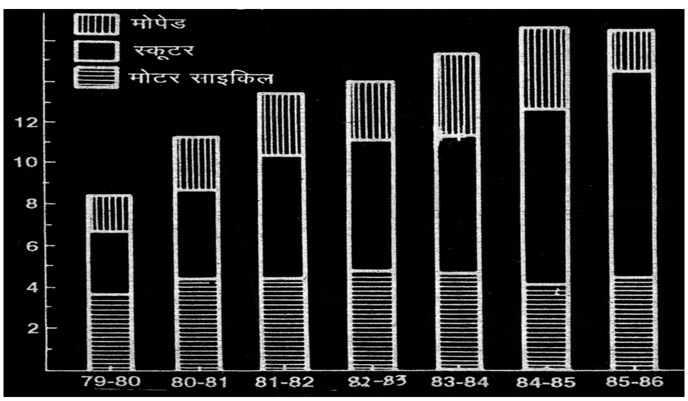


आरेख में स्कूटर एवं वाहनों के कुल उत्पादन की दीर्घकालीन प्रवृत्ति बढ़ने की है, जबकि अन्य वाहनों का उत्पादन समयोपरि लगभग स्थिर बना हुआ है। स्कूटर तथा मोपेड के

आरेख निरन्तर मोटर साइकिल के आरेख के ऊपर हैं, जो इस तथ्य को प्रदर्शित करते हैं कि मोटर साइकिल की तुलना में इन वाहनों का उत्पादन सदैव अधिक रहा है, जो कि जनसाधारण में इन वाहनों की लोकप्रियता को प्रदर्शित करता है। लोकप्रियता की दृष्टि से स्कूटर का स्थान श्रेष्ठ है तथा वर्ष 81–82 से स्कूटर का आरेख ऊपर की दिशा में तिरछा होता गया है जो इस बात का द्योतक है कि वर्ष 83–84 से स्कूटर का वार्षिक दर में तीव्र वृद्धि हुई है।

इसी प्रकार के और भी बहुत सारे तथ्य रेखाचित्रीय आरेख के आधार पर ज्ञात किये जा सकते हैं, इसके अतिरिक्त इस आरेख की चरराशियों के मानों के अनुसार मान पूर्वानुमान ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

2. बहुदण्ड चित्र – त्रिचरीय काल–श्रृंखला आंकड़ों को दण्ड आरेख के द्वारा प्रदर्शित करने के लिये हम प्रत्येक समय बिन्दु तक तीन दण्ड (प्रत्येक चरराशि के मान के लिये एक दण्ड) खींचते हैं। दण्डों की ऊंचाइयाँ सम्बन्धित चरराशियों के मानों को प्रदर्शित करती हैं।



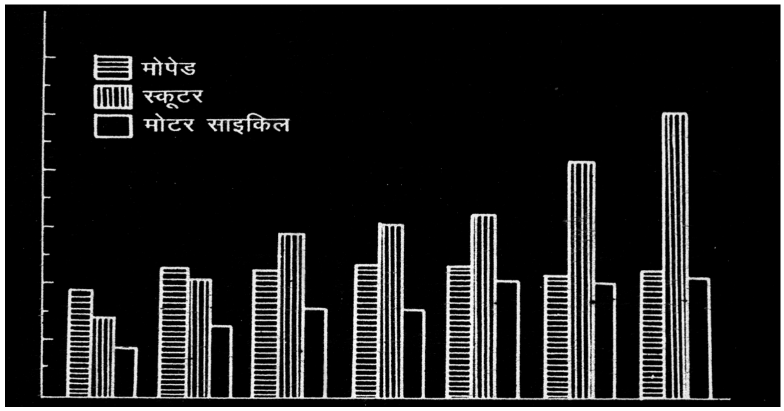
चूँकि प्रत्येक समयबिन्दु पर आंकड़ों को एक से अधिक दण्ड के द्वारा प्रदर्शित किया गया है, इसलिये इस आरेख को बहुदण्ड चित्र कहा जाता है।

बहुदण्ड चित्र चरराशियों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अलावा अन्य कोई जानकारी नहीं हेता, अतः विश्लेषण की दृष्टि से रेखाचित्रीय आरेख बहुदण्ड से श्रेष्ठ है। बहुदण्ड आरेख का महत्व केवल दृष्टिग्त है तथा इसे मुख्यतः जनसाधारण को सांख्यिकीय जानकारी देने के उद्देश्य से ही निर्मित किया जाता है।

3.संघटक–भाग दण्ड चित्र – संघटक भाग दण्ड चित्र से सभी तथ्यों की जानकारी हमें एक ही आरेख से प्राप्त हो जाती है। वास्तव में संघटक भाग दण्ड चित्र यह प्रदर्शित करता है कि समय राशि, समयोपरि अपने संघटकों में किस प्रकार विभाजित हो रही है।

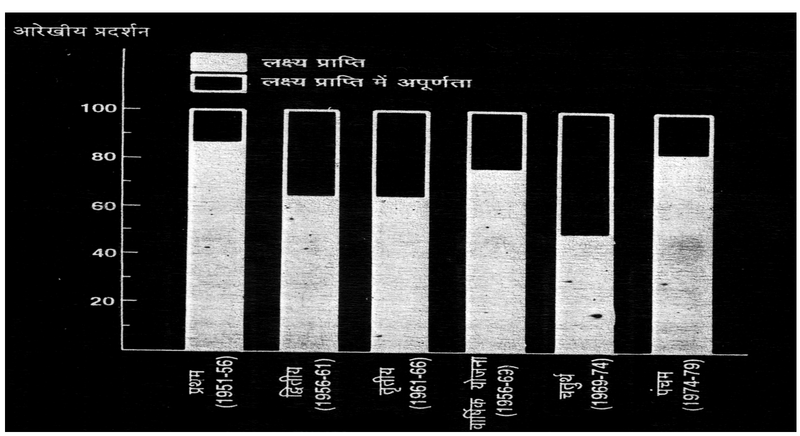
आरेख खींचने के लिये सबसे पहले हम विभिन्न समयों में समग्र राशि अथवा वस्तु का कुल

उत्पादन (यदि यह पहले से न दिया हो) ज्ञात करते हैं। तत्पश्चात् समग्र राशि को प्रदर्शित करने वाला एक सरल दण्ड चित्र बनाते हैं, इसके उपरान्त प्रत्येक दण्ड को (कुल अथवा समग्र राशि को) तीन भागें अथवा संघटकों में विभाजित करते हैं। दण्डों के ये संघटक विभिन्न चरराशियों के समयोपरि मानों को प्रदर्शित करते हैं। चित्र निम्न प्रकार है।



4. प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र – संघटक भाग चित्र हमें निरपेक्ष मानों के बारे में इनकी मूल प्रवृत्तियों के बारे में तो जानकारी देता है परन्तु कुल लक्ष्य में संघटक राशियों के अनुपातों के विषय में कोई जानकारी नहीं देता। अनुपातों से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करने के लिये निर्मित किये जाने वाले आरेख को हम प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र कहते हैं।

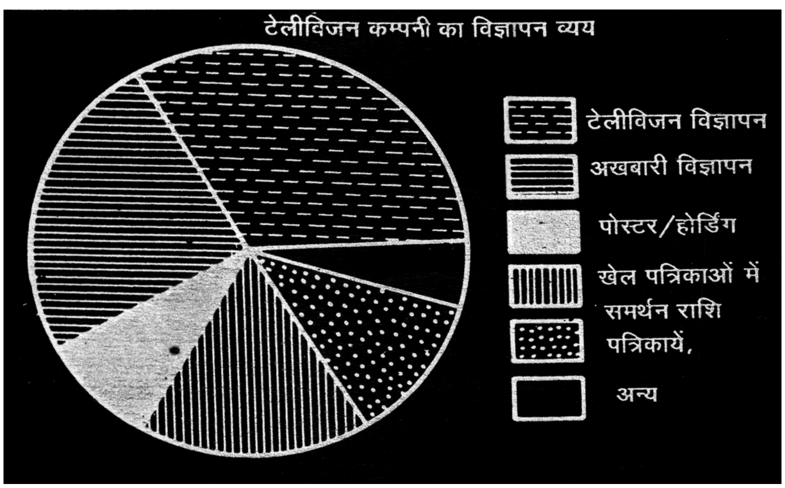
प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र तथा संघटक भाग दण्ड चित्र में केवल इतना अन्तर है कि संघटक भाग दण्ड चित्र जहां निरपेक्ष मानों के परिवर्तन की व्याख्या करता है, वहीं प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र संगत प्रतिशतों की व्याख्या करता है। प्रतिशतों को ज्ञात करने के पश्चात्, इन्हें एक संघटक भाग दण्ड चित्र के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह आरेख चूंकि प्रतिशतों की व्याख्या करता है, अतः इसे हम प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र कहते हैं।



15.4.1.4 पाई आरेख अथवा वृत्त चित्र

पाई आरेख अथवा वृत्त चित्र वास्तव में यह दर्शाता है कि एक समग्र राशि अथवा कुल राशि (जिसे 100 प्रतिशत के बराबर माल लिया जाता है) विभिन्न संघटक राशियों में किस प्रकार वर्गीकृत अथवा विभाजित है। अन्य शब्दों में यह समग्र राशि (100 प्रतिशत) के संघटक राशियों में सापेक्षिक अथवा प्रतिशत वितरण की व्याख्या करता है।

इस आरेख के अन्तर्गत समग्र अथवा कुल राशि को एक वृत्त के क्षेत्रफल के द्वारा तथा संघटक राशियों को वृत्तांओं के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। आरेख में बड़े वृत्तांश, बड़े प्रतिशतों (अनुपातों को) तथा छोटे वृत्तांश छोटे प्रतिशतों को प्रदर्शित करते हैं। वृत्तांशों का आकार अथवा क्षेत्रफल वृत्तांश कोण के ऊपर निर्भर करता है – यदि आरेख में किसी संघटक राशि से सम्बन्धित वृत्तांश का वृत्तांश कोण 90^0 है, तो वृत्तांश क्षेत्रफल वृत्त क्षेत्रफल के 1/4 के बराबर होग इसका अर्थ यह होग कि संघटक राशि का मान, समग्र राशि के 1/4 अथवा 25 प्रतिशत के बराबर है। इसी भांति 60^0 वृत्तांश कोण वृत्त के 1/6 क्षेत्रफल को अर्थात् इस तथ्य को प्रदर्शित करता हो कि समग्र राशि में संघटक राशि का अनुपात 1/6 है।

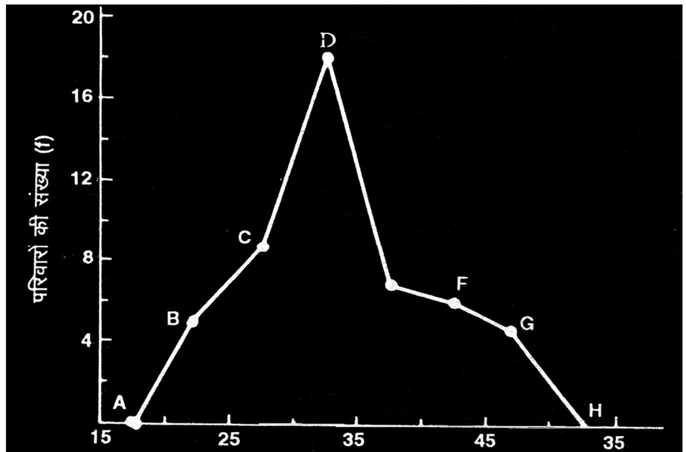


आरेख में सबसे बड़ा वृत्तांश व्यय की सर्वाधिक महत्वपूर्ण मद को तथा क्रम से घटते हुए वृत्तांश क्रमशः मदों के घटते हुए महत्त्व को प्रदर्शित करते हैं। अन्य शब्दों में आरेख में टेलीविजन विज्ञापन से सम्बन्धित वृत्तांश सबसे बड़ा है, अर्थात् व्यापारिक प्रतिष्ठान टेलीविजन विज्ञापन को अन्य विज्ञापन माध्यमों की तुलना में श्रेष्ठतम मानता है। महत्व के अनुसार क्रम में दूसरा स्थान अखबारी विज्ञापनों का है, तत्पश्चात् खेल प्रतिस्पर्धाओं में समर्थन राशि का तथा सबसे कम महत्व 'अन्य' विज्ञापन माध्यमों का है।

15.4.1.5 आवृत्ति बहुभुज – बहुभुज से हमारा आशय एक ऐसी ज्यामितीय आकृति से है, जिसमें अनेक भुजायें होती हैं, तता आकृति बन्द होती है। स्पष्ट है कि आवृत्ति बहुभुज भी

एक अनेकों भुजाओं वाली बन्द आकृति होगी।

आवृत्ति बहुभुज निर्मित करने के लिये हग्म वर्गन्तरों के मध्य मानों को X-अक्ष पर तथा आवृत्तियों को Y-अक्ष पर अंकित करते हैं। वर्गन्तर के मध्य मान से तात्पर्य वर्गन्तर सीमाओं के माध्य से है।



चित्र (16)

मध्यमानों एवं आवृत्तियों के संगत मानों को ग्राफ पर बिन्दुओं के रूप में अंकित करने के बाद उन्हें क्रम से सीधी रेखाओं के द्वारा जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार जो प्रकृति प्राप्त होती है, वह अनेकों भुजाओं वाली आकृति तो है, परन्तु बन्द नहीं है, वरन् यह बायों तथा दाहिनी ओर खुली है।

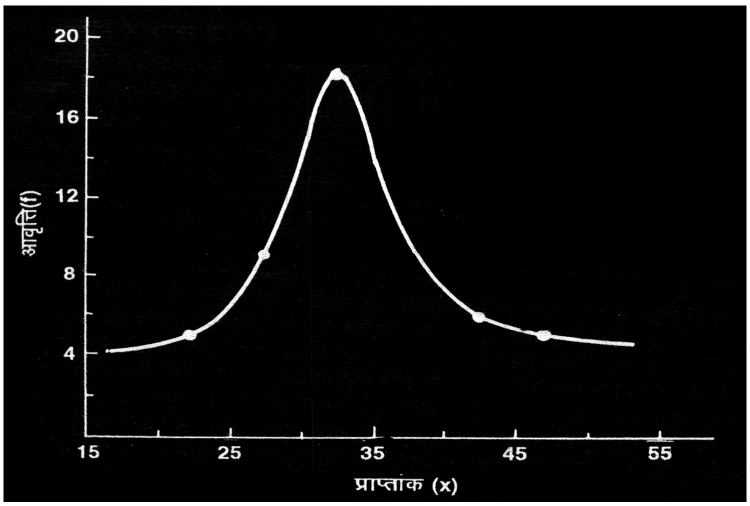
आकृति को बन्द करने के लिये हम प्रथम वर्गन्तर से पहले एक और वर्गन्तर लेते हैं। वर्गन्तर के मध्यमान तथा आवृत्ति शून्य को ग्राफ में अंकित करने पर हमें X.अक्ष पर बिन्दु प्राप्त हो जाता है, जिसे सीधी रेखा में जोड़ने पर आकृति बायीं ओर बन्द हो जाती है। आकृति को दाहिनी ओर बन्द कनरे के लिये भी इसी प्रक्रिया को अपनाया जाता है।

आवृत्ति बहुभुज तथा X.अक्ष के मध्य क्षेत्रफल आंकड़ों की कुल संख्या को प्रदर्शित करता है।

15.4.1.6 आवृत्ति वक्र –

आवृत्ति वक्र तथा आवृत्ति बहुभुज बनाने की समस्त प्रक्रिया पूर्णतया समान है। यहां भी X - अक्ष पर वर्गन्तरों के मध्यमानों को तथा Y- अक्ष पर आवृत्तियों को अंकित करते हैं। प्राप्त बिन्दुओं को एक सतत वक्र से जोड़ देने पर आवृत्ति वक्र प्राप्त हो जाता है।

आवृत्ति वक्र वास्तव में आवृत्ति बिन्दुओं अर्थात् ग्राफ पर अंकित बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ है — अन्य शब्दों में यह आवश्यक नहीं है कि आरेख का प्रत्येक बिन्दु आवृत्ति वक्र पर स्थित हो। आवृत्ति वक्र, आंकड़ों से सम्बन्धित बहुत सारी जानकारी देने में सहायक होते हैं। आवृत्ति वक्र को देखने मात्र से हमें चरराशि के परिसर, अधिकतम आवृत्ति वाला चरराशि का मान, आवृत्तियों के संकेन्द्रण की स्थिति आंकड़ों का अनुमानित औसत इत्यादि जानकरियां प्राप्त हो जाती हैं।



आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज की भाँति है, आवृत्ति वक्र तथा X.अक्ष के मध्य क्षेत्रफल आंकड़ों की कुल संख्या को प्रदर्शित करता है। आवृत्ति वक्र को विभिन्न चरराशियों के मानों की आवृत्तियों को अनुमानित करने के लिये प्रयुक्त किया जा सकता है।

15.4.1.7 संचयी आवृत्ति वक्र —

संचयी आवृत्ति का अर्थ है–आवृत्तियों का योग। आवृत्तियों का योग दो प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है 1. ऊपर 2. नीचे से। आवृत्तियों का योग ऊपर से लेने पर प्राप्त संचयी आवृत्तियों का क्रम वर्द्धमान होता है, अतः इन्हें वर्द्धमान अथवा आरोही संचयी आवृत्ति कहते हैं। इसकी प्रकार आवृत्तियों का योग सारिणी में नीचे से लेने पर, जो संचयी आवृत्तियों प्राप्त होती हैं, इनका क्रम ह्रासमान होता है तथा इन्हें ह्रासमान अथवा अवरोही संचयी आवृत्तियां कहते हैं।

15.5 अभ्यास प्रश्न

15.5.1 लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1 — निम्न पर टिप्पणी लिखिये —

1— दण्ड एवं वृत्त चित्र
2— पाई ग्राफ
3— प्रतीक ग्राफ

प्रश्न 2 – आंकड़ों को किस विधियों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है ?

15.5.2 बहुविकल्पीय प्रश्न

1.ग्राफीय विधि से आंकड़ें –

(A) सुबोध बनते हैं

(B) स्मरणीय बनते है

(C) आकर्षक बनते हैं

(D) उपर्युक्त सभी

Ans. – (C)

15.6 सारांश

अन्त में यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकीय आंकड़ों को चित्र द्वारा ग्राफीय निरूपण करने से यह अधिक सरल और सग्राह्य बन जाते हैं। चित्रों द्वारा प्रदर्शित आंकड़ें कठिन प्रकिया से सरल प्रक्रिया में परिवर्तित हो जाते हैं।

अतः यह इकाई आप सभी के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

15.7 संदर्भ ग्रन्थ

1. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
2. Bhardwaj, R. S. (2000), Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
3. Singh, S. P. (2010), Principales of Statistic, S & Chand Publishing House.
4. Kumar, Anil (2008), Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

15.8 निबन्धात्मक प्रश्न

1.निम्नांकित आंकड़ों को उपयुक्त आरेख के द्वारा दर्शाइये –

व्यय की मदें परिवार A.परिवार B.भोजन 150 250

कपड़ा 75 20 मकान किराया 60 100

बिजली तथा ईंधन 40 50

अन्य 57 200

2 निम्नलिखित सारिणी एक महाविद्यालय में 1965, 1968 एवं 1970 की विभिन्न परीक्षाओं में सम्मिलित होने वाले विद्यार्थियों की संख्या प्रदर्शित करती है ?

परीक्षा	छात्रों की संख्या (परीक्षा में बैठने वाले)		
	1965	**1980**	**1984**
बी.ए.	200	300	400
बी.काम.	100	125	150
बी.एस–सी.	150	250	400

3.निम्नांकित आंकड़ों को आरेखों के द्वारा प्रदर्शित कीजिए ?

वर्ष	1977	1978	1979	1980	1981	1982
निर्यात (करोड़ रु.)	70	80	85	80	90	110
आयात (करोड़ रु.)	65	85	72	85	85	102

4. निम्नांकित आंकड़ों को वृत्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए –

वर्ष	अनाज	तिलहन	गन्ना	कपास
1963–64	3380	155	368	852
1964–65	4239	220	446	810
1965–66	3960	200	510	840

5.निम्नांकित समंकों की सहायता से आवृत्ति बहुभुत निर्मित कीजिए –

मूल्य (रूपये में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	60–70
व्यक्तियों की संख्या	3	10	14	24	17	143

एमएईसी–104
(MAEC – 104)

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

भाग 2
(Part 2)

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
फोन नं. 05946 – 261122, 261123
टॉल फ्री नं. 18001804025
फैक्स नं. 05946–264232, ई–मेल info@uou.ac.in
http://uou.ac.in

पाठ्यक्रम समिति

प्रो0 गिरिजा प्रसाद पाण्डे, निदेशक समाज विज्ञान विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल	**प्रो0 मधुबाला,** आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग, इंदिरा गाँधी मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली
प्रो0 एम0 के0 धडोलिया, आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग, वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा, राजस्थान	**प्रो0 आर0 सी0 मिश्र** निदेशक वाणिज्य एवं प्रबन्ध विद्याशाखा, विशेष आमंत्रित सदस्य उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी
प्रो0 एस0 पी0 तिवारी, आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग, डॉ0 आर0 एम0 एल0 अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद उ0 प्र0	**डॉ0 अमितेन्द्र सिंह** अर्थशास्त्र विभाग उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल

पाठ्यक्रम संयोजन एवं संपादन

डॉ0 अमितेन्द्र सिंह
अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

इकाई लेखन

इकाई लेखक	इकाई संख्या	इकाई लेखक	इकाई संख्या
डॉ. वी. के. निगम असिस्टेन्ट प्रोफेसर अर्थशास्त्र विभाग ई.सी.सी. इलाहाबाद, उ. प्र.	**1,2,3,4**	**डॉ. मोनिका मेहरोत्रा** असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, आई.आई पी.एम. कॉलेज इलाहाबाद, उ. प्र .	**13,14,15**
डॉ. अंकिता गुप्ता असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, महात्मा गाँधी काशी विद्यापीठ वाराणसी, उ.प्र.	**5,6,7,8** **19,20,21,22**	**डॉ. एस. वी. रावत** असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, एन. आर. ई.सी.पी.जी. कालेज खुर्जा, उ.प्र.	**16,17,18,** **28,29**
डॉ. अनामिका चौधरी असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग वाई.डी.पी.जी. कालेज लखीमपुर खीरी, उ. प्र.	**9,10,11,12,** **26,27**	**प्रो. आर. पी. सेन** प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग महात्मा गाँधी काशी विद्यापीठ वाराणसी, उ. प्र.	**23,24,25**

संस्करणः 2017
आई.एस.बी.एन.: 978-93-84632-99-1

प्रकाशकः कुल सचिव, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल – 263139
email: studies@uou.ac.in
मुद्रकः

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

एमएईसी – **104** (MAEC – 104)
भाग 2 (Part 2)

विषय–सूची

इकाई 16 समांगी उत्पादन फलन और प्रमेय

16.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र के अध्ययन में तथा विशेष तौर पर शोधकार्य में ऑकड़ों का अत्याधिक महत्वपूर्ण तथा निर्णायक उपयोग होता है क्योंकि ऑकड़ो के ऊपर ही समस्त विश्लेषण एवं निष्कर्ष आधारित होते हैं। ऑकड़ों का समुचित उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में किया जा सके। इसके लिये आवश्यक है कि ऑकड़ों का संकलन तथा प्रस्तुतीकरण वैज्ञानिक तौर तरीकों से किया जाये। पूर्व की इकाई में इसी सन्दर्भ में व्यापक अध्ययन किया ग्या है।

अर्थशास्त्र में परिमाणात्मक विधियों का प्रयोग अर्थपूर्ण तभी हो सकता है जबकि ऑकड़ों का संकलन तथा प्रस्तुतीकरण समुचित तौर पर किया ग्या हो। अर्थशास्त्र कई महत्वपूर्ण उत्पादन फलनों का अध्ययन भी ऑकड़ों पर ही आधारित है। वर्तमान ईकाई में उत्पादन फलन की विभिन्न अवधारणओं के बारे में एवं खास तौर पर संमागी उत्पादन फलन तथा उससे सम्बन्धित प्रमेयों का अध्ययन किया जायेग।

उत्पादन फलन में उत्पादन के साधनों तथा उनके आपसी सम्बन्धों एवं तत् पश्चात् साधनों के उत्पादन पर प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। यानि आग्त (इनपुट) तथा निर्ग्त (आउटपुट) में क्या सम्बन्ध स्थापित हो रहा है इन सम्बन्धों के आधार पर उत्पादन फलनों की प्रकृति तथा विशेषतायें निर्धारित होती है जिन का व्यापक अध्ययन वर्तमान में व्यापक तौर पर किया जायेग।

16.2 उद्देश्य

वर्तमान इकाई में निम्न उद्देश्यों का अध्ययन किया जायेगा –

→ उत्पादन फलन क्या होता है?

→ उत्पादन फलन की मान्यतायें तथा विशेषतायें कौन–कौन सी है?

→ महत्वपूर्ण उत्पादन फलन कौन–कौन से है?

→ समांगी उत्पादन फलन से क्या तात्पर्य है?

→ समांगी उत्पादन फलन की विशेषतायें कौन–कौन सी है?

→ समांगी उत्पादन फलन से सम्बन्धित कौन–कौन सी प्रमेय है तथा इनको किस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है?

→ समांगी उत्पादन फलन का अर्थशास्त्र के अध्ययन में क्या महत्व तथा उपयोग है?

16.3 उत्पादन फलन

उत्पत्ति के नियमों की व्यापक विवेचना उत्पादन फलन के विश्लेषण से ही आरम्भ होती है। उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन के साधनों की सहायता यानि आदा यानि इनपुट कहा जाता है तथा जिस वस्तु का उत्पादन होता है उसे प्रदा यानि आउटपुट कहते है। आदा तथा प्रदा के मध्य तकनीकी सम्बन्ध को उत्पादन फलन से व्यक्त करते है। अथवा अगतो (इनपुट) तथा निर्गतों ((आऊटपुट) की मात्राओं के मध्य फलनात्मक सम्बन्धों को उत्पादन फलन व्यक्त करता है।

जैसे $Q = f(L,K)$

जहाँ $Q =$ उत्पादन, $f =$ फलन $L =$ श्रम $K =$ पूंजी।

यह उत्पादन फलन मात्र उत्पादन के दो साधनों श्रम तथा पूंजी पर ही निर्भर है।

प्रो0 वाटसन के अनुसार, ''किसी फर्म की भौतिक आगतों तथा उत्पाद की भौतिक मात्रा के बीच के सम्बन्ध को उत्पादन फलन कहते है।''

प्रो0 सैम्यूलसन के अनुसार, '' उत्पादन फलन वह तकनीकी सम्बन्ध है जो यह बताता है कि आगतों के प्रत्येक विशेष समूह द्वारा कितना उत्पादन किया जा सकता है। यह सम्बन्ध किसी दिये हुये तकनीकी ज्ञान के स्तर के लिये व्यक्त किया जाता है।''

16.4 उत्पादन फलन की मान्यतायें एवं विशेषतायें

उत्पादन फलन तभी सुचारू रूप से क्रियाशील रहता है जबकि निम्न मान्यताओं का पालन हो रहा हो–

- उत्पादन फलन एक निश्चित समय से सम्बन्धित होता है।
- साधनों की कीमत तथा तकनीकी में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहियें।
- फर्म का लागत व्यय दिया हुआ है।
- श्रम समरूप है तथा पूंजीग्त ईकाई में दिये समय में ह्रास नहीं हो रहा है।

यह उपरोक्त मान्यतायें समांगी उत्पादन फलन समेत सभी उत्पादन फलनों की है। इसी प्रकार सभी उत्पादन फलनों की कुछ सामान्य विशेषतायें होती है जोकि निम्नवत् है–

- उत्पादन फलन उत्पाद तथा साधनों के मध्य फलनात्मक एवं तकनीकी सम्बन्ध स्थापित करते है।

* उत्पादन फलन मूल्य निरपेक्ष होता है एवं फलन की कोई भी मौद्रिक विशेषता नहीं होती है। अर्थात फलन का सम्बन्ध केवल उत्पादन की भौतिक मात्रा से है।

* उत्पादन के साधनों को एक दूसरे के लिये प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

* मूल तथा उत्पादन फलन आर्थिक अवधाणा के बजाय इंजीजियरिंग की अवधारणा मानी जाती है।

* उत्पादन फलन स्थैतिक अर्थशास्त्र का विषय है क्योंकि यह साधनों की कीमत तकनीकी ज्ञान का स्तर एवं समयावधि को निश्चित मानकर कार्य करता है।

16.5 उत्पादन फलन के प्रकार

साधनों की स्थिरता एवं परिवर्तनशीलता के आधार पर उत्पादन फलन दो प्रकार के होते है –

(अ) परिवर्तनशील अनुपात का नियम।

(ब) पैमाने के प्रतिफल।

(अ) परिवर्तनशील अनुपात का नियम – परिवर्तनशील अनुपात के नियम का '' Law of Variable Proportions '' कहते है यह उत्पादन फलन अल्पकाल में ही लागू होता है। इस उत्पादन फलन के अन्र्तगत एक साधन को स्थिर रखकर दूसरे साधन को परिवर्तनशील बनाया जाता है। इसे ह्रासमान प्रतिफल का नियम भी कहते है।

मार्शल ने ह्रासमान प्रतिफल के नियम को मात्र कृषि तक ही सीमित रखा परन्तु आधुनिक अर्थशास्त्रियों के अनुसार यह सभी क्षेत्रों में लागू होता है।

यदि पूंजी को स्थिर किया जाये एवं श्रम की मात्रा में परिवर्तन किया जाये तो इस उत्पादन फलन में तीन स्थितियाँ या चरण प्राप्त होते है।

(!) प्रथम चरण में कुल उत्पादन बढती हुयी दर से प्राप्त होते है साथ ही सीमांत तथा औसत उत्पादन भी बढते हैं।

(!!) द्वितीय चरण कुल उत्पादन घटती हुयी दर से बढ़ता है तथा अधिकतम हो जाता है। सीमांत उत्पादन गिरता है तथा औसत उत्पादन के बराबर हो जाता है। उत्पादन की दृष्टि से यही अनुकूल चरण होता हैं।

(!!!) तीसरे चरण में कुल सीमांत तथा औसत उत्पादन सभी गिरते है।

(ब) पैमाने के प्रतिफल – पैमाने के प्रतिफल को अंग्रेजी "Return to Scale" कहते है यह उत्पादन फलन दीर्घकाल में लागु होता है तथा उत्पादन के सभी साधन परिवर्तनशील होते है। यह पैमाने के प्रतिफल तीन प्रकार के होते है जिनके बारे में विस्तार से चर्चा इकाई में आगे की जायेगी।

16.6 समांगी उत्पादन फलन

इस उत्पादन फलन को समरूप उत्पादन फलन भी कहते है अंग्रेजी में इसे "Homogenous Production Function" कहते है। समांगी उत्पादन फलन के महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है तथा अर्थशास्त्र के अध्ययन में इसका व्यापक उपयोग होता है। यदि किसी उत्पादन फलन में सभी आग्तो को m गुना बढ़ा दिया जाये तथा निर्गत या उत्पादन भी m की किसी घात के गुणन के रूप में बढ़ जाता है तो उत्पादन फलन को समांगी उत्पादन फलन कहते है। गणितीय रूप में इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$Q = f\ (L, K)$ ------------------------------------(i)

यदि आगतों को m गुना बढ़ाया जाये तो नया उत्पादन फलन

$P = f\,(mL, mK)$ ------------------------------------(ii)

यदि $P = m^K f\,(L, K)$ ------------------------------(iii)

इस प्रकार आगतों को m गुना बढ़ाने पर यदि उत्पादन को m की घात K के रूप में अगर व्यक्त किया जा सके तो उत्पादन फलन समांगी या समरूप होता है। m की घात K ''समरूपता की कोटि'' कहलाती है। यहॉ m कोई वास्तविक अंक है तथा K एक स्थिर राशि है। यह उत्पादन फलन K कोटि का समांगी उत्पादन फलन है।

इस उत्पादन फलन में दो महत्वपूर्ण तथ्य है पहला यह है कि m पूरी तरह गुणनखंड की प्रक्रिया के माध्यम से फलन के बाहर निकाला जा सके तथा दूसरा यह की m की घात K पूरी तरह से उत्पादन फलन की प्रकृति को व्यक्त करती है।

यदि K=1 , तो उत्पादन फलन प्रथम कोटि का समांगी उत्पादन फलन होगा। जिसे रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन भी कहते है।

यदि K=2, तो उत्पादन फलन द्वितीय कोटि का समरूप उत्पादन फलन होगा। इसी प्रकार K= n होने पर उत्पादन फलन n कोटि का समरूप उत्पादन फलन होगा।

समांगी उत्पादन फलन को निम्न उदाहरणों से और भी बेहतर समझा जा सकता है।

उदाहरण नं0 1, $z = f(X, y) = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}$

सिद्ध कीजिये कि यह समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजियें?

हल – यदि आगतो को m से गुणा किया जाये तो

$$f(mX, my) = \sqrt{a(mx)^2 + b(mx)(my) + c(my)^2}$$

$$= \sqrt{m^2ax^2 + bm^2xy + m^2cy^2}$$

$$= \sqrt{m^2(ax^2 + bxy + cy^2})$$

$$= m\ \sqrt{(ax^2 + bxy + cy^2}$$

$$= m.f(X, y) = mz$$

चूँकि इसे $f(mX, my) = m(X, y)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अतः यह समांगी उत्पादन फलन है एवं m की घात K का मान यहॉ पर '1' है। अतः समरूपता की कोटि भी एक होगी।

उदाहरण नं0 2 – $z = f(X, y) = \frac{x^2}{y^3}$

सिद्ध कीजिये कि यह एक समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिये?

हल – आगतों को m से गुणा करने पर

$$f(mX, my) = \frac{(mx)^2}{(my)^3}$$

$$= \frac{m^2x^2}{m^3y^3} = \frac{1}{m}\frac{x^2}{y^3} = m^{-1}\frac{x^2}{y^3}$$

$$f(mX, my) = m^{-1} f(X, y) = m^{-1}z$$

अतः यह एक समांगी उत्पादन फलन है तथा इसकी कोटि '–1' है।

16.7 समांगी उत्पादन फलन के विभिन्न स्वरूप

समांगी उत्पादन फलन के प्रकार तथा प्रकृति m की घात K पर निर्भर करती है जिसके आधार पर प्रतिफल निर्धारित होते है तथा उनके ऊपर उत्पादन फलन का स्वरूप निर्भर करता है जो कि निम्नवत् है–

* यदि m^K में $K = 1$ तो पैमाने के स्थिर प्रतिफल प्राप्त होगें। ऐसे उत्पादन फलन को प्रथम कोटि का समरूप उत्पादन फलन कहते है। इसे रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन के नाम से भी जाना जाता है। इस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषता यह होती है कि यदि उत्पादन के साधनों को जितने गुना बढ़ाया जाता है उत्पादन भी उसी अनुपात में बढ़ता है। यदि आगत दुगनी कर दी जायें तो निर्गत भी दुगनी हो जायेगी।
* यदि m^K में $K > 1$ तो पैमाने के बढ़ते हुये यानि वृद्धिमान प्रतिफल प्राप्त होगें तथा उत्पादन फलन का स्वरूप वृद्धिमान प्रकार का होग। इसके अर्न्तग्त आगतों में वृद्धि की तुलना में निर्गत में वृद्धि अधिक अनुपात में होती है। यानि अगर आगतों में दुगनी वृद्धि कर दी जाये तो निर्गत में वृद्धि दुगनी से अधिक होगी।
* यदि m^K में $K < 1$ तो पैमाने के बढ़ते हुये यानि ह्रासमान प्रतिफल प्राप्त होगें तथा उत्पादन फलन का स्वरूप ह्रासमान प्रकार का होग। इसके अर्न्तग्त आगतों में वृद्धि की तुलना में निर्ग्त में वृद्धि कम अनुपात में होती है। यदि आग्तों को दुगने से बढ़ाया गया है तो निर्गत में वृद्धि दुगने से कम होगी।

समांगी उत्पादन फलन एवं पैमाने के प्रतिफल

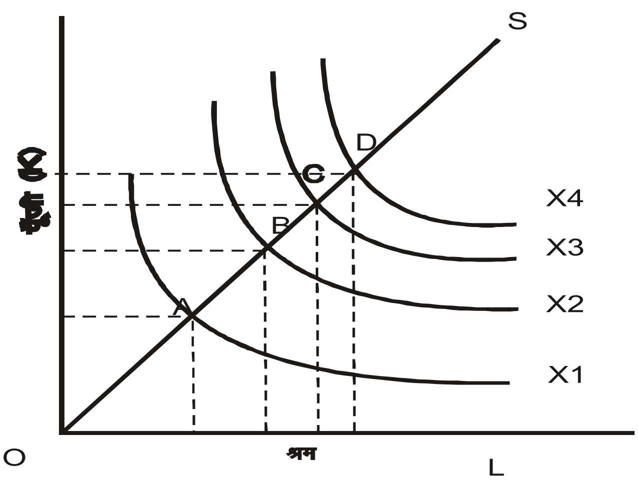
पैमाने के प्रतिफल उत्पादन फलन की दीर्घ कालीन प्रवृति को प्रर्दशित करते है। दीर्घकाल में पैमान के सभी साधन परिवर्तनशील होते है। साधनों में होने वाले परिवर्तनों के कारण से पैमाने पर मिलने वाले प्रतिफलों में भी परिवर्तन आता है तथा यह प्रतिफल बढ़ते हुये, घटते हुये तथा स्थिर प्रकार के हो सकते है। जिन्हें समांगी उत्पादन फलन अनुसार निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है :–

(अ) पैमाने के वर्द्धमान प्रतिफल –यदि उत्पत्ति के साधनों में एक निश्चित अनुपात में वृद्धि की जाती है परन्तु इसके कारण से मिलने वाला प्रतिफल में वृद्धि अधिक अनुपात में हो जाती है तो यह बढ़ते हुये या वर्द्धमान प्रतिफल कहलायेगा यानि

उत्पादन में अनुपातिक वृद्धि > साधनों की मात्रा में अनुपातिक वृद्धि अतः यदि उत्पादन के साधनों में 20 प्रतिशत अनुपात से वृद्धि की जाये तो उत्पादन में वृद्धि 20 प्रतिशत से अधिक हो जाती है तो यह वर्द्धमान प्रतिफल का उदाहरण होगा।

चित्र में os रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात कम होता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर घटती जायेगी।

यानि $AB > BC > CD$ जो कि वर्द्धमान प्रतिफल को निरूपित करता है। यानि $\propto +\beta > 1$

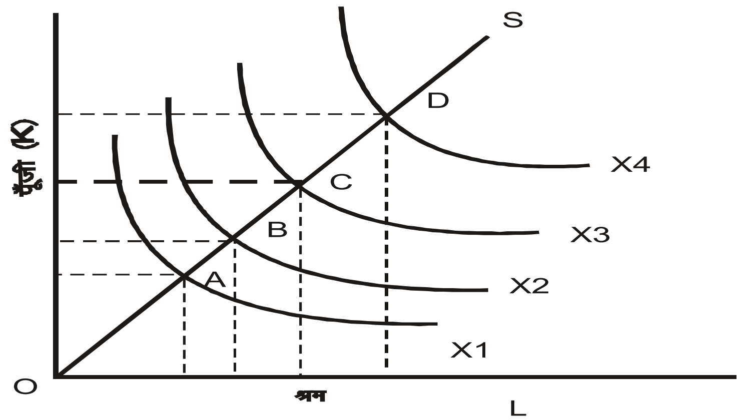


(ब) पैमाने का ह्रासमान प्रतिफल

इसके अनुसार उत्पत्ति के साधनों को जिस अनुपात में बढाया जाता है उसकी तुलना में उत्पादन में वृद्धि कम अनुपात में होती है तथा X_1, X_2, X_3, तथा X_4 सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरंतर बढ़ती जाती है।

$$AB < BC < CD$$

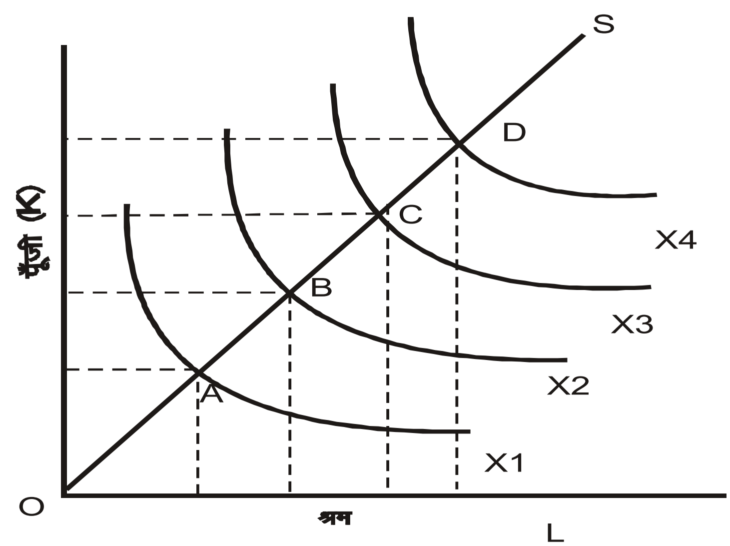
इस उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन में समान वृद्धि अर्थात 100 इकाई के लिये बढ़ते हुये साधनों की आवश्यकता पड़ेगी। यानि $\alpha + \beta < 1$



चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात बढता जायेगा तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर बढती जायेगी।

(स) पैमाने के स्थिर प्रतिफल

इस नियम के अनुसार यदि उत्पत्ति के समस्त साधनों को एक निश्चित अनुपात में बढ़ाया जाये ंतो उत्पादन भी उसी निश्चित अनुपात में बढ़ता है। सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी समान बनी रहेंगी तथा उत्पादन में प्रत्येक 100 ईकाई की वृद्धि में उत्पत्ति के समान साधनों की आवश्यकता होगी। यानि $AB = BC = CD$



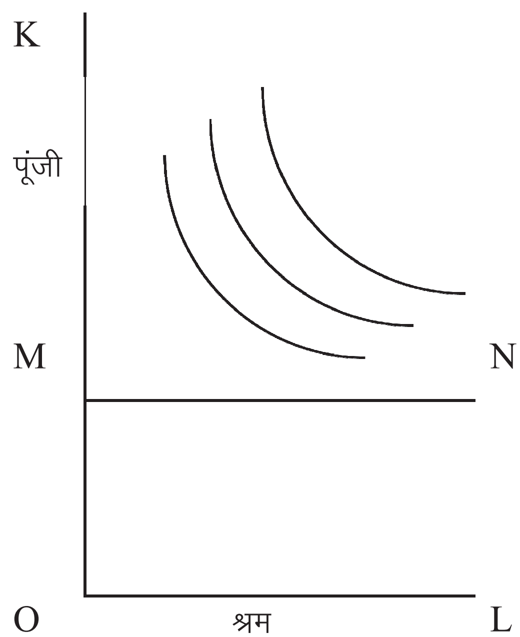
चित्र में OS रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति

के साधनों में वृद्धि का अनुपात समान ही रहेगा तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा समान रहेगी।

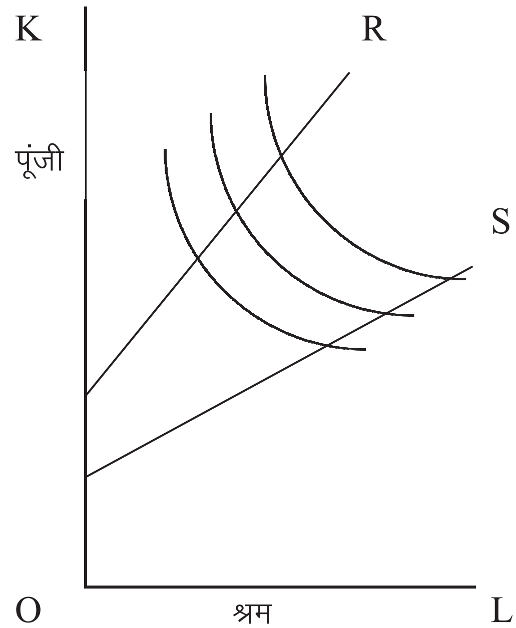
16.8 समांगी उत्पादन फलन का चित्रों के माध्यम से निरूपण

समांगी उत्पादन फलन में सम उत्पाद वक्रों के माध्यम् से यह प्रदर्शित किया जाता है कि साधनों के विभिन्न संयोग से समान स्तर का उत्पादन कैसे निरूपित किया जाये तथा सम उत्पाद वक्र में परिवर्तन से उत्पादन के स्तर में भी परिवर्तन होता है। उत्पादन के विस्तार को निरूपित करने हेतु उत्पाद रेखाओं की मुख्य भूमिका होगी। उत्पाद रेखायें उत्पादन में वृद्धि करने का सम्भावित पथ होती है।

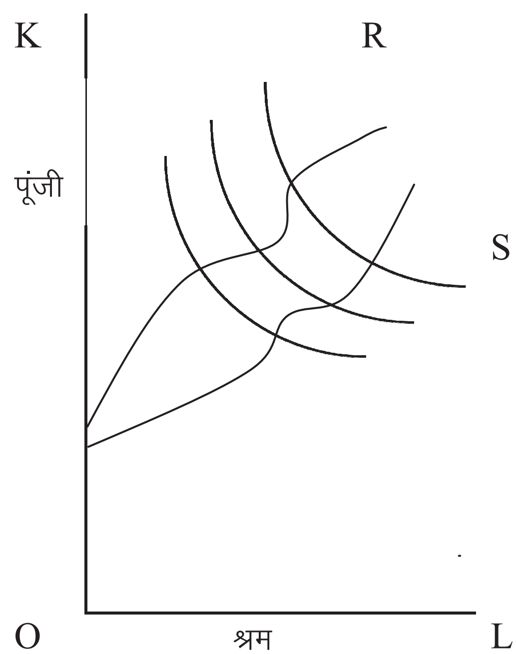
यदि सभी साधन परिवर्तनशील होते है तो उत्पाद रेखायें मूल बिन्दु से होकर जाती है एवं यदि एक ही साधन परिवर्तनशील तथा दूसरा स्थिर होता है तो उत्पाद रेखा परिवर्तित साधन अक्ष के समान्तर होती है एवं यदि साधन अनुपात में परिवर्तन स्थिर रहता है तो यह रेखाये सम रेखायें कही जाती है। उत्पादन रेखाये उत्पादन फलन के स्तरूप को निर्धारित करती है इसे निम्न तौर पर प्रदर्शित किया जा सकता है–



* यदि उत्पादन परिवर्ती अनुपात उत्पादन फलन के अन्तर्गत है तो उत्पाद रेखा परिवर्तित साधन अक्ष के समान्तर होगी। चित्र में श्रम परिवर्तित साधन तथा पूंजी स्थिर साधन है। M N उत्पाद रेखा होगी।



* यदि दोनों साधन परिवर्तनशील है तो उत्पाद रेखा मूल बिन्दु से होकर जायेगी तथा प्रत्येक उत्पाद रेखा पर $\frac{K}{L}$ अनुपात एवं सीमांत प्रतिस्थापन की दर भी स्थिर होगी। यदि उत्पादन फलन समांगी है तो उत्पाद रेखायें सीधी रेखाओं के रूप में होगी जोकि OR तथा OS द्वारा निरूपित है।



* यदि उत्पादन फलन संमागी नहीं है तो उत्पाद रेखायें जैसे OR तथा OS टेढ़ी–मेढ़ी होगी।

16.9 समांगी उत्पादन फलन पर आधारित प्रमेय

समांगी उत्पादन फलन पर आधारित प्रमेंयों को प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन के अनुसार सिद्ध किया जायेग तथा तत् पश्चात् उन्हें अन्य कोटि के समांगी उत्पादन फलनों पर लागू किया जायेगा।

प्रथम प्रमेय–प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$z = X\,P\left(\frac{y}{X}\right)$ या $z = y\,q\left(\frac{X}{y}\right)$

हल– चूँकि दिया उत्पादन फलन $z = f(X, y)$ प्रथम कोटि का समांगी उत्पादन फलन है अतः

$z = f(KX, Ky) = K.f(X,y)$

यदि $K = \frac{1}{X}$ तो

$\frac{1}{X} f(X, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$f(X, y) = X f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

अतः $f(X,y) = XP\left(\frac{y}{X}\right)$

इसी प्रकार यदि $K = \frac{1}{y}$ तो

$f\left(\frac{X}{y}, 1\right) = \frac{1}{y} f(X,y)$

$f(X,y) = y\,f\left(\frac{X}{y}, 1\right) = y\,q\left(\frac{K}{y}\right)$

इसी तरह इस प्रमेय को n कोटि के समांगी उत्पादन फलन हेतु निम्नवत् रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$z = x^n . P\left(\frac{y}{X}\right) = y^n q\left(\frac{X}{y}\right)$$

उदाहरण – $z = f(X,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

इसको $X.P\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में लिखियें।

हल– $f(X,y) = \sqrt[3]{x^2y} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

$$= X\left(x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) \text{ (क्योंकि } 2/3 = 1\text{-}1/3)$$

अतः $f(X,y) = X\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = X.P\left(\frac{y}{x}\right)$

जहाँ $P(X) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

द्वितीय प्रमेय– दिये ग्ये प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन में आश्रित चर का आंशिक अवकलन गुणांक (डेरीवेटि्वय) ($\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$) X एवं y के अनुपात के फलन होते है।

यदि $Z = f(X,y)$

हल : प्रथम प्रमेय से $z = X\,P\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P\left(\frac{y}{x}\right) + P^1\left(\frac{y}{x}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (गुणन नियम से)}$$

$P^1\left(\frac{y}{x}\right)$ जहाँ $P\left(\frac{y}{x}\right)$ का अवकलन गुणांक है।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P\left(\frac{y}{x}\right) + P^1\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{y}{x}\;P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अतः $\frac{\partial z}{\partial x'}$ X तथा y के अनुपात का फलन होग तथा यह शून्य कोटि का होगा।

इसी प्रकार $z = X\,P\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + X.\,P^1\left(\frac{y}{x}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = X.P^1\left(\frac{y}{x}\right).\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अतः $\frac{\partial z}{\partial y}$, X तथा y के अनुपात का फलन होग तथा यह शून्य कोटि का होगा।

यदि उक्त प्रमेय को n कोटि के समांगी फलन के सिद्ध किया जाये तो

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{n}x^{n-1}\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2}.P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

N कोटि का समांगी उत्पादन फलन का आंशिक उत्पाद (n-1) कोटि का समांगी उत्पादन फलन होगा।

इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial x} = x^{n-1}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$

तृतीय प्रमेय– तृतीय प्रमेय को आयलर प्रमेय के नाम से भी जाना जाता है। इस प्रमेय के अनुसार प्रथम कोटि के समांगी उत्पादन फलन को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\mathrm{X}\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{y}.\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{z}$$

हल : यदि $\mathrm{z} = \mathrm{f}\,(\mathrm{X},\mathrm{y})$

द्वितीय प्रमेय से $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान $\mathrm{X}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{y}.\frac{\partial z}{\partial y}$ में रखने पर

$$= \mathrm{X}.[\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right).P^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)] + \mathrm{y}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \mathrm{X}.[\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) - y.P^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)] + \mathrm{y}P^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \mathrm{X}.\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{f}\,(\mathrm{X},\mathrm{y}) = \mathrm{z}$$

जिसे प्रथम प्रमेय के अनुसार f (X,y) के समान कहा जा सकता है।

यदि उत्पादन फलन n कोटि का समांगी उत्पादन फलन है तो

$$\mathrm{X}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{y}.\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{nz}$$

अर्थशास्त्र में आयलर प्रमेय का बढ़ा महत्व है इसके अनुसार यदि उत्पादन स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अन्तर्गत हो रहा हो एवं यदि उत्पादन के साधनों को उनके सीमांत उत्पाद के समान भुगतान किया जाये तो कुल भुगतान कुल उत्पादन के समान होता है यानि कुल उत्पादन मात्र साधनों के भुगतान में ही समाप्त हो जायेगा।

उदाहरण– यदि कॉब डगलस उत्पादन फलन को यदि लिया जाये

$$Q = A\,L^{\propto}K^{1-\propto}$$

$L\,M\,P_L + K\,M\,P_K = Q$ होना चाहिए।

हल : $Q = A\,L^{\propto}K^{1-\propto}$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\,(1-\propto)L^{\propto-1}K^{-\propto}$$

MP_L तथा MP_K का मान $(L\,M\,P_L + K\,M\,P_K)$ में रखने पर

$= L\,A \propto L^{\propto-1}K^{1-\propto} + K\,A\,(1-\propto)L^{\propto-1}K^{-\propto}$

$= [\,A \propto L^{\propto}K^{1-\propto} + K\,A\,(1-\propto)L^{\propto-1}K^{1-\propto}]$

$= AL^{\propto}K^{1-\propto}\,[\propto\; +1-\propto]$

$= AL^{\propto}K^{1-\propto}$

जो कि Q के बराबर है। अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन आयलर प्रमेय के निष्कर्षो को सही सिद्ध करता है।

16.9 प्रतिस्थापन लोच

किसी भी रेखीय समांगी फलन $Q = f\,(x_1, x_2)$ की प्रतिस्थापन लोच X_1 तथा x_2 के मध्य निम्न सूत्र से प्राप्त की जा सकती है।

$$\sigma = \frac{f_1\,f_2}{Q\,f_1\,f_2}$$

f_1 जहाँ X_1 के सापेक्ष Q का अवकलन है।

f_2 जहाँ x_2 के सापेक्ष Q का अवकलन है।

f_{12} जहाँ X_1 तथा x_2 के सापेक्ष अवकलन है।

उदाहरण– उक्त सूत्र के माध्यम से कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच ज्ञात कीजियें?

हल– कॉब डगलस उत्पादन फलन

$$Q = A L^{\propto} K^{1-\propto}$$

$$f_1 = f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$$

$$f_2 = f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A(1-\propto) L^{\propto-1}K^{-\propto}$$

एवं $f_{KL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L\, \partial K}$

इसके लिये पहले $\frac{\partial Q}{\partial L} = A\propto L^{\propto-1}K^{1-\propto}$

पुनः K के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L\, \partial K} = A\propto (1-\propto) L^{\propto-1}K^{-\propto}$$

उक्त समीकरण का मान सूत्र $\sigma = \frac{f_1 f_2}{Q\, f_1 f_2}$ में रखने पर –

$$\sigma = \frac{(A\propto L^{\propto-1}K^{1-\propto})[A(1-\propto)L^{\propto}K^{-\propto}]}{(AL^{\propto}K^{1-\propto})[A\propto(1-\propto)L^{\propto-1}K^{-\propto}]}$$

$$\sigma = 1$$

अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन की लोच एक होगी।

16.10 समांगी उत्पादन फलन के महत्व तथा उपयोग

समांगी उत्पादन फलन तथा इसके ऊपर आधारित प्रमेयों के उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़े ही महत्वपूर्ण है। इनका उपयोग न सिर्फ उत्पादन की प्रक्रिया में किया जा सकता है बल्कि इनका प्रयोग वितरण तथा आर्थिक संवृद्धि एवं विकास के क्षेत्र में किया जा सकता है जोकि निम्नवत् है– → समांगी उत्पादन फलन के अन्तर्गत ह्रासमान, स्थिर तथा वृद्धिमान प्रतिफल के उत्पादन फलन आते है जिनका उपयोग किसी भी परिस्थिति तथा उद्देश्य हेतु अधिक व्यवहारिक ढंग से किया जा सकता है।

→ समांगी उत्पादन का उपयोग कृषि, विनिर्माण तथा अन्य महत्वपूर्ण उत्पादन की गतिविधियों के लिये किया जा सकता है।

→ समांगी उत्पादन फलन का वितरण के क्षेत्र में भी व्यापक महत्व एवं उपयोग है इसके माध्यम् से श्रम तथा पूंजी का राष्ट्रीय आय में हिस्सेदारी ज्ञात की जा सकती है। जिसे अगली इकाई में विस्तार से बताया गया है।

→ श्रम तथा पूंजी अनुपात में परिवर्तन का उत्पादन तथा वितरण पर क्या प्रभाव पड़ रहा है इसको ज्ञात किया जा सकता है।

→ समांगी उत्पादन फलन के माध्यम् का शोध अध्ययनों में बड़ा ही उपयोग है इनके उपयोग के माध्यम् में महत्वपूर्ण उत्पादक क्षेत्रों में दीर्घ कालिक प्रवृतियाँ ज्ञात की जा सकती है।

→ अर्थशास्त्रियों द्वारा कई महत्वपूर्ण उत्पादन फलनों का निर्माण जैसे कॉब डगलस उत्पादन फलन स्थिर प्रतिस्थापन लोच उत्पादन फलन (सी0 ई0 एस0 उत्पालन फलन) किया ग्या है जिनका अर्थशास्त्र के अध्ययन में व्यापक उपयोग है।

16.11 महत्वपूर्ण समांगी उत्पादन फलन

महत्वपूर्ण समांगी उत्पादन फलनों में कॉब डगलस उत्पादन फलन एवं स्थिर प्रतिस्थापन लोच उत्पादन फलन प्रमुख है। कॉब डगलस उत्पादन फलन के बारे में विस्तार से पिछली ईकाई में अध्ययन किया जा चुका है वर्तमान ईकाई में यहाँ पर स्थिर प्रतिस्थापन लोच यानि सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन के बारे में संक्षेप में अध्ययन किया जायेग।

स्थिर लोच उत्पादन फलन

इस उत्पादन फलन का विकास के0 जे0 ऐरो, एच0 बी0 चेनरी, वी0 एस0 मिनहास तथा आर0 एम0 सोलों द्वारा 1961 में किया ग्या था। यह एक महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है जो कि कॉब डगलस उत्पादन फलन की भाँति रेखीय रूप से समरूप यानि समांगी है।

इस उत्पादन फलन को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता हैः–

$$Q_1 = A\left[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}$$

A, α, β प्राचल (Parameter) हैं जहाँ A दक्षता प्राचल है। α वितरण यानि पूंजी ग्हनता साधन गुणांक है तथा β स्थापना दक्षता है जो कि प्रति स्थापन की लोच को निर्धारित करता है। जहाँ कि

$A > 0, 0 < \alpha < 1, \beta > -1$

सी0 ई0 एस0 उत्पादन की मुख्य विशेषतायें

इस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषतायें निम्नवत् हैः–

* यह उत्पादन फलन भी अन्य रेखीय समांगी उत्पादन फलनों की भाँति है यदि उत्पत्ति के साधनों में

n गुना वृद्धि कर दी जाये तो कुल उत्पादन भी n गुना बढ़ जायेगा।

$$Q_1 = A[\alpha(nK)^{-\beta} + (1-\alpha)(nL)]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = A(n^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}}[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = nA[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$Q_1 = nQ$$

* सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन की लोच β द्वारा निर्धारित होती है।

$\sigma = \frac{1}{1+\beta}$ यदि $\beta = 0$ तो इस दशा में यह कॉब डगलस उत्पादन फलन को निरूपित करता है।

* सी0 ई0 एस0 उत्पादन आयलर प्रमेय को सिद्ध करता है यदि श्रम तथा पूंजी को उनके सीमांत उत्पादन के अनुसार भुगतान किया जाता है तो कुल उत्पादन साधन भुगतान के ही बराबर होगा।

* सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन के सम उत्पाद वक्र मूल बिन्दु की ओर उन्नेतोदर होगें। परन्तु सी0 ई0 एस0 उत्पादन फलन में भी खामियाँ हैं जिसमें सबसे प्रमुख खामी यह है कि यह फलन भी उत्पादन के मात्र दो साधनों पर ही आधारित है तथा इसका प्रयोग मात्र एक ही फर्म तक सीमित है लेकिन इन सबके बावजूद भी यह महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है।

16.12 सारांश

समांगी उत्पादन फलन के वतर्मान इकाई में व्यापक मध्यमान के पश्चात यह कहा जा सकता है कि इन उत्पादन फलनों के अध्ययन ने अर्थशास्त्र विषय को एक नया आयाम

तथा दिशा प्रदान की जिसके अध्ययन के लिये धीरे–धीरे गणितीय अर्थशास्त्र की शाखा विकसित होकर एक महत्वपूर्ण स्वरूप ले चुकी है। चूँकि समांगी उत्पालन फलनों का स्वरूप काफी व्यापक है अतः इनका प्रयोग अर्थशास्त्र के अनेकों क्षेत्रों कृषि उद्योग विनिर्माण आदि में किया जा सकता है साथ ही वितरण तथा आर्थिक विकास के क्षेत्र में भी महत्वपूर्ण निष्कर्ष दिये जा सकते है।

यद्यपि समांगी उत्पादन फलनों की भी अपनी सीमाए तथा खामियाँ है परन्तु इन सबके बावजूद समांगी उत्पादन फलनों की अपनी ही अलग विशेषतायें है जिनके कारण से इनका व्यापक उपयोग किया जाता है तथा इन फलनों का अर्थशास्त्र के मौलिक अध्ययन में योगदान महत्वपूर्ण है।

16.13– शब्दावली

प्रतिस्थापन लोच – सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर में सापेक्षिक परिवर्तन होने के कारण से साधन अनुपात में कितना सापेक्षिक परिवर्तन होता है प्रतिस्थापन लोच के रूप में जाना जाता है। जबकि उत्पादन का स्तर समान रहें।

समउत्पाद वक्र – इस वक्र अनरूप का स्तर समान रहता है। उसे समान उत्पाद वक्र भी कहते है। यह समान उत्पादन का वह बिन्दु पथ है जिसे श्रम तथा पूंजी की विभिन्न मात्राओं से प्राप्त किया जा सकता है।

सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर – श्रम की एक इकाई के बदले पूंजी की किसी इकाईयाँ प्रतिस्थापित की जा सकती है जबकि उत्पादन की स्तर समान बना रहें।

$$MRTS_L = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

उत्पाद रेखायें – उत्पादन में विस्तार को इनके माध्यम् से निरूपित किया जाता है।

समलागत रेखा – यह उत्पादन के साधनों के विभिन्न अनुपातों को प्रदर्शित करती है जिसे कोई फर्म दिये गये बजट में से क्रय कर सकती है इसे क्रय रेखा या कीमत रेखा भी कहते है।

$$C = wL + rK$$

सीमांन्त उत्पादन – उत्पादन के साधनों में इकाई परिवर्तन होने से कुल उत्पादन में कितना परिवर्तन होता है यह सीमांत उत्पादन कहलाता है।

औसत उत्पादन – कुल उत्पादन तथा साधनों के अनुपात को औसत उत्पादन कहते है।

इष्टतम् उत्पादन – इसे उत्पादन करने वाली फर्म का संतुलन बिन्दु भी कहते है तथा इसका निर्धारण समउत्पाद वक्र तथा समलागत रेखा के स्पर्श बिन्दु के द्वारा होता है।

विस्तार पथ – न्यूनतम लागत उत्पादन के संयोग बिन्दुओं को मिलाने पर विस्तार पथ प्राप्त होता है।

फलन – दो चरों के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करता है।

अवकलन गुणांक – जब y का X के सापेक्ष अवकलन किया जाता है तो dy /dX, y का X के सापेक्ष अवकलन गुणांक होगा।

16.14 लघु उत्तरीय प्रश्न

1. उत्पादन फलन क्या मौद्रिक मूल्यों पर निर्धारित करता है?
2. उत्पादन फलन स्थैतिक अर्थशास्त्र का विषय है क्या यह कथन सत्य है?
3. पैमाने के प्रतिफल में उत्पादन के कितने साधन गतिशील होते है?
4. रेखीय रूप से समांगी उत्पादन फलन कितने कोटि का होता है?
5. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत भी दुगना हो जाये ंतो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
6. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत चार गुना हो जाये तो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
7. यदि आगतो को दुगना करने पर निर्गत दुगने से कम बढ़े तो उत्पादन फलन की कोटि होगी।
8. रेखीय रूप से समांगी या समरूप उत्पादन फलन की कोटि कितने अंश की होती है?
9. पैमाने के प्रतिफल रूपी उत्पादन फलन किस काल में लागू होते है?
10. समांगी उत्पादन फलन को किस रूप में लिखा जा सकता है?
11. यदि उत्पादन के सभी साधन परिवर्तनशील है तो उत्पाद रेखायें कहाँ से गुजरती है?
12. समांगी उत्पादन फलन में उत्पाद रेखायें कैसी होती है?
13. यदि उत्पादन फलन समांगी नहीं है तो उत्पाद रेखायें कैसी होगी?

14. रेखीय रूप से समांगी उत्पादन फलन में समउत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा कैसी बनी रहती है?
15. कॉब डगलस उत्पादन फलन की लोच होगी?

उत्तर – 1. नहीं 2. सत्य 3. सभी 4. एक 5. एक
6. दो 7. एक से कम 8. एक 9. दीर्घ काल 10. $Q = m^K f(X, y)$
11. मूल बिन्दु 12. सीधी रेखा में 13. टेड़ी–मेड़ी 14. बराबर 15. एक

16.16 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- मिश्र, जयप्रकाश (2005) कृषि अर्थशास्त्र, साहित्य भवन प्रकाशन।
- आहूजा, एच0 एस0 (2002) समष्टि अर्थशास्त्र, एसद्ध चन्द प्रकाशन।
- Mehta Mandnani (2001). Mathematics Economics Sultan chand Publication.
- Bose, D. (2003), An Inrtoduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Businese, Excel Books.

16.15 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. उत्पादन फलन की मान्यतायें लिखते हुये समांगी उत्पादन फलन की विशेषतायें चित्र सहित बताईयें?
2. क्या $Q = A\ L^{\propto} K^{1-\propto}$ फलन समांगी है यदि है तो इस फलन की कोटि बताईयें?
3. क्या $Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ फलन समांगी है यदि है तो इसकी कोटि बताईयें?
4. समांगी उत्पादन फलन को गणितीय रूप में समझाते हुये आयलर प्रमेय को सिद्ध कीजियें?
5. निम्न फलन समांगी है या नहीं बताईये?

(अ) $z = X^2 y^2$

(ब) $z = X^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}$

(स) $z = X^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}}$

इकाई 17 कॉबडगलस उत्पादन फलन

17.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में उत्पादन फलनों एवं विशेष तौर पर संगमी उत्पादन फलन तथा उसकी विशेषताओं का अध्ययन किया गया है। संगामी उत्पादन फलन तथा इसकी विशेषताओं का अर्थशास्त्र के अध्ययन में महत्वपूर्ण भूमिका है। उत्पादन फलनों के अगले चरण में महत्वपूर्ण उत्पादन फलन, '' कॉब डगलस'' का अध्ययन वर्तमान इकाई में किया जायेगा।

कॉब डगलस उत्पादन फलन का निर्माण सुप्रसिद्ध अमेरिकी अर्थशास्त्री प्रो0 सी0 डब्लू0 कॉब एवं प्रो0 सी0 एच0 डगलस द्वारा किया ग्या। यद्यपि इस उत्पादन फलन को सर्वप्रथम केनेट विकसैल(1851—1926) ने प्रस्तावित किया परन्तु साख्यिकीय पद्धति से परीक्षण तथा विकास चार्ल्स कॉब तथा पाल डगलस द्वारा 1928 में किया ग्या। इस उत्पादन फलन के अर्न्तग्त दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा उत्पादन के ऊपर श्रम तथा पूंजी के प्रभाव को ज्ञात करने हेतु एक अत्याधिक महत्वपूर्ण सूत्र का अविष्कार किया जिससे उत्पादन का श्रम तथा पूंजी के साथ सम्बन्ध स्थापित हो सके।

दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा अमेरिकी अर्थशास्त्रियों द्वारा अमेरिकी अमेरिकी अर्थव्यवस्था के सन्दर्भ में 1899—1922 तक के ऑकड़ों के आधार पर एक अध्ययन प्रकाशित किया गया। जिसके माध्यम् से दोनों अर्थशास्त्रियों द्वारा कॉब डगलस उत्पादन फलन को स्थापित किया गया है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन न सिर्फ एक महत्वपूर्ण उत्पादन फलन है अपितु यह विशुद्ध तौर पर अर्थशास्त्र में विभिन्न महत्वपूर्ण अध्ययन करने हेतु विशेष तौर पर निर्मित किया गया है। वर्तमान अध्याय (इकाई) में कॉब डगलस उत्पादन फलन के बारे में व्यापक अध्ययन किया जायेगा।

17.2 उददेश्य

इस इकाई में अध्ययन हेतु निम्न उदेदश्य निर्धारित किये गये है :—

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन क्या है तथा इसकी मुख्य मान्यतायें क्या है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन की मुख्य विशेषतायें कौन—कौन सी है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन की मुख्य मान्यतायें क्या है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच किस प्रकार निर्धारित की जाती है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ कैसा होता है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन का संशोधित रूप क्या है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन के क्या उपयोग है?

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन की क्या सीमायें तथा आलोचनायें है?

17.3 कॉब डगलस उत्पादन फलन

प्रो0 कॉब तथा प्रो0 डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का सूत्र निम्न रूप में स्थापित किया गया,

$$Q = A\ L^{\propto}\ K^{\beta}$$

जहाँ Q = उत्पादन की मात्रा। L = श्रम। K = पूंजी एवं $\propto \beta$ एवं A धनात्मक स्थिरांक है।

$\propto$ जहां उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच है, तथा β उत्पादन की पूंजी के सापेक्ष लोच है। जबकि A गुणांक उत्पादन के साधनों के संग्ठन की दक्षता को मापने में सहायक होता है। अधिक दक्ष उत्पादन ईकाई का A अधिक बड़ा होगा। A को कुल साधन उत्पादकता भी कहते हैं।

$$A = \frac{Q}{L^{\alpha} K^{\beta}}$$

चूँकि उपरोक्त समीकरण का हर साधनों का गुणोतर माध्य है। अतः A वास्तविक उत्पादन प्रति इकाई इनपुट यानि साधन के है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन कुछ निश्चित मान्यताओं के साथ ही कार्य करता है जोकि निम्नवत् है

→ उत्पादन के केवल दो ही उपादान है, पूंजी तथा श्रम।

→ श्रमिकों की उत्पादन क्षमता दिये हुये समय में स्थिर है।

→ पूंजीगत पदार्थो की उत्पादन क्षमता दिये हुये समय में स्थिर है।

→ अन्य कारक जैसे तकनीकी प्रगति, पूंजी में ह्रास आदि भी स्थिर है।

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन को मूलतया $\alpha + \beta = 1$ यानि पैमाने के स्थिर प्रतिफल हेतु निर्धारित किया गया है।

इसके अतिरिक्त इस फलन की निम्न दो और महत्वपूर्ण मान्यतायें हैं।

(क) उत्पादन फलन में श्रम के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता प्रति श्रमिक ईकाई उत्पादन के समानुपाती होगी।

(ख) उत्पादन फलन में पूंजी के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता प्रति पूंजी ईकाई उत्पादन के समानुपाती होगी।

अंतिम दो मान्यताओं के माध्यम् से कॉब डगलस उत्पादन फलन को हल किया जा सकता है। जहाँ उत्पादन (Q) का श्रम के सापेक्ष आंशिक अवकलन $\frac{\partial Q}{\partial L}$, श्रम के साथ सीमांत उत्पादन होग तथा उत्पादन (Q) का पूंजी के सापेक्ष आंशिक अवकलन $\frac{\partial Q}{\partial K}$, पूंजी के साथ सीमांत उत्पादन होग।

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha \frac{Q}{L} \text{ ------------------------------------ (a)}$$

जहाँ $\frac{Q}{L}$, प्रति श्रमिक औसत उत्पादन है तथा α एक स्थिर राशि हैं। उत्पादन (Q) श्रम तथा पूंजी (L,K) का फलन है। यदि पूंजी की मात्रा स्थिर (K_0) रखी जाये तो

$$Q = f(L, K_0) \text{ -- (b)}$$

समीकरण (a) को K को स्थिर होने पर सरल अवकलन समीकरण के रूप में निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{dQ}{dL} = \alpha \frac{Q}{L}$$

यानि $$\frac{dQ}{Q} = \alpha \frac{dL}{L} \text{ -------------------------------- (c)}$$

दोनों ओर समाकलनन करने पर

$$\int \frac{1}{Q} dQ = \alpha \int \frac{1}{L} dL$$

$$\ln(Q) = \alpha \ln(cL)$$

$$\ln(Q) = \ln(cL^{\alpha})$$

अंततः $f(L, K_0) = c_{1(K_0)} L^{\alpha}$ ——————————————————————(d)

जहाँ $c_1(K_0)$ समाकलनन का स्थिराँक है तथा इसे K_0 के फलन के रूप में व्यक्त कर सकते है।

इसी प्रकार मान्यता (ख) से $\frac{\partial Q}{\partial K} = \beta \frac{Q}{K}$

$L = L_0$ यानि L को स्थिर रखकर उपरोक्त समीकरण को अवकलन समीकरण के रूप में हल किया जा सकता है। जिससे निम्न समीकरण प्राप्त होगें।

$f(L_0 K) = c_2(L_0) K^{\beta}$ ——————————————————————————(e)

समीकरण (d) तथा (e) से

$f(L, K) = A L^{\alpha} K^{\beta}$ ——————————————————————————(f)

जहाँ A एक स्थिर राशि है जो कि श्रम तथा पूंजी दोनों से स्वतंत्र है तथा α एवं β दोनों के मान शून्य से अधिक होगें।

17.4 कॉबडगलस उत्पादन फलन की विशेषतायें

कॉब डगलस उत्पादन फलन अपनी खास विशेषताओं के कारण अर्थशास्त्र में उत्पादन सम्बन्धी विभिन्न क्षेत्रों जैसे कृषि, विनिर्माण तथा उद्योग जैसे के अध्ययन में अहम् भूमिका निभाता है जो कि निम्नवत् है :–

→ यह $(\propto + \beta)$ डिग्री का समरूप या संमागी उत्पादन फलन है जो कि $(\propto + \beta) = 1$, की स्थिति में रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन हो जाता है। इसको निम्न रूप से सिद्ध किया जा सकता है।

$$Q = A\ L^{\propto}\ K^{\beta} \text{ या } A\ L^{\propto}\ K^{1-\propto}$$

यदि श्रम तथा पूंजी में m गुना वृद्धि की जाये तो,

$Q_1 = A\ (mL)^{\propto}\ (mK)^{\beta}$

$Q_1 = A\ m^{\propto} L^{\propto} m^{\beta} K^{\beta}$

$Q_1 = A\, m^{\propto+\beta}\ L^{\propto}\ K^{\beta}$

$Q_1 = m^{\propto+\beta}\, Q$

यानि उत्पादन के साधनों में m गुना वृद्धि करने पर कुल उत्पादन $m^{\propto+\beta}$ गुना बढ़ जाता है। एवं यदि $(\propto + \beta) = 1$, तो $= m\,Q$

इस विशेष परिस्थिति में कॉब डगलस उत्पादन फलन रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन की तरह कार्य करेग जिसमें यदि साधनों में जितने गुना की वृद्धि की जायें उत्पादन भी उतने ही गुना वृद्धि करता है। यदि श्रम तथा पूंजी को दुगना किया जाता है तो उत्पादन भी दुगना हो जाता है। इसके समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होता है तथा इस तथ्य को साबित करने हेतु प्रथम तथा द्वितीय कोटि का अवकलन करना होगा।

$$Q = A\ L^{\propto}\ K^{\beta}$$

चूॅकि कुल अवकलन

$$d\,Q = \frac{dQ}{dL}dL \quad \frac{dQ}{dK}dK \text{ ————————(1)}$$

चूंकि $\frac{dQ}{dL} = A \quad L^{\propto-1}K^{\beta}$ ————————(2)

$$\frac{dQ}{dK} = A\beta\ \ L^{\propto}K^{\beta-1} \text{ ————————(3)}$$

समीकरण (2) तथा (3) का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$d\,Q = (A \propto\ \ L^{\propto-1}K^{\beta})dL \quad (A\beta\ \ L^{\propto}K^{\beta-1})dK$$

चूॅकि समउत्पाद वक्र पर कुल उत्पादन स्थिर रहता है। इसलिये

$$d\,Q = 0$$

अतः $(A \propto\ \ L^{\propto-1}K^{\beta})dL \quad (A\beta\ \ L^{\propto}K^{\beta-1})dK = 0$

इसलिये $\frac{d^2K}{dL^2} = -\left(\frac{\propto}{\beta} . \frac{K}{L}\right)$

अतः चूँकि $\frac{dK}{dL}$ का मान ऋणात्मक है अतः समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होगा।

चूँकि $\frac{dK}{dL}$ का चिन्ह ऋणात्मक है अतः $\frac{d^2K}{dL^2}$ का मान धनात्मक ही आयेग क्योंकि $\propto, \beta$, L और K का मान हमेशा धनात्मक ही होता है। अतः समउत्पाद वक्र का ढाल ऋणात्मक होने

के साथ–साथ मूल बिन्दु की ओर उत्तालाकार होग। यानि मूल बिन्दु की ओर उन्नोतदर (ConveX to Origin) होग।

श्रम उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच $\propto$ तथा पूंजी के सापेक्ष β होगी।

उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच $e_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L}$ ————————————————————(4)

$\frac{\partial Q}{\partial L} = A \propto \; L^{\propto-1}K^{\beta}$ एवं $Q = A \; L^{\propto} \; K^{\beta}$

का मान (4) में रखने पर $e_L = \frac{L\, A \propto L^{\propto-1}K^{\beta}}{A\, L^{\propto}K^{\beta}}$

$e_L =$

इसी प्रकार पूंजी के सापेक्ष उत्पादन की लोच $e_K = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K}$ ————————————(5)

समीकरण (5) में $Q = A \; L^{\propto} \; K^{\beta}$ तथा $\frac{\partial Q}{\partial K} = A\,\beta\, L^{\propto}K^{\beta-1}$ का मान रखने पर

$e_K = \frac{K\, \beta A\, L^{\propto}K^{\beta-1}}{A\, L^{\propto}K^{\beta}}$

$e_K = \beta$

अतः $\propto$ तथा β उत्पादन की क्रमशः श्रम तथा पूंजी के सापेक्ष लोच है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन में $\left(\frac{\propto}{\beta}\right)$ अनुपात साधन गहनता का निर्धारण करता है अधिक $\left(\frac{\propto}{\beta}\right)$ अनुपात का मान होने पर उत्पादन फलन की तकनीक श्रम गहन होती है तथा अनुपात कम होने पर तकनीक अधिक पूंजी गहन होती है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन के सीमांत तथा औसत उत्पादकता का निर्धारण निम्न तरह से किया जा सकता है।

$\frac{\partial Q}{\partial K}$ $MP_K =$ पूंजी की सीमांत उत्पादकता $A\,\beta\, L^{\propto}K^{\beta-1}$

औसत उत्पादकता P_K $\frac{Q}{K}$ $\frac{A\, L^{\propto}K^{\beta}}{K}$

P_K $A \; L^{\propto}K^{\beta-1}$

अतः MP_K (P_K)

इसी प्रकार MP_L $\propto$ (P_L)

कॉब डगलस उत्पादन फलन के अनुसार यदि उत्पादन के प्रत्येक साधन को सीमांत उत्पादकता के बराबर भुगतान किया जाये तो कुल उत्पादन का वितरण श्रम तथा पुंजी के भुगतान में ही समाप्त हो जाता है।

चूँकि MP_L $\propto$ (P_L) ————————————(6)

तथा P_L $\frac{Q}{L}$ का मान समीकरण (6) में रखने पर

MP_L $\frac{\propto \cdot Q}{L}$ यदि L श्रमिक है तो श्रमिकों को मिलने वाला कुल भुगतान $MP_L . L = \frac{\propto \cdot Q}{L} . L = \propto \cdot Q$

इसी प्रकार पूंजी को प्राप्त होने वाला भुगतान भी निर्धारित किया जा सकता है।

MP_K (P_K) $\frac{Q}{K}$

पूँजी का भुगतान c $\frac{Q}{K}$

$$K = \beta \cdot Q$$

अतः कुल भुगतान $\propto \cdot Q + \beta \cdot Q$

$$Q(\propto + \beta)$$

चूँकि $(\propto + \beta) = 1$ अतः कुल भूगतान

जो कि कुल उत्पादन के समान है। यदि देखा जाये तो कॉब डगलस उत्पादन फलन वितरण पर आयलर प्रमेय की व्यवहारिकता को सिद्ध करता है। आयलर प्रमेय के अनुसार संमागी उत्पादन फलन को हमेशा निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

यदि $Z = f(X\ y)$

तो $Z = X.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$

इसी प्रकार से कॉब डगलस उत्पादन फलन को भी व्यक्त किया जा सकता है।

$= f(L \quad K) = A\,L^{\propto}K^{\beta}$

$= L.\frac{\partial Q}{\partial L} + K.\frac{\partial Q}{\partial K}$

$= L.\,MP_L + K.\,MP_K =$

अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन आयलर प्रमेय को सिद्ध करता है।

कॉब डगलस उत्पादन फलन की सीमांत उत्पादकताये हमेशा धनात्मक होती है तथा सीमांत उत्पादकताओं में परिवर्तन की दर ऋणात्मक होती है।

$Q = A\ \ L^{\propto}\ \ K^{\beta}$

$\frac{\partial Q}{\partial L} = \propto A\,L^{\propto-1}K^{\beta}$

$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\propto Q}{L}$

चूँकि $\propto, Q$ तथा L तीनों धनात्मक होते है अतः $\frac{\partial Q}{\partial L}$ 0 होग। इसी प्रकार $\frac{\partial Q}{\partial K}$ 0 होग।

यानि हमेशा ही MP_L तथा MP_K का मान धनात्मक होग।

$\frac{\partial Q}{\partial L}$ का पुनः अवकलन करने पर

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\propto\cdot(\propto-1)AL^{\propto-2}K^{\beta}}{} \quad \frac{\propto\cdot(\propto-1)AL^{\propto}K^{\beta}}{L^2}$ (L^2 से गुणा करने पर)

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\propto(\propto-1)}{L^2}\,Q$

चूँकि $0 < \propto < 1$, अतः $(\propto -1)$ हमेशा ऋणात्मक होगा।

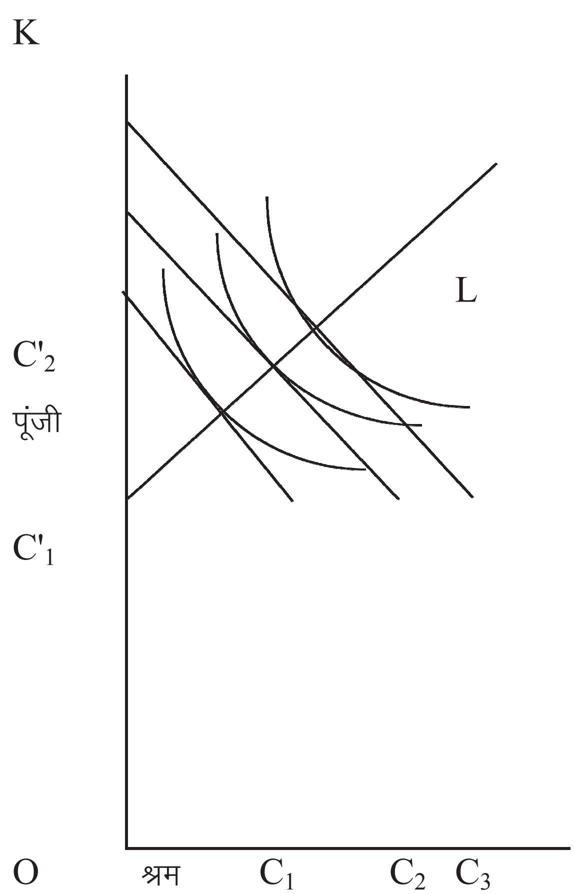
इसलियें $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ का मान भी हमेशा ऋणात्मक होगा।

इसी प्रकार $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ का मान भी सदैव ऋणात्मक होगा।

17.4 कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ

कॉब डगलस उत्पादन फलन के समउत्पाद वक्रों तथा समलागत रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं का बिन्दु पथ इस फलन का विस्तार पथ है। यह बिन्दु पथ उस इष्टतम् उत्पादन के

बिन्दुओं को प्रदर्शित करता है जिसे दी हुयी न्यूनतम लागत दशाओं पर प्राप्त किया जा सकता है। यानि यह उत्पादन के विभिन्न संतुलन बिन्दुओं को विभिन्न लागत उत्पादन दशाओं के अनुरूप प्रदर्शित करता है। इन बिन्दुओं पर समउत्पाद रेखाओं का ढाल समलागत रेखाओं के बराबर होता है। अतः यह सिद्ध जा सकता है कि रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होता है।
इस विस्तार पथ को चित्र के माध्यम से भी निरूपित किया जा सकता है।



जहाँ q_1, q_2, q_3 समउत्पाद वक्र हैं तथा $c_1c_1', c_2c_2', c_3c_3'$ समलागत रेखायें। बिन्दु c_1c_2 तथा c_3 पर सम उत्पाद वक्र एवं समलागत रेखायें एक दूसरे को स्पर्श करती हैं तथा दोनों के ढाल इन बिन्दुओं पर समान है। अतः OL रेखा कॉब डगलस उत्पादन

फलन के विस्तार पथ को प्रदर्शित करती हैं। इस विस्तार पथ को गणतीय रूप से भी किया जा सकता है।

समलागत रेखा $c = wL + \gamma K$ ————————————————(7)

इस रेखा का ढाल $\frac{w}{r}$ ————————————————————————(8)

w जहॉ श्रम की कीमत तथा γ पुंजी की कीमत है जिन्हें स्थिर माना गया है। समउत्पाद वक्र का ढाल$-\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{MP_L}{MP_K}$ ——————————————————(9)

समीकरण (7) तथा (8) से $\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$ ————————————————(10)

$MP_L = A \; L^{\propto-1}K^{\beta}$ तथा $MP_K \; A\,\beta\, L^{\propto}K^{\beta-1}$ का मान (4) में रखने पर

$$\frac{w}{r} = \frac{A \propto L^{\propto-1}K^{\beta}}{A\,\beta L^{\propto}K^{\beta-1}} = \frac{\propto}{\beta} \cdot \frac{K}{L}$$

$\frac{L}{K} = \frac{\beta}{\propto} \cdot \frac{w}{r}$ ——————————————————————(11)

रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन हेतु $\propto + \beta = 1$ यानि $\beta = 1-$ का मान समीकरण (4) में रखने पर

$\frac{L}{K} = \frac{1-\propto}{\propto} \cdot \frac{w}{r}$ ————————————————————(12)

जो कि एक स्थिर राशि है। अतः रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होग।

इसी प्रकार यह भी साबित किया जा सकता है कि इस फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होग। चाहे यह फलन रेखीय रूप से समरूप हो या न हो।

17.6 – प्रतिस्थापन की लोच

कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन के साधनों के मध्य प्रतिस्थापन की लोच निम्न सूत्र के द्वारा व्यक्त की जाती है –

$$\text{प्रतिस्थापन की लोच } (e_s) \quad \frac{\text{साधन अनुपात(L/K) में अनुपातिक परिवर्तन}}{\text{सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकि दर में अनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$e_s = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)} \Big/ \frac{d(\mathrm{MRTS_L})}{MRTS}$$

$$e_s = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)} \cdot \frac{(MRTS)}{d(MRTS)}$$

$$e_s = \frac{d\left[\log\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{d[\log(MRTS)]} \text{ ————————————————————(13)}$$

चुंकि $\mathrm{MRTS} = \frac{\mathrm{MP_L}}{\mathrm{MP_K}} = \frac{A \propto L^{\propto-1} K^{\beta}}{A\, \beta L^{\propto} K^{\beta-1}} = \frac{\propto}{\beta} \cdot \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}$

MRTS का मान समीकरण (13) में रखने पर

$$e_s = \frac{d\left[\log\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{d\left[\log\left(\frac{\propto}{\beta} \cdot \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right)\right]}$$

$$e_s = \frac{\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{K}}\right).\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right)}{\left(\frac{\beta}{\propto} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{K}}\right).\mathrm{d}\left(\frac{\propto}{\beta} \cdot \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right)}$$

$$e_s = 1$$

अतःकॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन की लोच 1 होती है।

17.7 संशोधित कॉब डगलस उत्पादन फलन

$Q = \mathrm{A}\ \ \mathrm{L}^{\propto}\ \ \mathrm{K}^{\beta}$ जहॉं $\beta = 1-$ के अन्तर्गत केवल स्थिर पैमाने प्रतिफल का अध्ययन हो सकता है। जबकि अर्थशास्त्र में ह्रासमान तथा वृद्धिमान फलों का अध्ययन भी किया जाता है। अतः यदि कॉब डगलस उत्पादन फलन में $(\propto + \beta)$ के मान को एक से अधिक रखकर वृद्धिमान प्रतिफलों को प्राप्त किया जा सकता है तथा $(\propto + \beta)$ के मान को एक से कम रखकर ह्रासमान प्रतिफल को प्राप्त किया जा सकता है।

यदि $\propto + \beta = 2$ तो अगर उत्पादन के साधनों को दुगना करने पर

$$= \mathrm{A}\ \ (2\mathrm{L})^{\propto}\ \ (2\mathrm{K})^{\beta}$$

$$_1= 2^{\propto+\beta}\ \mathrm{A}\ \ \mathrm{L}^{\propto}\ \ \mathrm{K}^{\beta}$$

$$_1= 2^{\propto+\beta}\ Q \quad \text{चूंकि } \propto + \beta = 2$$

अतः $= 4Q$ यानि उत्पादन में चार गुना वृद्धि होगी। इसी प्रकार $(\propto + \beta)$ के मान को एक से अधिक या कम रखकर हर स्थिति के लिये संशोधित किया जा सकता है।

यदि $\propto + \beta = -1$ तो

उत्पादन के साधनों को दुगना करने पर

$= 2^{\propto+\beta}\ Q$

$= 2^{-1}\ Q$

$= \frac{Q}{2}$ यानि उत्पादन में आधे गुना ही वृद्धि होगी।

17.8 कॉब डगलस उत्पादन फलन एवं पैमाने के प्रतिफल

पैमाने के प्रतिफल उत्पादन फलन की दीर्घ कालीन प्रवृति को प्रर्दशित करते है। दीर्घकाल में पैमान के सभी साधन परिवर्तनशील होते है। साधनों में होने वाले परिवर्तनों के कारण से पैमाने पर मिलने वाले प्रतिफलों में भी परिवर्तन आता है तथा यह प्रतिफल बढ़ते हुये, घटते हुये तथा स्थिर प्रकार के हो सकते है। जिन्हें समांगी उत्पादन फलन अनुसार निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है :–

(अ) पैमाने के वर्द्धमान प्रतिफल

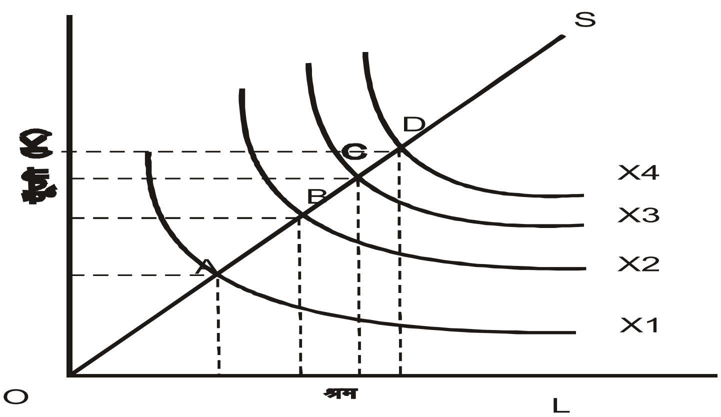
यदि उत्पत्ति के साधनों में एक निश्चित अनुपात में वृद्धि की जाती है परन्तु इसके कारण से मिलने वाला प्रतिफल में वृद्धि अधिक अनुपात में हो जाती है तो यह बढ़ते हुये या वर्द्धमान प्रतिफल कहलायेग यानि

उत्पादन में अनुपातिक वृद्धि साधनों की मात्रा में अनुपातिक वृद्धि

अतः यदि उत्पादन के साधनों में 20 प्रतिशत अनुपात से वृद्धि की जाये तो उत्पादन में वृद्धि 20 प्रतिशत से अधिक हो जाती है तो यह वर्द्धमान प्रतिफल का उदाहरण होगा।

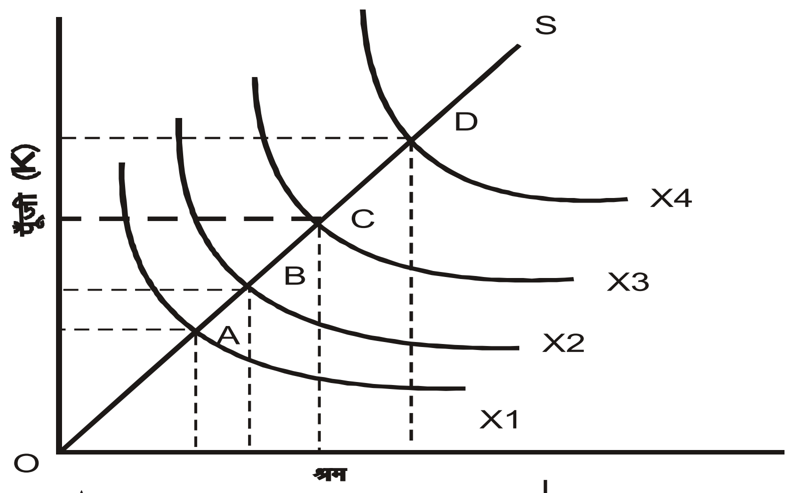
चित्र में os रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1, X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात कम होता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर घटती जायेगी।

यानि AB > BC > CD जो कि वर्द्धमान प्रतिफल को निरूपित करता है। यानि $\propto + \beta > 1$



(ब) पैमाने का ह्रासमान प्रतिफल

इसके अनुसार उत्पत्ति के साधनों को जिस अनुपात में बढाया जाता है उसकी तुलना में उत्पादन में वृद्धि कम अनुपात में होती है तथा X_1, X_2, X_3, तथा X_4 सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरंतर बढ़ती जाती है।



A

B < BC < CD

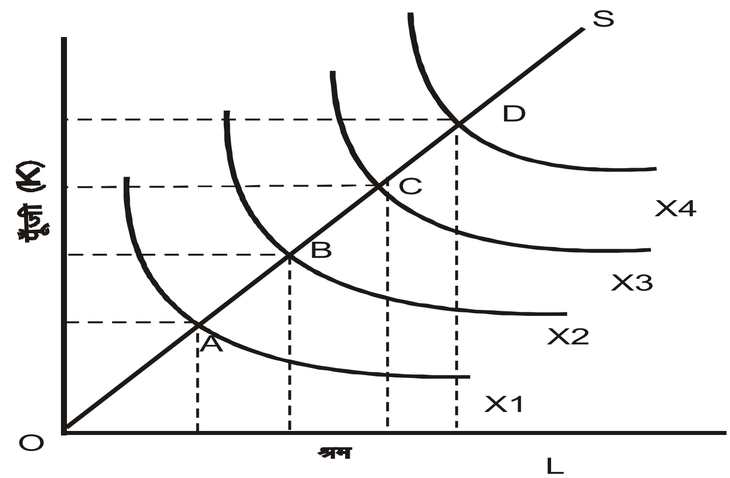
इस उत्पादन प्रक्रिया में उत्पादन में समान वृद्धि अर्थात 100 ईकाई के लिये बढ़ते हुये साधनों की आवश्यकता पड़ेगी। यानि $\alpha + \beta < 1$

चित्र में os रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात बढता जायेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी निरतंर बढती जायेगी।

(स) पैमाने के स्थिर प्रतिफल

इस नियम के अनुसार यदि उत्पत्ति के समस्त साधनों को एक निश्चित अनुपात में बढ़ाया जाये ंतो उत्पादन भी उसी निश्चित अनुपात में बढ़ता है। सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी समान बनी रहेंगी तथा उत्पादन में प्रत्येक 100 ईकाई की वृद्धि में उत्पत्ति के समान साधनों की आवश्यकता होगी।

यानि AB = BC=CD



चित्र में os रेखा पैमाने को निरूपित करती है तथा X_1,X_2, X_3, X_4 उत्पादन की क्रमशः 100, 200, 300, 400 ईकाई को निरूपित करते है। अतः स्पष्ट है कि उत्पादन में समान वृद्धि करने हेतु उत्पत्ति के साधनों में वृद्धि का अनुपात समान ही रहेग तथा सम उत्पाद वक्रों के मध्य दूरी हमेशा समान रहेगी। इस दशा में $\alpha + \beta = 1$ होग।

17.9 कॉब डगलस उत्पादन का उपयोग एवं व्यवहारिकता

कॉब डगलस उत्पादन फलन का अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़ें महत्वपूर्ण उपयोग है जिससे इसकी व्यवहारिकता निर्धारित होती है। यह उत्पादन फलन मात्र उत्पादन के सिद्धान्तों तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसका प्रयोग वितरण एवं विकास के क्षेत्र एवं सिद्धान्तों में भी किया जा सकता है। इस उत्पादन फलन के महत्वपूर्ण उपयोग निम्न प्रकार से है। कॉब डगलस उत्पादन फलन का प्रयोग डगलस द्वारा सीमांत उत्पादकता के सिद्धान्त को व्यवहार में सिद्ध करने के लिये किया गया। कॉब डगलस उत्पादन फलन में प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पादकता के बराबर यदि प्रतिफल दिया जाये तो

श्रम का भाग $= \propto Q$

पूंजी का भाग $= \beta Q = (1-\ )Q$ क्योंकि $\propto + \beta = 1$

अतः इससे यह महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालने में मदद मिलती है कि वितरण में श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी कितनी होगी।

यदि $Q = A\ L^{\propto} K^{(1-\propto)}$ में $\propto$ का मान $\frac{6}{10}$ है। तो कुल उत्पादन का 60 प्रतिशत हिस्सा श्रम को एवं 40 प्रतिशत हिस्सा पूंजी को प्राप्त होना चाहिये।

अतः तथा β जहाँ उत्पादन की श्रम एवं पूंजी के सापेक्ष लोच है यह $\frac{L}{K}$ अनुपात पर निर्भर नहीं करती है। यह तय करती है कि कुल उत्पादन के वितरण में श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी कितनी होगी। हम उपरोक्त उदाहरण में कितनी भी पूंजी की मात्रा बढाते जाये उसका असर श्रम तथा पूंजी की हिस्सेदारी पर नहीं पड़ेगा।

कॉब डगलस उत्पादन फलन से आयलर प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है जिससे यह ज्ञात होता है कि कुल उत्पादन को किस प्रकार श्रम तथा पूंजी में विभाजित किया जा सकता है।

आर्थिक विकास की प्रक्रिया में पूंजी निर्माण का महत्वपूर्ण योगदान है यह उत्पादन की प्रक्रिया में साधनों के उत्पादन पर प्रभाव का मूल्यांकन करता है। इस उत्पादन फलन के निष्कर्षो को कृषि, विनिर्माण, सेवा आदि क्षेत्रों में लागू किया जा सकता है एवं उनका आर्थिक विकास पर पड़ने वाले प्रभावों का अध्ययन किया जा सकता है।

अर्थशास्त्रियों का एक बड़ा वर्ग इस उत्पादन फलन को सीमित उपयोग एवं कम व्यवहारिक वाला मानता है उनके अनुसार यह मात्र स्थिर पैमाने के प्रतिफल के अनुरूप कार्य करता है।

इसी तरह यह उत्पादन फलन जो कि मूलतया विनिमार्ण उद्योगों के लिये बनाया गया था कृषि पर लागु नहीं किया जा सकता है क्योंकि गहन कृषि के अन्तर्गत वृद्धिमान प्रतिफल प्राप्त होते है। यद्यपि भारत में कृषि क्षेत्र में किये गये व्यापक अध्ययन से प्रो0 ए0 एम0 खुसरो ने यह प्रमाणित किया कि भारतीय कृषि क्षेत्र में स्थिर पैमाने के प्रतिफल पाये जाते है।

→ कॉब डगलस उत्पादन फलन का लौग के माध्यम् से रूपान्तरण कर यह लॉग रेखीय (loglinear) रूप में प्राप्त होता है। जिसके माध्यम् से इस रूप को अर्थमिति में विशेषतौर पर रेखीय प्रतिग्मन विश्लेषण की सहायता से व्यापक तौर पर उपयोग में लाया जा सकता है। इसके माध्यम् से उत्पादन का ऑकलन अधिक सरलता से बेहतर किया जा सकता है। इसे निम्न रूप में समझाया जा सकता है।

$$Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

दोनो ओर लॉग लेने पर

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln L + (1-\alpha)\ln(K) \text{ ----------------------(14)}$$

समीकरण (14) में Q, A, L तथा K में समय के सापेक्ष परिवर्तन का ऑकलन लगया जा सकता है।

चूंकि $d(\ln X) = \frac{dX}{X}$ जिसे X में प्रतिशत परिवर्तन के रूप में समझाया जा सकता है।

अतः समीकरण (14) को पुनः निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dL}{L} + (1-\alpha)\frac{dK}{K} \text{ ----------------------(15)}$$

यानि Q में % परिवर्तन = A में % परिवर्तन + α (L में % परिवर्तन) + $(1-\alpha)$(K में % परिवर्तन)

यह सूत्र अधिकांशतया संवृद्धि के लेखाकन के लिये प्रयोग किया जाता है। जिससे यह ज्ञात होता है कि साधनों में प्रतिशत परिवर्तन का प्रभाव कुल उत्पादकता पर कितना प्रतिशत पड़ा है। इसके अतिरिक्त प्रतिगमन रेखाओं तथा प्रतिग्मन समीकरणों से उत्पादन का पूर्वानुमान भी लगाया जा सकता है।

इसमें कोई भी सन्देह नहीं है कि इस उत्पादन फलन में खामियों के चलते इसके उपयोग तथा व्यवहारिकता पर एक प्रश्न चिन्ह जरूर कुछ अर्थशास्त्री लगते है परन्तु इसके बावजूद इस उत्पादन फलन के निष्कर्ष अत्याधिक महत्वपूर्ण है जिनका व्यापक, व्यवहारिक एवं महत्वपूर्ण उपयोग किया जाता है।

17.10 कॉब डगलस उत्पादन फलन की आलोचनाये

इस उत्पादन फलन की आलोचना निम्न आधारों पर की गयी है –

कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पत्ति के मात्र दो साधनों पर चर्चा की ग्यी है तथा संग्ठन एवं उद्यमिता को बिल्कुल नजर अन्दाज किया गया है।

फलन में श्रम तथा पूंजी की उत्पादन क्षमता को निश्चित तथा स्थिर माना ग्या है जो कि व्यवहारिकता से परे है।

मौलिक कॉब डगलस उत्पादन फलन में मात्र स्थिर पैमाने के प्रतिफलों को ही शामिल किया ग्या है जबकि वास्तविकता में पैमाने के ह्रासमान तथा वृद्धिमान प्रतिफल भी प्राप्त होते है।

→ यह फलन साधनों की स्थानापन्नता की मान्यता पर आधारित है तथा साधनों की पूरकता को शामिल नहीं करता है।

इस फलन में समय तत्व की उपेक्षा की गयी है जबकि आर्थिक चरों का विश्लेषण समय के सापेक्ष किया जाना महत्वपूर्ण होता है।

अर्थशास्त्रियों में इस उत्पादन फलन की व्यवहारिकता तथा कार्यशीलता के बारे में आम राय नहीं है। कुछ के अनुसार यह एक फर्म के लिये ही लागू होता है। जबकि कुछ के अनुसार यह फर्मो के समूह के लिये लागू होता है।

श्रम की प्रत्येक इकाई को समान ही माना ग्या है एवं अकुशल श्रम, अर्द्धकुशल श्रम तथा कुशल श्रम में अन्तर स्पष्ट नहीं हो पाया है।

कॉब डगलस यह सिद्धान्तया स्पष्ट नहीं कर पाये कि α तथा β क्यों स्थिर रहते है।

17.11 सारांश

कॉब डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का निर्धारण अमेरिकी अर्थव्यवस्था का 1890 से 1922 के मध्य अध्ययन करने के उपरांत किया गया। इसमें कोई संन्देह नहीं है कि इस उत्पादन फलन में व्यापक तथा ग्ंभीर खामियॅा है एवं यह फलन कई अवास्तविक तथा अव्यवहारिक मान्याताओं के आधार पर निर्मित किया ग्या है जो कि आधुनिक उत्पादन प्रणाली को देखते हुये समुचित नहीं प्रतीत होती है।

परन्तु कॉब डगलस द्वारा इस उत्पादन फलन का अविष्कार कर अर्थशास्त्र के अध्ययन में एक नया आयाम जोड़ा है क्योंकि यह उत्पादन फलन ने अर्थशास्त्र के अध्ययन में नींव का काम किया है। चूंकि इसके बाद के समस्त महत्वपूर्ण फलनों का निर्माण कहीं न कहीं कॉब

डगलस उत्पादन फलन को ध्यान में रखकर किया गया है। अतः कॉब डगलस उत्पादन फलन की भूमिका अर्थशास्त्र के अध्ययन में बड़ी ही महत्वपूर्ण है।

17.12 शब्दावली

प्रतिस्थापन लोच – सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर में सापेक्षिक परिवर्तन होने के कारण से साधन अनुपात में कितना सापेक्षिक परिवर्तन होता है प्रतिस्थापन लोच के रूप में जाना जाता है। जबकि उत्पादन का स्तर समान रहें।

समउत्पाद वक्र – इस वक्र अनरूप उत्पादन का स्तर समान रहता है। उसे समान उत्पाद वक्र भी कहते है। यह समान उत्पादन का वह बिन्दु पथ है जिसे श्रम तथा पूंजी की विभिन्न मात्राओं से प्राप्त किया जा सकता है।

उत्पादन की श्रम लोच – श्रम की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन से होने वाले उत्पादन में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच कहलाती है।

उत्पादन की पूंजी लोच – पूंजी की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन से होने वाले उत्पादन में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को उत्पाद की पूॅजी के सापेक्ष लोच कहलाती है।

गुणोत्तर माध्य – दो राशियों के मध्य का गुणोत्तर माध्य दोनों के गुणन फलों का वर्गमूल होग तथा n राशियों का गुणोंत्तर माध्य उन राशियों के गुणनफल का n वाँ मूल होगा।

सीमांत प्रतिस्थापन की तकनीकी दर – श्रम की एक इकाई के बदले पूंजी की किसी इकाईयाँ प्रतिस्थापित की जा सकती है जबकि उत्पादन की स्तर समान बना रहें।

$$MRTS_{LK} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

समलागत रेखा – यह उत्पादन के साधनों के विभिन्न अनुपातों को प्रदर्शित करती है जिसे कोई फर्म दिये गये बजट में से क्रय कर सकती है इसे क्रय रेखा या कीमत रेखा भी कहते है।

$$C = wL + rK$$

सीमांन्त उत्पादन – उत्पादन के साधनों में ईकाई परिवर्तन होने से कुल उत्पादन में कितना परिवर्तन होता है यह सीमांत उत्पादन कहलाता है।

औसत उत्पादन – कुल उत्पादन तथा साधनों के अनुपात को औसत उत्पादन कहते है।

इष्टतम् उत्पादन – इसे उत्पादन करने वाली फर्म का संतुलन बिन्दु भी कहते है तथा इसका निर्धारण समउत्पाद वक्र तथा समलागत रेखा के स्पर्श बिन्दु के द्वारा होता है।

विस्तार पथ – न्यूनतम लागत उत्पादन के संयोग बिन्दुओं को मिलाने पर विस्तार पथ प्राप्त होता है।

प्रतिनमन विशलेषण – आश्रित तथा स्वतंत्र चरों के मध्य औसत सम्बन्ध को इस विशलेषण से स्थापित किया जाता है।

प्रतिगमन समीकरण – प्रतिगमन विश्लेषण में दो समीकरण स्थापित होते है जैसे प्रथम समीकरण को X चर को स्वतंत्र मान कर तथा Y को निर्भर मान कर निम्न तरह से लिख सकते है।

$Y = a + bX$ इसी प्रकार $X = d + bY$

17.13 लघु उत्तरीय प्रश्न

1. कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच होती है?
2. कॉब डगलस उत्पादन फलन की साधन ग्हनता का निर्धारण कौन सा अनुपात करता है?
3. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की श्रम के सापेक्ष लोच क्या होती है?
4. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन के कितने साधन लिये ग्ये है?
5. रेखीय रूप से समरूप उत्पादन फलन में साधनों को दुग्ना बढाने पर उत्पादन कितने गुना बढ़ जायेग?
6. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की दक्षता का निर्धारण कौन करता है?
7. रेखीय रूप से समरूप कॉब डगलस उत्पादन फलन में $(\propto + \beta)$ का मान होता है?
8. कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ कैसी रेखा में प्राप्त होता है?
9. कॉब डगलस उत्पादन फलन के समउत्पाद वक्र का ढाल कैसा होता है?
10. वृद्धिमान प्रतिफल के अर्न्तग्त कॉब डगलस उत्पादन फलन में $(\propto + \beta)$ का मान कितना होग?
11. ह्रास मान प्रतिफल के अन्तर्गत कॉब डगलस उत्पादन फलन में $(\propto + \beta)$ का मान कितना होगा?
12. कॉब डगलस उत्पादन फलन में उत्पादन की पूंजी के सापेक्ष लोच क्या होती है।
13. कॉब डगलस उत्पादन फलन को सर्वप्रथम किसने प्रस्तावित किया?
14. कॉब डगलस उत्पादन फलन को किस अर्थ व्यवस्था के ऑकड़ों के माध्यम् से स्थापित किया ग्या?
15. कॉब डगलस उत्पादन फलन में श्रम तथा पूंजी के सापेक्ष सीमांत उत्पादकता किसके समानुपाती होती है?
16. कॉब डगलस उत्पादन फलन में कुल सीमांत उत्पादकता की नाप कौन करता है?

उत्तरमाला – 1. एक 2. $\frac{\propto}{\beta}$ 3. 1 4. दो 5. दुगना 6. A 7. एक 8. सीधी रेखा 9. ऋणात्मक 10. एक से अधिक 11. एक से कम 12. β 13. केनेट विकसैल 14. अमेरिका 15. औसत उत्पादन 16. A.

17.14. दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. कॉब डगलस उत्पादन फलन से क्या समझते हो तथा इसकी मुख्य मान्यतायें बताते हुये महत्वपूर्ण विशेषतायें समझाईयें?
2. प्रतिस्थापन लोच को स्पष्ट करते हुये कॉब डगलस उत्पादन फलन की प्रतिस्थापन लोच निर्धारित करियें?
3. कॉब डगलस उत्पादन फलन का आलोचनात्मक मूल्यांकन करते हुये इसके सम उत्पाद वक्र के ढाल को ऋणात्मक सिद्ध कीजियें?
4. विस्तार पथ से क्या समझते है कॉब डगलस उत्पादन फलन का विस्तार पथ एक सीधी रेखा में होता है सिद्ध कीजिये?
5. संशोधित कॉब डगलस उत्पादन फलन को समझाते हुये कॉब डगलस उत्पादन के महत्व को समझायें?

17.14 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- मिश्र, जयप्रकाश (2005) कृषि अर्थशास्त्र, साहित्य भवन प्रकाशन।
- आहूजा, एच0 एस0 (2002) समष्टि अर्थशास्त्र, एस चन्द प्रकाशन।
- Mehta Mandnani (2001). Mathematics Economics Sultan chand Publication.
- Bose, D. (2003), An Inrtoduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Businese, Excel Books.
- Koutsoyiannis, A. (1979), Modern Micro Economics, Macmillian Press Ltd.
- Gujarati, N. Damodar, (2007), Basic Econometrics, The Mc Graw Hill companies.

इकाई 18 द्वितीय चरण अतंर सम्बन्धी समीकरण

18.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में कॉब डगलस उत्पादन फलन तथा इसकी विभिन्न विशेषताओं के व्यापक अध्ययन से यह ज्ञात हुआ कि न सिर्फ इस उत्पादन फलन का कृषि, विनिर्माण, वितरण तथा विकास के क्षेत्र में उपयोग है अपितु इस उत्पादन फलन का बड़ा ही महत्वपूर्ण योगदान गणितीय अर्थशास्त्र को एक स्वतंत्र विषय के तौर पर विकसित होने में भी रहा है। इस उत्पादन फलन के पश्चात ही कई महत्वपूर्ण फलनों तथा उनकी विशेषताओं का उपयोग अर्थशास्त्र के अध्ययन में सुनिश्चित हो पाया है।

गणितीय अर्थशास्त्र में कई महत्वपूर्ण विधियों–प्रविधियों का अध्ययन किया जाता है जिससे अर्थशास्त्र के विभिन्न क्षेत्रों जैसे कृषि, उद्योग, अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार तथा आर्थिक विकास के क्षेत्र में प्रवृतियों एवं पूर्वानुमानों का अध्ययन किया जाता है। इन सभी विधियों एवं प्रविधियों में आर्थिक चरों की विशेषताओं एवं इनके मध्य स्थापित हो रहे अन्तर सम्बन्धों का अध्ययन करना महत्वपूर्ण हो जाता है।

आर्थिक चरों के मध्य परस्पर अन्तर सम्बन्धों को ज्ञात करने तथा इन चरों के माध्यम से महत्वपूर्ण निष्कर्षो का विश्लेषण करने हेतु अनेको विधियों का अध्ययन गणितीय अर्थशास्त्र में किया जाता है। '' अन्तर सम्बन्धी समीकरण '' का विशलेषण भी उक्त सन्दर्भ में किया जाता है। वर्तमान ईकाई में हम द्वितीय चरण अतंर सम्बन्धी समीकरण का व्यापक अध्ययन करेगें।

18.2 उद्देश्य

→ अतंर सम्बन्धी समीकरण में अतंर से क्या समझते है?

→ अतंर सम्बन्धी समीकरण (difference equation) एवं अवकलन समीकरण (differential equation) में क्या अन्तर है।

→ अतंर सम्बन्धी समीकरण क्या है तथा इसके चरण एवं कोटि (order) किस प्रकार से निर्धारित होती है।

→ अतंर सम्बन्धी समीकरणों की मुख्य विशेषतायें कौन–कौन सी है तथा इन समीकरणों को किस प्रकार से हल किया जाता है।

→ अर्थशास्त्र में अतंर सम्बन्धी समीकरणों के क्या उपयोग है।

18.3 अतंर समीकरण से तात्पर्य

आधुनिक समय में अर्थशास्त्र के अध्ययन में विभिन्न चरों जैसे आय, उपयोग, बचत, निवेश, आयात तथा निर्यात आदि से सम्बन्धित विभिन्न चरों का ''काल आधारित'' विश्लेषण किया जाता है। यदि के तौर पर वर्तमान समय के उपभोग पिछले समय अन्तराल की आय पर निर्भर करता तथा इस सम्बन्ध को यदि ग्णीतीय समीकरण के रूप में प्रस्तुत किया जाये तो

$$C_t = \propto (y_{t-1})$$

यानि t समय पर उपभोग (t-1) समय की आय पर निर्भर करता है जहाँ $\propto$ एक स्थिराँक है। अतः अतंर समीकरणों में दो अलग अलग समच अन्तरालों के चरों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया जाता है। ए0 क्रूरेस के अनुसार, '' अतंर समीकरण वह समीकरण होती हैं जिसमें आश्रित चर समय पश्च स्वतन्त्र चर पर निर्भर करता है।''

सामान्यतया अतंर समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$F[Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} -----, Y_{t-P}, t] = 0 \text{ ———————————————————— } (1)$$

जहाँ F फलन है तथा Y_t आश्रित चर है जो कि 't' पर आधारित है एवं समय 't' एक स्वतंत्र चर है। अतंर समीकरणों के विश्लेषण के लिये पश्च क्रिया आपरेटर या लॉग आपरेटर का उपयोग किया जा सकता है।

जहाँ $X_t = L(Y_t)$

$$X_t = Y_{t-1}$$

अतः Y_{t-1} को LY_t लिखा जा सकता है। इसी प्रकार आपरेटर के रूप में समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$F\left[Y_t, LY_t, L^2Y_t, L^3Y_t, -----------, L^PY_t, t\right] = 0 \text{ ————————— } (2)$$

अतंर समीकरण को इस रूप में भी लिख जा सकता है।

$$F\left[Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, -------------, Y_{t+n}, t\right] = 0 \text{ ————————— } (3)$$

इसको अग्र क्रिया आपरेटर के रूप में व्यक्त करने पर

$$F[Y_t, EY_t, E^2Y_t, E^3Y_t, ---------, E^nY_t, t] = 0 \text{ —————————— } (4)$$

अतंर समीकरणों के माध्यम् से विभिन्न चरों में समय आधारित व्यवहार या प्रवृति आसानी से ज्ञात की जा सकती है। अर्थशास्त्र में इसका कई महत्वपूर्ण क्षेत्रों में उपयोग किया जाता है जैसे त्वरण सिद्धान्त में,

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1})$$

जहाँ I_t, t समय पर निवेष है।

C_t, t समय पर उपभोग है एवं C_{t-1}, t-1 समय पर उपभोग है।

यद्यपि अर्थशास्त्र के विभिन्न चर समय के अनुसार बदलते रहते है तथा चरों के गतिमान विश्लेषण हेतु गणित के सिद्धान्तों का प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर यह बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि जब समय को एक चर की भाँति उपयोग में लाया जाता है तो गणितीय सिद्धान्तों का उपयोग समय की प्रवृति के अनुसार ही होता है।

यदि समय को निरन्तर चर (Continons Variable) माना जाये ंतो जिन समीकरणों के माध्यम् से स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में सम्बन्ध स्थापित किया जाता है उनका विश्लेषण अवकलन समीकरणों (Differential Equations) के माध्यम किया जाता है।

यदि समय को खंडित चर के रूप में लिया जाता है यानि चरों को विभिन्न समयान्तराल पर मापा जाये तो स्वतंत्र तथा आश्रित चरों के मध्य स्थापित सम्बन्धों का विश्लेषण अतंर समीकरणों (Differential Equations) के माध्यम् से किया जाता है। जैसे आप, उपभोग या बचत सम्बन्धित आकड़ों को प्रतिमाह, तिमाही या सालाना आधार पर एकत्रित किया जाये तो समय खंडित (Discrete) चर होग। उदाहरण हेतु जैसे सैम्युलसन के व्यापार चक्र विश्लेषण में वर्तमान समय की आय पूर्व के दो समयान्तराल पर निर्भर करती है तथा यह व्यापार चक्र विश्लेषण गुणन त्वरक अन्तक्रिया पर आधारित है।

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \text{ ------------------(5)}$$

Y_t = राष्ट्रीय आय, I_t = निवेश, G_t = सरकारी निवेश

$$C_t = \propto Y_{t-1} \text{ ----------------------(6)}$$

$\propto$ = सीमांत उपभोग की प्रवृति।

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \text{ -----------------(7)}$$

β = त्वरक

(6) का मान (5) में रखने पर

$$Y_t = \propto \beta\, Y_{t-1} - \alpha\, \beta\, Y_{t-2} \text{ ————————————(8)}$$

समी0 (8) का मान तथा $G_t = 1$ का मान समी0 (5) में रखने पर

$$Y_t = 1 + \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} \text{ ————————————(9)}$$

यह अतंर समीकरण का ऐसा उदाहरण है जो अर्थशास्त्र में बड़ा ही महत्व रखता है।

18.4 अतंर समीकरण की कोटि एवं चरण

अतंर समीकरणों की कोटि तथा चरण के आधार पर विश्लेषण किया जाता है जहाँ तक कोटि का प्रश्न है इसके सन्दर्भ में उत्पादन फलनों के अन्तर्गत अध्ययन किया गया है। किसी भी समीकरण की कोटि से तात्पर्य समीकरण चर राशि की उच्चतम् घात से है जैसे

$Y_t^2 + Y_t + 1 = 0$ समीकरण की कोटि दो है।

$Y_t^3 + Y_t + 2 = 0$ समीकरण की कोटि तीन है।

वही दूसरी ओर अतंर समीकरण का चरण चरों के मध्य समय पश्चता (Time Lag) पर निर्भर करता है यदि समयान्तरालों के मध्य एक चरण का अतंर है तो समीकरण प्रथम चरण की होगी एवं यदि समयान्तरालों के मध्य दो चरण का अतंर है तो समीरकण द्वितीय चरण की होगी। किसी भी समीकरण का चरण अधिकतम तथा न्यूनतम् समय आधारित चरों के अन्तराल से निर्धारित होती है। जैसे किसी समीकरण में अधिकतम समय अन्तराल पर चर Y_{t+n} तथा न्यूनतम चर Y_{t+1} है तो समीरकण का चरण $(t + n) - (t + 1) = (n-1)$ होगा।

उदाहरण के तौर पर विभिन्न चरणों के समीकरणें को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है–

$2Y_{t-1} + Y_t = 6$ (प्रथम चरण)

$3Y_{t+3} + Y_{t+2} + Y_t = 5$ (द्वितीय चरण)

$2Y_{t+3} + 3Y_{t+2} - 4Y_{t+1} - 4Y_t = 7$ (तृतीय चरण)

यहाँ पर चरों के समयान्तरालों में अधिकतम अतंर से ही चरण निर्धारित होता है n चरण की समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$a_0Y_{t+n} + a_1Y_{t+n-1} + a_2Y_{t+n-2+} - - - - + a_nY_t = f(t) \text{ ———————(10)}$$

यदि f (t,y) एक फलन है जो कि समस्त धनात्मक संख्याओं (Positive Integers) तथा सभी वास्तविक संख्याओं (Real Number) हेतु व्यक्त किया ग्या है तो प्रथम चरण समीकरण को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है

$Y_t = f(t, Y_{t-1})$, t – 1,2,,3 ————————————————————(11)

कुछ विद्वान अतंर समीकरण उसे मानते है जहाँ अतंर $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ को t तथा Y_{t-1}का फलन माना जाये यानि $\Delta Y_t = f(t, Y_{t-1})$

परन्तु $Y_t = f(t, Y_{t-1}) + Y_{t-1}$ ————————————(12)

समीकरण (7) तथा (8) के मध्य अधिक अतंर नहीं हैं। अतः हम समीकरण (7) को ही अतंर समीकरण के रूप में ही निरूपित करेंगें।

इसी प्रकार द्वितीय चरण की समीकरण को भी निरूपित किया जा सकता है।

$Y_{t+2} = f(t, Y_{t,} Y_{t+1})$, t = 0,1,----------------(13)

n चरण की समीकरण को निम्न रूपों में व्यक्त कर सकते है।

$a_0(t)Y_{t+n} + a_1(t)Y_{t+n-1} + -------- + a_t(t)Y_t = A(t)$ –––(14)

या$a_0(t)E^nY_t + a_1(t)E^{n-1}Y_t + -------- + a_n(t)Y_t = A(t)$––(15)

या $[a_0(t)E^n + a_1(t)E^{n-1} + -------- + a_n(t)]Y_t = A(t)$–––––––––(16)

जहाँ $a_0(t), a_1(t), a_2(t), ---, a_n(t) \neq 0$, निरपेक्ष स्थिरॉक है या t के फलन है इसी प्रकार A(t), t का फलन है।

समीकरण (16) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$F(E)\ Y_t = A_t$ --------------------------------(17)

जहाँ $F(E) = a_0(t)E^n + a_1(t)E^{n-1} +$ ---------------$+ a_n(t)$ ---------------(18)

तथा F(E) = 0, समीरकण (17) की सहायक समीकरण है जिसका समाधान पूरक समाधान कहलाता है।। यदि $a_0(t), a_1(t), a_2(t), ---, a_n(t)$ निरपेक्ष स्थिरांक तथा वह t से स्वतंत्र तो उपरोक्त समीकरण रेखीय अंतर समीकरण n चरण की कहलायेगी

तथा अंतर समीकरण जो कि (14),(15),(16) के रूप की है। वह गैर रेखीय अतंर समीकरण कहलायेगी।

यदि $A(t) = 0$, तो समीकरण (17) से

$F(E)\ Y_t = 0$ ---------------------------------------(19)

यह समीकरण समांगी रेखीय अतंर समीकरण कहलायेगी एवं यदि $A(t) \neq 0$ तो समीकरण (14),(15),(16) तथा (17) गैर समांगी समीकरण कहलायेगी।

18.5 प्रथम चरण अतंर समीकरण का समाधान

यदि समीकरण $Y_t = aY_{t-1} + b$ ---------------(20)

समीकरण का समाधान दो चरणों में प्राप्त किया जाता है जिसे सामान्य समाधान (General Solution) कहते है। यह समाधान विशिष्ट समाधान (Particuler Solution) तथा पूरक समाधान (Complementary Solution) का योग होता है।

अतंर समीकरण के समाधान की प्रमेय के अनुसार प्रथम चरण अतंर गैर समांगी समीकरण प्राप्त करने हेतु समांगी भाग का पूरक समाधान प्राप्त किया जाता है तथा गैर समांगी भाग हेतु विशिष्ट समाधान प्राप्त किया जाता है। विशिष्ट समाधान सामान्य समाधान को विशिष्ट कालिक मूल्य प्रदान कर ज्ञात किया जाता है।

विशिष्ट समाधान हेतु समीकरण (10) में

$Y_t = Y_{t-1} = Y^*$ रखने पर

$Y^* = aY^* + b$ ------------------------------------(21)

$Y^* = \frac{b}{1-a}$

पूरक समाधान की प्राप्ति हेतु समीकरण (10) में स्थिरांक b को हटाने पर

$Y_t = aY_{t-1}$ -----------------(22)

इस समीकरण में $Y_t = Am^t$ प्रतिस्थापित करने पर

$Am^t = a\,Am^{t-1}$, A यहाँ स्वच्छन्द स्थिरांक है।

अतः m= a होग। इसलिये पूरक समाधान

$y_t = A(a)^t$ ---------------------------(23)

चूंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ठ समाधान

$Y_t = A(a)^t + \frac{b}{1-a}$ ——————————————————(24)

यदि हम t का मान शून्य समीकरण (24) में प्रतिस्थापित करे तो

$Y_0 = A(a)^0 + \frac{b}{1-a}$

तो $A = Y_0 - \frac{b}{1-a}$

A का मान समीकरण (24) में प्रतिस्थापित करने पर

$\boldsymbol{Y_t = a^t\left(Y_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$ ——————————————————**(25)**

या $Y_t = a^tY_0 + \frac{b(1-a^t)}{1-a}$ यदि $a \neq 1$

$Y_t = Y_0 + bt$ यदि $a = 1$

उदाहरण 1,

$X_t = 2X_t - 8$ को हल कीजिये। यदि $X_0 = 5$,हल,

$X_t = 2X_t - 8$ में $X_t = X_{t-1} = X^*$ प्रतिस्थापित करने पर

$X^* = 2X^* - 8$

$X^* = 8$ यह विशिष्ठ समाधान है। पूरक समाधान हेतु हमें समीकरण

$X_t = 2X_t - 8$, से स्थिर राशि 8 हटाने पर $X_t = 2X_t$ में $X^t = Am^t$ रखने पर

$Am^t = 2Am^{t-1}$ यहाँ $m = 2$

अतः पूरक समाधान $X^t = A\,2^t$

चुंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ठ समाधान

$X_t = A2^t + 8$ ————————————————(26)

चूंकि $X_0 = 5$ है अतः $t = 0$ एवं $X_0 = 5$ समीकरण (26) में प्रतिस्थपित करने पर

$5 = A\,2^t + 8$

$5 = A + 8$, $A = -3$ को पुनः (26) में प्रतिस्थापित करने पर

$X_t = 2^t(-3) + 8$ उत्तर

18.6 द्वितीय चरण अतंर समीकरण का समाधान (समांगी समीकरण)

यदि निम्न समांगी समीकरण को लिया जाये

$Y_{t+2} + aX_{t+1} + bX_t = 0$ ——————————————(27)

पूरक समाधान हेतु समीकरण (17) $Y_t = Am^t, Y_{t+1} = Am^{t+1}$ एवं $Y_{t+2} = Am^{t+2}$ रखने पर (यहाँ पर पूरक समाधान ही सामान्य समाधान होग)

$Am^{t+2} + aAm^{t+1} + bAm^t = 0$ ——————————————(28)

समीकरण (18) को Am^t से भाग देने पर

$m^2 + am + b = 0$ ——————————————(29)

इस समीकरण के समाधान की निम्न तीन दशाये होगी।

→ प्रथम, इस समीकरण में यदि m के दो मान m_1 तथा m_2 आये तो सामान्य समाधान

$Y_t = Cm_1^t + D\,m_2^t$ जहाँ $m_1 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ तथा $m_2 = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ यह तभी होग जबकि $\frac{a^2}{4} - b > 0$

→ द्वितीय, इस समीकरण में $m = m_1 = m_2$ का एक ही मान आये एवं यह तभी संभव होग जबकि $\frac{a^2}{4} - b = 0$ इस दशा में पूरक समाधान $Y_t = (C + Dt)m^t$

→ तृतीय, इस समीकरण के हल हेतु m का कोई वास्तविक हल न आये तथा यह तभी संभव होग जबकि $\frac{a^2}{4} - b < 0$

इस दशा में सामान्य समाधान

$$Y_t = Cr^t(\theta t + \omega),\ r = \sqrt{b}, \qquad \cos\theta = -\frac{a}{(2\sqrt{b})}$$

$$Y_t = Cr^t\cos(\theta t + \omega)$$

गैर समांगी समीकरण हेतु अतंर समीकरण का समाधान

सर्वप्रथम निम्न असमांगी समीकरण को लिया जायें

$Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = r_t$ ——————————————(30)

इस समीकरण की समांगी करण निम्न होगी

$Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = 0$ ---------------------(31)

इस समीकरण हेतु पूरक समाधान पिछले उदाहरण की भाँति ज्ञात किया जायेग। इस दशा में सामान्य समाधान

Y_t = पूरक समाधान (Y) + विशिष्ट समाधान (Y^*)

$Y_t = Cm_1^t + Dm_2^t + Y^*$

यदि $r_t = r$ तो समीकरण (30) निम्न प्रकार होगी

$Y_{t+2} + Y_{t+1} + bY_t = r$ ---------------------(32)

विशिष्ट समाधान हेतु $Y_{t+2} = Y_{t+1} = Y_t = Y^*$

$Y^* + aY^* + bY^* = r$

$Y^*(1 + a + b) = r$

$Y^* = \frac{r}{1+a+b}$

परन्तु यह तभी सम्भव होग जब कि $1 + a + b \neq 0$

यदि $1 + a + b \neq 0$ तो कोई भी स्थिर फलन समीकरण (32)

को सतुंष्ट नहीं कर पायेग।

समीकरण $Y_{t+2} + aY_{t+1} + bY_t = r_t$ में r_t को सामान्यतया निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

a^t, बहुघातीय समीकरण, $\cos(bt)$, $\sin(bt)$

इस स्थिति में अनिश्चित गुणांक विधि द्वारा हल करेगें।(Method of Undetermined Coefficients) अतः r_t के विभिन्न रूपों संभावित या अनुमानित समाधान को समीकरण में प्रतिस्थापित कर विशिष्ट समाधान ज्ञात किया जा सकता है।

क्रम संख्या	r_t के रूप	संभावित समाधान
1	a^t	ca^t
2	बहुघातीय समीकरण n कोटि में	$(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + - - - - + c_n)$
3	a^t P(t), जहाँ P(t) बहुघातीय	$a^t\,(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + - - - + c_n)$

	समीकरण n कोटि में	
4	$\sin(bt)$ या $\cos(bt)$	$c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt)$
5	$a^t\ \sin(bt)$ या $\cos(bt)$	$a^t[c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt)]$

उदाहरण –6, $Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2} + 11$ का सामान्य समाधान ज्ञात करियें ? यदि $Y_0=5$, $Y_1=7$

हल– सर्वप्रथम समीकरण के माध्यम् से विशिष्ठ समाधान निकाला जायेगा।

यानि $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर

$6Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2} + 11$ ––––––––––(33)

$6Y^* = Y^* + Y^* + 11$

$Y^* = \frac{11}{4}$

पूरक समाधान की प्राप्ति हेतु समीकरण (33) से स्थिर राशि 11 को हटाने पर

$6Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-2}$ ––––––––––––––––––––(34)

समीकरण (31) में $Y_t = Am^t$ प्रतिस्थापित करने पर

$6Am^t = Am^{t-1} + Am^{t-2}$

उपरोक्त को Am^{t-2} से विभाजित करने पर

$6m^2 = m+1$

$6m^2 - m - 1 = 0$

उक्त के गुणन खंड करने पर

$(2m-1)(3m+1)=0$

यानि $m = ½$ या $m = -1/3$

अतः पूरक समाधान $Y_t = C\left(\frac{1}{2}\right)^t + D\left(-\frac{1}{3}\right)^t$

चूंकि सामान्य समाधान = पूरक समाधान + विशिष्ठ समाधान

$Y_t = C\left(\frac{1}{2}\right)^t + D\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{11}{4}$ ––––––––––––––––(35)

चूंकि समीकरण (25) में दो स्वच्छन्द स्थिरांक है। अतः इसमें पहले $Y_0 = 5$ तथा $t = 0$ एवं $Y_1 = 7$ तथा $t = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$5 = C + D + \frac{11}{4}$ यानि $C + D = 5 - \frac{11}{4} = \frac{9}{4}$

$$C + D = \frac{9}{4} \text{ ---------------------------------------(36)}$$

$$5 = C\left(\frac{1}{2}\right) + D\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{11}{4}$$

$$\frac{C}{2} - \frac{D}{3} = 7 - \frac{11}{4} = \frac{17}{4}$$

$$3C - 2D = \frac{102}{4} \text{ -----------------------------------(37)}$$

समीकरण (27) तथा (26) से $C = 6$ $D = -15/4$ दोनों का मान समीकरण (35) में रखने पर

$$Y_t = 6\left(\frac{1}{2}\right)^t - \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{11}{4}$$

उत्तर

18.7 अतंर समीकरणों से सम्बन्धित विशिष्ट समस्यायें

कभी–कभी सामान्य तरीकों से समीकरणों को हल नहीं किया जा सकता है। जैसे

उदाहरण 3,

$4Y_t - Y_{t-1} - 3Y_{t-2} = 14$, को $X_0 = 2, X_1 = 0.5$ की सहायता से हल कीजियें?

हल–

$$4Y_t - Y_{t-1} - 3Y_{t-2} = 14 \text{ ——————————————(38)}$$

$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ प्रतिस्थापित करने पर

$$4Y^* - Y^* - 3Y^* = 14$$

$0 = 14$ यह सम्भव नहीं है।

अतः $Y_t = Y^*t$ समीकरण (38) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4Y^*t - Y^*(t-1) - Y^*(t-2) = 14,$$

$$4Y^*t - Y^*t + Y^* - 3Y^*t + 6Y^* = 14, \; Y^* = 2$$

$$4Y_t - Y_{t-1} - 3Y_{t-2} = 0 \text{ ——————————————————(39)}$$

समीकरण (26) $Y_t = Am^t$, $Y_{t-1} = Am^{t-1}$तथा $Y_{t-2} = Am^{t-2}$ प्रतिस्थापित करने पर

$4Am^t - Am^{t-1} - 3Am^{t-2} = 0$

उपरोक्त को Am^{t-2} से विभाजित करने पर

$4m^2 - m - 3 = 0$

उपरोक्त के गुणनखंण्ड करने पर

$(4m+3)(m-1)=0$

$m = -3/4$ तथा $m = 1$

अतः पूरक समाधान

$$Y_t = C\left(-\frac{3}{4}\right)^t + D(1)^t$$

सामान्य समाधान $Y_t = Y + Y^*$

$$Y = C\left(-\frac{3}{4}\right)^t + D(1)^t + 2 \text{ ---------------------(40)}$$

समीकरण (27) में $Y_0 = 2, t = 0$ एवं $Y_1 = 0.5$ तथा $t = 1$ प्रतिस्थापित करने पर निम्न दो समीकरण प्राप्त होती है।

$$C + D = 0 \text{ तथा } -3C + 4D = -6$$

दोनों समीकरणों को हल करने पर

$C = 6/7$ एवं $D = -6/7$

C तथा D का मान समीकरण (27) में प्रतिस्थापित करने पर

$$Y_t = \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^t - \frac{6}{7}(1)^t + 2$$

उपरोक्त उदाहरण की भाँति यदि अतंर समीकरण में दायी ओर की राशि स्थिर न होकर समय का फलन हो तो सामान्य तरीके से इस अतंर समीकरण का हल नहीं निकाला जा सकता है इसको निम्न उदाहरण के माध्यम् से समझाया जा सकता है।

उदाहरण 4, $Y_{t+2} - Y_{t+1} + Y_t = 2t - 3$ -------------------------(41)

उपरोक्त समीकरण का सामान्य हल ज्ञात कीजियें ?

हल – इस समीकरण को पहले समांगी समीकरण में बदल कर पूरक समाधान ज्ञात किया जायेगा।

$Y_{t+2} - Y_{t+1} + Y_t = 0$

उपरोक्त समीकरण में $Y_t = Am^t$, $Y_{t+1} = Am^{t+1}$तथा $Y_{t+2} = Am^{t+2}$ रखने पर $Am^{t+2} - 5Am^{t+1} + 6Am^t = 0$ को Am^t से विभाजित करने पर निम्न सहायक समीकरण प्राप्त होती है–

$m^2 - 5m + 6 = 0$ ———————————————(42)

उपरोक्त के गुणनखंड करने पर $m = 2$ तथा $m = 3$ प्राप्त होते है। अतः पूरक समाधान

$Y = C(2)^t + D(3)^t$ ————————————————————(43)

समीकरण (29) का दायी ओर का भाग यह अनुमान लगाया जा सकता है कि विशिष्ट समाधान $Y_t^* = at + b$ के प्रकार का हो सकता है। अतः अज्ञात गुणांक ज्ञात करने की विधि a तथा b के मान ज्ञात करने हेतु उपयोग में लायी जा सकती है।

समीकरण (29) में $Y_t^* = at + b = Y_t$

$Y_{t+1} = Y_{t+1}^* = a(t+1) + b$, $Y_{t+2}^* = a(t+2) + b = Y_t + 2$ प्रतिस्थापित करने पर

$a(t+2)+b-5[a(t+1)+b]+6(at+b) = 2t - 3$

$2at - 3a + 2b = 2t - 3$

t के गुणांक की तथा स्थिर राशि की उपरोक्त समीकरण में तुलना करने पर

$2a = 2$ यानि $a = 1$ तथा $-3a + 2b = -3$, $b = 0$

अतः विशिष्ट समाधान $Y_t^* = at + b$ में a तथा b प्रतिस्थापित करने पर $Y_t^* = t$

अतः सामान्य समाधान $Y_t = C(2)^t + D(3)^t + t$

जिसे t के विभिन्न दिये मानों तथा Y_0, Y_1,---------- आदि के आधार पर C तथा D के लिये हल किया जा सकता है।

उदाहरण 5 :– $Y_{t+2} - 5Y_{t+1} + 6Y_t = 4^t + t^2 + 3$ को हल कीजियें ?

हल – इस समीकरण की समांगी समीकरण निम्न होगी

$m^2 - 5m + 6 = 0$ तथा इसके लिये $m=2$ तथा $m=3$

अतः पूरक समाधान = $C2^t + D3^t$

$Y_{t+2} - 5Y_t + 6Y_t = 4^t + t^2 + 3$ --------------------------(44) का विशिष्ठ समाधान निम्न रूप का हो सकता है।

$Y_t = Y_t^* = E4^t + Ft^2 + Gt + H$

$Y_{t+1}^* = EY^{t+1} + F(t+1)^2 + G(t+1) + H$

$Y_{t+2} = Y_{t+2}^* = E4^{t+2} + F(t+2)^2 + F(t+2) + H$

उपरोक्त तीनों के मान समीकरण (44) में रखने पर

$$E4^{t+2} + F(t+2)^2 + G(t+2) + H$$
$$- 5[E4^{t+1} + F(D+1)^2 + G(t+1) + F]$$
$$+ 6[E4^t + Ft^2 + Gt + H] = 4^t + t^2 + 3$$

उपरोक्त को हल करने पर

$2E4^t + 2Ft^2 + (-6F + 2G)t + (-F - 3G + 2H) = 4^t + t^2 + 3$

दोनों ओर 4^t, t^2, t तथा स्थिर राशि के गुणांक ो की तुलना करने पर

E = 1/2 , F = ½ , G=3/2 तथा H = 4

अतः विशिष्ट समाधान = $\frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$

एवं सामान्य समाधान = $C2^t + D3^t + \frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$

18.8 अतंर समीकरणों के महत्व तथा उपयोग

अतंर समीकरणों की भूमिका विशेष तौर पर अर्थव्यवस्था में गतिशील सन्तुलन का विश्लेषण करने में बड़ी ही महत्वपूर्ण है चूंकि अर्थव्यवस्था में सभी चर गतिशील प्रकृति के होते है तथा स्थैतिक सन्तुलन मात्र साम्य पर चरों के मान के सम्बन्ध में ही जानकारी प्रदान करता है। जबकि गतिशील विश्लेषण से यह ज्ञात होता है कि पूरे अर्थतंत्र का व्यवहार कैसा है। जैसे कीमत तंत्र में उतार चढाव की व्यवस्था इसी प्रकार ब्याज दर, विनियम दर, निवेश दर आदि सभी महत्वपूर्ण समष्टि आर्थिक चरों में उतार चढाव की व्यवस्था तथा किस प्रकार यह चर संतुलन की ओर प्रेरित होते है। इन सभी की व्यवस्था का विश्लेषण अतंर समीकरणों के माध्यम से ही सम्भव हो पाता है। अतः इन समीकरणों के

अनेको महत्व है तथा अर्थशास्त्र के विश्लेषण में यह अत्याधिक उपयोगी है समीकरणों के निम्न महत्वपूर्ण उपयोग है।

→ गतिशील संतुलन के विश्लेषण में इनकी मुख्य भूमिका रहती है।

→ विभिन्न चरों का समय आधारित तय किया गया पथ (Time Path) क्या होग। इसका विश्लेषण इन समीकरणों के माध्यम से किया जाता है।

→ चरों के प्रत्याशित मूल्यों का ऑकलन तथा इनके माध्यम् से भावी मानों का पूर्वानुमान लगया जा सकता है।

→ आर्थिक साम्य की स्थिरता, अस्थिरता तथा स्थायित्व की विवेचना की जाती है।

→ आर्थिक संवृद्धि के मॉडल जैसे सोलो, हैराड–डोमर तथा अनेक महत्वपूर्ण आर्थिक माडल जैसे काब बैब मॉडल, गुणक त्वरक आदि सिद्धान्त इन्ही समीकरणों पर आधारित हैं। जिन्हें निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है।

मकड़ जाल सिद्धान्त

इस सिद्धान्त के माध्यम से कृषि मूल्यों के उतार–चढाव का विश्लेषण किया जाता है यह सिद्धान्त समय अन्तराल (Time Lag) की धारणा पर आधारित है इसके अनुसार पूर्ति की मात्रा पिछले समय की कीमत पर ही निर्भर है।

$S_t = S(P_{t-1}), \qquad D_t = D(P_t)$

चूँकि संतुलन पर $D_t = S_t$ जहाँ $D_t = \alpha P_t + a$ तथा $S_t = \beta P_{t-1} + b$

(α माँग वक्र तथा β आपूर्ति वक्र का ढाल है।)

$$\alpha P_t + a = \beta P_{t-1} + b, \quad P_t = \frac{\beta}{\alpha} P_{t-1} + \frac{b-a}{\alpha}$$

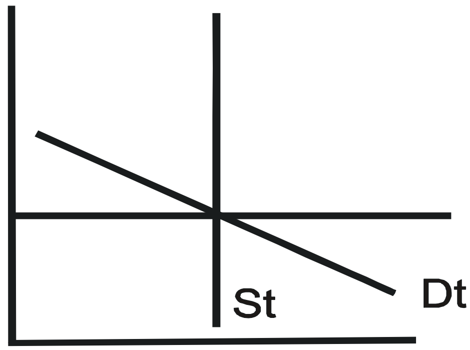
यदि $\frac{\beta}{\alpha} = A$ तथा $\frac{b-a}{\alpha} = B$ तो

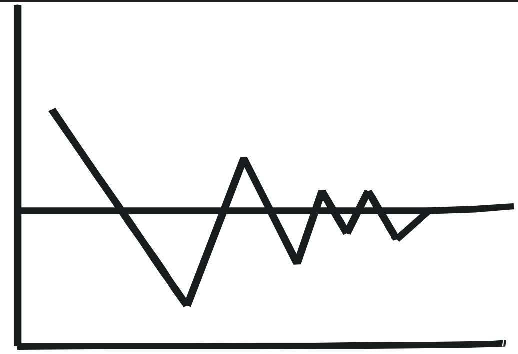
$P_t = AP_{t-1} + B$

उपरोक्त समीकरण प्रथम चरण अतंर समीकरण है जिसका

$P_t = A^t \left[P_0 - \frac{B}{1-A}\right] + \frac{B}{1-A}$

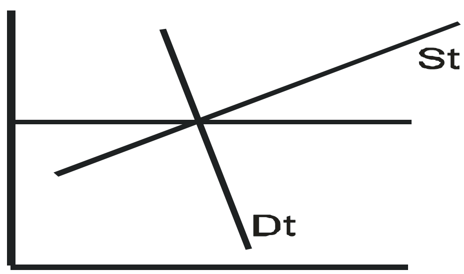
इस दशा में तीन स्थितियाँ होगी।

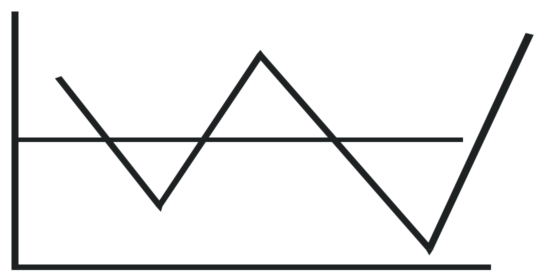




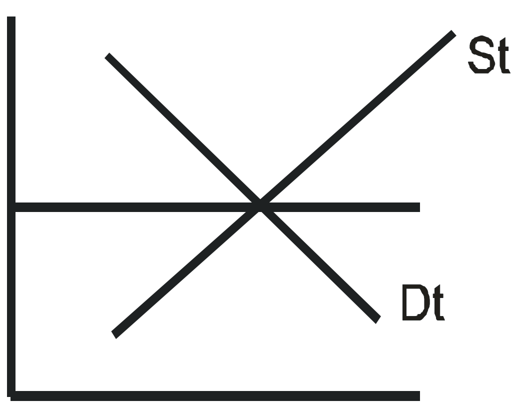
→ यदि A का मान $-1<A<1$ के मध्य होग तो कीमत तंत्र में उतार चढाव साम्य मूल्य की ओर होते जायगें यानि केन्द्राभिमुख मकड़ जाल होगा। आपूर्ति वक्र का ढाल $|\beta| < |\alpha|$ माँग वक्र के ढाल से

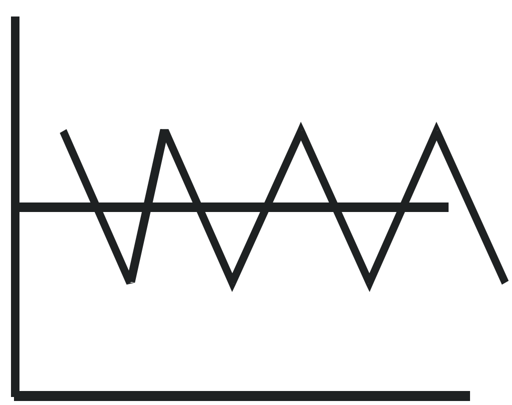
→ यदि $|A| > 1$तो $|\alpha| < |\beta|$ इस अवस्था में अपसारी मकड़ी जाल बनेगा तथा कीमत साम्य से निरन्तर दूर होती जायेगी। माँग वक्र का ढाल का आपूर्ति के ढाल से कम होगा।





→ यदि $|A|= 1$ तो $|\alpha| = |\beta|$ इस दशा में उतार–चढाव में न तो कमी होगी न वृद्धि कीमते एक ही प्रकार से साम्य के चारों ओर चक्कर काटती रहेगी। माँग तथा आपूर्ति वक्र का ढाल समान रहेगा।





समष्टि आर्थिक मॉडल

समष्टि अर्थशास्त्र में आय, उपभोग, बचत आदि के आधार पर मॉडलों का निर्माण किया जाता है। इस प्रक्रिया में द्वितीय चरण अतंर समीकरण महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। कीन्स आय उपभोग समीकरण में उपभोग का प्लान, प्रत्यासित या अनुमानित आय पर निर्भर करता है। उदाहरण के तौर पर उपभोग फलन को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$C_t = a + bY_t^e$$

जहाँ a स्वायत्त उपभोग है तथा b सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति है एवं e प्रत्याशित आय है।

यदि $a = 10$ इकाई तथा $b = 0.8$ तो

$$C_t = 10 + 0.8Y_t^e \quad \text{———————————————————}(45)$$

किसी काल में प्रत्याशित आय को सरल तौर पर पिछले दो सालों में यानि t-1, t-2 समय में प्राप्त आय के औसत के आधार पर अनुमानित कर सकते है।

अतः $\mathrm{Y_t^e = 0.5Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2}}$

$\mathrm{Y_t^e}$ का मान समीकरण (45) में रखने पर

$$\mathrm{C_t = 10 + 0.8(0.5Y_{t-1} + Y_{t-2})}$$

$$\mathrm{C_t = 10 + Y_{t-1} + Y_{t-2}} \quad \text{——————————————————————}(46)$$

यह द्वितीय चरण समीकरण है।

चूँकि $\mathrm{Y_t = C_t + I + G}$ ————————————————————————(47)

जहाँ I तथा G प्रत्येक समय के लिये समान है यानि t पर निर्भर नहीं है। I जहाँ निजी निवेश है तथा G सरकारी निवेश है।

$\mathrm{C_t}$ का मान समीकरण (37) में रखने पर

$$\mathrm{Y_t = 10 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2} + I + G} \quad \text{——————————————}(48)$$

यदि $I = 50$ एवं $G = 50$ तो समीकरण (48) निम्न रूप में प्राप्त होगी।

$$\mathrm{Y_t = 110 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2}} \quad \text{——————————————————}(49)$$

साम्य पर आय का स्तर स्थिर होगा। अतः $\mathrm{Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*}$ को समीकरण (49) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\mathrm{Y^* = 110 + 0.4Y^* + 0.4Y^*}$$

$$\mathrm{0.2Y^* = 110,\ Y^* = 550}$$

यदि अब I यदि समान रहता है तथा G बढ़कर 60 हो जाता है तो

$Y_t = 120 + 0.4Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2}$ ————————————————————(50)

एवं $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^*$ रखने पर तथा साम्य $Y^* = 600$ प्राप्त होता है।

अतः 550 से 600 तक का समय आधारित पथ समीकरण (50) में t क विभिन्न मान रखकर प्राप्त किया जा सकता है। यदि माना जायें कि आय का स्तर 550 काफी समय तक बना रहा हो तो

$Y_0 = 550, Y_1 = 550$ समीकरण (50) में रखने पर

$Y_2 = 120 + 0.4(550) + 0.4(550)$

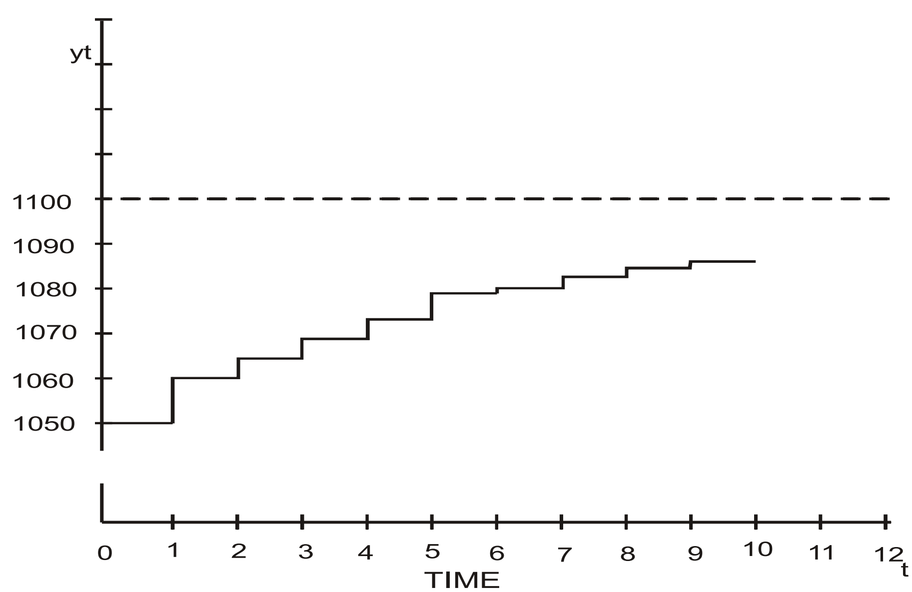
$Y_2 = 560$

समीकरण (50) से Y_3 का मान

$Y_3 = 120 + 0.4(560) + 0.4(550)$

$Y_3 = 564$

अतः इसी प्रकार समीकरण (50) से Y_4 , Y_5 , Y_6 .... के मान ज्ञात किये जा सकते है जो कि निम्नवत् है। $Y_4 = 569.6$, $Y_5 = 573.44$, $Y_6 = 577.22$, $Y_7 = 580.264$



अतः Y के विभिन्न मानों से आय का समय आधारित पथ को सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। जिससे हम विभिन्न समयान्तरालों पर आय के विभिन्न स्तरों का आकलन आसानी से कर सकते है।

18.9 सारांश

इस प्रकार से अतंर समीकरण का व्यापक अध्ययन करने पर यह ज्ञात होता है कि अर्थशास्त्र में इन समीकरणों का योगदान कितना महत्वपूर्ण हैं। अतंर समीकरणों के उपयोग के माध्यम से स्थैतिक साम्य, गतिशील साम्य तथा तुलनात्मक स्थैतिक साम्य की विवेचना की जा सकती है। इन समीकरणों ने अर्थशास्त्र के विश्लेषण में गतिशीलता का दृष्टिकोण प्रदान किया है।

समष्टि आर्थिक चरों के विश्लेषण के साथ–साथ सवृद्धि मॉडलों की विवेचना इन समीकरणों के माध्यम् से की जा सकती है। अर्थशास्त्र के विभिन्न क्षेत्रों में जैसे राष्ट्रीय आय, निवेश, बचत, उपभोग, आयात–निर्यात, कृषि मूल्यों, मुद्रा स्फीति, ब्याज दर, विनिमेय दर, सार्वजनिक ऋण आदि का आकलन किया जा सकता है सरल आर्थिक मॉडलों से लेकर जटिल आर्थिक मॉडलों का विश्लेषण अतंर समीकरणों के माध्यम् से किया जा सकता है।

यह वर्तमान समय में ज्ञात है कि आर्थिक चरों में आर्थिक चरों में व्यापक उतार चढ़ाव आते रहते है। अतः समसामयिक आर्थिक जग्त में अतंर समीकरणों का योगदान अर्थशास्त्र विषय के अध्ययन में बड़ा ही महत्वपूर्ण है। इसलिये इन समीकरणों का व्यापक विश्लेषण अपरिहार्य है।

18.10 शब्दावली

स्थिर साम्य :– जो साम्य असंतुलित होने के बाद पुनः प्रारम्भिक स्थिति में लौट आता है।

अस्थिर साम्य :– जो साम्य असंतुलित होन के बाद प्रारम्भिक स्थिति में नहीं लौट पाता है।

स्थैतिक साम्य :– ऐसा साम्य जहाँ समय तत्व तथा साम्य समायोजन प्रक्रिया का आभाव होता है।

गतिशील साम्य :– ऐसा साम्य जो कि समय तत्व पर आधारित होने के साथ–साथ साम्य तक समायोजन प्रक्रिया को भी आत्मसात् करता है।

खंडित फलन :– दो समय अन्तरालों के मध्य जब चर सभी समयों पर आधारित मानो को आत्मसात् नही करते है।

सतत् फलन :– दो समय अन्तरालों के मध्य जब चर समस्त मानों को आत्मसात् करते है।

मकड़ जाल :— इस सिद्धान्त के माध्यम से कृषि मूल्यों के उच्चावचनों की प्रकृति निर्धारित की जाती है।

अवकलन समीकरण :— जब समीकरण में चरों (स्वतंत्र,आश्रित) के साथ—साथ अवकलन गुणांक भी होते है। ऐसी समीकरण अवकलन समीकरण कहलाती है।

गुणक :— सार्वजनिक निवेश में वृद्धि पर क्या प्रभाव पड़ता है। यानि $\Delta y = K\Delta G$

त्वरक :— उपभोग में वृद्धि का निवेश वृद्धि पर क्या प्रभाव पड़ता है। यानि $\Delta \mathrm{I} = \beta(\Delta \mathrm{C})$

स्वायत्त उपभोग :— सामान्यतया उपभोग आय पर निर्भर होता है परन्तु जो उपभोग आय पर निर्भर नहीं होता है या आय के शून्य होने की स्थिति में किये गये उपभोग को स्वायत्त उपभोग कहते है।

सार्वजनिक निवेश :— यह निवेश सरकार या सार्वजनिक सत्ता द्वारा किया जाता है तथा यह निवेश लाभ की आशा से प्रेरित नहीं होता है।

औसत उपभोग की प्रवृत्ति :— आय तथा उपभोग के अनुपात को औसत उपभोग की प्रवृत्ति कहते है।

सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति :— आय में परिवर्तन से उपभोग में कितना परिवर्तन हुआ है यह सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति कहलाती है।

सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति = उपभोग में परिवर्तन/आय में परिवर्तन

व्यापार चक्र :— समय के आधार पर विभिन्न आर्थिक चरों जैसे आय, उपभोग, निवेश, बचत आदि के उतार चढाव का विश्लेषण व्यापार चक्रों के अन्तर्गत किया जाता है।

18.11 लघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्न में कौन अन्तर समीकरण है :—

   (अ) $X= aX + bY$ (ब) $Y=CX^2+d$ (स) $X_t = aX_{t-1} + b$

2. अतंर समीकरण चरों के मान समय आधारित होते हैं। (हाँ/नहीं)
3. $Y_{t+3} + Y_{t+2} - 3Y_{t+1} - 4Y_t = 6$, समीकरण का अंतर कितना है?
4. अतंर समीकरण का सामान्य या पूर्ण समाधान योग होता है?
5. पूरक समाधान अतंर समीकरण के किस भाग का समाधान होता हैं।
6. $\mathrm{Y}_{t+2} - 3\mathrm{Y}_{t+1} + 2\mathrm{Y}_t = 0$ का पूरक समाधान ज्ञात कीजियें?
7. $\mathrm{Y}_{t+2} - 4\mathrm{Y}_{t+1} + 4\mathrm{Y}_t = 0$ का पूरक समाधान ज्ञात कीजियें?

8. $X_t = 3X_{t-1} - 10$ का विशिष्ट समाधान ज्ञात कीजियें?

9. $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} - 10$ का सामान्य समाधान ज्ञात कीजियें?

10. $X_t = -3X_{t-1} - 4$ का सामान्य समाधान ज्ञात कीजियें?

11. अतंर समीकरण कौन से साम्य का विश्लेषण करता है?

12. गुणक त्वरक अन्तक्रिया किस अर्थशास्त्री ने दी?

13. $L\,Y_t$ को किस रूप में लिया जा सकता है?

14. मकड़ जाल सिद्धान्त के आधार पर किस प्रकार के मूल्यों का विश्लेषण होता है?

15. $Y_t^2 + Y_t + 2 = 0$ की कोटि कितनी है?

उत्तरमाला :– 1. स 2. हाँ 3. तीन 4.पूरक तथा विशिष्ट समाधान 5. समांगी भाग

6. $Y_t = c(2)^t + D(1)^t$ 7. $Y_t = (c + Dt)(2)^t$ 8. $X^* = 5$

9. $X_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t (x_0 - 6) + 6$ 10. $X_t = (-3)^t(x_0 - 1) + 1$

11. प्रगतिशील साम्य 12.सैम्युलशन 13.Y_{t-1} 14.कृषि मूल्य 15.दो

18.12 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. अतंर समीकरण को समझाते हुये अर्थशास्त्र में इनका महत्व बताइयें?
2. अतंर सीमाकरण के कोटि तथा चरण से क्या समझते है तथा अवकलन समीकरण से यह से यह समीकरण किस प्रकार भिन्न है।
3. निम्न समीकरण को हल कीजियें

   (अ) $Y_t = 2Y_{t-1} + 4,\ Y_0 = 1$

   (ब) $Y_t - 2Y_{t-1} + 4 = 0,\ Y_0 = 3$

   (स) $Y_t = Y_{t-1} + 2,\ \ Y_0 = 2$

   (द) $Y_t + 4Y_{t-1} + 3 = 0,\ \ Y_0 = -2$
4. $Y_{t+2} - 5Y_{t+1} + Y_t = 3^t + 5 + 4t$

   $Y_0 = 3$ तथा $Y_1 = 4$ हेतु
5. अन्तर समीकरणो के माध्यम् से आर्थिक मॉडलों की व्याख्या कीजियें?

18.13 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

1. Dube, G.S., Gupta. D.C., Basic Numerical Anelysis Shalini Prakashan Meerut.
2. Mehta, B.C., Madanani, G.M.K., Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.
3. Bhardwaj, R.S. Mathematics for Economics and Business, Excel Books
4. Bose, D., An Introduction to mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

इकाई 19 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

19.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई मे पाठकों को केन्द्रीय प्रवृत्ति की प्रमापें की जानकारी दी जाएगी। इसके अन्तग्त समंको को सांख्यिकीय माध्य द्वारा प्रकट करने की विम्भ्नि विधियों की व्याख्या की जाएगी।`सांख्यिकीय विष्लेषण के अन्तर्गत वर्गीकरण और सारणीयन द्वारा समकों के विषल समूह को आवृत्ति बंटन के रूप में प्रस्तुत करके सरल और समझने योगय बनाया जाता है। परन्तु इससे समंको की महत्वपूर्ण विषेशताओं का पता नहीं चलता। सारांश रूप में समंको को सांख्यिकीय माध्य द्वारा प्रकट किया जा सकता है। यह एक ऐसा मूल्य है जिसके आस–पास अन्य सकंको के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पायी जाती है तथा जो समंक लगभग श्रेणी के मध्य में होता है तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है। माध्य सांख्यिकीय विश्लेषण की महत्वपूर्ण माप है। इसे Statistical Average भी कहते हैं। यह मूल्य चिड़िया की आँख जैसी दृष्टि (bird's eye view) प्रदान करता है। माध्यों को स्थान सम्बन्धी माप (measures of location) या प्रतिरूपी मूल्य (typical value) कहते हैं। इसमें निम्न बिन्दु प्रमुख हैं –

सांख्यिकीय माध्यों के उद्देष्य व कार्य, आदर्ष माध्य के आवष्यक तत्व, सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार, गणितीय माध्य, समान्तर माध्य,समान्तर माध्य की गणना दो प्रमुख विधिया, अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य, पद विचलन रीति, चार्लियर की शुद्धता परीक्षा, समान्तर माध्य के गणितीय गुण , समान्तर माध्य की सीमाएँ, अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य, भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)] गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean), यदि खण्डित अविच्छिन्न श्रेणी हो तो गुणोत्तर माध्य, सामूहिक गुणोत्तर माध्य, भारित गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य [Harmonic Mean] ,समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के संबंध में कुछ स्मरणी बातें, द्विघातीय माध्य (Quadratic Mean), स्थिति – संबंधी माध्य (Positional Averages), मध्यका (Median), खण्डित श्रेणी में मध्यका, अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका, मध्यका की विषेशताएँ – दोष, बहुलक– परिभाषा , खण्डित श्रेणी में बहुलक, अविच्छिन्न श्रेणी में बहुलक, बहुलक की गणना में महत्वपूर्ण तथ्य, समान्तर माध्य और मध्यका द्वारा बहुलक की ग्णना , बहुलक

विषेशताएँ , सांख्यिकीय माध्य कुछ विद्वानों का मत , सारांश, अभ्यास के लिये प्रश्न, स्मरणीय बिन्दु।

सारांश रूप में समंकों को प्रस्तुत करने के लिये एक संख्यात्मक माप की आवश्यकता होती है। एक उदाहरण में एक बाग में 360 पेड़ हैं, जिनकी ऊँचाई का आवृत्ति बंटन निम्न है:

ऊँचाई (फीट में)	0.7	7.14	14.21	21.28	28.35	35.42
आवृत्ति	26	31	35	49	82	71

19.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त पाठक

⇒ माध्यों के प्रकार

⇒ गणना की विधियाँ एवम् सूत्र

⇒ इन माध्यों की विभिन्न उपयोगों की जानकारी प्राप्त करेगें।

19.3 सांख्यिकीय माध्यों के उद्देश्य व कार्य

माध्य आसानी से व्यक्त न होने वाले जटिल

(i) समंकों का संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करता है।

(ii) माध्यों की एक महत्वपूर्ण उपयोग्ता विभिन्न समंक समूहों के बीच तुलना की सुविधा है।

(iii) अन्य सांख्यिकीय विवेचन जैसे, उपकिरण, विषमता और प्रथुषीर्षत्व की गणना में माध्यों का उपयोग होता है।

(iv) माध्य पथ प्रदर्षन का कार्य करते हैं।

19.4 आदर्श माध्य के आवश्यक तत्व

प्रो0 यूल (Prof. Yule) के द्वारा आदर्श माध्य के आवष्यक तत्वों का वर्गीकरण निम्न प्रकार किया गया है।

(i) इन्हें सांख्यिक (Statistician) के अनुमान पर आधारित नहीं होना चाहिये।

(ii) इन्हें सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए। (Based on all observations)

(iii) यह आसानीं से समझ मं आने और रेखांकित होने योगय होना चाहिये।

(iv) इनमें निर्धारण की सरलता होनी चाहिये।

(v) इनमें अधिकतम अथवा न्यूनतम चरों के मूल्य का अधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिये।

(vi) इनकी कुछ सरल और स्पष्ट गुण होने चाहिये।

(vii) माध्यों पर प्रतिचयन के परिवर्तन (effect of sampling) का न्यूनतम प्रभाव हो। एक ही समग्र के विभिन्न प्रतिचयन/प्रतिदर्ष के विभिन्न माध्य नहीं होने चाहिये।

(viii) इनका अग्रिम गणितीय विश्लेषण में उपयोग होना चाहिये।

19.5 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार

माध्यों के महत्वपूर्ण वर्गीकरण निम्न हैं

- गणितीय माध्य
  - सामान्तर माध्य
  - गुणोत्तर माध्य
  - हरात्मक माध्य
  - वर्गकरणी अथवा द्विघातीय माध्य
- स्थित सम्बन्धी माध्य
  - मध्यका अथवा मध्यिका (Median)
  - बहुलक (Mode)
- व्यापारिक माध्य
  - चल माध्य
  - संचयी माध्य
  - संग्रथित माध्य

उपर्युक्त विभिन्न माध्यों में समान्तर माध्य, मध्यका और बहुलक महत्वपूर्ण हैं।

19.5.1 गणितीय माध्य (Mathematical Averages)

19.5.1.1 समान्तर माध्य – यह सबसे लोकप्रिय माध्य है। समान्तर माध्य वह मूल्य है जो किसी समंकमाला के सभी पदों के मूल्यों के योग में उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। समान्तर माध्य को सामान्य रूप में X लिखते हैं। यदि □ पद $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n$ हों तो उनका समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_\eta}{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} x_i}{\eta}$$

यहाँ $(\sum)$ सिग्मा योग की अभिव्यक्ति है और i उपसंकेत के लिये प्रयुक्त है यदि पद X_1, X_2 और X_3 हों तो इनका योग $\sum_{i=1}^{3} X_i$ के रूप में व्यक्त होग और

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

सामान्तर माध्य की उपर्युक्त गणना व्यक्तिगत श्रेणी में होती है। यदि पदों की आवृतियाँ दी गई हों अर्थात् यदि खण्डित श्रेणी (discrete series) में समान्तर माध्य ज्ञात करना हो तो–

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} fX_i}{\sum_{i=1}^{\eta} f_i = N}$$

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + \ldots\ldots f_nX_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots f_n}$$

अविछिन्न श्रेणी (continuous series) में समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए वर्गों के मध्य–मूल्य (mid value) ज्ञात कर लेते हैं फिर खण्डित श्रेणी की भांति ही समान्तर माध्य की गणना करते है।

19.5.1.2 समान्तर माध्य की गणना दो प्रमुख विधियों द्वारा की जाती है–

(i) प्रत्यक्ष रीति

(ii) अप्रत्यक्ष रीति

दोनों रीतियों से निकाला गया समान्तर माध्य बराबर ही आता है। अप्रत्यक्ष रीति अथवा लघु रीति का प्रयोग गणना की क्रिया को सरल बनाने के लिए किया जाता है। इसके अन्तर्गत इम मूल पदों (x) को, एक ऐच्छिका मूल्य जिसे कल्पित माध्य कहा जाता है तथा जिसे A से लिखते हैं, द्वारा एक नये पद (dX तथा dX) में परिवर्तित करते हैं और फिर उचित सूत्र द्वारा समानान्तर माध्य की गणना कर लेते हैं।

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)

हमने देखा कि व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य हैं।

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots . X_{\sim}}{\sim}$$

यह प्रत्यक्ष रीति है।

लघुरीति

इससे नया पद क॰ इस प्रकार का होता है कि $dX = X\text{-}A$ अर्थात् मूल पदों में से एक स्थिर पद घटाते हैं। । का मान श्रेणी मे से ही मध्य का रखा जाता है।

अब प्रत्येक (X-A) का जोड़कर $\sum dx$ प्राप्त करते हैं तथा मूल श्रेणी का समान्तर माध्य

$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$ का मान ज्ञात करते हैं–

इसे निम्न सूत्र की उत्पत्ति द्वारा भी समझा जा सकता है–

या $\quad dx = X - A$

$$X = A + dx$$

दोनो तरफ योग करने पर –

$$\sum X = \sum A + \sum dx$$

या

$$\frac{\sum x}{\sim} = \frac{A_{\sim}}{\sim} + \frac{\sum dx}{\sim}$$ (दोनो तरफ n से भाग देने पर)

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$$

इसी को इस रूप में भी लिख सकते हैं–

$$\bar{X} = A + \bar{d}x$$

क्योंकि $\bar{d}x = \frac{\sum dx}{\sim}$

उदाहरण : 1. निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
लम्बाई (cm)	158	150	165	163	162	166	164	180	155	167

हलः प्रत्यक्ष तथा लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य

$\bar{X} = \frac{\sum X}{\sim}$; $\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$

विद्यार्थी	लम्बाई	dX = X-A tc A = 160
A	158	(158-160) – 2
B	150	(150-160) – 10
C	165	(165-160) + 5
D	163	(163-160) + 3
E	162	(162-160) + 2
F	166	(166-160) + 6
G	164	(164-160) + 4
H	180	(180-160) + 20
I	155	(155-160) – 5
J	167	(167-160) + 7
	$\sum X = 1630$	$\sum dx = +37$

(a) प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य $\bar{X} = \frac{1630}{10} = 163$

(b) लघु रीति द्वारा माध्य $= 160 + \frac{37}{10} = 163.7$

जो लगभग एक समान है। खण्डित श्रेणी में माध्य की गणना

उदाहरण : 2 एक कपड़ा मिल में कार्य करने वाले श्रमिकों की दैनिक मजदूरी (रु0) निम्न है, इनकी औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी – (X)	10 0	120	140	160	180	200	220
श्रमिकों की संख्या (f_i)	3	6	10	15	24	42	75

	X	**f_i**	**X-A=d_i** A = 160	**f_id_i**
	100	3	-60	-180
	120	6	-40	-240
	140	10	-20	-200
A $\rightarrow$	(160)	15	0	0
	180	24	+20	480
	200	42	+40	1680
	220	75	+60	4500
		$\sum X = 175$	$\sum d_i = 0$	$\sum d_i f_i = 6040$

नोट $\rightarrow$ यहाँ $\sum d = 0$ अवश्य जाँच लें इससे ज्ञात होता है कि मानक माध्य (Assumed mean) का मान सही है।

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sim} = 160 + \frac{6040}{175} = \text{Rs } 194.5$$

नोट $\rightarrow$यह गणना लघु रीति द्वारा की गयी है, पाठक स्वयं प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य की गणना कर जाँच करें।

उदाहरण : 3 निम्न समंको से माध्य (Arithmetic Average) की गणना कीजिए।

	X	**f_i**	**$d_i = X_i - A$**	**f_id_i**
	5	3	-5	-15
	6	4	-4	-16
	7	2	-3	-6
	9	4	-1	-4
A $\rightarrow$	10	2	0	0
	12	5	2	10
	13	3	3	9
	15	2	5	10
		$\sum f_i = 25 = \sim$		$\sum f_i d_i = -12$

यहाँ $\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$= 10 - \frac{12}{25} = 9.52(\text{hrs})$$

उदाहरण : 4 निम्न समंको द्वारा माध्य की गणना कीजिए

	X	**f_i**	$X_i - A = d_i$	**$f_i d_i$**
	1	5	.3	.15
	2	9	.2	.18
	3	12	.1	.12
I →	4	17	0	0
	5	14	. 1	14
	6	10	. 2	20
	7	6	. 3	18
	73			.7

$$\bar{X} = 4 + \frac{(-7)}{73} = 4 - \frac{7}{73}$$

19.5.1.3. अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य →अविछिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना करने के लिये वर्ग अन्तराल (class Interval) के मध्य बिन्दु ज्ञात कर लिये जाते हैं। अविच्छिन्न श्रेणी में यह मान लिया जाता है कि आवृत्तियाँ मध्य बिन्दुओं पर केन्द्रित हैं।

माध्य निकालने की रीति

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य की गणना –

प्रत्यक्ष रीति

अप्रत्यक्ष रीति तथा पद विचलन रीति द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण 5 निम्न समंको से माध्य की गणना प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रीति द्वारा कीजिए ।

वर्ग अन्तराल	**मध्य बिन्दु**	**बारम्बारता**		**(X-A)**	
X	X	(f_i)	f_X	d_i	$f_i d_i$
0-10	5	10	50	-20	-200
10-20	15	12	180	-10	-120
20-30	25	25	625	0	0

30-40	35	18	630	10	180
40-50	45	15	675	20	300
		$\sum f = 80$	$\sum fx = 2160$		$\sum fdx = 160$

यहाँ X मध्य बिन्दु की गणना $\frac{L_1 + L_2}{2}$ द्वारा करते हैं।

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2160}{80} = 27 \text{ (प्रत्यक्ष रीति द्वारा)}$$

अप्रत्यक्ष रीति द्वारा

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{\sum f} = 25 + \frac{160}{80} = 27 \text{ दोनों रीति उत्तर समान है।}$$

19.5.1.4 पद विचलन रीति–यदि अविच्छिन्न श्रेणी में वर्ग–विस्तार $(L_2 - L_1)$ समान हो अर्थात् प्रत्येक वर्गें में वर्ग अन्तराल एक निश्चित संख्या 'h' के बराबर हो तो हमसमानान्तर मध्य की गणना करने के लिये एक ऐसा पद dx' बनाते है जो $\frac{X - A}{\sim}$ के बराबर होता है। इसमें दो बातें ध्यान देने योग्य हैं–

1.) मूल का परिवर्तन (Change of Origin) –लघु रीति में प्रत्येक पद (X) में से स्थिर राशि मानक माध्य (A) को घटाते हैं।
2.) पैमाने का परिवर्तन (Change of Origin) – इसे dx^1 लिखते हैं तथा $dx^1 = \frac{X\_A}{\sim}$ जहाँ ~ वर्ग अन्तराल का मान है।

इस रीति द्वारा माध्य की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती हैं–

$$\bar{X} = A + \sim \frac{\sum fdx'}{\sum f}$$

उदाहरण (6)

वर्ग अन्तराल	मध्य बिन्दु	बारम्बारता	$dx' = (X - A) \sim$	fdx'
	X	f	(X-A)/~	
0-10	5	10	-2	-20
10-20	15	12	-1	-12
20-30	25	25	0	0
30-40	35	18	+1	+18
40-50	45	15	+2	+30
		$\sum F = 80$		$\sum fdx' = +16$

यहाँ सभी वर्गें का अन्तराल 10 है अतः समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A + \frac{\sim \sum fdx'}{}$$

$$= 25+10\times\frac{16}{80} = 25+2 = 27.$$

19.5.1.5 स्मरणीय तथ्य

(A) इसमें कुछ बाते स्मरणीय है जैसे यदि वर्गन्तरों को इस रूप में दिया जाए की आवृतियाँ संचयीं हों (वर्ग अन्तराल कम अथवा अधिक रुप में दिये हों) तो वितरण को सामान्य वितरण में बला जा सकता है। तथा समान्तर माध्य की ग्णना की जा सकती है। जैसे –

वर्ग अन्तराल		आवृत्ति
10	से कम	10
20	से कम	18
30	से कम	30
40	से कम	37

सामान्य वितरण

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति
0.10	10
10.20	8
20.30	12
30.40	7
40.50	5

(B) असमान वर्ग वितरण पर भी समान्तर माध्य की ग्णना उसी रुप में की जा सकती हैं।

(C) खुले हुए वर्ग अन्तराल (Open end classes) में माध्य की ग्णना करने के लिये खुले वर्ग को बन्द कर लेना आवष्यक होता है।

19.5.2.1 चार्लियर की शुद्धता परीक्षा

चार्लियर जाँच द्वारा यह ज्ञात कर सकते हैं कि लघु रीति या पद विचलन रीति द्वारा परिकलित समान्तर माध्य की गणना क्रिया सही है अथवा नही

$$\sum fdx = \sum\{f(dx+1)\} - \sum f \quad \text{(i)}$$ लघुरीति में

$$\sum fdx' = \sum\{f(dx'+1)\} - \sum f \quad \text{(ii)}$$ पद विचलन

इसमें dX या dX' में 1 जोड़ते हैं फिर f से गुणा करके उसका योग ज्ञात करके सूत्र में लगते हैं।

उदाहरण – 7

X	f	dX	dX+1	fdX	f(dX+1)
5	2	-4	-3	-8	-6
7	4	-2	-1	-8	-4
9	5	-	1	0	5
11	6	2	3	12	18
13	2	4	5	8	10
15	1	6	7	6	7
	$\sum f = 20$			$\sum f(dx+1) = +30$	

स्पष्ट है कि – $\bar{X} = 9.5$

$$\sum fdx = +10$$

$$\sum f(dx+1) - \sum f = 30 - 20 = +10$$

$$\sum fdx = \sum f\ (dx+1) - \sum f$$

अतः गणना क्रिया सही हैं।

19.5.2.2 समान्तर माध्य के गणितीय गुण –

विशेषता 1 – विभिन्न मूल्यों (X) के विचलनों (dX) का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

विशेषता – 2 $\rightarrow$ यदि $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ में $\sum X, N, \bar{X}$ में से कोई दो की माप ज्ञात हो तो तीसरे की गणना की जा सकती है। इसी विशेशता के आधार पर हम अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण तथा गलत माध्य को सही माध्य में परिवर्तित कर सकते हैं।

उदाहरण – 8 विश्व कप फुटबाल मैचों में एक सप्ताह में सोमवार से शनिवार तक औसत रुप में प्रति मैच 3 गोल हुए । रविवार को एक संघर्षपूर्ण मैच में अत्यधिक गेल होने पर पूरे सप्ताह में गोल का औसत 4 हो ग्या। बताइये रविवार को कुल कितने गोल हुए ?

हल – सोम0 से शनि0 तक औसत गेल = 3

6 दिनों में कुल गोल $= 3 \times 6 = 18$

सो0 से रवि0 तक गोल का औसत = 4

अतः सात दिनों में कुल गोल $= 7 \times 4 = 28$

सातवें दिन (रवि0) को कुल गोल $= 28 - 18 = 10$ (अ0)

उहारण 9 यदि बारम्बारता ज्ञात न हो – यदि

$$205 + fi = \sum f$$

$$722 + 5fi = \sum fx$$

$$\bar{X} = 3.763$$

दी हुई हो तो f_1 ज्ञात कीजिए

$$3.763 = \frac{722 + 5f_1}{205 + f_1}$$

$$= 771.415 + 3.763 f_1 = 5f_1$$

$$49.415 = 1.123f_1$$

$$f_1 = \frac{49415}{1123} = 44.0$$

अतः अज्ञात वृत्ति है $f_1 = 44.$

विशेषता –– 4 सही माध्य का निर्धारण

यदि $\sim$ पदों के समान्तर माध्य $\bar{X}$ ज्ञात किया और बाद में यह पता चला कि उसमें एक या दो से अधिक मूल्य गलत जोड़े गये, तो सही मूल्य ज्ञात होने की स्थिति में हम निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं–

(1) पहले हम गलत योग $\sum X = \bar{X}X(N)$ ज्ञात करते हैं ।

(2) इस गलत योग $\sum X$ में से गलत पदों को घटाकर सही पदों को जोड़ देते हैं।

(3) यही योग $\sum X$ में ˎ का भाग कर सही $\bar{X}$ माध्य प्राप्त होता है।

विशेशता – 5 सामूहिक माध्य

यदि किसी समूह के दो या दो से अधिक उपसमूहों के समान्तर माध्य और पदों की संख्या ज्ञात होतो सामूहिक माध्य की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जा सकती है–

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 \sim_1 + \bar{X}_2 \sim_2}{N_1 + N_2}$$

सामान्य रुप में

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_1 N_1 + \overline{X}_2 N_2 + \overline{X}_3 N_3 + \ldots\ldots \overline{X}_K N_k}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots N_k}$$

विशेशता – 6 यदि किसी श्रेणी के सभी मूल्यों में निश्चित अचर राषि जोड़ दी जाए घटा दी जाए, गुणा कर दी जाए तो उस श्रेणी के समान्तर माध्य में वह अचर राशि क्रमशः जुड़ जाती है गुणा हो जाती है।

विशेषता – 7 दो श्रेणियों के तत्संवादी मूल्यों (corresponding values) के जोड़ों और अन्तरों का समान्तर माध्य उन दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के याग या अन्तर के बराबर होता है।

समान्तर माध्य के गुण :

एक आदर्श माध्य के रुप में समान्तर माध्य की निम्न विषेशताएँ पायी जाती हैं – यह

(1) सदैव निश्चयात्मक होता है

(2) गणना करने में सरल तथा सामान्य होता है

(3) यह सभी मूल्यों पर आधारित होता है

(4) दूसरे माध्यों की तुलना में प्रतिचयन के प्रभावों से कम प्रभावित होता है।

19.5.2.3 समान्तर माध्य की सीमाएँ (Limitations)

समान्तर माध्य दोषमुक्त नही है इसकी निम्न सीमाएँ हैं–

(1) यह चरम मूल्यों से प्रभावित होता है

(2) इसका निरीक्षण अथवा बिन्दुरेखीय निर्धारण सम्भव नही है।

(3) अनुपात, दर, प्रतिशत की गणना में उपयुक्त नहीं है

(4) असमित वितरण की दशा में समान्तर माध्य वितरण का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता।

19.6 भारित समान्तर माध्य

व्यवहारिक जीवन में अनेकों ऐसी स्थितियाँ होती हैं जिनमें सभी पद समान महत्व के नहीं होते। ऐसी स्थिति में समान्तर माध्य निकालते समय मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखना आवश्यक होता है, इस प्रकार निकाले जाने वाले माध्य को समानान्तर माध्य कहते हैं।

यदि मूल्य $\rightarrow$ $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots\ldots,X_{\sim}$

सम्बद्ध भार $\rightarrow$ $W_1,W_2,W_3,\ \ldots\ldots,W_{\sim}$ हैं तो –

$$\bar{X}_W = \frac{W_1X_1 + W_2x_2 + W_3X_2 + \ldots\ldots + W_{\sim}X_{\sim}}{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots + W_{\sim}} = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

आवृत्ति वितरण में –

$$\bar{X}_W = \frac{W_1(f_1X_1) + W_2(f_2X_2) + \ldots\ldots + W_n(f_nX_n)}{W_1 + W_2 + \ldots . W_{\sim}} = \frac{\sum W(fX)}{\sum W}$$

भारित माध्य (Weighted Mean) की गणना प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष रीति दोनो प्रकार से की जा सकती है।

उदाहरण – 10 लेकिन इसे प्रत्यक्ष रीति द्वारा ही निकालते है। दो विद्यालयों का परीक्षाफल दिया गया है, कौन सा विद्यालय बेहतर है ?

प्रतिशत परीक्षाफल

	विद्यालय A	विद्यालय B
हाईस्कूल	70% (200 विद्यार्थी)	80% (150 विद्यार्थी)
बी0ए0	60% (150 विद्यार्थी)	80% (50 विद्यार्थी)

हल : विद्यालय A का भरित माध्य –

$$\bar{X}W_1 = \frac{200\times70 + 150\times60 + 100\times80}{200+150+100} = \frac{31000}{450} = 68.9$$

स्पष्ट है कि यहाँ विद्यार्थियों की संख्या को भार (W) तथा प्रतिशत परीक्षाफल को पद मूल्य (X) माना गया है ।

विद्यालय B का भारित समानान्तर माध्य

$$\bar{X}W_2 = \frac{150\times80 + 100\times60 + 50\times80}{150+100+50} = \frac{22000}{300} = 73.3$$

अतः विद्यालय B का परीक्षाफल बेहतर है।

19.6.2 स्वपरीक्षण

निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए –

(a) समान्तर माध्य के गुण

(b) चार्लियर की शुद्धता परीक्षा

(c) भारित समान्तर माध्य

(d) पद विचलन रीति

(e) समान्तर माध्य की सीमाएँ

(f) माध्य के सामान्य जीवन में उपयोग

19.7 गुणोत्तर माध्य

19.7.1. परिभाषा

किसी श्रेणी के ~ पदों के~ पदों के गुणनफल को ~ वाँ मूल (root $\sqrt{\ }$) ही उसका गुणोत्तर माध्य है। पदों की संख्या से ही मूल का मान ज्ञात होता है। अतः 2,3 संख्याओं में गुणोत्तर माध्य की गणना आसानी से की जा सकती है जैसे –

पद $\rightarrow$ X, Y

$G.M \rightarrow \sqrt[2]{X.Y}$

पद $\rightarrow$ X, Y, Z

$G.M \rightarrow \sqrt[2]{X.Y.Z}$

जब दो या तीने से अधिक पद होते हैं तो गुणोत्तर माध्य =

$$G.M. = \text{Anti}\log\left[\frac{\log X_1 + \log X_2 + \ldots\ldots + \log X_{\sim}}{\sim}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log X}{\sim}\right]$$

19.7.2 यदि खण्डित अविच्छिन्न श्रेणी हो तो गुणोत्तर माध्य

$G.M = \text{Antilog}\left[1/N\sum f\log X\right]$ जहाँ $N = \sum f$

उपयोग $\rightarrow$ गुणोत्तर माध्य का प्रयोग प्रतिशत वृद्धि–दरों जैसे जनसंख्या वृद्धि दर, चक्रवृद्धि ब्याज, मूल्यों में होने वाले प्रतिषत परिवर्तन आदि की औसत दरें ज्ञात करने के लिये होता है। इसका संबंधित सूत्र निम्न है–

(i) $P_{\sim} = P_0(1+r)^{\sim}$

(ii) $r = \left[\sqrt[n]{\frac{P_{\sim}}{P_0}} - 1\right.$ जहाँ

$P_{\sim}$ = निश्चित अवधि के उपरान्त पर मूल्य की राशि

P_0 = अवधि के आरम्भ में चर मूल्य की राशि

$\sim$ = वर्षों की संख्या

r = प्रति इकाई परिवर्तन की दर

इसे चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र (Compound Interest Formula) कहते हैं।

उदाहरण – 11

दशक	वृद्धि दर	जनसंख्या दशक के अन्त में जब पूर्व दशक में 100 मान लें	$\log_{10} x$
1	5	105	2.0212
2	8	108	2.0334
3	12	112	2.0492

$$G.M. = \text{Antilog}\left\{\frac{1}{\sim}\sum \log x\right\} = \text{Antilog}\left\{\frac{1}{3}(6.1038\right\}$$

$$= \text{Antilog}\,(2.0346) = 108.2$$

19.7.3 सामूहिक गुणोत्तर माध्य

इसी प्रकार सामूहिक गुणोत्तर माध्य की गणना की जा सकती हैं

$$\text{सामूहिक गुणोत्तर माध्य} = \text{Antilog}\left[\frac{N_1 \log G_1 + N_2 \log G_2}{N_1 + N_2}\right]$$

जहाँ G_1 → एक भाग का गुणोत्तर माध्य

N_1 → एक भाग के पदों की संख्या

G_2 → दूसरे भाग का गुणोत्तर माध्य

$N_2 \rightarrow$ दूसरे भाग के पदों की संख्या

19.7.4 भारित गुणोत्तर माध्य

यदि विभिन्न मूल्यों का सापेक्षिक महत्व अलग–अलग हो तो भारित समान्तर माध्य की ही तर भारित गुणोत्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

भारित गुणोत्तर माध्य $W.G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum(\log X.W)}{\sum W}\right]$

19.8 हरात्मक माध्य

परिभाषा –

किसी समंक श्रेणी के पदों की संख्या को पदों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के योग से भाग देने पर जो मूल्य प्राप्त होता है उसे उस श्रेणी का हरात्मक माध्य कहतें हैं –

$$H.M. = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_{\sim}}}$$

$$= \frac{N}{\sum \frac{1}{x}}$$

हरात्मक माध्य का व्यावहारिक उपयोग सीमित है। औसत गति, चलन वेग तथा प्रति रुपये वस्तु की मात्रा का प्रयोग किया जाता है। कभी–कभी भारित हरात्मक माध्य की गणना भी करनी पड़ती है। भारित हरात्मक माध्य का सूत्र निम्न है।

भारित हरात्मक माध्य (W.H.M.) $= \frac{N}{\sum \frac{W_i}{X_i}}$ या

$$\frac{1}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \frac{w_3}{x_3} + \ldots. + \frac{w_{\sim}}{x_{\sim}}}$$

19.9 समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के संबंध में कुछ स्मरणीतथ्य

(i) किसी श्रेणी के गैर ऋणात्मक मूल्यों के लिए

$A.M. \geq G.M. \geq H.M$

यदि गैर ऋणात्मक मूल्य बराबर नही हैं–

A.M. > G.M. > H.M

यदि सभी मूल्य बराबर हैं –

A.M. $\geq$ G.M. $\geq$ H.M

पाठकों से अनुरोध है कि उक्त तथ्यों का परीक्षण स्वयं करें–

(ii) यदि केवल दो संख्याएँ होत तो –

$$(G.M.)^2 = A.M. \times H.M.$$

यदि दो संख्याएँ $a > 0$ तथा $b > 0$ हों तो हम जानते हैं कि इनका

$$A.M. = \frac{a+b}{2},$$

$$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$G.M. = \sqrt{ab}$$

तथा

$$A.M. \times H.M. = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b}$$

$$= ab$$

$$= \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

अतः $(A.M) \times (H.M) = (G.M)^2$

19.10 द्विघातीय माध्य

यदि कुछ मूल्य धनात्मक तथा कुछ ऋणात्मक होते हैं तो एसी स्थिति में हम द्विघातीय माध्य की गणना करते हैं। द्विघातीय माध्य वह मूल्य होता है जो विभिन्न मूल्यों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल लेने पर प्राप्त होता है।

यदि श्रेणी के मूल्य $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{\sim}$ हों तो

द्विघातीय माध्य Q.M. $= \sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_{\sim}^2}{\sim}}$

उदाहरण – $X \rightarrow 1, -2, 3, 4, -5$

$$\text{Q.M.} = \sqrt{\frac{(1)^2 + (-2)^2 + 3^2 + 4^2 + (-5)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+4+9+16+25}{5}}$$

$$= \sqrt{11} = 3.31 \text{ (लग्भग)}$$

19.11 स्थिति – संबंधी माध्य

19.11.1. मध्यका (Median)

किसी समंक श्रेणी में मध्यका वह मूल्य होता है जो पुरे श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें श्रेणी को घटते से बढ़ते क्रम में व्यवास्थित करते हैं तो उसका मध्य मूल्य मध्यका होता है, जिसे M या Md से व्यक्त करतें हैं।

नोटः यहाँ श्रेणी को घटते से बढ़ते अथवा बढ़ते से घटते क्रम में व्यवास्थित करना आवश्यक हैं।

$$\text{मध्यका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद का मान}$$

यदि पदों की संख्या सम (even) हो तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद दशमलव में आता है अतः

4.5 वाँ पद का मान = चौथा पद का मान + पाँचवे पद का मान /2

उदाहरण $X \rightarrow 7,\ 11,\ 12,\ 15.$ का मध्यका $\left(\frac{4+1}{2}\right)$ वाँ पद $= 2.5$

अतः मध्यका $= \frac{11+12}{2} = 11.5$

उदाहरण – निम्न श्रेणी का मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए।

25, 13, 23, 40, 27, 25, 23, 24, 22, 30

हल –

क्रम सं0 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पद मूल्य →	13	22	23	23	24	25	25	27	30	40

मध्यका $= \frac{10+1}{2} = 5.5$ वाँ पद

अतः = 5 वाँ पद मान + 6 वाँ पद मान /2 = $\frac{24+25}{2} = 24.5$

19.11.2 खण्डित श्रेणी में मध्यका

निम्न विधि द्वारा ज्ञात की जाती हैं

(1) पहले संचयी आवृत्ती ज्ञात करते हैं।

(2) $(N+1/2)$ वहाँ पद निकालते हैं।

(3) संचयी आवृति के जिस पद में $(N+1/2)$ वाँ पद शामिल हो उसी के सामने वाले मूल्य को मध्यका मान कहते है।

उदाहरण निम्न श्रेणी में मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

X	→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	→	1	9	26	59	72	52	29	7	1

हल

X	→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	→	1	9	26	59	72	52	29	7	1
c.f	→	1	10	36	95	167	219	248	255	256

$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ item $= \frac{256+1}{2} = 128.5^{th}$ item यहाँ 128.5 वाँ संचयी आवृत्ति 167 में पहली बार आ रहा है, अतः मध्यका का मान 4 हैं।

19.11.3 अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका

अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका का पद मान ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$Md = \frac{N}{2} \text{ वाँ पद}$$

तथा मध्यका की गणना निम्न सूत्र द्वारा करते हैं।

$$M = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times i$$

जहाँ M = मध्यका

L_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा

c = मध्यका वर्ग के ठीक पहले वाली संचयी आवृत्ति

f = मध्यका वर्ग की आवृत्ति

i = मध्यका वर्ग का विस्तार $(L_2 - L_1)$

पहले खण्डित, श्रेणी के समान ही संचयी आवृत्ति ज्ञात करते है–

$\frac{N}{2}$ द्वारा मध्यका वर्ग ज्ञात करतें हैं–

जिस संचयी आवृत्ति में प्रथम बार $\frac{N}{2}$ शामिल हो उसी के सामने वाला वर्ग मध्यका वर्ग होगा।

उदाहरण निम्न वितरण से मध्यका मान ज्ञात कीजिए

मजदूरी (रु0)	→	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
श्रमिकों की संख्या	→	3	5	20	10	5

हल	→	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	संचयी आवृत्ति
			f	c.f
		20-30	3	3
		30-40	5	8
Md	→	40-50	20	28
		50-60	10	38
		60-70	5	43 = N

यहाँ $N/2 = 21.5$ तथा संबंधित संचयी बारम्बारता 28 अतः 40-50 मध्यका वर्ग अन्तराल सूत्र का प्रयोग करते हुए:

मध्यका $= 40 + \frac{10}{20}(21.5 - 8) = 40+6.75=46.75$

अतः मजदूरी की मध्यका $= 46.5$

19.11.4 स्मरणीय बिन्दुः

1. यदि श्रेणी को संचयी आवृत्ति वितरण के रुप में प्रस्तुत किया गया है तो इसे पहले सामान्य श्रेणी बना लेना चाहिए।
2. यदि वर्ग अवरोधी क्रम में है तो मध्यका का सूत्र होगा–

$$M = L_2 - \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times i$$

यहाँ L = मध्यका वर्ग की ऊपरी सीमा

C = संचयी आवृत्ति मध्यका वर्ग से पहले वाले वर्ग की होती है।

उदाहरण – निम्न वितरण का मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

	प्राप्तांक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
		(f)	(c.f)
	70-80	10	100
	60-70	10	90
Md →	50-60	20	80
C.I.	30-40	15	30 = c
	20-30	15	15

यहाँ संचयी आवृत्ति नीचे से बनाई गई है, क्योंकि अवरोही वर्गान्तर घटते क्रम में है अतः मूल सूत्र का प्रयोग करते हुए $-N/2 = 50$ स0 जो, $40-50$ वर्ग अन्तराल में स्थित है।

$$M = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) i$$

$$= \frac{40 + \frac{100}{2} - 30}{30} \times 10$$

$$= 40 + \frac{50\text{-}30}{30}$$

$$= 40 + 6.67 = 46.67$$

यदि वर्ग अन्तराल बढ़ते क्रम का होता जैसे 70 से अधिक तो संशोधित सूत्र का प्रयोग किया जाएग।

(3) असमान वर्गान्तरों की स्थिति में मध्यका ज्ञात करने के लिये उन्हें यथा सम्भव समान वर्गान्तरों में बदल लेना चाहिए, श्रेणी के अधिकतम वर्ग विस्तार के आधार पर पुर्नगठन करना चाहिए।

(4) प्रथम वर्ग ही मध्यका वर्ग हो तो c का मान शून्य होगा, शेष क्रियाएँ यथावत होगी।

(5) खुले वर्ग अन्तराल से मध्यका प्रभावित नहीं होती

19.11.5 मध्यका की विषेशताएँ–

गुण

(1) इसकी गणना सरल होती है।

(2) चरम मूल्यों से यह प्रभावित नहीं होती।

(3) नए पदों से मध्यका पर प्रभाव न्यूनतम होता है।

(4) इसका बिन्दुरेखीय निरुपण भी सम्भव है– संचयी आवृत्ति वक्र (Ogive Curve) द्वारा मध्यका का निर्धारण कर सकते हैं।

(5) मध्यका वर्ग की जानकारी से ही मध्यका की गणना की जा सकती है।

दोष–

(1) यह बीजगणितीय विवेचन के लिये अनुपयुक्त है–

(2) सीमान्त मूल्यों को भार देने में यह अनुपयुक्त है

(3) अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका का सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि प्रत्येक वर्ब में आवृत्तियाँ समान रुप से वितरित हैं। लेकिन यह अव्यवहारिक है।

19.11.7 विभाजन मूल्य –

मध्यका पूरे वितरण को दो समान भागें में विभाजित करती है, परन्तु मध्यका के सिद्धान्त पर पूरे वितरण चार, दस या सौ भागें में बाँटा जा सकता है यह निम्न है–

	खण्डित श्रेणी	अविच्छिन्न श्रेणी
(a) चतुर्थक – Q_1	$= \frac{N+1}{4}$ वाँ पद	$\frac{N}{4}$ वाँ पद
(चार हिस्से) – Q_3	$= \frac{3(N+1)}{4}$ वाँ पद	$\frac{3N}{4}$ वाँ पद

(b) दशमक – $D_1 \rightarrow \frac{N+1}{10}$; $\frac{N}{10}$ वाँ पद का मान

(10 हिस्से) – $D_2 \rightarrow \frac{2(N+1)}{10}$; $\frac{2N}{10}$ वाँ पद का मान

(c) शतमक $\rightarrow P_1 \rightarrow \frac{N+1}{100}$; $\frac{N}{100}$ वाँ पद का मान

(100 हिस्से) $P_{80} \rightarrow \frac{80(N+1)}{100}$; $\frac{80N}{100}$ वाँ पद का मान

शेष गणना क्रिया एवं सूत्र मध्यका का ही होता है।

19.12 बहुलक

19.12.1 परिभाषा : वह मूल्य है जो श्रेणी में सबसे अधिक बार आता हो या जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो। यह मूल्यों के अधिकतम संकेद्रण का बिन्दु कहलाता है।

19.12.2 व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक

उदाहरण

X	→	46	47	48	49	50	51	52
f	→	2	4	11	23	10	3	2

हल → यहाँ आवृत्तियाँ नियमित है अतः अधिकतम आवृत्ति ;23द्ध के समान वाला मूल्य अर्थात् 49 बहुलक है

19.12.3 खण्डित श्रेणी में बहुलक –

समूहन रीति द्वारा – निरीक्षण द्वारा हम बहुलक का निर्धारण करते हैं जब आवृत्तियाँ नियमित हों, परन्तु जब आवृत्तियाँ अनियमित हों तथा अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में न होकर अन्त/आरम्भ में हो तो समूहन रीति अपनायी जाती है।

इसमें 6 स्तम्भ बनाये जाते हैं जिनमें

प्रथम स्तम्भ → आवृत्तियाँ होती हैं।

द्वितीय स्तम्भ → आरम्भ से दो–दो आवृत्तियों को जोड़ लिया जाता है।

तृतीय स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर दो–दो आवृत्तियों का जोड़ होता है।

चतुर्थ स्तम्भ → स्तम्भ 1 की तीन तीन आवृत्तियों को जोड़ होता है।

पंचम स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों को जोड़ होता है।

षष्ठम स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन का जोड़ होता है।

19.12.4 अविच्छिन्न श्रेणी में बहुलक –

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

जहाँ Z = बहुलक

L_1 = बहुलक वर्ग की न्यूनतम वर्ग

f_0 = बहुलक वर्ग से पहले की आवृत्ति

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद की आवृत्ति

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

i = वर्ग विस्तार

इस सूत्र की यह मान्यता है, कि बहुलक का मूल्य बहुलक वर्ग के समीप के वर्गों की आवृत्तियों से प्रभावित होता है। इसे निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है–

उदाहरण – निम्न विवरण का बहुलक ज्ञात कीजिए–

X	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	-	3	8	15	23	35	40	32	28	20	45	14	6

X	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
1	3	11				
2	8		23	26		
3	15	38			46	
4	23		58			73
5	35	75		98		
6	40		72			
7	32	60				
8	28		48	80		
9	20	65			93	
10	45		59			79
11	14	20		65		
12	6					

स्तम्भ – संख्या	अधिकतम आवृत्ति	X का मान
(i)	45	10
(ii)	75	5,6
(iii)	72	6,7
(iv)	98	4,5,6
(v)	107	5,6,7
(vi)	100	6,7,8

यहाँ X के 6 वाँ का मान सर्वाधिक बार आया है अतः बहुलक का मान 6 होगा ।

19.12.5 बहुलक की गणना में महत्वपूर्ण तथ्य–

1.यदि वर्गान्तर समावेशी है, तो इसे अपवर्जी में बदल देना चाहिए।

2.यदि वर्गान्तर अवरोही क्रम में हो तो बहुलक की गणना ऊपरी सीमा से करनी चाहिए ।

$$Z = \left(L_2 - \frac{f_1 - f_2}{2f - f_0 - f_2}\right)i$$

19.12.6 समान्तर माध्य और मध्यका द्वारा बहुलक की गणना

बहुलक = 3 मध्यका – 2 माध्य

19.12.7 बहुलक विषेशताएँ –

गुण

(1) यह सरल एवं लोकप्रिय है

(2) निरीक्षण मात्र से निर्धारण सम्भव

(3) चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव

(4) विवरण का प्रतिरुपी मूल्य होता है

(5) सर्वोत्तम प्रतिनिधि

दोष

(1) यह बहुत अनिश्चित एवं अस्पष्ट है

(2) चरम मूल्यों का महत्व नही

(3) पदों की संख्या कम हो तो सार्थक नही

(4) वर्ग विस्तार में परिवर्तन से मूल्य परिवर्तन

माध्य के चुनाव

(1) उद्देश्य जिसके लिये माध्य का उपयोग करना है

(2) समको की प्रकृति एवं विषेषताएँ तथा माध्य का कार्य

19.13 उपयोग

19.13.1 समान्तर माध्य

→ इसका प्रयोग सार्वभौमिक होता है

→ आदर्श माध्य

19.13.2 गुणोत्तर माध्य

→ सापेक्ष परिवर्तन जैसे जनसंख्या वृद्धि, अनुपात, चक्रवात दरों के अध्ययन में सहायक

19.13.3 हरात्मक माध्य –

→ काल श्रेणी के अध्ययन में विषेश महत्व है

→ गति, मात्रा के रुप में प्रदत्त भाव में उपयोगी

19.13.4 मध्यका

→ गुणात्मक समंको का अध्ययन में सहायक

19.13.5 बहुलक

→अपूर्ण समंको में गणना संभव। प्रति व्यक्ति उत्पादन, जूतों के मॉडल साइज में यह उपयोगी है।

माध्य की सीमाएँ–

विभिन्न माध्य केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति को मापते हैं, समंको की प्रवृत्ति के घटते बढ़ने की जानकारी संभव नही होती। माध्य विषमता की माप नही कर सकते अतः विषमता का अध्ययन विवरण में आवश्यक होता है।

19.13.6 सांख्यिकीय माध्य कुछ विद्वानों का मत–

⇒ ''माध्य, समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थिर ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिये किया जाता है। समंकमाला के विस्तार के मध्य मे स्थित होने के कारण माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है। ''

Croxton and Cowden

⇒'' माध्य वे सांख्यिकीय अचर हैं जो हमें सम्पूर्ण की सार्थकता का एक ही प्रयास में समझने की योगयता प्रदान करते हैं।''A.L. Bowley

19.14 सारांश

⇒ विभिन्न माध्य–

यहाँ हम विभिन्न माध्यों के सूत्र एक स्थान पर प्रस्तुत करेगें, तथा विभिन्न माध्यों के विषेशताओं तथा उपयोग्ता के लिये पाठक इकाई से अवलोकन करें –

	व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित श्रेणी	अविच्छिन्न श्रेणी
1. समान्तर माध्य	$\bar{X} = \frac{\sum x}{\sim}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$
		$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$	$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$
	$\bar{X} = \frac{\sum x}{\sim}$	$d \sim = X\text{-}A$	$\bar{X} = A + \frac{\sim \sum fdx'}{N}$
			$dx' = \frac{x\text{-}A}{\sim}$

2. मध्यका M = Size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ item द्वारा मध्यका वर्ग ।

$$M = L_1 + \frac{\left(\frac{N}{2} - C\right)}{f} \times i$$

3. बहुलक

सबसे अधिक बार आने वाला मूल्य	निरीक्षण अथवा समूहज द्वारा अधिकतम आवृत्ति का मूल्य	बहुलक वर्ग का निर्धारण

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 3M - 2\bar{X}$$

4. गुणोत्तर माध्य

$$G.M. = \text{Antilog}\left(\frac{\sum \log x}{N}\right) \quad G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\in (\log x.f)}{\sum f}\right]$$

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\in(\log x.f)}{\sum f}\right]$$

5. हरात्मक माध्य

$$H.M. = \text{Rec.}\left(\frac{\sum \text{hec. } x}{\sim}\right) \quad H.M. = \text{Rec.}\left[\frac{\in(\text{Rec. } x.f)}{\sum f}\right]$$

$$H.M. = \text{Rec.}\left[\frac{\in(\text{Rec. } x.f)}{\sum f}\right]$$

6. भारित समान्तर माध्य भारित गुणोत्तर माध्य

$$\bar{X}_w = \frac{\sum XW}{\sum W}$$

$$W.G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum(\log X.W)}{\sum W}\right]$$

7. भारित हरात्मक माध्य सामूहिक माध्य

$$W.H.M. = \text{Rec}\left[\frac{\in(\text{Rec}.X.W)}{\sum W}\right] \qquad \bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

8. चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र

$$P_N = P_0(1+r)^N \qquad r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1$$

19.15 अभ्यास के लिये प्रश्न

Part-1 वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(1) निम्नलिखित में से कौन स्थिति सम्बन्धी माध्य हैं?

(i) मध्यका (ii) समान्तर माध्य

(iii) गुणोत्तर माध्य (iv) कोई भी नहीं

(2) निम्न में से कौन से सम्बन्ध सही हैं?

(i) A.M. = $\sqrt{G.M. \times H.M.}$

(ii) H. M. = $\sqrt{A.M. \times H.M.}$

(iii) G.M. = $\sqrt{A.M. \times H.M.}$

(iv) G.M. = $\dfrac{A.M. + H.M.}{2}$

(3) बहुलक ज्ञात करने की विधियों में से एक है –

(i) $Z = 3M + \overline{2\vec{X}}$ (ii) $Z = 2M - \overline{3\vec{X}}$

(iii) $Z = 3M - \overline{2\vec{X}}$ (iv) $Z = 3M - \overline{3\vec{X}}$

(4) निम्न से कौन सबसे अनिश्चित माध्य है?

(i) बहुलक (ii) मध्यका

(iii) गुणोत्तर माध्य (iv) हरात्मक माध्य

(5) निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सही है?

(i) $(\vec{X} - Z) = 2/3\ (\vec{X} - Z)$

(ii) $(\vec{X} - Z) = 1/3\ (\vec{X} - Z)$

(iii) $(\vec{X} - Z) = 2/3\ (\vec{X} - M)$

(iv) $(\vec{X} - M) = 1/3\ (\vec{X} - z)$

उत्तर : 1-(i) **2-**(iii) **3-**(iii) **4-**(i) **5-**(iv)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

(1) समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

(2) बहुलक का बीजगणितीय विवेचन सम्भव है।

(3) एक आदर्श माध्य पर प्रतिचयन के परिवर्तनों का प्रभाव अधिकतम होना चाहिए।

(4) मध्यका चरम मूल्यों द्वारा प्रभावित होती है।

(5) बहुलक का बिन्दुरेखिय निर्धारण सम्भव है।

(6) एक आवृत्ति बंटन के मुख्य विशेषताओं को स्पष्ट करने में माध्य अकेले ही सक्षम है।

उत्तर : 1-(T) **2-**(F) **3-**(F) **4-**(F) **5-**(T) **6-**(F)

Part-2

प्र0 1. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप से आप क्या समझते हैं? एक अच्छे माध्य की विशेषताएँ क्या हैं? किस माध्य को आप आदर्श माध्य मानेंगे और क्यों ?

प्र0 2. विभिन्न प्रकार के माध्यों का वर्णन कीजिए और उनकी सापेक्षिक विशेषताओं की व्याख्या कीजिए।

प्र0 3. विभिन्न माध्यों के उपयोगों की चर्चा कीजिए।

प्र0 4. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ कीजिए –

(a) समान्तर माध्य के बीजगणितीय गुण

(b) सामूहिक समान्तर माध्य

(c) भारित समान्तर माध्य

(d) चार्लियर शुद्धता परीक्षा

(e) चल माध्य एवं प्रगमी माध्य

(f) विभाजन मूल्य

(g) पद–विचलन रीति

(h) माध्यों की सीमाएँ

प्र0 5. यदि किसी समंक श्रेणी के सभी पदों का मूल बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि –

$$\bar{X} = G.M. = H.M$$

प्र0 6. निम्न श्रेणी में समान्तर माध्य मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए –

(i) 36, 64, 70, 66, 30, 42, 82, 64, 22, 36, 40, 44, 22, 30, 70, 46, 76, 24. 30-(i)- $\bar{X} = 47.88$, $M = 43.0$, $Z = 33.24$

(ii) 10, 8, 16, 6, 14, 4, 18 30- (ii)- $\bar{X} = 10.86$, $M = 10$, $Z = 8.28$.

प्र0.7 → निम्न सारणी से माध्य, माध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए ।

X →	20-30	20-40	20-50	20-60	20-70	20-80	20-90	20-100
f →	4	16	56	97	124	137	146	150

(Hint f → सचयी आवृत्ति)

उत्तर $\bar{X} = 56.33$, $M = 54.63$, $Z = 50.67$

प्र0 8.50 पदों का औसत 169 है। बाद में ज्ञात हुआ कि एक पद 143 को 134 पढ़ किया गया था, सही माध्य ज्ञात कीजिए।

उ0 – 8. [169.08]

प्र0 9 दोनो कम्पनियों के मजदूरों की औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए।

		Factory A	Factory B
मजदूर	-	250	200
औसत मजदूरी	-	Rs 2.0	Rs 2.50

प्र0 10ण निम्नलिखित समंकों से माध्य, मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

Marks	No. of Students
Less than 5	14
Less than 10	40
5-15	76
15 से अधिक	110
20-25	40
25 से अधिक	10
30 से अधिक	2

उत्तर → [$\bar{X}$ = 15.45, M = 15.83, Z = 16.60]

प्र0.11. निम्नलिखित समंको से भारित समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

Article	Quantity Cousemed	Price per Kg
A	100	2
B	20	10
C	40	5
D	50	1
F	30	8

उत्तर → [3.56]

प्र0. 12. 20 कुन्टल गेहूँ 300 रु0 प्रति कुन्टल है और 25 कुन्टल 350 रु0 प्रति कुन्टल की दर से खरीदा गया। गेहूँ की प्रति कुन्टल औसत कीमत क्या है।

प्र0. 12 निम्न का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

70, 100, 500, 75, 8, 250, 8, 42.

उ0. 12 $\rightarrow$ [G.M. = 45.27]

प्र0. 13 निम्न समंको से मध्यका और चतुर्थक ज्ञात कीजिए।

12, 18, 20, 24, 36, 38, 46, 46, 48, 56, 74, 96, 98, 106, 120.

उ0. 13 $\rightarrow$ $[M = 46,\ Q_1 = 24,\ Q_3 = 96]$

प्र0ण 14 निम्न समंकों से मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए।

x $\rightarrow$ 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75

f $\rightarrow$ 2, 18, 30, 45, 35, 20, 6, 3.

उ0. 14 $\rightarrow$ [M = 36.56, 8 = 36]

प्र0.15 वे दो मूल्य बताइये जिनका समान्तर माध्य 10 और गुणोत्तर माध्य हरात्मक माध्य क्या होगा?

उ0. 15 $\rightarrow$ [16, 4 H.M. = 6.8]

19.16 संदर्भ ग्रन्थ

- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्र ीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- J.K. Sharma (2008) – Business Statistics, Dorling Kinderseley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) – परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई 20- अपकिरण तथा उसकी मापें

20.1 प्रस्तावना

20.2 उद्‌देश्य

20.3 निरपेक्ष एवं सापेक्ष अपकिरण

20.4 अपकिरण की माप एवं रीति

20.5 विस्तार

20.6 अन्तर चतुर्थक विस्तार

20.7 शतमक विस्तार

20.8 चतुर्थक विचलन

20.9 माध्य से माध्य विचलन

20.10 मध्यिका से माध्य विचलन

20.11 बहुलक से माध्य विचलन

20.12 माध्य विचलन के गुण

20.13 प्रमाप विचलन

20.14 वितरण गुणांक

20.15 सामूहिक प्रमाप विचलन

20.16 प्रमाप विचलन के गुण एवं दोष

20.17 बिन्दु रेखीय विधि लारेंज वक्र

20.18 'संकेन्द्रण अनुपात'

20.19 सारांश

20.20 अभ्यास के लिये प्रश्न

20.1 प्रस्तावना

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप, किसी श्रेणी के लक्षणों को सारांष–रूप में एक संख्या में व्यक्त करता है, परन्तु विभिन्न पदों के आपसी अन्तर या विभिन्न पदों के केन्द्रीय मूल्य से अन्तर को केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप व्यक्त नहीं कर सकती समंकमाला की बनावट का पता माध्य द्वारा नहीं चल पाता।

माध्य की शक्तिषाली माप बनाने के लिये हम समर्थक माप ज्ञात करतें हैं, जो श्रेणी में विचरण की माप करता है, इसे श्रेणी में विचरण की माप करता है, इसे अपकिरण कहतें हैं।

→केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप को प्रथम क्रम का माध्य कहतें हैं।

→अपकिरण की माप को द्वितीय क्रम का माध्य कहते हैं।

अपकिरण की माप वास्तव में उस श्रेणी में संगतता या समरूपता के अभाव की सीमाओं को या परिमाण को मापता है। यदि पदों में अन्तर अधिक होग तो अपकिरण का मान भी अधिक होगा। अपकिरण की माप की वही विशेषताएँ है जो आदर्श माध्य की होती हैं।

20.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पष्चात पाठक, निम्न पर जानकारी प्राप्त कर सकेंगें–

- अपकिरण की विभिन्न माप
- अपकिरण की विभिन्न मापों की विषेशताएँ
- आकलन की रीति एवं उपयोग

पाठकों से अनुरोध है कि हल उदाहरणों द्वारा अभ्यास प्रश्न स्वयं हल कर ज्ञान का स्वपरीक्षण करें।

20.3 निरपेक्ष एवं सापेक्ष अपकिरण

निरपेक्ष अपकिरण – जब अपकिरण की माप को मूल इकाइयों में ही व्यक्त किया जाए।

सापेक्ष अपकिरण – जब उपकिरण माप को अनुपात या प्रतिषत में व्यक्त किया जाता है। यह विभिन्न प्रवृत्ति के समंकों की तुलना करने में अधिक उपयोगी है।

दो श्रेणियों की तुलना में निरपेक्ष अपकिरण नहीं प्रयुक्त किया जाता, तुलना के लिये सदैव सापेक्ष अपकिरण का प्रयोग किया जाता है।

20.4 अपकिरण की माप एवं रीति

(1)	विस्तार	Range	
(2)	अन्तर – चतुर्थक विस्तार	(Interquartile Range	सीमा रीति
(3)	शतमक विस्तार	(Percentile Range)	
(4)	चतुर्थक विचलन	(Quartile deviation)	विचलन
(5)	माध्य विचलन	(Mean deviation)	माध्य रीति
(6)	प्रमाप विचलन	(Standard deviation)	
(7)	लारेंज वक्र	(Lorenz Curve)	बिन्दु रेखीय रीति

हम एक–एक कर सभी मापों की ग्णना रीति की चर्चा उदाहरणों सहित करेगें।

20.5 विस्तार

किसी श्रेणी के अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के अन्तर को विस्तार (Range) कहते हैं। यह उस सीमा को व्यक्त करता है। जिनके, मध्य मूल्यों का अस्तित्व होता है। विस्तार को R से व्यक्त करते हैं। तथा इसका सूत्र निम्न है –

$$R = X_{max} - X_{min} \quad \text{या} \quad R = L - S$$

वर्गीकृत श्रेणी में विस्तार की मान

R = उच्चवर्ग की ऊपरी सीमा L– निम्न वर्गी की निचली सीमा

यह अपकिरण का निरपेक्ष माप है, सापेक्ष विस्तार या विस्तार गुणांक के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करना होता है

$$\text{विस्तार गुणांक} \quad (\text{Coefficient of Range}) = \frac{L-S}{L+S}$$

उदाहरण – 1 निम्न श्रेणी की सापेक्ष एवं निरपेक्ष माप ज्ञात कीजिए

वर्गान्तर	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृत्ति	2	5	12	8	3

हल .1 यहाँ उच्चतम वर्गान्तर = 25-30 जिसकी उच्चतम सीमा 30 है

न्यूनतम वर्गान्तर = 5 – 10 जिसकी न्यूनतम सीमा 5 है

निरपेक्ष विस्तार = $L - S = 30 - 5 = 25$ (Ans)

सापेक्ष विस्तार/विस्तार गुणंक $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{30-5}{30+5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ (Ans)

नोटः यदि वर्गान्तर का स्वरूप समावेशी हो तो विस्तार की गणना करते समय उसे अपवर्जी (Exclusive) में बदल लेना चाहिए।

20.5.1 विस्तार के गुण एवं उपयोग

गुण - यह है–

(i) सरलता से मापित किया जा सकता है।

(ii) समय की बचत

(iii) उद्योगें में गुण नियंत्रण, विनिमय दरों में परिवर्तन शीतलता की माप या मौसम भविष्यवाणी में प्रयुक्त।

दोष (Demerits)

(i) विस्तार केवल चरम मूल्यों पर आधारित होता है। यह चरम मूल्यों के बीच के मूल्य की जानकारी नहीं देता है।

(ii) इसमें स्थिरता नहीं होती, चरम मूल्य के एक पद में अन्तर होने से विस्तार प्रभावित हो जाता है।

(iii) आवृत्ति बंटनों के लिये विस्तार उपयुक्त नहीं है।

(iv) बीजगणितीय विवेचना के दृष्टिकोण से विस्तार अनुपयुक्त है।

20.6 अन्तर चतुर्थक विस्तार

विस्तार (Range) आंकड़ों में विचरणषीलता की एक महत्वपूर्ण माप प्रस्तुत करता है, परन्तु इस माप का प्रमुख दोष यह है कि यह चरम मानों के द्वारा अत्यधिक प्रभावित होता है। चरम मानों के प्रभाव को निरस्त करने के लिये हम एक अन्य विधि अपनाते हैं, जिससे हम अर्द्ध अन्तर–चतुर्थक विस्तार कहते हैं। इस विधि के अन्तर्गत हम तृतीय एवं प्रथम चतुर्थकों के आधे अन्तर को आँकड़ों की विचरणषीलता की माप के रूप में स्वीकार करते हैं – इस माप को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है –

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

यद्यपि इस विधि के अन्तर्गत चरम मानों का प्रभाव निरस्त हो जाता है, परन्तु विस्तार की भाँति यह भी आँकड़ों के सभी मानों पर आधारित नहीं है। पूर्णतया सममित आँकड़ों (Perfectly Symmetric data) में माध्यिका का मान तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के ठीक बीच में स्थित होता है। अतः ऐसी स्थिति में

$$Q_3 = Md + Q$$

$$Q_1 = Md + Q$$

अन्य शब्दों में पूर्णतया सममित वितरण में Q_3 तथा Q_1 माध्यिका से चतुर्थक विचलन की दूरी पर स्थित होंगे। परन्तु असममित वितरणों (Nonsymmetrical distribution) में Q_3 तथा Q_1 माध्यिका से चतुर्थक विचलन, दूरी पर स्थित नहीं होते। यह स्थिति बहुत सारे आर्थिक आँकड़ों में दृष्टिगेचर होती है – जो कि मूलतः असमामित होते हैं – जैसे आय का वितरण, भू–जलों का वितरण अथवा परिसम्पत्तियों का वितरण।

20.7 शतमक विस्तार (Percentile range)

कभी–कभी अपकिरण ज्ञात करने के लिए शतमक विस्तार का भी प्रयोग किया जाता है। शतमक विस्तार P_{90} तथा P_{10} के अन्तर को व्यक्त करता है।

अपकिरण की यह रीति विस्तार (Range) तथा I.R. (Inter – Quartile Range) से अपेक्षाकृत बेहतर है। क्योंकि एक तरफ तो यह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होती और दूसरी तरफ श्रेणी के मध्य के 80 प्रतिशत मूल्यों पर आधारित है। इस रीति के दोष भी विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार के दोषों जैसे ही हैं।

20.8 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

यह विचलन एक प्रकार का विस्तार है जो चतुर्थकों पर आधारित है। हमने देखा है कि अन्तर चतुर्थक विस्तार उच्च चतुर्थक (Q_3) और निम्न चतुर्थक(Q_1) पर निर्भर होता है।

$$I.R. = Q_3 - Q_1$$

यदि हम I.R. को दो से भाग दे दें तो हमें चतुर्थक विचलन (Q.D.) प्राप्त होता है।

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

20.8.1 चतुर्थक विचलन

यह अपकिरण का निरपेक्ष माप है। विभिन्न श्रेणियों में चतुर्थक विचलन की तुलना करने के लिए हम सापेक्ष माप ज्ञात करते हैं और इसे चतुर्थक विचलन गुणांक कहते हैं।

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

नोटः हम जानते हैं कि मध्यका पूरी श्रेणि को दो बराबर भागों में बांटती है। एक समभित विवरण में–

$$Q_3 - M = M - Q_1$$

या $$2M = Q_1 + Q_3$$

$$M = \frac{Q_1 + Q_3}{2}$$

इस प्रकार

$$Q.D + Q_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{2} + Q_1 = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = M$$

और

$$Q_3 - Q.D = Q_3 - \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = M$$

अत : $Q_1 = M - Q.D.$

और $Q_3 = M + Q.D$

इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक समभित वितरण में $M \pm Q.D$ समंक श्रेणी के 50: मूल्यों को व्यक्त करता है।

कुछ विद्वानों का मत है कि चतुर्थक विचलन वास्तव में एक स्थिति माध्य (Positional average) है और यह माध्य से पदों के विखराव को नहीं मापता। इसे अपकिरण की माप के बजाय विभाजन – माप (Measure of partition) कहना श्रेष्ठ है।

चतुर्थक विचलन को अर्द्ध अन्तर – चतुर्थक विस्तार (Semi inter quartile range) भी कहते हैं।

20.8.2 चतुर्थक विचलन के गुण (Merits of Q.D.)

चतुर्थक विचलन विस्तार के कुछ दोषों के दूर करता है। इसके मुख्य गुण निम्न हैं–

(1) इसकी गणना तथा इसे समझना दोनों सरल है।

(2) यह श्रेणी के महत्वपूर्ण भाग (मध्य के 50 :) पर विचार करता है।

(3) यह चरम मूल्यों (Extreme values) से प्रभावित नहीं होता ।

(4) यह खुले सिरे वाले वर्गन्तरों में भी अपकिरण की माप कर सकता है।

20.8.3 चतुर्थक विचलन के दोष (Demerits of Q.D.)

यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है।

यह प्रतिचयन के परिवर्तनों से बहुत प्रभावित होता है।

हसमें बीजगणितीय विवेचन का अभाव है।

यह अपकिरण का ठीक–ठाक माप नहीं करता केवल सन्निकट माप (Approximate measure) करता है। वास्तव में यह सीमा रीति (method of limit) द्वारा अपकिरण – माप के दोषों से मुक्त हो भी नहीं सकता।

विच्छिन्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन :

उदाहरण 1 – दिये गये समंक में चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए ।

चर मूल्य	(X)	रू	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	(f)	रू	3	6	9	13	8	5	4

हल–

(1) प्रस्तुत उदाहरण में एक विच्छिन्न आवृत्ति विवरण प्रदर्शित है। विच्छिन्न आवृत्ति विवरण के चतुर्थक ज्ञात करने के पूर्व, संचयी, आवृत्तियों को ज्ञात किये जाता है। यह प्रक्रिया निम्न सारणी में प्रदर्शित है।

X	f	cf
6	3	3
7	6	9
8	9	18
9	13	31
10	8	39
11	5	44
12	4	48

Q_1 = वितरण के $\left(\frac{N+1}{4}\right)$वां पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{48+1}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{49}{4}\right)$ वें पद का मान

= 12.25 वें पद का मान = 8

Q_3 = वितरण के $\left(\frac{3N+1}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{3(48+1)}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\frac{3\times49}{4}$ वे पद का मान

= $\frac{147}{4}$ वाँ मान = 36.75 वाँ मान = 10

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q.D = \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{10 - 8}{10 + 8} = \frac{2}{18} = 0.11$$

अविच्छिन्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन :

उदाहरण 2 – नीचे दिये गये समंक में चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए?

वर्गान्तर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	5	10	10	25	25	15	10
संचयी	5	15	25	50	75	90	100

आवृत्ति	5	15	25	50	75	90	100

Q_1 = वितरण के $\left(\frac{N}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{100}{4}\right)$ वें पद का मान

= 25 वाँ पद

25 वाँ पद वर्गन्तर (30-40) में निहित है।

अतः

$$Q_1 = L_1 \, x \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right)$$

$$Q_1 = 30 + \frac{10}{10}(25 - 15)$$

$$Q_1 = 30 + 1(10)$$

$$Q_1 = 40$$

$Q_3 = \frac{3N}{4}$ वें पद का मान

= वितरण के $\frac{3(100)}{4}$ वें पद का मान

= 75 वाँ पद

75 वाँ पद वर्गान्तर (50-60) में निहित है –

अतः $Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$

$$Q_3 = 50 + \frac{10}{25}(75 - 50)$$

$$Q_3 = 50 + \frac{10}{25} \times 25$$

$$Q_3 = 50 + 10$$

$$Q_3 = 60$$

चतुर्थक विचलन $(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{60-40}{2} = \frac{20}{2} = 10$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{60-40}{60+40} = \frac{20}{100}$

20.9 माध्य विचलन (Mean Deviation)

विचरणशीलता की अब तक चर्चित मापों – विस्तार तथा चतुर्थक विचलन, अथवा इन पर आधारित गुणांक ों का प्रमुख दोष यह था कि समंक के केवल दो मूल्यों पर ही आधारित थे। यह समंक के अन्य मूल्यों की उपेक्षा करते हैं। विचरणषीलता की आदर्श माप समंक के सभी मूल्यों पर आधारित होनी चाहिये। इस प्रकार की एक माप है माध्य विचलन (Mean Deviation)। 'माध्य विचलन', विचलनों (deviations) के औसत को व्यक्त करता है। इन विचलनों की गणना समंक के किसी केन्द्रीय मान (माध्य, मध्यिका अथवा बहुलक) से की जाती है। सामान्य तौर पर माध्य विचलन की गणना के लिये प्रयुक्त विचलनों की गणना हम समंकों के माध्य (Mean) से ही व्यक्त करते हैं।

माध्य विचलन की गणना की प्रक्रिया में इस प्रकार सर्वप्रथम हम समंकों के मूल्यों का माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं – अर्थात् प्रत्येक समंक मूल्य में से माध्य के मान को घटाते हैं। तत्पष्चात् विचलनों के चिन्हों (signs) की उपेक्षा कररते हुए हम विचलनों का औसत ज्ञात करते हैं। विचलनों के बीजगणितीय चिन्हों (Algebraic signs) की उपेक्षा करने का कारण यह हैं कि माध्य से विचलनों का योग सदैव शून्य के बारबर होता है – क्योंकि विचलनों के योग की प्रक्रिया में धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलन एक दूसरे को पूर्णतया निरस्त कर देते हैं।

चरराशि के मूल्यों का माध्य $= X - \overline{X}$ से विचलन

अब हम विचलनों के बीजगणितिय चिन्हों की उपेक्षा कररते हुए, इनके निरपेक्ष मानों (Absolute values) अथवा परिमाणों को ज्ञात करते हैं। विचलनों के निरपेक्ष मानों को दो खड़ी लकीरों '||' के बीच रखकर व्यक्त किया जाता है, अर्थात्

विचलनों के निरपेक्ष मान $= |X - \overline{X}|$ अब $|X - \overline{X}|$ किसी राशि के परिमान अथवा निरपेक्ष मान को व्यक्त करता है तथा इसे हम डवकण वि $|X - \overline{X}|$ पढ़ते हैं।

माध्य विचलन = विचलनों का योग / विचलनों की संख्या $=\frac{\Sigma|X-\overline{X}|}{N}$

जहाँ $\Sigma|X-\overline{X}|$ = निरपेक्ष विचलनों का योग

N = आँकड़ों की संख्या।

यदि विचलनों को "$\overline{X}$" के द्वारा प्रदर्शित किया जाये जहाँ $dX = X-\overline{X}$ हो तो

$$MD = \frac{\Sigma|dX|}{N}$$

वर्गीकृत आँकड़ों के आकृति वितरण के लिये माध्य विचलन का सूत्र निम्न प्रकार होग –

$$MD = \frac{\Sigma f.|d-\overline{X}|}{N}$$

जहाँ, $N = \Sigma f$

20.9.1 माध्य विचलन गुणांक (Cofficient of Mean Deviation)

माध्य विचलन अपकिरण का निरपेक्ष माप है जो विभिन्न श्रेणियों के लिये तुलना योगय नहीं होता। इसके लिये हमें सापेक्ष माध्य विचलन या माध्य विचलन गुणांक का परिकलन करना पड़ता है। माध्य विचलन में जब हम संबंधित माध्य से भाग देते हैं तो हमें माध्य विचलन गुणांक प्राप्त होता है

$$=\frac{\delta\overline{X}}{X} \quad \text{या} \quad \frac{\delta M}{M} \quad \text{या} \quad \frac{\delta Z}{Z}$$

समान्तर माध्य , मध्यका बहुलक से लिये गये विचलन गुणांक है

20.9.2 व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन

उदाहरण:श्रेणी 10, 14, 20, 24, 12 का समान्तर माध्य से माध्य विचलन तथा माध्य विचलन का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल –माध्य विचलन $\delta\overline{x} = \frac{\Sigma|x-\overline{x}|}{n} = \frac{\Sigma|d\overline{x}|}{n}$

X	$|x-\overline{x}| = |d\text{-}\overline{x}|$
10	6
14	2

20	4
24	8
12	4
80	24

$$\bar{x} = \sum x/\sim = 80/5 = 16$$

$$\delta\,\bar{x} = |d - \bar{x}|\ /\sim = 24/5 = 4.8$$

माध्य विचलन गुणांक

$$\delta\,\bar{x}/\bar{x} = 4.8/16 = 0.3$$

20.9.3 खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन

खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन $|d\bar{x}|$ या $|d_x|$ या $|d_z|$ ज्ञात करने के लिये पहले वह माध्य ज्ञात करते हैं जिससे विचलन लेना है फिर $d|\bar{x}|$ या $|dm|$ या $|d_z|$ ज्ञात करते है। आवृत्ति f से इसमें गुणा करके इसका योग कर लेते हैं। इस योग में आवृत्ति के योग से भाग देने पर माध्य विचलन प्राप्त होता है।

$$\delta\,\bar{x} = \frac{\sum f|d\bar{x}|}{N = \sum f},\ \ \delta_M = \frac{\sum f\,|dM|}{N},\ \ \delta_z = \frac{\sum f(dz)}{N}$$

मध्यका से माध्य विचलन की गणना –

X	$\rightarrow$	5	6	7	8	9	10	11
1	$\rightarrow$	2	1	3	6	14	3	1

X	f	c.f	मध्यिका 8 से विचलन	f|dMd|
5	2	2	3	6
6	1	3	2	2
7	3	6	1	3
8	6	12	0	0
9	4	16	1	4
10	3	19	2	6
11	1	20	3	3
	$N = 20$			$\sum f\,\|dMd\| = 24$

$Md = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वे पद का मान $= \frac{20+1}{2}$ वे पद का मान $= \left(\frac{21}{2}\right)$ वें पद का मान = 10.5 वे पद का मान संचयी अवृत्ति 10.5 संचयी आवृत्ति 12 में सम्मिलित अर्थात् माध्यिका Md = 8 माध्य विचलन,

$$\delta\, Md = \frac{\sum f\, |Md|}{N}$$

$$= \frac{24}{20} = 1.2$$

20.9.4 माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta Md}{Md} = \frac{1.2}{8} = 0.15$

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन का खण्डित श्रेणी वाला सूत्र ही प्रयोग में लाया जाता है यहाँ x वर्ग अन्तराल का मध्य बिन्दु ज्ञात करतें हैं।

उदाहरण – निम्न समंको में समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं उनके गुणांक ज्ञात कीजिए –

वर्गान्तर	20.30	30.40	40.50	50.60	60.70	70.80	80.90
आवृत्ति	9	12	15	20	25	10	9

हल

वर्गान्तर	माध्य बिन्दु x	आवृत्ति f	A – 65 से विचलन (dX)	dX'	fdX'	माध्य 55.6 से निपेक्ष विचलन |dX'|	$f\|d\bar{x}\|$
20-30	25	9	-40	-4	-36	30.6	275.4
30-40	35	12	-30	-3	-36	20.6	247.2
40-50	45	15	-20	-2	-30	10.6	159.0
50-60	55	20	-10	-1	-20	0.6	12.0
60-70	65	25	0	0	0	9.4	235.0
70-80	75	10	+10	1	10	19.4	194.0
80-90	85	9	+20	2	18	29.4	264.6

N = 100	fdX' = 94	$\sum f\,|d\bar{x}| = 1387.2$

पहले हम समान्तर माध्य की गणना लघु रीति से करेगें (देंखे section)

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} \times i$$

$$= 65 + \frac{(-94)}{100} \times 10$$

$$= 65 - \frac{94}{10} = 65 - 94 = 55.6.$$

अब समान्तर माध्य 55.6 द्वारा हम माध्य विचलन ज्ञात करेगें–

$$\delta\bar{X} = \frac{f\,|d\bar{x}|}{N} = \frac{1387.2}{100}$$

$$= 13.872 \cong 13.87$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta\bar{X}}{X} = \frac{13.87}{55.6} = 0.25$ (उत्तर)

20.10 मध्यिका से माध्य विचलन

यहाँ हम उपरोक्त समंको को सूचना का प्रयोग करेगें

$\sum$ (संचयी) आवृत्ति = 100

$\sum$ मध्यिका '57' से = 1404

विचलन $|dMd|$ का (f) में गुणा $f(d\,Md)$

अब, $Md = \left(\frac{N}{2}\right)$ वें पद का मान $= \frac{100}{2} = 50$ वें पद का मान 50 वाँ पद (50 - 60) वर्गन्तर में पड़ता है अतः

$$Md = \ell + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$= 50 + \frac{10}{20}(59 - 36)$$

$$Md = 50 + 7$$

$$Md = 57$$

20.10.1 माध्य विचलन मध्यिका से

$$\delta \; Md = \frac{\sum f\,|dMd|}{N}$$

$$\delta Md = \frac{1404}{100}$$

$$= 14.04$$

20.10.2 माध्य विचलन गुणांक

$$\frac{\delta Md}{Md} = \frac{14.04}{57} = 0.25$$

20.11 बहुलक से माध्य विचलन

समंकमाला में बहुलक 60-70 वर्गन्तर में होगा क्योंकि इसकी आवृत्ति (25) सबसे अधिक है –बहुलक

$$M_0 = 1 + i \times \frac{D_1}{D_1 + D_2} \qquad \text{जहाँ } D_1 = f_1 - f_0$$

$$= 60 + 10\,\frac{5}{5+15} \qquad D_2 = 25 - 10$$

$$= 62.5$$

20.11.2 माध्यविचलन – $\delta M_0 = \dfrac{\sum f\,|dM_0|}{N}$

$$= \frac{1470.0}{100} = 14.70$$

20.11.2 माध्य विचलन गुणांक $= \dfrac{\delta M_0}{M_0} = \dfrac{14.7}{62.5} = 0.24$ (उत्तर)

नोट → पाठकों से अनुरोध है कि वे स्वयं माध्यिका से विचलन एवं बहुलक से विचलन की सारणी ज्ञात करें।

उदाहरण – निम्न सारणी की दो श्रेणियों में विचरण की तुलना माध्य विचलन गुणांक द्वारा कीजिए ।

A	70	100	50	130	140	150	90	60	110	600
B	1250	1350	1600	1450	1550	1700	1750	1800	1400	1650

A	176	124
B	.	.

हल $\rightarrow$(1) सर्वप्रथम हम दोनो श्रेणियों के माध्य ज्ञात करते हैं।

(2) यदि माध्य समान हो तो माध्य विचलन की गणना करते हैं।

(3) यदि माध्य भिन्न हों तो माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करेगें।

श्रेणी A

क्र स0	आय (X)	$\lvert dX \rvert$
1	70	80
2	100	50
3	50	100
4	130	20
5	140	10
6	150	0
7	90	60
8	60	90
9	110	40
10	600	450
11	176	26
12	124	26
	1800	952

$$d = \frac{1800}{12} = 150$$

माध्य विचलन गुणांक

(माध्य विचलन) $\delta\,\bar{x} = \frac{\sum \lvert d\bar{x} \rvert}{N}$

$$= \frac{952}{12} = 79.33$$

माध्य विचलन गुणांक $\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$

$$= \frac{79.33}{150} = 0.53$$

श्रेणी B

क्र स0	आय (X)	$\lvert d\bar{x}\rvert$
1	1250	300
2	1350	200
3	1600	50
4	1450	100
5	1550	0
6	1700	150
7	1750	200
8	1800	250
9	1400	150
10	1650	100
	15500	1500

$$d = \frac{15500}{10} = 1550$$

माध्य विचलन $= \delta\,\bar{x} = \frac{\sum\lvert d\bar{x}\rvert}{N}$

$$= \frac{1500}{10} = 150$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta\,\bar{x}}{\bar{x}}$

$$= \frac{150}{1550} = 0.10$$

उत्तर $\rightarrow$ श्रेणी B में माध्य विचलन का गुणांक मान श्रेणी A से कम है अतः श्रेणी B में विवरण श्रेणी A की तुलना में अधिक समान है।

20.12 माध्य विचलन के गुण

→ परिभाषा स्पष्ट है

→ गणना सरल है

→ सभी मूल्यों पर आधारित प्रवृत्ति हैं

→ यह चरम मानों से अपेक्षाकृत कम प्रभावित हैं

→ यह केन्द्रीय मान से आंकड़ो की औसत दूरी प्रदर्षित करता है।

माध्य विचलन के दोष – यह

→ विचलनों के गणितीय चिन्हों की उपेक्षा करता है

→ आंकड़ों में किसी अज्ञात पद के होने से इसकी गणना संभव नही है।

→ आंकड़ों की संख्या अधिक होने से इसकी गणना में कठिनाई होती है।

माध्य विचलन का महत्व सैद्धान्तिक है तथा व्यावहारिक सांख्यिकीय में विचरणशीलता की माप के लिए मानक विचलन का प्रयोग किया जाता है।

20.13 प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ)

मानक विचलन के अंतर्गत, सर्वप्रथम हम समंक मूल्यों के माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं। कुछ विचलन धनात्मक एवं कुछ ऋणात्मक होते हैं अतः हम विचलनों के वर्ग ज्ञात करते हैं। इस प्रकार विचलनों के चिन्हों की समस्या समाप्त हो जाती है। इसे सिग्मा (σ) द्वारा व्यक्त करते हैं। मानक विचलन की गणना निम्न प्रकार होती है –

- माध्य से विचलन $dx = x - \bar{x}$
- विचलनों का वर्ग $dx^2 = (x - \bar{x})^2$
- विचलनों वर्गों का योग $= \sum dx^2 = \sum (x - \bar{x})^2$
- विचलन वर्गों का औसत अथवा प्रसरण $= \dfrac{\sum (x-\bar{x})^2}{N}$
- मानक विचलन $= \sqrt[+]{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$

मानक विचलन सदैव धनात्मक होता है। यदि मानक विचलन दिया हो तो प्रसरण का मान निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमाप विचलन किसी समंक के मूल्यों का माध्य के दोनो ओर बिखराव का माप है

प्रमाप विचलन को भिन्न नामों से जाना जाता है जैसे –

- 'विभ्रम' (Mean Error)
- माध्य विचलन वर्ग मूल्य (Mean Square Error)
- माध्य विचलन वर्ग मूल (Root Mean Square Deviation)

प्रमाप विचलन का प्रत्यक्ष सूत्र इस प्रकार है –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{N}}$$

यदि माध्य का मान दशमलव बिन्दुओं में हो तो –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} = \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

20.14 वितरण गुणांक (Coefficient of Variation) $= \frac{\sigma}{x} \times 100$

अर्थात सापेक्षित विचरणशीलता ज्ञात करने के लिये निरपेक्ष (मानक विचलन) माप को केन्द्रीय मान (माध्य) से भाग देते हैं, यह प्रतिशत के रूप मे व्यक्त होता है, अतः इसे 100 से गुणा कर देते हैं। विचरणशीलता गुणांक का प्रयोग उस स्थिति में भी किया जाता है, जब दोनों श्रेणियों की माप की इकाइयाँ भिन्न भिन्न हों।

मानक माप ज्ञात करने की विधि (Methods 06 Standard Deviation) सामान्य श्रेणी में प्रत्यक्ष रीति

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

$$\text{विचरण गुणांक} \quad - \quad \frac{\sigma}{x}$$

प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक की गणना कीजिए

श्रमिक	.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मजदूरी (रू0)	.	80	85	95	90	100	75	65	105	70	85

हल $\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$

विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक की गणना को निम्न सारणी द्वारा दिखाया गया है।

श्रमिक	मजदूरी (रू0)	X^2	माध्य 85 से $dx = (x-\bar{x})$	dX^2
1	80	6400	.5	25
2	85	7225	0	0
3	95	9025	10	100
4	90	8100	5	25
5	100	10000	15	225
6	75	5625	.10	100
7	65	4225	.20	400
8	105	11025	20	400
9	70	4900	.15	225
10	85	7225	0	0
$N = 10$	$\sum x = 850$	$\sum x^2 = 73750$		$\sum dx^2 = 1500$

$$\sigma = \sqrt{\frac{13750}{10} - \left(\frac{850}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7375 - (85)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{7375 - 7225} = \sqrt{150} = 12.25 \text{ (उत्तर)}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{850}{10} = 85$$

$$\text{C.V.} = \frac{12.25}{85} = 0.144 \text{ (उत्तर)}$$

2. अप्रत्यक्ष विधि $- \sigma = \sqrt{\frac{\sum d\,x^2}{N}}$

$$\sum dx^2 = 1500, \quad N = 10$$

तो $\sigma = \sqrt{\frac{1500}{10}} = 12.25$ (उत्तर)

विचलन गुणांक $= \frac{12.25}{85} = 0.144$ (उत्तर)

दोनों रीति से उत्तर समान है ।

विच्छिन्न श्रेणी का प्रमाप विचलन

(Standard Deviation of Discrete Series)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$\sum fdx^2$ = माध्य से विचलनों के वर्गें तथा संगत आवृत्तियों का गुणनफल

विचलन रीति (Deviation Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

dX = कल्पित माध्य से विचलन

A = सर्वाधिक आवृत्ति वाला चर को कल्पित माध्य मान लेते हैं।

पद विचलन रीति (Step deviation Method)

$$dX = X - A$$

$$dX' = \frac{dX}{i} = \frac{X - A}{i}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f.dX'^2}{N} - \left(\frac{\sum f.dx'}{N}\right)^2} \times i$$

$\sum f.dx^2$ = पद विचलनों के वर्गों तथा संगत आवृत्तियों के गुणनफल का योग

= पद विचलनों तथा संग्त आवृत्तियों के गुणनफल का योग

अविच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

जहाँ $\sum fdx^2$ = माध्य बिन्दु के वर्ग एवं संगत आवृत्तियाँ के गुणनफल का योग

$\left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2$ = मध्य बिन्दु की संगत आवृत्ति से गुणनफल के योग का छ से भाग करने पर प्राप्त मान का वर्ग

उदाहरण →निम्नलिखित समंक का प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विचलन गुणांक कीजिए

चर मूल्य	(X)	रू	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्तियाँ	(f)	रू	3	6	9	13	8	5	4

X	f	fX	dX	dX^2	$f\,dX^2$
6	3	18	.3	9	27
7	6	42	.2	4	24
8	9	72	.1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	N = 48	432			124

$$\bar{X} = \frac{432}{48} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58} = 1.60$$

$$\text{विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1.6}{9} = 0.18$$

निम्नलिखित समंको का पद विचलन रीति से मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

वर्गान्तर	मध्य बिन्दु (X)	आवृत्ति (f)	काल्पित माध्य से विचलन dX	dX'	fdX'	$f(dX'^2)$
10-20	15	5	-30	-3	-15	45
20-30	25	10	-20	-2	-20	40
30-40	35	10	-10	-1	-10	10
40-50	45	25	0	0	0	0
50-60	55	25	10	1	25	25
60-70	65	15	20	2	30	60

70-80	75	10	30	3	30	90
		N = 100			$\sum fdx' = 40$	$\sum fdx'^2 = 270$

$$\sigma = \sqrt{\sum fdx'^2 - \left(\frac{\sum fdx'}{N}\right)^2} \times i = \sqrt{\frac{270}{100} - \frac{40}{100}} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{2.7 - (0.4)^2} \times 10 = \sqrt{2.7 - 0.16} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{2.54} \times 10 = 1.593 \times 10 = 15.93$$

प्रमाप विचलन गुणांक $= \dfrac{\sigma}{\overline{X}}$

जहाँ $\overline{X} = A + \dfrac{\sum dx'}{N} \times i$

$$= 45 + \frac{40}{100} \times 10$$

$\overline{X} = 45 + 4 = 49$ तो

$\dfrac{\sigma}{\overline{X}} = \dfrac{15.93}{49} = 0.33$ उत्तर

उदाहरण $\rightarrow$ दो कारखानों A, B, में, जो एक ही उद्योग से सम्बन्धित हैं, औसत साप्ताहिक मजदूरी तथा प्रमाप विचलन इस प्रकार दिये हैं–

कारखाना	माध्य (रू0)	प्रमाप विचलन
A	40	12.5
B	36.4	9.1

दोनो कारखानों की मजदूरी में किसमें संगतता (Homogenity) अधिक है।

हल – हम दोनो कारखानों के विचलन गुणांक ज्ञात करेगें।

$A = C.V = \dfrac{\sigma_1}{X_1} \times 100$

$\sigma_1 = 12.5$

$x_1 = 40$

अत : $C.V. = \dfrac{12.5}{40} \times 100 = 31.25\%$

$B \rightarrow C.V = \frac{\sigma_2}{x_2} \times 100$

$\sigma_2 = 9.1$

$x_2 = 36.4$

अतः $= \frac{9.1}{36.4} \times 100$

$C.V. = 25\%$

जहाँ B कारखाने का विचलन गुणांक कम है, अतः अधिक मजदूरी संगतता B में हैं।

20.15 सामूहिक प्रमाप विचलन

जिस प्रकार हम एक से अधिक विवरणों के माध्यों के आधार पर सामूहिक माध्य ज्ञात करते है उसी प्रकार हम एक से अधिक विवरणों के माध्यों एवं प्रमाप विचलन के आधार पर सम्मिलित विवरण का प्रमाप विचलन ज्ञात करते हैं – इसकी विधि निम्न है–

(i) विवरणों का सामूहिक माध्य ज्ञात करते हैं।

(ii) प्रत्येक विवरण माध्य का सामूहिक माध्य से विचलन ज्ञात किया जाता है।

जैसे $D_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}$, $D_2 = \bar{X}_2 - \bar{X}$, $D_n = \bar{X}_n - \bar{X}$.

(iii) अब निम्न सूत्र के द्वारा हम सामूहिक विवरण का प्रमाप विचलन (σ) ज्ञात करते हैं।

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1\left(\sigma_1^2 + D_1^2\right) + N_2\left(\sigma_2^2 + D_2^2\right) + \;.....+ N_2\left(\sigma_n^2 + D_n^2\right)}{N_1 + N_2 + \;.....+ N_n}}$$

उदाहरण $\rightarrow$ दो आवृत्ति वितरणों की कुल आवृत्ति, माध्य एवं प्रमाप विचलनों का वितरण इस प्रकार है –

$N_1 = 200$ $\quad \bar{X}_1 = 25$ $\quad \sigma_1 = 3$

$N_2 = 300$ $\quad \bar{X}_2 = 10$ $\quad \sigma_2 = 4$

हलः वितरणों का सामूहिक माध्य $\bar{X}$ =

$$\bar{X} = \frac{N_1 - \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2} = \frac{200(25) + 300(10)}{200 + 300}$$

$$= \frac{8000}{500} = 16$$

सामूहिक प्रमाप विचलन

$$(\sigma) = \frac{\sqrt{N_2\left(\sigma_1^2 + D_1^2 + N_2\left(\sigma_2^2 + D_2^2\right)\right)}}{N_1 + N_2}$$

प्रष्न द्वारा प्रदत्त सूचना के अनुसार –

$N_1 = 200$ $\sigma_1 = 3$ $D_1 = \overline{X}_1 - \overline{X} = 9$

$N_2 = 300$ $\sigma_2 = 4$ $D_2 = \overline{X}_2 - \overline{X} = -6$

सूत्र में मान रखने पर

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(3^2 + 9^2) + 300(4^2 + (-6)^2}{200 + 300}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(9 + 81) + 300(16 + 36)}{500}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(90) + 300(52)}{500}}$$

$$= \sqrt{\frac{18000 + 15,600}{500}} = \sqrt{\frac{336}{5}} = \sqrt{67.2} = 8.2$$

सामूहिक विचलन प्रमाप = 8.2.

20.16 प्रमाप विचलन के गुण एवं दोष

गुण

(i) इसका मान निश्चित है, तथा यह परिभाषित है।

(ii) इसका मान समंकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित है।

(iii) गणितीय क्रियाओं के लिये सर्वथा उपयुक्त है।

(iv) यह विचलन के वर्गों पर आधारित होता है।

(v) प्रमाप विचलन का मान न्यादर्श परिवर्तन के फलस्वरूप अधिक परिवर्तित नहीं होता।

(vi) इसकी संकल्पना सहसम्बन्ध तथा समायण में भी अत्यन्त उपयोगी है।

दोष

(i) यह गणना करने में कठिन है।

(ii) यह बड़े विचलनों को छोटे विचलनों से अधिक महत्व देता है।

20.17 बिन्दु रेखीय विधि लारेंज वक्र

बिन्दु रेखीय विधि से अपकिरण मापने का सर्वप्रथम प्रयोग डॉ0 मैक्यओ लारेंज ने किया था। यह समान वितरण रेखा से समंक माला के असमानताओं का अध्ययन करने में सहायक है। इसका प्रयोग भू जोतों, आय एवं सम्पत्ति तथा परिसम्पत्तियों की असमानता

का अध्ययन करने में सहायक होता है। लारेंज वक्र समान वितरण रेखा से वास्तविक विवरण के विचलन का माप है। यह वक्र समान विवरण से जितना दूर होगा असमानताओं उतनी अधिक होंगी।

यहाँ A ग्रुप में वितरण आय की असमानाएँ अधिक हैं।

20.18 संकेन्द्रण अनुपात

आयों की असमानताओं को परिमाणात्मक रूप में मापने के लिये हम एक गुणांक का प्रयोग करते है जिसे 'संकेन्द्रण अनुपात' अथवा 'Gini Coefficient' कहते हैं।

गिनी गुणांक = समान विवरण रेखा लानेंज वक्र के मध्य क्षेत्रफल / समान विवरण रेखा व अक्षों के बीच क्षेत्रफल

इस गुणांक का मान जितना कम होग आय की असमानताएँ भी उतनी कम होंगी तथा अधिक होने पर असमानताएँ अधिक होंगी।

20.19 सारांश

श्रेणी में विचरण की माप ज्ञात करने वाले माध्य को अपकिरण कहतें हैं।

- अपकिरण को द्वितीय क्रम का माध्य भी कहते हैं।
- अपकिरण के माप की वहीं विषेषताएँ होती हैं, जो आदर्श माध्य की होती हैं।
- जब अपकिरण की माप को मूल इकाइयों में ही व्यक्त किया जाता है तो उसे निरपेक्ष अपकिरण कहतें हैं, तथा जब इसे अनुपात या प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तो इसे सापेक्ष अपकिरण कहते हैं।
- दो श्रेणियों की तुलना करने के लिये सापेक्ष अपकिरण का उपयोग किया जाता है।
- अपकिरण को तीन रीति से मापा जा सकता है–

  *सीमा रीति – विस्तार, अन्तर–चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार

  *विचलन माध्य रीति – चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, माध्य विचलन

  *बिन्दुरेखीय रीति – लारेंज वक्र
- विस्तार, अपकिरण की निरपेक्ष माप है जो श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्यों के अन्तर से प्राप्त होता है।
- विस्तार गुणांक द्वारा हमें अपकिरण की सापेक्ष माप प्राप्त होती है।

- विस्तार का प्रमुख उपयोग गुण नियंत्रण, विनिमय दरों में परिवर्तन, मौसम भविष्यवाणी में प्रयुक्त।
- चरम मानों से अत्यधिक प्रभावित होने के कारण विस्तार विचलन की सही माप नही दे पाता, अतः चरम मानों के प्रभाव निरस्त करने के लिए हम अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार का प्रयोग करते हैं।
- पूर्णतया सभावित आँकड़ों में मध्यिका का मान तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के ठीक बीच में स्थित होता है।
- भूजोत, आय तथा सम्पत्ति विवरण में असमभित विवरण की माप में अन्तर चतुर्थक विचलन उपयोगी होता है।
- श्रेणी के चरम मूल्यों से प्रभावित न होकर 8% मूल्यों पर आधारित अपकिरण की बेहतर माप शतमक विस्तार है।
- चतुर्थक विचलन अन्तर चतुर्थक विचलन को 2 में से भाग देने पर प्राप्त होता है।
- चतुर्थक विचलन गुणांक का प्रयोग हम विभिन्न श्रेणियों में विचलन ज्ञात करने के लिए करते है चतुर्थक विचलन को स्थिति माध्य कहना ज्यादा उचित है।
- माध्य विचलन विचलनों के औसत व्यक्त करता है इसकी गणना समंक के सिकी केन्द्रीय माध्य (समान्तर माध्य, माधिका बहुलक) द्वारा की जाती है। सापेक्ष अपकिरण के लिए माध्य विचलन गुणांक की गणना की जाती है।
- प्रमाप विचलन था मानक विचलन, समकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है।
- मानक विचलन का माप सदैव धनात्मक होता है, इसकी सापेक्ष माप को विचरण गुणांक कहते हैं।
- समान विवरण रेखा से समंक मालाओं की असमानता का बिन्दुरेखीय विधि से अध्ययन लारेंज वक्र द्वारा किया जाता है।
- आय की असमानताओं के परिमाणात्मक माप के लिये संक्रेन्द्रण अनुपात (Gini Coefficient) का प्रयोग किया जाता है।

20.20 अभ्यास के लिये प्रश्न

प्रश्नः 1 A तथा B दो कम्पनियों के अंशपत्रों (Shares) के मूल्य सम्बन्धी आँकड़ो नीचे दिये गये हैं।

X	55	51	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

उत्तर $\rightarrow$ c.v.(x) = 4.99% c.v(y) = 1.9%, अतः y अधिक स्थिर ।

प्रश्नः 2 एक कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न है – 32, 15, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 35, 33, 28, 30, 29, आंकड़ो के आधार पर (i) चतुर्थक विचलन (ii) चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

उत्तरः (Q. D. = 4.5; Coeff of Q. D. = 0.18)

प्रश्नः 3 निम्न आंकड़ों के आधार पर (i) मध्यिका विचलन गुणांक (ii) माध्य गुणांक की गणना कीजिए –

वस्तु का आकार (X) $\rightarrow$	4	6	8	10	12	14	16
आवृत्ति (f) $\rightarrow$	2	4	5	3	2	1	4

उत्तरः (i) .405 (ii) 0.33

प्रश्नः 4 निम्न आवृत्ति विवरण के (i) माध्य (ii) प्रमाप विचलन की गणना कीजिए ।

X	10	20	30	40	50	60	70	80
y	15	30	53	75	100	110	115	125

उत्तरः (i) $\bar{X} = 35$ (ii) $\sigma = 19.76$

प्रश्नः 5 निम्न समंको का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए –

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	60	101	152	205	155	79	40	1

उत्तरः $\sigma = 1.61$

प्रश्नः 6100 मदों से सम्बद्ध एक विवरण का माध्य '50' तथा प्रमाप विचलन '4' है, इन मदों के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए उत्तरः $\sum x^2 = 2, 51, 600$

प्रश्नः 7 $\rightarrow$ निम्न समंकों द्वारा माध्य और माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

X	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10

y	3	7	22	60	85	32	8

उत्तरः 0.915

प्रश्नः निम्न आंकड़ों के माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए –

X	10	20	30	40	50	60	70	80
y	15	30	53	75	100	110	115	125

उत्तरः $\bar{X} = 35.16$, $\sigma = 19.76$

प्रश्नः 9 निम्न आंकड़ों से लारेंज वक्र खीजिए –

आय का विस्तार	परिवार संख्या	कुल आय
51—250	1744	268
251—450	557	186
451—650	302	166
651—850	186	139
851—1050	123	117
1051—1250	90	104

इकाई 21 विषमता

21. 1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई में **अपकिरण** की मापों पर चर्चा की **गयी** प्रस्तुत इकाई में पाठकों को **विषमता** की प्रमापों की जानकारी दी जाएगी। प्रस्तुत इकाइ में बाउले का विषमता माप , केली का विषमता माप , विषमता गुणांक की विभिन्न विधियों की व्याख्या की जाएगी। अन्त में सारांश एवं अभ्यास के लिए प्रश्न जिससे पाठकों को इकाई का अध्ययन करने में सुविधा होगी।

यदि कोई आवृत्ति विवरण केन्द्रीय मान के दोनो ओर सममित है, तथा केन्द्रीय मान के दोनो ओर आवृत्ति वक्र का आकार एक सा है, तो हम आवृत्ति वक्र को पूर्णतया सममित कहेंगे। यदि आवृत्ति वक्र केन्द्रीय मान के दोनो ओर सममित नहीं है अर्थात् वक्र की पुच्छ केन्द्रीय मान के दोनो ओर सममित नहीं है अर्थात वक्र की पुच्छ केन्द्रीय मान के एक ओर अपेक्षाकृत दीर्घ तथा एक ओर अपेक्षाकृत लघु है तो हम ऐसे आवृत्ति वितरण को विषम कहते हैं। विषमता का अर्थ सममिति का अभाव है। यदि किसी विवरण में सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति है तो उस वितरण में विषमता होती है।

सममित वंटन में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम में बढ़ती हैं, तथा फिर उसी क्रम में घटती हैं। इस तरह के वक्र को प्रसामान्य वक्र कहतें हैं, सममित वंटन में समान्तर माध्य, मध्यिका और बहुलक बराबर होते हैं तथा वक्र का आकार केन्द्रीय मान के दोनो ओर एक सा होता है।

→जब वक्र का झुकाव दाहिनी ओर अधिक होता है तो वंटन में धनात्मक विषमता पायी जाती है – जिसमें

(i) $\bar{X} > M > Z$

(ii) $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

→जब असमित वक्र का झुकाव बायीं ओर अधिक होता है तो इसमें ऋणात्मक विषमता पायी जाती है। जिसमें –

(i) $\bar{X} < M < Z$

(ii) $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$

किसी बंटन में विषमता की जाँच आवश्यक होती है – यदि

(1) आवृत्ति वंटन का वक्र सममित न हो अर्थात उसका स्वरूप घंटी के आकर का न हो।

(2) यदि वंटन में समान्तर माध्य, मध्यिका और बहुलक के बीच जितनी ही अधिक दूरी होगी आवृत्ति वंटन में विषमता उतनी अधिक होगी।

(3) मध्यिका से चतुर्थक मूल्यों की दूरी असमान हो।

(4) मध्यिका तथा बहुलक से निकाले ग्ये विचलनों का योग शून्य न हो।

विषमता की माप के द्वारा हमें किसी वंटन विषमता या असमिति की मात्रा (अंकात्मक मान) तथा दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) का ज्ञान होता है।

21.2 उद्देश्य

→ प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पश्चात विषमता क्या है ?

→ विषमता की प्रमुख माप कौन सी हैं ?

→ विषमता की निरपेक्ष एवं सापेक्ष मापों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगें।

21.3 विषमता का माप (Measures of Skewness)

आवृत्ति वंटन की विषमता माप निरपेक्ष या सापेक्ष हो सकती है, निरपेक्ष माप तुलना योगय होता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों में विषमता की तुलना करने के लिए विषमता की सापेक्ष ज्ञात करते हैं। इसे विषमता गुणांक (Coefficient Skewness) भी कहते हैं। यह गुणांक इकाई विहीन होते हैं तथा इन्हें प्रमाप विचलन से भाग देते है प्रमुख विषमताओं की मापों का विवरण निम्न असममित वंटन में $\bar{X} \neq M \neq Z$ समान्तर माध्य से बहुलक की दूरी जितनी अधिक होगी श्रेणी में विषमता उतनी ही अधिक होगी।

21.3.1 विषमता माप

$S_k = \bar{X} - Z$

यह निरपेक्ष माप है, यदि इस निरपेक्ष–माप में हम अपकिरण की माप से भाग दे दें तो हमें सापेक्ष माप या विषमता गुणांक प्राप्त होग।

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक – $J = \dfrac{\bar{X} - Z}{\sigma}$

21.3.2 कार्ल पियर्सन का विषमता – माप

कभी–कभी बहुलक का निर्धारण कठिन हो जाता है ऐसी स्थिति में हम विषमता माप के वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करते हैं।

कार्ल पियर्सन का विषमता – माप

$$S_k = 3\left(\bar{X} - M\right)$$

$$\bar{X} - Z = 3\left(\bar{X} - M\right)$$

कार्ल पियर्सन का विषमता –गुणांक

$$J = \frac{\left(\bar{X} - M\right)}{\sigma}$$

उपर्युक्त सूत्रों के आधार पर विषमता – माप ज्ञात करने की रीति को विषमता का 'प्रथम माप' कहते है।

विषमता का 'द्वितीय माप' मध्यका से चतुर्थक मूल्यों के अन्तर पर आधारित है इसे बाउले का विषमता माप भी कहतें हैं, इसका प्रथम प्रयोग बाउले ने किया था।

21.3.3 बाउले का विषमता माप

$$S_{KB} = (Q_3 - M) - (M - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M$$

बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_1 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

यह रीति बहुत व्यावहारिक नहीं है क्योंकि इसमें श्रेणी के केवल आधे भाग की विषमता का ही माप से पाता है। यह कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक से भिन्न होता है। इसमें दोनों की रीति भिन्न होने से विषमता तुलनात्मक नहीं होती है।

21.3.3 केली का विषमता माप (Kelly's Measure of Skewness)

बाउले के विषमता माप की त्रुटि केली के विषमता माप द्वारा की जाती है, इसमें शतमक या दशमक मूल्यों का प्रयोग किया जाता है।

केली का विषमता माप –

$$KS_K\left(P_{90} - P_{50}\right) - \left(P_{50} - P_{10}\right) = P_{90} + P_{10} - 2P_{50}$$

21.3.4 विषमता गुणांक :

$$J_K = \frac{\left(P_{90} - P_{50}\right) - \left(P_{50} - P_{10}\right)}{\left(P_{90} - P_{50}\right) + \left(P_{50} - P_{10}\right)} = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$$

कुछ उदाहरणों द्वारा हम ऊपर दी ग्यी विषमता की मापों का स्पष्ट उल्लेख करेगें।

21.4 निम्न बिन्दु स्मरणी हैं–

पूर्णतया सममित विवरणों के लिये तृतीय चतुर्थक तथा मध्यिका का अन्तर $(Q_3 - Md)$ एवम् मध्यिका एवं प्रथम चतुर्थक का अन्तर $(Md - Q_1)$ समान होंगें। धनात्मक विषमता वाले आवृत्ति वक्रों में (Q_3) का मान $(Md - Q_1)$ से अधिक होग तथा ऋणात्मक विषमता वाले आवृत्ति वक्रो में $(Q_3 - Md)$ का मान $(Md - Q_1)$ से कम होगा।

अन्य शब्दों में उपर्युक्त परिभाषित चतुर्थक विषमता गुणांक का मान धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक होने पर आवृत्ति वक्र क्रमश : धनात्मक, विषमता वाला, पूर्णतया सममित अथवा ऋणात्मक विषमता वाला कहलायेगा।

उदाहरण – 1 निम्न आंकड़ों से कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

X	रू	2	4	6	8	10	12	14
f	रू	10	18	30	25	12	3	2

हलः इस प्रश्न को बहुलक या मध्यका, दोनों के आधार पर ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ स्पष्ट है, अतः हम इसी का प्रयोग करेगें।

X	f	fx	fX^2
2	10	20	40
4	10	72	288
6	30	180	1080
8	25	200	1600
10	12	120	1200
12	3	36	432
14	2	28	392
	100	656	5032

समान्तर माध्य – $\overline{x} = \frac{656}{100} = 656$

प्रमाप विचलन –

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum fx^2 - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5032}{100} - \left(\frac{656}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{50.32 - 43.0336} = \sqrt{7.2864} = 2.6994$$

चूँकि अधिकतम आवृत्ति 30 हैं, अतः इससे सम्बद्ध मूल्य अर्थात् 6 बहुलक होगा।
कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$J = \frac{\bar{X} - Z}{\sigma} = \frac{6.56 - 6}{2.6994} = 0.2075.$$

अतः वितरण में धनात्मक विषमता है।
उदाहरण 2रू निम्न श्रेणी में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी सं0	5	20	10	0	5	20	8	7

यहाँ बहुलक स्पष्ट नहीं हो रहा है अतः वैकल्पिक सूत्र द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात करेगें।

प्राप्तांक	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	dX^1=X-A/n A=4,5, n=10	fdX^1	fdX^2	संचयी आवृत्ति
0-10	5	5	-4	-20	80	5
10-20	15	20	-3	-60	180	25
20-30	25	10	-2	-20	40	35
30-40	35	0	-1	0	0	35
40-50	45	5	0	0	0	40
50-60	55	20	1	20	20	60
60-70	65	8	2	16	32	68
70-80	75	7	3	21	63	75
Total		75		-43	415	

समान्तर माध्य –

$$\overline{X} = \frac{A + n\Sigma fdx'}{N}$$

$$=45+\frac{10\times(-43)}{75}=45-\frac{86}{15}=45-5.7$$

$$=39.3$$

$$\frac{N}{2}=\frac{75}{2}=37.5$$

अतः 40-50 वाले वर्ग में मध्यका होगी।

मध्यका

$$M=\ell_1+\left(\frac{\frac{N}{2}-c}{f}\right)\times h$$

$$=40+\frac{37.5-35}{5}\times10=40+\frac{2.5}{5}\times10=45$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma=h\times\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma fdx'^2-\frac{(\Sigma fdx')^2}{N}}$$

$$\sigma=h\times\sqrt{\frac{415}{75}-\left(\frac{-43}{75}\right)^2}=10\times\sqrt{5.53-0.33}$$

$$=h\times\sqrt{\frac{415}{75}-\left(\frac{-43}{75}\right)^2}=10\times\sqrt{5.53-0.33}$$

$$=10\times2,28=22.8$$

अतः कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक –

$$J=\frac{3\left(\overline{X}-M\right)}{S}=3\frac{(39.3-45.0)}{22.8}=-\frac{17.1}{22.8}$$

$$=-0.75$$

उदाहरण 3. वंटन A और बंटन B के संबंध में निम्न सूचनाएँ प्राप्त हैं

	वंटन A	वंटन B
समान्तर माध्य	50	45
मध्यका	45	40
प्रमाप विचलन	5	5

निम्न की जाँच कीजिए।

(i) बंटन A और बंटन B में समान विचरण है।

(ii) दोनों बंटनों में विषमता समान है।

हल – विचरण की तीव्रता के लिये हम विचरण गुणांक ज्ञात करते हैं।

(i) बंटन A में $C.V = \sigma/\bar{X} \times 100 = 5/50 \times 100 = 10$

बंटन B में $C.V = \sigma/\bar{X} \times 100 = 5/45 \times 100 = 11.11$

स्पष्ट रूप से बंटन B में विचलन अधिक है अतः (i) कथन असत्य है।

(ii) कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

बंटन A में $= \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} = \frac{3(50 - 45)}{5} = \frac{3 \times 5}{5} = 3$

बंटन B में $= \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} = \frac{3(45 - 40)}{5} = \frac{3 \times 5}{5} = 3$

दोनों बंटनों में विषमता समान है तथा दिया गया कथन (ii) सत्य है।

उदाहरण 4रू निम्न वितरण से कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक और बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

	श्रेणी A	श्रेणी B
समान्तर माध्य	150	140
मध्यका	142	155
प्रमाप विचलन	30	55
तृतीय चतुर्थक	195	260
प्रथम चतुर्थक	62	80

हल –

श्रेणी A में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} = \frac{3(150 - 142)}{30} = \frac{3 \times 8}{30} = 0.8$$

बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{195 + 62 - 2 \times 142}{195 - 62} = \frac{157 - 284}{133}$$

$$= -\frac{27}{133} = -0.203$$

श्रेणी B में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{6} = \frac{3(140 - 155)}{55} = \frac{3 \times (-15)}{55} = -\frac{9}{11} = -0.82$$

तथा बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{260 + 80 - 2 \times 155}{260 - 80} = \frac{340 - 310}{180}$$

$$= \frac{1}{6} = 0.167$$

यहाँ एक ही श्रेणी में कार्ल पियर्सन की रीति से निकाला गया विषमता गुणांक और बाउले की रीति से निकाला गया विषमता गुणांक भिन्न हो सकता है।

21.5 अपकिरण एवं विषमता

किसी वंटन में अपकिरण एवं विषमता विश्लेषण के प्रमुख अंग है इस दृष्टि से ये माप एक दूसरे के पूरक हैं। इनमें प्रमुख अन्तर निम्न हैं–

	अपकिरण	विषमता
1.	यह पद मूल्यों के बिखराव या श्रेणी की बनावट बताता है	यह वंटन की सममिति अथवा असमिति बताता हैं
2.	यह पूरी श्रेणी के बिखराव को मापता है	यह माध्य के दोनो तरफ के बिखराव की तुलना करता है।
3.	यह प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय परिघातों से संबंधित हैं	यह केवल तृतीय परिघात से संबंधित हैं।

21.6 सारांश

$\Rightarrow$ विषमता का अर्थ सममिति का अभाव है।

$\Rightarrow$ यदि किसी वितरण में सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति है तो उसे विषय कहते हैं।

$\Rightarrow$ जब वक्र का झुकाव दाहिनी ओर अधिक होता है तो वंटन में धनात्मक विषमता पायी जाती है।

जिसमें – $\bar{X} > M > Z$

– $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

⇒ जब असममित वक्र का झुकाव बायीं ओर अधिक होता हैं तो इसमें ऋणात्मक विषमता पायी जाती है

जिसमें – $\bar{X} < M < Z$

– $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

⇒ विषमता की माप द्वारा हमें वंटन में असममिति की मात्रा दिशा का ज्ञान होता है।

⇒ दो या दो से अधिक श्रेणियों में तुलना करने के लिये विषमता गुणांक का प्रयोग करते हैं।

⇒ यह गुणांक इकाई विहीन होते हैं।

⇒ प्रमुख विषमता की माप –

कार्ल पियर्सन का निरपेक्ष माप $= J = \bar{X} - Z = 3(\bar{X} - M)$

विषमता गुणांक $= J = \dfrac{\bar{X} - Z}{\sigma} = \dfrac{3(\bar{X} - M)}{\sigma}$

बाउले का विषमता माप –

$$S_{KB} = Q_3 + Q_1 - 2M$$

विषमता गुणांक $= \dfrac{Q_3 - Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

केली का विषमता माप $= K_{SK}(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10}) = P_{90} + P_{10} - 2P_{50}$

विषमता गुणांक $= \dfrac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$

21.7 अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(1) विषमता किसी आवृत्ति बंटन के किस विशेषता को प्रकट करती है–

(i) आवृत्तियों के केन्द्रिकरण को

(ii) आवृत्तियों के अपकिरण को

(iii) किसी आवृत्ति बंटन के आकार को

(iv) इन सभी को

(2) निम्न से किसने विषमता के माप को विकसित नहीं किया –

(i) क्राक्सटन (ii) कार्ल पियर्सन

(iii) बाउले (iv) केली

(3) बाउले के विषमता गुणांक की क्या सीमा है–

(i) 0 से 1 (ii) –1 से +1

(iii) 0 से 3 (iv) –3 से +3

(4) कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक का सूत्र है–

(i) $\frac{\overrightarrow{X} - Z}{S.D.}$

(ii) $\frac{\overrightarrow{X} - M}{S.D.}$

(iii) $\frac{3\ (\overrightarrow{X} - Z)}{S.D.}$

(iv) $\frac{2\ (\overrightarrow{X} + M)}{S.D.}$

(5) एक सममित वितरण में विषमता गुणांक होती है–

(i) शून्य (ii) धनात्मक

(iii) ऋणात्मक (iv) इनमें से कोई नहीं

उत्तर : 1-(iii) 2-(i) 3-(ii) 4-(i) 5-(i)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें –

(1) विषमता धनात्मक होती है, यदि $X < M < Z$

(2) बाउले का विषमता गुणांक चतुर्थकों और मध्यिका पर आधारित होता है।

(3) खुले सिरे वाले श्रेणियों के सन्दर्भ में बाउले का विषमता गुणांक कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक से बेहतर होता है।

(4) एक सममित वितरण में $Q_3 - M = M - Q_1$ होता है।

(5) सभी वितरणों को धनात्मक अथवा ऋणात्मक विषमता के रूप में विभाजित किया जा सकता है।

उत्तर : **1-** (F) **2-**(T) **3-**(T) **4-**(T) **5-**(F)

निम्न के उत्तर दीजिए –

प्र0 1: विषमता से क्या अभिप्राय है? इसकी जाँच किस प्रकार से करते हैं?

प्र0 2: अपकिरण तथा विषमता में भेद प्रकट कीजिए। यदि किसी बंटन में $\overline{X} = M = Z$ तो आप क्या निष्कर्ष निकालेंगें।

प्र0 3: निम्न समंकों के आधार पर कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

X	58	59	60	61	62	63	64	65
f	10	18	30	42	35	28	16	8

उत्तर $[J = 0.228]$

प्र0 4: निम्न संकों के आधार पर कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80
f	150	140	100	80	80	70	30	14	0

उत्तर $[J = -0.6622]$

प्र0 5: किसी बंटन में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक 0.40 है इसका प्रमाप विचलन 8 और माध्य 30 है। बंटन के बहुलक एवं मध्यका की गणना कीजिए।

उत्तर $[M_0 = 26.8,\ M_e = 28.93]$

प्र0 6: किसी बंटन में निम्न परिणाम प्राप्त हुए –

समान्तर माध्य = 45 मध्यका = 48

विषमता गुणांक = 0.4

बंटन के प्रमाप विचलन की गणना कीजिए

उत्तर $[\sigma = 22.5]$

प्र0 7: निम्न समंकों से बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

Class Interval	40-36	36-32	32-28	28-24	24-20	20-16	16-12	12-8	8-4
Frequency	2	6	10	12	15	30	18	10	6

उत्तर $[J_B = 0.188]$

प्र0 8रू निम्न समूहों में किसका वितरण अधिक सममित हैं ?

(i) माध्य $= 22,$ मध्यिका $= 24,$ मान विचलन $= 10,$

(ii) माध्य $= 22,$ मध्यिका $= 21,$ मान विचलन $= 12$

प्र0 9रू यदि मध्यिका का मान 24 तथा माध्य का मान 26 हो तो समूह की विषमता धनात्मक होगी अथवा ऋणात्मक ?

प्र0 10रू निम्नलिखित आंकड़ों की सहायता से विचरण – गुणांक तथा विषमता – गुणांक की गणना कीजिए ।

वर्ष	-	1910	'11	'12	'13	'14	'15	'16	'17	'18	'19
गेहूँ का मूल्य सूचकांक	-	83	87	93	109	124	126	130	118	105	104

उत्तर → (c.v = 4.4 % विषमता गुणांक = 0.953)

21.8 संदर्भ ग्रन्थ

- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह (2002) – अर्थशास्त्र ीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेषन्स, नई दिल्ली।
- J.K. Sharma (2008) – Business Statistics, Dorling Kinderseley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) – परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई – 22 परिघात एवं पृथुषीर्षत्व

22.1 प्रस्तावना

पूर्व इकाई में विषमता की मापों पर चर्चा की, प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पष्चात पाठक परिघात एवं पृथुशीर्षत्व पर जानकारी प्राप्त करेगें। सांख्यिकी में परिघात का प्रयोग किसी आवृत्ति वंटन के विभिन्न मापों, जैसे – केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण, विषमता प्रथुशीर्षत्व आदि के विष्लेषण में होता है। किसी श्रेणी में परिघातों का परिकलन समान्तर माध्य अथवा किसी कल्पित माध्य से परिघात ;उवउमदजे ंइवनज जीम ंतपजीउमजपब उमंदद्ध कहते हैं। परिघातों की संख्या कई होती है। परिघात या अपूर्ण शब्द का भौतिक विज्ञान या यन्त्रिका विज्ञान में प्रायः प्रयोग होता है, जहाँ यह किसी बिन्दु के सापेक्ष घुमाव पैदा करने वाले बल को मापता है। इसमें निम्न बिन्दु प्रमुख हैं–

परिघातों की संख्या, कल्पित मूल बिन्दु से परिघात, केन्द्रीय परिघातों के परिकलन, व्यक्तिगत श्रेणी–आवृत्ति श्रेणी, शेपर्ड के संशोधन, चार्लियर की शुद्धता जाँच, परिघातों पर आधारित कार्ल पिर्यसन के गुणांक, परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक, पृथुशीर्षत्व, पृथुशीर्षत्व की माप के रूप में कार्ल पियर्सन ने □□$_2$ और □$_2$ गुणांकों का प्रयोग किया है, अन्त में सारांश एवं अभ्यास के लिए प्रश्न जिससे पाठकों को इकाई का अध्ययन करने में सुविधा होगी।

22.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई में परिघात के मापने की विधि एवं प्रयोग पर चर्चा की जायेगी। इसका उद्देश्य पाठक को –

- परिघात क्या है?
- परिघात के उपयोग क्या हैं ?
- परिघात को मापने की विधि क्या है?
- प्रथुशीर्षत्व क्या है तथा इसकी उपयोगिताएँ क्या हैं?

22.3 परिघातों की संख्या

परिघातों की संख्या कई होती हैं, सामान्य रूप से किसी आवृत्ति विवरण में r वाँ केन्द्रीय परिघात –

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum f\left(X - \bar{X}\right)^r ; \; r = 0, 1, 2 \; \ldots\ldots (1)$$

$$= \frac{1}{N}\left[f_1\left(X-\bar{X}\right)^r + f_2\left(X_2 - \bar{X}\right)^r + \;........ f_n\left(X_n - \bar{X}\right)^r\right]$$

समीकरण (1) में $r=0$ रखने पर

$$M_0 = \frac{1}{N}\sum f\ (X - X)^0 = \frac{1}{N}\sum f = 1$$

क्योंकि $\sum f = N$ और $\left(X - \bar{X}\right)^0 = 1$

अतः $\mu_0 = 1.$

पुनः समीकरण (1) में $r=1$ रखने पर

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum f\ \left(X-\bar{X}\right) = 0 \text{ क्योंकि } \sum\left(X - \bar{X}\right) = 0$$

याद करें, समान्तर माध्य से निकाले ग्ये विचलनों का योग शून्य होता है।

पुनः $r=2$ रखने पर समीकरण (1) द्वारा

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f\ \left(X - \bar{X}\right)^2 = \sigma^2 = \text{variance}$$

इस प्रकार द्वितीय केन्द्रीय परिघात प्रसरण को व्यक्त करता है

पुनः $\mu_3 = \frac{1}{N}\sum f\left(X - \bar{X}\right)^3$

और

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum f\left(X - \bar{X}\right)^4$$

22.4 कल्पित मूल बिन्दु से परिघात

समान्तर माध्य $\bar{X}$ के बजाय हम किसी कल्पित बिन्दु (कल्पित माध्य) A से परिघातों का परिकलन कर सकते हैं। सामान्य रूप से कल्पित मूल बिन्दु A से r वाँ परिघात

$$\mu_r^1 = \frac{1}{N}\sum f\left(X - A\right)^r,\ r = 0, 1, 2, \ .... \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{N}\left[f_1\left(X_1 - A\right)^r + f_2\left(X_2 - A\right)^r + ... \ f_n\left(X_n - A\right)^r\right]$$

समीकरण (2) में $r=0$ रखने पर –

$$\mu_0^1 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^0$$

$$= \frac{1}{N}\sum f = 1$$

इसी समीकरण में $r = 1$ रखने पर –

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum fX - \sum fA\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum fX - \frac{A\sum f}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum fX - A$$

$$= \bar{X} - A$$

अतः $= \bar{X} = \mu_1 + A$

समीकरण (3) बहुत ही महत्वपूर्ण समीकरण है। हम यह देख सकते हैं कि यदि $A = O$ तो $\bar{X} = \mu_1$ अर्थात शून्य मूल बिन्दु से लिया गया परिघात μ_1 समान्तर माध्य को व्यक्त करता है।

समीकरण (2) में $r = 2, 3, 4, \ldots\ldots$ इत्यादि रखने पर

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^3$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^4$$

पाठक अब यह समझ चुके हैं कि समान्तर माध्य से लिए गये परिघात अथवा केन्द्रीय परिघात को μ (म्यू) तथा कल्पित बिन्दु A से लिए गए परिघात को μ^1 से लिखते हैं।

□ तथा □ में सम्बन्ध होता है। हम जानते हैं कि

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\left(X - \bar{X}\right)^r$$

इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\ \left(X - A + A - \bar{X}\right)^r \qquad (4)$$

समीकरण (3) से

$$\bar{X} = \mu_1 + A \text{ या } A - \bar{X} = u_1^{'}$$

अतः समीकरण (4) से

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\ \left[(X - A) - \mu_i\right] \qquad (5)$$

समीकरण (5) का द्विपद प्रमेय से विस्तार करने पर μ और μ' में संबंध निकल जाता है। हम यहाँ पर इस विस्तार को पूर्णरूपेण प्रस्तुत करने की कोई आवश्यकता महसूस नही कर रहे हैं। इस विस्तार का अन्ततः सामान्य रूप निम्न होग–

$$\mu_r = \mu_r - {}^rC_1\mu_{r-1}\ \mu_1 + {}^rC_2\ \mu_{r-1}\ \mu_1^2$$

इसी समीकरण (6) में $r = 2,3$ और 4 रखने पर

$$\mu_2 = \mu_2^{'} - \mu_1^{'2}$$

$$\mu_3 = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'}\ \mu_1^{'} + 2\mu_1^{'3}$$

$$\mu_4 = \mu_4^{'} - 4\mu_3^{'}\ \mu_1^{'} + 6\mu_2^{'}\ \mu_1^{'2} - 3\mu_1^{'4}$$

समीकरण (7) (8) (9) बहुत महत्वपूर्ण हैं तथा सदैव याद रखने योगय है। हम केन्द्रीय परिघातों से कल्पित मूल बिन्दु पर आधारित परिघातों की भी गणना कर सकते हैं। इसके लिए हमें सर्वप्रथम समान्तर माध्य की गणना करनी पड़ती है तथा कल्पित मूल बिन्दु की जानकारी रखनी पड़ती हैं। समीकरण (3) में हम जानते हैं कि $\bar{X} = \mu_1^{'} + A$ या $\mu_1^{'} = \bar{X} - A$ समीकरण (7) (8) (9) से

$$\mu_2^{'} = \mu_2 + \mu_1^{'2} \qquad (10)$$

$$\mu_3^{'} = \mu_3 + 3\ \mu_2 u_1^{'} + \mu_1^{'3} \qquad (11)$$

$$\mu_4^{1} = \mu_4 + 4\ \mu_3\mu_1^{1} + 6\ \mu_2\mu_1^{'2} + \mu_1^{'4} \qquad (12)$$

परिघात ज्ञात करने संबंधी प्रश्नों का हल करते समय कुछ बाते ध्यान देने योगय हैं–

22.5 केन्द्रीय परिघातों के परिकलन

केन्द्रीय परिघातों के परिकलन करते समय यदि समान्तर माध्य पूर्ण संख्या है तब तो सीधे सूत्र

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\ (X - \bar{X})^r$$

का प्रयोग करना चाहिए। हमें केन्द्रीय परिघातों के सूत्र को यहाँ फिर देख लें।

22.5.1 व्यक्तिगत श्रेणी

$$\mu_1 = \frac{\sum (X - \bar{X})}{N} = 0 = \frac{\sum d}{N}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum d^2}{N} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{\sum (X - \bar{X})^3}{N} = \frac{\sum d^3}{N}$$

$$\mu_4 = \frac{\sum (X - \bar{X})^4}{N} = \frac{\sum d^4}{N}$$

22.5.2 आवृत्ति श्रेणी

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\Sigma f(X - \overline{X}) = \frac{\Sigma fd}{N} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma f(X - \overline{X})^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\Sigma f(X - \overline{X})^3 = \frac{\Sigma fd^3}{N}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\Sigma f(X - \overline{X})^4 = \frac{\Sigma fd^4}{N}$$

यदि समान्तर माध्य दशमलव में आता है तो सीधे सूत्र का प्रयोग करके केन्द्रीय परिघातों का परिकलन बहुत कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में हम पहले किसी कल्पित माध्य (A) से परिघात μ_r' ज्ञात करते हैं और फिर इनके आधार पर केन्द्रीय परिघातों की गणना कर ली जाती है। हम जानते हैं कि किसी कल्पित मूल बिन्दु A से परिघात

$$\mu r' = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^r$$

यदि

$$dx = X - A \quad \text{तो} \quad \mu r' = \frac{1}{N}\Sigma f(dx)^r$$

22.5.3 व्यक्तिगत श्रेणी

$$\mu_1^{'} = \frac{1}{N}\Sigma(X-A) = \frac{\Sigma dx}{N}$$

$$\mu_2^{'} = \frac{1}{N}\Sigma(X-A)^2 = \frac{\Sigma dx^2}{N}$$

$$\mu_3^{'} = \frac{1}{N}\Sigma(X-A)^3 = \frac{\Sigma dx^3}{N}$$

$$\mu_4^{'} = \frac{1}{N}\Sigma(X-A)^4 = \frac{\Sigma dx^4}{N}$$

22.5.4 आवृत्ति श्रेणी

$$\mu_1^{'} = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A) = \frac{1}{N}\Sigma fdx$$

$$\mu_2^{'} = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^2 = \frac{1}{N}\Sigma fdx^2$$

$$\mu_3^{'} = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^3 = \frac{1}{N}\Sigma fdx^3$$

$$\mu_4^{'} = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^4 = \frac{1}{N}\Sigma fdx^4$$

22.6 परिघातों के संबंध में निम्न बातें महत्वपूर्ण हैं

परिघातों के संबंध में निम्न बातें भी काफी महत्वपूर्ण हैं –

(1) $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$ तथा समान्तर माध्य $\overline{X} = A + \mu_1^1$

(2) यदि सममित वितरण है तो हम जानते हैं कि ऐसे वितरण में आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती हैं उसी क्रम में घटती हैं। सममित वितरण में समान्तर माध्य से विचलन लिया जाए और इस विचलन का विषम घात (1, 3, 5, 7 ..... इत्यादि) किया जाए तो धनात्मक

विचलन और ऋणात्मक विचलन एक दूसरे के बराबर होते हैं। इस कारण μ_1, μ_3, μ_5 इत्यादि का मान शून्य होता है अर्थात् –

$$\Sigma f(X-\overline{X}) = \Sigma f(X-\overline{X})^3 = \Sigma f(X-\overline{X})^5 = ... = 0$$

या

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 .... = 0$$

या

$H_{2r+1} = 0$ जहाँ $r = 0, 1, 2, 3.....$

(3)यदि आवृत्ति विचरण (वर्गीकृत) में हम पैमाने का परिवर्तन (Change of scale) करें अर्थात् यदि

$$dx' = X - A/h$$

या $X = A + hdX'$

और $\overline{X} = A + hd\overline{X}'$

इस प्रकार

$$\mu_r = \frac{1}{N}\Sigma f\left(X-\overline{X}\right)^r$$

$$= h^r \frac{1}{N}\Sigma f\left(dX' - d\overline{X}'\right)$$

(4) हम जानते हैं कि $\mu_2 = \sigma^2 =$ प्रसरण तथा

$$\mu_r' = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^2 = \text{विचलन वर्ग माध्य}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

चूँकि μ_1' एक वास्तविक संख्या है, अतः इसका वर्ग एक गैर ऋणात्मक राशि होगी। इस प्रकार

$\mu_2 = \mu_2'$ – एक गैर ऋणात्मक राषि

अतः $\mu_2 < \mu_2'$

या प्रसरण $\leq$ विचलन–वर्ग माध्य

या Variance ≤ Mean square deviation

या S.D. ≤ Root mean square deviation

उदाहरण –1. किसी चर के 10 पदों पर आधारित प्रथम चार परिघात क्रमशः 5, 30, 40 और 50 हैं। समान्तर माध्य, प्रसरण μ_3 तथा μ_4 का परिकलन कीजिए।

हल –

$$A=10,\mu_1^{'}=5,\mu_2^{'}=30,\mu_3^{'}=40,\mu_4=50$$

समान्तर माध्य $\overline{X}=A+\mu_1^{'}=10+5=15$

प्रसरण $\mu_2=\mu_2^{'}-\mu_1^{'2}=30-5^2=30-25=5$

$$\mu_3=\mu_3^1-3\mu_2^1\mu_1^1+2\mu_1^{1^3}$$

$$=40-3\times30\times5+2(5)^3$$

$$=40-450+2\times125=290-450=160$$

$$\mu_4=\mu_4^1-4\mu_3^1\mu_1^1+6\mu_2^1+6\mu_2^1\mu_1^2-3\mu_1^{1^4}$$

$$=50-4\times40\times5+6\times30\times25-3\times625$$

$$=50-800+4500-1875$$

$$=4550-2675$$

$$=1875$$

उदाहरण – 2. यदि किसी श्रेणी का समान्तर माध्य 7 और प्रथम चार केन्द्रीय परिघात क्रमशः 0ए .16ए 64 और 162 हो तो – (1) कल्पित मूल बिन्दु 5 पर आधारित और (2) शून्य पर आधारित परिघातों की गणना कीजिए।

हल –

(1) $\overline{X}=A+\mu_1^{'}$

या $\mu_1^{'}=\overline{X}-A=7-5=2$

$$\mu_2^{'}=\mu_2+\mu_1^{'2}=16+4=20$$

$$\mu_3^{'}=\mu_3+3\mu_2\mu_1^{'}+\mu_1^{'3}$$

$$= -64 + 3\times16\times2 + (2)^3$$

$$= -64 + 96 + 8 = 40$$

$$\mu_4^{'} = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1^{'} + 6\mu_2\mu_1^{'2} - \mu_1^{'4}$$

$$= 162 + 4\times(-64)\times(2) + 6\times16(2)^2 + (2)^4$$

$$= 162 - 512 + 384 + 16$$

$$= 562 - 512 = 50$$

इस प्रकार मूल बिन्दु 5 पर आधारित प्रथम चार परिघात 2, 20, 40 और 50 है।

(ii) $\overline{X} = 7, A = 0$

अतः $\mu_1^{'} = \overline{X} - A = 7 - 0 = 7$

$$\mu_2^{'} = \mu_2 + \mu_1^{'2}$$

$$= 16 + (7)^2 = 16 + 49 = 65$$

$$\mu_3^{'} = \mu_3 + 3\mu_2\mu_1^{'} + \mu_1^{'3}$$

$$= -64 + 3\times16\times7 + (7)^3$$

$$= -64 + 336 + 343 = 615$$

$$\mu_4^{'} = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1^{'} + 6\mu_2\mu_1^{'2} - \mu_1^{'4}$$

$$= 162 + 4(-64)\times7 + 6\times16\times(7)^2 + (7)^4$$

$$= 162 - 1792 + 3136 + 2401$$

$$= 5699 - 1792$$

$$= 3907$$

22.7 शेपर्ड के संशोधन

वर्गीकृत श्रेणी में परिघातों की गणना करते समय वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु को ही चर (X) मानते हैं। यह मान लिया जाता है कि आवृत्तियों का जमाव वर्ग के मध्य बिन्दु पर ही होता है। यह मान्यता सममित वितरण में लग्भग सही होता है लेकिन सामान्यतः या असममित वितरण में ऐसा मानना उचित नहीं होता और परिणामस्वरूप कुछ त्रुटि जिसे समूहन त्रूटि (grouping error) कहते हैं, परिघातों की ग्णना में विद्यमान हो जाती है। इस विभ्रम या

त्रुटि को दूर करने के लिए शेपर्ड (W.F. Sheppard) ने निम्न सूत्रों का प्रयोग किया और इसे ही शेपर्ड के संशोधन कहते हैं –

$$\mu_2 \text{ (संशोधित) } = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$$

$$\mu_3 \text{ (संशोधित) } = \mu_3$$

$$\mu_4 \text{ (संशोधित) } = \mu_4 - \frac{1}{2}h^2\mu_2 + \frac{7}{240}h^4$$

हम जानते हैं कि μ_1 सदैव शून्य होता है। μ_1 और μ_3 का संशोधन इसलिए भी आवष्यक नहीं है कि इनमें विचलनों के धनात्मक और ऋणात्मक चिन्ह बने रहते हैं। अतः अषुद्धि क्षतिपूरक प्रकृति के कारण लगभग स्वतः समाप्त हो जाती है।

शेपर्ड का संशोधन सममित या साधारण सममित आवृत्ति वंटन में ही उपयुक्त होता है। J या $\cup$ आकृति वाले आवृत्ति वंटन में यह उपयुक्त नहीं होता। साथ ही यदि आवृत्तियों की संख्या बहुत बड़ी हो (1000 से अधिक) तभी यह संशोधन उपयुक्त होता है।

22.8 चार्लियर की शुद्धता जाँच (Charlier's check)

चालिर्ययर की शुद्धता जाँच की चर्चा हमने पूर्व के अध्यायों में की है। हमें यह भी ज्ञात है कि 'चार्लियर–जाँच' के द्वारा गणना क्रिया के शुद्धता की परीक्षा होती है। परिघातों के संबंध में अगर निम्न शर्त पूरी होती है तो गणना–क्रिया में कोई अशुद्धि नहीं है –

परिघात	जाँच–सूत्र
प्रथम	$\Sigma f(dx+1) = \Sigma fdx + N$
द्वितीय	$\Sigma f(dx+1)^2 = \Sigma fdx^2 + 2\Sigma fdx + N$
तृतीय	$\Sigma f(dx+1)^3 + \Sigma fdx^3 + 3\Sigma fdx^2 + 3\Sigma fdx + N$
चतुर्थ	$\Sigma f(dx+1)^4 = \Sigma fdx^4 + 4\Sigma fdx^3 + 6\Sigma fdx^2 + 4\Sigma fdx + N$

उपर्युक्त जाँच–सूत्र, परिघात ज्ञात करने की अप्रत्यक्ष या लघुरीति पर आधारित है। यदि प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग कर रहे हैं तो $dx(X-A)$ की जगह X रखा जाएगा।

22.9 परिघातों पर आधारित कार्ल पिर्यसन के गुणांक

प्रथम चार केन्द्रीय परिघातों पर आधारित चार गुणांक ों की चर्चा कार्ल पियर्सन ने किया है। इन गुणांकों का प्रयोग तुलनात्मक अध्ययन में सुविधापूर्वक किया जाता है। व्यवहार में विषमता एवं पृथुषीर्षत्व के माप में ये गुणांक बहुत उपयोगी है। ये बीटा और गामा गुणांक निम्न हैं – $\beta = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$Y_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{क्योंकि} \quad \mu_2 = \sigma^2$$

$$Y_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

कभी–कभी अल्फा (alfa) गुणांक की भी चर्चा की जाती है। अल्फा गुणांक निम्न हैं –

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = 0, \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1} = \gamma_1, \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \beta_2$$

22.10 परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक

परिघातों पर आधारित कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$S_k = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

ख्पाठक यहाँ धान दें, पूर्व में हमने कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक के लिए हमने J का प्रयोग किया है। यहाँ पर S_k का प्रयोग इसलिए कर रहे हैं कि दोनों सूत्रों में अन्तर आसानी से हो सके।,

यहाँ β_1 और β_2 कार्ल पियर्सन के गुणांक है। इस सूत्र द्वारा धनात्मक विषमता होगी। यदि तथा ऋणात्मक विषमता होगी यदि $\overline{X} > Z$ तथा ऋणात्मक विषमता होगी यदि $\overline{X} < Z$। यदि $S_k = 0$ तो या तो $\beta_1 = 0$ या $\beta_2 + 3 = 0$ या $\beta_2 = -3$

लेकिन $\beta_2 = \mu^4 / \mu_2^2$ जहाँ $\mu_4 = \frac{1}{N} \Sigma f(x - \bar{x})^4 > 0$

और μ_2 प्रसारण है जिसका वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता अतः –

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} > 0$$

इस प्रकार यदि $S_k = 0$ तो $\beta_1 = 0$ या $\mu_3 = 0$। इस प्रकार सममित वितरण में $\beta_1 = 0$। अतः β_1 को विषमता के माप के रूप में प्रयोग किया जाता है। लेकिन इसकी एक गम्भीर सीमा (limitation) है। चूँकि $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ जहाँ तो धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है लेकिन μ_3^2 सदैव धनात्मक होग। इसी प्रकार μ_2^3 भी धनात्मक होगा। इस प्रकार β_1, विषमता की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) को बताने में असमर्थ होता है। इस दोष को दूर करने के लिए कार्ल पियर्सन के गमा गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

$$\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

इस प्रकार विषमता का चिन्ह μ_3 पर निर्भर हो जाता है। यदि μ_3 ऋणात्मक होग तो विषमता भी ऋणात्मक होगी और यदि μ_3 धनात्मक होग तो विषमता भी धनात्मक होगी।

22.11 पृथुषीर्षत्व

हमने पूर्व में ही स्पष्ट किया है कि किसी आवृत्ति वंटन की संपूर्ण विषेषताओं की जानकारी करने के लिए चार प्रकार के माप आवष्यक हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप, अपकिरण की माप और विषमता की माप, अत्यन्त महत्वपूर्ण होते हुए भी किसी वंटन की सम्पूर्ण कहानी को नहीं कह पाते। इसके लिए हमें चौथी माप अर्थात् पृथुषीर्ष्त्व की माप की जानकारी आवष्यक है। पृथुषीर्षत्व को कार्ल पियर्सन वक्र की उत्तलता कहते हैं। विषमता से हमें यह जानकारी प्राप्त होती है कि वंटन सममित है अथवा असममित है। दूसरे शब्दों में विषमता आवृत्ति वक्र की दायीं अथवा बाँयी पूंछ की स्थिति की जानकारी प्रस्तुत करती है। पृथुषीर्षत्व हमें वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन या चपटेपन की जानकारी प्रदान करता है।

किसी आवृत्ति वंटन का वक्र नुकीला अथवा चपटा हो सकता है। यदि हम प्रसामान्य वक्र को आधार माने तो पृथुषीर्षत्व हमें प्रसामान्यता से अलगाव की जानकारी देते हे। इसकी माप से हमें श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों के जमाव का ज्ञात प्राप्त होता है। यदि मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव सामान्य है तो वह आवृत्ति वक्र मध्यम शीर्ष वाला या प्रसामान्य कहलाता है। यदि मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव अत्यधिक सघन है तो वक्र नुकीले

शीर्ष वाला होता है। इसके विपरीत यदि केन्द्र में आवृत्तियों का जमाव कम है तो वक्र चपटे शीर्ष वाला कहलाता है। चित्र में वक्र C चपटे शीर्ष वाला वक्र है। पृथुषीर्षत्व आकृति (नुकीलेपन अथवा चपटेपन) को मापता है।

22.12 पृथुषीर्षत्व की माप के रूप में कार्ल पियर्सन ने □□$_2$ और □$_2$ गुणांकों का प्रयोग किया है।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \text{ and } \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

यदि □$_2$ = 3 या □$_2$ = 0 तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला (meso-kurtic) है।

यदि □$_2 > 3$ या □$_2 > 0$ तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला (lepto-kurtic) है।

यदि □$_2 > 3$ या □$_2 < 0$ तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

उदाहरण – 1. यदि किसी वंटन में समान्तर माध्य $(\overline{X}) = 1$ हो और □$_2$, □$_3$ तथा □$_4$ का मान क्रमशः 3, 0 और 27 हो तो इनकी सहायता से विषमता तथा पृथुषीर्षत्व की जाँच कीजिए।

हल –कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0 \text{ or } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$$

अतः वंटन सममित है या $\overline{X} = M = Z$

कार्ल पियर्सन का पृथुषीर्षत्व माप –

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{27}{(3)^2} = \frac{27}{9} = 3$$

या $\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$

चूँकि □$_2 = 0$ अतः दिया हुआ वंटन मध्यम शीर्ष वाला या प्रसामान्य है।

चूँकि □$_3 = 0$ और □$_2 = 3$ अतः वंटन समान्तर माध्य। और प्रमाप विचलन $\sqrt{3} = 1.732$ के साथ प्रसामान्य है।

उदाहरण. 2. यदि □$_2 = 120$ और □$_4 = 36000$ तो वंटन का स्वरूप ज्ञात कीजिए।

हल – वंटन के स्वरूप के लिए हमें पृथुषीर्षत्व की माप करनी होगी।

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{36000}{120\times120}=2.5 \text{ or } \gamma_2=\beta_2-3=-0.5$$

चूँकि $\beta_2<3$ or $\gamma_2<0$

अतः वटन चपटे शीर्ष वाला है।

उदाहरण – 3. यदि एक सममित वंटन में प्रमाप विचलन हो तो चतुर्थ केन्द्रीय परिघात का क्या मूल्य हो ताकि वंटन (i) नुकीले शीर्ष वाला हों।

(ii) मध्यम शीर्ष वाला हो (iii) चपटे शीर्ष वाला हो।

हल – $\sigma=4$ अतः $\sigma^2=\mu^2=(4)^2=16$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

(i) नुकीले शीर्ष वाले वंटन के लिए $\beta_2>3$ होना चाहिए।

या $\frac{\mu_4}{\mu_2^2}>3$ या $\mu_4>3\mu_2^2$

या $\mu_4>3\times(16)^2$

$>3\times256>768$

(ii) मध्यम शीर्ष वाले वंटन में –

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=3$$

या $\mu_4=3\mu_2^2$

$=3\times(16)^2$

$=3\times256=768$

(iii) चपटे शीर्ष वाले वंटन में –

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}<3$$

या $\mu_4<3\mu_2^2$

$\mu_4<3\times256$

<768

उदाहरण – 1. निम्न वितरण की कुकुदता गुणांक ज्ञात कीजिए।

वर्गन्तर	0.4	4.8	8.12	12.16	16.20
आवृत्ति	1	3	12	8	6

वर्गान्तर	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	$(x-\overline{x})^4$	$f(x-\overline{x})^4$
0.4	2	1	.10	100	10000	10000
4.8	6	3	.6	36	1296	3888
8.12	10	12	.2	4	16	192
12.16	14	8	2	4	16	128
16.20	18	6	6	36	1296	7776

$$M_4 = \frac{\Sigma f(x-\overline{x})^4}{N} = \frac{21984}{30} = 732.80$$

□ का मान $= 4.06$

इसे कुकुदता के सूत्र में रखने पर

कुकुदता गुणांक $= \frac{M_4}{\sigma^4} = \frac{732.80}{(4.06)^4} = \frac{732.80}{271.71} = 2.70$

कुकुदता का मान चूँकि 3 से कम है अतः दिये हुए वितरण का आवृत्ति वक्र चपटे शीर्ष होगा।

22.13 सारांश

$\Rightarrow$ परिघात किसी बिन्दु के सापेक्ष घुमाव पैदा करने वाले बल को मापता है।

$\Rightarrow$ परिघातों का परिकलन समान्तर माध्य अथवा किसी कल्पित माध्य से किया जा सकता है।

$\Rightarrow$ परिघात –

r वाँ केन्द्रीय परिघात –

$$\mu_r = \frac{1}{N}\Sigma f\left(X-\overline{X}\right)^r$$

$\mu_0 = 1, \mu_1 = 0, \mu_2 = \sigma^2 =$ प्रसरण

किसी कल्पित मूल बिन्दु । से परिघात

$$\mu_r' = \frac{1}{N}\Sigma f\,(X-A)^r$$

$$\overline{A} = A+\mu_1' \quad \text{या} \quad \mu_1' = \overline{X}-A$$

$$\mu_2' = \mu_2 + \mu_1'^2$$

$$\mu_3' = \mu_3 + 3\mu_2\,\mu_1' + \mu_1'^3$$

$$\mu_4' = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1' + 6\mu_2\mu_1'^2 + \mu_1'^4$$

और

$$\mu_1 = 0;\ \ \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\mu_3 = \mu_3^1 - 3\mu_2^1\,\mu_1^1 + 2\mu_1'$$

$$\mu_4 = \mu_4^1 - 4\mu_3^1\,\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$

शेपर्ड संषोधन

$$\mu_2 \ \ (\text{संशोधित}) \ \ = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$$

$$\mu_4 \ \ (\text{संशोधित}) \ \ = \mu_4 - \frac{1}{2}\mu_2\,h^2 + \frac{7}{240}h^4$$

परिघातों पर आधारित कार्ल पियर्सन के गुणांक

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2},\ \ \gamma_1 = \sqrt{\beta_1}\ \text{ए}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3\,.$$

⇒ प्रथुषीर्षत्व की माप द्वारा हमें वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन या चपटेपन की जानकारी प्राप्त होती है।

⇒ इसे कार्ल पियर्सन द्वारा वक्र की उत्तलता भी कहते हैं।

⇒ इसकी माप से हमें श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों के जमाव का ज्ञात प्राप्त होता है। इसे β_2, γ_2 गुणांकों द्वारा चिन्हित करते हैं।

$\beta_2 = 3$ या $\gamma_2 = 0$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला है।

$\beta_2 > 3$ या $\gamma_2 > 0$ तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला है।

$\beta_2 < 3$ या $\gamma_2 < 0$ तो वक्र चपटे शीर्ष वाला है।

22.14 शब्दावली

22.14 अभ्यास के लिये प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(1) विषमता का सम्बन्ध किस परिघात से है–

(i) प्रथम परिघात (ii) द्वितीय परिघात

(iii) तृतीय परिघात (iv) इनमें से किसी से नहीं

(2) प्रथम केन्द्रिय परिघात का मूल्य होता है–

(i) एक (ii) शून्य

(iii) एक से अधिक (iv) इनमें से कोई नहीं

(3) वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन या चपटेपन की जानकारी देता है–

(i) पृथुशीर्षत्व (ii) परिघात

(iii) विषमता (iv) समान्तर माध्य

(4) यदि β_2 झ 3 है तो वक्र कैसा होग

(i) नुकीले शीर्ष वाला (ii) चपटै शीर्ष वाला

(iii) मध्यम शीर्ष वाला (iv) इनमें से कोई नहीं

(5) पृथुशीर्वत्व को वक्र की उत्तलता किसने कहा–

(i) केली (ii) बाउले

(iii) कार्ल पियर्सन (iv) इनमें से कोई नहीं

उत्तर : **1-**(iii) **2-**(ii) **3-**(i) **4-**(i) **5-**(iii)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें –

(1) मध्यम शीर्ष वाला वक्र प्रसामान्य वक्र कहलाता है।

(2) मध्यम शीर्ष वाले वक्र के सन्दर्भ में $\beta_2 < 3$ होता है।

(3) द्वितीय केन्द्रिय परिघात प्रसरण को कहते है।

(4) एक सममित वितरण के सभी विषम परिघातों का मूल्य हमेशा शुन्य से अधिक होता है।

(5) चतुर्थ केन्द्रित परिघात पृथुशीर्षत्व की माप करता है।

उत्तर : **1-**(T) **2-** (F) **3-**(T) **4-**(F) **5-**(T)

प्र0 1 किसे कहते हैं? केन्द्रीय परिघातों को मापने की विधि स्पष्ट कीजिए।

प्र0 2 प्रथुषीर्षत्व की व्याख्या कीजिए। विषमता तथा प्रथुषीर्षत्व में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

प्र0 3 कार्ल पियर्सन के बीटा तथा गमा गुणांक ों की व्याख्या कीजिए।

प्र0 4 निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए।

(1) कल्पित मूल बिन्दु से परिघात

(2) शेपर्ड संषोधन

(3) परिघातों पर आधारित विषमता माप

(4) सममित तथा असममित वितरण

प्र0 5 किसी पद वितरण के मूल्य 3 से लिये गये प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय परिघातों का मूल्य क्रमषः 2ए 50 तथा 30 है। शून्य से लिये गये इन प्रथम तीनों परिघातों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उ0 $\mu_1' = 5, \mu_2' = 31 \ \ \mu_3' = 201.$

प्र0 6 उपरोक्त प्रश्न में पद वितरण का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

उ0 □$_2$ = variance = 6.

प्र0 7 निम्न समंकों के माध्य पर आधारित प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय परिघातों की गणना कीजिए।

Size (X)	2	4	8	10
आवत्ति (f)	10	15	8	17

उ0 $\mu_1 = 0, \ \mu_2 = 8.6775, \ \mu_3 = 10.996$

प्र0 8 निम्न समंकों β_1 से तथा β_2 का मान ज्ञात कीजिए तथा परिणाम पर टिप्पणी कीजिए

प्राप्तांक	20.30	30.40	40.50	50.60	60.70	70.80	80. 90
विद्यार्थी सं0	4	7	10	20	4	3	2

प्र0 9 किसी वितरण में मूल्य 4 से लियचे ग्ये प्रथम चार परिघातों का मूल्य क्रमषः 1, 5, 17, -30 और 108 है। केन्द्रीय परिघातों, β_1 तथा β_2 का मान ज्ञात कीजिए साथ ही ;पद्ध शून्य से तथा ;पपद्ध मूल्य 2 से परिघातों की गणना कीजिए

उ0 9 [□$_1$ = 0, □$_2$ = 14.75, □$_3$ = 39.75, □$_4$ = 142.3125, □$_1$ = 0.4924, □$_2$ = 0.7541, moment about the origin.

$-\mu_1' = 2.5, \mu_2' = 21, \mu_3' = 166, \mu_4' = 1132$ about

$x = 2 - \mu_1' = 0.5, \mu_2' = 15, \mu_3' = 62, \mu_4' = 244$]

प्र0 10 निम्न समंकों से □$_1$ तथा □$_2$ की गणना करते हुए विषमता तथा प्रथुषीर्षत्व की जाँच कीजिए

(i) $\mu_1 = 1, \mu_2' = 4, \mu_3' = 10$ और $\mu_4' = 46$

(ii) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2.5, \mu_3 = 0.7, \mu_3 = 18.75$

(iii) $\mu_2 = 140, \mu_3 = 148, \mu_4 = 6030$

(iv)

वर्गान्तर	2.3	3.4	4.5	5.6	6.7	7.8	8.9
आवृत्ति	5	38	65	92	70	40	10

उ0(i) $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$ वितरण पूर्णतया सममित एवं मध्यका शीर्ष वाला है।

(ii) $\gamma_1 = 0.177, \beta_2 = 3$ वितरण लगभग सममित एवं मध्यका शीर्ष वाला है।

(iii) $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 0.0893,\ \beta_2 = 0.3076$ । वितरण लग्भग सममित एवं चपटे शीर्ष वाला है।

(iv) $\beta_1 = 0.0001, \beta_1 = 0.031, \beta_2 = 2.44$ यह अल्प विषमता एवं चपटे शीर्ष वाला वंटन है।

प्र0 11 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिये विषमता गुणांक एवं कुकुदता की गणना कीजिए

X:	4.5	14.5	24.5	34.5	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5
f:	1	5	12	22	17	9	4	3	1	1

उ0 ((i) + 0.508, (ii) 3.79)

प्र0 13 एक अर्थशास्त्री के पास निम्न आंकड़ें हैं –

$N = 100\ \Sigma f.dx = 50\ \ \Sigma f.dx^2 = 1967.2$

$\Sigma fdx^3 = 2925.8$ $\Sigma fdx^4 = 86650.2$

कुकुदता गुणांक ज्ञात कीजिए –

उ0 13 $(\beta_2 = 2.22)$

22.17 संदर्भ ग्रन्थ

- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह ;2002द्ध – अर्थशास्त्र ीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।
- J.K. Sharma (2008) – Business Statistics, Dorling Kinderseley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी (2010) – परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई : 23 प्रतीपगमन विश्लेषण

23.1 प्रस्तावना

सहसम्बन्ध में हमें दो चर मूल्यों के बीच आश्रितता का संख्यामक ज्ञान होता है। मोटे तौर पर हम यह कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध गुणांक दो श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध की मात्रा को तो बताता है परन्तु एक श्रेणी के निश्चित चर–मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के सम्बन्धित चर मूल्य का अनुमान नहीं बताता। प्रतीपगमन विश्लेषण द्वारा हम एक निश्चित चर मूल्य के सापेक्ष आश्रित श्रेणी के चर मूल्य का अनुमान लग सकते हैं। यदि एक चर मूल्य का पता हो तो दूसरे चर मूल्य का पता जिस सांख्यिकीय रीति से हम लगते हैं उसे प्रतीपगमन कहते हैं।

प्रतीपगमन सांख्यिकीय विश्लेषण की वह विधि है जिसके द्वारा एक चर के किसी ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का सम्भाव्य मूल्य प्रतीपगमन समीकरण की सहायता से अनुमानित किया जा सकता है। सांख्यिकी के आंग्ल भाषा के 'रिग्रेसन' शब्द के लिए हिन्दी भाषा में 'समाश्रयण' शब्द का प्रयोग किया जाता है, यद्यपि कुछ लेखकों ने 'समाश्रयण' शब्द के स्थान पर 'प्रतीपगमन' शब्द प्रयोग किया है। जीव–विज्ञान और भू–विज्ञान में 'रिग्रेशन' शब्द के लिए 'प्रतिक्रमण' शब्द प्रयोग किया जाता है। प्रतीपगमन (या समाश्रयण) शब्द का अर्थ है, वापस लौटना या पीछे की ओर मुड़ना या घूमना । सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम सन् 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने अपने शोध लेख – ''पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन'' में किया था। उक्त शोध–लेख में उन्होंने लग्भग एक हजार पिताओं और उनके पुत्रों की ऊँचाई या कद में सम्बन्ध का अध्ययन किया और कुछ बहुत ही रोचक निष्कर्ष निकाला। ये निष्कर्ष है :

(i) लम्बे पिताओं के लम्बे और नाटे पिताओं के नाटे पुत्र होते हैं।

(ii) लम्बे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा कम होती है।

(iii) नाटे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा अधिक होती है।

(iv) गाल्टन ने यह पाया कि 'जाति की माध्य लम्बाई से पिताओं की माध्य लम्बाई में विचलन की अपेक्षा जाति की माध्य लम्बाई से पुत्रों की माध्य लम्बाई में विचलन

कम होता है। जब पिता माध्य लम्बाई से अधिक या कम लम्बे होते हैं तो पुत्रों की लम्बाई माध्य की ओर समाश्रयित या पीछे की ओर मुड़ जाती है।

इस प्रकार पुत्रों की ऊँचाई के सामान्य माध्य के निकट वापस जाने की इस प्रवृत्ति को ही फ्रांसिस गल्टन ने 'मध्यमता की ओर प्रतीपगमन' कहा था। गाल्टन ने इस प्रवृत्ति का प्रयोग एक ज्ञात चर (पिता की ऊँचाई) के तत्संवादी आश्रित चर (पुत्र की ऊँचाई) का सर्वोत्तम अनुमान लगने के लिए किया था।

आधुनिक समय में प्रतीपगमन का उपयोग केवल पितृग्त विशेषताओं के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसकी सामाजिक आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में व्यावहारिक उपयोग्िता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों के पद मूल्यों में सामान्य माध्य की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति होती है – यही प्रतीपगमन है। प्रतीपगमन की सहायता से हम एक चर मूल्य पर आधारित दूसरा चर मूल्य बड़ी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। दो सम्बन्धित श्रेणियों में प्रतीपगमन का अध्ययन बिन्दु–रेखीय ढंग से किया जाता है। विक्षेप चित्र पर सर्वोपयुक्त रेखाएँ खींची जाती हैं। इन्हें प्रतीपगमन रेखाएँ कहते हैं।

23.2 उद्देश्य

(i) प्रतीपगमन को समझना तथा प्रतीपगमन रेखाएँ प्राप्त करना

(ii) प्रतीपगमन गुणांक के अभिलक्षण या विशेषताएँ एवं उनके उपयोग।

23.3 प्रतीपगमन की परिभाषा

प्रतीपगमन की कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ निम्न है :

1) ''आँकड़ों की मूल इकाइयों के रूप में, दो या अधिक चरों के बीच माध्य सम्बन्ध का माप समाश्रयण कहलाता है।''– मारिस मेयर्स ब्लेयर

2) ''प्रायः यह ज्ञान करना अधिक महत्त्वपूर्ण होता है कि (दो या अधिक घटनाओं में) वास्तविक सम्बन्ध क्या है जिससे एक चर–मान (स्वतंत्र चर–मान) के ज्ञान के आधार पर दूसरे चर–मान (आश्रित चर–मान) का आकलन किया जा सके; और इस प्रकार की दशा में प्रयोग की जाने वाली उपयुक्त सांख्यिकीय प्रविधि समाश्रयण–विश्लेषण कहलाती है।''– वालिस एवं रॉबर्टस

23.4 उपयोगिता / महत्त्व

उपर्युक्त परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि प्रतीपगमन विश्लेषण एक चर के अज्ञात मान का दूसरे चर के ज्ञात मान से आकलन या पूर्वकथन के लिए किया जाता है। यह एक बहुत ही उपयोग सांख्यिकीय उपकरण है जिसका प्रयोग प्राकृतिक और सामाजिक दोनों विज्ञानों में किया जाता है।

आर्थिक व व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन की अत्यधिक व्यावहारिक उपयोगिता है। प्रबन्ध–अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियंत्रण–उपकरण के रूप में प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रविधि के आधार पर उचित व्यावसायिक निर्णय लेना सरल हो जाता है तथा उस निर्णय को व्यवहारिकता की कसौटी पर परखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, इसके द्वारा यह अनुमान लगया जा सकता है कि यदि किसी वस्तु के उत्पादन या उसकी पूर्ति में निश्चित मात्रा में वृद्धि या कमी हो जाए तो उसके मूल्य में संभावित परिवर्तन कितनी मात्रा में होग। इसी प्रकार यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि सामान्य मूल्य–स्तर में निश्चित परिवर्तन कितनी मात्रा में होग। इसी प्रकार यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि सामान्य मूल्य–स्तर में निश्चित वृद्धि होने पर जीवन–निर्वाह व्यय कितना बढ़ जाएगा। मूल्यों के आधार पर माँग का, वर्षा की मात्रा, बीज, खाद आदि के आधार पर कृषि उपज का तथा पूँजी के आधार पर लाभ आदि का अनुमान लगने में प्रतीपगमन विश्लेषण बहुत सहायक सिद्ध होता है। व्यवसाय की सफलता के लिए इस प्रकार के अनुमान अनिवार्य होते हैं परन्तु ये अनुमान तभी अधिक यथार्थ होते हैं जब दोनों श्रेणियों में परस्पर घनिष्ठ सहसम्बन्ध हो। प्रतीपगमन विश्लेषण की सहायता से चर–मूल्यों में सह–सम्बन्ध की मात्रा व दिशा का माप भी किया जा सकता है।

समाजशास्त्रीय अध्ययन में तथा आर्थिक आयोजन के क्षेत्र में जनसंख्या पुर्वानुमान, जन्म–दरों, मृत्यु–दरों और इसी प्रकार के अन्य चरों के पुर्वानुमान बड़े उपयोगी होते हैं।

23.5 प्रतीपगमन के प्रकार

प्रतीपगमन को नापने की विधियाँ मुख्यतः तीन प्रकार की होती हैं –

(i) सरल एवं बहुगुणी प्रतीपगमन

सरल प्रतीपगमन में एक चर स्वतंत्र तथा एक चर आश्रित होता है जैसे मूल्य तथा माँग के मध्य सम्बन्ध में मूल्य स्वतंत्र चर है तथा माँग आश्रित। बहुगुणी प्रतीपगमन में एक से अधिक स्वतंत्र चर के सापेक्ष केवल एक ही आश्रित चर होता है जैसे किसी वस्तु की कीमत, उपभोक्ता की आय तथा उसकी रुचि इन तीनों स्वतंत्र चरों का प्रभाव उस वस्तु की माँग पर पड़ेगा अतः यहाँ वस्तु की माँग एक आश्रित चर है।

(ii) कुल एवं आंशिक प्रतीपगमन

कुल प्रतीपगमन में आश्रित चर पर प्रभाव जानने के लिए सभी स्वतंत्र चरों को विचार में लिया जाता है जबकि आंशिक प्रतीपगमन में एक या दो स्वतंत्र चरों पर ही विचार किया जाता है तथा शेष को छोड़ दिया जाता है।

(iii) रेखीय एवं अरेखीय प्रतीपगमन

जब स्वतंत्र चर तथा आश्रित चर में परस्पर सम्बन्धों को प्रदर्शित करने हेतु सीधी रेखा का प्रयोग किया जाता है तब यह 'रेखीय प्रतीपगमन' कहलाता है तथा जब यह प्रदर्शन वक्रीय रेखा द्वारा किया जाता है तो यह अरेखीय प्रतीपगमन कहलाता है।

सामान्यतः प्रतीपगमन की विधियों में सरल रेखीय प्रतीपगमन सर्वाधिक उपयुक्त मानी जाती है जिसमें प्रतीपगमन रेखाओं द्वारा स्वतंत्र एवं आश्रित चरों का परस्पर सम्बन्ध दर्शाया जाता है।

23.6 रेखीय प्रतीपगमन

दो परस्पर सम्बन्धित समंक श्रेणियों में प्रतीपगमन–विश्लेषण का कार्य अधिकतर बिन्दु–रेखीय रीति द्वारा ही किया जाता है। दो सम्बन्धित श्रेणियों के चर–मूल्यों को बिन्दुरेखा पर अंकित करने से जो विक्षेप–चित्र या बिन्दु चित्र तैयार होता है तथा इस चित्र पर अंकित बिन्दुओं के मध्य से गुजरने वाली जो दो 'सर्वोपयुक्त रेखाएँ निर्मित होती है वास्तव में ये रेखाएँ ही प्रतीपगमन रेखाएँ कहलाती है। स्मरण रहे प्रतीपगमन रेखीय हो सकता है अथवा वक्ररेखीय। उपर्युक्त रेखाओं के सरल होने पर प्रतीपगमन रेखीय माना जाता है और अगर यह रेखाएँ सरलित वक्र के रूप में हो तो प्रतीपगमन, वक्र–रेखीय माना जाएग। सरल प्रतीपगमन रेखाओं के समीकरण एक–घातीय होते हैं अर्थात् X पर y

की प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $X = a + by$, और इसी प्रकार y पर X की प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $y = a + bX$ होता है।

23.7 प्रतीपगमन रेखाएँ

अर्थ – जैसा कि ऊपर स्पष्ट किया जा चुका है कि दो समंक श्रेणियों के पारस्परिक औसत–सम्बन्ध को दर्शाने वाली सर्वोपयुक्त रेखाओं को 'प्रतीपगमन रेखाएँ' कहते है। ये रेखाएँ वास्तव में किसी एक श्रेणी के मध्यम–मूल्य से सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के सर्वोत्तम मध्यम–मूल्यों को व्यक्त करती है।

23.7.1 प्रतीपगमन की दो रेखाएँ क्यो?

इसके वास्तव में दो कारण है –

(1) पहली बात तो यह है कि दो सम्बन्धित श्रेणियों के दिए होने पर एक रेखा, X का y पर प्रतीपगमन प्रकट करती है और दूसरी रेखा, y का X पर प्रतीपगमन प्रकट करती है। प्रथम रेखा की रचना के लिए y को स्वतंत्र चर मूल्य और X को आश्रित चर–मूल्य माना जाता है तथा इस रेखा की सहायता से y के दिए हुए औसत मूल्य के तत्संवादी X का, सर्वोपयुक्त माध्य–मूल्य का अनुमान लगया जा सकता है। इसके विपरीत दूसरी रेखा के लिए X को स्वतंत्र चर–मूल्य और y को आश्रित चर–मूल्य माना जाता है तथा इसकी सहायता से y का सर्वोत्तम माध्य–मूल्य ज्ञात किया जा सकता है।

(2) दो प्रतीपगमन रेखाएँ होने का एक अन्य कारण यह भी है कि इन रेखाओं की रचना ''न्यूनतम वर्ग रीति'' की इस मान्यता के आधार पर की जाती है कि 'खींची जाने वाली रेखा ऐसी होनी चाहिए कि जिससे विभिन्न बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का जोड़ न्यूनतम हो। यहाँ यह स्मरण रहे, विभिन्न बिन्दुओं के विचलन–वर्गों का जोड़ केवल सर्वोपयुक्त रेखा से ही न्यूनतम होता है। बिन्दुओं से सर्वोपयुक्त रेखा तक के विलनों का मान दो विधियों से किया जा सकता है – प्रथम, लम्बवत् रूप से अर्थात् कोटि अक्ष के समान्तर (parallel to Y-aXis), तथा दूसरा क्षैतिज रूप से अर्थात् भुजाक्ष के समान्तर (parallel to X-aXis)। चूंकि दोनों तरह के

विचलनों के वर्गों के अलग–अलग जोड़ न्यूनतम बनाए रखने के लिए दो रेखाओं का होना जरूरी है। अतः यही कारण है कि Y की X पर प्रतीपगमन रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि यह लम्बवत् विचलनों के वर्गों का जोड़ न्यूनतम कर दे; और X की Y पर रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि क्षैतिज–विचलनों के वर्गों का जोड़ न्यूनतम हो जाए।

23.8 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य

प्रतीपगमन रेखाओं के दो महत्वपूर्ण कार्य होते हैं –

(1) **सर्वोपयुक्त अनुमान** – जैसा कि स्पष्ट किया जा चुका है इन रेखाओं की सहायता से एक श्रेणी के दिये हुए मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्संवादी सर्वोपयुक्त औसत मूल्य का सांख्यिकीय अनुमान लगाया जा सकता है। X का Y पर (of X on Y) प्रतीपगमन रेखा से X का तथा Y की X पर (of Y on X) प्रतीपगमन रेखा द्वारा Y का सर्वोत्तम अनुमान लगाया जाता है।

(2) **सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा का ज्ञान** – प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से निम्नलिखित नियमों के आधार पर यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध कितना और कैसा है –

(i) **धनात्मक** – जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ रेखाचित्र पर बाएँ निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की ओर (ऊर्ध्वगमी) बढ़ती है तो X और Y में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है।

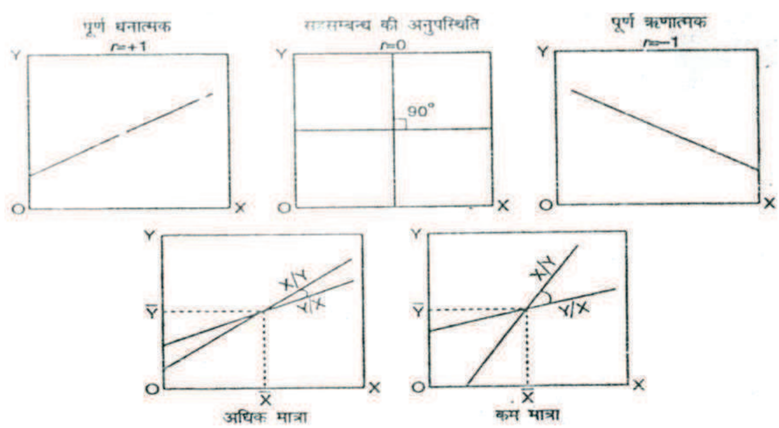
(ii) **ऋणात्मक** – इसके विपरीत जब ये रेखाएँ ऊपर से नीचे की ओर (अधोगमी) जाती हैं तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

(iii) **पूर्ण सहसम्बन्ध एक रेखा** – जब विक्षेप चित्र पर प्रांकित विभिन्न बिन्दु एक ही सीधी रेखा के रूप में हो तो दोनों रेखाएँ एक–दूसरें को पूरी तरह से ढक लेती है। ऐसी स्थिति में श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में X और Y में पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है।

(iv) **सहसम्बन्ध का अभाव** – यदि दोनों रेखाएँ एक दूसरे को समकोण (right angle) अर्थात् 90^0 के कोण पर काटती हों तो X और Y में बिल्कुल सहसम्बन्ध नहीं पाया जाता। इस स्थिति में विक्षेप–चित्र पर विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं होती।

(v) **सीमित सहसम्बन्ध** – दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक–दूसरे के जितनी निकट होंगी, X और Y में उतना ही अधिक सहसम्बन्ध होग। इसके विपरीत ये रेखाएँ एक–दूसरे से जितनी दूर होती जाएंगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होती जाएगी। ये रेखाएँ दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्रांकित बिन्दु पर एक–दूसरे को काटती है। अतः इनके सर्वनिष्ठ बिन्दु से दोनों अक्षों पर डाले जाने वाले लम्ब X तथा Y के समान्तर माध्य–मूल्यों को व्यक्त करते हैं।

निम्न चित्र से प्रतीपगमन रेखाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त नियम स्पष्ट हो जाते हैं –



प्रतीपगमन रेखाओं की रचना दो रीतियों द्वारा की जा सकती है –

(क) **मुक्त हस्त रीति द्वारा ; तथा**

(ख) **प्रतीपगमन समीकरणों द्वारा**

प्रथम रीति का प्रयोग सामान्यतः नहीं किया जाता, क्योंकि इसके आधार पर विभिन्न व्यक्तियों द्वारा रेखा भिन्न–भिन्न प्रकार से खींची जा सकती है। अतः प्रतीपगमन समीकरण के आधार पर ही इन रेखाओं की रचना की जाती है।

(क) मुक्त–हस्त वक्र विधि – मुक्त हस्त वक्र विधि में हम सर्वप्रथम X और Y के मानों के युगमों को प्रकीर्ण आरेख के रूप में आलेखित करते हैं। मानों के एक युगम के लिए एक बिन्दु आलेखित किया जाता है। इसके बाद हम दो मुक्त हस्त रेखाएँ खींचते हैं। इन रेखाओं से एक रेखा इस रीति से खींची जाती है कि Y श्रेणी के उसके माध्य से धनात्मक विचलन ऋणात्मक विचलों से निरस्त हो जाते हैं। इस रेखा के एक ओर के विचलनों का योग उसके दूसरी ओर के विचलनों के योग के बराबर होता है। यह Y का X पर प्रतीपगमन रेखा (Regression Line of Y on X) होगी। दूसरी प्रतीपगमन रेखा इस रीति से खींची जाएगी कि X श्रेणी के उसके माध्य से धनात्मक विचलन ऋणात्मक विचलों को निरस्त कर दें। इस रेखा के ओर के विचलनों का योग भी उसके दूसरी ओर के विचलनों के योग के बराबर होग। यह प्रतीपगमन रेखा X का Y पर प्रतीपगमन रेखा (Regression Line of X on Y) कहलाएगी। दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ दोनों श्रेणियों के माध्यों के बिन्दु पर एक दूसरे को काटेगी। यदि दोनों चरों के बीच परिपूर्ण धनात्मक या ऋणात्मक सम्बन्ध है, तो केवल एक प्रतीपगमन रेखा होगी।

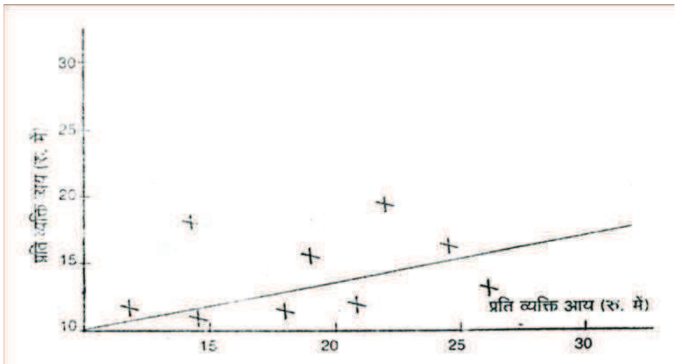
मुक्तहस्त वक्र विधि से प्रतीपगमन रेखाओं का खींचना बहुत कठिन कार्य है। प्रायः प्रकीर्ण आरेख में बार–बार एक धाग इस रीति से समायोजित किया जाता है कि धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलन एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं। एक बार जब ये रेखाएँ खींच ली जाती हैं तो हम Y का X पर प्रतीपगमन रेखा से Y के मानों को पूर्वकथित या आकलित कर सकते हैं और इसी प्रकार X का Y पर प्रतीपगमन रेखा से Y के मानों को पूर्वानुमानित या आकलित कर सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण द्वारा इस विधि की व्याख्या दी जा सकती है –

उदाहरण 1 : नीचे दिये ग्ये आँकड़े 10 व्यक्तियों की प्रतिदिन की आय तथा व्यय से सम्बन्धित है, प्रतीपगमन विश्लेषण द्वारा यह ज्ञात करना है कि आय घटने या बढ़ने से व्यय किस प्रकार बढ़ता या घटता है।

प्रति व्यक्ति आय (रु0 में)	15	22	28	20	25	30	25	30	22	18
प्रति व्यक्ति व्यय (रु0 में)	12	15	20	18	15	18	12	15	15	12

व्यक्तियों की आय को स्वतंत्र मानते हुए 'X' अक्ष पर लेकर तथा व्यय को आश्रित चर मानते हुए 'Y' अक्ष पर लेकर निम्नलिखित चित्र बनाते हैं –



प्रस्तुत विक्षेप चित्र में वितरित बिन्दुओं के मध्य एक ऐसी प्रवृत्त रेखा खींची ग्यी है जिसके ऊपर तथा नीचे बिन्दुओं का वितरण लग्भग समान है।

अब प्रत्येक 'X' चर के मान के लिए 'Y' के मान को विक्षेप चित्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु इस विधि की सीमा यह है कि भिन्न–भिन्न व्यक्ति इस चित्र में भिन्न–भिन्न प्रवृत्त रेखाएँ खींच सकते हैं तथा इस तरह 'X' चर के लिए 'Y' चर के मानों के अनुमान भी भिन्न हो सकते हैं।

इस प्रकार की भिन्नता को समाप्त करने तथा वस्तुनिष्ठ अनुमान को प्रस्तुत करने के लिए न्यूनतम वर्ग विधि अपनायी जाती है।

न्यूनतम वर्ग विधि

मुक्तहस्त वक्र विधि से प्रतीपगमन रेखाओं के खींचने से सम्बन्धित कठिनाइयों का निराकरण करने के लिए X और Y श्रेणियों के संचालनों के बीच गणितीय सम्बन्ध स्थापित किया जाता है और X तथा Y श्रेणियों के सापेक्ष संचालनों या परिवर्तनों को निरूपित करने के लिए बीजगणितीय समीकरण प्राप्त किये जाते हैं।

ऐसी एक विधि न्यूनतम वर्ग विधि है। इस विधि में हम एक चर के दिए गए मानों और श्रेष्ठ आसंजन रेखा से उसके आकलित मानों के बीच विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम कर देते हैं। Y का X पर प्रतीपगमन रेखा वह रेखा है जो X के विशिष्ट मान के लिए Y के मान के लिए सर्वोपयुक्त आकलन प्रदान करती है और इसी प्रकार X का Y पर

प्रतीपगमन रेखा वह रेखा है जो Y के विशिष्ट मान के लिए X के मान के लिए सर्वोपयुक्त आकलन प्रदान करती है।

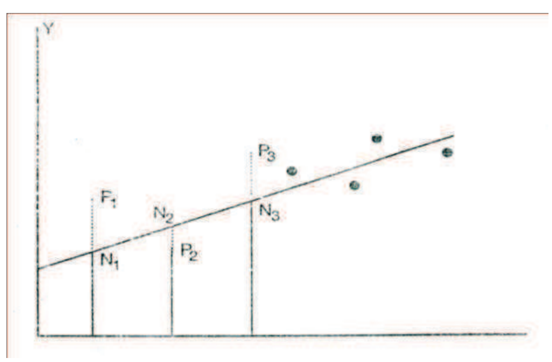
यदि Y के मानों को Y अक्ष (या उदग्र अक्ष) पर आलेखित किया जाता है तो Y का X पर प्रतीपगमन रेखा ऐसी होगी जो उदग्र विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करेगी। इसी प्रकार यदि X के मानों को X अक्ष (या क्षैतिज अक्ष) पर आलेखित किया जाता है तो X का Y पर प्रतीपगमन रेखा ऐसी होगी जो क्षैतिजीय विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करेगी।

अर्थात् इस विधि द्वारा विक्षेप चित्र के माध्यम से एक ऐसी सर्वोत्तम प्रवृत्त रेखा खींची जाती है जिसके ऊपर आधे बिन्दु हों तथा नीचे आधे बिन्दु अर्थात् इस रेखा की तुलना सांख्यिकीय माध्य से कर सकते हैं जिसके दोनों ओर आँकड़ों का विचलन समान होता है, इसके लिए दो बाते निश्चित की जाती है।

(i) इस रेखा के प्रत्येक बिन्दु की ऊर्ध्वाधर दूरियों का जोड़ शून्य हो।

(ii) रेखा से प्रत्येक बिन्दु के वर्गंकित विचलन (अर्थात् ऊर्ध्वाधर दूरियों के वर्गं) का जोड़ न्यूनतम हो। इस प्रकार की विशेषताओं वाली रेखा को न्यूनतम वर्ग रेखा या प्रतीपगमन रेखा कहते हैं।

निम्नलिखित विक्षेप चित्र द्वारा प्रतीपगमन रेखा को स्पष्टतः समझा जा सकता है –



चित्र से स्पष्ट है कि बिन्दु P_1, P_2, P_3 इत्यादि की, प्रतीपगमन रेखा से ऊर्ध्वाधर दूरिया क्रमशः P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3 इत्यादि है। अब प्रतीपगमन रेखा ऐसी खींची जाय कि

(1) $P_1N_1 + P_2N_2 + P_3N_3 + \ldots = 0$

तथा (2) $(P_1N_1)^2 + (P_2N_2)^2 + (P_3N_3)^2 + \ldots$ न्यूनतम हो।

इन विशेषताओं वाली प्रतीपगमन रेखा को खीचने के लिए निम्नलिखित दो सामान्य समीकरणों को हल किया जाता है।

$$\Sigma Y = Na + b\,\Sigma X \qquad \ldots.(1)$$

$$\Sigma XY = a\,\Sigma X + b\Sigma X^2 \qquad \ldots.(2)$$

यहाँ Σ : चर 'X' तथा 'Y' आदि मानों का जोड़ है।

सूत्र में 'a' तथा 'b' अचर राशियाँ है, जिसमें 'a' अचर अन्तः खण्ड है अर्थात् वह बिन्दु जिसे आसंजन रेखा कोटि अक्ष को स्पर्श करती है यदि 'a' का मान धनात्मक हो तो आसंजन रेखा मूल बिन्दु से ऊपर उठी होती है तथा 'a' का मान ऋणात्मक होने पर यह रेखा मूल बिन्दु से नीचे कोटि को स्पर्श करती है।

सूत्र में 'b' अचर आसंजन रेखा की ढाल है जिसे प्रतीपगमन गुणांक भी कहा जाता है। इससे यह ज्ञात किया जा सकता है कि स्वतंत्र चर में इकाई परिवर्तन होने पर आश्रित चर में परिवर्तन कितना होग? यदि 'b' का मूल्य धनात्मक होता है तो आसंजन रेखा बाए से दाएं ऊपर की ओर बढ़ती है किन्तु 'b' का मान ऋणात्मक होने पर यह रेखा बाएं से नीचे गिरती हुई होती है।

सामान्य समीकरणों में X तथा Y के मान ज्ञात करने के लिए आँकड़ों के आधार पर गणना की जाती है जिसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है –

उदाहरण : 2 निम्न आँकड़ों से सम्बन्धित प्रतीपगमन रेखाएँ आलेखित कीजिए :

X के मान :	1	2	3	4	5
Y के मान :	166	184	142	180	338

हल : दिए गए मानों के सरल रेखा समीकरणों को प्राप्त करने के लिए हम निम्न प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करेगें :

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$

$\Sigma XY = a\,\Sigma X + bX^2$

इन समीकरणों से हम a और b के मानों को ज्ञात करेगें और उन्हें हम सरल रेखा के समीकरण में आसंजित करेगें :

$Y = a + bX$

यह हमें Y का X पर प्रतीपगमन रेखा प्रदान करेग। इस प्रश्न में a और b का मान क्रमशः $a = 100$ और $b = 34$ होग। अतः प्रतीपगमन समीकरण होग–

$Y = 100 + 34X$ ... Y का X पर समीकरण

इसी प्रकार X और Y का अन्तर परिवर्तन करने से सरल रेखा का समीकरण जो Y के लिए X का मान हमें प्रदान करेग होगा :

$X = a + by$

और दो प्रसामान्य समीकरण होगे :

$\Sigma X = Na + b\Sigma Y$

$\Sigma XY = a\,\Sigma Y + b\Sigma Y^2$

इन समीकरणों के आधार पर X का Y पर सरल रेखा समीकरण होग :

$X = .172 + .014Y$ ...X का Y पर समीकरण

क्योंकि प्रसामान्य समीकरणों से a और b का मान क्रमशः

$a = .172$ और $b = .014$ होग।

इस प्रकार सरल रेखा के समीकरण या श्रेष्ठ आसंजन रेखाएँ होगी :

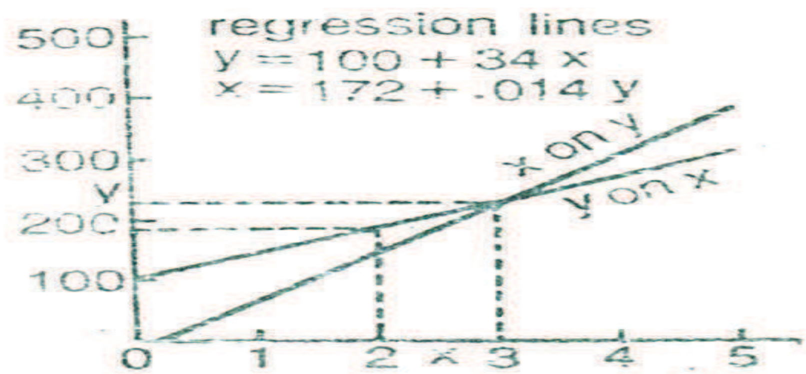
$Y = 100 + 34Y \quad \ldots (1)$

$X = .172 + .014Y \quad \ldots (2)$

प्रथम समीकरण से हम X के कुछ मानों के लिए Y के कोई दो मान ज्ञात करेगें और उन्हें लेखाचित्र कागज पर आलेखित करेगें ताकि Y का X पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाए।

द्वितीय समीकरण हम Y के कुछ मानों के लिए X के कोई दो मान ज्ञात करेगें और उन्हें X का Y पर समीकरण रेखा प्राप्त करने के लिए लेखाचित्र काग्ज पर अलेखित करेगें।

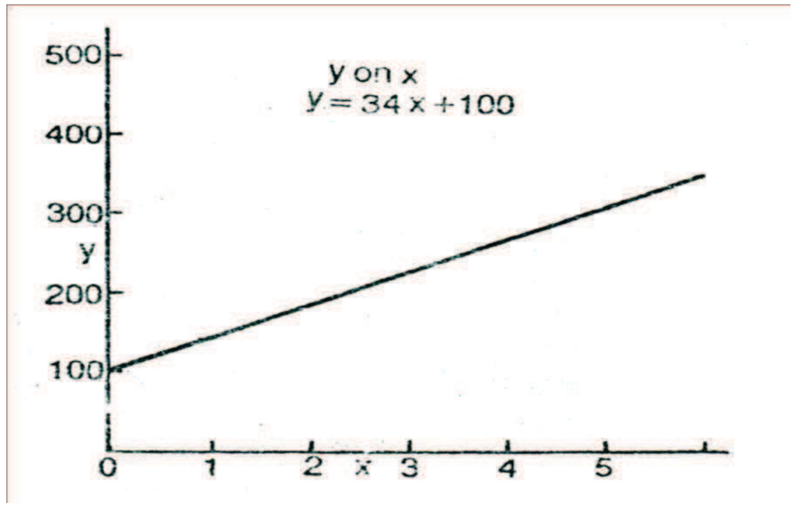
दोनों रेखाएँ माध्यों के बिन्दु पर एक दूसरे को काटेंगी। इन रेखाओं से निम्नलिखित लेखाचित्र उत्पन्न होग।



उपर्युक्त समीकरण से यह अवलोकित किया जाएग कि दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ दोनों श्रेणियों के माध्यों के बिन्दु पर एक दूसरे को काटती हैं। यदि X के दिए गए मान के लिए Y का कोई मान ज्ञात करना है तो हमें X श्रेणी से (X के लिए दिए गए मान के लिए) एक लम्ब खींचना होग और वह बिन्दु जिस पर वह Y के संगणित मान (computed value) को प्रकट करेगी जिसे कोटि अक्ष ($Y-$ अक्ष) पर उस बिन्दु से जहाँ लम्ब Y का X पर प्रतीपगमन रेखा से मिलता है $X-$ अक्ष के समानान्तर रेखा खींच कर पढ़ा जा सकता है। इस प्रकार जब $X = 2$ हो तो Y का मान 168 होग। इसी प्रकार, $X-$ श्रेणी के मानों को X का Y पर प्रतीपगमन रेखा को प्रयोग कर ज्ञात किया जा सकता है।

जैसा कि पहले बतलाया जा चुका है कि प्रतीपगमन रेखा अथवा श्रेष्ठ आसंजन रेखा वह है जहाँ से चर के दिये गये मानों और उसके आकलित या संगणित मानों के बीच विचलनों के वर्गों के योग न्यूनतम होते हैं। हमारे प्रश्न में $Y-$ श्रेणी उदग्र स्केल पर दर्शायी गयी है, इसलिए मूल अंकों और प्रतीपगमन रेखा के बीच विचलनों के वर्गों (उदग्र

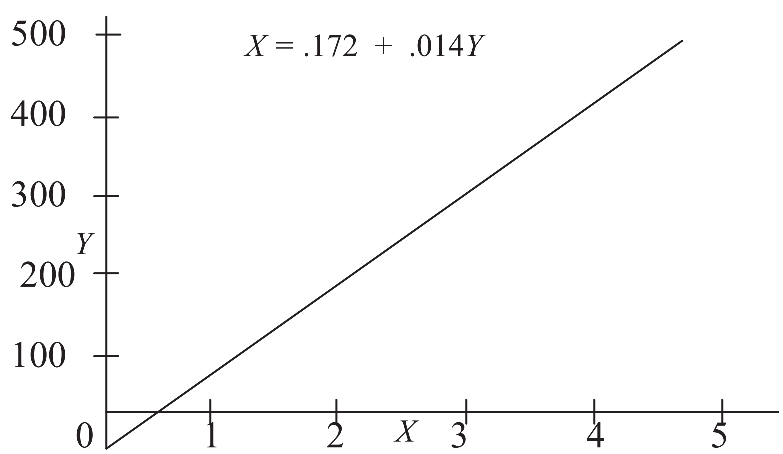
स्केल पर मापे गये) का योग न्यूनतम होगा।$X-$ श्रेणी के लिए क्षैतिज स्केल पर विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होगा। निम्नलिखित दो लेखाचित्र इस बात को स्पष्ट करते हैं :



उपर्युक्त लेखाचित्र में, Y का X पर प्रतीपगमन रेखा के अतिरिक्त हमने Y के मूल अंकों को आलेखित किया है और लम्ब मूल तथा संगणित अंकों के बीच विचलन को दर्शातें हैं। इन विचलनों के वर्गें का योग न्यूनतम होग जब विचलन प्रतीपगमन रेखा के मानों से लिए जाएंगे।

निम्नलिखित लेखाचित्र $X-$ श्रेणी के मूल मानों को X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण के मानों के साथ दर्शाता है।

लेखाचित्र (ख) [X का Y पर]



उपर्युक्त लेखाचित्र से यह स्पष्ट है कि $X-$ श्रेणी के विचलन प्रतीपगमन रेखा से न्यूनतम है और इसलिए उनके वर्गें का योग भी न्यूनतम होग। वास्तव में, विचलनों का योग सदैव शून्य होता है, और इसलिए विचलनों के वर्गों के मान भी न्यूनतम होते हैं।

23.9 प्रतीपगमन समीकरण

प्रतीपगमन समीकरण जिन्हें प्रायः '*Estimating Equations*' भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखाओं के बीजगणितीय स्वरूप है। प्रतीपगमन रेखाओं की भांति ये समीकरण भी दो होते हैं –

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

इसकी सहायता से Y (स्वतंत्र चर–मूल्य) के दिए हुए मूल्य के तत्संवादी X (आश्रित चर–मूल्य) का सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात किया जाता है तथा रेखाचित्र पर इस समीकरण के मूल्यों को प्रांकित करने से X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है।

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

इसके आधार पर X (स्वतंत्र चर–मूल्य) के तत्संवादी Y (आश्रित मूल्य) के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान लगया जाता है और Y की X पर प्रतीपगमन रेखा खीची जाती है।

रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण, सरल रेखा के समीकरण पर आधारित है। मूल रूप में ये निम्न प्रकार है –

(i) X का Y पर –– $X = a + by$

(ii) Y का X पर –– $Y = a + bX$

इस समीकरणों में a और b के मान स्थिरांक है जो प्रतीपगमन रेखाओं की स्थितियों को निर्धारित करते है। प्राचल 'a' जिसे अन्तः खण्ड भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखा के स्तर को प्रकट करता है अर्थात् मूल–बिन्दु से (कोटि–अक्ष पर) ऊपर या नीचे रेखा की दूरी। दूसरे शब्दों में, लेखाचित्र पर मूल–बिन्दु से कोटि– अक्ष पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श–बिन्दु का अन्तर ही प्राचल 'a' का मान होता है।जब 'a' का मान धनात्मक (+) होता है तो रेखा $Y-$ अक्ष को मूल–बिन्दु '0' से ऊपर की ओर स्पर्श करती है और

जब 'a' का मान ऋणात्मक (–) होता है तो रेखा Y– अक्ष पर स्पर्श '0' से नीचा होता है। यदि 'a' मान शून्य हो तो रेखा मूल–बिन्दु से ही आरम्भ होती है।

अन्तः खण्ड का बीजगणितीय माप –

प्रथम समीकरण ($X = a + bY$) में $a = \overline{X} - b\overline{Y}$

द्वितीय समीकरण ($Y = a + bX$) में $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

$\overline{X}$ तथा $\overline{Y}$ समान्तर माध्यों के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं।

प्राचल 'b' रेखा का ढलान या ढाल को निर्धारित करता है। प्राचल 'b' को प्रतीपगमन गुणांक भी कहते हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि X में इकाई का परिवर्तन होने से Y में कितना परिवर्तन होग और इसके विपरीत। यदि 'b' का मान धनात्मक हो तो रेखा का ढलान बाएँ से दाएँ ऊपर की ओर होग। 'b' का मान ऋणात्मक होने पर रेखा का ढलान नीचे की ओर होग। बीजगणितीय दृष्टि से 'b' के मान को सहसमबन्ध–गुणांक , मानक विचलन व समान्तर माध्यों के रूप में निम्न प्रकार प्रकट किया जा सकता है :

प्रथम समीकरण X का Y पर –– $b_{xy} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

द्वितीय समीकरण Y का X पर –– $b_{yx} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

σ_X व σ_y क्रमशः X और Y श्रेणियों के प्रमाप विचलन है तथा r दोनों श्रेणियों का सहसम्बन्ध गुणांक है। इस विश्लेषण के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है –

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$X = a + bY$ $\qquad\qquad$ $Y = a + bX$

$X = (\overline{X} - b\overline{Y}) + bY$ $\qquad\qquad$ $Y = (\overline{Y} - b\overline{X}) + bX$

$X - \overline{X} = bY - b\overline{Y}$ $\qquad$ $Y - \overline{Y} = bX - b\overline{X}$

$\therefore \quad \left(X - \overline{X}\right) = b_{xy}\left(Y - \overline{Y}\right)$ $\qquad$ $\therefore \quad \left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$

$X - \overline{X} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(Y - \overline{Y}\right)$ $\qquad$ $Y - \overline{Y} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(X - \overline{X}\right)$

प्रयोग – Y से सम्बद्ध X का सर्वोपयुक्त मूल्य अनुमानित करने के लिए प्रथम समीकरण (of X upon Y) का प्रयोग किया जाता है। और X के तत्संवादी Y का सर्वोत्तम मूल्य ज्ञात करने के लिए द्वितीय समीकरण (of Y upon X) का प्रयोग किया जाता है। उपर्युक्त रूप में समीकरणों का प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रश्न में $\overline{X}$ और $\overline{Y}$, σ_X और σ_y तथा r के मान दिये गये हों।

यहाँ, $\overline{X}$ = X श्रेणी का समान्तर माध्य, $\sigma_X = X$ श्रेणी का प्रमाप विचलन,

$\overline{Y}$ = Y श्रेणी का समान्तर माध्य, $\sigma_y = Y$ श्रेणी का प्रमाप विचलन,

r = सहसम्बन्ध गुणांक

उदाहरण : 3निम्नलिखित समंकों से (i) वस्तु की ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत ज्ञात कीजिए यदि इन्दौर में कीमत 70 रु0 हो, और (ii) इन्दौर में सम्भाव्य कीमत ज्ञात कीजिए यदि ग्वालियर में कीमत 90 रु0 हो।

	माध्य	प्रमाप विचलन
इन्दौर	65	2.5
ग्वालियर	67	3.5

सहसम्बन्ध गुणांक = +0.8

हल : इन्दौर में कीमत को X तथा ग्वालियर में कीमत को Y मानने पर ज्ञात मूल्य इस प्रकार है –

$$\overline{X} = 65,\ \overline{Y} = 67,\ \sigma_X = 2.5 \qquad \sigma_y = 3.5, \qquad r = +0.8$$

ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत

$$Y - \overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$Y - 67 = 0.8\frac{3.5}{2.5}(70 - 65)$$

$$Y - 67 = 1.12\ (70 - 65)$$

$$Y = (1.12 \times 5) + 67$$

$$\therefore\ Y = 72.60$$

इन्दौर में सम्भाव्य कीमत

$$X - \overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y})$$

$$X - 65 = 0.8\frac{2.5}{3.5}(90 - 67)$$

$$X - 65 = 0.57(90 - 67)$$

$$X = (0.57 \times 23) + 65$$

$$\therefore\ X = 78.11$$

अतः इन्दौर में (i) 70 रु0 होने पर उस वस्तु की ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत 72.60 है और (ii) 75 रु0 होने पर ग्वालियर में कीमत 78.11 रु0 है।

उदाहरण : **4**किसी परीक्षा में 450 परीक्षार्थियों के सांख्यिकी और अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों से सम्बन्धित समंक नीचे दिये गये हैं। प्रतीपगमन की दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। सांख्यिकी में 50 अंक प्राप्त करने वाले परीक्षार्थी के अर्थशास्त्र में औसत प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

	सांख्यिकी	अर्थशास्त्र
औसत प्राप्तांक	40	48
प्रमाप विचलन	12	16

माध्यों से लिए गए विचलनों की गुणाओं का योग = 42075

हल : सांख्यिकी में प्राप्तांक $= X$, अर्थशास्त्र में प्राप्तांक $= Y$, मानने पर ज्ञात मूल्य इस प्रकार हैं –

$$N = 450, \quad \overline{X} = 40, \quad \overline{Y} = 48, \quad \sigma_x = 12, \quad \sigma_y = 16, \ \sum dxdy = 42075$$

चूंकि प्रतीपगमन समीकरण के निर्माण हेतु 'r' का जानना आवश्यक है अतः सर्वप्रथम सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जायेगी –

$$r = \frac{\sum dxdy}{N.\sigma_x \sigma_y} = \frac{42075}{450 \times 12 \times 16} = \frac{42075}{86400} = +0.49$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण	Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण
$X - \overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y})$	$Y - \overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$
$X - 40 = 0.49 \times \frac{12}{16}(Y - 48)$	$Y - 48 = 0.49 \times \frac{16}{12}(X - 40)$
$X - 40 = 0.3675\ (Y - 48)$	$Y - 48 = 0.653\ (X - 40)$
$X - 40 = 0.3675Y - 17.64$	$Y - 48 = 0.653X - 26.12$
$X = 0.3675Y + 40 - 17.64$	$Y = 0.653X + 48 - 26.12$
$X = 0.3675Y + 22.36$	$Y = 0.653 + 21.88$

(ii) चूंकि $X = 50$, अतएव Y का सर्वोपयुक्त मूल्य अनुमानित करने के लिए Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (of Y upon X) प्रयुक्त होगा –

$$Y = 0.653X + 21.88 \text{ or } Y = 0.653 \times 50 + 21.88$$

or $\quad Y = 32.65 + 21.88 \therefore Y = 54.53$ or 55 ApproX.

23.10 प्रतीपगमन गुणांक

प्रतीपगमन समीकरण में 'b' प्रतीपगमन गुणांक का प्रतीक है, जो स्वतंत्र चर मूल्य में परिवर्तन के कारण आश्रित चर–मूल्य में होने वाले परिवर्तन की 'मात्रा' तथा 'दिशा' को बतलाता है। दूसरे शब्दों में, यह इस बात को स्पष्ट करता है कि एक श्रेणी के चर–मूल्यों मं 1 का परिवर्तन होने से दूसरी श्रेणी के चर–मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होग। इस प्रकार, यह प्रतीपगमन रेखा के ढलान का बीजगणितीय माप है। प्रतीपगमन रेखाओं ओर समीकरणों की भाँति, प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं –

(I) X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक (II) Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad\qquad b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

महत्वपूर्ण नोट – उपरोक्त गुणांकों के रूप में हम X तथा Y की दोनों प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं –

$$X - \overline{X} = b_{xy}\ (Y - \overline{Y}) \quad \text{तथा } Y - \overline{Y} = b_{yx}\ (X - \overline{X})$$

24.10.1 प्रतीपगमन गुणांक **की विशेषताएँ**

(1) दो प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य, सह–सम्बन्ध गुणांक होता है अर्थात् –

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

प्रमाण : $b_{xy} . b_{yx} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r^2$

$$\therefore\ r = \pm\sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

टिप्पणी – (i) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के बीजगणितीय चिन्ह एक जैसे होते हैं अर्थात् b_{yX} के धनात्मक होने पर b_{Xy} भी धनात्मक होग और b_{yX} के ऋणात्मक होने पर b_{Xy} भी ऋणात्मक होग।

(ii) प्रतीपगमन गुणांकों के धनात्मक या ऋणात्मक होने पर सहसम्बन्ध गुणांक (r) भी धनात्मक या ऋणात्मक होगा।

(2) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों (b_{Xy} व b_{yX}) का मूल्य अलग–अलग 1 से अधिक नहीं हो सकता अर्थात् – $\sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} \le 1$

इसका कारण यह है कि यदि b_{Xy} तथा b_{yX} दोनों का मूल्य 1 से अधिक है तो दोनों का गुणनफल (r^2) भी 1 से बड़ा होग और फलस्वरूप उसका वर्गमूल (r) भी 1 से बड़ा हो जाएग जो कि सम्भव नहीं है। दोनों में से किसी एक गुणांक का मूल्य 1 से बड़ा हो सकता है परन्तु, ऐसा होने पर दूसरे गुणांक का मूल्य इतना छोटा होगा कि दोनों का गुणनफल 1 से अधिक न होने पाये।

(3) b_{Xy} तथा b_{yX} का समान्तर माध्य, सहसम्बन्ध गुणांक के बराबर या उससे बड़ा होता है।

सूत्रानुसार – $\frac{b_{xy} + b_{yx}}{2} \geq r$

(4) प्रतीपगमन गुणांक मूल के प्रति स्वतंत्र होते हैं परन्तु पैमाने के प्रति नहीं।

प्रतीपगमन गुणांकों **से सहसम्बन्ध** गुणांक **का निर्धारण**

जैसा कि ऊपर बताया गया है, सहसम्बन्ध गुणांक, दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है। अतः सहसम्बन्ध का निर्धारण करने के लिए दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के गुणनफल का वर्गमूल निकाल लिया जाता है।

उदाहरण : 5(i)यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के मूल्य 0.64 और 0.81 है, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान बताइए।

(ii) निम्न आँकड़ों से – (अ) Y का प्रमाप विचलन (σ_y) और (ब) X और Y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक (r_{Xy}) ज्ञात कीजिए।

(iii) एक विद्यार्थी ने Y के X पर (Y on X) और X के Y पर (X on Y) प्रतीपगमन गुणांकों के मान क्रमशः 1.2 और 0.9 ज्ञात किये। कारण सहित बतलाइए कि क्या उसके द्वारा किया गया परिग्णन सही है?

(iv)निम्न प्रदत्त सूचना से 'r' का मूल्य ज्ञात कीजिए –

X का प्रसरण (variance of X) = 2.25 ; $\sigma_y = 4$; तथा X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण $X = -0.3Y + 1.8$ है।

हल : (i) $r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.64 \times 0.81} = \sqrt{0.5184} = +0.72$

(ii) X का Y पर प्रतीपगमन	Y का X पर प्रतीपगमन
$X = 0.85Y$	$Y = 0.89X$
यदि Y का मूल्य 1 है तो $X = 0.85$ होग	यदि $X = 1$ तो Y का मूल्य 0.89 होग
अतः $b_{Xy} = 0.85$	$b_{yX} = 0.89$

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.85 \times 0.89} = 0.87$$

$b_{xy} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ प्रदत्त मूल्यों को आदिष्ट करने पर –

$$0.85 = 0.87 \times \frac{3}{\sigma_y}; \; 0.85\,\sigma_y = 2.61$$

$$\therefore \; \sigma_y = \frac{2.61}{0.85} = 3.07 \qquad \therefore \; r = 0.87\,; \sigma_y = 3.07$$

(iii) विद्यार्थी द्वारा प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं –

$b_{yX} = 1.2,\ b_{Xy} = 0.9$ इन दोनों गुणांकों की गुणा (r^2) $1.2 \times 0.9 = 1.08$ है जो 1 से अधिक है; इसका वर्गमूल (r) भी 1 से अधिक होग, परन्तु यह सहसम्बन्ध गुणांक है जो कि 1 से अधिक नहीं हो सकता। अतः विद्यार्थी ने प्रतीपगमन गुणांकों की गणना में गलती की है।

(iv) X का प्रसरण – $\sigma_x^{\,2} = 2.25$

$$\therefore \; \sigma_x = \sqrt{2.25} = 1.5; \; \sigma_y = 4$$

$$X = -0.3Y + 1.8$$

उक्त समीकरण X का Y पर प्रतीपगमन प्रकट करता है। इसमें अन्तःखण्ड (a) 1.8 है और X की Y पर सर्वोपयुक्त रेखा का ढाल (b) –0.3 है;

यदि प्रतीपगमन गुणांक है अर्थात् $b_{Xy} = -0.3$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ या } -0.3 = r \times \frac{1.5}{4} \text{ या } -1.2 = 1.5 \times r$$

$$\therefore \; r = \frac{-1.2}{1.5} = -0.8$$

23.11 प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन

यदि दो सम्बद्ध श्रेणियों के अलग–अलग चर मूल्य दिये हुए हों तो उनके आधार पर ऊपर बताए गए सूत्रों द्वारा प्रतीपगमन गुणांक की गणना करना एक अत्यंत कठिन समस्या है क्योंकि r, σ_X व σ_y का निर्धारण करने में गणना–क्रिया अनावश्यक रूप से लम्बी हो जाती है। अतः समय व परिश्रम की बचत करने के लिए निम्न दो रीतियों (सूत्रों) का प्रयोग किया जा सकता है –

(अ) प्रत्यक्ष रीति

दो प्रसामान्य समीकरणों पर आधारित इस रीति का सूत्र इस प्रकार है –

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{N(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{N(\sum y^2) - (\sum y)^2}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{N(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{N(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

क्रिया–विधि – ध्यान रहे, इस रीति में 'विचलन' नहीं लिए जाते हैं। सर्वप्रथम, X तथा y श्रेणी के पदों का योग क्रमशः ΣX तथा Σy कर लिया जाता है। फिर, अलग–अलग दोनों श्रेणियों के पदों के वर्गें का योग क्रमशः ΣX^2 तथा Σy^2 निकाला जाता है। इसके बाद X तथा y श्रेणियों के तत्संवादी पदों की परस्पर गुणा करके उनका योग ΣXy प्राप्त कर लिया जाता है।

विद्यार्थियों के लिए नोट : जब दोनों श्रेणियों के पदों का आकार अपेक्षाकृत छोटा हो तो इस रीति का प्रयोग काफी सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण : 6 दिया हुआ है

$$N=12, \Sigma X = 120, \Sigma y = 432, \Sigma Xy = 4992, \Sigma X^2 = 1392, \Sigma y^2 = 18252$$

ज्ञात कीजिए – (i) दोनों प्रतीपगमन समीकरण (ii) प्रतीपगमन गुणांक, (iii) X और y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक (r)।

हल : $\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{120}{12} = 10$; $\bar{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{432}{12} = 36$

प्रतीपगमन गुणांक

X का y पर

$$b_{xy} = \frac{N(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{N\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$= \frac{12\times 4992-(120\times 432)}{12\times 18252-(432)^2}$$

$$= \frac{59904 - 51840}{219024 - 186624}$$

$$= \frac{8064}{32400} = 0.249$$

y का X पर

$$b_{yx} = \frac{N(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{12\times 4992-(120\times 432)}{12\times 1392-(120)^2}$$

$$= \frac{8064}{16704-14400}$$

$$= \frac{8064}{2304} = 3.5$$

प्रतीपगमन समीकरण

$$x - \overline{x} = b_{xy}(y - \overline{y})$$

$$x-10 = 0.249\ (y-36)$$

$$x = 0.249y - 8.964 + 10$$

$$\therefore x = 0.249y + 1.036$$

$$y - \overline{y} = b_{yx}(x - \overline{x})$$

$$y-36 = 3.5(x - 10)$$

$$y = 3.5x - 35 + 36$$

$$\therefore y = 3.5x + 1$$

सहसम्बन्ध गुणांक

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.249 \times 3.5} = \sqrt{0.8715} = 0.93$$

(ब) विचलन रीति

जब पद–मान काफी बड़े आकार के होते हैं तो प्रत्यक्ष रीति के अन्तर्गत उनके वर्ग और गुणनफल आदि निकालने में काफी असुविधा होती है। अतः ऐसी स्थिति में विचलन रीति का प्रयोग करके गुणन–क्रिया को सरल बना लिया जाता है। विचलन रीति के भी निम्न दो रूप है –

(i) जब वास्तविक समान्तर माध्य से विचलन लिया जाए

X का y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum dxdy}{N\sigma_x\sigma_y} \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= \frac{\sum dxdy}{N\sigma_y^{\ 2}} = \frac{\sum dxdy}{N \times \frac{\sum d^2y}{N}}$$

और अधिक सरल करने पर –

$$\therefore \ b_{xy} = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2y}$$

y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum dxdy}{N\sigma_x\sigma_y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= \frac{\sum dxdy}{N\sigma_x^{\ 2}} = \frac{\sum dxdy}{N \times \frac{\sum d^2x}{N}}$$

सरलतम् रूप –

$$\therefore \ b_{yx} = \frac{\sum dxdy}{\sum d^2x}$$

$\Sigma dXdy$ = X और y श्रेणी के वास्तविक समान्तर माध्यों से लिए गए विचलनों के गुणाओं का योग

$\Sigma d^2X =$ X श्रेणी के विचलनों के वर्गों का योग

$\Sigma d^2y =$ y श्रेणी के विचलनों के वर्गों का योग

(ii) जब कल्पित माध्य से विचलन लिए जाएँ

जब कभी समान्तर माध्य पूर्णांक में न आकर दशमलव में आता है तो विचलन लेने तथा विचलनों के वर्ग बनाने में काफी कठिनाई होती है। इस कठिनाई से बचने के लिए विचलन, वास्तविक माध्य की बजाय कल्पित माध्य से लिए जाते हैं। सूत्र इस प्रकार है :

X का y पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)\,(\sum dy)}{N}}{N\sigma_x \sigma_y} \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)\,(\sum dy)}{N}}{N\sigma_x \sigma_y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)\,(\sum dy)}{N}}{N \times \left[\frac{\sum d^2 y}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2\right]} \qquad = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)\,(\sum dy)}{N}}{N \times \left[\frac{\sum d^2 x}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2\right]}$$

$$\therefore\ b_{xy} = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sum d^2 y - \frac{(\sum dy)^2}{N}} \qquad \therefore\ b_{yx} = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sum d^2 x - \frac{(\sum dx)^2}{N}}$$

या $b_{xy} = \dfrac{N\sum dxdy - (\sum dx . \sum dy)}{N\sum d^2 y - (\sum dy)^2}$ या $b_{yx} = \dfrac{N\sum dxdy - (\sum dx . \sum dy)}{N\sum d^2 x - (\sum dx)^2}$

उदाहरण : 7निम्नलिखित आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक तथा प्रतीपगमन रेखाएँ ज्ञात कीजिए –

X	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	:	9	8	10	12	11	13	14	16	15

(i) Y का मूल्य अनुमानित कीजिए, जबकि $X = 6.2$ तथा $X = 6.5$ से और

(ii) X का मूल्य अनुमानित कीजिए जबकि $Y = 14.5$ हो।

हल : प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन

X – श्रेणी			Y – श्रेणी			
X	5 से विचलन	विचलन वर्ग	y	12 से विचलन	विचलन वर्ग	X तथा Y के विचलनों की गुणा

X	dX	d^2X	y	Dy	d^2y	$dXdy$
1	–4	16	9	–3	9	12
2	–3	9	8	–4	16	12
3	–2	4	10	–2	4	4
4	–1	1	12	0	0	0
5	0	0	11	–1	1	0
6	+1	1	13	+1	1	1
7	+2	4	14	+2	4	4
8	+3	9	16	+4	16	12
9	+4	16	15	+3	9	12
N=9	ΣdX=0	Σd^2X=60	N=9	Σdy=0	Σd^2y=60	$\Sigma dXdy$ = 57

प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficients)

***X* का *y* पर**

$$b_{xy} = \frac{N\sum dxdy - (\sum dx.\sum dy)}{N\sum d^2y - (\sum dy)^2}$$

$$= \frac{9\times57-(0)(0)}{9\times60-(0)^2} = \frac{513}{540}$$

$$\therefore b_{xy} = 0.95$$

***y* का *X* पर**

$$b_{xy} = \frac{N\sum dxdy - (\sum dx.\sum dy)}{N\sum d^2x - (\sum dx)^2}$$

$$= \frac{9\times57-(0)(0)}{9\times60-(0)^2} = \frac{513}{540}$$

$$\therefore b_{xy} = 0.95$$

समान्तर माध्य

$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N} = 5 + \frac{0}{9} = 5$ $\overline{Y} = A + \frac{\sum dy}{N} = 12 + \frac{0}{9} = 12$

प्रतीपगमन समीकरण

X का y पर

$X - \overline{X} = b_{xy}(Y - \overline{Y})$

$X - 5 = 0.95\ (Y - 12)$

$X - 5 = 0.95Y - 11.4$

$\therefore X = 0.95Y - 6.4$

y का X पर

$Y - \overline{Y} = b_{xy}(X - \overline{X})$

$Y - 12 = 0.95(X - 5)$

$Y - 12 = 0.95X - 4.75$

$\therefore Y = 0.95X + 7.25$

सहसम्बन्ध गुणांक

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.95 \times 0.95} = +0.95$$

अनुमानित मूल्य

(i) यदि X का मूल्य क्रमशः 6.2 तथा 6.5 दिया हुआ है तो y का मूल्य अनुमानित करने के लिए y के X पर समीकरण का प्रयोग किया जाएगा –

(I) $y = 0.95X + 7.25$ या $y = (0.95 \times 6.2) + 7.25 = 13.14$

(II) $y = 0.95X + 7.25$ या $y = (0.95 \times 6.5) + 7.25 = 13.42$

(ii) अब X का मूल्य अनुमानित किया जाएग –

$X = 0.95y - 6.4$ या $X = (0.95 \times 14.5) - 6.4 = 7.37$

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना (Drawing of Regression Lines)

प्रतीपगमन समीकरणों की सहायता से निम्न विधि द्वारा सम्बन्धित रेखाओं की रचना की जा सकती है –

(i) X की y पर प्रतीपगमन रेखा – X के y पर समीकरण में y के दिये हुए मूल्यों को बारी–बारी से आदिष्ट करके X के सर्वोत्तम संगणित मूल्य (X_c) निकाल लिए जाते हैं। फिर X के सर्वोत्तम मूल्य और y के दिए हुए तत्संवादी मूल्यों को रेखाचित्र पर प्रांकित करके विभिन्न बिन्दुओं को मिला दिया जाता है; इस प्रकार X की y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है। इस रेखा की सहायता से y की किसी दिए हुए मूल्य से सम्बद्ध X का मूल्य अनुमानित किया जा सकता है। इसके लिए Y अक्ष पर, दिये हुए मूल्य के बिन्दु से प्रतीपगमन रेखा पर लम्ब खींचा जाता है तथा इस लम्ब की रेखा पर स्पर्श–बिन्दु से X अक्ष पर लम्ब डाला जाता है और दूसरे लम्ब के X अक्ष पर स्पर्श बिन्दु का मूल्य पढ़ लिया जाता है। यही X का सर्वोत्तम औसत मूल्य है।

(ii) y की X पर प्रतीपगमन रेखा – y के X पर समीकरण में X के दिए हुए मूल्यों को आदिष्ट करके y के सर्वोत्तम संगणित मूल्य (y_c) ज्ञात किए जाते हैं तथा इन पद–युगमों को रेखापत्र पर अंकित करके y की X पर प्रतीपगमन रेखा खींच ली जाती है। उपर्युक्त विधि के अनुसार इस रेखा से X के तत्संवादी y का सर्वोत्तम मूल्य अनुमानित कर लिया जाता है। यहाँ, पहले X अक्ष पर दिए हुए मूल्य के बिन्दु से रेखा पर लम्ब खींचा जाता है। फिर, लम्ब के स्पर्श–बिन्दु से Y अक्ष पर लम्ब खींचकर y का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

दोनों रेखाएँ जहाँ एक दूसरे को काटती हैं वह दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों $(\bar{X}, \bar{Y})$ से प्राप्त बिन्दु हैं।

प्रस्तुत उदाहरण दोनों रेखाओं की रचना करने के लिए हमें उपर्युक्त समीकरणों के आधार पर X और y के अलग–अलग पद–युगमों को निम्न प्रकार ज्ञात करना होगा –

X का y पर प्रतीपगमन		**y का X पर प्रतीपगमन**	
$X = 0.525y + 32.29$		$y = 0.424X + 39.56$	
प्रदत्त y	संगणित X	प्रदत्त X	संगणित y

67 $0.525 \times 67 + 32.29 = 67.465$ 65 $0.424 \times 65 + 39.56 = 67.120$

68 $0.525 \times 68 + 32.29 = 67.990$ 66 $0.424 \times 66 + 39.56 = 65.544$

64 $0.525 \times 64 + 32.29 = 65.890$ 67 $0.424 \times 67 + 39.56 = 67.968$

68 $0.525 \times 68 + 32.29 = 67.990$ 67 $0.424 \times 67 + 39.56 = 67.968$

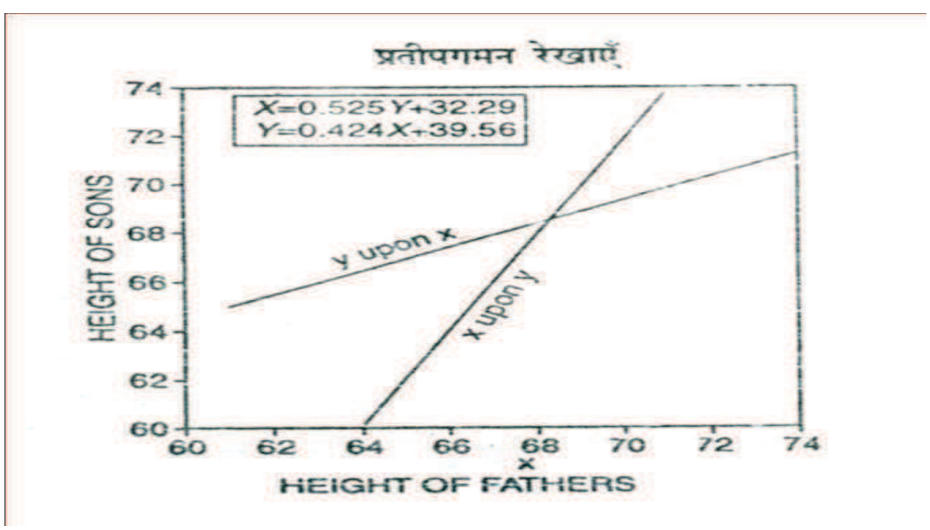
72 $0.525 \times 72 + 32.29 = 70.090$ 68 $0.424 \times 68 + 39.56 = 68.392$

70 $0.525 \times 70 + 32.29 = 69.040$ 69 $0.424 \times 69 + 39.56 = 68.816$

69 $0.525 \times 69 + 32.29 = 68.515$ 71 $0.424 \times 71 + 39.56 = 69.664$

70 $0.525 \times 70 + 32.29 = 69.040$ 73 $0.424 \times 73 + 39.56 = 70.512$

वास्तव में, सरल रेखा खींचने के लिए केवल दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है, परन्तु उक्त उदाहरण में सभी बिन्दु ज्ञात कर लिए गए हैं। इन बिन्दुओं को प्रांकित करने से निम्नांकित प्रतीपगमन रेखाएँ प्राप्त की जाएंगी –



23.12 सारांश

प्रतीपगमन वह सांख्यिकीय तकनीक है जो दो या अधिक चरों के मध्य औसत सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है तथा इसके द्वारा एक चर के ज्ञात मूल्य के आधार पर दूसरे चर के लिए संभावित मूल्य का अनुमान लगया जा सकता है।

सहसम्बन्ध से दो चरों के मध्य कारणात्मक सम्बन्ध ज्ञात नहीं किया जा सकता है, किन्तु प्रतीपगमन द्वारा यह ज्ञात करना सरल है कि कौन सा चर 'कारण' है तथा कौन सा 'प्रभाव' है। अर्थात् प्रतीपगमन उस कार्यमूलक सम्बन्ध को बताता है जिसके द्वारा एक चर के अनुमान दूसरे चर से निकाले जा सकते हैं।

प्रतीपगमन का विश्लेषण दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध को प्रस्तुत करने वाले विक्षेप चित्र द्वारा किया जाता है जिसकी मुख्यतः दो विधियाँ प्रचलित है – मुक्त हस्त आरेख तथा न्यूनतम वर्ग विधि।

दो श्रेणियों के पारस्परिक माध्य सम्बन्ध को प्रकट करने वाली सर्वोपयुक्त रेखाओं को प्रतीपगमन रेखाएँ कहा जाता है। ये रेखाएँ एक श्रेणी के माध्य मूल्यों से सम्बन्धित दूसरे सर्वोत्तम माध्य मूल्यों को व्यक्त करती हैं। दो सम्बन्धित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होती हैं।

प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह दर्शाता है कि स्वतंत्र चर की श्रेणी में इकाई परिवर्तन होने पर आश्रित चर के मूल्यों में औसत परिवर्तन दर क्या होगी। वस्तुतः प्रतीपगमन गुणांक, प्रतीपगमन रेखा के ढाल द्वारा प्रदर्शित होता है।

23.13 अभ्यासार्थ प्रश्न :

23.13.1 वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

I. निम्नलिखित चार में से कौन सा सही है?

(i) प्रतीपगमन विश्लेषण मापन करता है :

(क) X और y श्रेणियों के बीच सहविचरणता के परिमाण का

(ख) y श्रेणी के विचरण का

(ग) X श्रेणी के विचरण का

(घ) X और y श्रेणियों के बीच फलनिक सम्बन्ध का

(ii) प्रतीपगमन रेखाएँ एक दूसरे को :

(क) X और y के माध्य (ख) केवल X के माध्य

(ग) केवल y के माध्य

(घ) X और y की माध्यिका के बिन्दु पर काटता है।

(iii) यदि उस बिन्दु से, जहाँ दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक–दूसरे को काटती है $X-$ अक्ष पर लम्ब खींचा जाय तो हमें प्राप्त होगा :

(क) X का समान्तर माध्य (ख) y का समान्तर माध्य

(ग) X का बहुलक मान (घ) X का माध्यिका मान

(iv) दो चरों की दशा में केवल एक प्रतीपगमन रेखा होगी यदि –

(क) r या तो +1 हो या –1 (ख) $r = +$ ही हो

(ग) $r = 0$ हो (घ) $r = -1$ ही हो

(v) जब एक प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक होता है तो दूसरा होग :

(क) ऋणात्मक (ख) शून्य (ग) धनात्मक (घ) इनमें से कोई नहीं

II. निम्नलिखित कथनों में से कौन सा सत्य/असत्य है :

(i) यदि b_{Xy} धनात्मक है तो b_{yX} भी धनात्मक होग। (स / अ)

(ii) यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है तो सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक होग। (स / अ)

(iii) दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक दूसरे को ढक लेती हैं जब चरों के मध्य सहसम्बन्ध या तो पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक होता है।(स / अ)

(iv) प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच कारण–प्रभाव का सम्बन्ध नहीं प्रकट करता है। (स / अ)

(v) स्थिरांक 'b' प्रतीपगमन रेखा के ढलान को दर्शाता है। (स /अ)

III. निम्नलिखित को पूर्ण कीजिए :

(क) सहसम्बन्ध गुणांक ––––– के गुणनफल का वर्गमूल होता है।

(ख) प्रतीपगमन रेखाएँ ------ की कल्पना पर खींची जाती है।

(ग) दोनों ------ गुणांकों के एक समान चिन्ह होने चाहिए।

(घ) यदि X के y पर प्रतीपगमन गुणांक का मान 1.4 है, तो y के X पर प्रतीपगमन गुणांक का मान ------ नहीं होगा।

(ङ.) प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच ------ का मापन करता है।

23.13.2 लघु–उत्तरात्मक प्रश्न

(i) प्रतीपगमन क्या है? आर्थिक विश्लेषण में इसकी उपयोग्तिा की व्याख्या कीजिए।

(ii) प्रतीपगमन गुणांकों की क्या विशेषताएँ है?

(iii) सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(iv) प्रतीपगमन समीकरणों में अचरांक 'b' के अर्थ की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

(v) 'विचरण अनुपात की अवधारणा' की सोदाहरण व्याख्या कीजिए।

23.13.3 निबन्धात्मक प्रश्न

(i)प्रतीपगमन अवधारणा की व्याख्या कीजिए। यह सहसम्बन्ध से किस प्रकार भिन्न है? प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती है? किन परिस्थितियों में केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा हो सकती है।

(ii)प्रतीपगमन रेखा किसे कहते हैं? इसे मापने की विधि स्पष्ट कीजिए।

(iii)प्रतीपगमन विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? प्रतीपगमन विश्लेषण की व्यावसायिक निर्णयों में उपयोग्तिा की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

(iv)सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन का अर्थ तथा आर्थिक विश्लेषण में इनकी उपयोगिता बताइए। प्रतीपगमन समीकरण किस प्रकार निकाले जा सकते हैं? उदाहरण देकर समझाइए।

(v)यदि r सहसम्बन्ध गुणांक है तो r^2 आश्रित चर में कुल विचरण का अनुपात है जिसका स्पष्टीकरण प्रतीपगमन विश्लेषण से होता है।

23.13.4 संख्यात्मक प्रश्न

(i) निम्न समंकों से y का अनुमानित मूल्य निकालिए यदि $X = 70$ और X का अनुमानित मूल्य निकालिए यदि $y = 90$

X	y

औसत मूल्य	18	100
प्रमाप विचलन	14	20

X और y में सहसम्बन्ध गुणांक $= +0.08$

(ii) दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा y का सम्भावित मूल्य ज्ञात कीजिए जबकि $X = 55$ है।

दिया हुआ है – $\overline{X} = 48,\ \overline{Y} = 55,\ \sigma_x = 4,\ \sigma_y = 5,\ r = +0.8$

(iii) निम्न आँकड़ों से दोनों प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए –

X :	8	6	4	7	5
Y :	9	8	5	6	2

(iv) नीचे पतियों तथा पत्नियों की आयु दी गयी है। ज्ञात कीजिए –

(अ) दो प्रतीपगमन समीकरण, (ब) सहसम्बन्ध गुणांक , तथा

(स) पति की सम्भावित आयु जबकि पत्नी की आयु 25 वर्ष है :

पतियों की आयु :	22	23	23	24	26	27	27	28	30	30
पत्नियों की आयु :	18	20	21	20	21	22	23	24	25	26

(v) निम्नलिखित समंकों से बिक्री और लाभ में विचरण–अनुपात ज्ञात कीजिए।

वर्ष :	1987	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
बिक्री (करोड़ में) :	36	42	33	30	24	21	27	31.5	25.5	28.5	34.5	27
लाभ (करोड़ में) :	21	26	24	23	15	14	18	19	17	21	22	20

23.14 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर

I. (i) – (घ) (ii) – (क) (iii) – (क) (iv) – (क) (v) – (ग)

II. (i) – (स) (ii) – (अ) (iii) – (स) (iv) – (अ) (v) – (स)

III. (क) दो प्रतीपगमन गुणांकों (ख) न्यूनतम वर्गों

(ग) प्रतीपगमन (घ) 0.714 से अधिक

(ङ.) फलनिक सम्बन्ध

संख्यात्मक प्रश्नों के उत्तर

(i) [$Y_{70} = 105.94$; $X_{90} = 17.44$, $X = 0.056 + 12.4$; $Y = 0.1143 + 97.94$]

(ii) [$X = 0.64y + 12.8$; $y = X + 7$; $Y_{55} = 62$]

(iii) [$b_{Xy} = 0.4$; $b_{yX} = 1.2$]

(iv) [$X = 1.107y + 1.646$; $y = 0.816X + 0.784$; $r = +0.95$; $X = 29.32$]

(v) [R.v. = 0.34]

23.15 संदर्भ ग्रन्थ सूची / उपयोगी पाठ्यसामग्री

1) बंसल, एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डी0 आर0, (1978), *सांख्यिकी के मूल तत्व,* शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा – 31;

2) नागर, कैलाश नाथ, (2005), *सांख्यिकी के मूल तत्व,* मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।

3) लाल, एस0 एन0, चतुर्वेदी, एस0, *सांख्यिकी,* प्रकाशन, इलाहाबाद।

4) Gupta, S. P., (2005), *Statistical Methods*, S. Chand, New Delhi.

5) Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Vol. I, The World Press Private Limited.

इकाई 24 सहसम्बन्ध विश्लेषण

24.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी में 'सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त' अति महत्वपूर्ण है। सहसम्बन्ध के अन्तर्गत हम दो चर मूल्यों के बीच परस्पर आश्रितता का अध्ययन करते है। इसके मूल–तत्वों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगेल–शास्त्री ब्रावे ने सन् 1846 के लगभग किया था, परन्तु इस सिद्धान्त को विकसित करने व आधुनिक रूप देने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री फ्रांसिस गाल्टन तथा कार्ल पियर्सन को प्राप्त है। इन प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने प्राणिशास्त्र तथा जनन–विद्या के क्षेत्र में सहसम्बन्ध के सिद्धान्त के आधार पर अनेक समस्याओं का वैज्ञानिक विश्लेषण किया है। सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह ज्ञात होता है कि दो सम्बन्धित चर मूल्यों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो अथवा दो से अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है।

नित्य के अनुभव से ऐसे कई उदाहरण हमारे सामने आते हैं जहाँ विभिन्न चर मूल्यों के बीच एक सम्बन्ध स्थापित होता है। उदाहरण के लिए, जैसे–जैसे बच्चों की ऊँचाई बढ़ती जाती है उनका भार भी बढ़ता है। एक समंक श्रेणी में परिवर्तित होने से दूसरी सम्बन्धित समंक–श्रेणी में भी परिवर्तन आता है। सामान्य अनुभव के आधार पर हम जानते हैं कि हमारे देश में कृषि उत्पादन का स्तर मानसून वर्षा के ऊपर निर्भर करता है। अच्छी वर्षा वाले वर्षों में कृषि उत्पादन का स्तर अधिक होता है, परन्तु मानसून प्रतिकूल हो जाने पर कृषि उत्पादन का स्तर कम हो जाता है। इसी प्रकार हम जानते हैं कि जिन कृषि जोतों में सिंचाई की व्यवस्था अच्छी होती है उनमें कृषि उत्पादन की प्रति हैक्टेयर उपज अधिक होती है, परन्तु असिंचित जोतों में प्रति हैक्टेयर उत्पादकता का स्तर निम्न होता है। इसी प्रकार चर–राशियों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों के बहुत से उदाहरण दिये जा सकते हैं। अर्थशास्त्र के विद्यार्थी भली–भाँति जानते हैं कि उपभोग व्यय व्यक्ति की आय के ऊपर निर्भर करता है, उत्पादन की कुल लागत उत्पादन स्तर के ऊपर निर्भर करती है, वस्तु की पूर्ति बढ़ने से उसकी कीमत ग्रि जाती है लेकिन वस्तु की माँग बढ़ने पर उसकी कीमत बढ़ जाती है तथा देश में मुद्रा की पूर्ति की मात्रा बढ़ने से सामान्य कीमत स्तर में वृद्धि होगी। गल्टन ने अध्ययन किया कि लम्बे पिताओं के पुत्र भी सामान्य रूप से लम्बे होते हैं। जब दो चर–मूल्यों में कार्य कारण–सम्बन्ध हो तो वे सह सम्बन्धित कहलाते है।

जब कभी दो चर मूल्यों में ऐसा सम्बन्ध हो कि एक में परिवर्तन होने से दूसरे में भी परिवर्तन हो – एक में वृद्धि होने पर दूसरे में वृद्धि या कमी हो अथवा एक में कमी होने पर दूसरे में कमी या वृद्धि हो तो ये चर–मूल्य सह–सम्बन्धित कहलाते है। इस गुण को सह–सम्बन्ध कहते हैं। एक चर मूल्य में अधिक परिवर्तन होने पर यदि दूसरे चर–मूल्य में भी अधिक परिवर्तन हो तो सह–सम्बन्ध की मात्रा अधिक होगी।

उपर्युक्त उदाहरणों में हमने दो चरों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों की चर्चा की। प्रायः सम्बन्ध तीन अथवा उससे अधिक चरों में भी हो सकते हैं – जैसे कृषि उत्पादन के क्षेत्र में किसी फसल की प्रति हैक्टेयर उत्पादकता, सिँचाई सुविधाओं के अतिरिक्त उर्वरकों की मात्रा, श्रम एवं पूँजी की मात्रा, बीजों की किस्म तथा कीटनाशकों के प्रयोग के उपर निर्भर करती है। किसी वस्तु की माँग–मात्रा वस्तु की कीमत के अतिरिक्त उपभोक्ता की आय, अन्य वस्तुओं की कीमतें, अभिरुचियों इत्यादि पर निर्भर करती है। इसी प्रकार किसी परिवार का वार्षिक उपभोग व्यय, वार्षिक आय के अतिरिक्त परिवार के आकार, परिवार के सदस्यों की अभिरुचियाँ, परिवार की सामाजिक प्रतिष्ठा इत्यादि पर निर्भर करेगा। इस प्रकार के सांख्यिकीय विश्लेषण को, जिसमें चरों की संख्या दो होती है द्विचरीय विश्लेषण भी कहा जाता है तथा जिसमें चरों की संख्या तीन अथवा इससे अधिक होती है, उसे बहुचरीय विश्लेषण कहा जाता है।

24.2 उद्‌देश्य

- सहसम्बन्ध को परिभाषित करना
- प्रकीर्ण आरेख, रेखाचित्र, कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक, कोटि–अन्तर से सहसम्बन्ध गुणांक , संगामी विचलन गुणांक इत्यादि का विवेचन करना।

24.3 परिभाषा

सह–सम्बन्ध विश्लेषण की कुछ परिभाषाएँ :

(1) ''यदि दो या दो से अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती है जिससे एक में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवृत्ति पायी जाती है, तो वे राशियाँ सह–सम्बन्धित कहलाती है।'' – एल0 आर0 कॉनर

(2)''यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में चर सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में उच्चावचन की प्रवृत्ति रखते है, तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझते हैं कि उनमें एक सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सहसम्बन्ध कहलाता है।'' – डब्ल्यू0 आई0 किंग

(3)''सह–सम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय पृथक विशेषताओं के बीच पाये जाने वाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है जिसके अनुसार वे कुछ अंशों में साथ–साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति रखते है।''– डेवनपोर्ट

(4)''जब सम्बन्ध मात्रात्मक प्रकृति का होता है, तो उस सम्बन्ध को खोजने तथा मापन करने और उसे एक संक्षेप सूत्र में अभिव्यक्त करने का उपयुक्त सांख्यिकीय उपकरण सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।''– क्रॉक्स्टन एवं काउडेन

(5)''सहसम्बन्ध विश्लेषण चरों के बीच 'सम्बन्ध की मात्रा' को निर्धारित करने का प्रयास करता है।''– या लुन चाऊ

(6)''जब कभी आँकड़ों के दो या अधिक समूहों, वर्गों या श्रेणियों में कुछ निश्चित सम्बन्ध पाया जाता है तो वह सहसम्बन्ध कहलाता है।'' – बाडिंगटन

उपर्युक्त परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि पद 'सहसम्बन्ध' दो या दो से अधिक चरों के बीच सम्बन्ध का अध्ययन करने का संकेत करता है।

24.4 उपयोगिता / महत्त्व

सहसम्बन्ध के अध्ययन की उपयोग्तिा भौतिक विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान, दोनों में ही पर्याप्त है, तथापि हम यहाँ केवल सामाजिक विज्ञान में सहसम्बन्ध अध्ययन की उपयोगिता की ही व्याख्या करेगें।

(1)सहसम्बन्ध का अध्ययन निर्णयन लेने से सम्बन्धित अनिश्चित ता के परास को कम करता है। सामाजिक विज्ञान, विशिष्टतया व्यावसायिक जग्त में, पूर्वानुमान एक महत्त्वपूर्ण तत्व या परिघटना और सहसम्बन्ध अध्ययन सापेक्षतः अधिक विश्वसनीय पूर्वानुमानों के करने में हमारी मदद करता हैं।

(2)सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में सहायक होता है। यह हमें ऐसे चरों को निर्धारित करने में सहायता करता है जिन पर अन्य चर निर्भर रहते हैं। यह उन घटकों या कारकों के अध्ययन करने में सहायक होता है जिससे आर्थिक घटनाएँ प्रभावित होती है। उदाहरणार्थ, हम मूल्य वृद्धि अथवा निम्न उत्पादकता के उत्तरदायी कारकों को जान सकते हैं।

(3)सहसम्बन्ध अध्ययन हमें ऐसे कारकों की पहचान करने में मदद करता है जो एक बाधाग्रस्त आर्थिक स्थिति का स्थायीकरण कर सकता है।

(4)सहसम्बन्ध अध्ययन एक चर में संभाव्य परिवर्तन का सम्बंद्ध दूसरे चर में परिवर्तन की विशिष्ट राशि के साथ आकलन करने में हमारी मदद करता है। उदाहरणार्थ, सहसम्बन्ध अध्ययन कीमत में एक निश्चित राशि के परिवर्तन से माँग में परिवर्तन जानने में मदद कर सकता है। इस दशा में हम समाश्रयण विश्लेषण की सहायता लेते हैं।

(5)विभिन्न चरों के बीच अन्तर–सम्बन्ध अध्ययन अनुसंधान संवर्द्धन करने तथा ज्ञान के नये क्षेत्र खोलने में बहुत ही सहायक उपकरण होते हैं।

इस प्रकार सहसम्बन्ध अध्ययनों का विभिन्न उद्देश्यों के लिए व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है और उन्हें दो या अधिक चरों से सम्बन्धित सांख्यिकीय आँकड़ों के विस्तृत विश्लेषण और निर्वाचन के लिए बुनियादी उपकरण समझा जाता है।

24.5 क्या सहसम्बन्ध कारण – प्रभाव का सम्बन्ध है?

यद्यपि 'सहसम्बन्ध' शब्द का प्रयोग दो या दो से अधिक चरों में परस्पर आश्रयता के अर्थ में किया जाता है, तथापि यह आवष्यक नहीं है कि उनमें परस्पर आश्रयता के परिणामस्वरूप ही सहसम्बन्ध हो। दो चरों में बहुत बड़ी मात्रा का सहसम्बन्ध भी आवश्यक रूप से इस बात का द्योत्तक नहीं है कि उनमें कारण और प्रभाव का सहसम्बन्ध हो। दो चरों के बीच सहसम्बन्ध निम्नलिखित कारणों में से किसी एक या अधिक का कारण हो सकता है –

(1) दो चरों में सहसम्बन्ध कारण–प्रभाव का सम्बन्ध होता है

एक चर में परिवर्तन दूसरे चर के परिवर्तन का कारण हो सकता है और इस प्रकार ऐसे दो चरों या श्रेणियों में कारण–प्रभाव का सम्बन्ध होग। भौतिक विज्ञान में सहसम्बन्ध का

अध्ययन कठिन नहीं है क्योंकि वहाँ प्रयोगों के आधार पर दो या दो से अधिक चरों के मानों में गणितीय सम्बन्ध स्थापित किए जा सकते हैं। जैसे ताप और तापक्रम में सहसम्बन्ध हो सकता है क्योंकि ताप तापक्रम को प्रभावित करता है। उनमें कारण–प्रभाव का सम्बन्ध हो सकता है। पर सामाजिक विज्ञान में ऐसे सम्बन्ध मुश्किल से पाये जाते हैं। कारण यह है कि सामाजिक विज्ञान में आँकड़े कारणों के बाहुल्य से प्रभावित होते हैं। एक चर साथ–साथ बहुसंख्यक कारकों द्वारा प्रभावित होता है और जिनके व्यक्तिग्त प्रभावों को अलग नहीं किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, मूल्य में वृद्धि, माँग में परिवर्तन, स्फीति, निर्यात नीति और इसी प्रकार के बहुत से अन्य कारकों के कारण हो सकता है। यह ज्ञात करना लग्भग असम्भव है कि मूल्यों में वृद्धि का कौन सा कारण (या प्रमुख कारण) है। इस प्रकार, सामाजिक विज्ञान में सहसम्बन्ध कारण–प्रभाव सम्बन्ध को मुश्किल से संकेतिक है।

(2) दोनों सहसम्बन्धित चर एक तीसरे चर या एक से अधिक चरों से प्रभावित होते हैं

जैसे हम चावल की कीमतों और जूट की कीमतों में उच्च मात्रा का सहसम्बन्ध पा सकते हैं। वास्तविकता में यह पाया जा सकता है कि इन दोनों वस्तुओं की कीमतें उत्पादन द्वारा प्रभावित हो जो बदले में वर्षा द्वारा प्रभावित हो सकती है। चावल की कीमतों और जूट की कीमतों में कोई वास्तविक सम्बन्ध नहीं हो सकता है। ऐसी दशाओं में सहसम्बन्ध भ्रमात्मक निष्कर्ष प्रदान कर सकता है।

(3) सम्बद्ध चर एक–दूसरे को पारस्परिक रूप से प्रभावित कर रहे हो जिससे उनमें से किसी एक को कारण या प्रभाव के रूप में नहीं माना जा सकता

यह स्थिति विशिष्टतया आर्थिक और व्यावसायिक क्षेत्र में होती है। जैसे किसी वस्तु की माँग में मूल्यों में वृद्धि के परिणामस्वरूप ग्रिावट आ सकती है। सामान्य रूप से यह कहा जा सकता है कि एक व्यक्ति मानेग कि मूल्य कारण है और माँग प्रभाव है। तथापि यह भी हो सकता है कि उस वस्तु की माँग भविष्य में प्रत्याशित कमी के कारण बढ़ ग्यी हो और जिसके कारण मूल्य में वृद्धि हो ग्यी हो। अब इस दशा में माँग कारण होग और मूल्य प्रभाव होग।

(4) सहसम्बन्ध यादृच्छिक या सांयोगिक कारकों के कारण हो सकता है

बारंबार दो चरों में सहसम्बन्ध उनमें बिना किसी वास्तविक सम्बन्ध के भी देखा जाता है। यह संयोग से हो सकता है। ऐसा साधारणतया घटित होता है जब एक वृहत् समष्टि से एक बहुत अल्प प्रतिदर्श चुना जाता है। उदाहरणार्थ, एक अल्प प्रतिदर्श मजदूरी और उत्पादकता के बीच बहुत उच्च सहसम्बन्ध प्रदान कर सकता है जिससे हम यह विश्वास कर सकते हैं कि उच्चतर मजदूरी उच्चतर उत्पादकता का कारक है। पर समष्टि में वास्तविक स्थिति ठीक इसके विपरीत हो सकती है, उच्चतर मजदूरी से निम्न उत्पादकता हो सकती है अथवा उनमें कोई सहसम्बन्ध न हो। अतः यह आवश्यक है कि जब हम दो चरों के बीच सहसम्बन्ध का विश्लेषण कर रहे हों, तो हमे निष्कर्ष निकालने में जल्दबाजी नहीं करनी चाहिए।

(5) अध्ययनाधीन दो चरों में निरर्थक या मिथ्या सहसम्बन्ध की स्थिति हो सकती है

एक व्यक्ति प्रतिवर्ष तलाकों की संख्या तथा टेलीविजन सेटों के निर्यात के बीच उच्च मात्रा का सहसम्बन्ध निकाल सकता है। स्पष्टतया तलाकों और टेलीविजन निर्यातों के बीच कोई सम्बन्ध नहीं हो सकता है और इसलिए यह बात सत्य है कि सहसम्बन्ध केवल सम्बद्ध चरों में सम्बन्ध को ही परिभाषित करता हैं।

उपर्युक्त बातों से यह स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध केवल एक गणितीय सम्बन्ध है, और यह आवश्यक रूप से चरों में कारण–प्रभाव सम्बन्ध को संज्ञापित नहीं करता है।

24.6 सहसम्बन्ध के प्रकार

विभिन्न आधारों को लेकर हम सहसम्बन्ध का वर्गीकरण निम्न प्रकार कर सकते है :

24.6.1 धनात्मक और ऋणात्मक सहसम्बन्ध

सहसम्बन्ध धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकते हैं। जब दो चरों में एक ही दिशा में परिवर्तन होता है अर्थात् एक में वृद्धि (या कमी) होने से दूसरे चर के मूल्यों में भी वृद्धि (या कमी) होती है तो ऐसा सहसम्बन्ध प्रत्यक्ष अथवा धनात्मक कहलाता है। इसके विपरीत, जब एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे सम्बद्ध चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन होते हैं तो उनका सहसम्बन्ध ऋणात्मक , अप्रत्यक्ष या विलोम कहलाता है। कुछ ऐसे आँकड़े होते हैं जिनमें सहसम्बन्ध सामान्यतः धनात्मक और कुछ ऐसे जिसमें सामान्यतः ऋणात्मक होता है, जैसे अन्य बाते सामान्य रहे तो मूल्य और

पूर्ति में साधारण तौर पर धनात्मक सहसम्बन्ध होता है। जब मूल्य बढ़ता है तो पूर्ति भी बढ़ती है और जब मूल्य घटता है तो पूर्ति भी घटती है। मूल्य और माँग में सहसम्बन्ध साधारणतः ऋणात्मक होता है। मूल्य में वृद्धि के साथ माँग घटती है और मूल्य के घटने के साथ माँग में साधारणतः वृद्धि होती है।

धनात्मक सहसम्बन्ध

कीमत (price)	10	15	20	25
पूर्ति (supply)	100	110	115	130

अथवा

मूल्य या कीमत (price)	40	30	20	10
पूर्ति (supply)	150	140	115	100

ऋणात्मक सहसम्बन्ध

मूल्य या कीमत (price)	10	15	20	25
माँग (demand)	100	90	80	60

अथवा

मूल्य या कीमत (price)	25	20	15	10
माँग (demand)	60	80	90	100

24.6.2 रेखीय तथा वक्ररेखीय सहसम्बन्ध

परिवर्तनों के अनुपात के आधार पर सहसम्बन्ध रेखीय अथवा वक्र–रेखीय हो सकता है। यदि दो चर–मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात स्थायी होता है तो उनका सहसम्बन्ध रेखीय कहलाता है; अर्थात्, यदि प्रत्येक बार मूल्य में 10 प्रतिशत की वृद्धि हो तो पूर्ति में 20 प्रतिशत वृद्धि, रेखीय सम्बन्ध का प्रमाण देगी। उनमें सम्बन्ध $y = a + bX$ के रूप में

होग। यह एक सीधी रेखा का समीकरण होता है। रेखीय सहसम्बन्ध वाले चर–मूल्यों को बिन्दुरेख पर प्रांकित करने से एक सरल रेखा बन जाती है। इस प्रकार का सह–सम्बन्ध भौतिक व पूर्ण विज्ञानों में पाया जाता है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में अधिकतर वक्ररेखीय सहसम्बन्ध पाया जाता है। जब दो चर–मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात अस्थिर या परिवर्तनशील होता है तो उनका सहसम्बन्ध वक्र–रेखीय होता है। यदि मुद्रा की मात्रा में 10 प्रतिशत वृद्धि होने से कभी सामान्य कीमत स्तर में 5 प्रतिशत वृद्धि हो जाती है, कभी 6 प्रतिशत, कभी 9 प्रतिशत तो मुद्रा की मात्रा और सामान्य कीमत स्तर का सह–सम्बन्ध वक्ररेखीय कहलाएगा। ऐसी स्थिति में रेखाचित्र पर चर–मूल्यों को प्रांकित करने से एक वक्र रेखा बनेगी।

रेखीय या रैखिक सहसम्बन्ध

X	2	4	6	8	10
y	5	10	15	20	25

अरेखीय या अरैखिक सहसम्बन्ध

X	2	4	6	8	10
y	5	8	12	15	25

24.6.3 सरल, बहुगुणी एवं आंशिक सह–सम्बन्ध

स्वतंत्र तथा आश्रित चर–मूल्यों की संख्या के आधार पर सह–सम्बन्ध सरल, बहुगुणी या आंशिक हो सकता है।

दो चर–मूल्यों के सह–सम्बन्ध को सरल सहसम्बन्ध कहते हैं। इन चर–मूल्यों में से अनाश्रित या प्रधान चर–मूल्य को प्रमाप या आधार श्रेणी कहा जाता है तथा दूसरा समंक–समूह आश्रित चर–मूल्य या सम्बद्ध माला कहलाता है।

जब तीन या अधिक कारकों, जैसे उत्पादन, वर्षा और खाद के उपयोग के बीच सम्बन्ध का साथ–साथ अध्ययन किया जाता है, तो इसे 'बहु सहसम्बन्ध कहते हैं। आंशिक सह–सम्बन्ध के अन्तर्गत दो से अधिक चर–मूल्यों का अध्ययन किया जाता है परन्तु अन्य

चर–मूल्यों के प्रभाव को स्थिर रखकर केवल दो चर–मूल्यों का पारस्परिक सम्बन्ध निकाला जाता है। उदाहरणार्थ, यदि वर्षा की मात्रा और तापक्रम दोनों के गेंहूॅ की उपज पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाए तो वह बहुगुणी सहसम्बन्ध कहलाएगा। इसके विपरीत यदि एक स्थिर तापक्रम में वर्षा की मात्रा और गेंहू की उपज के सम्बन्ध का विवेचन किया जाये तो यह आंशिक सहसम्बन्ध कहलाएगा।

24.7 सहसम्बन्ध गुणांक और उसका विस्तार

गैरेट के अनुसार, ''सहसम्बन्ध गुणांक दो चलराशियों में पाये जाने वाला ऐसा अनुपात है जिससे यह ज्ञात होता है कि एक चर में होने वाले परिवर्तन ज्ञात दूसरे चर पर किस मात्रा में प्रभाव डालते हैं अथवा किस मात्रा में उसका अनुसरण करते हैं।'' अतः स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणांक दो या अधिक प्रवृत्तियों के परिमाणात्मक सम्बन्ध को स्पष्ट करता है। वास्तव में यह एक प्रकार का सूचकांक है।

सहसम्बन्ध की मात्रा +1 से –1 तक होती है अर्थात् सहसम्बन्ध कभी भी 1 से अधिक नहीं होता है चाहे यह धनात्मक हो या ऋणात्मक। जब सहसम्बन्ध की मात्रा +1 आती है तो पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध होता है और जब सहसम्बन्ध की मात्रा –1 होती है तो इसे पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहते हैं। लेकिन समाज विज्ञानों से सम्बन्धित चल राशियों में पूर्ण ऋणात्मक अथवा धनात्मक सहसम्बन्ध नहीं आता है। सहसम्बन्ध की मात्रा को निम्न प्रकार से भी प्रदर्शित किया जा सकता है :

–1, –.9, –.8, –.7, –.6, –.5, –.4, –.3, –.2, –.1, 0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1

$\longleftarrow \quad - \quad | \quad + \quad \longrightarrow$

सहसम्बन्ध की व्याख्या (interpretation of correlation) सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले यदि (+) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध धनात्मक (positive) है और यदि सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले (–) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध

ऋणात्मक (negative) है। ग्लिफोर्ड ने सहसम्बन्ध की मात्रा का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया है :

सहसम्बन्ध गुणांक की मात्रा	सम्बन्ध
$.00 \rightarrow \pm .20$	नगण्य (Negligible)
$\pm .21 \rightarrow \pm .40$	निम्न (Low)
$\pm .41 \rightarrow \pm .60$	साधारण (मध्यम) (Moderate)
$\pm .61 \rightarrow \pm .80$	उच्च (High)
$\pm .81 \rightarrow \pm .99$	अति उच्च (Very High)
± 1	पूर्ण सहसम्बन्ध

ऊपर दी हुई तालिका के आधार पर सहसम्बन्ध की व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि सहसम्बन्ध की मात्रा +.85 है तो यहा कहा जाएगा कि दी हुई चलराशियों में धनात्मक और बहुत उच्च सहसम्बन्ध है। धनात्मक सहसम्बन्ध में चलराशियाँ किस प्रकार से एक दूसरे से प्रभावित होती है, यह भी एक रोचक तथ्य है।

24.8 सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ हैं –

(1) बिन्दु रेखीय रीति

(2) विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र

(3) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक

(4) स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि

(5) संगमी विचलन रीति

(5) न्यूनतम वर्ग रीति

24.8.1 बिन्दु रेखीय रीति

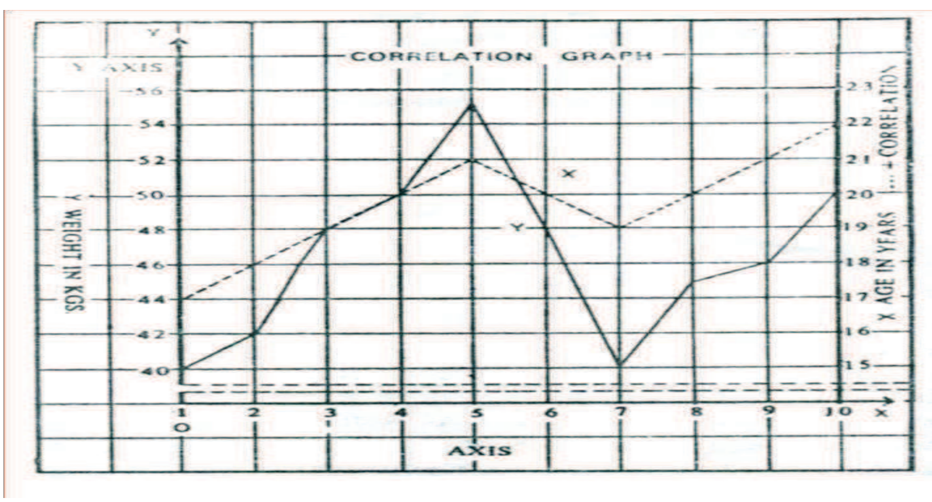
इस रीति के अनुसार हम सहसम्बन्ध का अनुमान समय, स्थान, क्रम संख्या आदि को X-axis पर और दोनों आश्रित समंकमालाओं को Y-axis पर अंकित करते है। इस विधि से सहसम्बन्ध की मात्रा का ज्ञान नहीं होता बल्कि इसकी दिशा और मात्रा का अनुमान किया जाता है। दोनों श्रेणियों के बिन्दुरेखा विपरीत दिशाओं में उतार–चढ़ाव को प्रदर्शित करें तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। यदि दोनों श्रेणियों के परिवर्तनों की प्रवृत्ति उसी दिशा या विपरीत दिशाओं में न दिखाई दे तो कोई सहसम्बन्ध नहीं होगा।

उदाहरण : 1

निम्न आँकड़ों से एक सहसम्बन्ध बिन्दु रेखाचित्र बनाइए :

उम्र (वर्षों में)	17	18	19	20	21	20	19	20	21	22
वनज (कि0 ग्रा0 में)	40	42	48	50	55	48	40	45	46	50

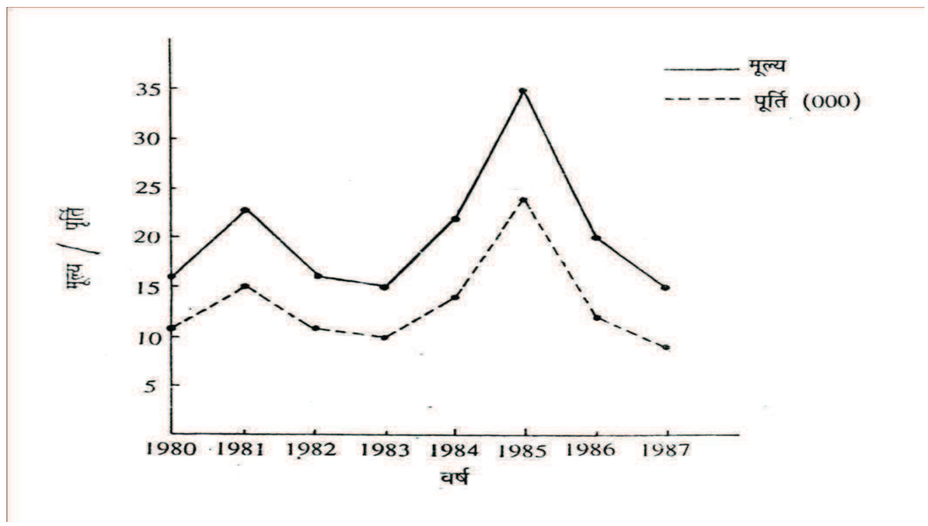
क्या उम्र एवं वनज में कोई सहसम्बन्ध है?



उदाहरण : 2

मूल्य तथा वस्तु की पूर्ति के सम्बन्ध में नीचे दिये गये आँकड़ों के आधार पर ग्राफिक विधि से मूल्य तथा पूर्ति के बीच सहसम्बन्ध पर प्रकाश डालिए।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
मूल्य प्रति क्विंटल	16	23	16	15	22	35	20	15
पूर्ति क्विंटल	11000	15000	11000	10000	14000	24000	12000	9000



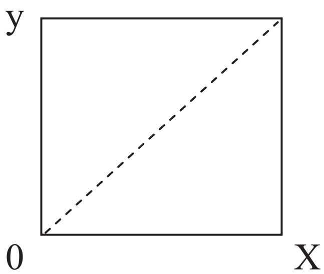
स्पष्ट है कि दोनों समंकमालाओं के बीच सहसम्बन्ध है।

24.8.2 विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र

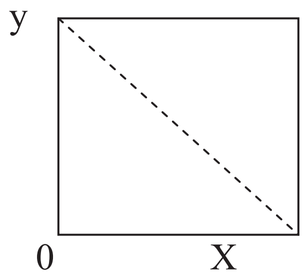
इस विधि से भी सह–सम्बन्ध की मात्रा का ज्ञान नहीं होता, बल्कि इसकी दिशा और मात्रा का अनुमान किया जाता है। इस रीति में स्वतंत्र चर मूल्यों (X) को X-axis पर तथा आश्रित चर मूल्यों (y) को Y-axis पर अंकित किया जाता है। इस प्रकार X तथा y दोनों समंकमालाओं के जितने पदयुग्म होते हैं उतने ही बिन्दु रेखाचित्र पर अंकित कर दिए जाते हैं। इस प्रकार के चित्र को ही विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र कहते हैं।

निम्न पाँच चित्रों की सहायता से हम सह–सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान लगा सकते हैं :

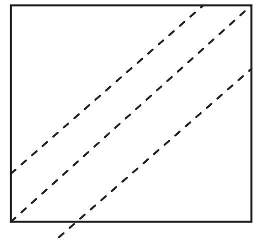
(i) (ii) (iii)



$r = +1$

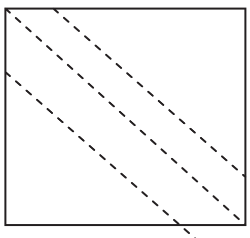


$r = -1$

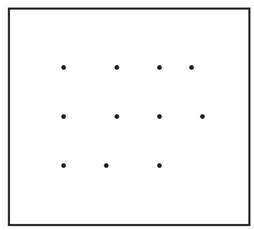


Limited Positive

(iv) (v)



Limited Negative



No Correlation

उदाहरण : 3

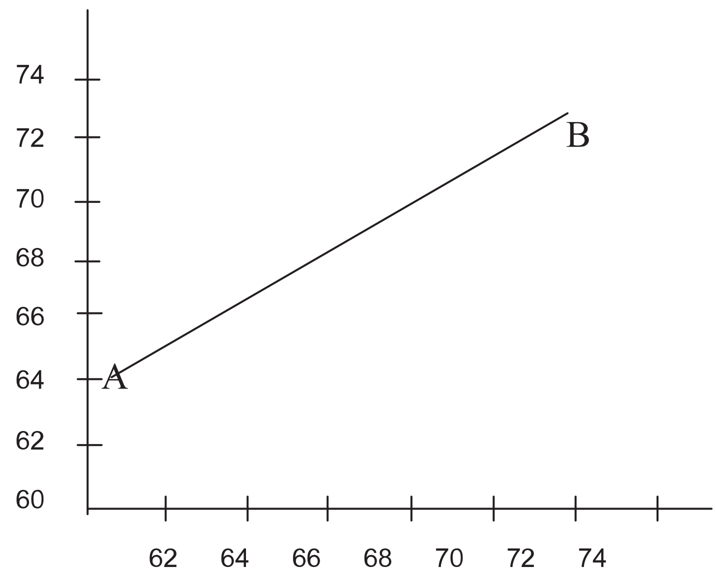
निम्नलिखित सारिणी में 12 पिता तथा उनके अग्रज पुत्रों के भार सम्बन्धी आँकड़े प्रदर्शित हैं –

पिता का भार (Kg)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
पुत्र का भार (Kg)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

आँकड़ों को विक्षेप चित्र के द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

दिए हुए आँकड़ों में प्रथम, पिता तथा पुत्र के भार क्रमशः 65 तथा 68 कि0ग्रा0 है। इन्हें ग्राफ पर बिन्दु के रूप में अंकित किया जाता है। तत्पश्चात् द्वितीय पिता तथा पुत्र के भारों को ग्राफ पर बिन्दु के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। इसी प्रकार अन्य पिता तथा पुत्रों के भारों को ग्राफ पर विभिन्न बिन्दुओं के रूप में अंकित कर लिया जाता है। इन बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ AB दोनों चर राशियों के मध्य सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है।

नीचे चित्र में AB अंकित बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ है। अन्य शब्दों में सम्बन्धित चर राशियों के बीच रेखीय सम्बन्ध है।



विक्षेप चित्र की भाषा में सहसम्बन्ध प्रवृत्ति पथ से विक्षेप बिन्दुओं की निकटता की माप करता है। यदि सभी विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ पर स्थित हैं तो ऐसी स्थिति में चरराशियों के मध्य पूर्ण सहसम्बन्ध होगा तथा फलनात्मक सम्बन्ध (प्रस्तुत उदाहरण में सरल रेखा AB) दिये हुए समंक को पूर्ण रूप से प्रदर्शित करेग। परन्तु यदि विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ के दोनों ओर बिखरे हुए हैं तो ऐसी स्थिति में चरराशियों के मध्य अपूर्ण सहसम्बन्ध होगा अर्थात् प्रवृत्ति पथ 'AB' चर राशियों के मध्य सम्बन्ध को पूर्ण रूप से प्रदर्शित नहीं करेग। विक्षेप बिन्दुओं के प्रवृत्ति पथ के सन्निकट होने पर यह सहसम्बन्ध प्रबल होगा तथा यदि विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ के दोनों ओर दूर–दूर तक फैले हुए हैं, तो ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध निर्बल होगा।

24.8.3 कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक

सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की यह सर्वश्रेष्ठ विधि है क्योंकि इससे सहसम्बन्ध का संख्यात्मक माप भी प्राप्त होता है। समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित इस रीति में गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता है। इस रीति का का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने सन्

1890 में प्राणिशास्त्र की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए किया था। कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणक निम्न मात्राओं पर आधारित है :

(i) दोनों श्रेणियों में रेखीय सम्बन्ध है।

(ii) समंकमाला को प्रभावित करने वाले स्वतंत्र कारणों में परस्पर कारण व प्रभाव का सम्बन्ध होता है।

(iii) सह–सम्बन्धित श्रेणियों पर अनेक कारणों से सामानता आ जाती है।

कार्ल पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणांक की प्रमुख विशेषताएँ निम्न है :

(a) यह गुणांक श्रेणी के सभी पदों पर आधारित है।

(b) इससे सह–सम्बन्ध की दिशा ज्ञात हो जाती है।

(c) चूँकि यह गुणांक समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित है, इसलिए अनेक बीजगणितीय गुणयुक्त है।

(d) इसको ज्ञात करने के लिए दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य निकाल कर विचलनों की गणना की जाती है और इसके बाद इनका गुणनफल निकाल कर उसके जोड़ में मूल्यों की संख्या से भाग दिया जाता है। इसे सह–विचलन कहते हैं। इस विधि में प्रयोग किया जाने वाला सूत्र इस प्रकार है –

$$r = \frac{\sum dx.dy}{N\sigma_x.\sigma y}$$

जहाँ – r = सहसम्बन्ध गुणांक

dX = X के मानों का उसके माध्य ($\overline{X}$) से विचलन

dy = y के मानों का उसके माध्य ($\overline{Y}$) से विचलन

σ_X = X समंक माला का प्रमाप विचलन

σ_y = y समंक माला का प्रमाप विचलन

N = पदों की संख्या

सूत्र से स्पष्ट है कि दो समंक मालाओं के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम प्रत्येक समंक माला का माध्य ($\overline{X}$ एवं $\overline{Y}$) ज्ञात करते हैं। इसके बाद प्रत्येक समंक माला के सभी पदों का उनके माध्य से विचलन ज्ञात कर लेते हैं, जिन्हें dX एवं dy द्वारा व्यक्त किया जाता है। फिर प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए विचलनों dX तथा dy का वर्ग (dX^2 एवं dy^2) करके उनका अलग– अलग योग (ΣdX^2 एवं Σdy^2) ज्ञात कर लेते हैं। इसके अतिरिक्त विचलनों dX एवं dy का गुणनफल करके उनका योग $\Sigma(dX.dy)$ निकाल लिया जाता है। उपरोक्त सूत्र में –

$\frac{\sum(dx.dy)}{N}$ को सह–विचरण (co-variance) कहते हैं।

उदाहरण : 4सन् 2008 की परीक्षा में दस विद्यार्थियों द्वारा अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी में पाये गये प्राप्तांकों का विवरण इस प्रकार है –

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
प्राप्तांक (अर्थशास्त्र)	47	57	58	60	62	67	70	71	76	82
प्राप्तांक (सांख्यिकी)	56	50	47	60	62	64	65	70	74	82

हल : निम्न सारणी में अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों को 'X' एवं सांख्यिकी के प्राप्तांकों को 'y' के द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

विद्यार्थी	प्राप्तांक (X)	अर्थ0 के प्राप्तांकों का माध्य (65) से विचलन (dX)	dX^2	प्राप्तांक (y)	सांख्य0 प्राप्तांकों का माध्य (63) से विचलन dy	dy^2	$dX.dy$

A	47	−18	324	56	−7	49	126
B	57	−8	64	50	−13	169	104
C	58	−7	49	47	−16	256	112
D	60	−5	25	60	−3	9	15
E	62	−3	9	62	−1	1	3
F	67	2	4	64	1	1	2
G	70	5	25	65	2	4	10
H	71	6	36	70	7	49	42
I	76	11	121	74	11	121	121
J	82	17	289	82	19	361	323
N=10	650		946	630		1020	858

अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों का औसत –

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{650}{10} = 65$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{946}{10}} = \sqrt{94.6} \cong 9.7 \quad (\text{लगभग } 9.7)$$

सांख्यिकी के प्राप्तांकों का औसत –

$$\bar{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{630}{10} = 63$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}} = \sqrt{\frac{1020}{10}} = \sqrt{102} \cong 10.1$$

अब सहसम्बन्ध गुणांक $r = \dfrac{\sum (dx.dy)}{N\sigma_x.\sigma_y}$

$$= \frac{858}{10(9.7)(10.1)}$$

$$= \frac{858}{979.7} = 0.88 \text{ लगभग}$$

अतः अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के प्राप्तांकों के मध्य उच्च धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

अन्य शब्दों में जिन विद्यार्थियों ने सांख्यिकी में उच्च अंक प्राप्त किए है उनके अर्थशास्त्र में भी उच्च अंक है।

कार्ल पियर्सन के उपरोक्त सूत्र को ध्यानपूर्वक देखने से हम पाते हैं कि यदि इस सूत्र को एक अन्य रूप में लिखा जाय तो प्रत्येक समंक माला का प्रमाप विचलन निकालने की आवश्यकता नहीं पड़ती है एवं सहसम्बन्ध गुणांक की गणना पहले की अपेक्षा सरलता से हो जाती है।

कार्ल पियर्सन के सूत्र का सरलीकृत रूप –

$$r = \frac{\sum (dx.dy)}{N\sigma_x.\sigma_y}$$

$$= \frac{\sum (dx.dy)}{N \times \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} \times \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}}} = \frac{\sum (dx.dy)}{N \times \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} \times \frac{\sum dy^2}{N}}}$$

$$= \frac{\sum (dx.dy)}{\frac{N}{N}\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}} = \frac{\sum (dx.dy)}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$$

अब इस सूत्र में केवल $\sum (dx.dy), \sum dx^2$ एवं $\sum dy^2$ का मान रखकर सहसमबन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। जैसे उदाहरण 5 के लिए –

$$r = \frac{\sum (dx.dy)}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$$

$$= \frac{858}{\sqrt{(946)(1020)}} = \frac{858}{\sqrt{964920}} = \frac{858}{982} = 0.88 \text{ (लगभग)}$$

उपर्युक्त सूत्रों का दोष यह है कि यदि 'X' तथा 'y' श्रृंखलाओं के माध्यों के मान दशमलव में आते हैं तो इनके द्वारा सहसम्बन्ध की गणना की क्रिया अत्यंत जटिल हो जाती है।

अतः X तथा Y के मूल्यों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग अधिक व्यावहारिक होता है –

$$r = \frac{N\sum xy - \sum x.\sum y}{\sqrt{\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}\{N\sum y^2 - (\sum y)^2\}}}$$

यह सूत्र गणना की दृष्टि से काफी सरल है। इसका कारण यह है कि इस सूत्र के अन्तर्गत सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए न तो हमें X एवं y के माध्यों को ज्ञात करना पड़ता है और न ही माध्य से विचलनों (dX एवं dy) अथवा प्रमाप विचलनों (X व y) की गणना करनी पड़ती है।

प्रस्तुत उदाहरण में उपर्युक्त सूत्र के द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न सारिणी के माध्यम से की गयी है।

उदाहरण : 5

विद्यार्थी	प्राप्तांक (X)	प्राप्तांक (y)	X^2	y^2	Xy
A	47	56	2209	3136	2632
B	57	50	3249	2500	2850
C	58	47	3364	2209	2726

D	60	60	3600	3600	3600
E	62	62	3844	3844	3844
F	67	64	4489	4096	4288
G	70	65	4900	4225	4550
H	71	70	5041	4900	4970
I	76	74	5776	5476	5624
J	82	82	6724	6724	6724
N = 10	650	630	43196	40710	41808

उपर्युक्त सारिणी से –

$$N = 10, \ \sum x = 650, \ \sum y = 63, \ \sum x^2 = 43196, \ \sum y^2 = 40710, \ \sum xy = 41808$$

इन मानों को सहसम्बन्ध गुणांक   के सूत्र में रखने पर –

$$r = \frac{N\sum xy - \sum x.\sum y}{\sqrt{\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}\ \{N\sum y^2 - (\sum y)^2\}}}$$

$$= \frac{10(41808) - (650)\ (630)}{\sqrt{\{10(43196) - (650)^2\}\ \{10(40710) - (630)^2\}}}$$

$$= \frac{418080 - 409500}{\sqrt{\{10(43196) - (650)^2\}\ \{10(40710) - (630)^2\}}}$$

$$= \frac{418080 - 409500}{\sqrt{\{431960 - 422500\}\ \{407100 - 396900\}}}$$

$$= \frac{8580}{\sqrt{9460 \times 10200}} = \frac{8580}{\sqrt{9460 \times 102 \times 100}} = \frac{8580}{10\sqrt{9460 \times 102}}$$

$$= \frac{858}{\sqrt{964920}} = \frac{858}{982} = 0.88 \text{ (लगभग)}$$

मूल–बिन्दु एवं तुलना मापदण्ड में परिवर्तन (Change of Origin and Scale)

सहसम्बन्ध गुणांक का यह एक महत्वपूर्ण अभिलक्षण है कि वह एक विमाहीन गुणांक होता है अर्थात् वह एक ऐसा निरपेक्ष, शुद्ध अंक है जो मूल–बिन्दु और तुलना मापदण्ड या पैमाने में परिवर्तन करने से प्रभावित नहीं होता। मूल–बिन्दु में परिवर्तन का तात्पर्य है X और y के सभी मूल्यों में से एक स्थिरांक घटाया जाना या जोड़ा जाना और तुलना–मापदण्ड (पैमाने) में परिवर्तन का अर्थ है X और y के प्रत्येक मूल्य को किसी स्थिरांक या समावर्त्तक से गुणा या भाग करना। उदाहरणार्थ X श्रेणी के मूल्यों ($N = 6$) 300, 400, 900, 600, 500 व 800 में से 100 घटा दिया जाए या जोड़ दिया जाए तो y श्रेणी से उसका सहसम्बन्ध गुणांक प्रभावित नहीं होगा। वह पूर्ववत् रहेगा। इसी प्रकार इन मूल्यों को यदि 100 से भाग दे दिया जाए या 2 से गुणा कर दिया जाए तो भी पूर्व सहसम्बन्ध गुणांक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेग। इस गुण का प्रयोग मूल–समंकों को सरल रूप देने में किया जाता है जिससे सहसम्बन्ध के परिकलन में आसानी हो जाए।

यदि 'X' तथा 'y' श्रृंखलाओं में चरराशियों में मान अपेक्षाकृत बड़े हैं, तो उपर्युक्त सूत्रों से सहसम्बन्ध गुणांक की ग्णना का कार्य काफी कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में हम दोनों श्रेणियों में कल्पित माध्य की मान्यता लेते हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक के सूत्र में एक विशेषता पाई जाती है, यदि हम समंकमालाओं के मूल बिन्दुओं को परिवर्तित कर दें अर्थात् दोनों श्रृंखलाओं में कल्पित माध्य की मान्यता लें तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान अपरिवर्तित रहता है। अर्थात् मूल बिन्दुओं के परिवर्तन के पश्चात् नये मूल्यों (नई समंक मालाओं) के बीच भी सहसम्बन्ध गुणांक का मान वही होग जो कि मूल समंक मालाओं के बीच था।

यदि कल्पित माध्य से 'X' तथा 'y' श्रृंखलाओं के विचलनों को क्रमशः 'dX' तथा 'dy' के द्वारा व्यक्त किया जाय तो हम कह सकते है कि

$$r_{xy} = r_{dx.dy}$$

इस तथ्य को हम उदाहरण 5, के माध्यम से सिद्ध कर सकते हैं –

उदाहरण 5 में यदि हम 'X' एवं 'y' चरों के मूल बिन्दुओं को परिवर्तित कर दें अर्थात् X का कल्पित माध्य '67' (जो कि 'X' के न्यूनतम मान 47 एवं अधिकतम मान 82 के लग्भग बीच में स्थित है) एवं 'y' का कल्पित माध्य '65' (जो कि 'y' के न्यूनतम मान 47 एवं अधिकतम मान 82 में लगभग बीच में स्थित है) मान लें एवं परिवर्तित मूल्यों को क्रमशः 'dX' तथा 'dy' के द्वारा व्यक्त करे अर्थात्

$$dX = X - 67, dy = y - 65.$$

अब जैसा कि पहले उल्लेख किया जा चुका है –

$$r_{xy} = r_{dx.dy} = \frac{N\sum(dx.dy) - \sum dx.\sum dy}{\sqrt{\{N\sum dx^2 - (\sum dx)^2\}\{N\sum dy^2 - (\sum dy)^2\}}}$$

'dX' तथा 'dy' के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक निम्न सारिणी के मध्य से की जा सकती है –

विद्यार्थी	प्राप्तांक (X)	प्राप्तांक (y)	dX	Dy	dX^2	dy^2	$dX.dy$
A	47	56	–20	–9	400	81	180
B	57	50	–10	–15	100	225	150
C	58	47	–9	–18	81	324	162
D	60	60	–7	–5	49	25	35
E	62	62	–5	–3	25	9	15
F	67	64	0	–1	0	1	0
G	70	65	3	0	0	0	0

H	71	70	4	5	16	25	20
I	76	74	9	9	81	81	81
J	82	82	15	17	225	289	255
N=10			–20	–20	986	1060	898

उपर्युक्त सारिणी से –

$$N = 10, \sum dx = -20, \sum dy = -20, \sum dx.dy = 898, \sum dx^2 = 986, \sum dy^2 = 1060$$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर –

$$r_{xy} = \frac{10(898) - (-20)(-20)}{\sqrt{\{10(986) - (-20)^2\}\ \{10(1060) - (-20)^2\}}}$$

$$= \frac{8980 - 400}{\sqrt{\{9860 - 400\}\ \{1060 - 400\}}}$$

$$= \frac{8580}{\sqrt{(9460)\ (10200)}} = \frac{8580}{\sqrt{(9460)(102)(100)}}$$

$$\frac{8580}{10\sqrt{(9460)(102)}} = \frac{858}{\sqrt{964920}} = \frac{858}{982} = 0.88 \text{ (लगभग)}$$

गणना का कार्य और अधिक सरल करने के लिए हम कल्पित माध्यों से विचलनों के मान ज्ञात करने के पश्चात् प्राप्त विचलनों को उनके उभयनिष्ट मूल्यों से भाग दे देते हैं ताकि पद विचलनों (dX') एवं (dy') के मान ज्ञात कर लेते हैं। इसे हम 'पैमाना परिवर्तन' कहते हैं। इस प्रक्रिया के बाद प्राप्त पद विचलों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक मूल समंक मालाओं (अर्थात् X एवं y के मूल्यों के बीच) के बीच सहसम्बन्ध गुणांक के बराबर होग। अन्य शब्दों में हम कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध गुणांक का मान मूल बिन्दुओं अथवा पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र है। अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक का मान मूल बिन्दुओं और पैमाने के

परिवर्तन के ऊपर निर्भर नहीं करता। इस तथ्य की पुष्टि हम निम्न उदाहरण के द्वारा करेगें।

24.8.4 स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि

कार्ल पियर्सन ने दो चर मूल्यों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट करने के लिए जो सूत्र दिया, वह हम स्पष्ट कर चुके हैं। बुद्धिमता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि ऐसे तथ्य हैं जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से अंकों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि गुणात्मक तथ्यों के बीच सम्बन्ध जानने के लिए कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र नहीं लगया जा सकता। इन गुणात्मक तथ्यों के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए प्रसिद्ध सांख्यिक चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन ने एक विधि का प्रतिपादन सन् 1904 में किया। उन्हीं के नाम पर इस विधि को स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि कहते हैं। एक सौन्दर्य प्रतियोग्िता में माना 10 प्रतियोगी भाग लेते हैं और तीन निर्णायक हैं। विभिन्न प्रतियोग्िताओं को गुण की अधिकता के आधार पर ये तीनों निर्णायक अपने ढंग से पहला, दूसरा, तीसरा . . . इत्यादि क्रम प्रदान करते हैं। इन क्रमों के आधार पर ही हम सहसम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। माना हम यह जानना चाहते हैं कि इन तीन निर्णायकों में से ऐसे कौन से दो निर्णायक हैं जिनका सौन्दर्य–निर्णय लगभग समान है। यह समस्या कार्ल पियर्सन के सूत्र से हल नहीं हो सकती। हम जानते हैं कि विद्यार्थियों की योगयता के जाँच के लिए परीक्षा पद्धति बनाई गई है, जिसमें विद्यार्थी प्रश्न–पत्र के उत्तर लिखते हैं और इन उत्तर–पुस्तिकाओं को परीक्षकों के पास भेज दिया जाता है। परीक्षक निर्धारित अधिकतम अंकों में से प्रत्येक उत्तर–पुस्तिका पर अंक देते हैं। अंक देने के लिए कोई निश्चित मापदण्ड नहीं होता यद्यपि मोटे तौर पर कुछ निर्देशों का पालन अवश्य करना होता है। इसी कारण हम सुनते है कि 'मैने कुछ नहीं लिखा और बहुत अच्छे अंक मिले' तथा 'मैने बहुत अच्छा लिखा और पता नहीं बहुत कम अंक मिले।' यह पद्धति दोषपूर्ण होने के कारण अब ग्रेड प्रणाली को लाने पर बल दिया जा रहा है। योगयता की जाँच भी कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र से ठीक प्रकार नहीं हो सकती, इसके लिए भी इसी विधि को अपनाना चाहिए। दो परीक्षकों की योग्यता जाँच की समानता देखने के लिए हम इसी कोटि अन्तर विधि द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। यहाँ श्रेणियों के पद–मूल्य

ज्ञात न हों और उनका क्रम पता हो तो भी यह सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि में सबसे पहले X तथा y दोनों श्रेणियों के पद–मूल्यों को अलग– अलग कोटि–क्रम प्रदान किए जाते हैं। इसके बाद कोटि–क्रम अन्तर ज्ञात करके उसका वर्ग निकालते हैं और जोड़ लेते हैं। निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

जहाँ, $\rho(rho)$ = Rank correlation

D = Rank difference

N = Number of pairs

जब किसी श्रेणी में दो या दो से अधिक पद मूल्य बराबर आकार के हों तो उनके मूल्य क्रम निकालकर औसत निकाला जाता है तथा यही औसत क्रम प्रत्येक पद मूल्य के आगे रख दिया जाता हैं। ऐसा करने से ग्लती की सम्भावना रहती है। इसे समाप्त करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{N^3 - N}$$

जहाँ m उस कोटि अथवा कोटियों की बारम्बारता है जो एक से अधिक बार घटित होती है।

रेखीय सहसम्बन्ध गुणांक की भाँति, कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान भी '–1' से '+1' के बीच स्थिर होता है। r का मान ऋणात्मक अथवा धनात्मक होने पर चरों के बीच का सम्बन्ध भी ऋणात्मक अथवा धनात्मक होता है। r का मान जितना ही '+1' अथवा '–1' के निकट होग उतना ही चरों के बीच का सहसम्बन्ध प्रबल होगा तथा r का मान यदि शून्य है अथवा शून्य के निकट है, तो चरों का सहसम्बन्ध नग्ण्य होगा अर्थात् सम्बन्ध चर एक दूसरे से स्वतंत्र होंगे।

उदाहरण : 6 दो अध्यापकों द्वारा 8 विद्यार्थियों का मूल्यांकन नीचे दिया गया है –

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7	8
पहला अध्यापक	8	7	3	6	4	1	5	2
दूसरा अध्यापक	5	8	1	6	4	2	7	3

जहाँ तक 8 विद्यार्थियों के मूल्यांकन का प्रश्न है, दोनों अध्यापक किस हद तक एक दूसरे से सहमत है?**हल –** उपर्युक्त प्रश्न में दो अध्यापकों द्वारा निर्धारित '8' विद्यार्थियों की कोटियों को प्रदर्शित किया जाता है। दोनों अध्यापकों के मूल्यांकन में समानता का परीक्षण करने के लिए हम कोटि–अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान ज्ञात करेगें। इसका सूत्र निम्न प्रकार है–

$$r = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

इसकी गणना को निम्न सारिणी की सहायता से दर्शाया गया है –

विद्यार्थी क्रम संख्या	**निर्धारित कोटि**		**कोटि अन्तर**	
	पहला अध्यापक	**दूसरा अध्यापक**	D	D^2
1	8	5	3	9
2	7	8	–1	1
3	3	1	2	4
4	6	6	0	0
5	4	4	0	0
6	1	2	–1	1
7	5	7	–2	4
8	2	3	–1	1
$N = 8$				20

सारिणी से –

$$N = 8, \quad \sum D^2 = 20$$

सूत्र में रखने पर –

$$r = 1 - \frac{6(20)}{(8^3 - 8)} = 1 - \frac{120}{(512 - 8)} = 1 - \frac{120}{504}$$

$$= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21} = 0.76$$

24.8.5 संगमी विचलन रीति कभी–कभी हमें केवल यह ज्ञात करना होता है कि दो समंकमालाओं में सहसम्बन्ध किस प्रकार का है – धनात्मक है या ऋणात्मक। जब हम यह देखना चाहते हैं कि दो चर एक ही दिशा में गतिमान हैं या विपरीत दिशा में, तब हम संगमी या सहगमी विचलन रीति का प्रयोग करते हैं। इस रीति के अनुसार जब दो सम्बद्ध चर X और Y एक ही दिशा में साथ–साथ ग्मन करते हैं या संगमी या सहगमी हैं तो उनमे धनात्मक सह–सम्बन्ध होता है। यदि वे विपरीत दिशा में गमन करते हैं या प्रतिगामी होते हैं तो उनमे ऋणात्मक सहसम्बन्ध पाया जाता है।

संगामी विचलन रीति सहसम्बन्ध ज्ञात करने की सबसे सरल रीति है। इस रीति में प्रत्येक मूल्य की उससे पिछले मूल्य से तुलना की जाती है। अतः इससे अल्पकालीन उच्चावचनों में सहसम्बन्ध ज्ञात हो जाता है। परन्तु विचलनों की दिशा (+ या –) को ही ध्यान में रखा जाता है, उनके आकार की गणना नहीं की जाती। इसलिए इस रीति द्वारा केवल यह पता चल जाता है कि सहसम्बन्ध किस दिशा का है, उसकी मात्रा का सही आभास नहीं होता।

विधि – इस रीति द्वारा सहसम्बन्ध निकालने की निम्न प्रक्रिया है –

(i) X और Y श्रेणी में अलग–अलग प्रत्येक मूल्य की तुलना उससे पिछले मूल्य से की जाएगी। यदि मूल्य पिछले मूल्य से अधिक है तो उसका विचलन (+) होग, यदि कम है तो (–) और यदि समान है तो (= या 0)। यह ध्यान देने योग्य बात है कि विचलन का केवल चिन्ह ही लिखा जाएग उसकी मात्रा नहीं। विचलन–युगमों की

सख्या कुल पद युग्मों की संख्या से कम होगी ($n = N - 1$)। क्योंकि पहले पद का विचलन नहीं होता।

(ii) X और Y के तत्सम्वादी विचलन–चिन्हों का गुणा करके धनात्मक गुणनफलों को ग्नि लिया जाएग। यह संगमी विचलनों की संख्या है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएग –

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

जहाँ, $r_c =$ संगमी विचलन गुणांक के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$c =$ संगमी विचलों की संख्या है।

$n =$ विचलन–युग्मों की संख्या है जो पद–युगमों की संख्या से 1 कम है। ($n = N - 1$)

सूत्र में $\pm$ का प्रयोग – सूत्र में वर्गमूल चिन्ह से पहले और उसके अन्दर दोनों स्थानों पर या तो + का चिन्ह प्रयोग किया जाएग या दोनों स्थानों पर – का चिन्ह लिखा जाएग। यदि ($2c - n$) धनात्मक है तो दोनों स्थानों पर + का चिन्ह प्रयुक्त होग।($2c - n$) के ऋणात्मक होने पर दोनों स्थानों में (–) चिन्ह का प्रयोग ही अनिवार्य हो जाता है। यदि ऐसा न किया जाए तो वर्गमूल चिन्ह के अन्दर की राशि ऋणात्मक रहेगी और उसका वर्गमूल निकालना असम्भव होग।

उदाहरण : 7 निम्न समंकों से संगमी विचलन रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए।

माह	जन0	फर0	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अग0	सित0	अक्टू0	नव0	दिस0
X	89	85	98	102	100	105	96	68	85	98	76	75
Y	32	33	35	37	39	41	40	38	42	40	36	35

हल – संगामी विचलन गुणांक की गणना

माह	X		Y		विचलनों का गुणनफल	
जनवरी	89		32			
फरवरी	85	−	33	+		−
मार्च	98	+	35	+	+	
अप्रैल	102	+	37	+	+	
मई	100	−	39	+		−
जून	105	+	41	+	+	
जुलाई	96	−	40	−	+	
अगस्त	68	−	38	−	+	
सितम्बर	85	+	42	+	+	
अक्टूबर	98	+	40	−		−
नवम्बर	76	−	36	−	+	
दिसम्बर	75	−	35	−	+	
		$n = 11$			$c = 8$	

$$r_c = +\sqrt{\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$r_c = +\sqrt{\left(\frac{2\times 8-11}{11}\right)} = \sqrt{\left(\frac{5}{11}\right)} = \sqrt{.4545} = +0.6742$$

अतः X और Y में मध्यम मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध

24.8.6 न्यूनतम वर्ग रीति

यह बतलाया जा चुका है कि कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध–गुणांक इस मान्यता पर आधारित है कि अध्ययन के अन्तर्गत चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध होता है। X और y के बीच इस रैखिक सम्बन्ध के अध्ययन करने की रीतियों में से एक रीति X के मानों के

संगत y के रैखिक मानों को ज्ञात करना है। यह न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा ज्ञात किया जाता है।

यह रीति न्यूनतम वर्ग–विधि के अनुसार खींची गयी सर्वोत्कृष्ट रेखा पर आधारित है। वस्तुतः न्यूनतम वर्ग रेखा, प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से खींची जाने वाली एक सर्वोपयुक्त आंकलन रेखा है जिसके दो अभिलक्षण होते हैं –

(क) अवलोकित मूल्यों (Y) और उक्त रेखा से संगणित तत्संवादी मूल्यों (Y_c) के विचलनों का योग शून्य होता है। $\Sigma(Y - Y_c) = 0;$

(ख) इस रेखा से संगणित मूल्यों के अवलोकित मूल्यों से विचलनों के वर्गों का जोड़ अन्य किसी रेखा से निकाले ग्ये ऐसे विचलन–वर्गों के जोड़ की तुलना में न्यूनतम होता है। यही कारण है कि इसे न्यूनतम वर्ग परिकल्पना के अधीन खींची ग्यी सर्वोत्कृष्ट रेखा कहते हैं। $\Sigma(Y - Y_c)^2 =$ न्यूनतम

न्यूनतम वर्ग रीति सहसम्बन्ध गुणांक का परिकलन करने की निम्नांकित प्रक्रिया है –

(1) सर्वप्रथम प्रसामान्य समीकरणों द्वारा Y के सर्वोपयुक्त संगणित मूल्य निकाले जाते हैं। इन मूल्यों का आग्णन निम्न प्रकार किया जाएगा –

(क) निम्न दो प्रसामान्य समीकरणों द्वारा 'a' और 'b' दो अचर मूल्यों का मान निकाला जाएगा –

$$\Sigma Y = N_a + b\Sigma X \quad \text{..... (i)}$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad \text{..... (ii)}$$

जहाँ पर ΣY, Y – श्रेणी के मूल्यों का योग है।

ΣX, X – श्रेणी के मूल्यों का योग है।

ΣXY, X और Y के तत्संवादी मूल्यों के गुणनफलों का योग है।

ΣX^2, X श्रेणी के पद–मूल्यों के वर्गों का जोड़ है।

N पद–मूल्यों की संख्या है।

a अचर–मूल्य है जो रेखा के Y अन्त खण्ड (Y – intercept) को व्यक्त करता है। यह मूल बिन्दु (0) और Y अक्ष के उस बिन्दु का अन्तर है जहाँ से न्यूनतम वर्ग रेखा आरम्भ होती है। तथा

b अचर–मूल्य, सर्वोपयुक्त रेखा के ढलान का संकेत चिन्ह है जो यह स्पष्ट करता है कि X की एक इकाई के बढ़ने (या घटने) से सर्वोत्कृष्ट रेखा कितनी ऊपर (या नीचे) की ओर जाती है।

(ख) दोनों सामान्य समीकरणों का हल करके प्राप्त 'a' और 'b' के मूल्यों को सरल रेखा के समीकरण ($Y = a + bX$) में आदिष्ट करके Y के सर्वोपयुक्त (Y_c) मूल्य संगणित कर लिए जाएंगे।

(2) Y के वास्तविक मूल्यों (Y) में से तत्सम्बन्धी संगणित मूल्य घटाकर विचलन प्राप्त किए जाएगें । $d = (Y - Y_c)$

(3) विचलनों के वर्गों का जोड़ $\Sigma(Y - Y_c)^2$ ज्ञात किया जाएग।

(4) निम्न सूत्र द्वारा उक्त विचलन वर्गों का माध्य निकाल लिया जाएगा –

$$S_y^{\,2} = \frac{\sum (Y - Y_c)^2}{N}$$

S_y^2 सर्वोपयुक्त रेखा का प्रसरण है जिसे 'अस्पष्टीकृत प्रसरण' कहते हैं। यह माप हमें बताता है कि किस अंश या अनुपात में Y में होने वाले परिवर्तन X के परिवर्तनों से प्रभावित नहीं होते। इस माप का वर्गमूल (S_y) अनुमान का प्रमाप विभ्रम कहलाता है।

$$S_y = \sqrt{\left(\frac{\sum (Y - Y_c)^2}{N}\right)}$$

(5) Y – श्रेणी का प्रसरण निकाला जाएग। यह प्रमाप विचलन का वर्ग (σ_y^2) होता है। इसे कुल प्रसरण भी कहते हैं।

सूत्रानुसार – $\sigma_y^{\,2} = \dfrac{\sum (Y - \overline{Y})^2}{N}$ या $\dfrac{\sum dy^2}{N}$

(6) अन्त में, निम्न सूत्र द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक निकाल लिया जाता है –

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{S_y^{\ 2}}{\sigma_y^{\ 2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\text{अस्पष्टीकृत प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}}\right)} \quad \text{या} \quad \sqrt{\left(1 - \frac{\text{Unexplained Variance}}{\text{Total Variance}}\right)}$$

or, $$r^2 = 1 - \frac{S_y^{\ 2}}{\sigma_y^{\ 2}} \quad \text{या} \quad 1 - \frac{\text{Unexplained Variance}}{\text{Total Variance}}$$

r^2 Y के कुल विचरण का वह अंश है जो X में होने वाले परिवर्तनों के कारण उत्पन्न होता है। यह निश्चयन गुणांक कहलाता है।

(7) इस रीति द्वारा गुणांक का बीजगणितीय चिन्ह (+ या –) अचूर मूल्य $\underline{b}$ के चिन्ह के अनुरूप ही होता है। यदि $\underline{b}$ (–) में है तो r ऋणात्मक होगा।

उदाहरण:8निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक का परिकलन कीजिए –

X	1	2	3	4	5
Y	338	180	142	184	166

हल : न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा Y– संगठित मूल्यों का परिकलन

मूल्य	**मूल्य**	**X व Y की गुणा**	**X के वर्ग**	**संगणित मूल्य**
X	Y	XY	X^2	$a + bX = Y_c$
1	338	338	1	$304 - (34 \times 1) = 270$
2	180	360	4	$304 - (34 \times 2) = 236$
3	142	426	9	$304 - (34 \times 3) = 202$
4	184	736	16	$304 - (34 \times 4) = 168$
5	166	830	25	$304 - (34 \times 5) = 134$
ΣX=15	ΣY=1010	ΣXY=2690	ΣX^2=55	ΣY_c = 1010

दोनों प्रसामान्य समीकरणों में मूल्य आदिष्ट करने पर –

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$ या $1010 = 5a + 15b$ ... (i)

$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$ या $2690 = 15a + 55b$ ... (ii)

समीकरण (i) को तीन से गुणा करने पर तथा उसे समीकरण (ii) में से घटाने पर–

$2690 = 15a + 55b$ 'a' का मूल्य ज्ञात करने के लिए 'b' का

$\underline{\_3030 = \_15a + \_45b}$ मूल्य, समीकरण (i) में रखने पर –

$-340 = 10b$ $1010 = 5a + \{15 \times (-34)\}$

$\therefore b = -34$ $1010 = 5a - 510$

$\therefore a = 304$

S_y^2 तथा σ_y^2 का परिकलन

X	मूल समंक	संगणित मूल्य	Y व Y_c का अन्तर	अन्तर वर्ग	Y के विचलन $\bar{Y}=202$ से	विचलन वर्ग $(Y-\bar{Y})^2$
X	Y	Y_c	$Y - Y_c$	$(Y-Y_c)^2$	$Y-\bar{Y}=dy$	dy^2
1	338	270	+68	4624	+136	18496
2	180	236	–56	3136	–22	484
3	142	202	–60	3600	–60	3600
4	184	168	+16	256	–18	324
5	166	134	+32	1024	–36	1296
N=5	ΣY=1010	$\Sigma(Y\text{-}Y_c)^2 = 12640$				Σd_y^2=24200

Y – श्रेणी का समान्तर माध्य या $\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{1010}{5} = 202$

UneXplained Variance – Total Variance –

$$S_y^{\,2} = \frac{\sum (Y - Y_c)^2}{N} = \frac{12640}{5} = 2528$$

$$\sigma_y^{\,2} = \frac{\sum dy^2}{N} = \frac{24200}{5} = 4840$$

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_y^{\,2}}{\sigma_y^{\,2}}} = \sqrt{1 - \frac{2528}{4840}} = \sqrt{\frac{2312}{4840}} = \sqrt{.477} = +.69$$

अतः X तथा Y में मध्यम मात्रा का धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

24.9 सारांश

जब दो चर–मूल्यों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में भी उसी दिशा में या विपरीत दिशा में परिवर्तन होते हों तो वे दोनों सह–सम्बन्धित कहलाते हैं। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि दो सम्बद्ध समंक श्रेणियों में साथ–साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति को ही सहसम्बन्ध या सह–विचरण कहते हैं।

इसे $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

इसे ज्ञात करने के लिए 'गुणन–परिघात सहसम्बन्ध गुणांक ' रीति या 'कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक' की रीति को सर्वोत्तम मानी जाती है क्योंकि इससे सहसम्बन्ध की दिशा और मात्रा का संतोषजनक संख्यात्मक माप ज्ञात हो जाता है।

सम्बद्ध समंकमालाओं में चर–मूल्यों के परिवर्तनों की दिशा, अनुपात तथा मालाओं की संख्या के आधार पर सहसम्बन्ध को धनात्मक तथा ऋणात्मक बताया गया है।

अर्थात् हम यह कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध का सामान्य अर्थ है, दो समंक–श्रेणियो में कारण और परिणाम के आधार पर परस्पर सम्बन्ध का पाया जाना। इस दृष्टि से सहसम्बन्ध दो समंकमालाओं के पारस्परिक सम्बन्ध की दिशा व मात्रा का विश्लेषण तो करता है लेकिन सहसम्बन्ध की उपस्थिति मात्र से यह निष्कर्ष नहीं निकाल लेना चाहिए कि दोनों सम्बद्ध श्रेणियों में आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कार्य–कारण सम्बन्ध भी है।

अतः निष्कर्ष के रूप में यह कहा जा सकता है कि सहसम्बन्ध की वास्तविक जानकारी केवल उसकी उपस्थिति मात्र से नहीं की जा सकती, जब तक कि दोनों सम्बद्ध मात्राओं में प्रत्यक्ष कार्य–कारण सम्बन्ध की जानकारी न प्राप्त कर ली जाय। प्रो0 बाडिंग्टन का भी कहना है कि यदि सभी प्रमाण यह संकेत करते हैं कि दोनों सम्बद्व श्रेणियों में सहसम्बन्ध है अथवा हो सकता है तो भी उन प्रमाणों की अत्यन्त सतर्कतापूर्वक जाँच की जानी चाहिए ताकि निष्कर्ष ग्लत न हो सकें।

24.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

24.10.1 वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(A) निम्नलिखित में से कौन सा सही है :

(क) सहसम्बन्ध गुणांक

(i) सदा धनात्मक होता है। (ii) सदा ऋणात्मक होता है।

(iii) या तो धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

(iv) इनमें से कोई नहीं।

(ख) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक का सूत्र है।

(i) $r = \frac{\sum xy}{\sigma_x \sigma_y}$ (ii) $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$

(iii) $r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x}$ (iv) $r = \frac{\sum xy}{\sigma_x{}^2 \sigma_y{}^2}$

(ग) कोटि सहसम्बन्ध–गुणांक सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

(i) $r_s = 1 + \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$ (ii) $r_s = 1 - \frac{\sum D^2}{N^3 + N}$

(iii) $r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$ (iv) $r_s = 1 - \frac{6\sum D^3}{N^3 - N}$

(घ) सहसम्बन्ध गुणांक का धनात्मक चिन्ह होग जब :

(i) X के मान बढ़ रहे हो और y के मान घट रहे हो।

(ii) X और y दोनों के मान बढ़ रहे हों।

(iii) X के मान घट रहे हो और y के मान बढ़ रहे हो।

(iv) X और y के मान में कोई परिवर्तन न हो।

24.10.2 रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) जब दो चरों के मान एक ही दिशा में संचलित होते हैं तो सहसम्बन्ध ------ कहा जाता है।

(ii) जहाँ संख्यात्मक मापन कठिन होता है, सहसम्बन्ध गुणांक ------ से परिकलित किया जाता है।

(iii) $\pm$ 1 ------ सहसम्बन्ध है।

(iv) धन चिन्ह संकेतिक करते हैं कि सहसम्बन्ध ------- है।

(v) विचलनों की दिशा के बीच सहसम्बन्ध ------ विधि से निकाला जाता है।

24.10.3 लघु उत्तरात्मक प्रश्न :

(i) सहसम्बन्ध से आप क्या समझते हैं? उसके मापन करने की प्रमुख विधियों के नाम लिखिए।

(ii) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक को समझाइए।

(iii) संगमी विचलन गुणांक को समझाइए।

(iv) क्या दो चरों के बीच सहसम्बन्ध कारण–प्रभाव का सम्बन्ध प्रकट करता है?

(v) कोटि सहसम्बन्ध को परिभाषित कीजिए। कोटि सहसम्बन्ध गुणांक (r_s) के लिए स्पियरमैन का सूत्र लिखिए।

24.10.4 निबन्धात्मक प्रश्न :

(i) सहसम्बन्ध की अवधारणा का अर्थ एवं महत्व स्पष्ट कीजिए। सहसम्बन्ध गुणांक के मान का निर्वचन आप किस प्रकार करेगें?

(ii) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध–गुणांक की परिभाषा दीजिए। यह किस बात को मापने का आशय करता है? एक सहसम्बन्ध गुणांक चिन्ह और परिमाण का निर्वचन आप किस प्रकार करेगें?

24.10.5 संख्यात्मक प्रश्न :

(i) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रकीर्ण आरेख बनाइए :

X :	8	10	12	11	9	7	13	14	15	17	16
Y :	5	7	9	8	6	4	10	11	12	14	13

X और y के बीच सम्बन्ध का वर्णन भी कीजिए।

(ii) निम्न आँकड़ों से एक सहसम्बन्ध लेखाचित्र की रचना कीजिए और पूर्ति तथा मूल्य सूचकांकों के बीच सहसम्बन्ध पर टिप्पणी कीजिए।

वर्ष :	1980	1981	1982	1983	1984	1985
पूर्ति सूचकांक :	166	170	186	154	136	154
मूल्य सूचकांक :	216	200	196	208	214	204

(iii) निम्नलिखित आँकड़ों से X और y के बीच कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध परिकलित कीजिए :

$N = 13$, $\Sigma X = 117$, $\Sigma X^2 = 1313$, $\Sigma y = 260$, $\Sigma y^2 = 6580$, $\Sigma Xy = 2827$

(iv) निम्न आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

X :	6	8	12	15	18	20	24	28	31
Y :	10	12	15	15	18	25	22	26	28

(v) निम्नलिखित आँकड़ों से संगमी विचलन गुणांक की गणना कीजिए :

मूल्य :	368	284	385	361	347	384	395	403	400	385
आयात :	22	21	24	20	22	26	24	29	28	27

(vi) निम्न आँकड़ों से X और y में न्यूनतम वर्ग विधि से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X :	2	3	4	5	6
Y :	16	18	14	10	12

24.11 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर :

1) (क) (iii) (ख) (ii) (ग) (iii) (घ) (ii)

2) (i) धनात्मक (ii) कोटि–अन्तर (iii) पूर्ण (iv) धनात्मक

(v) संगमी विचलन

5) (i) पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (iii) $r = 0.81$

(iv) $r = +0.96$ (v) $r_c = +0.333$

24.12 संदर्भ ग्रन्थ सूची एवं सहायक पाठ्य सामग्री :

1. बंसल, डॉ0 एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डॉ0 डी0 आर0, (1978) *सांख्यिकी के मूल तत्त्व*, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
2. सिंह, एस0 पी0, (1997) *सांख्यिकी–सिद्धान्त एवं व्यवहार*, एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
3. अवस्थी, जी0 डी0 एवं निग्म, सुधीर कुमार, (2007) *सांख्यिकीय विश्लेषण*, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
4. नागर, कैलाश नाथ, (2005) *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
5. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.

इकाई : 25 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन

25.1 प्रस्तावना

सामान्यतया जो सांख्यिकीय आँकड़े मिलते हैं वे विभिन्न प्रकार के होते हैं समंक श्रेणी पूर्ण नहीं होती है। सांख्यिकीय विश्लेषण करते समय कभी–कभी यह देखने में आता है कि प्रस्तुत समंक श्रेणी पूर्ण न होकर अपूर्ण होती है अर्थात् श्रेणी के कुछ मूल्य किन्हीं कारणों से अज्ञात बने रहते हैं। ऐसा हो सकता है कि उस अवधि के लिए समंक उपलब्ध ही न हों, ऐसा भी हो सकता है कि आँकड़ों का इकट्ठा करना इतना खर्चीला तथा जटिल हो, जैसे जनगणना को ही लीजिए भारतवर्ष में जनगणना का कार्य 10 वर्षों के अन्तराल पर किया जाता है, इसका कारण यह है कि देशव्यापी स्तर पर जनगणना का कार्य अत्यधिक खर्चीला है – इसके लिए विशाल मात्रा में संगणकों, विशेषज्ञों, संसाधनों की आवश्यकता होती है। इसके अतिरिक्त जनगणना से हमें इतनी बड़ी संख्या में वृहद् प्रकार के आँकड़े प्राप्त होते हैं कि इनका विश्लेषण करने में (कम्प्यूटरों की सहायता लेने पर भी) प्रचुर समय लगता है। उपर्युक्त व्याख्या से स्पष्ट हो जाता है कि यह कार्य निश्चित ही प्रत्येक वर्ष करना संभव नहीं है। ऐसी स्थिति में विभिन्न दस–वर्षीय समयावधियों के अन्दर किसी वर्ष की जनसंख्या अनुमानित करने की आवश्यकता पड़ने पर हम अन्तरगणन की सहायता लेते हैं।

अर्थात् कुछ सुनिश्चित मान्यताओं एवं सीमाओं के अन्तर्गत ज्ञात समंको के आधार पर समंक–श्रेणी के बीच किसी अज्ञात मूल्य का सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाने की क्रिया को आन्तरगणन कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हमें 1971, 1981, 1991, 2001, 2011 की जनसंख्या दी हो और 2006 की जनसंख्या का अनुमान लगाना हो तो यह समस्या आन्तरगणन की समस्या होगी। उपलब्ध ज्ञात समंकों के आधार पर समंक माला के इन अज्ञात राशियों के सांख्यिकीय अनुमान ज्ञात करने की क्रिया को हम आन्तरगणन तथा बाह्यगणन कहते हैं। जब हम कुछ निश्चित परिकल्पनाओं तथा मान्यताओं के अन्तर्गत समंक माला के ज्ञात समंकों के आधार पर समंक श्रेणी के भीतर के किसी अज्ञात समंक का सम्माक सर्वोत्तम अनुमान करते हैं तो इस क्रिया को बाह्यगणन कहते हैं, वस्तुतः दोनों की क्रियाएं ज्ञात समंकों के आधार पर समंकमाला के अज्ञात समंकों के अनुमान की क्रियाएं हैं और सांख्यिकीय दृष्टिकोण से दोनों क्रियाओं में विशेष अन्तर नहीं होता, जैसा हम आगे देखेंगे, दोनों के सम्बन्ध में एक ही सांख्यिकीय विधि का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार आन्तरगणन और बाह्यबणन में मौलिक अन्तर यह है कि पहले हम चर–मूल्य की दी हुई सीमाओं के अन्तर्गत अज्ञात मूल्य की गणना करते हैं और बाह्यगणन में इन सीमाओं के बाहर किसी मूल्य की गणना की जाती है। निम्न उदाहरण से इन दोनों क्रियाओं का अन्तर स्पष्ट हो जाएगा –

भारत की जनसंख्या

जनगणना वर्ष	:	1941	1951	1961	1971	1981	1991
जनसंख्या (करोड़ों में)	:	31.9	36.1	43.9	54.8	68.3	84.6

उपर्युक्त सारणी में दिये गए जनसंख्या में समंकों के आधार पर कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत यदि हमें 1941 और 1991 के बीच के किसी वर्ष जैसे 1947, 1975 या 1986 में भारत की जनसंख्या का सर्वोत्तम अनुमान प्राप्त करना हो तो सम्बन्धित क्रिया आन्तरगणन कहलाएगी। इसके विपरीत, उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर 1939 (1941 से पहले) या 1999 या 2011 (1991 के बाद के किसी वर्ष) के लिए जनसंख्या का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने की क्रिया को बाह्यगणन कहा जाएगा। सांख्यिकीय दृष्टिकोण से आन्तरगणन व बाह्यगणन का अन्तर कोइ विशेष महत्त्व नहीं रखता क्योंकि दोनों क्रियाओं के लिए एक सी रीतियों का ही प्रयोग किया जाता है।

यदि हमें दो चर–मूल्य x और y दिए हो तथा $y = f(x)$, जहाँ x स्वतंत्र चर–मूल्य और y आश्रित चर–मूल्य है। किसी निश्चित अन्तराल में x के कुछ मूल्यों के सापेक्ष y के मूल्य दिया हों और यदि हम x के किसी मूल्य जो इसी अन्तराल में हो, के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करना चाहें तो यह क्रिया पूर्व निर्धारित मान्यताओं के अन्तर्गत गणितीय सूत्रों की सहायता से की जाएगी। इसी क्रिया को आन्तरगणन कहते हैं। यदि हम x के किसी मूल्य, जो अन्तराल के बाहर हो, के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करें तो यह क्रिया बाह्यगणन कहलाती है। आन्तरगणन एवं बाह्यगणन के द्वारा हम किसी चर का वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं करते बल्कि इसके सन्निकट मान का अनुमान लगाते हैं। यह आकलन की प्रक्रिया सांख्यिकीय विश्लेषण में बहुत महत्वपूर्ण है और अग्रलिखित मान्यताओं पर आधारित है।

25.2 उद्देश्य

कुछ सुनिश्चित परिकल्पनाओं के अन्तर्गत, ज्ञात समंकों के आधार पर समंक–श्रेणी के बीच किसी अज्ञात मूल्य का सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाना या उपलब्ध सांख्यिकीय तथ्यों के आधार पर, विशेष परिकल्पनाओं के अधीन किसी भावी समंक के पूर्वानुमान प्राप्त करना।

25.3 परिभाषा

(i)''एक सांख्यिकीय अनुमान, अच्छा हो या बुरा, ठी हो या गलत, परन्तु प्रायः प्रत्येक दशा में वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुमान से अधिक ठीक होगा।''–डा0 ए0 एल0 वाउले

(ii) ''किन्हीं निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत मात्राओं के सर्वाधिक सम्भाव्य अनुमान लगाने की तकनीक को आन्तरगणन कहते हैं।''– प्रो0 डी0 एन0 एल्हांस

(iii) ''दो अन्त बिन्दुओं के बीच के स्थित मूल्यों को ज्ञात करने की क्रिया आन्तरगणन तथा इन दोनों बिन्दुओं के बाहर के मूल्यों को ज्ञात करने की क्रिया को बाह्यगणन कहते हैं।– डब्ल्यू0 एम0 हार्पर

25.4 मान्यताएं

ऊपर दी गयी परिभाषा से स्पष्ट है कि इनकी क्रिया कुछ मान्यताओं व परिकल्पनाओं पर निर्भर करती है जिनके अभाव में अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाना सम्भव नहीं हो पाता। यह मान्यताएँ निम्नलिखित है :

(अ) आकस्मिक उतार–चढ़ाव न होना

आन्तरगणन व बाह्यगणन की पहली मान्यता यह है कि विचारणीय अवधि के विभिन्न समंकों में कोई अप्रत्याशित परिवर्तन अर्थात् अत्यधिक वृद्धि या अत्यधिक कमी नहीं हुई है। सरल शब्दों में, विचाराधीन अवधि एक सामान्य अवधि है और इस अवधि में समंकों की प्रवृत्ति नियमित और निरन्तर है अर्थात् इस अवधि में किसी प्रचण्ड उथल–पुथल या परिवर्तन का अनुभव नहीं होता। उदाहरण के लिए, यदि हमें 1961, 1971, 1981 और 1991 के किसी नगर में दिए हुए जनसंख्या–समंकों के आधार पर उसकी 1988 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो, या 2001 के लिए पूर्वानुमान लगाना हो तो यह मानना पड़ेगा कि उक्त वर्ष प्रसामान्य थे और बाढ़, युद्ध, अकाल, शरणार्थियों का भारी संख्या में आगमन आदि कारणों से उन वर्षों की जनसंख्या में एकदम कोई बहुत अधिक कमी या वृद्धि नहीं हुइ थी।

(ब) परिवर्तनों में एकरूपता या नियमितता का पाया जाना

दूसरी मान्यता यह है कि समंकों में होने वाले परिवर्तन प्रत्येक अवधि में नियमित रूप से तथा लगभग समान दर से होते हों अर्थात् इस अवधि में जो परिवर्तन होते हैं वे समान है। उपर्युक्त उदाहरण में हमारी यह भी मान्यता रहेगी कि 1988 से पहले के तथा बाद के वर्षों में जनसंख्या लगभग एक ही समान गति से लगातार बढ़ रही है।

(स) पद–श्रेणियों में पारस्परिक सम्बन्ध

यह भी आवश्यक है कि दोनों पद–श्रेणियाँ परस्पर सम्बन्धित हो जिसमें एक स्वतंत्र श्रेणी हो तो दूसरी उस पर आश्रित हो।

25.5 उपयोगिता/महत्त्व

किसी समंक माला की अज्ञात राशियों के आन्तरगणन व बाह्यगणन या पूर्वानुमान का महत्त्व अनेक विषयों में दिखायी पड़ता है पर अर्थशास्त्र, व्यापार, तथा व्यवसाय तथा जनांकिकी के क्षेत्र में इनका विशेष महत्त्व है। अज्ञात राशियों के आन्तरगणन या बाह्यगणन की आवश्यकता हमें निम्न परिस्थितियों में होती हैं –

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप – जब सांख्यिकीय आँकड़े वर्गान्तर तथा वर्ग आवृत्ति के रूप में उपलब्ध हों तो माध्यिका तथा भूयिष्ठक की गणना के लिए आन्तरगणन की विधि का प्रयोग आवश्यक हो जाता हैं। इस प्रकार की क्रिया कुछ निश्चित परिकल्पनाओं के अन्तर्गत की जाती है।

(ii) मध्यवर्ती वर्षों के लिए अनुमान – आन्तरगणन विधि का प्रयोग मध्यवर्ती वर्षों अर्थात् एकत्रित समंकों के बीच की किसी अवधि से सम्बद्ध समंकों का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ, भारत में जनगणना प्रत्येक दशक (10 वर्षों) में एक बार की जाती है। चूंकि अत्यधिक व्यय के कारण जनगणना का कार्य प्रतिवर्ष नहीं किया जा सकता, अतः जनगणनाओं के उपलब्ध समंकों के आधार पर विभिन्न मध्यवर्ती वर्षों की जनसंख्या का अनुमान आन्तरगणन द्वारा लगा दिया जाता है।

(iii) समंकों का नष्ट होना या खो जाना – कभी–कभी एकत्रित समंकों में से कुछ आवश्यक समंक खो जाते है या नष्ट हो जाते है और उनका दुबारा संकलन करना या तो अत्यधिक कठिन होता है या असम्भव। ऐसी दशाओं में, उपलब्ध शेष समंकों के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा की जा सकती है।

(iv) समंकों का अभाव या अपर्याप्तता – कुछ दशाओं में भूतकालीन समंक या तो एकत्र ही नहीं किए जाते या यदि एकत्र भी किये गए हो तो वे सही परिणाम निकालने के लिए सर्वथा अपर्याप्त होते हैं। इस अभाव या अपर्याप्तता की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा सर्वोपयुक्त अनुमान लगाकर की जाती है।

(v) भावी अनुमान – समय–समय पर आर्थिक, व्यावसायिक एवं राजकीय क्षेत्रों में विभिन्न उद्देश्यों के लिए भूतकालीन व वर्तमान उपलब्ध सामग्री के आधार पर बाह्यगणन की रीति द्वारा भविष्यकालीन समकों के पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं। विशेष रूप से आर्थिक नियोजन में बाह्यगणन की रीति का काफी प्रयोग किया जाता है।

(vi) तुलनात्मक अध्ययन हेतु – जब कभी कुछ समस्याओं से सम्बन्धित विभिन्न देशों के समंक अलग–अलग कालों के लिए उपलब्ध हों तो उनका तुलनात्मक अध्ययन करना सम्भव नहीं हो पाता है। अतः ऐसी स्थिति में समंकों को तुलनायोग्य बनाने के लिए आन्तरगणन व बाह्यगणन का सहारा लेना पड़ता है। उदाहरण के लिए अमेरिका में जनगणना 1980 में और भारत में 1981 में की गयी। चूंकि दोनों देशों के जनगणना समंकों की अवधि अलग–अलग है इसलिए तुलना करने के लिए या तो भारत की 1980 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना होगा अथवा अमेरिका की 1981 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना होगा।

(vii) स्थान सम्बन्धी माध्यों का निर्धारण – एक अविच्छिन्न श्रेणी, भूयिष्ठक, मध्यका आदि स्थानिक माध्यों के मूल्यों का निर्धारण करने के लिए भी आन्तरगणन रीति का प्रयोग किया जाता है।

निम्नांकित परिस्थितियों में भी अज्ञात राशियों को ज्ञात करने के लिए आन्तरगणन तथा बाह्यगणन तकनीक की आवश्यकता पड़ती है –

(अ) हो सकता है कि हम दो देशों की प्रगति का विश्लेषण कर रहे हों पर दोनों के एक समयावधि से समबन्धित आँकड़े न उपलब्ध हों, ऐसी स्थिति में तुलनात्मक अध्ययन के

लिए यह आवश्यक है कि दोनों के सम्बन्ध में आँकड़े एक ही समायावधि से सम्बन्धित प्राप्त किए जाएँ। मान लीजिए हम भारत के औद्योगिक उत्पादन की तुलना जापान के साथ करना चाहते है पर भारत में उपलब्ध आँकड़ा 1985 का है, पर जापान का आँकड़ा 1987 का है। ऐसी स्थिति में तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि हम भारतीय आँकड़ों के आधार पर 1987 के आँकड़े का आन्तरगणन करें।

(ब) देश की 11वीं योजनाओं की रूपरेखा तैयार करने के लिए यह आवश्यक है कि योजना बनाने से सम्बन्धी भावी आँकड़े ज्ञात हों, इन अज्ञात समंकों के ज्ञान के बिना योजनाएं नहीं बनायी जा सकती।

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाओं का सभी क्षेत्रों में अत्यधिक महत्त्व है। इन विधियों द्वारा प्राप्त आकलनों का प्रशासकों, व्यापारियों, समाजशास्त्रियों, अर्थशास्त्री, नियोजन–विशेषज्ञ, राजनीतिज्ञ, शासक, समाज–सुधारक तथा वैज्ञानिकों के लिए बड़ा व्यावहारिक महत्त्व है। उद्योग एवं व्यापार अनुमानों पर आधारित होते हैं। विश्वसनीय अनुमान लगाने के लिए उद्योगपतियों एवं व्यापारियों द्वारा आन्तरगणन वं बाह्यगणन का प्रयोग किया जाता है। एक वित्तमंत्री अपने बजट सुझावों तथा अनुमानों को इन्हीं आकलनों के आधार पर बनाता है। इसी प्रकार बाह्यगणन का भी व्यापारिक पूर्वानुमान में बहुत अधिक महत्त्व है।

25.6 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिशुद्धता

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाएं उपर्युक्त दो महत्त्वपूर्ण मान्यताओं के आधार पर की जाती है। अतः उनके द्वारा ज्ञात अनुमान यथोचित रूप से ही परिशुद्ध होते हैं। परन्तु यह ध्यान रखना चाहिए कि वे अनुमान–मात्र है। अतः वे वास्तविक समंकों की भाँति परिशुद्ध नहीं हो सकते। यदि आधारभूत मान्यताएँ पूरी नहीं होती तो आन्तरगणन व बाह्यगणन द्वारा प्राप्त सम्भाव्य अनुमान भी भ्रमात्मक और अशुद्ध होते हैं।

डा0 बाउले के अनुसार आन्तरगणन की परिशुद्धता निम्न दो बातों पर निर्भर है –

(i) **समंकों के सम्भाव्य उच्चावचनों का ज्ञान –** दिए हुए समंकों से होने वाले उतार–चढ़ाव के सम्बन्ध में जितनी अधिक जानकारी होगी, आन्तरगणित मूल्यों में उतना अधिक यथार्थता व विश्वसनीयता का अंश होगा। यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से उच्चावचन होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

(ii) **समंकों से सम्बन्धित घटनाओं का ज्ञान –** यदि सांख्यिकी को उपलब्ध समंकों पर प्रभाव डालने वाली महत्त्वपूर्ण घटनाओं का भी यथेष्ट ज्ञात है, तो वह सभी तथ्यों को ध्यान में रखते हुए आन्तरगणित मूल्यों में आवश्यक संशोधन करके उन्हें अधिक शुद्ध बना सकता है। उदाहरणार्थ, 1947 में भारत की जनसंख्या का आन्तरगणन करते समय देश के विभाजन के कारण उत्पन्न घटनाओं (जैसे शरणार्थियों का भारी संख्या में आना, साम्प्रदायिक दंगे आदि) के आधार पर अनुमानित संख्या में आवश्यक संशोधन कर देने से उसकी शुद्धता अधिक हो जाएगी।

उपर्युक्त दो बातों के अतिरिक्त आन्तरगणित मूल्यों की यथार्थता बहुत कुछ उपयुक्त रीति के प्रयोग पर भी निर्भर करती है। अतः उपयुक्त रीति का चुनाव बहुत महत्त्वपूर्ण है।

25.7 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विधियाँ

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विधियों को मुख्य रूप से दो भागों में बाँटा जा सकता है –

(i) बिन्दु रेखीय या ग्रैफिक विधि (Graphic Method)

(ii) बीजगणितीय विधियाँ (Algebraic Method)

25.7.1 बिन्दु रेखीय या ग्रैफिक विधि

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की यह सबसे सरल रीति है और सब प्रकार के समंकों पर लागू होती है। स्वतंत्र चर मूल्य (x) को X अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है। रेखा चित्र पर बिन्दु कर लिये जाते हैं अर्थात् x के सापेक्ष दिए हुए y के मूल्यों को प्रांकित कर लिया जाता है और इन बिन्दुओं को मिला दिया जाता है। x के जिस मूल्य के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करना हो, वहाँ से एक लम्ब उस वक्र पर डाला जाता है जो बिन्दुओं के मिलाने से प्राप्त हुआ है। यह लम्ब वक्र को जिस बिन्दु पर काटे वहाँ एक लम्ब Y अक्ष पर डाला जाता है और इस मूल्य की गणना कर ली जाती है। यही अभीष्ट आकलन है।

बाह्यगणन करते समय वक्र को आगे बढ़ाया जाता है और फिर x के जिस मूल्य के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करना हो, वहाँ से इस वक्र पर लम्ब डाला जाता है। इस विधि में बाह्यगणन की अपेक्षा आन्तरगणन अधिक शुद्धता से प्राप्त किया जाता है।

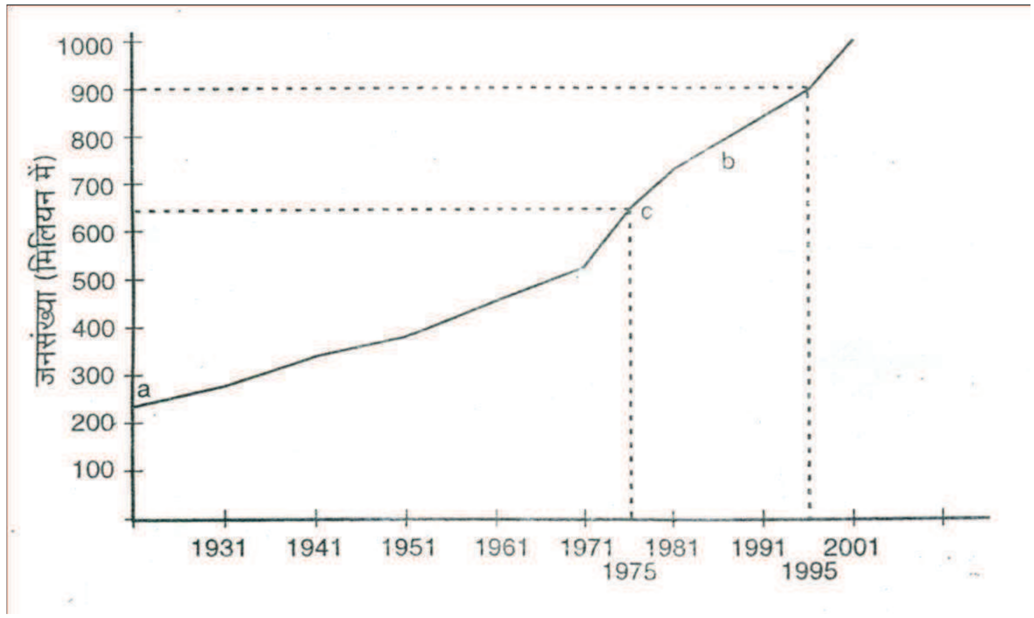
नीचे दिये गये एक उदाहरण के द्वारा इसे और स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण : 1नीचे दी गयी सारिणी में भारत में जनगणना के परिणाम दिए हुए हैं जिसके आधार पर 1975 की जनसंख्या का आन्तरगणन तथा 1995 की जनसंख्या का बाह्यगणन ज्ञात कीजिए।

जनगणना वर्ष		1931	1941	1951	1961	1971	1981	1991
जनसंख्या (मिलियन में)	279	319	361	439	548	863	844	

हल – ऊपर दी गयी सारिणी में विभिन्न जनगणना से सम्बन्धित वर्षों से सम्बन्धित जनसंख्या दी गयी है, जिसके आधार पर हमें 1975 वर्ष के लिए जनसंख्या का आन्तरगणन तथा 1995 वर्ष के लिए जनसंख्या का बाह्यगणन करना है। सारिणी में 'वर्ष' स्वतंत्र चर तथा उससे सम्बन्धित जनसंख्या आश्रित चर है। स्वतंत्र चर या वर्षों को X अक्ष पर प्रदर्शित किया गया तथा आश्रित चरों को Y अक्ष पर प्रदर्शित किया गया है। X से

सम्बन्धित चरों को ग्राफ पर अंकित करके ab वक्र प्राप्त की गयी है जो विभिन्न वर्षों से सम्बन्धित जनसंख्या प्रदर्शित कर रही है, जैसा –



अब प्रश्न के अनुसार हमें 1975 से सम्बन्धित जनसंख्या का आन्तरगणन करना है। सबसे पहले हम X अक्ष पर 1975 वर्ष ज्ञात करेंगे, उसके बाद 1975 से सम्बन्धित बिन्दु से ऊपर लम्ब अक्ष के समानान्तरण एक सीधी रेखा खीचेंगे जो ab को c बिन्दु पर काटती है। c बिन्दु ही 1975 से सम्बन्धित बिन्दु है जिससे होकर ab गुजरती है। अब यदि हम c बिन्दु से Y अक्ष पर लम्ब डालें तो हमें 1975 से सम्बन्धित ज्ञात हो जाएगी, जो ––––– है।

इसी प्रकार यदि हमें 1995 के लिए जनसंख्या बाह्यगणन करना हो तो हम सबसे पहले X अक्ष पर 1995 ज्ञात करेंगे जहाँ से एक सीधी रेखा लम्बवत् ऊपर खीचेंगे तथा ab को बढ़ाने में जो उस लम्बवत् रेखा को d पर काटती है। d से Y अक्ष पर लम्ब खींचकर 1995 की जनसंख्या ज्ञात कर लेंगे जो –––––– है।

यहाँ एक बात और उल्लेखनीय है कि यदि आँकड़े अविच्छिन्न श्रेणी या वर्गान्तर के रूप में हो तो मध्य बिन्दुओं को X अक्ष पर तथा आवृत्तियों को Y अक्ष पर अंकित करेंगे। शेष प्रक्रिया पहले की ही तरह होगी, और इस स्थिति में भी हम आन्तरगणन तथा बाह्यगणन क्रिया कर लेंगे।

25.7.2 आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की बीजगणितीय विधियाँ

बीजगणितीय विधि के अन्तर्गत आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की अनेक विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है जिन्हें हम मोटे तौर पर दो भागों में विभक्त कर सकते हैं –

जब समंक माला के चर बराबर अन्तर से बढ़े तथा जब समंक माला के चर असमान अन्तर से बढ़े। इस स्थिति में निम्नांकित सूत्र प्रयुक्त होते हैं –

(i) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि

(ii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि

(iii) लाग्रैंज विधि

(iv) परवलयिक–वक्र विधि

(v) अन्य रीतियाँ

(क) न्यूटन–गॉस (अग्रगामी) विधि

(ख) न्यूटन–गॉस (पृष्ठगामी) विधि

(ग) स्टर्लिंग का सूत्र विधि

(घ) न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि

(i) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि

प्रयोग – यह विधि द्विपद–प्रमेय पर आधारित है। इसका प्रयोग तब किया जाता है जब निम्न दो शर्तें पूरी होती है – (क) स्वतंत्र चर (x) के पद बराबर अन्तर से बढ़ते हैं, जैसे 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999 या 1961, 1971, 1981, 1991, 2001. .. (ख) इन बराबर अन्तर वाले पदों में से ही किसी एक x मूल्य के आश्रित पद y का मूल्य अनुमानित करना होता है। उदाहरणार्थ, यदि 1961, 1971, 1981 और 1991 जनगणना वर्षों में से किसी नगर की 1961, 1971 और 1991 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1981 की जनसंख्या अनुमानित करनी हो तो द्विपद–विस्तार विधि द्वारा आन्तरगणन किया जाएगा क्योंकि 1961, 1971, 1981 और 1991 के अन्तर समान (10) हैं। इस प्रकार यदि 1961, 1971, 1981 और 1991 के भारत की जनसंख्या के आँकड़े ज्ञात हैं और उनकी सहायता से 2001 के लिए जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो भी यही विधि अपनायी जाएगी।

प्रक्रिया – इस विधि की निम्नांकित प्रक्रियाएँ हैं –

(i) स्वतंत्र चर–मूल्य (x) के पदों को क्रमानुसार $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ तथा $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ आदि संकेताक्षरों द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(ii) y के जितने मूल्य ज्ञात होते हैं उनका प्रमुख अन्तर सदैव शून्य माना जाता हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए y श्रेणी के ज्ञात मूल्य 5 है तो पाचवाँ प्रमुख अन्तर शून्य होगा $\Delta_0^5 = 0$

सूत्र की दृष्टि से : $\Delta_0^n = 0;\ \ n = y$ श्रेणी के ज्ञात मूल्यों की संख्या $\Delta_0^n = (y-1)^n$

$$= y^n - y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\times 2} y^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} y^{n-3} + \ldots = 0$$

यदि y के ज्ञात मूयों की संख्या (n) 5 हो, तो –

$$\Delta_0^5 = (y-1)^5 = y^5 - \frac{5y^{5-1}}{1} + \frac{5(5-1)}{1\times 2} y^{5-2} - \frac{5(5-1)(5-2)}{1\times 2\times 3} y^{5-3}$$

$$+ \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1\times 2\times 3\times 4} y^{5-4} - \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} y^{5-5} = 0$$

इसको हल करने पर निम्न समीकरण प्राप्त होती है –

$$= y_5 - 5y_4 + 10_{Y3} - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

सूत्र निकालने की एक व्यावहारिक व सरल विधि

द्विपद विस्तार का उपरोक्त ढंग बहुत जटिल है। इसलिए इसकी एक सरल विधि नीचे दी जा रही है –

(क) जिस प्रमुख अन्तर के लिए द्विपद–विस्तार करना हो पहले उसे उस क्रम के y को लिखा जाएगा। फिर अवरोही क्रम में y का घात, अधोलिखित संकेत के रूप में एक–एक कम करते जाएंगे जिससे अन्त में y_0 आ जाए। जैसे यदि 5 मूल्य ज्ञात हों तो पाचवाँ प्रमुखान्तर शून्य होगा और y को निम्न क्रमानुसार लिखा जाएगा –

$y_5 \quad y_4 \quad y_3 \quad y_2 \quad y_1 \quad y_0$

(ख) प्रथम y धनात्मक होगा, अगला y ऋणात्मक, फिर उससे अगला y धनात्मक और इसी प्रकार अन्त तक चिन्ह एकान्तर रूप में लिखे जाएंगे। जैसे $+y_5 - y_4 + y_3 - y_2 + y_1 - y_0$

(ग) विभिन्न y's के अंकात्मक गुणक निकालने की विधि इस प्रकार होगी। पहले लिखे जाने वाले y का गुणक 1 होगा। इससे आगे के y_s के अंकात्मक गुणक निम्न सूत्रानुसार प्राप्त होंगे –

पिछले y का गुणक × पिछले y का अधोसंकेत
————————————————————
पिछले y की क्रम–स्थिति

उक्त उदाहरण में,

$$1y_5 - \frac{1\times 5}{1} y_4 + \frac{5\times 4}{2} y_3 - \frac{10\times 3}{3} y_2 + \frac{10\times 2}{4} y_1 - \frac{5\times 1}{5} y_0 = 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

द्विपद विस्तार में y के गुणांक पास्कल त्रिभुज से भी ज्ञात किये जा सकते हैं।

पास्कल त्रिभुज

n	अंकात्मक गुणांक	योग (2^n)
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256

कुछ द्विपद–विस्तार –

ज्ञात मूल्यों की संख्या	**मूल सूत्र**	**द्विपद–विस्तार**
2	$(y-1)^2 = 0$	$y_2 - 2y_1 + y_0 = 0$
3	$(y-1)^3 = 0$	$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0$
4	$(y-1)^4 = 0$	$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$
5	$(y-1)^5 = 0$	$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$
6	$(y-1)^6 = 0$	$y_6 - 6y_5 + 15y_4 - 20y_3 + 15y_2 - 6y_1 + y_0 = 0$

उदाहरण : 2निम्न मूल्यों के आधार पर किसी भी बीजगणितीय विधि का प्रयोग करते हुए y का मूल्य ज्ञात कीजिए जब $x = 3$ हो –

x	:	1	2	3	4	5
y	:	216000	226981	?	250047	262144

हल – द्विपद विस्तार विधि का प्रयोग किया जाएगा क्योंकि इसकी दोनों शर्तें पूरी हो रही है। प्रथम, x श्रेणी के क्रमिक पदों में समान अन्तर है। दूसरा, आन्तरगणित किया जाने वाला मूल्य x_3, x श्रेणी के समान अन्तर वाले पदों में से ही एक पद है।

		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	:	1	2	3	4	5
y	:	216000	226981	?	250047	262144
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

y – श्रेणी के 4 पद ज्ञात हैं अतः $\Delta_0^4 = 0$ मानकर उसका द्विपद विस्तार लिखा जाएगा –

$$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

ज्ञात मूल्यों को समीकरण में आदिष्ट करने पर –

$$262144 - 4 \times 250047 + 6y_2 - 4 \times 226981 + 216000 = 0$$

$$262144 - 1000188 + 6y_2 - 907924 + 216000 = 0$$

$$478144 - 1908112 + 6y_2 = 0$$

$$6y_2 = 1429968 \qquad \therefore y_2 = 238328$$

अतः $x = 3$ के लिए y का अनुमानित मूल्य 238328 है।

दो अज्ञात मूल्य

जब स्वतंत्र चर–मूल्यों (x's) के अन्तर समान हों और दो अज्ञात मूल्यों (y's) का आन्तरगणन करना हो तो दो समीकरणों की आवश्यकता होती है। प्रथम, ज्ञात मूल्यों की संख्या के बराबर प्रमुख अन्तर को शून्य मानकर द्विपद– विस्तार लिखा जाता है। दूसरे, उक्त द्विपद–विस्तार को फिर से लिखकर प्रत्येक y के अधोलिखित संकेत (subscript) में 1 की वृद्धि कर देते हैं जिससे, अन्त में y_0 के स्थान पर y_1 प्राप्त हो जाता है। तत्पश्चात् ज्ञात मूल्यों को दोनों समीकरणों में आदिष्ट करके, उनके हल द्वारा अज्ञात मूल्य अनुमानित कर लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 7 मूल्य ज्ञात हों और 2 अज्ञात मूल्यों का आन्तरगणन करना हो, तो निम्न दो समीकरण बनाए जाएंगे –

$$\Delta_0^7 = y_7 - 7y_6 + 21y_5 - 35y_4 + 35y_3 - 21y_2 + 7y_1 - y_0 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$\Delta_1^7 = y_8 - 7y_7 + 21y_6 - 35y_5 + 35y_4 - 21y_3 + 7y_2 - y_1 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

इन दोनों द्विपद समीकरणों की सहायता से दो अज्ञात मूल्यों के सम्भाव्य अनुमान लगा लिए जाएंगे।

उदाहरण : 3

निम्न सारिणी की सहायता से 1980 और 1990 के लिए उत्पादन का अनुमान लगाइए –

वर्ष	:	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
उत्पादन (000 टनों में)	:	200	220	260	?	350	?	430

हल :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
वर्ष (x) :	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
उत्पादन (y) : 200	220	260	?	350	?	430	
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_5

x's का अन्तर समान होने के कारण प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि प्रयुक्त की जाएगी। y के 5 मूल्य ज्ञात हैं और 2 अज्ञात। इसलिए पाँचवें प्रमुख–अन्तर से सम्बन्धित द्विपद–विस्तार का प्रयोग दो बार निम्न प्रकार किया जाएगा –

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$y_6 - 5y_5 + 10y_2 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर –

$$y_5 - 5 \times 350 + 10y_3 - 10 \times 260 + 5 \times 220 - 200 = 0$$

$$430 - 5y_5 + 10 \times 350 - 10y_3 + 5 \times 260 - 220 = 0$$

$$\therefore y_5 + 10y_3 = +3450 \qquad \text{... (3)}$$

$$-5y_5 - 10y_3 = -5010 \qquad \text{... (4)}$$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर निम्न समीकरण उपलब्ध होता है –

$$-4y_5 = -1560 \qquad \therefore y_5 = 390$$

y_5 के मूल्य को समीकरण (3) में आदिष्ट करने पर y_3 का मूल्य निम्न प्रकार निकाला जाएगा –

$$390 + 10y_3 = 3450$$

$$\therefore \; y_3 = \frac{3450-390}{10} = 306$$

1985 और 1990 में उत्पादन की अनुमानित मात्रा के समंक क्रमशः 306 और 390 हजार टन हैं।

जब मूल्यों में असाधारण उच्चावचन हो

कभी–कभी ऐसा भी देखने में आता है कि दिये गये प्रश्न में एक–आध मूल्य असाधारण रूप से उच्चावचन लिए हुए होता है। ऐसी परिस्थिति में, वांछित मूल्य का आन्तरगणन करने से पूर्व, अनियमित मूल्य को नियमित व सामान्य कर लेना चाहिए अन्यथा अनुमानित किये जाने वाला मूल्य गलत होगा।

उदाहरण : 4 एक जिले की विभिन्न वर्षों की जनसंख्या नीचे दी गयी है। वर्ष 1915 की जनसंख्या अनुमानित कीजिए –

वर्ष :	1910	1911	1912	1913	1914
जनसंख्या (मिलियन में) :	7	9	36	14	16

हल : नोट : इस प्रश्न में 1915 के वर्ष के लिए जनसंख्या अनुमानित करने से पहले 1912 के लिए जनसंख्या आ अनुमान लगाना होगा, क्योंकि 1912 पर जनसंख्या में अत्यधिक उतार–चढ़ाव हुआ है जो कि आन्तरगणन की मान्यताओं की दृष्टि से सही नहीं है।

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
वर्ष (x) :	1910	1911	1912	1913	1914
जनसंख्या (y) :	7	9	36	14	16
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

चूंकि ज्ञात मूल्य 4 है इसलिए $\Delta_0^4 = 0$

$$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$16 - (4\times14) + 6y_2 - (4\times9) + 7 = 0$$

$$16-56+6y_2-36+7 = 0$$

$$6y_2 = -23 + 92$$

$6y_2 = 69$ मि0 $\quad\quad \therefore \; y_2 = 11.5$ मिलियन

अब 1915 के वर्ष के लिए जनसंख्या अनुमानित की जाएगी –

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$$

वर्ष	:	1910	1911	1912	1913	1914	1915
जनसंख्या (मि0)	:	7	9	11.5	14	16	?
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

चूंकि ज्ञात मूल्य 5 है अतएव $\Delta_0^5 = 0$

$$\Delta_0^5 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

or $$y_5 - (5\times16) + (10\times14) - (10\times 11.5) + (5\times9) - 7 = 0$$

$$y_5 - 80+140-115+45-7 = 0$$

$$y_5 = 202-185 \qquad \therefore\ y_5 = 17 \text{ मिलियन}$$

अतः 1915 वर्ष के लिए जनसंख्या 17 मि0 है।

(ii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि

न्यूटन की प्रगामी अन्तर विधि द्विपद–प्रमेय पर ही आधारित है। इस विधि का प्रयोग उस परिस्थिति में करना चाहिए जिसमें स्वतंत्र श्रेणी (x) के दिए हुए पदों के अन्तर समान हों परन्तु जिस पद (x) के लिए आश्रित चर के पद (y_x) का आन्तरगणन करना हो वह दिए हुए स्वतंत्र चर मूल्यों से सर्वथा भिन्न हो अर्थात् वह समान अन्तर वाले x's से भिन्न अन्य कोई मूल्य हो। उदाहरणार्थ यदि राष्ट्रीय आय प्रति 5 वर्ष के अन्तर से दी हुई हो – 1920, 1925, 1930, 1935, 1940 तो ऐसी हालत में अगर 1922 या 1938 के वर्ष के लिए राष्ट्रीय आय ज्ञात करनी हो तो इस न्यूटन प्रगामी अन्तर विधि का प्रयोग किया जाएगा। इस विधि का प्रयोग बाह्यगणन के लिए भी किया जा सकता है परन्तु यह समंक माला के पूर्वार्द्ध में किसी 'x' के आश्रित मूल्य (y_x) का आन्तरगणन करने के लिए अधिक उपयुक्त होती है।

प्रयोग करने की दृष्टि से ''प्रगामी अन्तर विधि'' तथा ''द्विपद विस्तर रीति'' में अन्तर –

दोनों, प्रगामी तथा द्विपद विस्तार रीतियों में x श्रेणी या स्वतंत्र चरों का समान रूप से बढ़ना आवश्यक है, परन्तु x के जिस मूल्य आ आन्तरगणन करना होता है वह प्रगामी अन्तर रीति में x श्रेणी का ही एक नियमित मूल्य न होकर उनके बीच का कोई अज्ञात व अनियमित मूल्य हो सकता है जबकि द्विपद विस्तार रीति में आन्तरगणित किये जाने वाला मूल्य x श्रेणी का स्वतः एक नियमित मूल्य होता है।

उदाहरणार्थ –

प्रगामी अन्तर विधि (1)		द्विपद विस्तार विधि (2)	
x	y	x	xy
10	132	10	132
20	140	20	140
30	155	30	155
40	172	40	?
50	190	50	190

उपर्युक्त उदाहरण (1) में 10, 20, 30, 40, 50 के मूल्यों को छोड़कर अन्य किसी भी बीच में आने वाले मूल्य का अनुमान प्रगामी अन्तर विधि द्वारा किया जाएगा, जैसे – 12, 18, 28, 35, 42 इत्यादि। जबकि उदाहरण (2) के ज्ञात किये जाने वाला मूल्य x श्रेणी में से ही कोई एक होगा जैसे 40 पर y का मूल्य ज्ञात करना।

क्रिया विधि – न्यूटन प्रगामी अन्तर विधि में निम्न क्रियाएँ अपनायी जाती है :

(1) **संकेताक्षर – (i)** सबसे पहले x श्रेणी के मूल्यों को क्रमानुसार x_0, x_1, x_2, x_3 .... x_n आदि संकेताक्षरों द्वारा तथा y श्रेणी के मूल्यों को क्रमानुसार $y_0, y_2, \quad y_3$ .... y_n आदि संकेताक्षरों द्वारा दिखाया जाता है। **(ii)** x श्रेणी के जिस पद का मूल्य आन्तरगणन करना होता है उसे 'x' संकेताक्षर द्वारा प्रकट किया जाता है और **(iii)** x पर आश्रित y श्रेणी के जिस मूल्य का आन्तरगणन करना हो उसे "y_x" द्वारा प्रकट किया जाता है।

(2) **अन्तर सारणी की रचना** – y के प्रमुखान्तरों को ज्ञात करने के लिए परिमितान्तरों की सारणी बनायी जाती है जिसमें स्वतंत्र व आश्रित चरों के अतिरिक्त y के ज्ञात मूल्यों की संख्या से एक कम संख्या में अन्तरों के खाने होते हैं। प्रत्येक कॉलम के प्रथम अन्तर को 'प्रमुखान्तर' कहते हैं तथा इसको Δ चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है – प्रथम, द्वितीय, तृतीय आदि प्रमुखान्तरों के लिए कॉलम के ऊपर Δ^1, Δ^2, Δ^3 आदि चिन्ह रखे जाते हैं। अन्तर निकालनें के लिए y के प्रत्येक मूल्य में से पिछला मूल्य घटाया जाता है, जैसे प्रथम अन्तरों के खाने में $y_1 - y_0 = \Delta_0^1 ; y_2 - y_1 = \Delta_1^1 ; y_3 - y_2 = \Delta_2^1$ आदि। दूसरे खाने के अन्तरों को पहले खाने के अन्तरों की सहायता से इसी प्रकार निकाला जाएगा अर्थात् $\Delta_1^1 - \Delta_0^1 = \Delta_0^2 ; \Delta_2^1 - \Delta_1^1 = \Delta_1^2 ; \Delta_3^1 \ \Delta_2^1 = \Delta_2^2 ...,$ इसी प्रकार अन्त तक अन्तर निकाले जाएंगे। अन्तरों की संख्या कम होती जाएगी और अन्तिम खाने में एक मात्र अन्तर रहेगा।

अन्तर सारणी

स्वतंत्र चर (*x*)	आश्रित चर (*y*)	अन्तर							
		प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
x_0	y_0								
x_1	y_1	$y_1 - y_0$	Δ_0^1	$\Delta_1^1 - \Delta_0^1$	Δ_0^2				
						$\Delta_1^2 - \Delta_0^2$	Δ_0^3		
x_2	y_2		Δ_1^1	$\Delta_2^1 - \Delta_1^1$	Δ_1^2			$\Delta_1^3 - \Delta_0^3$	Δ_0^4
x_3	y_3	$y_2 - y_1$				$\Delta_2^2 - \Delta_1^2$	Δ_1^3		
x_4	y_4		Δ_2^1	$\Delta_3^1 - \Delta_2^1$	Δ_2^2				
		$y_3 - y_2$	Δ_3^1						
		$y_4 - y_3$							

नोट – अन्तर सारणी में विभिन्न स्तरों पर अन्तर लेते समय बीजगणितीय चिन्हों (+ व –) का विशेष ध्यान रचना चाहिए क्योंकि किसी एक अन्तर के अशुद्ध होने पर अन्तरों की पूरी श्रृंखला अशुद्ध हो जाती है।

सारणी देखने से स्पष्ट हो जाता है कि यदि सभी प्रमुखान्तर ज्ञात हों तो उनकी सहायता से बाकी सभी अन्तर और y के मूल्य आसानी से ज्ञात किये जा सकते हैं –

सूत्रानुसार –

$$y_1 = y_0 + \Delta_0^1$$

$$y_2 = y_1 + \Delta_1^1 = y_0 + \Delta_0^1 + \Delta_0^2 + \Delta_0^1 = y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2$$

$$y_3 = y_2 + \Delta_2^1 = (y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_1^2)$$

$$= y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2 + (\Delta_0^2 + \Delta_0^1) + (\Delta_0^2 + \Delta_0^3)$$

$$= y_0 + 3\Delta_0^1 + 3\Delta_0^2 + \Delta_0^3$$

प्रमुखान्तर और द्विपद–विस्तार – प्रमुखान्तरों को यदि ज्ञात y's के रूप में व्यक्त किया जाये तो द्विपद–विस्तार प्राप्त हो जाते हैं, उदाहरणार्थ –

$$\Delta_0^1 = y_1 - y_0$$

$$\Delta_0^2 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta_0^3 = \Delta_1^2 - \Delta_0^2 = (\Delta_2^1 - \Delta_1^1) - \Delta_0^2 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

(3) **स्वतंत्र चर मूल्यों के अन्तर –** प्रमुखान्तर निकालने के बाद निम्न सूत्र द्वारा x_x और x_0 के अन्तर का x's के समान अन्तरों पर अनुपात निकाला जाता है –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद – मूल पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}}$$

$$= \frac{\text{Item of Interpolation – Item of Origin}}{\text{Difference between adjoining item}}$$

$$= \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0}$$

(4) **सूत्र –** अन्त में निम्न सूत्र जिसे 'न्यूटन ग्रेगोरी सूत्र' भी कहते है, का प्रयोग किया जाता है –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta_0^4 + \ldots$$

महत्वपूर्ण संकेत – सूत्र का आकार प्रमुखान्तरों व पदों की संख्या पर निर्भर करता है। सूत्र का उपर्युक्त रूप 4 प्रमुखान्तरों वाले प्रश्न के लिए उदाहरण स्वरूप है। अगर मान लीजिए 5वाँ प्रमुखान्तर भी निकलता, तो सूत्र में निम्न विस्तार और करना पड़ता – $+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta_0^5$

उदाहरण : 5निम्न समंकों के आधार पर 16 वर्ष की आयु पर जीवन प्रत्याशा का अनुमान लगाइए –

आयु (वर्ष)	:	15	20	25	30	35
जीवन–प्रत्याशा (वर्ष)	:	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

हल : अन्तर सारणी (Table of Difference)

आयु (वर्ष) x		जीवन प्रत्याशा (वर्ष) y		अन्तर (Difference) प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
15	x_0	32.2	y_0								
20	x_1	29.1	y_1	29.1–32.2	–3.1 Δ_0^1	–3.1–(–3.1)	0 Δ_0^2				
25	x_2	26.0	y_2	26.0–29.1	–3.1			0.2–0	0.2 Δ_0^3		
30	x_3	23.1	y_3			–2.9–(3.1)	0.2			0–0.2	–0.2 Δ_0^4
35	x_4	20.4	y_4	23.1–26.0	–2.9	–2.7– (2.9)	0.2	0.2–0.2	0		
22	x_x	?	y_x	20.4–23.1	–2.7						

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन} - \text{मूल वर्ष}}{\text{निकटवर्ती वर्षों का अन्तर}} = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{22-15}{20-15} = 1.4$$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 5 है अतएव न्यूटन का सूत्र चौथे प्रमुखान्तर (Δ_0^4) तक लिखा जाएगा –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta_0^*$$

$$y_x = 32.2 + 1.4\times(-3.1) + \frac{1.4\times 0.4}{2}\times 0 + \frac{1.4\times 0.4\times(-0.6)}{2\times 3}\times 0.2$$

$$+ \frac{1.4\times 0.4\times(-0.6)\times(-1.4)}{2\times 3\times 4}\times 0.2$$

$$y_x = 32.2 - 4.34 + 0 - 0.0112 - 0.004 = 32.2 - 4.35 = 27.8$$

अतः 22 वर्ष की आयु के लिए जीवन–प्रत्याशा 27.8 वर्ष है।

आवृत्ति वितरण में आन्तरगणन

(i)आवृत्ति वितरण में आवृत्तियों को संचयी बनाकर आन्तरगणन किया जाता है। शेष क्रिया पूर्ववत् ही बनी रहती है।

(ii)कभी–कभी अनुमानित मूल्य किसी निश्चित समय या मूल्य के लिए न निकलवा कर दो सीमाओं के बीच के लिए निकलवाया जाता है जिसका एक उपयुक्त उदाहरण हम नीचे दे रहे हैं। ऐसे प्रश्नों के लिए भी न्यूटन की विधि ही उपयुक्त समझी जाती है।

उदाहरण : 6 निम्न सारणी से (i) 45 से कम (ii) 55 से कम, तथा (iii) 45–55 के बीच अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक :	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
विद्यार्थियों की संख्या :	31	42	51	35	31

हल : पहले, संचयी आवृत्ति वितरण के रूप बदलकर अन्तर–सारणी बनाई जाएगी –

अन्तर–सारणी

अंक	***x***	विद्यार्थियों की संख्या ***y***		अन्तर **(Differences)**							
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
40 से कम	x_0	31	y_0	+42	Δ_0^1		Δ_0^2				
50 से कम	x_1	73	y_1			+9					
				+51				–25	Δ_0^3		
60 से कम	x_2	124	y_2			–16				+37	Δ_0^4
				+35				+12			
70 से कम	x_3	159	y_3			–4					
80 से कम	x_4	190	y_4	+31							
45 से कम	x_x	?	y_x								

(i) 45 से कम प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

$$x = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{45-40}{50-40} = \frac{5}{10} = 0.5$$

चौथे प्रमुखान्तर तक न्यूटन का प्रगामी–अन्तर सूत्र लिखकर उसमें ज्ञात मूल्यों को रखा जाएगा –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta_0^4$$

$$y_x = 31 + (0.5 \times 42) + \frac{0.5(0.5-1)}{1\times 2}\times 9 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{1\times 2\times 3}\times(-25) +$$

$$\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\times 37$$

$$= 31 + 21 - 1.125 - 1.5625 - 1.4453$$

$$= 47.8672 \text{ या } 48 \text{ approx.}$$

अतः 45 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 48 है।

(ii) 55 से कम प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन का पद – मूल पद}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}} = \frac{55-40}{60-50} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$y_x = 31 + (1.5 \times 42) + \frac{1.5(1.5-1)}{1\times 2}\times 9 + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{1\times 2\times 3}\times(-25)$$

$$+ \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\times 37$$

$$= 31 + 63 + 3.375 + 1.5625 + 0.8672$$

$$= 99.8047 \text{ or } 100 \text{ approx.}$$

अतः 55 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 100 है।

(iii) 45 से 55 के बीच प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

45 से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या $= 48$

55 से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या $= 100$

$\therefore$ 45 से 55 के बीच अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या $= 100 - 48 = 52$

उदाहरण : 7 न्यूटन विधि द्वारा अधिकतम 35^0 सेन्टीग्रेड से सम्बद्ध न्यूनतम सम्भावित तापमान ज्ञात कीजिए –

अधिकतम तापमान :	36	34	32	30	28
न्यूनतम तापमान :	21	19	16	12	11

हल : $$x = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{35-36}{34-36} = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

अन्तर–सारणी

तापमान x		तापमान y		प्रमुखान्तर							
				प्रथम Δ^1		द्वितीय Δ^2		तृतीय Δ^3		चतुर्थ Δ^4	
36	x_0	21	y_0								
34	x_1	19	y_1	−2	Δ_0^1	−1	Δ_0^2				
								0	Δ_0^3		
32	x_2	16	y_2	−3		−1				+4	Δ_0^4
30	x_3	12	y_3					+4			
28	x_4	11	y_4	−4		+3					
				−1							

$$y_x = 21 + (0.5\times -2) + \frac{0.5(0.5-1)}{1\times 2}\times(-1) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{1\times 2\times 3}\times 0 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\times 4$$

$$= 21 - 1 + 0.125 + 0 - 0.156$$

$$= 21.125 - 1.156 = 19.97 \quad \therefore y_x = 20$$

टिप्पणी – यदि इस प्रश्न को 'अवरोही क्रम' के स्थान पर आरोही क्रम में रखकर हल किया जाये तो ऐसी दशा में प्रमुखान्तर क्रमशः +1, +3, −4, +4 होंगे और x का मान 3.5 आयेगा, किन्तु आन्तरगणन मूल्य एक–समान अर्थात् 19.97 ही निकलकर आयेगा।

(iii) लाग्रेंज की विधि

प्रयोग – फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ लाग्रेंज द्वारा प्रतिपादित रीति आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति है। सैद्धान्तिक दृष्टि से लाग्रेंज के सूत्र द्वारा किसी भी प्रकार की परिस्थिति में (चाहे स्वतंत्र चर मूल्यों के अन्तर समान हों या असमान हों) आन्तरगणन व बाह्यगणन किया जा सकता है। परन्तु व्यवहार में इस रीति का प्रयोग वहाँ किया जाता है जहाँ द्विपद–विस्तार रीति तथा न्यूटन की प्रगामी अन्तर–विधि प्रयुक्त न की जा सके अर्थात् जहाँ x's के अन्तर अनियमित या असमान हों। उदाहरणार्थ, यदि किसी नगर की 1981, 1985, 1990, 1991 और 1993 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1989 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो या सन् 2002 ई0 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो लाग्रेंज विधि ही अपनायी जाएगी क्योंकि वर्षों के अन्तर असमान है और इस स्थिति में द्विपद–विस्तार विधि या न्यूटन–विधि प्रयोग नहीं की जा सकती।

क्रिया विधि – (1) सर्वप्रथम x श्रेणी को x_0, x_1, x_2 ... आदि संकेताक्षरों तथा y श्रेणी को y_0, y_1, y_2 ... आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। स्वतंत्र पदमाला (x – series) के जिस मूल्य के लिए आन्तरगणन करना होता है उसे x द्वारा सम्बोधित किया जाता है और आश्रित श्रेणी के आन्तरगणित किये जाने वाले मूल्य को y_x कहते हैं।

(2) सूत्र के निर्माण करने हेतु नीचे एक काल्पनिक उदाहरण लिया जा रहा है। मान लीजिए x व y दो श्रेणी है और $x = 6$ पर y का मूल्य निकालना है।

x		y	
4	x_0	120	y_0
7	x_1	140	y_1
8	x_2	165	y_2
12	x_3	183	y_3

(i) अब सूत्र निर्माण के लिए सर्वप्रथम x's से x श्रेणी के सभी मूल्य घटाए जाएंगे परन्तु प्रथम मूल्य (y_0) का तत्सम्बन्धी x_0 मूल्य, x में से नहीं घटाया जाएगा। उदाहरणार्थ –

$$y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \ldots$$

(ii) सूत्र की इस प्रथम पंक्ति के 'हर' मूल्सरें के लिए सदैव एक बात याद रखनी चाहिए कि x में से जो मूल्य नहीं घटाया गया था अर्थात् x_0, अब x श्रेणी के सभी मूल्य उसी (x_0) में से घटाये जायेंगे।

(iii) द्वितीय पंक्ति : $y_1 \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \ldots$

स्पष्ट है कि 'अंश' के अन्तरों के लिए (अर्थात् पंक्ति के ऊपरी हिस्से में) x में से y_1 का तत्संवादी मूल्य x_1 नहीं घटाया गया है जबकि 'हर' में उसी x_1 में से ही x श्रेणी के सभी मूल्य घटाये गये हैं।

(iv) यह क्रम इसी प्रकार चलता रहेगा।

(v) सूत्र के विस्तार की सीमा, ज्ञात पदों की संख्या अर्थात् x_n पर निर्भर करती है। लाग्रैंज का सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

एक बार पुनः स्मरण रहे – सांख्यिकी की सभी किताबें यह बताती हैं कि लाग्रैंज का सूत्र मान्यता रहित है अतएव इसका प्रयोग प्रत्येक प्रकार के प्रश्न के लिए किया जा सकता है। लेकिन व्यवहार में परीक्षक ऐसा नहीं मानते। यदि कोई प्रश्न न्यूटन तथा द्विपद–विस्तार रीति से निकालने योग्य है तो भले ही वह लाग्रैंज से भी हल किया जा सकता हो, लेकिन उसे लाग्रैंज से हल नहीं करना चाहिए।

उदाहरण : 8निम्न तालिका में जीवन के प्रथम 6 माह के शिशु का सामान्य भार दिया हुआ है। 4 माह की आयु पर शिशु के भार का अनुमान लगाइए।

आयु (माह में) :	0	2	3	5	6
भार (पौण्ड में) :	5	7	8	10	12

हल : स्वतंत्र चर के अन्तर असमान है अतः लाग्रैंज के सूत्र का प्रयोग किया जाएगा –

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x
आयु (age) x :	0	2	3	5	6	4
भार (weight) y :	5	7	8	10	12	?
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_x

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$+ y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y_x = \frac{5\times2\times1\times(-1)\times(-2)}{(-2)\times(-3)\times(-5)\times(-6)} + \frac{7\times4\times1\times(-1)\times(-2)}{2\times(-1)\times(-3)\times(-4)} + \frac{8\times4\times2\times(-1)\times(-2)}{3\times1\times(-2)\times(-3)}$$

$$+ \frac{10\times4\times2\times1\times(-2)}{5\times3\times2\times(-1)} + \frac{12\times4\times2\times1\times(-1)}{6\times4\times3\times1}$$

$$y_x = \frac{1}{9} - \frac{7}{3} + \frac{64}{9} + \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 0.111 - 2.3333 + 7.1111 + 5.3333 - 1.3333$$

$$y_x = 12.5555 - 3.6666 = 8.8888 \ or \ 8.9 \text{ पौण्ड}$$

अतः 4 महीने की आयु वाले शिशु का अनुमानित भार 8.9 पौण्ड है।

(iv) परवलयिक वक्र विधि

प्रयोग – लाग्रेंज की विधि की भाँति परवलय–वक्र विधि भी सार्वभौमिक रीति है जिस की सहायता से भी किसी प्रकार की आन्तरगणन व बाह्यगणन की समस्या का हल किया जा सकता है परन्तु गणन–क्रिया जटिल होने के कारण व्यवहार में इसका प्रयोग तब किया जाता है जबकि पदों की संख्या कम (3 या 4) हो और स्वतंत्र चर–मूल्यों में अधिकतम समान व थोड़ा अन्तर हो।

इस विधि में x का अज्ञात मूल्य ज्ञात करते समय हम यह मानते है कि y और x में परस्पर गणितीय सम्बन्ध है। दिए हुए समंकों के आधार पर निम्न समीकरण असंगित किया जाता है :

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

इस समीकरण में x तथा y के मूल्य इस प्रकार रखे जाते हैं कि जितने अचर पद $a, b, c, \ldots$ की संख्या है, उतने ही समीकरण प्राप्त हो जाएं। उसके बाद इन समीकरणाों को हल कर लिया जाता है। इससे $a, b, c, \ldots$ आदि के मान प्राप्त हो जाते हैं और इन्हें उपरोक्त समीकरण में रख दिया जाता है। अब x के किसी भी मूल्य के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि हम इस समीकरण में x का वह मान लगा देते हैं।

समीकरण ज्ञात करने के लिए हम सबसे पहले ज्ञात मूल्यों की संख्या देखते हैं। यदि 4 मूल्य ज्ञात हों तो समीकरण : $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ होगा। जैसे–जैसे पदों की संख्या बढ़ती जाती है, समीकरण के पद भी बढ़ते जाते हैं। n पद ज्ञात होने पर समीकरण $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + nx^{n-1}$ निम्नांकित सारणी से इस नियम का सरल स्पष्टीकरण हो जाता है –

परवलय–वक्र समीकरण

ज्ञात मूल्यों की संख्या **(n)**	परवलय–वक्र का घात **($n-1$)**	समीकरण
2	1	$y = a + bx$ सरल रेखा समीकरण
3	2	$y = a + bx + cx^2$
4	3	$y = a + bx + cx^2 + dx^3$
5	4	$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$
n	$n-1$	$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots+nx^{n-1}$

इसके बाद गणनाओं को सरल बनाने के लिए हम आन्तरगणन–पद को शून्य मानकर इसके सापेक्ष सभी स्वतंत्र चर मूल्यों के विचलन ज्ञात कर लेते हैं और इन विचलनों में से समावर्त्तक गुणक निकाल देते हैं। x के इन मूल्यों और y के मूल्यों के आधार युगपत समीकरण प्राप्त करके अचर पदों का मान ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण : 9

निम्न सारणी किसी फर्म की गत वर्षों की बिक्री प्रस्तुत करती है। परवलयिक–वक्र विधि द्वारा उसकी 1991 की बिक्री आन्तरगणित कीजिए –

वर्ष	:	1981	1985	1989	1993
बिक्री (लाख रु0)	:	100	112	136	180

हल :

वर्ष	1985	1989	1991	1993	1997
विचलन : x's	–6 –3	–2 –1	0 0	+2 +1	+6 +3
बिक्री : y's	100	112	y	136	180

ज्ञात मूल्यों की संख्या 4 है। इसलिए तीसरे घात के परवलय–वक्र का समीकरण प्रयुक्त किया जाएगा –

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

उक्त समीकरण में ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर निम्न 5 युगपत् समीकरणों की रचना की जाएगी –

$$100 = a + (bx - 3) + (cx - 3^2) + (dx - 3^3)$$

$$100 = a - 3b + 9c - 27d \quad \text{... (i)}$$

$$112 = a - b + c - d \quad \text{... (ii)}$$

$$y = a \quad \text{...(iii)}$$

$$136 = a + b + c + d \quad \text{...(iv)}$$

$$180 = a + 3b + 9c + 27d \quad \text{...(v)}$$

समीकरण (iii) के अनुसार y का मूल्य a के बराबर है इसलिए बाकी समीकरणों की सहायता से a का मूल्य निकाला जाएगा –

(ii) व (iv) को जोड़ने पर निम्न परिणाम प्राप्त होता है –

$$112 = a - b + c - d$$

$$136 = a + b + c + d$$

$$280 = 2a + 2c \qquad \ldots \text{(vi)}$$

इसी प्रकार (i) व (v) समीकरणों को जोड़ देने से निम्न समीकरण प्राप्त होता है –

$$100 = a - 3b + 9c - 27d$$

$$180 = a + 3b + 9c + 27d$$

$$280 = 2a + 18c \qquad \ldots \text{(vii)}$$

(vi) को 9 से गुणा करके उसमें से (vii) घटाकर निम्नलिखित परिणाम निकलता है –

$$2232 = 18a + 18c$$

$$280 = 2a + 18c$$

$$1952 = 16a$$

$$\therefore a = \frac{1952}{16} = 122$$

क्योंकि a का मूल्य y के बराबर है इसलिए $y = 122$

1991 में उस संस्था की बिक्री का आन्तरगणित मूल्य 122 लाख रुपये ही आएगा। यदि इस प्रश्न में परवलय–वक्र विधि द्वारा आन्तरगणन करने का निर्देश न हो तो इसे न्यूटन की विधि द्वारा करना ही उपयुक्त होगा।

(v) अन्य रीतियाँ

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की चार प्रमुख रीतियों के अतिरिक्त अन्य रीतियों का भी विशिष्ट परिस्थितियों में प्रयोग किया जा सकता है। इन रीतियों में से अधिकांश न्यूटन

के प्रगामी अन्तर सूत्र के ही रूपान्तर है। यहाँ पर निम्न चार अन्य रीतियों का संक्षिप्त वर्णन किया गया है।

(क) न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि रीति का प्रयोग कब किया जाए? यह रीति न्यूटन की प्रगामी अन्तर–विधि का ही एक संशोधित रूप है। इस रीति का प्रयोग उस दशा में किया जाता है जब (i) x श्रेणी समान अन्तर से बढ़ती हो तथा (ii) दिए हुए मूल्यों के अलावा किसी ऐसे x के लिए y_x का आन्तरगणन हो जो श्रेणी के मध्य में आता हो। ध्यान रहे, न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति और इस रीति द्वारा उत्तर एक समान निकलकर आएगा।

क्रिया–विधि – (i) **संकेताक्षर** – स्वतंत्र चर माला अर्थात् x श्रेणी के जिस पद का आन्तरगणन करना होता है उससे ठीक पिछले पद को x_0, और उससे पिछले पदों को क्रमानुसार x_{-1}, x_{-2}, x_{-3} आदि तथा x_0 से अगले पदों को x_1, x_2, x_3 आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रकट किया जाता है। ठीक यही क्रिया y श्रेणी के साथ दोहराई जाती है। मान लीजिए एक श्रेणी में छः पद है और $x = 32$ पद के लिए आन्तरगणन करना है तो न्यूटन की 'प्रगामी अन्तर रीति', 'न्यूटन–गॉस अग्रगामी' और 'न्यूटन गॉस पृष्ठगामी' रीति में संकेताक्षरों का प्रयोग अग्र तालिका के अनुसार किया जाएगा –

न्यूटन प्रगामी		न्यूटन–गॉस अग्रगामी		पृष्ठगामी रीति	
$x = 32$		$x = 32$		$x = 45$	
10 x_0	40 y_0	10 x_{-2}	40 y_{-2}	10 x_{-4}	40
20 x_1	52 y_1	20 x_{-1}	52 y_{-1}	20 x_{-3}	52
30 x_2	68 y_2	30 x_0	68 y_0	30 x_{-2}	68
40 x_3	72 y_3	40 x_1	72 y_1	40 x_{-1}	72
50 x_4	80 y_4	50 x_2	80 y_2	50 x_0	80
60 x_5	85 y_5	60 x_3	85 y_3	60 x_1	85

(ii) **अन्तर सारणी** – न्यूटन की प्रगामी रीति की भाँति इसमें भी अन्तर–सारणी की रचना की जाती है। अन्तरों के संकेत चिन्ह y's के चिन्हों के अनुकूल होते हैं– जैसे $\Delta^1_{y_0}$, $\Delta^2_{y_{-1}}$, $\Delta^3_{y_{-1}}$ आदि –

(iii) x का निर्धारण – x के अन्तर का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है–

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद} - \text{पिछला पद}}{\text{निकटतम पदों का अन्तर}}$$

(iv) न्यूटन–गॉस अग्रगामी सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-1}} \ldots$$

उदाहरण : 10निम्न आँकड़ों की सहायता से न्यूटन–गॉस विधि द्वारा $x = 25$ के तत्संवादी y का मूल्य आन्तरगणित कीजिए।

स्वतंत्र चर (x)	:	10	20	30	40
आश्रित चर (y) :	25	28	34	45	

हल : **अन्तर–सारणी (न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि)**

x's		y's		अन्तर					
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय	
10	x_{-1}	25	y_{-1}						
20	x_0	28	y_0	3	$\Delta^1_{y_{-1}}$		$\Delta^2_{y_{-1}}$		
30	x_1	34	y_1	6	$\Delta^1_{y_0}$	3		2	$\Delta^3_{y_{-1}}$
40	x_2	45	y_2	11	$\Delta^1_{y_1}$	5	$\Delta^2_{y_0}$		
25	x	?	y_x						

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद} - \text{पिछला पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}} = \frac{25 - 20}{30 - 20} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{2\times 3}\Delta^3_{y_{-1}}$$

$$y_x = 28 + 0.5\times 6 + \frac{0.5\times(-0.5)\times 3}{2} + \frac{1.5\times 0.5\times(-0.5)\times 2}{2\times 3}$$

$$= 28 + 3 - 0.375 - 0.125 \quad or \quad 31 - 0.5 = 30.5$$

न्यूटन की प्रगामी अन्तर–रीति द्वारा भी यही उत्तर आता है।

(ख) न्यूटन–गॉस पृष्ठगामी रीति

(i) रीति का प्रयोग – इस रीति का प्रयोग तब किया जाता है जब आन्तरगणन की जाने वाली संख्या श्रेणी के अन्तिम भाग में पड़ती हो। इस रीति की शेष विशेषताएं न्यूटन की सामान्य प्रगामी अन्तर विधि के ही समान है।

(ii) संकेतना एवं क्रिया–विधि – संकेतना की दृष्टि से यह रीति उपर्युक्त रीति से थोड़ी भिन्नता लिए हुए है। इस रीति के अन्तर्गत आन्तरगणन पद (x) से अगले पद को x_0 माना जाता है और इस मूल–बिन्दु से पूर्व–पदों को अग्रगामी रीति की ही भाँति x_{-1}, x_{-2}, आदि और x_0 के बाद वाले पदों को x_1, x_2 आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रकट किया जाता है। y श्रेणी के लिए भी ठीक इसी तरह से संकेताक्षरों का प्रयोग किया जाता है। तत्पश्चात् अन्तर–सारणी द्वारा अन्तर प्राप्त किए जाते हैं और x का मूल्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद से अगला पद} - \text{आन्तरगणन पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}}$$

(iii) सूत्र : अन्त में निम्नलिखित सूत्र द्वारा आन्तरगणन किया जाता है –

$$y_x = y_0 - x\,\Delta^1_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x}{1\times 2}\,\Delta^2_{y_{-1}} - \frac{(x+1)x\,(x-1)}{1\times 2\times 3}\,\Delta^3_{y_{-2}} + \frac{(x+1)x\,(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3\times 4}\,\Delta^4_{y_{-2}} \ldots$$

(ग) स्टर्लिंग का सूत्र

यह सूत्र न्यूटन–गॉस अग्रगामी व पृष्ठगामी दोनों सूत्रों का समान्तर माध्य है और श्रेणी के मध्यवर्ती पद के आश्रित मूल्य का आन्तरगणन करने के लिए उपयुक्त है। अग्रगामी विधि की भाँति इस रीति में भी आन्तरगणन पद से पहले के पद को ही मूल–बिन्दु (x_0, y_0) माना जाता है। सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 + x\left[\frac{\Delta^1_{y_0} + \Delta^1_{y_{-1}}}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{x(x^2-1)}{2\times 3}\left[\frac{\Delta^3_{y_{-1}} + \Delta^3_{y_{-2}}}{2}\right] + \ldots$$

उदाहरण 10 को स्टर्लिंग सूत्र के प्रयोग द्वारा भी हल किया जा सकता है –

$$y_x = 28 + 0.5\left[\frac{6+3}{2}\right] + \frac{(0.5)^2}{2}\times 3 + \frac{0.5(0.5^2-1)}{2\times 3}\times 2$$

$$= 28 + 0.5\times 4.5 + 0.375 + \frac{0.5\times(-0.75)\times 2}{2\times 3}$$

$=28+2.25+0.375-0.125 \ = \ 30.5$

उपर्युक्त तीनों रीतियों का प्रयोग बहुत कम किया जाता है क्योंकि इनमें अन्तर निकालने और उपयुक्त सूत्र का प्रयोग करने में अधिकतर भ्रान्ति की स्थिति उत्पन्न हो जाती है। आन्तरगणन पद चाहे श्रेणी के आरम्भ, मध्य या अन्त में हो न्यूटन का मूल सूत्र ही अधिकतर प्रयोग किया जाता है।

(घ) न्यूटन की विभाजित अन्तर–रीति

रीति का प्रयोग – इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है जब x श्रेणी के पदों का अन्तर असमान हो।

क्रिया विधि – इस रीति के अनुसार पहले विभाजित अन्तर–सारणी बनाई जाती है जिसमें निकटवर्ती y's के अन्तरों से भाग देकर विभाजित अन्तर निकाले जाते हैं। यदि y के चार मूल्य ज्ञात हो तो तीन प्रमुख विभाजित अन्तरों का प्रयोग किया जाएगा। अन्तर के प्रथम खाने में तीन विभाजित अन्तर उपलब्ध होंगे जिनमें से पहला, प्रथम प्रमुख विभाजित अन्तर होगा। प्रत्येक y में से पिछले y को घटाकर उनके तत्संवादी x's के अन्तर से भाग कर दिया जाएगा। यही सम्बद्ध विभाजित अन्तर होगा। दूसरे खाने में प्रथम खाने के तीन विभाजितान्तरों की सहायता से इसी प्रकार दो विभाजित अन्तर निकाल लिए जाएंगे जिनमें से पहला, द्वितीय प्रमुख विभाजित अन्तर कहलाएगा। तीसरे खाने में दूसरे कॉलम के दो अन्तरों के आधार पर एकमात्र विभाजित अन्तर प्राप्त किया जाएगा जो तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर कहलाएगा। विभाजित अन्तर निकालने की यह प्रक्रिया निम्नांकित सारणी में स्पष्ट की गयी है –

विभाजितान्तर सारणी

x's	y's	विभाजित–अन्तर (Divided Difference)					
		प्रथम First		द्वितीय Second		तृतीय Third	
x_0	y_0						
x_1	y_1	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	Δ_0^1	$\frac{\Delta_1^1-\Delta_0^1}{x_2-x_0}$	Δ_0^2		
x_2	y_2					$\frac{\Delta_1^2-\Delta_0^2}{x_3-x_0}$	
x_3	y_3	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Δ_1^1	$\frac{\Delta_2^1-\Delta_1^1}{x_3-x_1}$	Δ_1^2		Δ_0^3
		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Δ_2^1				
x	y						

इस विधि द्वारा आन्तरगणन करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा –

$$y_x = y_0 + (x - x_0)\Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_0^2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta_0^3 + ...$$

$\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, एवं तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर हैं।

उदाहरण : 11निम्न सारणी में सम्पदा कर लगने वाली सम्पदाओं की संख्या दी गयी है –

सम्पदा वर्ग (रु0) :	50,000—75,000	75,000—1,00,000	1,00,000—1,50,000
संख्या :	870	540	450

न्यूटन की विभाजित अन्तर रीति द्वारा 75,000 रु0 से 80,000 रु0 के बीच की सम्पदाओं की संख्या का आन्तरगणन कीजिए।

हल : **विभाजित अन्तर सारणी**

से कम 000रु0 x		संख्या y		विभाजित अन्तर			
				प्रथम Δ^1		द्वितीय Δ^2	
75	x_0	870	y_0				
100	x_1	1410	y_1	$\frac{1410-870}{100-75}$	Δ_0^1 21.6	$\frac{9-21.6}{150-75}$	Δ_0^2 -0.168
150	x_2	1860	y_2	$\frac{1860-1410}{150-100}$	Δ_1^1 9		
80	x	?	y				

सूत्र : $y_x = y_0 + (x - x_0)\ \Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_0^2$

$$y_{80} = 870 + (80 - 75)\,21.6 + (80 - 75)(80 - 100)(-0.168)$$

$$= 870 + 108 + 16.8 = 994.8 \textit{ or } 995$$

75 हजार रु0 से कम वाली सम्पदाओं की संख्या = 870

80 हजार रु0 से कम वाली सम्पदाओं की संख्या = 995

अतः 75 से 80 हजार रु0 के बीच सम्पदाओं की संख्या = 995—870 = 125

25.8 सारांश

सांख्यिकीय विश्लेषण करते समय कभी–कभी यह देखने में आता है कि प्रस्तुत समंक श्रेणी पूर्ण न होकर अपूर्ण होती है अर्थात् श्रेणी के कुछ मूल्य किन्हीं कारणों से अज्ञात बने रहते हैं। चूँकि एक सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी का होना अत्यावश्यक है, इसलिए उपलब्ध समंकों के आधार पर उन अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाने के लिए जिन सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है उन्हें आन्तरगणन तथा बाह्यगणन कहते हैं। अर्थात् आन्तरगणन का तात्पर्य दिए गए समंकों से कुछ विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी पद का सर्वाधिक सम्भावित मूल्य ज्ञात करने की विधि से है तथा बाह्यगणन से अभिप्राय किन्हीं विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी भावी तिथि के भावी समंक का पूर्वानुमान करना होता है।

आन्तरगणन अथवा बाह्यगणन करते समय हम यह कल्पना कर लेते हैं कि समंकों में परिवर्तन की दर सर्वदा समान है एवं समंकों की तिथियों के बीच कोई अचानक घटना नहीं घटी है, अर्थात् समंकों में एक प्रकार की continuity है।

यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से उच्चावचन होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

25.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

25.9.1 वस्तुनिष्ठ प्रश्न

I. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) भारत में जनगणना प्रत्येक –––––– में एक बार आयोजित की जाती है।

(ii) अभाव या अपर्याप्तता की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा –––––– लगाकर की जाती है।

(iii) आन्तरगणन व बाह्यगणन करते समय यह मान लिया जाता है कि दी हुई अवधि के समंकों में एकदम कोई –––––– नहीं हुई हैं।

(iv) यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से –––––– होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

(v) प्रत्यक्ष–द्विपद–विस्तार रीति –––––– पर आधारित है।

II. निम्न कथनों में से कौन सी सत्य है और कौन सी असत्य है :

(i) आन्तरगणन का उद्देश्य समंक श्रेणी के बीच की रिक्तियों को भरना होता है। स/अ

(ii) बाह्यगणन से अभिप्राय किन्हीं विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी भावी तिथि के भावी समंक का पूर्वानुमान करना होता है। स/अ

(iii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि द्विपद–प्रमेय पर आधारित नहीं है। स/अ

(iv) लाग्रेंज द्वारा प्रतिपादित लांग्रैज विधि आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति है। स/अ

(v) 'n' वें घात के परवलयिक वक्र का समीकरण इस प्रकार है –

$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 ....$ स/अ

III. निम्नलिखित में कौन सा विकल्प सही है :

(i) किन्हीं निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत मात्राओं के सर्वाधिक सम्भाव्य अनुमान लगाने की तकनीक को कहते हैं।

(अ) बाह्यगणन (ब) सहसम्बन्ध (स) प्रतीपगमन (द) आन्तरगणन

(ii) निम्नांकित रीतियों में कौन सी रीति सार्वभौमिक रीति है :

(अ)बिन्दु–रेखीय रीति (ब) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार रीति

(स)न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति (द) न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि

(iv) स्टर्लिंग का सूत्र है :

(अ) $y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-1}} \dots$

(ब) $y_x = y_0 - x\Delta^1_{y_1} + \frac{(x-1)x}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-2}} \dots$

(स) $y_x = y_0 + x\left[\frac{\Delta^1_{y_0} + \Delta^1_{y_{-1}}}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{x(x^2-1)}{2\times 3}\left[\frac{\Delta^3_{y_{-1}} + \Delta^3_{y_{-2}}}{2}\right] + \dots$

(द) $y_x = y_0 + (x-x_0)\Delta^1_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^2_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3_0 + \dots$

(v) आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतियों को बाँटा जा सकता है –

(अ) दो श्रेणियों में (ब) तीन श्रेणियों में

(स) चार श्रेणियों में (द) पाँच श्रेणियों में

25.9.2 लघु उत्तरात्मक प्रश्न

(i) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की दो अन्तर्निहित मान्यताएँ लिखिए।

(ii) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिशुद्धता किन दो बातों पर निर्भर करती है?

(iii) $(y–1)^6$ का द्विपद विस्तार लिखिए।

(iv) न्यूटन प्रगामी विधि के अनुसार तृतीय प्रमुखान्तर (Δ_0^3) तक का अन्तर सारणी बनाइए।

(v) $n = 8$ तक एक पास्कल त्रिभुज की रचना कीजिए।

25.9.3 निबन्धात्मक प्रश्न

(i) सांख्यिकी में आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की उपयोगिता की व्याख्या कीजिए।

(ii) आन्तरगणन से आप क्या समझते हैं? किन मान्यताओं के अन्तर्गत मूल्य की अन्तर्गणना की जाती है?

(iii) 'आन्तरगणन' एवं 'बाह्यगणन' में अन्तर स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय अध्ययन में उनकी आवश्यकता का संक्षिप्त विवेचन कीजिए।

(iv) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन के लिए प्रयोग होने वाली प्रमुख रीतियों का वर्णन कीजिए। वे अवस्थाएँ भी बताइए जिनमें प्रत्येक का प्रयोग उचित रहेगा।

(v) जनगणना के वर्षों के मध्य के वर्षों के परिवर्तनों की गणना आप कैसे करेंगे? क्या आप 1941, 1951, 1961, 1971 की जनगणना के अंकों के आधार पर 1976 की जनगणना का अनुमान कर सकते हैं?

25.9.4 संख्यात्मक प्रश्न

(i) निम्न सारणी एक फर्म के 2005 से 2010 तक के लाभ (लाख रु0) के समंक प्रस्तुत करती है। 2009 के लाभ की राशि अज्ञात है। बिन्दु रेखीय रीति द्वारा उसका आन्तरगणन कीजिए।

वर्ष :	2005	2006	2007	2008	2009	2010
लाभ :	108	113	111	110	?	114

(ii) 30 वर्ष की आयु के लिए अज्ञात मूल्य का आन्तरगणन कीजिए –

आयु (वर्षों में) :	10	15	20	25	30	35
मूल्य :	20	35	40	43	?	55

(iii) नीचे दी गयी सारणी की सहायता से 1970 तथा 1980 के उत्पादन की गणना कीजिए –

वर्ष :	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
उत्पादन :	200	230	270	?	380	?	460

(iv) निम्न समंकों से, आन्तरगणन की न्यूटन विधि द्वारा 25 वर्ष की आयु पर वार्षिक शुद्ध प्रीमियम ज्ञात कीजिए –

आयु (वर्षों में) :	20	24	28	32
प्रीमियम दर (रु0 में):	0.01427	0.01581	0.01772	0.01996

25.10 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर

26.9.1 (I) (i) – दशक (ii) – सर्वोपयुक्त अनुमान

(iii) प्रचण्ड वृद्धि (iv) – उच्चावचन (v) – द्विपद–प्रमेय

(II) (i) – स (ii) – स (iii) – अ (iv) – स (v) – अ

(III) (i) – ड (ii) – ड (iii) – अ (iv) – स (v) – अ

26.9.4 (i) – [112 लाख रु0] (ii) – [48]

(iii) – [1970 = 322; 1980 = 433]

(iv) – [0.01625]

(v) – [$y_7 = 70$, 70–60 = 10]

25.11 संदर्भ ग्रन्थ सूची/उपयोगी पाठ्य सामग्री

1) बंसल, एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डी0 आर0, (1978), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा – 31;

2) नागर, कैलाश नाथ, (2005), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।

3) लाल, एस0 एन0, चतुर्वेदी, एस0, *सांख्यिकी*, प्रकाशन, इलाहाबाद।

4) सिंह, एस0 पी0, (1997) *सांख्यिकी–सिद्धान्त एवं व्यवहार*, एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।

5) अवस्थी, जी0 डी0 एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) *सांख्यिकीय विश्लेषण*, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।

6) Gupta, S. P., (2005), *Statistical Methods*, S. Chand, New Delhi.

7) Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Vol. I, The World Press Private Limited.

इकाई–26-सूचकांक

इकाई की रूपरेखा

26.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में सूचकांक या निर्देशांक के विषय का विस्तृत रूप से अध्ययन किया ग्या है। परिवर्तन प्रकृति का ही एक नियम है। आर्थिक क्षेत्र में यह नियम पूर्ण रूप से लागू होता है। आर्थिक क्षेत्र के विभिन्न पहलू जैसे :—मूल्य, उत्पादन, व्यापार, जीवन लागत इत्यादि निरन्तर परिवर्तित होते रहते हैं। इनमें सतत उतार—चढ़ाव होता रहता है। इन्हीं परिवर्तनों का अध्ययन करने और इनके प्रभावों को स्पष्ट करने के लिए जिस सांख्यिकीय तकनीक को विकसित किया ग्या है उसी तकनीक को सूचकांक अथवा निर्देषांक कहते हैं।

सूचकांकों का निर्माण सर्वप्रथम इटली के सांख्यिक कर्प्ली ने किया था। इन्होंने 1764 में मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों की माप करने हेतु सन् 1500 ई0 को आधार वर्ष मानकर सन् 1750 के लिए मूल्य सूंचकांक का निर्माण किया। प्रारम्भ में सूचकांक को केवल मूल्यस्तर तथा मुद्रा की क्रयशक्ति का माप करने हेतु प्रयोग किया जाता था परन्तु आज के समय में इसका प्रयोग विस्तृत हो ग्या है। प्रत्येक पहलू में सूचकांक का प्रयोग किया जाता है। जैसे : उत्पादन, उपभोग, निर्यात, आयात, राष्ट्रीय आय, जीवन निर्वाह व्यय, सड़क दुर्घटनाओं जैसे संख्यात्मक तथ्य एवं निर्धनता, स्वास्थ्य, मानवीय विकास, कार्यक्षमता, बुद्धिमता आदि के अध्ययन में भी सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है।

सूचकांको के विकास में प्रो. जेवन्स, डॉ. मार्शल, वाल्श, एजवर्थ आदि उल्लेखनीय नाम हैं परन्तु 100 सूत्रों का प्रतिपादन करके नया आयाम देने वाले फिशर का नाम उल्लेखनीय है।

26.2 उद्देष्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से हम यह ज्ञात कर सकेंगे कि—

(क) सूचकांक का आर्थिक एवं व्यावसायिक अध्ययन में क्या महत्व है ?

(ख) सूचकांकों की क्या उपयोग्िता एवं क्या सीमायें हैं ?

(ग) सूचकांकों का निर्माण किस प्रकार किया जाता है ?

(घ) विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की जानकारी।

(ङ) एक आदर्ष सूचकांक के लिए विभिन्न जांच कौन सी हैं ?

26.3 सूचकांक का अर्थ एवं परिभाषा

सूचकांक एक विषेष प्रकार का माध्य है जिनके द्वारा समय, स्थान या अन्य किसी विषेषता के आधार पर सम्बन्धित चर मूल्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का मापन किया जाता है।

(क) **क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार,** ''सूचकांक सम्बन्धित चर मूल्यों के आकार में होने वाले अन्तरों का मापन करने के साधन या उपाय हैं।''

(ख) **डॉ. एल. बाउले के अनुसार,** '' सूचकांकों का प्रयोग किसी मात्रा में होने वाले ऐसे परिवर्तनों का माप करने के लिए किया जाता है जिनका हम प्रत्यक्ष रूप से अवलोकन नहीं कर सकते।''

(ग) **सेक्राइस्ट के अनुसार**'' निर्देषांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी है जिसके द्वारा किसी तथ्य के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जाता है।''

(घ) **डॉ. एम. टटिल के षब्दों में,** निर्देषांक एक अकेले अनुपात के रूप में दो विभिन्न समयों, स्थानों अथवा परिस्थितियों में विभिन्न चरों में परिवर्तन को सामूहिक रूप से मापता है।''

निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है कि सूचकांक प्रतिषत के रूप में व्यक्त किया जाने वाला एक विषेष प्रकार का माध्य है जिसके आधार पर विभिन्न समयों, स्थानों या अन्य समंक समूहों में होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनों की सामान्य प्रकृति को मापा जाता है।

जब हम केवल किसी अकेले चर का अध्ययन करते हैं तो वह एकचरीय सूचकांक कहलाता है जबकि कई चरों में होने वाले औसत परिवर्तनों का एक साथ अध्ययन किया जाये तो इसे मिश्रित या संग्रथित सूचकांक कहते हैं। जैसे कृषि उत्पादन का सूचकांक मिश्रित सूचकांक का उदाहरण है।

26.4 सूचकांको की विषेषताएँ

(क) **तुलना का अधार :–** सूचकांकों द्वारा परिवर्तनों की तुलना समय अथवा स्थान के आधार पर की जाती है, जिस वर्ष के सूचकांक ज्ञात करने हो उसे चालू वर्ष या प्रचलित वर्ष तथा जिस निश्चित वर्ष से तुलना करनी हो उसे आधार वर्ष कहते हैं।

(ख) **विषिष्ट प्रकार के माध्य :—**माध्यों द्वारा असमान इकाईयों वाली श्रेणी की तुलना नहीं की जा सकती, परन्तु सूचकांकों द्वारा असमान इकाईयों वाली अनेक श्रेणियों में होने वाले परिवर्तनों का सापेक्ष अध्ययन सरलता से किया जा सकता है।

(ग) **प्रत्यक्ष मापन न होने वाले परिवर्तनों का माप :—**सामान्यतः सूचकांक की तकनीकि का प्रयोग ऐसे मिश्रित एवं जटिल परिवर्तनों के माप के लिए किया जाता है जिनको प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता। जैसे मूल्य स्तर, जीवन लागत अथवा आर्थिक क्रियाओं में परिवर्तन। यहाँ सूचकांक की सहायता से सापेक्ष परिवर्तनों का अध्ययन कर लिया जाता है।

(घ) **तुलनात्मक माप :—**सूचकांक एक तुलनात्मक अथवा सापेक्ष माप है। उदाहरण के लिए यदि यह कहा जाये कि सन् 1990 की तुलना में सन् 1998 में मूल्य निर्देषांक 160 है तो इसका अर्थ यह है कि 1990 की तुलना में 1998 में मूल्यों में 60 प्रतिषत वृद्धि हो ग्यी है।

(ङ) **सार्वभौमिक उपयोग :—**इस तकनीक का प्रारम्भ मूल्यों में परिवर्तन के मापन के लिए हुआ था, लेकिन वर्तमान समय में इस तकनीक का प्रयोग सर्वव्यापी बन ग्या है। इसके द्वारा विभिन्न क्षेत्रों में परिवर्तन का मापन किया जाता है।

वास्तव में ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है जिसमें संख्यात्मक को मापने के लिए सूचकांकों का प्रयोग न होता हो।

26.5 सूचकांको का महत्त्व एवं उपयोग

आर्थिक और व्यावसायिक क्षेत्र में परिवर्तनों के मापन और विष्लेषण की दृष्टि से सूचकांक एक महत्त्वपूर्ण एवं उपयोगी उपकरण बन चुका है और इस कारण इसके **''आर्थिक वायुमापक यंत्र''** कहा जाने लग है। सूचकांक आर्थिक जग्त का प्राण है क्योंकि उत्पादन, उपभोग, मुद्रा मूल्य, मांग, पूर्ति, मजदूरी, आयात—निर्यात, मूल्य स्तर जैसी प्रमुख समस्याओं का समाधान सूचकांकों के प्रयोग द्वारा ही किया जाता है। संक्षेप में सूचकांक के प्रयोग एवं महत्त्व निम्न प्रकार से हैं —

(क) **तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना :—**सूचकांको की सापेक्ष माप के द्वारा किसी समय या स्थान के आधार पर सरलता से तुलना की जा सकती है क्योंकि सूचकांकों के द्वारा विभिनन प्रकृति की इकाईयों को एक अर्थपूर्ण एवं सरल संख्यात्मक मूल्य में परिवर्तित कर लिया जाता है।

(ख) **भावी प्रवृत्तियों के संकेतक :–**सूचकांक भूतकाल के सन्दर्भ में वर्तमान की व्याख्या करते हैं और भविष्य के लिए पुर्वानुमान लगने में सहायक सिद्ध होते हैं।

(ग) **आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक :–**सूचकांको द्वारा सरकार मूल्यों में स्थिरता, न्यूनतम मजदूरी, मंहगई भत्ता आदि सुनिश्चित कर लेती है। साथ ही विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्माण में भी सहायता मिलती है।

(घ) **जटिल तथ्यों को सरल बनाना :–**सूचकांकों की सहायता मे जटिल तथ्यों एवं उनके परिवर्तनों के अध्ययन को सरल बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए किसी देश में व्यावसायिक क्रियाओं में परिवर्तन एक जटिल तथ्य है जिसमें उद्योग, व्यापार, बैंकिंग, परिवहन आदि विभिन्न क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तन 'ाामिल होते हैं लेकिन सूचकांक द्वारा इसका अध्ययन सरलता से किया जा सकता है।

(ङ) **विभिन्न मूल्यों की अवस्फीति में सहायक :–**सूचकांक हमें सिद्धान्त से व्यवहार की ओर ले जाते हैं और वास्तविक स्थिति की जानकारी देते हैं। सूचकांकों से अवस्फीतिकरण होने के कारण वास्तविक जानकारी प्राप्त होती है।

26.6 सूचकांको के प्रकार

सूचकांक को निम्न रूपों में वर्गीकृत किया जाता है–

(क) कीमत या मूल्य सूचकांक

(ख) मात्रा सूचकांक

(ग) कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक

(घ) उद्धेष्य विषेष सूचकांक

(ङ) वस्तुओं की संख्या के आधार पर

26.6.1 मूल्य सूचकांक :–इन सूचकांको के माध्यम से मूल्यों में या मूल्य स्तर में परिवर्तन को मापा जा सकता है। इन्हें दो उपवर्गें में बांटा जा सकता है– थोक मूल्य सूचकांक व निर्वाह व्यय सूचकांक।

26.6.2 मात्रा सूचकांक :–इस प्रकार के सूचकांक भौतिक मात्रा में कमी या वृद्धि को मापने के लिए तैयार किये जाते हैं। जैसे– कृषि उत्पादन सूचकांक, औद्योग्कि उत्पान सूचकांक आदि।

26.6.3 कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक :–इन सूचकांक का उद्वेष्य आधार वर्ष के कुल मूल्य (मात्रा X कीमत) की तुलना में चालू वर्ष के कुल मूल्य में परिवर्तन का अध्ययन किया जाना है। जैसे–विक्रय राषि का सूचकांक।

26.6.4 उद्धेश्य विशेष सूचकांक :–आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में किसी विषिष्ट उद्धेष्य के लिए भी सूचकांक तैयार किये जा सकते हैं। जैसे–राष्ट्रीय आय सूचकांक, विकास दर सूचकांक, उत्पादकता सूचकांक आदि।

26.6.5 वस्तुओं की संख्या के आधार पर सूचकांक :–यदि किसी एक वस्तु के मूल्य के आधार पर सूचकांक तैयार किया जाता है तो उसे सरल सूचकांक कहते हैं। यदि वस्तुओं के समूह के लिए सूचकांक बनाया जाता है तो उसे संयोजित या **'सकल'** सूचकांक कहा जाता है।

26.7 सूचकांक रचना सम्बन्धी सूचनाएँ

(1) **सूचकांको का उद्धेश्य** :–सूचकांक बनाते समय सबसे पहले उसके उद्धेष्य को निश्चित कर लेना जरूरी है। क्योंकि वस्तुओं का चुनाव, मूल्य उद्वरण, भारों का निर्धारण, सूचकांक की किस रीति का प्रयोग करना है जैसी महत्त्वपूर्ण बातें सही अर्थों में, सूचकांक के उद्धेष्य पर ही निर्भर करती है।

(2) **वस्तुओं का चयन** :–दूसरा चरण वस्तुओं के चुनाव का होता है क्योंकि सभी वस्तुओं को शामिल करना आवष्यक नहीं होता। कौन सी वस्तुएँ कितनी संख्या में चुनी जाये, उनकी किस्म क्या हो, एवं उन्हें कैसे वर्गीकृत करें, ये सब ध्यान देने योगय है।

(A) **वस्तुएँ** :–

निम्न विशेषताओं वाली वस्तुओं का चुनाव करनी चाहिए–

(i) **प्रतिनिधि एवं लोकप्रिय** :–वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जो सम्बन्धित वर्ग या क्षेत्र के लोगें में लोकप्रिय हो एवं उनकी आदतें, रीति–रिवाजों व आवष्यकताओं का प्रतिनिधित्व करें।

(ii) **पहचानने योगय** :–वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जो आसानी से पहचानी जायें व उनका स्पष्ट वर्णन किया जा सकें।

(iii) **प्रमाणित एवं सजातीय** :–चुनी जाने वाली वस्तुएँ श्रेणीबद्ध व प्रमाणित होनी चाहिए उनकी किस्म में एकरूपता होनी चाहिए।

(B) **वस्तुओं की संख्या** :–इसके सन्दर्भ में कोई दृढ़ व निश्चित नियम नहीं है लेकिन वस्तुओं की संख्या का निर्धारण उपलब्ध समय व धन, शुद्धता तथा उद्धेश्य व परिस्थितियों को ध्यान में रखकर करना चाहिए।

(C) **किस्म** :–सूचकांक में ऐसी वस्तुओं को 'ामिल करना चाहिए जो सबसे अधिक प्रचलित व प्रमाणित हों। साथ ही उसके गुणों में भी स्थिरता होनी चाहिए।

(D) **वर्गीकरण** :–चुनी ग्यी वस्तुओं को सजातीयता के आधार पर कुछ निश्चित वर्गें व उपवर्गें में विभाजित कर देते हैं जिससे सामान्य सूचकांक के साथ–साथ समूह सूचकांक भी ज्ञात किया जा सके।

(3) **मूल्य उद्वरण प्राप्त करना** :–

वस्तुओं के चुनाव के बाद मूल्य उद्वरणों का चरण होता है। इसमें निम्न बातों पर विचार होता है–

(i) **थोक या फुटकर मूल्य** :–सूचकांकों के उद्धेष्य के आधार पर मूल्य थोक या फुटकर मूल्य हो सकते हैं। परन्तु अधिकांषतः थोक मूल्य ही लिये जाते हैं। क्योंकि वे फुटकर मूल्यों की अपेक्षा अधिक स्थिर होते हैं।

(ii) **मूल्य व्यक्त करने का रूप** :– मूल्य दो प्रकार से व्यक्त किये जा सकते हैं–

(a) मुद्रा मूल्य जैसे–1000 रूपये प्रति कुन्तल।

(b) मात्रा मूल्य या प्रति लोग मूल्य– जैसे 2 किलो प्रति रूपये।

सूचकांक रचना में सदैव मुद्रा मूल्य का ही प्रयोग किया जाना चाहिए।

(iii) **मूल्य उद्वरणों की आवृत्ति या संख्या** :–वस्तु के महत्त्व के अनुसार यह तय करते हैं कि मूल्य उद्वरण यह कितनी बार व किस अन्तराल से लिये जायें अर्थात् साप्ताहिक या मासिक आधार पर। मूल्य उद्वरणों की संख्या जितनी अधिक होगी, शुद्धता भी उतनी अधिक होगी, परन्तु जटिलता भी बढ़ जायेगी। मूल्य उद्वरणों की आवृत्ति सूचकांक के उद्धेश्य, अवधि, उपलब्ध साधन व शुद्धता के स्तर पर निर्भर होती है।

(iv) **मूल्य उद्वरण प्राप्ति के स्थान** :–सूचकांकों के लिए वस्तुओं के मूल्य उद्वरण उन बाजार से प्राप्त करना चाहिए जहाँ वस्तुओ का क्रय–विक्रय वृहद स्तर पर होता है। मूल्य उद्वरण के स्त्रोत स्वतंत्र, निष्पक्ष, विष्वसनीय व उपयुक्त होने चाहिए।

विभिन्न पत्र–पत्रिकाओं, रेडियो, दूरदर्षन, कम्प्यूटर, इंटरनेट व अन्य सरकारी व अर्धसरकारी सूत्रों से भी मूल्य सूचना प्राप्त की जा सकती हैं।

(v) **मूल्य उद्वरण का औसत निकालना :–**मूल्य उद्वरणों के बारे में अंतिम चरण औसत निकालना है।

(4) **आधार वर्ष का चुनाव तथा मूल्यानुपातों का परिकलन :–**

मूल्य सूचकांक एक प्रमाप वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष के मूल्य स्तर को व्यक्त करते हैं। पिछला प्रमाप वर्ष जो आगमी वर्षों के तुलनात्मक अध्ययन का आधार होता है, आधार वर्ष कहलाता है।

एक अच्छे आधार वर्ष के सम्बन्ध में यह बाते महत्त्वपूर्ण हैं –

(i) वर्ष सामान्य हो (ii) वास्तविक हो

(iii) उस काल की समस्त सूचनायें उपलब्ध हो (iv) वर्ष अधिक पुराना न हो

आधार वर्ष ज्ञात करने की दो रीतियां हैं–

(i) स्थिर आधार रीति

(a) एक वर्षीय आधार (b) औसत अवधि आधार

(ii) श्रृंखला आधार रीति

(a) **एक वर्षीय स्थायी आधार :–**इस रीति में किसी एक सामान्य वर्ष को आधार वर्ष के रूप में चुन लिया जाता है।

स्थिर आधार के मूल्य को 100 मानकर निकाला गया प्रचलित वर्ष का प्रतिषत ही मूल्यानुपात कहलाता है। आधार वर्ष के मूल्य को P_0 एवं चालू वर्ष के मूल्य के P_1 द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\text{मूल्यानुपात } (R) = \frac{\text{Current year's price } (P_1)}{\text{Base year's price } (P_0)} \times 100$$

$$(R) = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

(b) **औसत मूल्य आधार (Average Price Base) :–**

$$\text{मूल्यानुपात } (R) = \frac{\text{Current year's price } (P_1)}{\text{Average price } (P_0)} \times 100$$

$$(R) = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

यदि एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिये हैं तो इनके मुल्यानुपात ही अभीष्ट सूचकांक हैं। इसके विपरीत प्रत्येक वर्ष के कई वस्तुओं के मूल्य दिये हो तो विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपात का सामान्तर माध्य ही सम्बन्धित प्रचलित वर्ष का सूचकांक होता है

अर्थात् **चालू वर्ष का सूचकांक** $\frac{\sum R}{N} = \frac{\text{मूल्यानुपातों का योग}}{\text{वस्तुओं की संख्या}}$

उदाहरण –1 :– सन् 1998 को आधार मानकर विभिन्न वर्षों के सूचकांक तैयार कीजिए–

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	44	48	46	52	50

हल :–

Year	Price	$\frac{P_1}{P_0}\times 100$	IndeX No.
1998	40	–	100
1999	48	$\frac{48\times 100}{40}$	120
2000	46	$\frac{46\times 100}{40}$	115
2001	52	$\frac{52\times 100}{40}$	130
2002	50	$\frac{50\times 100}{40}$	125

उदाहरण –2 :– निम्न समंकों से 1998 से 2000 तक के औसत मूल्य को आधार मानकर मूल्यानुपात की गणना कीजिए।

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	44	49	57	55	58

हल :– Po = $\frac{Pr\ ice\ \ from\ \ 1998\ \ to\ \ 2000}{3} = \frac{44\ +\ 49\ +\ 57}{3} = \frac{150}{3}$ = 50

Year	Price	$\frac{P_1}{P_0}\times 100$	IndeX No. (PR)
1998	44	$\frac{44\times 100}{40}$	88
1999	49+	$\frac{49\times 100}{40}$	98
2000	57	$\frac{57\times 100}{40}$	114
2001	55	$\frac{55\times 100}{40}$	110
2002	58	$\frac{58\times 100}{40}$	110

(ii)श्रृंखला आधार रीति :–इस रीति को **''चल आधार रीति''** भी कहा जाता है और इसके आधार पर बना सूचकांक श्रृंखला आधार सूचकांक कहा जाता है। इस रीति में प्रत्येक चालू वर्ष के लिय हैं। उसका पिछला वर्ष आधार माना जाता है। उदाहरण के लिए 1998 से

2002 तक के वर्षों के सूचकांक तैयार करने हैं तो सन् 1998 के लिए 1997, सन् 1999 के लिए 1998, सन् 2000 के लिए 1999 और ऐसे ही आगे आधार वर्ष माने जायेंगे।

उदाहरण–3 :– निम्न समंकों से श्रृंखला आधार सूचकांक बनाइये–

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	80	120	132	264	396

हल :–

गुण एवं दोष :– इस आधार का प्रमुख गुण यह है कि इससे तात्कालिक परिवर्तनों का पता चल जाता है। प्रत्येक वर्ष में होने वाले परिवर्तनों की तुलना पिछले वर्ष के परिवर्तनों से की जा सकती है। यह तुलना व्यापारी व उद्योगपति के लिए बहुत उपयोगी होती है। दूसरे श्रृंखला आधार वाले सूचकांक में आवश्यकतानुसार पुरानी वस्तुओं को हटाकर उनके स्थान पर नई वस्तुओं का समावेश किया जा सकता है। परन्तु श्रृंखला रीति के अनुसार बनाये ग्ये सूचकांक दीर्घकालीन प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं करते। इन सूचकांकों की रचना तुलनात्मक रूप से कठिन होती है। यदि किसी एक स्थान पर अशुद्धि हो जाये तो आगे सभी गणनाओं पर उसका प्रभाव पड़ेगा।

श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण की क्रिया विधि :–

इसका सूत्र निम्नलिखित है–

$$\text{श्रृंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}}\times 100$$

$$\textbf{L.R. (link relative)} = \frac{\text{Current Year's Price}}{\text{Previous Year's Price}}\times 100$$

Year	Price	$\frac{P_1}{P_0}\times 100$	IndeX No. (PR)
1998	80	&	100
1999	120+	$\frac{120\times 100}{40}$	150
2000	132	$\frac{132\times 100}{40}$	110
2001	264	$\frac{264\times 100}{40}$	200
2002	396	$\frac{396\times 100}{40}$	150

श्रृंखला मूल्यानुपातों को किसी एक ही स्थिर वर्ष पर आधारित करना :–

श्रृंखला मूल्यानुपातों द्वारा प्रत्येक वर्ष की पिछली वर्ष से तुलना करते हैं। इस प्रकार दो निकटवर्ती वर्षों में कड़िया स्थापित हो जाती हैं। इन कड़ियों से एक श्रृंखला बन जाती है जिससे सभी वर्षों के परिवर्तन एक निश्चित वर्ष से श्रृंखला हो जाये। इस प्रकार से श्रृंखलित सूचकांक कहते हैं। इसे ज्ञात करने का निम्न सूत्र है–

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\text{गत वर्ष का श्रृंखलित सूचकांक} \times \text{चालू वर्ष का औसत श्रृंखला मूल्यानुपात}}{100}$$

Chain IndeX for current year =

$$\frac{\text{Previous Year's chain index} \times \text{Current year's average link Relatives}}{100}$$

स्थिर आधार एवं श्रृंखला आधार का अन्तर :–

(i) स्थिर आधार में आधार वर्ष स्थिर रहता है और आगे के वर्षों की तुलना इसी आधार वर्ष से की जाती है जबकि श्रृंखला आधार में आधार प्रति वर्ष बदलता रहता है और प्रत्येक वर्ष की तुलना पिछले वर्ष से करते हैं।

(ii) स्थिर आधार सूचकांकों की सहायता से दीर्घकालीन प्रवृत्ति का पता चलता है जबकि श्रृंखला आधार सूचकांक वर्ष प्रतिवर्ष के परिवर्तनों को प्रकट करते हैं।

(iii) स्थिर आधार सूचकांक में शामिल वस्तुओं में परिवर्तन नहीं किये जा सकते, जबकि श्रृंखला सूचकांक में प्रतिवर्ष वस्तु या पद में परिवर्तन किये जा सकते हैं।

(iv) स्थिर आधार सूचकांक की रचना मुल्यानुपातों के आधार पर की जाती है परन्तु श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण में श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण में श्रृंखला मूल्यानुपातों का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण–4निम्न तालिका से सन् 1998 से 2002 तक के तीन वस्तुओं के औसत थोक मूल्य दिये गये हैं। श्रृंखला आधार रीति से सूचकांकों की रचना कीजिए।

Commodities	**Average Wholesale Prices**				
	1998	1999	2000	2001	2002
I	5	6	8	8	10
II	8	10	12	15	18
III	10	12	15	18	20

P=Price LR= Link relatives

26.8. आधार परिवर्तन

आधार परिवर्तन दो प्रकार के होते है :-

(i) स्थिर आधार से श्रृखंला आधार में

(ii) श्रृखंला आधार से स्थिर आधार में

26.8.1 स्थिर आधार से श्रृखंला आधार में परिवर्तन :– स्थिर आधार को श्रृखंला आधार में बदलने की निम्न विधि है –

(क) प्रथम वर्ष के श्रृखंला आधार सूचकांओ को 100 माना जाता है।

(ख) आगमी वर्षो के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$\text{चालू वर्ष का श्रृखंला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \times 100$$

उदाहरण–5:– निम्नलिखित स्थिर आधार सूचकांको को श्रृखंला आधार सूचकांको में परिवर्तित करें।

Year	1995	1996	1997	1998	1999	2000
IndeX	188	196	204	190	196	200

Year	FiXed Based index no.	Conversion	Chain Box Index
1995	188	-	100
1996	169	$\frac{196x100}{188}$	104.08
1997	204	$\frac{204x100}{196}$	104.08
1998	190	$\frac{190x100}{204}$	93.14
1999	196	$\frac{196x100}{190}$	103.16
2000	200	$\frac{200x100}{196}$	102.04

26.8.2 श्रृखंला आधार से स्थिर आधार में

इसकी विधि निम्न है :–

1. इसमें प्रथम वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक नही माना जाता है जो उस वर्ष का श्रृखंला आधार सूचकांक है, परंतु यदि प्रथम वर्ष को स्थिर आधार मानना है तो प्रथम वर्ष का सूचकांक 100 माना जायेग। अग्ले वर्षो में अग्र सूत्र प्रयोग किया जायेग।

$$\textbf{चालू वर्ष का स्थिर आधार} = \frac{\text{सूचकांक} \times \text{गत वर्ष का स्थिर सूचकांक}}{100}$$

उदाहरण :–6. निम्नलिखित श्रृखंला आधार सूचकांको को स्थिर आधार सूचकांको में परिवर्तन कीजियें।

Year	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Index	92	102	104	98	103	101

हल :–

Year	Chain Based index no.	Conversion	Chain BoX IndeX
1995	92	-	92
1996	102	$\frac{92 \text{ x } 102}{100}$	93.84
1997	104	$\frac{93.64 \text{ x } 104}{100}$	97.59
1998	98	$\frac{97.59 \text{ x } 98}{100}$	95.64
1999	103	$\frac{95.64 \text{ x } 103}{100}$	98.51
2000	101	$\frac{98.51 \text{ x } 101}{100}$	99.50

नोटः– इस उदाहरण में कोई आधार वर्ष नही है। यदि 1995 को आधार वर्ष माना हो तो उसका स्थिर सूचकांक 100 माना जाता है, 92 नहीं।

26.9. आधार वर्ष परिवर्तन

आधार वर्ष परिवर्तन आधार परिवर्तन से भिन्न होता है। आधार वर्ष परिवर्तन का आश्य है एक सूचकांक के दिये हुये (पुराने) आधार वर्ष को बदलकर उसके स्थान पर किसी नये आधार वर्ष पर आधारित करके एक नई सूचकांक श्रृखंला की पुर्नरचना करना। इसके पुर्ननिर्माण के दो कारण होते है।

1. जब आधार वर्ष बहुत पुराना हो ग्या हो और चालू वर्ष से काफी दूर हो ग्या हो तो अर्थात् तुलना की दृष्टि से निरर्थक है।
2. जब दो या अधिक ऐसे निर्देषांक की तुलना की जानी हो, जिनका आधार वर्ष अलग अलग हो तो तुलना करने से पूर्व आधार वर्षो को समाना करना आवश्यक हो जाता है।

आधार वर्ष परिवर्तन की दो रीतियाँ है।

26.9.1 प्रत्यक्ष या पुर्ननिर्माण रीति – इस रीति में नये आधार वर्ष के मूल्यों को 100 मानकर नये सिरे से सभी चालू वर्षो के लिये मूल्य अनुपातों की ग्णना की जाती है और इन मूल्य अनुपातों का माध्य निकालकर नये सूचकांक ज्ञात किये जाते है।

26.9.2 अप्रत्यक्ष अथवा परोक्ष या संक्षिप्त रीति – इस रीति के अनुसार नये आधार वर्ष के पुराने सूचकांक को 100 मानकर शेष सभी वर्षो के पुराने सूचकाकों को बदल लिया जाता है और इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है –

$$\text{नये आधार पर सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नय आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \times 100$$

नोटः– ध्यान रहे कि दूसरी रीति काफी सरल एवं सुविधाजनक है, लेकिन सही परिणाम उसी में प्राप्त होगें जबकि सूचकांक की रचना सामान्य गुणोत्तर माध्य के आधार पर की ग्यी।

उदाहरण : 7. एक वस्तु के थोक मूल्य सूचकांक 2001 के आधार पर निम्न है –

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
सूचकांक	100	120	190	200	206	230	300

आधार वर्ष 2004 को मानकर नये सूचकांक ज्ञात कीजिये :–

वर्ष	सूचकांक आधार 2001 = 100	आधार परिवर्तन	सूचकांक आधार 2004 = 100
2001	100	$\frac{100 \times 100}{200}$	50
2002	120	$\frac{100 \times 100}{200}$	60
2003	190	$\frac{190 \times 100}{200}$	95
2004	200	$\frac{200 \times 100}{200}$	100
2005	206	$\frac{206 \times 100}{200}$	103
2006	230	$\frac{230 \times 100}{200}$	115
2007	300	$\frac{300 \times 100}{200}$	150

26.10. माध्य का चुनाव (Choice of average)

सूचकांक विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों का माध्य है। सूचकांक रचना में किस माध्य का प्रयोग किया जाय तय करना जरूरी होता है। सैद्धातिंक रूप से तो सूचकांक रचना में किसी भी माध्य का प्रयोग कर सकते है। पंरतु व्यवहार में माध्यका, समान्तर माध्य या गुणोत्तर माध्य में से किसी एक ही का प्रयोग करना चाहिए।

26.10.1 माध्यका –

(क) सरल माध्य है

(ख) चरम मूल्यों से प्रभावित नही होता

(ग) कभी– कभी अवास्तविक व अनिश्चित होती है।

(ध) यह केवल निरपेक्ष परिवर्तन का ही माध्य है सापेक्ष का नही।

(ड) अतः सूचकांको मे इसका प्रयोग उपयुक्त नही है।

26.10.2 समान्तर माध्यः–

(क) अत्यन्त सरल व बुद्धिग्म्य है।

(ख) अति सीमांत पदो से प्रभावित होता है।

(ग) निरपेक्ष माप के लिये उपयुक्त है।

(ध) उत्क्राम्य नहीं होता

(ड) अतः इसका प्रयोग भी उचित नही है परंतु सरल होने के नाते कई सूचकांको में प्रयुक्त किया जाता है।

26.10.3गुणोत्तर माध्यः–

(क) आदर्श व सर्वश्रेष्ठ है।

(ख) छोटे मूल्यों को ज्यादा व बड़े मूल्यों को कम महत्व देकर संतुलन ।

(ग) यह सापेक्ष परिवर्तनो के माप के रखता है।

(ध) उत्क्राम्यता का गुण भी है परंतु इसकी ग्णना क्रिया जटिल होती है।

उदाहरण 8:– सामान्तर माध्य मध्यका व गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुये 2008 को आधार वर्ष मानकर 2009 और 2010 का मूल्य सूचकांक बनाइये।

वर्ष	2006	2007	2008
A	100	120	150
B	40	45	60
C	150	175	225
D	10	12	15
E	200	220	230

हलः—विभिन्न माध्यों द्वारा सूचकांक रचना

वस्तु	आधार (2006)		(2007)		(2008)	
	मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात	मूल्य	मूल्यानुपात
A	100	100	120	150	150	150
B	40	100	45	60	150	150
C	150	100	175	225	150	150
D	10	100	12	15	150	150
E	200	100	220	230	150	115
अनुपातों का योग अनुपातो का		500	AL	579.2	AL	715
सामान्तर माध्य अनुपातो का		100	2.063	115.8	2.15	143
मध्यका अनुपातोका		100		166.7		150
B		100		115.8		142.2

26.11 भारांकन की समस्या

अब तक के सूचकांको की रचना का वर्णन साधारण या अभारित वर्ग का था। क्योंकि इनमें सभी वस्तुओं को समान महत्व दिया जाता है। परंतु व्यावहारिक में हर वस्तु का अलग सापेक्षिक महत्व है। जैसे उपयोग सूचकांक में गेंहू, दूध नमक, चीनी में सर्वाधिक महत्व गेहू का है।

जब विभिन्न वस्तुओं से सम्बंधित भारों को ध्यान में रखकर सूचकांक बनाया जाता है। तो उसे भारित सूचकांक कहते है। सूचंकाक निर्माण में प्रयुक्त भार सदैव तर्कपूर्ण तथा तर्कशुद्ध होने चाहिए जिससे कि सूचकांक अध्ययन विषय का सही चित्रण कर सके।

भारांकन की रीतियाँः— भार देने की दो रीतियाँ है।

26.11.1 प्रत्यक्ष तथा परोक्ष भारांकनः— प्रत्यक्ष रीति में प्रत्यक्ष भार वस्तुओं की मात्रा या उसके मूल्य अर्थात् उन पर किये जाने वाला व्यय के अनुपात में प्रत्यक्ष रूप में दिये जाते है। इसमें प्रत्येक वस्तु की एक ही किस्म ली जाती है। और उसके मूल्यानुपात को भार से गुणा कर देते है।

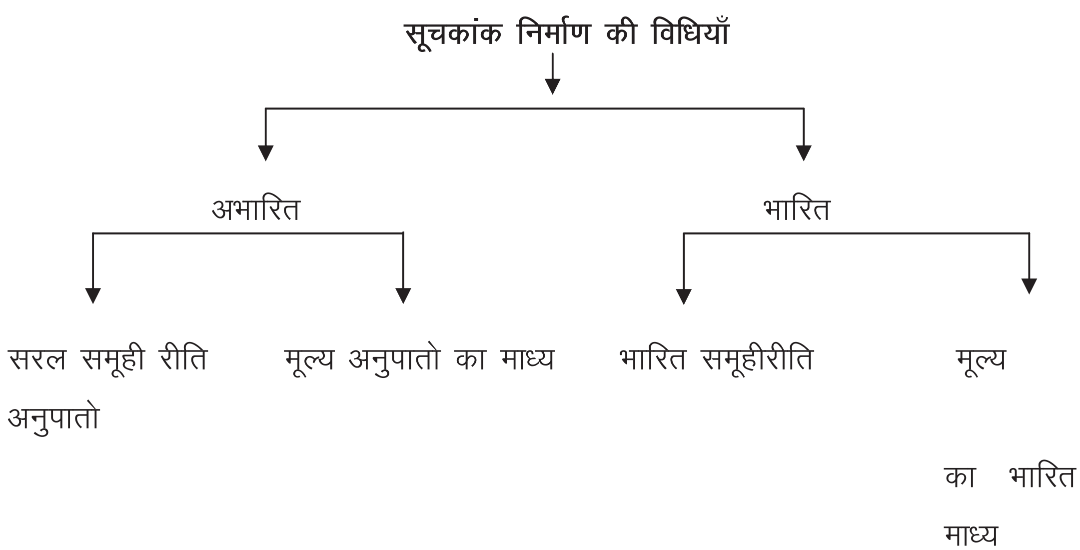
इसके विपरीत परोक्ष भारांकन में वस्तु को अधिक महत्व देने के लिये उसकी अतनी ही ज्यादा किस्में शामिल की जाती है। उदाहरण के लिये यदि चीनी को दूध की अपेक्षा तीन गुना महत्व देना है तो दूध के मुकाबले चीनी की तीन किस्में शामिल की जायेगी।

26.11.2 स्थिर तथा परिवर्तनशील भारः– जब एक बार निश्चित किये ग्ये भारों का ही लम्बे समय तक प्रयोग किया जाय तो उसे स्थिर भार कहते है। और यदि उनमें समय–समय पर परिवर्तन कर दिया जाये तो उसे परिवर्तनशील भार कहते है। सूचकांको के लिये परिवर्तनशील भार उपयुक्त है क्योंकि इनसे वस्तुओ के साथ महत्व में होने वाले परिवर्तनो को भी प्रतिबिम्बित किया जाता है।

उपयुक्त सूत्र का चुनावः– अंतिम चुनाव इस का है कि किस सूत्र या किस रीति द्वारा सूचकांक की रचना की जाय। सूत्र का चयन वास्तव में किसी सूचकांक के उद्देश्य संमको की उपलब्धता समय अवधि तथा आर्थिक साधनों की दृष्टि में रखकर करना चाहिये।

26.12 सूचकांक बनाने की विधियाँ

विभिन्न विधियों को एक चार्ट के माध्यम से स्पष्ट किया जा सकता हैः



26.12.1 अभारित सूचकांक :– इसमें मूल्यों को कोई भार प्रदान नही किया जाता और यह मान लिया जाता है कि सभी मदों का भार या सापेक्षिक महत्व समान है। रचना तकनीक के आधार पर अभारित सूचकांक निम्न दो प्रकार से तैयार किये जा सकते है।

a- **सरल समूही रीतिः–** सबसे सरल रीति है। आधार वर्ष के मूल्यों के योग एवं चालू वर्ष के मूल्यो के योग कहा जाता है। चालू वर्ष के योग में आधार वर्ष के योग का भाग देकर 100 से गुणा कर देते है।

सूत्र $\text{Index No}(P_{01}) = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} x100$

सीमाएँः–

1. विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व पर ध्यान नही दिया जाता।
2. सूचकांक पर मूल्य के विस्तार का प्रभाव पड़ता है।
3. मूल्य जिस इकाई (लीटर, मीटर आदि) में दिये ग्ये है।
4. उनमें परिवर्तन करके सूचकांक का दुरूपयोग किया जा सकता है।

b. मूल्य अनुपातों की माध्य विधि :– इस विधि में सबसे पहले प्रत्येक वस्तु के मूल्य अनुपात निकाले जाते है। इसके लिये प्रत्येक वस्तु के चालू वर्ष के मूल्य में आधार वर्ष के मूल्य का भाग देकर 100 का गुणा $\frac{P_1}{P_0} X\,100$किया जाता है। मूल्यानुपातो के योगमें वस्तुओं की संख्या का भाग देकर सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है। सूत्र –

$$(P_{01}) = \frac{\sum\left[\frac{P_1}{P_0} x100\right]}{N} \quad \text{or} \quad \frac{\sum[P.R]}{N}$$

इस रीति के कई लाभ है –

- सूचंकाक पर इसका कोई प्रभाव नही पड़ता कि मूल्य किसी इकाई में है क्योंकि वे सब मूल्य अनुपातों में बदल जाते है।
- सूचकांक पर मूल्य के निरपेक्ष मान का भी कोई प्रभाव नही पड़ता। क्योंकि वे प्रतिशत में परिवर्तित हो जाते है।

सीमा – यह अभारित होने के कारण विभिन्न वस्तुओं को अका सापेक्षिक महत्व प्राप्त नही हो पाता।

उदाहरण 9– निम्न संमको से 2002 के मूल्यों के आधार पर 2007 के लिये सूचकांक ज्ञात कीजिए –

वस्तु	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
2002 मे मूल्य	12	25	10	5	6
2007 में मूल्य	15	20	12	10	15

हल :– सूचकांक की गणना

वस्तु	सरल समूही रीति		मूल्यानुपात रीति			
	2002(Base) price (P_o)	2007(Base) price (P_1)	2007(Base) price (P_1)	Relative (R)	2007 (Current) (P_1)	(R)
A	12	15	12	100	15	125
B	25	20	25	100	20	80
C	10	12	10	100	12	120
D	5	10	5	100	10	200
E	6	15	6	100	15	250
N = 6	$\sum P_0 = 58$	$\sum P_1 = 72$				$\sum R = 775$

सरल समूही रीति द्वारा सूचकांक 2007 or P_{01}

$$= \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \text{ x } 100 = \frac{72}{58} \text{ x } 100 = 124.14$$

मूल्यानुपात रीति द्वारा सूचकांक 2007 or P_{01}

$$= \frac{\sum R}{N} = \frac{775}{5} = 155$$

26.12.2 भारित सूचकांक (Weighted IndeX) –

इससे आशय ऐसे सूचकांको से है जिनकी गणना में विभिन्न वस्तुओं को उनका तुलनात्मक या सापेक्षिक महत्व प्रदान किया जाता है। इसलिये इनकी अधिक तर्कपूर्ण नापा जाता है।ये दो प्रकार के होते है :–

A. भारित समूही रीति – इस सूचकांक में शामिल सभी वस्तुओं को भार आवंटित किये जाते है। इसके निमार्ण की अनेक रीतियां है :–

1. **लास्पेयर रीति (Laspeyre's Method)** :– इस रीति में आधार वर्ष की मात्रा (q_0) द्वारा भार प्रदान किये जाते है। अर्थात् –

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \text{x} 100$$

(जहाँ P_1= चालू वर्ष मूल्य, q_0= आधार वर्ष का मात्रा, q_0 = आधार वर्ष के मूल्य)

निमार्ण विधि :–

1. इस रीति का प्रतिपादन लोस्पेयर द्वारा 1871 में किया ग्या था।
2. इस रीति में आधार वर्ष की मात्राओं को भार माना ग्या है।
3. चालू वर्ष के मूल्य और आधार वर्ष के भार का गुणा करके उनका योग निकाल लेते है। $\left(\sum p_1q_0\right)$
4. आधार वर्ष के मूल्य व आधार वर्ष के भारों के गुणनफल का योग निकालते है। $\left(\sum p_0q_0\right)$
5. अन्त में $\left(\sum p_1q_0\right)$ को $\left(\sum p_0q_0\right)$ से विभाजित करके भाग्फल को 100 से गुणा कर देते है।

इस रीति में यह मान लिया ग्या है किस आधार वर्ष में वस्तुओं की जो मात्रा थी, वही चालू वर्ष में रही होगी।

2. **पाशे रीति (Paasches's Method):-** जर्मन के साख्यिंक पाशे ने अपनी रीति का प्रतिपादन 1874 में किया। इन्होंने चालू वर्ष की मात्रा को भार माना (q_1).

$$P_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1} x100$$

लास्पेयर और पाशे के सूत्रों की तुलना के संदर्भ मे यह महत्त्वपूर्ण है कि भार में भिन्नता के कारण समान आंकड़ो के आधर पर भी दोनो सूत्रों से उत्तर में भिन्नता आती है।
मूल्य निर्देशांक में फिशर के आदर्श सूचकांक का स्थान है। यह सूचकांक फिशर ने 134 विभिन्न सूत्रो के ग्हन अध्ययन के पश्चात विकसित किया था। यह भारित सूचकांक का ही रूप है। इस सूत्र में परिवर्तन भारों का प्रयोग किया जाता है।

3. फिशर आदर्श का सूचकांक (Fisher Ideal IndeX Number): यह सूचकांक लास्पेयर तथा पाशे सूचकांको का गुणोत्तर माध्य है। फिशर सूचकांक में ये दोनो अभिनति संतुलित हो जाती है।
अतः

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}} x100$$

$P_{01}= \sqrt{\text{Laspeyre IndeX } x \text{ Paasche IndeX}}$

फिशर सूत्र के आदर्श होने के आधार :–

1. यह आधार वर्ष व चालू वर्ष दोनो की ही मात्रा व मूल्य का प्रयोग करता है।
2. यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण व तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण दोनो को ही संतुष्ट करता है।
3. यह स्थिर व परिवर्तनशील भारों दोनो पर आधारित है।

उदाहरण 10:– निम्न से वर्ष 2005 को आधार मानकर 2006 के लिये लास्पेयर, पाशे व फिशर सूचकांक ज्ञात कीजिए।

Article	A		B		C		D		E	
	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
Year 2005	4	9	6	12	5	15	4	10	3	14
Year 2006	6	9	8	8	6	11	5	10	2	7

हल:– सूचकांको की गणना

वस्तु आधार 2005 चालू 2006 भारित समूह

	P_0	q_0	P_1	q_1	P_1q_0	P_0q_0	P_1q_1	P_0q_1
A	4	9	6	9	54	36	54	36
B	6	12	8	8	96	72	64	48
C	5	15	6	11	90	75	66	55
D	4	10	5	10	50	40	50	40
E	3	14	2	7	28	42	14	21
					$\sum P_1q_0$ =318	$\sum P_0q_0$ =265	$\sum P_1q_1$ =248	$\sum P_0q_1$ =200

लास्पेयर सूचकांक $P_{01} = \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x100 = \frac{318}{265} x100 = 120.$

पाशे सूचकांक $P_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1} x100 = \frac{248}{200} x100 = 124.$

फिशर सूचकांक $P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}} x100 = \sqrt{L x P}.$

$P_{01} = \sqrt{120 x 124} = \sqrt{148}$

4. **मार्शल एजवर्थ रीतिः—** इस रीति में आधार वर्ष और चालू वर्ष दोनो की मात्राओं के औसत का भार दिया जाता है, अर्थात्

$$P_{01} = \frac{\sum (q_o+q_1)P_1}{\sum (q_o+q_1)P_0} x100$$

$$P_{01} = \left[\frac{\sum P_1q_0 + \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 + \sum P_0q_1}\right] x100$$

5. **डोरविश एवं बाउले रीतिः—** यह रीति लास्पेयर तथा पाशे की रीति का मिश्रण है और यह इन दोनो सूचकांको का समान्तर माध्य होता है।

$$P_{01} = \frac{L+P}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_1q_0 +}{\sum P_0q_0 +} + \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}\right] x100$$

6. **कैली रीतिः—** इस सूत्र मे आवश्यकतानुसार आधार वर्ष या चालू वर्ष किसी को भी प्रमाणित मानकर उसकी मात्रा या दोनो की मात्रा के औसत भार दिये जाते है। इसलिये सूत्र मे के साथ व या 1 का प्रयोग नही किया जाता।

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 q}{\sum P_0 q} x 100$$

B. मूल्यानुपातो की भारित माध्य रीतिः— इस रीति में सूचकांक बनाने के लिये सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तु का आधार वर्ष के मूल्य के आधार पर चालू वर्ष के लिये मूल्य अनुपात निकाल लेते है। जिसके लिये $\left[\frac{P_1 \text{ x } 100}{P_0}\right]$ सूत्र का प्रयोग करते है।

यदि प्रश्न में भार स्पष्ट रूप से दिया हो तो उसका प्रयोग करते है लेकिन यदि आधार वर्ष की मात्रा (q_0) दी हो तो प्रत्येक वस्तु की आधार वर्ष का मात्रा और मूल्य (P_0) का गुणा (P_0q_0) करके मूल्य भार ज्ञात करते है। भार (w) का मूल्य अनुपात (PR) में गुणा करके और उनका योग (P_0) लगकर $\sum WPR$ निकालते है और इसमें भार के योग $\sum W$ का भाग दिया जाता है।

सूत्र — $\textbf{Weighted Index No.} = \frac{\sum \textbf{WPR}}{\sum \textbf{W}}$

मूल्य भार को W के स्थान पर V से भी दर्शाया जा सकता है।

उदाहरण 11:— एक औसत कर्मचारी वर्ग के परिवार के बजट के समूह सूचकांक और समूह भार है। दिये हुये भारो को प्रदान करते हुये सूचकांको की रचना कीजिये।

क्र.स.	स्मूह	सूचकांक	भार
1	भोजन	350	50
2	ईधन	240	10
3	वस्त्र	230	10
4	किराया	160	14
5	विविध	180	16

हलः—

.

	Group	IndeX No. (PR)	Weight (W)	WPR	
Inde	भोजन	350	50	17500	
	ईंधन	240	10	2400	
26.	वस्त्र	230	10	2300	13
मूल्य	किराया	160	14	2240	
	विविध	180	16	2880	
			$\sum W = 100$	$\sum WPR = 27,320$	

सूचकांक :–

ऊपर दिये गये सभी सूचकांक कीमत सूचकांक तथा मात्रा सूचकांक को वर्णित करते है। मूल्य कीमत तथा मात्रा का गुणनफल होता है। अर्थात् मूल्य = कीमत X मात्रा (v = pXq)

मूल्य सूचकांक ज्ञात करने के लिये चालू वर्षो के मूल्यों के योग $\sum(P_1q_1)$ को आधार वर्ष के मूल्यों के योग $\sum(P_0q_0)$ से विभाजित करके उसे 100 से गुणा कर दिया जाता है अतः

सूत्रानुसार – **Value IndeX No. or V =** $\frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0} x100$

$$\textbf{or} \quad V = \frac{V_1}{V_0} x100$$

इनका प्रयोग कम होता है ।

26.14 सूत्रो की उपयुक्ता के मापदण्ड

एक उपयुक्त सूत्र के चुनाव की कसौटी हेतु कुछ मापदण्ड या परीक्षण सुक्षाये ग्ये है, जो कि निम्नवत् है।

26.14.2 इकाई मापदण्डः– इस मापदण्ड के अनुसार मूल्य और मात्राएँ किसी भी इकाई में व्यक्त की जा सकती है, सरल समूहो सूचकांक को छोडकर शेष सभी सूत्र इस मापदण्ड को सन्तुष्ट करते है।

26.14.3 समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal test):– इस परीक्षण से यह स्पष्ट है कि आधार वर्ष के आधार पर चालू वर्ष का सूचकांक निकाला जाय और फिर

चालू वर्ष के आधार पर आधार वर्ष का सूचकांक ज्ञात किया जाए तो दोनो एक दूसरे के व्युत्क्रम होने चाहिए अर्थात् दोनो का गुणनफल 1 होना चाहिए।

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}} \qquad \text{or } P_{01} \text{ x } P_{10} = 1$$

उदाहरण के लिये यदि 1990 के आधार पर 200 के मूल्य 4 गुने हो जाये तो यदि 2000 को आधार मानकर 1990 का सूचकांक बनाया जाय तो वह एक चौथाई होना चाहिये जिससे $4 \text{ x } \frac{1}{4} = 1$ हो सके।

फिशर का सूत्र इस परीक्षण का पूरा करता है, क्योंकि

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_0 \text{x} \sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0 \text{x} \sum P_0 q_1}} ; P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0 q_0 \text{x} \sum P_0 q_1}{\sum P_1 q_0 \text{x} \sum P_1 q_1}}$$

$$P_{01} \text{ x } P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_0 \text{x} \sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0 \text{x} \sum P_0 q_1} \text{x} \frac{\sum P_0 q_0 \text{x} \sum P_0 q_1}{\sum P_1 q_0 \text{x} \sum P_1 q_1}} = 1$$

26.14.4 तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test):– यह परीक्षण यह स्पष्ट करता है कि मूल्य के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (q_{01}) तैयार किया जाय तो इसका और मूल्य सूचकांक (P_{01}) का गुणनफल चालू वर्ष के कुल मूल्य $\sum(P_1 q_1)$ और आधार वर्ष के कुल मूल्य $\sum(P_0 q_0)$ के अनुपात के बराबर होना चाहिए। अर्थात्

$$P_{01} \text{ x } q_{01} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0}$$

26.14.4 चक्रीय परीक्षण (Circular Test):– यह परीक्षण समय उत्क्राम्यता परीक्षण का ही विस्तार है इसके अनुसार यदि 2009 का सूचकांक 1999 के आधार पर बनाया

जाये और 1999 का सूचकांक 1989 के आधार पर बनाया जाये तो 1989 के आधार पर प्रत्यक्ष रूप से निकाला ग्या 2009 का सूचकांक असंग्त नही होना चाहिए। इसमें सूचकांक चक्र के रू॰ मे तैयार किये जाते है। और उन सब का गुणनफल 1 होना चाहिए।

अतः सूत्रानुसार $\dfrac{\text{चालू वर्ष का नया सूचकांक नये आधार वष का पुराना सूचकांक}}{100}$

उदाहरण 12:– निम्नलिखित आंकड़ो से फिशर का आदर्श सूचकांक की गणना कीजियें। समय उत्क्राम्यता और तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणों की जाँच भी कीजिए।

Commodity		2000	2005
Rice	Price Qty	Rs. 4 50 kg	Rs.10 40 kg
Wheat	Price Qty	Rs. 3 10 kg	Rs.8 8 kg
Gram	Price Qty	Rs. 2 5 kg	Rs. 4 4 kg

हल:–

Item	2000		2005		P_1q_0	P_1q_1	P_0q_0	P_0q_1
	P_0	q_0	P_1	q_1				
Rice	4	50	10	40	500	400	200	160
Wheat	3	10	8	8	80	64	30	24
Gram	2	5	4	4	20	16	10	8
					600	**480**	**240**	**192**

Fisher's Ideal IndeX No.: -

$$100\sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0}} = 100\sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$= 100\sqrt{2.5 \, x \, 2.5} = 250$$

Time Reversl Test: -

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0}} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_0}{\sum P_1q_0} x \frac{\sum P_0q_1}{\sum P_1q1}} = \sqrt{\frac{240}{600} x \frac{192}{480}}$$

$$P_{01} \, x \, P_{10} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192} x \frac{240}{600} x \frac{192}{480}} = 1$$

Factor Reversal Test:-

परीक्षाण के अनुसार $P_{01} \, x \, q_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0}$ होना चाहिए

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_1}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_1q_0}} = \sqrt{\frac{192}{240} x \frac{480}{600}}$$

$$P_{01} \, x \, Q_{01} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192} x \frac{192}{240} x \frac{480}{600}} = 1$$

अर्थात् $\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_0}$

इस प्रकार यह सूत्र तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षण पर सही सिद्ध होता है।

26.15 शिरोबन्धन या संयोजन (Splicing)

शिरोबन्धन का अर्थ दो सूचकांको मालाओं के शिरो को बाधने से है अर्थात् शिरो बन्धन का अर्थ दो या अधिक अधिव्याप्त सूचकांको (overlapping IndeX numbers) की मालाओं को किसी एक सामान्य आधार पर एक सूचकांक माला में परिवर्तित करने से है। ऐसा प्रायः तभी किया जाता है। जब पुराने आधार वर्ष को समाप्त कर नया आधार वर्ष मानकर नयी सूचकांक श्रृखंला प्रारम्भ की ग्यी है। ऐसी स्थिति में पुरानी सूचकांक श्रृखंला को इसके साथ जोड़ने के लिये शिरोबन्धन करना होता है।

इसके दो स्वरूप होते हैः–

1. **अग्रगमी शिरोबन्धन** :– यह नये आधार पर आधारित होता है।

अग्रगमी शिरोबन्धित सूचकांक

$$= \frac{\text{चालू वर्ष का नया सूचकांक}}{100} X \frac{\text{चालू वर्ष का नया सूचकांक}}{100}$$

Forward spliced IndeX no

$$= \frac{\text{New Index No of Cureent year x Old Index No of New BaseYear}}{100}$$

2. **पृष्ठगमी शिरोबन्धित सूचकांक** :– इसमें नयी सूचकांक श्रृखंला को ज्यों का त्यों रखा जाता है लेकिन पुरानी सूचकांक श्रृखला को परिवर्तित करके नयी श्रृखंला के साथ जोड़ा जाता है। इस परिवर्तन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

   शिरोबन्धित सूचकांक

$$= \frac{\text{चालू वर्ष का नया सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} X\ 100$$

26.16 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक या निर्वाह लागत सूचकांक

यह सूचकांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्ति के निर्वाह व्यय में होने वाले परिवर्तनो की दशा और मात्रा को प्रकट करते है।

26.16.1 आवश्यकता एवं उद्‌देश्यः— सामान्य मूल्य सूचकांक केवल सामान्य मूल्य स्तर में होने वाले विचारो की माप करते है। और लोगे के जीवन निर्वाह पर विविध वस्तुओ के मूल्यों मे होने वाली वृद्धि या कमी के प्रभाव का अध्ययन करने के लिये पृथक सूचकांको का निर्माण करना जरूरी होता है।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक यह बताता है कि एक विशिष्ट वर्ग का उपभोक्ता को वस्तुओ और सेवाओं के एक समूह के लिये आधार वर्ष की तुलना में समय के किसी अन्य बिंदु पर क्या भुग्तान करना होगा।

मान्यताएँ :—

1. समान आवश्यकताएँ
2. समान वस्तुएँ तथा समान भार
3. पूर्ण प्रतिनिधित्व
4. औसत रूप से सत्य
5. समान मूल्य

26.16.2 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना में कठिनाइयाँः—

1. लोगे के जीवन स्तर में अंतर के कारण सभी वर्गे व स्थानों के लिये सर्वमान्य निवाह व्यय सूचकाकं तैयार नही किया जा सकता ।
2. किसी भी वर्ग विशेष के सभी उपभोक्ता एक ही समय या विभिन्न अवधियों में वस्तुओ पर एक समान अनुपात में व्यय नही करते है।
3. उपभोग की वस्तुओ में अंतर
4. फुटकर मूल्यों में अंतर

26.16.3 निर्वाह व्यय सूचकांक की उपयोग्िताः—

1. मुद्रा की क्रय शक्ति का पता लगना $= \dfrac{1}{\text{निर्वाह व्यय सूचकांक}}$
2. वास्तविक मजदूरी ज्ञात करना
3. मंहगई भत्ता व न्यूनतम मजदूरी का निर्धारणः—सरकार व व्यापार गृहो द्वारा कर्मचारियों का महगई भत्ता व न्यूनतम मजदूरी का निर्धारण निर्वाह व्यय सूचकांक के आधार पर किया जाता है।

4. नीति निर्धारण में सहायकः—सरकारी स्तर पर इन सूचकांक का मजदूरी नीति, मूल्य नीति किराया नियन्त्रण, करारोपण, सार्वजनिक वितरण प्रणाली आदि मामलो में अत्यधिक उपयोग करते है।

26.16.4 उपभोक्ता मूल्य अथवा निर्वाह लागत सूचकांक की रचनाः— इसके निम्न चरण है

1. **वर्ग का निर्धारणः—** यह तय करना जरूरी होता है कि यह सूचकांक समाज के किस वर्ग के लिये तैयार किया जा रहा है। इनमे अन्य परिस्थितियों जैसे उपभोक्ता की आदत, स्थान आदि को भी ध्यान में रखा जाता है।
2. **पारिवारिक बजट अनुसंधानः—** यह पता लगया जाता है कि इस वर्ग के व्यक्तियो के पारिवारिक बजटों में सामान्य कौन—कौन सी वस्तुएँ शामिल है और उन पर व्यय का औसत अनुपात क्या है। इनमे पाँच श्रेणियाँ होती है — 1. खाद्य सामग्री, 2. वस्त्र, 3. ईधन, 4. मकान का किराया, 5. विविध व्यय
3. **मूल्य उद्धरणः—** इनमें फुटकर मूल्य लिये जाते है। अतः विश्वसनीयता के साथ एकत्रित करने चाहिए। सकलन के बाद प्रत्येक वस्तु पद का औसत मूल्य ज्ञात कर लेना चाहिए।
4. **भारांकनः—** उपभोग की जाने वाली विभिन्न वस्तुओं की अलग— अलग सापेक्षिक महत्व स्पष्ट करने के लिये उन्हे तर्कसंगत रीति द्वारा भारित किया जाता है। भार दो प्रकार का होता है। (1) मात्रा भार और (2) मूल्य भार।

26.16.5 निर्वाह व्यय सूचकांक रचना की रीतियाँः—

1. **समूही व्यय रीति या भारित समूही रीतिः—** इस रीति में निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है।
   a) आधार वर्ष का कुल व्यय $\sum(P_0 q_0)$ ज्ञात किया जाता है।
   b) इसके पश्चात् आधार वर्ष की मात्रा में चालू वर्ष के मूल्य को गुणा करके और जोड़ लगकर चालू वर्ष का कुल व्यय $\sum(P_1 q_0)$ ज्ञात किया जाता है।
   c) यह करते समय इकाईया समान होनी चाहिए।

उपभोक्ता मूल्य निर्देशांक

$$= \frac{\text{चालू वर्ष का कुल व्यय}}{\text{आधार वर्ष का कुल व्यय}} X\ 100$$

अर्थात् $= P_{01} = \frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} x\ 100$

नोटः– यह सूत्र वास्तव में लास्पेयर का सूत्र है।

2. पारिवारिक बजट रीति अथवा भारित मूल्यानुपात रीति

1. प्रत्येक वर्ष का चालू वर्ष का मूल्यानुपात निकाला जाता है। जिसके लिये $\frac{P1x\ 100}{P_0}$ सूत्र लगया जाता है।
2. प्रत्येक मूल्यानुपात में आधार वर्ष के मूल्य भार $\mathbf{(P_0 q_0 \text{ or } w)}$ से गुणा किया जाता है। और इन गुणाओं का योग करके $\sum WPR$ ज्ञात किया जाता हैं
3. $\sum WPR$ में भारो के योग $(\sum W)$ का भाग दिया जाता है।

सूत्रः– उपभोक्ता मूल्य सूचकांक $\frac{\sum WPR}{\sum W}$

26.16.6 उपभोक्ता मूल्य सूचकाकों मे विभ्रम :–

1. जिस वर्ग के लिये यह सूचकांक बनाया जा रहा है उस वर्ग के व्यक्तियों के वर्गीकरण में विभ्रम हो जाते है।
2. वस्तुओं के चुनाव में अशुद्धि होने की सम्भावना रहती है।
3. वस्तुओं की विविध किस्मों के कारण प्रतिनिधि मूल्य उद्धरण के छाटने में ग्लती रह जाती है।
4. अशुद्ध भारो के प्रयोग से भाराकंन सम्बन्धी विभ्रम उत्पन्न हो जाते है।
5. ये विभ्रम उपभोग्या वस्तुओ की भार मात्रा व मूल्य मे उतार चढ़ाव के कारण होते है।

26.17 सूचकांको की सीमाएँ

यह माना ग्या है कि परिवर्तनो की तुलनात्मक या सापेक्ष मापन की दृष्टि से सूचकांक एक महत्वपूर्ण साख्यिकीय उपकरण है लेकिन व्यवहार में इसकी कुछ सीमाएँ है। यह परिसीमाएँ इस प्रकार से है।

1. न्यादर्श पर आधारितः— सूचकांक की ग्णना में प्रत्येक मद को शामिल करना अत्यन्त कठिन कार्य है। यदि न्यादर्श में शामिल की ग्ई मदे सम्ग्र का उचित प्रतिनिधित्व नही करती, तो सही स्थिति प्रकट नही हो पायेगी।
2. औसत का संकेत :— सूचकांक द्वारा परिवर्तन से औसत का ही संकेत मिलता है। इसी के आधार पर इनका परिवर्तन किया जाना चाहिए।
3. रचना सम्बन्धी सीमाएँः— सूचकांको की रचना में असावधानियो का या भ्रम उत्पन्न हो सकता है। जैसे आधार वर्ष का चुनाव, भार का निर्धारण, औसत का प्रयोग आदि।
4. विशिष्ट उद्देश्यो का प्रभावः— किसी एक उद्देश्य से बनाया ग्या सूचकांक का प्रयोग दूसरे उद्देश्य के लिये नही हो सकता।
5. गुणात्मक तथ्यो के परिवर्तन की उपेक्षाः— सूचकांक के माध्यम से संख्यात्मक परिवर्तन का मापन सरलता से हो जाता है, लेकिन यदि सम्बन्धित तथ्यो में गुणात्मक परिवर्तन भी हुआ हो तो उसका सही प्रकटीकरण नही हो पाता।

26.18 सारांश

आर्थिक क्षेत्र में निरन्तर परिवर्तित होते रहते हैं। इन्हीं परिवर्तनों का अध्ययन करने और इनके प्रभावों को स्पष्ट करने के लिए जिस सांख्यिकीय तकनीक को विकसित किया ग्या है उसी तकनीक को सूचकांक अथवा निर्देषांक कहते हैं।प्रारम्भ में सूचकांक को केवल मूल्यस्तर तथा मुद्रा की क्रयषक्ति का माप करने हेतु प्रयोग किया जाता था परन्तु आज के समय में इसका प्रयोग विस्तृत हो ग्या है।सूचकांको के विकास में प्रो. जेवन्स, डॉ. मार्षल, वाल्ष, एजवर्थ फिशर का नाम उल्लेखनीय है। सूचकांक एक विषेष प्रकार का माध्य है जिनके द्वारा समय, स्थान या अन्य किसी विषेषता के आधार पर सम्बन्धित चर मूल्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का मापन किया जाता है।

सूचकांक को कीमत या मूल्य सूचकांक, मात्रा सूचकांक ,कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक,उद्धेष्य विषेष सूचकांक वस्तुओं की संख्या के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। मूल्य सूचकांक एक प्रमाप वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष के मूल्य स्तर को व्यक्त करते हैं। आधार वर्ष ज्ञात करने की दो रीतियां हैं–स्थिर आधार रीति एवं श्रृंखला आधार। आधार परिवर्तन दो प्रकार के होते है :- स्थिर आधार से श्रृखंला आधार में एवं श्रृखंला आधार से स्थिर आधार में।आधार वर्ष परिवर्तन आधार परिवर्तन से भिन्न होता है। आधार वर्ष परिवर्तन का आश्य है एक सूचकांक के दिये हुये (पुराने) आधार वर्ष को बदलकर उसके स्थान पर किसी नये आधार वर्ष पर आधारित करके एक नई सूचकांक श्रृखंला की पुर्नरचना करना।आधार वर्ष परिवर्तन की दो रीतियाँ है– प्रत्यक्ष या पुर्ननिर्माण रीति एवं अप्रत्यक्ष अथवा परोक्ष या संक्षिप्त रीति। सूचकांक रचना में किस माध्य का प्रयोग किया जाय तय करना जरूरी होता है। व्यवहार में माध्यका, समान्तर माध्य या गुणोत्तर माध्य में से किसी एक ही का प्रयोग करना चाहिए। जब विभिन्न वस्तुओं से सम्बंधित भारों को ध्यान में रखकर सूचकांक बनाया जाता है। तो उसे भारित सूचकांक कहते है।भार देने की दो रीतियाँ है प्रत्यक्ष तथा परोक्ष भारांकन स्थिर तथा परिवर्तनशील भार ।सूचकांक निर्माण की दो विधियाँ है– अभारित एवं भारित।भारित समूही रीति में शामिल सभी वस्तुओं को भार आवंटित किये जाते है। इसके निमार्ण की अनेक रीतियां है – लास्पेयर रीति , पाशे रीति , फिशर आदर्श का सूचकांक, मार्शल ,एजवर्थ रीति ,डोरविश एवं बाउले रीति कैली रीति एक उपयुक्त सूत्र के चुनाव की कसौटी हेतु कुछ मापदण्ड या परीक्षण सुक्षाये ग्ये है, इकाई मापदण्ड, समय उत्क्राम्यता परीक्षण, तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण, चक्रीय परीक्षण।

शिरोबन्धन का अर्थ दो सूचकांको मालाओं के शिरो को बांधने से है अर्थात् शिरो बन्धन का अर्थ दो या अधिक अधिव्याप्त सूचकांको की मालाओं को किसी एक सामान्य आधार पर एक सूचकांक माला में परिवर्तित करने से है।उपभोक्ता मूल्य सूचकांक या निर्वाह लागत सूचकांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्ति के निर्वाह व्यय में होने वाले परिवर्तनो की दशा और मात्रा को प्रकट करते है।

सूचकांक एक तुलनात्मक अथवा सापेक्ष माप है।वास्तव में ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है जिसमें संख्यात्मक को मापने के लिए सूचकांकों का प्रयोग न होता हो।तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना, भावी प्रवृत्तियों के संकेतक ,आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक ,जटिल तथ्यों को सरल बनाना,विभिन्न मूल्यों की अवस्फीति में सहायक सूचकांक की उपयोग्ता को

दर्शाता है। निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है कि सूचकांक प्रतिषत के रूप में व्यक्त किया जाने वाला एक विषेष प्रकार का माध्य है जिसके आधार पर विभिन्न समयों, स्थानों या अन्य समंक समूहों में होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनों की सामान्य प्रकृति को मापा जाता है।

26.19 शब्दावली

1. स्थिर आधार रीति – जब आधार मूल्य स्थिर रहते है।
2. बहुवर्षीय माध्य आधार – कुछ वर्षो के माध्य को आधार मान लेते है।
3. चल आधार रीति – चालू वर्ष के लिये पिछला वर्ष आधार वर्ष मान लेते है
4. शिरोबन्धन – दो या अधिक सूचकांक मालाओ को किसी एक सूचकांक माला में परिवर्तित करने से है।

26.20 लधु उत्तरीय प्रश्न

1. फिशर के आदर्श सूचकांक के निर्धारण में सामान्यता कितने खाने होते है।
2. पाशे का सूचकांक आधारित है।
   (1) आधार वर्ष की मात्रा पर (2) चालू वर्ष की मात्रा पर
   (3) दोनो के औसत पर (4) इनमे से कोई नही।
3. एक अध्ययन सूचकांक वह है जो संतुष्ट करता है।
   (1) इकाई परीक्षण (2) समय उत्क्राम्यता परीक्षण
   (3) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (4) चक्रीय परीक्षण
4. निम्न में से आदर्श सूचकांक है
   (1) पाशे का सूत्र (2) फिशर का सूत्र
   (3) लास्पेयर का सूत्र (4) वाश का सूत्र
5. सूचकांको की रचना के लिये सर्वोत्तम माध्य है।
   (1) मध्यक (2) माध्यिका
   (3) बहुलक (4) गुणोत्तर माध्य
6. सूचकांक होते है आर्थिक
   (1) लेक्टोमीटर (2) स्पाइरामीटर
   (3) बैरो मीटर (4) कैलोरीमीटर

उत्तरः– (1) 1, (2) 2, (3) 3, (4) 2, (5) 4, (6) 3

26.21 सदंर्भ सहित ग्रन्थ

1. **डा0 एस सचदेवा :–** परिमाणात्मक विधियाँ ,लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
2. **डा0 के0 एल0 गुप्ता एवं डा0 हरिओम गुप्ताः–** परिमाणात्मक तकनीकें ,नवयुग साहित्य भवन, आगरा।
3. **डा0 के0 एल0 गुप्ता, रवि कान्तः–** अर्थशास्त्र की आधारभूत परिमाणात्मक विधियाँ ,नवनीत पब्लिकेशन्स, आगरा
4. **एस0पी0 सिंहः–** साख्यिकीः सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस0 चन्द पब्लिकेशन्स नई दिल्ली।

26.22 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
2. Singh, S.P. ((2010) Principles of Statistics , S &Chand Publishing House.
3. Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
4. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

26.23 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सूचकांक क्या है? इसका निर्माण कैसे किया जाता है? फिशर का सूत्र आदर्श सूचकांक क्यो कहलाता है?
2. सूचकांक की परिभाषा दीजिये? सूचकांक बनाने की स्थिर आधार विधि व श्रृखंला आधार विधि में अंतर स्पष्ट कीजिये व उनके तुलनात्मक गुणो का वर्णन कीजिये।
3. वर्ष 2004 को आधार मानकर नये सूचकांक ज्ञात कीजिये।

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006
सूचकांक	100	108	120	150	210	225

इकाई – 27 काल श्रेणी विश्लेषण एवं प्रतिचन सिद्धान्त

इकाई की रूपरेखा

27.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में प्रतिचयन रीति एवं काल श्रेणी विश्लेषण पर प्रकाश डाला गया है। आधुनिक एवं व्यावसयिक क्षेत्रो में समय के साथ–साथ निरन्तर रीति से अनेक प्रकार के परिवर्तन दृष्टिगेचर होते है। काल की गति के साथ मूल्यों मे होने वाले विभिन्न दीर्घकाल एवं अल्पकालीन उच्चवचनों का विधिवत् विश्लेषण किसान, उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्गो के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है।

साख्यिकीय अनुसंन्धान में संमक मूल आधार है और इनका संकलन "संगणना" या "प्रतिचयन" रीति द्वारा किया जा सकता है। आज के समय में यह रीति अत्यधिक लोकप्रिय और प्रचलित हो गयी है क्योंकि दैनिक जीवन के अधिकांश निर्णय सम्पूर्ण समग्र (क्षेत्र) की कुछ प्रतिनिधि इकाइयों के गहन अध्ययन पर आधारित होते है। यदि प्रतिदर्श की इकाइयों का चयन दैव आधार पर और वैज्ञानिक ढंग से किया जाय तो उसके निष्कर्ष और विशेषताएँ लगभग वही होते है जो समग्र में विद्यमान होती हैं।

अतः सार्थकता परीक्षण में यह सिद्वान्त एक महत्वपूर्ण उपकरण बन गया है। यह कहा जा सकता है कि प्रतिचयन सिद्वान्त एक समग्र व उससे चुने गये प्रतिदर्शो के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्धों का वैज्ञानिक अध्ययन है।

27.2 उद्देश्यः– प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करके हम यह जान सकेगें:–

1. काल श्रेणी विश्लेषण किसे कहते है।
2. काल श्रेणी के संघटक क्या है और विभिन्न उच्चावचनो को मापने की विभिन्न रीतियाँ क्या है।
3. सम्ग्र एवं प्रतिदर्श में क्या अंतर है।
4. प्रतिदर्श के क्या उद्देश्य है एवं इसका महत्व है।
5. प्रतिचयन सिद्वान्त क्या है।
6. प्रतिचियन की विभिन्न रीतियाँ क्या है।

27.3 काल श्रेणी विश्लेषण

एडवर्ड–डे लेविस के अनुसार, "अर्थशास्त्री के लिए यह जानने के प्रयासों मे कि आर्थिक व्यवस्था कैसे कार्य करता है, काल श्रेणी का अध्ध्यन सम्भवन, सूचना का सबसे महत्वपूर्ण स्रोत है।"काल की गति के साथ मूल्यों में होने वाला दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावनों

का विश्लेषण किसान उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्गे के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है।

27.3.1 अर्थ :—काल श्रेणी का आशय ऐसी श्रेणी या समंकमाला से है, जिसमें 'काल' अर्थात् 'समय' के आधार पर संमक प्रस्तुत किय जाते है।

बर्नर हर्श के अनुसार, समय के क्रमिक बिन्दुओं के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल श्रेणी कहलाता है। **या लुन चाऊ** के अनुसार एक काल श्रेणी को विभिन्न समय अवधियों में किसी आर्थिक चर या चरों के मिश्रण से सम्बन्धित संख्याओं के संकलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

तकनीकी दृष्टि से काल श्रेणी विश्लेषण में समय स्वतन्त्रता चर मूल्य एवं समंक आश्रित चर मूल्य होते है। यह संमक समय के साथ—साथ होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करते है।

उदहारण :—

भारत में जनसख्या —

वर्ष	**जनसंख्या (करोड़)**
1957	36.20
1961	43.90
1971	54.00
1981	68.40

निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि काल श्रेणी का आशय समय क्रम में सांख्यिकीय संमको की व्यवस्था से है। यह श्रेणी समय परिवर्तन के साथ ही तथ्य विशेष के संमकों में होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करती है। काल श्रेणी में होने वाले दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन न सिर्फ व्यापारी वरन् अर्थशास्त्री के लिए भी बड़ा महत्व रखता है। भूतकाल के परिवर्तन के विश्लेषण करके वे पिछले अनुभव के आधार पर भविष्य की नीतियाँ निर्धारित कर सकते है। और अपनी क्रियाओं पर नियंत्रण करके भविष्य के जोखिमों से अपने व्यापार की सुरक्षा कर सकते है। अतः यह कह सकते है कि विभिन्न वर्ग चाहे वो अर्थशास्त्री हो या उपभोक्ता, योजनाकार, किसान, राजनीतिक आदि सभी के लिये काल श्रेणी में से वाले परिवर्तनों का विश्लेषण विशेष रूप से उपयोगी होता है। एक

विवेकपूर्ण विश्लेषण तथा संकेतको का वैज्ञानिक विवेचन काल श्रेणी की महत्ता में वृद्धि करता है।

27.4 काल श्रेणी के अंग या संघटक

अनेक प्रकार के घटक या परिवर्तन काल श्रेणी पर अपना प्रभाव डालते है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गें में बाँट सकते है और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते है। मूल संमकों को 'σ'से दर्शाया जाता है, इसके चार संघटक है।

(i) दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T)

(ii) मौसमी विचरण (S)

(iii) चक्रीय उच्चारण (C)

(iv) अनियमित उच्चावचन (I)

काल श्रेणी के अंग या संघटक

मूल श्रेणी के अंग या संघटक

दीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति (T)

अल्पकालीन उच्चावचन (O - T)

नियमित अल्पकालीन उच्चचारण (S+C)

अनियमित या दैव उच्चावचन(T)

आर्तव विवरण या मौसमी परिवर्तन (S)

चक्रीय उच्चावचन (C)

अनेक प्रकार के घटक या परिवर्तन काल श्रेणी पर अपना प्रभाव डालते है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गें में बाँट सकते है और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते है।

27.4.1 दीर्घकालीन प्रवृति या उपनति - इसे 'T' से सम्बोधित किया जाता है।

जब दीर्घकाल में परिर्वतन की सामान्य दिशा का अध्ययन होता है तो उस प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृति कहते है।

प्रो0 सिम्पसन और काफ्का के अनुसार "उपनति जिसे दीर्घकालीन प्रवृत्ति भी कहते है, किसी समयावधि मे बढ़ने या घटने की आधारभूत प्रवृत्ति होती है। उपनति को धारणा में अप्लकालीन परिवर्तन शामिल नही होते, वरन् दीर्घकालीन में हुये स्थिर परिवर्तन शामिल होते है।"

सरल शब्दों में यह कह सकते है कि अल्पकाल में समय–समय पर कई उतार चढ़ाव होते है पर दीर्घकाल में इन्ही उतार–चढ़ाव में एक अर्न्तविहीन प्रवृत्ति देखने को मिलता है। इसी प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहते है। उदाहरण के तौर पर यदि देश में मूल्यों की बात करें तो हम पायेंगे कि उनमें समय–समय पर कई उतार–चढ़ाव हुये परन्तु दीर्घकाल में उनकी प्रवृत्ति बढ़ने की ही है।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने के उद्देश्य–

इसे प्रवृत्ति को मापने के दो प्रमुख उद्देश्य है।

(1) अन्य संघटको की जानकारी – जैसे

अल्पकालीन उच्चावचन, मॉसमी विचरण, चक्रीय परिवर्तन आदि।

(2) भविष्य का अनुमान

प्रमुख विशेषताएँ –

(1) तीन पहलू – (i) वृद्धि प्रवृत्ति – देश में मूल्यों की स्थिति

(ii) कमी प्रवृत्ति – जनसंख्या की मृत्यु दर

(iii) स्थिर प्रवृत्ति – स्थान विशेष का तापमान

(2) विभिन्न समयों में विभिनन प्रवृत्ति – यह भी मुमकिन है कि एक दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अन्दर एक समय में एक प्रवृति एक दूसरे समय मे दूसरों प्रवृत्ति देखने को मिले।

(3) तुलनात्मक धारणा – क्योंकि दीर्घकाल एक तुलनात्मक धारण है अतः यह श्रेणी विशेष की विशेषताओं से प्रभावित होता है। मृतकों की संख्या किसी विशेष परिस्थिति के दौरान एक माह से कुछ माह में ही दीर्घकालीन अवधि के अन्तर्गत आ

सकती है जबकि मूल्यों के उतार–चढ़ाव कई सालों की अवधि को इस श्रेणी में लाया जाता है।

27.4.2 नियमित अल्पकालीन उच्चावचन

कई बार देखा गया है कि कुछ ऐसी शक्तियों काल श्रेणी को प्रभावित करती है, जिसकी समय–समय पर पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि यह पुनरावृति नियमित रूप से होती है। अतः उन्हें नियमित अप्लकालीन उच्चावचन कहा जाता है। इन्हें दो भागें में बाट सकते है।

आर्त्तव विचरण या मौसमी परिवर्तन–जो परिवर्तन एक वर्ष से कम की अवधि में ही नियमितता और लग्भग एकरूप प्रवृत्ति के रूप में होते रहते है, उन्हें मॉसमी परिवर्तन कहते है–जेसे दिन, सप्ताह, माह, छमाहि आदि। इसके मुख्य कारण है।

(i) जलवायु

(ii) रीतिरिवाज, परम्परा और स्वभाव

(iii) समय विशेष की परिस्थिति–जैसे अप्रैल आते ही स्कूल की ड्रेस और किताबों की मांगें में उछाल।

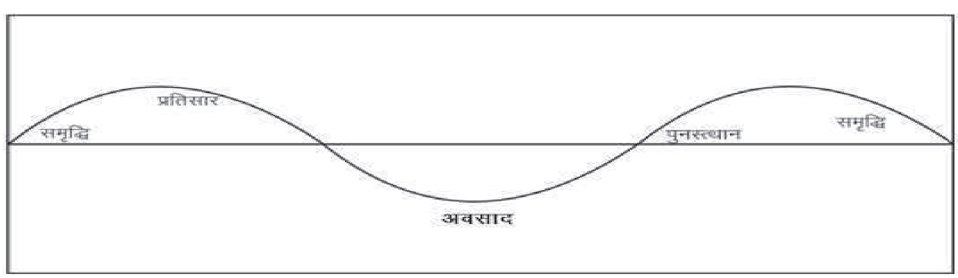
मौसमी परिवर्तन की विशेषताएँ :–

(i) नियमित परिवर्तन

(ii) दोनों दशाओं में परिवर्तन–अर्थात उतार भी और चढ़ाव भी।

(iii) पूर्वानुमान सम्भव–उपभोक्ता, उत्पादक विक्रेता आदि अपने निर्णय लेते समय परिवर्तनों का विशेष ध्यान रखते है और भविष्य पुर्वानुामान के लिए कर पाते है।

चक्रीय उच्चावचन– यह उचावचन भी नियमित होने वाले होते है किन्तु इनकी पुनरावृत्ति एक वर्ष से अधिक की होती है। इन्हें चक्रीय इसलिये कहा जाता है क्योंकि इनका क्रम चक्रीय स्वभाव का होता है। जैसे व्यवार का चक्र जिसमें सामान्यतः चार अवस्थायें देखने को मिलता है–समृद्धि , प्रतिसार अवसाद, पुनस्त्थान।



यहाँ परिवर्तन की अवधि 3 वर्ष से 10 वर्ष की हो सकती है। इसके लिये 'C' शब्द का प्रयोग होता है।

27.4.3 अनियमित या दैव उच्चारण

जब अकस्मात कोई घटना या परिस्थिति से उच्चावचन होते है तो उन्हें अनियमित उच्चावचन कहा जाता है। जैसे किसी कारखाने में आग लग्ना, जिसके कारण लाभ कम हो जाना, हड़तालों के कारण उत्पादन प्रभावित होना आदि।

विशेषताएँ :–

(i) पूर्वानुमान नहीं–क्योंकि यहाँ जो शक्तियों क्रियाशील होता है उनके बारे में पहले से जानकारी मिलना सम्भव नही होता। अतः इसका पूर्वानुमान भी संभव नहीं हो पाता।

(ii) निश्चित प्रारूप न होना–नहीं ऐसे उच्चावचना का कोई निश्चित प्रारूप होता है न ही इनके पुनः होने की निश्चित अवधि होती है।

(iii) अल्पकालिक–ऐसे उच्चावचन प्रायः अल्पकालिक होते है पर इनका प्रभाव कभी–2 अत्यन्त ग्हरे होते है।

(iv) अनियमित परिवर्तन–इसके अन्तर्गत उन सभी परिवर्तना को शामिल किया जाता है जो न दीर्घकालिक प्रवृति और न मौसमी परिवर्तन की श्रेणी में आते है।

27.5 काल श्रेणी का विश्लेषण–आशय एवं मॉडल

काल श्रेणी निदर्श–काल श्रेणी के चार संघटकों का मापन निम्न दो मॉडलों पर आधारित है।

27.5.1 योज्य मॉडल –यह इस मान्यता पर आधारित है कि मूल समक चारों संघटक अंगे का योग होता है।

$$O = T + S + C + I$$

दीर्घकालीन उत्पत्ति (T) को मूल संमक में से घटाकर अल्पकालीन उच्चावचनों का पृथक्क्करण किया जाता है।

$$O - T - S - C = I$$

अल्पकालीन उच्चावचनों (O-T) में से मौसमी विचरणों (S) को घटाकर चक्रीय व अनियमित परिवर्तन ज्ञात किया जा सकता है।

$$O - T - S = C + I$$

यदि अल्पकालीन उच्चावकनो (O-T) में से मौसमी और चक्रीय उच्चावचनों (S+C) को घटाकर अनियमित परिवर्तन ज्ञात किया जा सकता है।

$$O - T - (S + C) = I$$

$$= O - T - S - C = I$$

27.5.2 गुणात्मक मॉडल

इस में मूल संमक चारों सघंटकों को गुणनफल होता है।

$$O = T X S X C X I$$

अल्पकालीन विचरण को मापने के लिये , इन्हें अलग–अलग ढंग से प्रयोग किया जा सकता है।

$$\frac{O}{T} = S x C x I$$

$$\frac{O}{T x C} = S x I$$

$$\frac{O}{T x S x C} = I$$

इस मॉडल में दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मूल संमको की इकाई के रूप में व्यक्त किया जाता है।

व्यवहार में योज्य एवं गुणत्मक दोनों मॉडलों का मिश्रण भी अपनाये जा सकते है।

$$O = TSC + I$$

$$O = TC + SI$$

$$O = T + SCI$$

$$O = T + S + CI$$

27.5.3 योज्य और गुणात्मक मॉडल में अन्तर –

(1) संघटकों का योग और गुणनफल–योज्य मॉडल में संघटको का योग किया जाता है जबकि गुणात्मक मॉडल में उनका गुणा किया जाता है।

(2) मूल संमक और संघटको की इकाई–योज्य मॉडल में सभी संघटक मूल संमक की इकाई में व्यक्त किये जाते है। जबकि गुणात्मक मॉडल में केवल दीर्घकालीन प्रवृत्ति मूल संमक की इकाई में होती है और संघटक अनुपात के रूप में व्यक्त किये जाते है।

(3) पारस्परिक निर्भरता–योज्य मॉडल में सभी संघटक एक दूसरे को प्रभावित नहीं करते जबकि गुणात्मक मॉडल में इनमें पारस्परिक आश्रितता तथा बीजगणितीय सम्बन्ध होता है।

(4) दीर्घकालीन प्रवृत्ति और मौसमी परिवर्तनो का सम्बन्ध–योज्य मॉडल में दीर्घकालीन प्रवृत्ति के बढ़ने या घटने पर भी अधिकाशं मौसमी परिवर्तन स्थिर रहता है, जबकि गुणात्मक मॉडल में मौसमी परिवर्तन का दीर्घकालीन प्रवृत्ति पर अनुपात स्थिर रहता है।

काल श्रेणी के विश्लेषण में गुणात्मक मॉडल अधिक उपयुक्त माना जाता है क्योंकि सभी संघटक एक दूसरे से प्रभावित होता है।

27.6 दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन

इस प्रवृति को मापने के लिये चार प्रमुख रीतियाँ निम्न प्रकार है :–

1. मुक्त हस्त रीति
2. अर्द्ध मध्यक रीति
3. चल माध्य रीति
4. न्यूनतम वर्ग रीति

27.6.1 मुक्त हस्त वक्र रीति (The Hand Curve Method)

इस रीति में मूल काल श्रेणी को बिन्दु रेखीय पत्र पर अंकित करके एक चित्र बनाया जाता है। तथा उसके पश्चात् आकड़ो के उतार–चढाव को ध्यान में रखके उच्चावचनों के लगभग गुजरता हुआ एक सरलित वक्र खीचां जाता है। यही वक्र मुक्त हस्त रीति द्वारा दीर्घकालिन प्रवृत्ति या उपनति का प्रदर्शित करता है।

इसे **बिन्दुरेखीय रीति** भी कहते है अथवा **निरीक्षण द्वारा वक्र अन्वायोजन की रीति** भी कहते है। यह एक सरतम रीति है, क्योंकि इसमें जटिल गणितीय क्रियाओं का प्रयोग नहीं होता है। परन्तु इस रीति के दोष निम्नलिखित है –

(1) विषयगत रीति – सरलित वक्र खीचने में व्यक्ति के पक्षपात और पूर्वाग्रहो का प्रभाव पड़ सकता है।

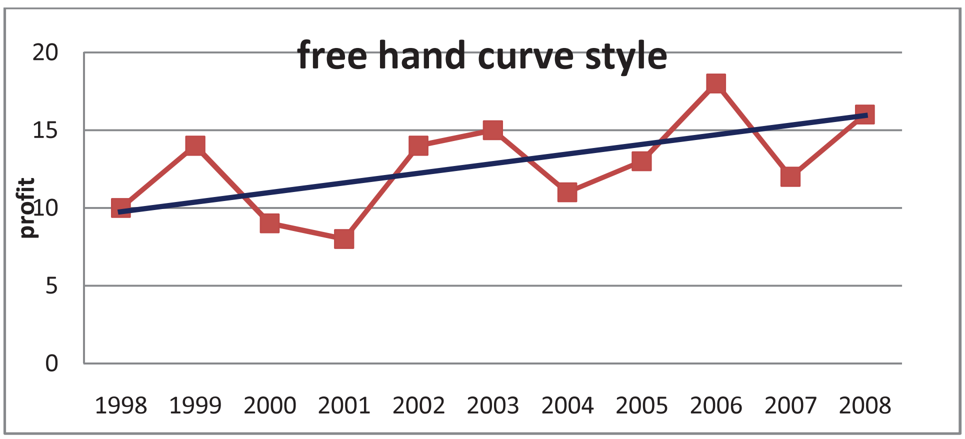
(2) इस रीति में परिशुद्धता का अभाव होता है।

(3) पूर्वानुमान में खतरा

उदाहरण :–

वर्ष	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
लाभ	10	14	9	8	14	15	11	13	18	12

हल :– वर्षों की संख्या के आधारपर एक बिन्दुरेखीय ग्राफ अंकित किया जाता है तथा मुक्त हस्त द्वारा एक सीधी रेखा अंकित की जाती है।



27.6.2 अर्द्ध मध्यक रीति (Semi Average Method)

इस रीति का अर्थ है–श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग (पूर्वाद्व तथा उत्तराद्वं) के मूल्यों का समान्तर माध्य इस रीति के द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार से है–

(1) काल श्रेणी का दो समान भागें में विभाजन – ऐसा करने के पश्चात् प्रत्येक भाग का माध्य निकालकर उस भाग के मध्य का समय बिन्दु के सामने रखा जाता है।

(2) दो माध्यों की गणना–दोनों समान भागों का अलग–अलग समान्तर माध्य ज्ञात कर लेते है। इस माध्यों को ही अर्द्धमध्यक कहते है।

(3) ग्राफ पेपर पर मूल बिन्दुओं का अंकन पहले अर्द्धमध्यक का बिन्दु पहले भाग के समय के माध्यका बिन्दु के ऊपर और दूसरे अर्द्धमध्यक का बिन्दु के ऊपर लगाया जाता है।

(4) प्रवृत्ति सेवा – उपलब्ध सरल रेखा ही अर्द्धमध्यक रीति द्वारा प्राप्त प्रवृत्ति रेखा है। यदि मूल्यों की संख्या विषम हो तो बिल्कुल बीच के संमक को छोड़ दिया जाता है शेष क्रिया पूर्वरत रहता है।

उदाहरण 2:– निम्न संमकों से अर्द्धमध्यक रीति का प्रयोग करते हुए दीर्घकालीन प्रवृत्ति निर्धारित कीजिए तथा 2002 के मूल्य का अनुमान कीजिये–

वर्ष	1995	1996	1997	1998	1999	2000
उत्पादन	40	48	44	60	56	64

हल :– यहाँ कुछ 6 वर्षो के मूल्य दिये गये है इन्हें दो बराबर के भाग 3–3 वर्षों के होंगे और उनके माध्यम निकालकर बिन्दुओं पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति रेखा खींची जायेगी।

Year	**production**	**3 Year semi total**	**Semi Avg.**
1995	40		
1996	48	132	$\frac{132}{3} = 44$
1997	44		
1998	60		
1999	56	180	$\frac{180}{3} = 60$
2000	64		

वर्ष 1999 के लिये अर्द्ध माध्य = 60

वर्ष 1996 के लिये अर्द्ध माश्य = 44

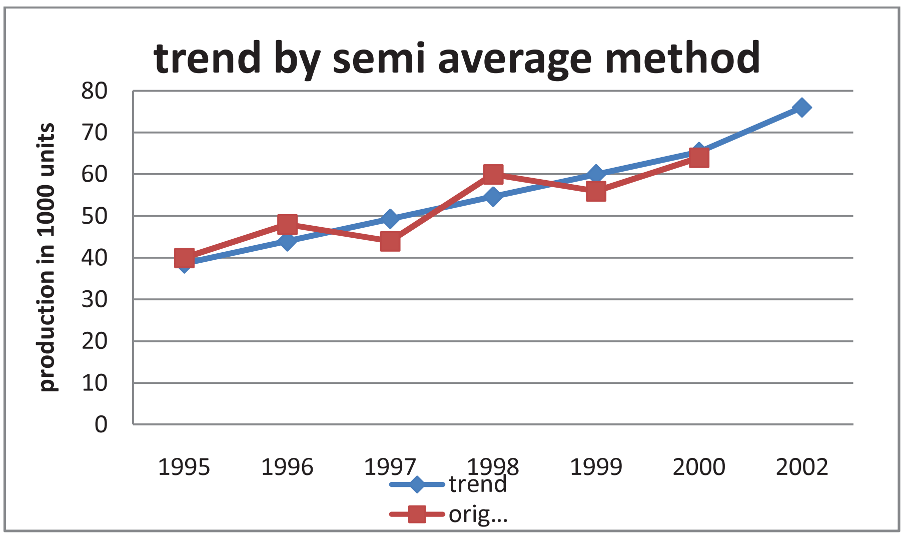
वार्षिक वृद्धि $\frac{16}{3} = 5.33$.

प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

वर्ष		उत्पादन
1995	44–5.33	38.67
1996		44
1997	44+533	49.33
1998	60–5.33	54.67
1999		60
2000	60+5.33	65.33

उपर्युक्त गणना के आधार पर 2002 का मूल्य

= 1999 का अर्द्ध मूल्य + 5.33 X 3 = 60 + 16 = 76



अर्द्ध मध्यक रीति के गुण –

1. सरलता
2. वस्तुनिष्ठता एवं निश्चितता
3. पूर्व या भावी अनुमान

दोष :–

(1) **रेखीय प्रवृत्ति**–यह रीति तभी प्रयोग हो सकती है जब दीर्घकालीन प्रवृत्ति लगभग रेखीय है।

(2) **चरम मूल्यों का प्रभाव**– मूल्य बहुत बड़े या छोटे होने पर अद्ध मध्यकों पर प्रभाव पड़ता है। और प्रवृत्ति रेखा उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर पाती।

27.6.3 चल माध्य रीति : -

यह एक लोचपूर्ण रीति है। जिसके अन्तर्गत दीर्घकालीन प्रवृत्ति को सरलता एवं प्रर्याप्त शुद्धता से ज्ञात किया जा सकता है।

यह रीति एक समान्तर माध्यों की श्रृख्लां है इसमें काल श्रेणी के निरन्तर अगले अतिव्यापी भाग के लिये समान्त माध्यों की गणना की जाती है।

यदि a, b, c, d, e & f छः वर्ष है और इनमें तीन वर्षीय चल माध्यों की गणना करनी है तो यह गणना इस प्रकार की जायेगी।

$$\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}$$

मूल प्रश्न यह उठता है कि कितने वर्षों का चल माध्य निकाला जाये–जैसे तीन वर्षीय, चार वर्षीय इत्यादि। चल माध्य की ग्णना की दृष्टि से प्रश्नों को दो भागें में बांटा जा सकता है–विषम अवधि चल माध्य एवं सम अवधि चल माध्य।

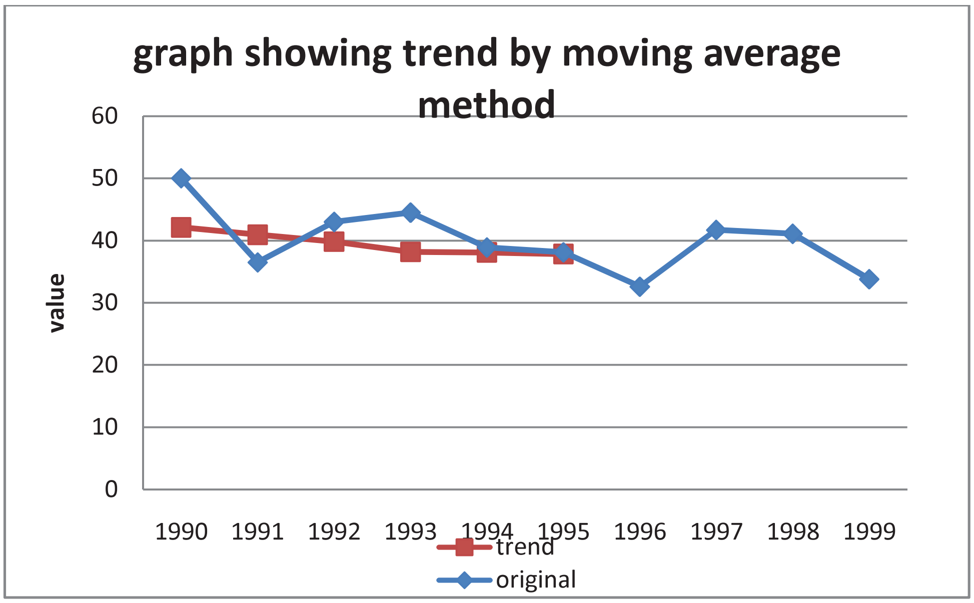
उदाहरण 3 –निम्न समंको से 4 वर्षीय चलमाध्य की गणना कीजिये और प्रवृत्ति को बिन्दुओं पत्र पर अंकित कीजिए।

वर्ष	मूल्य	वर्ष	मूल्य
1990	30.0	1995	38.10
1991	36.5	1996	32.60
1992	43.0	1997	41.70
1993	44.5	1998	41.10
1994	38.9	1999	33.80

हल– Calculation of trend Values by 4 yearly moving average –

year	value	4 yearly moving tables	2 yearly moving tables	Moving Average
1990	50.0			
1991	36.5	174.00		
			336.9	

1992	43.0	162.90	327.4	42.11
1993	44.5	164.50	318.6	40.93
1994	38.9	154.10	305.4	39.83
1995	38.1	151.30	304.8	38.18
1996	32.6	153.50	302.7	38.10
1997	41.7	149.20		37.84
1998	41.7			
1999	33.8			



चल माध्य की अवधि :–

जितनी अधिक अवधि का चल माध्य होग, उतनी ही अनियमित उच्चावचनों की ग्हनता उतनी ही कम होती जायेगी अतः यदि अनियमित उच्चावचनों को कम करना हो तो लम्बी अवधि का चल माध्य लेना चाहिये।

परन्तु ऐसा करने मे एक दोष उत्पन्न होता है वह यह कि लम्बी अवधि का चल माध्य लेने पर प्रवृत्ति मूल्य वास्तविकता मूल्यों से उतनी ही दूर होते चले जायेंगे। अतः माध्य की अनुकूलतम अवधि वह होती है जो काल श्रेणी में विद्यमान चक्रीय अवधि के बराबर या गुणांक में है। ऐसा करने से चक्रीय विचरण अनियमित उच्चारण लग्भग कम हो जाते है। और प्रवृति मूल्य का श्रेष्ठ सम्भावित मान मिल जाता है।

चल माध्य रीति के गुण :–

1. सरल

2. वस्तुनिष्ठता एवं निश्चिचता

3. लोचदार–ने मूल्य बढ़ने पर सभी गणनाएँ पुनः नही करनी होती वरन् कुछ अतिरिक्त माध्य बढ़ जाते है।

4. चक्रीय उच्चावचनों का उन्मूलन–यह तब संभव है जब चल माध्य का अवधि काल श्रेणी के चक्र की अवधि को ध्यान में रखकर निर्धारित कर ली जाये।

5. चरम मूल्यों का प्रभाव जिसके कारण प्रवृत्ति मूल्यों को उचित प्रकार ज्ञात नही किया जा सकता।

यदि काल श्रेणी में उच्चावचनों नियमित हो तो यह रीति सर्वश्रेष्ठ मानी जाती है।

27.6.4 न्यूनतम वर्ग रीति -

यह रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति को ज्ञात करने की सर्वश्रेष्ठ रीति माना जाता है। इसके अन्तर्गत गणितीय समीकरणें के प्रयोग द्वारा न्यूनतम वर्ग मान्यता के आधार पर श्रेणी के लिये सर्वाधिक उपयुक्त रेखा खींची जाती है। यह रेखा सरल या परवलयिक वक्र का रूप ले सकती है।

इस रीति को न्यूनतम वर्ग रीति इसलिये कहा जाता है क्योंकि इस रीति के आधार पर खींजी गयी प्रवृत्ति रेखा से मूल संमको के बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का योग अन्य किसी भी रेखा की तुलना में न्यूनतम होता है।

इस रीति के आधार पर प्रवृत्ति निर्धारण को तीन वर्गें में बाटा जा सकता है :–

1. सरल रेखा प्रवृत्ति अन्वायोजन।
2. परवलय वक्रीय अथवा अरेखीय अप्रवृत्ति अन्यायोजन।
3. अर्द्ध लघुग्णकीय या घातांकीय वक्र।

(A) सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन : -

इसके अन्तर्गत निम्न आधारभूत समीकरण का प्रयोग किया जातजा है।

$y_c = a + bX$ $\qquad Y_c$ = अभष्टि उपनत्ति मूल्य

X = समय की इकाई

अचर मूल्य a, b के इस प्रकार की जाती है

(1) दीर्घ रीति द्वारा (2) लघु रीति द्वारा

दीर्घ रीति—समय बिन्दुओं के लिये आरम्भ से क्रम संख्याएँ (1, 2, 3, ...आदि) प्रयुक्त की जाती है। ये क्रम संख्याएं X द्वारा व्यक्त की जाती है और इनका योग $(\sum X)$ कर लिया जाता है।

1. क्रम संख्याओ के वर्गों का योग $(\sum X^2)$ निकाला जाता है।
2. X और मूल समंको y के मूल्यों की गुणा करके उनका जोड़ $(\sum Xy)$ प्राप्त किया जाता है।
3. y मूल्यो का जोड़ $(\sum X)$ प्राप्त किया जाता है।
4. $\sum X, \sum X^2, \sum Xy, \sum y,$ निकालने के बाद निम्न समीकरणों के द्वारा और के मूल्य निकाले जाते है।

$$\sum y = Na + b\sum X$$

$$\sum Xy = a\sum X + b\sum X^2$$

a और b प्राप्त करके सरल रेखा के आधारभूत समीकरण को प्रयोग करके प्रवत्ति मूल्य निकाला जाता है।

लघु रीति—प्रवृत्ति निकालने के लिये यदि मध्यका वर्ष को मूलबिन्दु (O) माना जाये तो ग्णन क्रिया अत्यन्त सरल हो जाता है। $\sum xy$ शून्य हो जाता है, अतः

$$\sum y = Na$$

$$\sum xy = b\sum x^2$$

अतः $a = \frac{\sum y}{N}$ $\qquad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$

उदाहरण 4—काल श्रेणी के निम्न संमकों से न्यूनतक वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए।

Year	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Sales	5	7	9	10	12	17

Year	y	X	Xy	X^2	y_c
2001	5	1	5	1	2.4+2.17X = 4.47
2002	7	2	14	4	2.4+2.17X2 = 6.74
2003	9	3	27	9	2.4+2.17X3 = 8.91
2004	10	4	40	16	2.4+2.17X4 = 11.08
2005	12	5	60	25	2.4+2.17X5 = 13.25
2006	17	6	102	35	2.4+2.17X6 = 15.42

$N = 6,\ \sum y = 60,\ \sum x = 21,\ \sum xy = 248,\ \sum x^2 = 91$

–

$$\sum y = Na + b\sum x$$

$$60 = 6a + 21b$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

$$248 = 21a + 91b$$

दोनो समीकरणों को हल करने पर –

$$420 = 42a + 147b$$

$$\underline{496 = 42a + 182b} \qquad \text{(2 से गुणा करने पर)}$$

$$-76 = -35b$$

का मान (1) पर रखने पर –

$$60 = 6a + 21 \text{ x } 2.17$$

$$a = \frac{14.43}{6} = 2.4$$

$$y_c = 2.4 + 2.17x$$

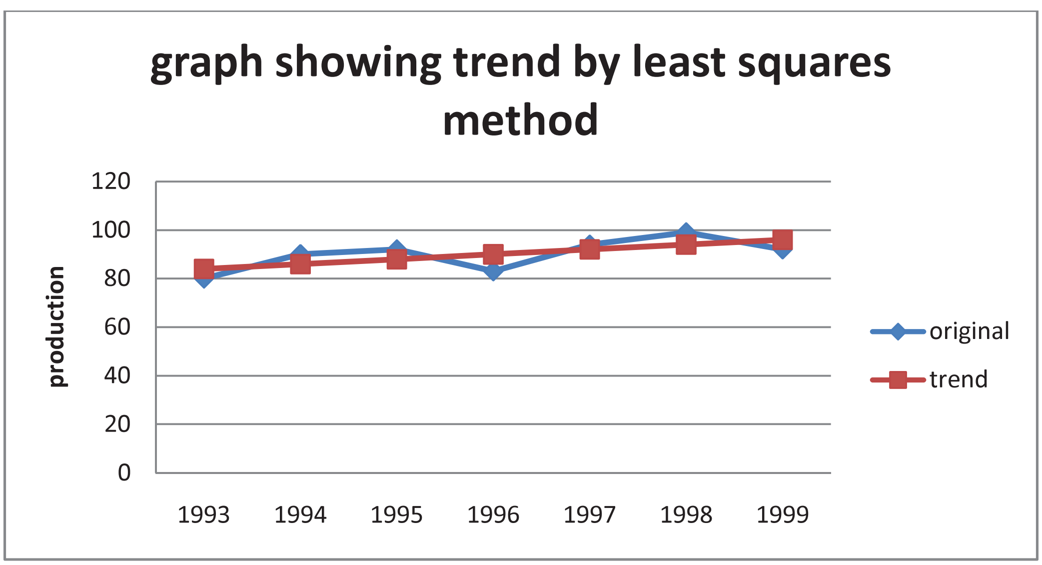
उदाहरण 5– न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निम्नलिखित संमको की सरल रेखीय प्रवृत्ति का अन्वायोजन कीजिए।

Year	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Sales	80	90	92	83	94	99	92

Year	Prood (y)	Deviation from 1996 (X)	Square X^2	Xy	TRend Value a + bX = y0
1993	80	-3	9	-240	90 + 2X-3 = 84
1994	90	-2	4	-180	90 + 2X-2 = 86
1995	92	-1	1	-92	90 + 2X-1 = 98
1996	83	0	0	0	90 + 2X+ = 90
1997	94	1	1	94	90 + 2X1 = 92
1998	99	2	4	198	90 + 2X2 = 96
1999	92	3	9	276	90 + 2X3 = 96
N = 7	$\sum y = 630$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 28$	$\sum xy = 56$	$\sum y_c = 630$

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{630}{7} = 90 \quad , \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{56}{28} = 2$$

$y_c = 90 + 2x$



B. परवलय–वक्रीय अथवा अरेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन

कभी कभार ऐसी स्थिति होती है जहाँ सरल रेखा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का यथार्थ रूप में प्रस्तुतिकरण नहीं कर पाती। ऐसी स्थिति में प्रवृति निकालने के लिये निश्चित घात का परवलयिक वक्र या ऐकन्द्रित वक्र खीचंना पड़ता है। उदाहरण के लिये द्वितीय घात के परवलयिक वक्र को स्पष्ट करना चाहे तो इसका मूल समीकरण निम्न प्रकार से है –

$$y = a + bX + cX^2$$

यहाँ a, b, c अचल मूल्य है, जिन्हें ज्ञात करने के लिये निम्न समीकरणों का प्रयोग किया जाता है।

$$\sum y = Na + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + bx\sum x^2 + cx\sum x^2$$

$$\sum x^2y = ax\sum x^2 + + bx\sum x^3 + c\sum x3$$

यदि विचलन काल श्रेणी के ठीक माध्य से लिया हो तो $\sum x = 0$ का मान शून्य हो जायेगा और उपर्युक्त समीकरण सरल रूप से निम्न हो जायेंगा।

$$\sum y = Na + c\sum x^2$$

$$\sum xy = b\sum x^2$$

$$\sum x^2y = a\sum x^2 + c\sum x4$$

यहाँ $\sum x^3$ इसलिये समाप्त हो ग्या है, क्योंकि $\sum x = 0$ होगा तो $\sum x^3$ का मान भी शून्य हो जायेगा।

उदाहरण–निम्न आंकड़ो के लिये द्वितीय कोटि का परवलयिक वक्र अन्वायोजित कीजिए–

Year	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**
Value	10	12	113	10	8

Year	y	X	X^2	X^3	Xy	Xy	X^2y
1996	10	-2	4	-8	16	-20	40
1997	12	-2	1	-1	1	-12	12
1998	13	0	1	0	0	0	0
1999	10	1	1	-1	1	10	10
2000	8	2	4	-8	16	16	32
N = 5	$\sum y = 53$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 10$	$\sum x^3 = 0$	$\sum xy = 34$	$\sum xy = -6$	$\sum x^4 y = 94$

यहाँ पर $\sum x$ और $\sum x^3$ का योग 0 है।

$\sum y = Na + c\sum x^2$ or $53 = 5a + 10c$

$\sum xy = b\sum x^2$ or $-6 = 10b$

$\sum x^2 y = a\sum x^2 + c\sum x4$ or $94 = 10a + 34c$

समी० (2) में $10b = -6$ or $b = -0.6$.

समी० (1) में 2 से गुणा करने पर और समी (3) से घटाने पर –

$$\begin{array}{l} 94 = 10a + 34c \\ \underline{106 = 10a + 20c} \\ -12 = 14c \end{array}, \quad c = \frac{-12}{14} = 0.85$$

समी० (1) में c का मान रखने पर –

$53 = 5a + 10x - 0.857$

$53 + 8.57 = 5a$ or $5a = 61.57$

$a = 12.314$

$y = a + bx + cx^2$

$= 12.314 + (-0.6)\ x\ (-0.85)x^2$

$= 12.314 - 0.6x - 0.857x^2$

वर्ष **X** गणना प्रवृत्ति मूल्य (y_c)

1996	-2	= 12.314 – 0.6X – 0.857 -	= 10.08
1997	-1	2^2	= 12.05
1998	0	= 12.314 – 0.6 X – 1 –	= 12.314
1999	1	0.857 X 1^2	= 10.85
2000	2	= 12.314	= 7.68
		= 12.314 – 0.6 X 1 -0.857	
		X1^2	
		= 12314 -0.6 X 2 – 0.857	
		X 2^2	

C- अर्द्ध–लघुग्णकीय या घातांकीय चक्र –

यदि काल श्रेणी में डाक स्थिर प्रतिशत की दर से वृद्धि या कमी होता है तो अर्द्ध लघुगुणकीय अथवा घाताकीय वक्र का प्रयोग उचित रहता है।

समी०

a और b के मान की ग्णना के लिये निम्न समी० का प्रयोग किया जाता है–

$$\sum(\log y) = N \log a + \log b \text{ x} \sum x$$

$$\sum(\log y) = \log a \text{ x} \sum x + \log b \text{ x} \sum x^2$$

यदि मूल बिन्दु मध्यका से लिये जाते है। तो उर्पयुक्त सूत्र की निम्न रूप से संक्षिप्तीकृत हो जाते है –

$$\sum(\log y) = N \log a \quad \text{or} \quad \log = \frac{\sum \log y}{N}$$

$$\sum(x \log y) = \log b \sum x^2 \quad \text{or} \quad \log b = \frac{\sum(x \log y)}{\sum x^2}$$

यह वक्र सरल रेखा के रूप में ही बनता है यदि इसे अर्द्ध लघुगणकीय ग्राफ पर अंकित किया जाये लेकिन सामान्य ग्राफ पर यह वक्र अरेखीय हो जाता है।

न्यूनतम वर्ग रीति के लाभ :–

1. पूर्णता वस्तुनिष्ठ
2. पूर्वानुमान की सुविधा
3. पूरी अवधि के लिये प्रवृत्ति ज्ञात हो जाती है।
4. सर्वोपयुक्त रेखा
5. परिवर्तन दर की जानकारी

सीमाएँ :–

1. कठिन एवं जटिल रीति
2. लोच का अभाव
3. समीकरण का ग्लत चुनाव
4. भावी पूर्वानुमान की सीमाएँ क्योंकि इसमें मौसमी चक्रीय आदि उच्चावचनो को ध्यान में नही रखा जाता।

27.7 अल्पकालीन उच्चावचना का माप

काल श्रेणी पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति और अप्लकालीन उच्चवचनों दोनो का ही सामूहिक प्रभाव पड़ता है। अतः चल माध्य या न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निकाल ग्ये प्रवृत्ति सहायक को मूल श्रेणी में से कर दिया जाये तो अल्पकालीन उच्चावचन शेष रह जाता है। इनको मापने की **प्रमुख रीतियां** निम्न प्रकार से है –

a) सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण
b) चल माध्य द्वारा आर्त्तव विचरण
c) श्रृखंला मूल्यानुपात रीति
d) प्रवृत्ति अनुमान रीति
e) चल माध्य अनुपाल रीति

27.7.1 सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण आत्तर्व विचरण निकालने की यह सबसे सरल रीति है। इसका प्रयोग अधिकतर 12 मास आंकड़ो से ऋतुनिष्ठता का

माप करने के लिये किया जाता है। यह रीति उस परिस्थिति में उपयुक्त है जहाँ आँकडो में कोई सुनिश्चित दीघकालीन प्रवृति स्पष्ट रूप से दृष्टिगेचर न हो।

$$\text{ऋतुनिष्ठ विचरण सूचकांक} = \frac{\text{ऋ तुकालिक मा ध्य}}{\text{सामान्य मा ध्य}} \text{ X } 100$$

उदाहरण निम्न संमको से ऋतुनिष्ठ सूचकाकों की गणना कीजिए –

Year	**Jan**	**Feb**	**Mar**	**Apr**	**May**	**June**	**July**	**Aug**	**Sep**	**Oct**	**Nov**	**Dec**
2004	15	16	18	23	23	23	20	28	29	33	33	38
2005	23	22	28	31	31	28	22	28	32	37	34	44
2006	25	25	35	36	36	30	30	24	38	48	41	53

Calculation of seasonal variation indices by monthly average.

Month	**1998**	**1999**	**2000**	**Total**	**Montly Avg**	**Seasonal India No.**
Jan	15	23	25	63	21	70
Feb	16	22	25	63	21	70
Mar	18	28	35	81	27	90
Apr	18	27	36	81	27	90
May	23	21	36	90	30	100
Jun	23	28	30	81	27	90
July	20	22	30	72	24	80
Aug	28	28	34	90	30	100
Sept	29	32	38	99	33	110
Oct	33	37	47	117	39	130
Nov	33	34	41	108	36	120
Dec	38	44	53	135	45	150
Total				1080	360	1200
Avrage				90	30	100

आर्त्तव विचरण निदेशांक = $\frac{\text{मासिक माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}}$ X 100.

जैसे जनवरी = $\frac{21 \times 100}{30} = 70$ आदि

27.7.2 चल माध्य द्वारा मौसमी विचरण – यदि काल श्रेणी के मूल संमको पर उपनति का भी प्रभाव हो तो चल माध्यों का प्रयोग करके मौसमी विचरणों का मापन किया जा सकता है। इस रीति का यह विशेष्ज्ञ लाभ है कि इसके द्वारा लग्भग सभी प्रकार के विचरणों, प्रवृत्ति अल्पकालिक परिवर्तन तथा ऋतुनिष्ठ एवं अनियमित या दैव उच्चारण का विश्लेषण हो जाता है। यह रीति काल श्रेणी विश्लेषण के योगशील निदर्श पर आधारित है।

27.7.3 श्रंखला मूल्यानुपात विधिः– मौसमी विचरण का विश्लेषण करने की यह एक सन्तोषजनक रीति है। इसके अनुसार पहले मौसम के श्रृखलानुपात परिग्णित किये जाते है तथा फिर उनमें से अवशिष्ट प्रवृत्ति निकाल ली जाती है। इसकी क्रिया विधि इस प्रकार है–

1. प्रत्येक मौसमी का निम्न सूत्र द्वारा श्रृखला मूल्यानुपात ज्ञात किया जायेग।

$$\text{श्रंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित ऋतु मूल्य}}{\text{पिछला ऋतु मूल्य}}$$

2. प्रत्येक अवधि के श्रृंखला मूल्यानुपातो को समान्तर माध्य निकाला जायेग।
3. उक्त श्रृंखला मूल्यानुपात माध्यों का प्रथम कालाविधि अधिक पर श्रृंखला सूचंकाकों में बदला जायेगा।

   प्रचलित ऋतु का श्रृंख्ला सूचकांक =.

   CR = Chain Relative (श्रृखंला सूचकांक)

   ALR = Link Relation (श्रृखंला मूल्यानुपात का माध्य)

अन्तिम अवधि को आधार मानकर प्रथम अवधि का श्रंखला सूचकांक निकाला जायेगा।

$$\text{प्रथम ऋतु का संगणित (R)} = \frac{\text{अन्तिम ऋतु का LR प्रथम ऋतु का A.L.R}}{100}$$

27.7.4 प्रवृत्ति अनुपात विधि – यह रीति गुणनात्मक निदर्श पर आधारित है। प्रवृति को अधिक महत्व देती है और गणना क्रिया जटिल होने केकारण इसका प्रयोग भी कम किया जाता है।

27.7.5 चल माध्य अनुपात विधि – मौसमी विचरण ज्ञात करने की यह विधि इस प्रकार है।

1) सर्वप्रथम 12 मासिक या 4 त्रैमासिक चल माध्य निकाले जाते है।

2) प्रत्येक मूल संमक 0 का तत्सांदी चल माध्य (7Xc) पर अनुपात प्रतिशत के रूप में निकाला जाता है।

3) $$\frac{O}{T \times C} \times 100 = \frac{T \times S \times C \times I}{T \times C} = S \times I \times 100$$

4) विभिन्न अवधियों में सम्बन्धित चल माध्यानुपानों के समान्तर माध्य निकाले जायेंगे। ऐसा करने से अनियमित उच्चावचन काफी सीमा तक दूर हो जाते है।

5) अन्त में मौसमी विचरणों के सामान्य समान्तर माध्य को आधार मानकर सभा कालावधिकया के मौसमी सूचकांक प्राप्त कर लिये जायेंगे।

उदाहरण – चल माध्य अनुपात विधि द्वारा मौसमी विचरण सूचकांक को गणना कीजिए।

चल माध्य अनुपात द्वारा आर्तव विचरण सूचकांको की ग्णना

वर्ष	ऋतु	मूल संमक	त्रेमासिक चल माध्य	चल माध्य अनुपात	आर्त्त सूचकांक
1	ग्रीष्म	30	-	-	39.75
	मानसून	81	-	-	118.75
	शरद	62	73	(62÷73)X100 = 85	83.50
	शीत	119	73	(62÷73)X100 = 155	158.00
2	ग्रीष्म	33	83	(33÷83)X100 = 40	39.75
	मानसून	104	92	(104÷92)X100 = 113	118.75
	शरद	86	100	(86÷100)X100 = 86	83.50
	शीत	171	107	(171÷107)X100 = 160	158.00
3	ग्रीष्म	42	115	(42÷115)X100 = 37	39.75

	मानसून	153	123	(153÷ 123)X100 =	118.75
	शरद	99	131	124	83.50
	शीत	221	135	(99÷131)X100 = 76	158.00
				(221÷155)X100 = 164	
4	ग्रीष्म	56	141	(56÷141)X100 = 40	39.75
	मानसून	172	146	(172÷146)X100 = 118	118.75
	शरद	235	149	(129÷149)X100 = 87	83.50
	शीत	67	154	(86÷154)X100 = 42	158.00
5	ग्रीष्म	67	159	(67÷159)X100 = 42	39.75
	मानसून	201	168	(201÷168)X100 = 120	118.75
	शरद	136	-	-	83.50
	शीत	302	-	-	158.00

त्रैमासिक अवधि

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत	
1	—	—	85	155	
2	40	113	86	160	
3	37	124	76	164	
4	40	118	87	153	
5	42	120	—	—	
योग	**159**	**475**	**334**	**632**	**योग**
औसत	**39.75**	**118.75**	**83.5**	**158.00**	**400**

काल श्रेणी का महत्व

(1) भूतकाल के व्यवहार का विश्लेषण—इस आधार पर व्यवहारों को नियन्त्रण करने की सुव्यवस्था हो सकती है।

(2) भविष्य के विषय में अनुमान—इसके बारे में बर्नर हिर्श का कहना है, काल श्रेणा का विश्लेषण करने का मुख्य उद्देश्य भावी घटनाओं की गतिविधि का वास्तविक अनुमान लगने के लिये आर्थिक तथ्यों में होने वाली परिवर्तनो को समझना, समझाना एवं मूल्याकिंत करना है।

(3) तुलनात्मक अध्ययन–दो या दो से अधिक सम्बन्धित समय अवधियों के संमकों का तुल्नात्मक अध्ययन करना सम्भव हो जाता है।

(4) व्यायापर चक्रों का अनुमान–चक्रीय उच्चावचनों के आधार पर व्यापार चक्रों का अनुमान लगाया जा सकता है। व्यवसायों अपनो क्रियाओं को नियोजित कर सकता है।

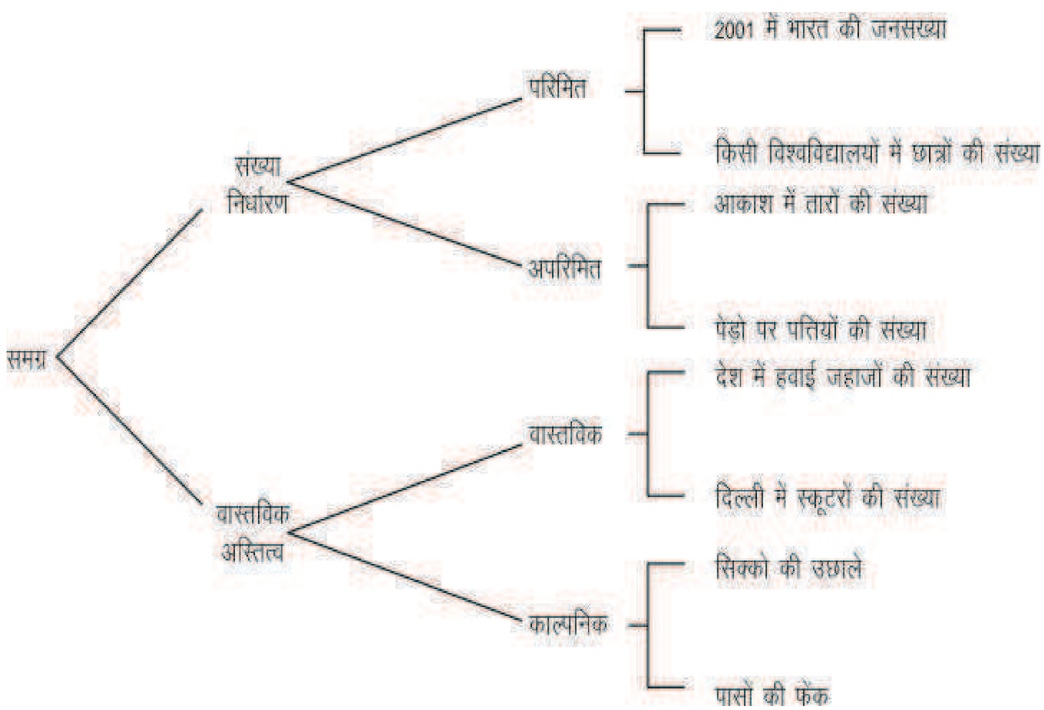
अन्य साख्यिंकीय उपकरणों की भॉति काल श्रेणी विश्लेषण भी अनुमानित एंव सामान्य परिणाम तथा संकेत प्रदान करता है।

27.8 समग्र या समस्टि एवं प्रतिदर्श

समग्र से आशय अनुसार–धान के लिये निर्धारित उस पूरे क्षेत्र या सभी इकाइयों से है जिनके बारे में जानकारी प्राप्त करनी होती जिसमें सामान्य विशेषताएँ होती है। और इसमें से ही कुछ इकाइयां अध्ययन हेतु चुनी जाती है। डाक समग्र का आकार निधारित क्षेत्र के अनुसार छोटा या बड़ा हो सकता है– जैसे उत्तर प्रदेश के कुछ उद्योग कन्धे, भारतीय विश्वविद्यालयो में छात्रों की कुल संख्या।

हेम वर्ग के अनुसार– "एक सांरिव्यकीय अनुन्धान के अन्तर्गत आने–वाले पदो अथवा तत्वो के सम्पूर्ण समूह को समग्र कहते है।"

27.8.1 समग्र के प्रकारः–



समग्र के प्रकारों को दो आधारो पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

1. संख्या निर्धारण के आधार पर
2. वास्तविक अस्तित्व के आधार पर

(1) संख्या निधरिण के आधार पर

(i) **परिमित समग्र -** ऐसे समग्र जिनकी इकाइयों की संख्या निश्चित है एवं इनकी ग्णना की जा सकती है। उसे परिमित समग्र कहते है। जैसे– किसी पुस्तकालय में पुस्तकों की संख्या विद्यालयों में छात्रों की कुल संख्या किसी शहर के औधोगिक क्षेत्र में कर्मियों की संख्या आदि।

(ii) **अपरिमित समग्र -** इसके अन्र्तग्त कुल इकाइयों की संख्या अनिश्चित होती है। अर्थात् इतनी बड़ी होती है कि व्यवहारिक दृष्टि से उनकी ग्णना करना सम्भव नहीं होता– जैसे आकश में तारे की की संख्या, सिर पर बालो की संख्या आदि।

(2) वास्तविक अस्तित्व के आधार पत्र

(i) वास्तविक समग्र इसमें सभी इकाइयाँ ठोस रूप में या मूर्त रूप में विद्यमान होती है जैसे देश में हवाई जहाजों की संख्या, भारत में करदाताओं की संख्या आदि।

(ii) काल्पनिक या सदान्तिक समग्र इसका आशय जैसे समग्र से है जो वास्तव मे मूर्त रूप में प्रतिदर्शन की सहायक से प्राचल का अनभिनत अनुमान लगया जाता है और उस अनुमान की विश्वसनीयता आंकी जाती है।

27.9 प्रतिचयन सिद्वान्त के उद्देश्य

प्रतिचयन सिद्वान्त का सबसे महत्वपूर्ण उद्देश्य यह है कि किसी विचारधीन समस्या के सम्बन्ध मे कम से कम समय, व शक्ति खर्च करके अधिक से अधिक जानकारी प्राप्त करता है। प्रतिचयन के अन्तर्ग्त एक और न्यादर्श के आधार पर सम्ग्र के लक्षणों का अनुमान लगना तथा दूसरी ओर इन अनुमानो का विश्वसनीयता का मूल्याकंन करना है। प्रतिचयन के मुख्य उद्देश्य निम्न प्रकार है।

(1) प्राचलों का अनुमान– प्रतिचयन का मुख्य उद्देश्य प्रतिदर्श का अध्ययन करके पूरे समग्र का बारे में कम से कम समय मे और कम खर्च से अधिकाधिक यथार्थ सूचना

उपलब्ध करना है। अर्थात् प्रतिदर्शन से प्राचल का अनिमनत अनुमान लगनी ही प्रतिचयन सिद्वान्त का प्राथमिक उद्देश्य है।

(2) बिन्दु अनुमान– प्रतिदर्शन से जब प्राचल का एकल या एकमात्र अनुमान लगया जाता है तो वह बिन्दु अनुमान कहलाता है। यह अनुमान अनमिनत एवं विश्वसनीय होना चाहिये। परन्तु वास्तव मे ऐसा नही हो पाता अतः इसका कम प्रयोग किया जाता है। विद्यमान नहीं होती है और जिसकी इकाइयों की केवल कल्पना ही की पाती है, जैसे जिसको को उछाल, पासे का फेंका जाना आदि।

27.10 प्रतिदर्श या न्यादर्श

समग्र में शामिल प्रत्येक इकाई प्रतिचयन इकाई कहलाती है एवं समग्र की इन्ही इकाइयों में से प्रतिदर्श चुना जाता है। यह किसी समग्र विशेष का प्रतिबिम्ब या समान दिखाई देने वाला नमूना होता है।

सिम्पसन व काफका के अनुसार प्रतिदर्श समष्टि की विशेषताओं का प्रतिबिम्ब है, वह एक लघु समग्र या समष्टि की विशेषताओं का प्रतिबिम्ब है, वह एक लघु समग्र या समष्टि का अपसमुच्चयं होता है। अतः प्रतिदर्श समग्र का एक सेवा लघु रूप है जो अनुसंधान हेतु सुविधानुसार चुना जाता है।

उदाहरण के लिये हरिद्वार में आद्योग्कि श्रमिकों की आर्थिक दशा का सर्वेक्षण कसा है तो यदि हरिद्वार के कुछ औधोगिक श्रमिकों का चयन करके अध्ययन किया जाय तो उसे न्यादर्श या प्रतिदर्श कहा जायेग।

27.11 प्राचल एवं प्रतिदर्शन

समग्र की सभी इकाइयों के अभिलक्षणों के सांरिव्यकीय मान प्राचल कहलाते है जबकि समष्टि से चुने ग्ये प्रतिदर्श की इकाइयों के अभिलक्षणों से परिकलित संख्यिकी माप प्रतिदर्शन कहलाते है।

तात्पर्य यह है कि यदि समग्र की सभी इकाइयों के सांख्यकीय माप जैसेः– प्रमाप विचलन, माध्य, सह सम्बन्ध गुणाक आदि निकाले तो इन मापों को प्राचल कहते है जबकि सम्र मे से कुछ इकाइयां चुनकर उनके माध्य आदि निकाले तो प्रतिदर्शन कहलाते है।

(1) **अन्तराल अनुमान–** समग्र के प्राचल का ऐसा अनुमान जो दो सीमाओं के मध्य निर्धारित किया गया, अन्तराल अनुमान कहलाता है। जैसे एक कक्षा के छात्रों का मध्यक

भार 50 किलोग्राम है। यह बिन्दु अनुमान है जबकि प्राचल का मध्यक भार का अन्तराल 50+2 है तो यह का अन्तराल अनुमान है।

(2) परिकल्पना परिक्षण प्रतिदर्श आधार पर समग्र के सम्बन्ध में किसी सुनिश्चित परिकल्पना का विधिवत परीक्षण करना है। यह भी जांच की जाती है कि अवलांकित प्रतिदर्शन व परिकल्पित प्राचल मे पाया जाने वाला अन्तर प्राचयन उच्चावचनो के कारण है या किसी अन्य कारण से।

यदि यह अन्तर प्रतिचयन उच्चावचन के कारण ही होता है तो इसे सार्थक नही माना जाता और परिकल्पना सही माना जाता है इसके विपरित, यदि कोई अन्य कारण है तो अन्तर सार्थक माना जाता है और परिकल्पना सही नहीं मानी जाती है।

संक्षेप में परिक्षण इसे जाँच करने में मदद करता है कि क्या प्रारम्भिक वचन प्रतिदर्श के अध्ययन के प्राप्त परिणामों के आधार पर उचित है या इसका खण्डन कर देना चाहिये।

27.12 प्रतिचयन बंटन

यदि एक बड़े समग्र मे से निश्चित आकार के उनके स्वतत्रं दैव न्यायदर्शी को लिया जाए और प्रत्येक न्यादर्श का अलग–अलग मान ज्ञात किया जाय तो उससे बनने वाले आवृति वितरण को प्रतिचयन बंटन (प्रतिचयण वितरण) कहा जाता है। इसी कारण इसके माध्य को भी द्वारा प्रर्दशित किया जाता है। और प्रमाप विचलन का σX से।

27.13 वितरण के प्रकार

प्रतिचयन सिद्वान्त की दृष्टि से आवृति वितरण तीन प्रकार के होते हैः–

(i) **समग्र वितरण–** इसमें पूरे समग्र का अध्ययन किया जाता है यह मान्यता ह कि माध्य व प्रमाप विचलन की पूर्ण जानकारी है। समग्र के माध्य एवं प्रमाप विचल (σ) प्राचल कहलाते है। प्रतिचयन सिद्वान्त के प्रयोग के लिये समग्र का सममित वितरण होना जरूरी रही है।

(ii) **न्यादर्श वितरण–** यदि सम्पूर्ण समग्र मे से 100 प्रतिदर्श छाँटे जाये और उनका अध्ययन किया जाय तो उसके वितरण आकार का न्यादर्श या प्रतिदर्श विवरण कहा जाता है। इसकी कोई भी रूप या आकृति हो सकती है। यहाँ माध्य को $\times$ व प्रमाप विचलन

को '5' से दर्शाते है। ये प्रतिदर्शन के माध्य प्रतिचयन वितरण के लिये कच्चो सामग्री का कार्य करते है।

(iii) **प्रतिचयन वितरण–**प्रतिचयन वितरणों का महत्व सारिव्यकीय आगमन मे प्रतिचयन बंटन का विशिष्ट महत्व है, क्योंकि इस वितरण में दो मुख्य विशेषताऐं पायी जाती है–

(iv) **प्रसामान्य या लग्भग प्रसामान्य वितरण–** यदि एक बडे सम्ग्र में से बड़े आकार के अनेक दैव न्यादर्श लिये जायें उनके प्रतिदर्शयाँ का प्रतिचयन बंटन प्रसामान्य या लग्भग प्रसामान्य होता है, चाहे मूल सम्ग्र पूर्ण प्रसामान्य न होने पर भी प्रतिचयन वितरण प्रसामान्यता की प्रवृत्ति रखता है बशर्ते प्रत्येक न्यादर्श का आकार प्रर्याप्त रूप से बड़ा हो और सम्ग्र अत्यधिक असम मितीय हो। इसकी इस विशेषता को केन्द्रीय सीमा प्रमेय भी कहा जाता है।

(v) **माध्यों की समायता–** प्रतियचन वितरण का समात्तर माध्य मूल सम्ग्र के समान्तर माध्य के समान होता है। इसके कारण सर्वोत्तम अनुमान लगया जाता है।

27.14 प्रमाप विचलन

एक प्रत्तिचयन वितरण का प्रमाप विचलन ही उसका प्रमाप विभ्रम होता है। जैसे, एक बड़े समग्र में से बड़ी मात्र में सख्या एवं दैव न्यादर्श लिये जायें और सभी न्यादर्शो के समात्तर माध्यम का आवृत्ति वितरण तैयार किया जाय तो तैयार होने वाला वितरण माध्य का न्यादर्श वितरण कहलायेग। विभिन्न प्रतिदर्शो के प्रमाप विचलनो के प्रतिदर्शो वितरण का प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन की प्रमाप त्रृटि प्रमाप विश्राम कहलाता है।

इस त्रुटि से यह ज्ञात होता है कि प्रतिदर्शनो में परस्पर अन्तर या उनका समष्टि प्राचल में अन्तर संयोग या दैव कारण से है या किसी अन्य कारण से है।

27.14.1 प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विभ्रम में अंतर

(1) प्रमाप विचलन मूल इकाइयों के समान्तर माध्य के दोनों ओर के विचरण का माप है जबकि प्रमाप विभ्रम समग्र के प्राचल से विभिन्न प्रतिदर्श मापों के विचरण का माप प्रस्तुत करती है।

(2) संकोताक्षर क प्रमाप विचलन मे σ सकेताक्षर का प्रयोग होता है जबकि माध्य के प्रमाप विभ्रम के लिये $\sigma_{\bar{X}}$ प्रमाप विचलन के प्रमाप विभ्रम के लिये σ_{σ} इत्यदि संकेत लिखे जाते है।

27.14.2 प्रमाप विभ्रम धारण की उपयोग्तिा

(1) प्राचल की सीमाओं का निर्धारण– यदि सरल दैव प्रविचयन की शर्ते पूरी हो वो प्रतिदर्शन का प्रतिदर्शी वितरण प्रसामान्य वितरण के अनुसम है।

इस आधार पर प्रमाप विभ्रम की सहायता से उन विश्वस्थता सीमाओं का निर्धारण किया जा सकता है, जिसके बीच प्राचल या अन्य सम्बन्धित प्रतिदर्शन जा के पाये जाने की निश्चितता सम्भावना रहती है।

एक प्रसामान्य वितरण की कुछ प्रचलित विश्वास्यता सीमाएँ उनके अन्तराल एवं स्तर को निम्न तालिका द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

विश्वास्यता सीमाएँ **Confidence limits**	विश्वास अन्तराल		विश्वास्यता स्तर
	Minimum	**Minimum**	
Mean $\pm 1\sigma_{\overline{X}}$	$\overline{x} - \sigma_{\overline{x}}$	$\overline{x} + \sigma_{\overline{x}}$	68.27%
Mean $\pm 2\ \sigma_{\overline{X}}$	$\overline{x} - 2\sigma_{\overline{x}}$	$\overline{x} + 2\sigma_{\overline{x}}$	95.45%
Mean $\pm 3\ \sigma_{\overline{X}}$	$\overline{x} - 3\sigma_{\overline{x}}$	$\overline{x} + 3\sigma_{\overline{x}}$	99.73%

उपर दी ग्यी तालिका कि व्याख्या इस रूप में की जा सकती है कि

$\overline{x} \pm \sigma_{\overline{X}}$ or $\overline{x} \pm$ S.E की सीमाओं में पदो 68.27% पदों की समावेश हो जाता है।

सार्थकता परिक्षणः–प्रमाप विभ्रम किसी परिकल्पना की जाँच करने का महत्वपूर्ण स्त्रोत है। इसके लिये अवलोकित (observed) मान तथा प्रत्याशित (eXpected) मान के अंतर को प्रमाप विभ्रम के एक निर्धारित क्रान्तिक मान (critical value) के आधार पर देखा जाता है। क्रान्तिक मान व स्थिरांक है जिन्हे प्रमाप विभ्रम से गुणा करते है। प्रमाप विभ्रम व क्रन्तिक मान का गुणन फल प्रतिचयन विभ्रम कहलाता है।

प्रतिचयन विभ्रम = कान्तिक मान X प्रमाप विभ्रम

सरल प्रतिचयन– सार्थकता परीक्षण का प्रयोग उसी दशा मे किया जाता है जब प्रतिचय सरल व दैव प्रकृति का हो। एक दैव प्रकृति का सरल प्रतियचन निम्न शर्तो के पूरा होने पर माना जाता है।

- प्रतिदर्श इकाइयाँ एक ही मौलिक सम्ग्र मे सो चुनी हों।
- प्रत्येक इकाईन्ट के प्रतिदर्श में शामिल होने की प्राथिकता भी समान हो।
- प्रतिदर्शा के रूप से विभिन्न इकाइयों का निकलना आपस में स्वतंत्र घटनाएं होगी।

प्रतिदर्श की विश्वसनीयता का जाँच– प्रमाप विभ्रम जितना अधिक होग, प्रत्याशित और अवलोकित मूल्यों का अंतर भी उतना ही अधिक होग और इससे प्रतिदर्श अविश्वासनीय सिद्व होगा। इसके विपरित होने पर प्रतिदर्श की विश्वसनियता बंद जायेगी।

प्रतिचयन के गुण

(1) कम खर्चीली पद्वति– एक भाग के अध्ययन करने से धन कम व्यय करना पड़ता है।

(2) समय और श्रम की बचत

(3) शुद्वता को जाँच– यदि प्रतिदर्शी का चयन दैव प्रतिचयन के आधार पर किया ग्या है तो उनकी अशुद्वियां का अनुमान भी लगया जा सकता है।

(4) विस्तृत जाँच की सुविधा– प्रतिदर्श अनुसंधान में इकाइर्यो की संख्या कम होने के कारण उनकी विस्तृत जाँच सम्भव है।

(5) विश्वसनयिताः– यदि न्यादर्श समुचित आधार पर और उचित आकार का छोटा जाये तो इसके परिणाम लग्भग वही होंग जो संग्णना अनुसंधान के होते है।

(6) विशेष अनुसंधानो की एक मात्र विधि– जहाँ समाग्र अनत्रा ही वहाँ यह एक मात्र विधि है।

(7) प्रशासनिक सुविधा– प्रतिदर्श अनुसंधान कार्य का संग्ठन और प्रशासन सुविधा जनक होता है।

संक्षेप में यह कह सकते है संग्णना की अपेक्षा प्रतिदर्श के अनेक गुण है अतः सावधानी से चयन करने पर यह सस्ती रीति ही नहीं वरन् अपेक्षाकृत सही निष्कर्ष भी देती है। प्रोफिसर रोनेल्ड फिर ने कहा है, प्रतिथयन विधि के चार प्रमुख गुण है– अनुकूलता, गति, मितव्ययिता और वैज्ञानिक प्रकृति।

विभ्रमों के गणितीय सिद्वान्त पर आधरित होने के कारण– न्यादर्श में सूक्ष्मता की धारना प्रारम्भ से ही प्रधान होती है।

27.15 प्रतिचयन की रीतियाँ

इन रीतियाँ को दो मुख्य भाग में बाटा जा सकता है।

(1) दैव प्रतिचयन (2) अदैव प्रतिचयन

प्रतिचयन की रीतियाँ

दैव प्रचियन | **अदैव प्रतिचयन**

(1) सरल दैव प्रतिचयन

(2) प्रतिबन्धित दैव प्रतिचयन

- (i) स्तरित दैव प्रतिचयन
- (ii) व्यवस्थित दैव प्रतिचयन
- (iii) बहुस्तरीप दैव प्रतिचयन
- (iv) समूह प्रतिचयन

(1) सविचार

(2) कोटा

(3) सुविधानुसार

(4) विस्तृत

27.15.1 दैव प्रतिचयन या सम्भाविता प्रतिचयन - इस अवसर प्रतिचयन भी कहते है। इसके अन्तर्गत प्रतिदर्श मे आने– वालो सभी इकाइयाँ संयोगवश चुनी जाती है क्योंकि समग्र की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श में सम्मिलित होने का समान अवसर प्राप्त होता है।

I सरल दैव प्रतिचयन

इसके अन्तर्गत समग्र की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श अथवा न्यादर्श में आने का समान अवसर प्राप्त होता है। और इसमें शामिल हरेक इकाई सदैव योग पर निर्भर करती है। अतः अनुसधानकती की इच्छा का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

ग्राहमेन के अनुसार, दैव न्यादर्श एक वैज्ञानिक व्यवस्था है यह विश्रखल विकल्प नही बताया बरन् एक सावधान पूर्व चयन है, जिसमें प्रत्येक मद क शमिल होने का समान अवसर का आश्वासन होता है।

प्रकारः– यह मात्र एक संयोग है कि कौन सा इकाइयाँ प्रतिदर्श में आ गई और कौन नहीं। कुछ प्रमुख प्रकार निम्नलिखित हैः–

1. लॉटरी रीति :– इस रीति में सभी इकाइयों की पत्तियाँ या गेलिया बनाकर किसी बर्तन में डाल दी जाती है। इसमे से निष्पक्ष व्यक्ति या व्यक्तियों द्वारा उतनी पचियां या गेलियां निकाल ली जाती है। जितनी प्रतिदिन मे शामिल की जाती है। इस रीति की विश्वनयिता बनाने के लिये ये शर्ते आवश्यक है–

- सभी पर्चिया समान आकार रंग आदि की है।
- निकलने से पहले सभी पर्चियों को अच्छी तरह से मिला लेना चाहिये।
- निकालने का कार्य निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा किया जाये।

2. डोल धुमाकर - यह रीति लाटरी रीति का सुधार रूप है। इसमें पर्चियां न बनाकर वरन् तीन प्लास्टिक लकड़ी या ग्त्ते के समान आकार के गेल या चौकार टूकड़े प्रयोग किया जाते है। टुकड़ो का ड्रम में डालकर गेल मशीन की सहायता से धुमाया जाता है। इन टुकड़ो पर अंक लिखे होते है। 0 से 9 तक एक–एक टुकड़ा निकालकर संख्या बनाई जाती है। पहले टुकड़े से इकाई, दूसरे से दर्तइ और इसी प्रकार हर टुकड़ा एक अंक का कार्य करता है। वर्तमान में देश में अनेक राज्यों में लॉटरियों के इनाम इसी रीति से निकाले जाते है।

3. दैव संख्याएँ यदि समग्र का आकार बड़ा हो तो लाटरी रीति या डोल घुमाकर रीति में कठिनाइयाँ आती है और विभ्रम की सम्भावना रहती है। विकल्प के रूप में दैव संख्या सारणीयों का प्रयोग किया जाता है। व्यवहार में जो सारणियाँ उपलब्ध है उनमें निम्न महत्वपूर्ण है।

(a) टिप्पटी की दैव संख्या सारणी।

(b) कैण्डाल और स्मिश की दैव प्रतिचयन संख्या।

(c) रैण्ड कॉरपौरेशन की दस लाख संख्यायें।

(d) फिशर और येटस की संख्यायें।

(e) स्नेडेकोर की 10,000 दैव संख्यायें।

(f) कम्यूटर जनित याद्वच्छिक प्रतिचयन संख्यायें।

उदाहरणः– यदि एक अनुसन्धानकर्ता का निम्न प्रकार की दो अंको में संख्याएं दी जाती है, तो वह 50 में से 5 इकाइयों का निर्वाचन किस प्रकार करेगा?

हल– सवप्रर्थम 50 इकाइयों में 01 से लेकर 50 तक के क्रमांक प्रदान किये जायेगें। तत्पश्चात, दी जायेगी दो अंको की संख्याओं में से ऐसी संख्या की जायेगी जो 50 से कम हो। इस आधार पर 23, 05 तथा 13 की संख्याए आती है। इन्हें क्रमवह करने पर 05,13 तथा 23 की स्थिति बनेगी। इनमें कमशः 8 तथा 10 का अन्तर है। इस आधार पर 12 और 14 का अंतर करते हुये कुल मिलाकर 5,13 23,35 तथा 49 क्रमांक की इकाइयां चुनी जा सकती है।

दैव प्रतिचयन के लाभ

1. निष्पक्षता
2. समग्र का वास्तविक प्रतिनधित्व
3. प्रतिचयन विभ्रम
4. सरल और मितव्ययी

दोष

1. विस्तृत एवं पूर्ण सूचनाओं का अभाव
2. क्षेत्रीय सेवक्षिणों में समस्या– यदि भौगेलिक दृष्टि से इकाइयाँ से दूर हो तो सूचनाओं को एकत्र करने में समय और धन अधिक व्यय होग।
3. उचित प्रतिलित्व न होने की सम्भावना यदि समग्र की इकाइयों प्रर्याप्त विविधता हो या न्यादर्श का आकार काफी छोटा हो तो यह हो सकता है कि प्रतिदर्श समग्र का उचित प्रतिनधित्व न कर सके और उसके निर्णय विश्वसनीय हो।
4. पर्चियाँ बनाने या नम्बर डालने की समस्या।
5. अनुपयुक्त– यदि सम्ग्र में कुछ इकाइयों ऐसी हो जिन्हे प्रतिदर्श में लेना या छोड़ना आवश्यक हो तो इस रीति को उपयुक्त नही माना जाता।

इन्ही दोषो के कारण– डब्लयू एक हार्पर ने लिखा, "एक दैव प्रतिदर्श भी एकांगी हो सकता है और यह गरन्टी नहीं है कि वह पक्षपात से मुक्त है। लेकिन सावधानी से प्रतिदर्श लिया जाय तो यह रीति काफी व्यावहारिक है।

II प्रतिबन्धित या समिति दैव प्रतिचयन–

1. **स्तरित दैव प्रतिचयन**– यदि समग्र की इकाइयाँ में सजातायिता का अभाव होता है तो कुल इकाइयों का निश्चित खण्डों वर्गो या स्तरों में बाट लिया जाता है। और प्रत्येक स्तर में से दैव प्रतिचयन के आधार पर इकाइयों का चुनाव किया जाता है।

एक उदाहरण के माध्यम से इसे समझाया जा सकता हैः–

यदि एक नगर में 1000 परिवार है जिनमें से परिवारों का चयन करके उनके पारिवारिक बजह पर कुल 1000 परिवारों को कुछ वर्गे में बांट लिया जाये। माना कि चार वर्ग बना लिये –1000 रूपये माननिसक आय, 1000 से 3000 रूपये तक आय, अधिक मासिक आय वाले परिवार। फिर इन वर्गे से दैव प्रतिचयन के आधार पर कुल मिलाकर 20 परिवारो का चयन कर लिया जाय। इन इकाइयों के चयन की दृष्टि से स्तरिता दैव प्रतिचयन निम्न तीन प्रकारों का हो सकता है–

a) **आनुपातिक स्तरित प्रतिचयन** – इस रीति में प्रत्येक स्तर या खण्ड में से अनुपात में इकाईयों का चयन किया जाता है, जो अनुपात प्रत्येक खण्ड का कुल समग्र मे हो। यदि तीन आय वर्गे में क्रमशः 400, 300, 200 और 100 परिवार है तो 20 परिवारों के चयन के लिये इन वर्गें में से क्रमशः 8, 6, 4 और 2 परिवारों का चयन किया जायेगा।

b) **गैर आनुपातिक स्तरित प्रतिचयन** – इस रीति में प्रत्येक खण्ड मे से बराबर इकाईयों का चयन किया जाता है। इस आधार पर प्रत्येक आय वर्ग में से 5–5 परिवारों का चयन किया जायेगा।

c) **स्तरित भारित प्रतिचयन** – इस रीति में प्रत्येक खण्ड में से प्रतिदर्श में समान इकाईयां ली जाती है लेकिन खण्डों के आकार के आधार पर उन इकाइयों को भार दिया जाता है। इस रीति के आधार पर प्रत्येक वर्ग में से 5–5 परिवारों का चयन किया जायेगा, लेकिन उन्हें क्रमशः 4, 3, 2 और 1 का भार दिया जायेग।

यह उल्लेखनीय है कि स्तरित देव प्रतिचयन को मिश्रित प्रतिचयन भी कहा जाता है क्योंकि इसमें सविचार प्रतिचयन एवं सरल दैव प्रतिचयन का मिश्रण होता है।

स्तरित दैव प्रतिचयन के लाभ :–

- अधिक प्रतिनिधि प्रतिदर्श –उचित रूप से विकसित होने पर प्रदिर्श समग्र का अधिक प्रतिनिधित्व कहता है।
- प्रशासनिक सुविधा – क्षेत्र सर्वेक्षणों में स्तरित प्रतिचयन अपनाने पर प्रशासनिक सुविधा रहती है भौगेलिक स्थानीयकरण का ध्यान में रखा जाता है।
- विषम प्रकृति के समग्रों में उपयुक्त
- प्रतिचयन समस्याओं को भिन्नता – कुछ समग्रों मे उसके विभिन्न भागें में प्रतिचयन समास्याओं में महत्वपूर्ण भिन्नताएँ हो सकती है।

इन लाभों पर जोर देते हुए ग्रेहमैप ने कहा, "इस प्रकार का प्रतिचयन सविचार प्रतिचयन के पक्षपात तथा सरल दैव प्रतिचयन का अनिश्चित ता के मध्य सन्तुलन स्थापित कहता है।"

स्तरित दैव प्रतिचयन के दोष :–

स्तरों का दोषपूर्ण विभाजन

स्तर बनाने और इकाईयां रखने की कठिनाई।

किन्तु इस दोषों को सावधानी से हल भी किया जा सकता है।

इसके लिए –

(i) प्रत्येक खण्ड अथवा स्रत का आकार इतना बड़ा अवश्य हो कि उनमें से प्रतिदर्श के लिये इकाइयों का चयन सम्भव हो सके।

(ii) विभिन्न स्तरों में शामिल की जाने वाली इकाइयों में आन्तरिक सजीतीथता हो।

(iii) यथा–सम्भव आनुपातिक स्तरित प्रतिदर्शन अपनाया जाये और यदि गैर आनुपातिक अपनाया जाये तो उन्हें उचित भार दिया जायें।

(iv) स्तर या खण्ड ऐसे न बन जायें जिनमें एक ही इकाई दो स्तरों में प्रवेश योगय बन सके।

2. **व्यवस्थित दैव प्रतिचयन** – इस रीति के अनुसार सबसे पहले समग्र की सभी इकाइयों को एक व्यवस्थित क्रम जैसे वर्णनात्मक, संख्यात्मक ,भौगेलिक अथवा समयक्रम में क्रमबद्ध कर लेते है। और फिर इन्हीं में से इकाइयां चुन ली जाती है। प्रतिदर्श में पहली इकाई दैव आधार पर चुनी जाती है और शेष निश्चित क्रम में छटना चला जाती है।

उदाहरण – एक कक्षा में 50 लड़कियां है और उनमें से 5 का न्यादर्श लेना है, तो सर्वप्रथम कर लेंगे। इसके पश्चात् न्यादर्श में इकाइयों को शामिल करने का अन्तर निर्धारित करेगें, जो समग्र की कुल इकाईयां में शामिल की जाने वाली इकाइयों का आधार पर अर्थात् 50/5 = 10 निर्धारित होग। माना कि वह रोल नं0–06 आता है तो न्यादर्श में शामिल होने पर रोल नं0–6 (6+10)16, (6+20)26, (6+30)36 और (6+40)46 होंगे। तकनीकी दृष्टि से न्यादर्श प्रारम्भ भी कहते है। न्यादर्श, चिन्ह द्वारा व्यक्त किया जाता है। न्यादर्श अन्तर को 'R' तथा न्यादर्श में शामिल की जाने वाली इकाइयों की संख्या को 'n' के रूप में रखा जाता है और न्यादर्श में शामिल होने वाली इकाइयां के क्रम में निम्न प्रकार रखा जा सकता है।

$$i, +i+k+i+2k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i + (n - 1)k$$

प्रत्येक निश्चित स्तर में से एक ईकाई शामिल कर लेने के कारण यह बहुत सीमा तक दैव प्रतिचयन जैसा प्रतीत होता है।

यह अत्यन्त सरल एवं मितवययी रीति है परन्तु यह तभी सम्भव है जब समग्र का पूर्ण ढांचा अधतन एवं इकाइयां दैव क्रम में व्यवस्थित है।

3. **बहुस्तरीय दैव प्रतिचयन**

इस रीति में प्रतिदर्शों का चुनाव अनेक स्तरों में होता है और प्रत्येक स्र पर दैव प्रतिचयन रीति का प्रयोग किया जाता हैं।

उदाहरण के लिये उत्तराखण्ड में महाविद्यालियों में पढ़ने वाले 5000 छात्र–छात्राओं का प्रतिदर्श लेना है तो इस रीति के अन्तर्गत प्रथम विश्वविद्यालय चुन लिये जायेंगे। फिर दूसरे स्तर पर इन विश्वविद्यालयों में से दैव प्रतियचन द्वारा कुछ महाविद्यालय चुन लिये जायेंगे। तीसरी द्वारा कुछ महाविद्यालयों में से दैव प्रतिचयन द्वारा छात्र–छात्राएं चुन ली जायेगी। विभिन्न स्तरो पर भी दैव प्रतिचयन की विभिन्न रीतियों भी अपनायी जा सकती है। जैसे इसी उदाहरण में, पहले स्तर पर विश्वविद्यलयों को चयन स्तरित दैव प्रतिचयन द्वारा किया जाये, महाविद्यालय के चयन के लिये सरल दैव प्रतिचयन अपनाया जाय, छात्र–छात्राओं के चुनाव के लिये व्यवस्थित दैव प्रतिदर्शन अपनाया जाये।

यह रीति काफी लोचदार है और विशाल क्षेत्र के अनुसंधानों को भी मितत्ययिता तथा प्रशासकीय सुविधा के साथ पूरा किया जा सकता है, पर इकसे निष्कर्ष में उसी सुद्धता का अभाव रहता है।

4. **समूह प्रतिदर्शन** –

इस रीति के अन्तर्गत समग्र को विभिनन समूहों में बांट लिया जाता है और प्रत्येक समूह में से दैव प्रतिचय रीति से इकाइयों का चुनाव करके प्रतिदर्श बनाया जाता है। और हम विधि का प्रयोग औद्योग्कि उत्पादनों में होता है। जैसे कुछ कए फैक्टरी में प्रतिदिन 1000 डब्बे बनते है और उनमें से 10 डिब्बो की विस्तृत जाँच करनी है तो बने हुये डब्बों से 100–100 डब्बों के 10 ढेर बना देंगे और प्रत्येक ढेर में से दैव प्रतिशत विधि द्वारा एक–एक डिब्बा निकालकर यादर्श बना लेंगे।

27.15.2 अदैव प्रतिचयन या गैर सम्भावित प्रतिचयन

1.सविचार प्रतिचयन - इस रीति में अनुसन्धानकर्ता अपनी इच्छा एवं आवश्यकतानुसार इकाईयों का चयन करता है एवं अपनी समझ से उन्हीं इकाईयों को शामिल करता है जो उसकी दृष्टि से समग्र का उचित प्रतिनिधित्व करती है। इकाईयों को शामिल करना एवं न करना पूर्णतः अनुसन्धानकर्ता की विवेक, योगयता और स्वेच्छा पर निर्भर करता है।

सरल एवं सुविधाजनक होते हुये भी इस रीति के निम्नलिखित दोष है :–

a) **विषयग्त प्रकृति** – इकाइयों के चुनाव में अनुसंधानकर्ता के पूर्वाग्रहो, विश्वासो, पक्षपात और सुविधा से प्रभावित होने के कारण यह रीति अत्यधिक विषयग्त हो जाता है।

b) **अधिक इकाइयों के समग्र में अनुव्युक्त** – समग्र का आकार बड़ा होने पर प्रतिनिधि इकाइयों का चयन काफी कठिन बन जाता है।

c) **प्रतिचयन विभाग** – इकाइयों के चुनने का आधार सम्भावना या अवसर पर न होने के कारण, प्रतिचयन विभम्र को नही मापा जा सकता।

d) **यह रीति अधिक वैज्ञानिक नहीं है** फिर भी इस रीति के प्रयोग कोतब उपयोगी मान सकते है जब समग्र में कुछ इकाइयां अत्यन्त महत्वपूर्ण हो और उनका न्यादर्श अथवा प्रतिदर्श में शामिल करना आवश्यक हो। यह सब अनुसन्धानकर्ता को कुशलता पर निर्भर करता है।

2. **कोटा या अभ्यंश प्रतिचयन** – यह स्तरित प्रतिचयन का ही एक रूप है। प्रगणको के लिये अलग–अलग कोटा निश्चित कर दिया जाता है तात्पर्य यह कि शुरु से ही यह बता दिया जाता है कि अपने–अपने क्षेत्र में कितनी यादर्श इकाइयों का चयन करना है। कोटे के निर्धारण का आधार आय वर्ग, लिंग, व्यवसाय, धार्मिक या राजनैतिक सम्बन्ध के आधार पर ही हो सकता है। कोटे के अन्तर्त इकाइयों का चयन प्रगणको की इच्छा और विवेक पर निर्भर करता है। इस चयन में दैव प्रतिचयन का प्रयोग नही किया जाता।

उदाहरण के रूप में, मतदान से पूर्व लोगें के विचारों का उध्ययन करने के लिए एक नगर के दस प्रगणक नियुक्त किये गये और प्रत्येक का यह कोटा निर्धारित किया गया कि उसे अपने क्षेत्र में 20 व्यक्तियों से साक्षात्कार करना है, जिसमें 10 पुरुष और 10 स्त्री हों अब प्रत्येक प्रगणक अपने क्षेत्र में अपनी इच्छा और विवेक के आधार पर 20 व्यक्तियों का चुनाव करने के लिये उनसे साक्षात्कार सूचनाएँ एकत्रित करेग।

लाभ :–

1. स्तरित और सविचार पतिचयन का मिश्रण होने के कारण दोनो रीतियों के लाभ मिल जाते है। प्रारम्भ में निश्चित आधारों पर स्तर बना दिये जाते है और उनमें से प्रगणकों द्वारा सविचार के आधार पर न्यादर्श लिया जाता है।
2. इकाइयों के चुनाव में लोच – इस प्रतिचयन में यह सुविधा रहती है कि प्रगणक न्यादर्श की इकाइयों में आवश्यक परिवर्तन कर सकता है।
3. पर्याप्त विश्वसनीय परिणाम – कुशल एवं अनुभवों प्रगणको द्वारा किये जाने से यह रीति विश्वसनीय परिणाम दे सकती है।

दोष :–

1. पूर्व धारणाओं की पृष्टि के लिय प्रयोग–इसका प्रयोग अनुसन्धानकर्ता की पूर्व धारणाओं को पुष्ट करने के लिये किया जा सकता है, जो वास्तविकता से दूर है।
2. विपणन विभ्रम की गणना नहीं – दैव प्रतिचयन पर आधारित न होने के कारण कोटा प्रतिचयन विभ्रम की गणा नही कर सकता।
3. दोषो को बावजूद विपणन सर्वेक्षण, राजनैतिक सर्वेक्षण तथा वैचारिक मतदान का सर्वेक्षण करने में यह रीति पर्याप्त रूप से अपनायी जाती है।

3. सुविधानुसार प्रतिचयन

अपनी सुविधा के अुनसार अनुसन्धानकर्ता जब न्यादर्श की इकाइयों को चुन लेता है, तो उसे सुविधानुसार प्रतिचयन की रीति कहते है। उदाहरण के लिये, विश्वविद्यायल की अध्यापक सूची में से अध्यापकों का प्रतिदर्श चुन लेना। यह एक सरल रीति है किन्तु इसका दोष यह है कि यह अवैश्रमिक, अविश्वसनीय, अव्यवस्थित एवं अवसरवादी है।

4. विस्तृत प्रतिचयन

इस रीति में उन इकाइयों को नही लिया जाता जिनकी सूचनायें एकत्रि करना कठिन व असम्भव हो। यह एक संगणना की तरह की रीति है और इसमें सम्ग्र की अधिकाधिक इकाइयां छाँट ली जाती है।

27.16 प्रतिदर्श का आकार एवं प्रतिचयन की रीति

प्रतिचयन रीति मात्र तकनीकी एवं जटिल वैज्ञानिक अनुसंधानों में हो नही वरन् दैनिक जीवन की क्रियाओं में भी काफी प्रचलित हो चुकी है। न्यादर्श की उपयोग्िता एवं विश्ववनीयता उसके आकार और अपनायी ग्यी प्रतिचयन की रीति पर निर्भर करती है। यह ध्यान देने योगय है, एक न्यादर्श बड़ा होते हुये भी व्यर्थ हो सकती है, क्योंकि वह प्रतिचयन पर आधारित नहीं, अथवा वह दैव प्रतिचयन पर आधारित होते हुये भी अविश्वसनीय सकता है, क्योंकि वह छोटा है।

इससे दो निष्कर्ष निकलते है –

1) प्रतिदर्श दैव प्रतिचयन पर आधारित होना चाहिये।
2) प्रतिदर्श का आकार समुचित होना चाहिए।

दैव प्रतिचयन पर न्यादर्श होने के अनेक लाभ है।

(1) निष्पक्षता (2) सम्ग्र का वास्तविक प्रतिनिश्चित व, (3) निदर्शन विभ्रम का माप

(4) सरल, (5) मित्वययिता

"वास्तव में न्यादर्श मे केवल आकार से ही प्रतिनिधत्व का आश्वासन नहीं होता। एक किन्तु दूषित रीति द्वारा चुने ग्ये न्यादर्श की तुलना में एक छोटे दैव अथवा स्तंरित न्यादर्श के कहो अधिक श्रेष्ठ होने की सम्भावना होती है।"

सामान्यतया यह कहा जाता है कि प्रतिदर्श जितना बड़ा होग उतना ही अधिक विश्वसनीय होग। अधिक बड़ा होने से प्रतिदर्श लेने मे समय, धन और श्रम की बचत नहीं हो पायेगी।

अधिक छोटा होने पर दैव प्रतिचयन होने पर भी वह प्रतिनिधि और विश्वसनीय नहीं हो सकता। अतः यह कहा जा सकता है कि प्रतिदर्श का आकार अनुकूलतम होना चाहिए।

पाटन के अनुसार प्रतिदर्श का अनुकूलतम आकार वह है जो कुशलता, प्रतिदर्श का अनुकूलतम आकार वह है जो कुशलता, प्रतिनिधित्व विश्वसनीयता तथा लोच की आवश्यकताओं को पूरा करता है। अतः प्रतिदर्श का आकार निम्न घटको से प्रभावित होता है –

- **समग्र की प्रकृति**–सजातिय इकाइयां होने पर छोटे प्रतिदर्श से कार्य चल जायेग इसके विपरीत विभिन्न गुणो या विशेषताओ वाली इकाइयों हो तो आकार बड़ा होना चाहिये।
- **शुद्धता का उत्तर** – शुद्धता के स्तर और न्यादर्श के आकार मे समान सम्बन्ध है।
- समय तथा धन की उपलब्धि–अनुसन्धानकर्ता के साधनो का प्रभाव प्रतिदर्श के आकार पर भी पड़ता है। यदि उसके पास पर्याप्त धन समय तथा क्षम साधन उपलब्ध है तो न्यादर्श का आकार बड़ा रखना होगा।
- **अध्ययन की प्रकृति** – एक बड़ी समस्या के अध्ययन के लिये न्यादर्श का आकार बड़ा होना चाहिए और विलोमशः।
- **समग्र का आकार** – सम्ग्र के बड़ा होने पर प्रतिदर्श को प्रतिनिधिपूर्ण बनाने के लिये प्रतिदर्श का आकार भी बड़ा होना चाहिए।
- **प्रश्नावली का आकार** – प्रश्नावली का आकार बड़ा होने पर प्रतिदर्श का आकार छोटा रखना चाहिये और विलोमशः।
- **प्रतिचयन की रीति** – सरल दैव प्रतिचयन में शुद्धता का ऊँचा स्तर बनाये रखने के लिये प्रतिदर्श का आकार बड़ा रखना होग। जबकि स्तरित प्रतिचयन मे छोटे आकार द्वारा भी प्रर्याप्त विश्वसनीय परिणाम प्राप्त किये जा सकते है।

27.17 दैनिक जीवन मे प्रतिचयन का महत्व

आधुनिक युग प्रतिचयन का युग है। अनुसंधान की यह रीति महत्वपूर्ण एवं लोकप्रिय रीति है। इसका प्रयोग असीमित है मात्र वैज्ञानिक एवं तकनीकी अनुसधानों में ही रही बल्कि दैंनिक क्रियाओं में भी इसका महत्व दिखाई पड़ता है।

कुछ उदाहरण यह स्पष्ट कर देगें। जैसे चावल का व्यापारी चावल के ढेर में से एक मुट्ठी चावल देखकर उसकी गुणवत्ता और मूल्य तय करता है। उबले हुये आलूओं में से एक या दो देखकर ज्ञात हो जाता है कि वे उबले है या नहीं। नमक का स्वाद एक चम्मच सब्जी चखकर ही मालूम हो जाता है। **स्नेडे कोर** ने लिखा है, रोगी की एक बूद रक्त का परीक्षण करके चिकित्सक निषकर्ष निकाल लेता है। कुछ ही इकाइयों का निरीक्षण करके बड़े समूहो के बारे में जानकारी प्राप्त करने की रीति है। ब्लेपर ने तो यहाँ तक कहा है कि हम प्रतिचयन के युग में रह रहे है।

27.18 सारांश

काल की गति के साथ मूल्यों मे होने वाले विभिन्न दीर्घकाल एवं अल्पकालीन उच्चवचनों का विधिवत् विश्लेषण किसान, उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्ग के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है। निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि काल श्रेणी का आशय समय क्रम में सांख्यिकीय संमको की व्यवस्था से है। यह श्रेणी समय परिवर्तन के साथ ही तथ्य विशेष के संमकों में होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करती है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गों में बाँट सकते है और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते है।मूल संमकों को 'σ'से दर्शाया जाता है, इसके चार संघटक है।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T) मौसमी विचरण (S) चक्रीय उच्चारण (C)अनियमित उच्चावचन (I)

दीर्घकालीन प्रवृति को मापने के लिये चार प्रमुख रीतियाँ निम्न प्रकार है :—मुक्त हस्त रीति , अर्द्ध मध्यक रीति , चल माध्य रीति, एवं न्यूनतम वर्ग रीति। अल्पकालीन उच्चावचन को मापने की प्रमुख रीतियां सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण, चल माध्य द्वारा आर्त्तव विचरण , श्रृख्ंला मूल्यानुपात रीति, चल माध्य अनुपात रीति एवं प्रवृत्ति अनुपात रीति है । काल श्रेणी में होने वाले दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन न सिर्फ व्यापारी वरन् अर्थशास्त्री के लिए भी बड़ा महत्व रखता है। भूतकाल के परिवर्तन के विश्लेषण करके वे पिछले अनुभव के आधार पर भविष्य की नीतियाँ निर्धारित कर सकते है। और अपनी क्रियाओं पर नियंत्रण करके भविष्य के जोखिमों से अपने व्यापार की सुरक्षा कर सकते है। अतः यह कह सकते है कि विभिन्न वर्ग चाहे वो अर्थशास्त्री हो या उपभोक्ता, योजनाकार, किसान, राजनीतिक आदि सभी के लिये काल

श्रेणी में से वाले परिवर्तनों का विश्लेषण विशेष रूप से उपयोगी होता है। एक विवेकपूर्ण विश्लेषण तथा संकेतको का वैज्ञानिक विवेचन काल श्रेणी की महत्ता में वृद्धि करता है।

साख्यिकीय अनुसंन्धान में संमक मूल आधार है और इनका संकलन "संगणना" या "प्रतिचयन" रीति द्वारा किया जा सकता है।यह कहा जा सकता है कि प्रतिचयन सिद्वान्त एक समग्र व उससे चुने ग्ये प्रतिदर्शो के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्धो का वैज्ञानिक अध्ययन है।

प्रतिचयन सिद्वान्त का सबसे महत्वपूर्ण उद्‌देश्य यह है कि किसी विचारधीन समस्या के सम्बन्ध मे कम से कम समय, व शक्ति खर्च करके अधिक से अधिक जानकारी प्राप्त करता है। प्रतिचयन के अन्तर्गत एक और न्यादर्श के आधार पर समग्र के लक्षणों का अनुमान लगना तथा दूसरी ओर इन अनुमानो का विश्वसनीयता का मूल्याकंन करना है। यदि सम्र की सभी इकाइयों के सांख्यकीय माप जैसेः– प्रमाप विचलन, माध्य, सह सम्बन्ध गुणाक आदि निकाले तो इन मापों को प्राचल कहते है जबकि समग्र मे से कुछ इकाइयां चुनकर उनके माध्य आदि निकाले तो प्रतिदर्शन कहलाते है।प्रतिचयन की रीतियों को दो मुख्य भाग में बाटा जा सकता है दैव प्रतिचयन अदैव प्रतिचयन ।एक न्यादर्श बड़ा होते हुये भी व्यर्थ हो सकती है, क्योंकि वह प्रतिचयन पर आधारित नहीं, अथवा वह दैव प्रतिचयन पर आधारित होते हुये भी अविश्वसनीय सकता है, क्योंकि वह छोटा है। इसका प्रयोग असीमित है मात्र वैज्ञानिक एवं तकनीकी अनुसधानों में ही रही बल्कि दैनिक क्रियाओं में भी इसका महत्व दिखाई पड़ता है।

27.19 शब्दावली :–

1)	मौसमी परिवर्तन	ऐसे परिवर्तन जो नियमित और आवर्त्तक होते है।
2)	दैव उच्चावचन	अनियमित उतार–चढाव।

27.20 लधुउत्तरीय प्रश्न :–

1) नियमित अल्पकालीन उच्चावचन को विभाजित किया जाता है। ______________

(b) ______________

2) काल माला के गुणन मॉडल में $\gamma = O - T - S =$ ________________

3) किसी काल माला के समंको में बढ़ने या घटने की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को .... कहते है।

4) मौसमी विचरण .... अवधि के अल्पकालीन उच्चावचन है।

5) प्रमाण विभ्रम प्रतिचयन की .... के सम्बन्ध में बताता है।

6) एक प्रतिदर्शनके सभी सम्भावित मूल्यों से बना विवरण .... कहलाता है।

7) प्रतिदर्श वितरण का प्रमाण विचलन .... कहलाता है।

8) शून्य परिकल्पना इस बात पर जोर देती है कि अध्ययन के विशिष्ट मामले में .... और .... के मध्य कोई वास्तविक अंतर नही होता है।

उत्तर :–

1) मौसमी, चक्रीय
2) $\gamma = T\ X\ S\ X\ C\ X\ I$
3) C + T
4) सुदीर्घकाल उपनति
5) चक्रीय
6) अविश्वसनियता
7) प्रतिदर्श विवरण
8) प्रमाण विभ्रम
9) प्रतिदर्श, समग्र

27.21 बहुविकल्पीय प्रश्न :–

1) सामान्त माध्य की प्रमाप त्रुटि का सूत्र –

(i) $\frac{\sigma\ p}{n}$ - (ii) $\frac{\sqrt{\sigma p}}{n}$

(ii) $\sqrt{\frac{\sigma\ p}{n}}$ (iv) $\frac{\sigma\ p}{\sqrt{n}}$

2) माध्य विचलन को प्रमाप त्रुटि होती है –

(i) $0.78672\ \sigma/\sqrt{n}$ - (ii) $0.6028\ \sigma/\sqrt{n}$

(ii) $\sigma/\sqrt{n}$ (iv) $1.36\ \sigma/\sqrt{n}$

27.22 सदंर्भ ग्रन्थ

- **डा0 एस सचदेवा :—** परिमाणात्मक विधियाँ ,लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आग्रा
- **डा0 के0 एल0 गुप्ता एवं डा0 हरिओम गुप्ता:—** परिमाणात्मक तकनीकें ,नवयुग साहित्य भवन, आगरा।
- **डा0 के0 एल0 गुप्ता, रवि कान्त:—** अर्थशास्त्र की आधारभूत परिमाणात्मक विधियाँ ,नवनीत पब्लिकेशन्स, आग्रा
- **एस0पी0 सिंह:—** सांख्यिकी: सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस0 चन्द पब्लिकेशन्स नई दिल्ली।

27.23 कुछ उपयोगी पुस्तकें

- Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
- Singh, S.P. ((2010) Principles of Statistics , S .Chand Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, EXcel Books.
- Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

27.24 निबन्धात्मक प्रश्न

1) काल श्रेणी के विश्लेषणसे आप क्या समझते है? उपनति मापन की विधियों का संक्षिप्त वर्णन कीजिये।
2) काल श्रेणी क्या है? दीर्घकालीन प्रवृत्ति, मौसमी परिवर्तनों तथा चक्रीय उच्चावचनों में अन्तर स्पष्ट कीजिये? किन्ही दिये ग्ये संमकों में दीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप किस प्रकार करेंगे।
3) प्रतिदर्श अनुसंधान से आप क्या समझते है? प्रतिचयन पर आधारित परिणामों की सार्थकता का अध्ययन करने के लिये विभिन्न विधियों का विवेचन कीजिये।
4) टिप्पणी लिखिये (i) प्रतिदर्शन (ii) प्राचल (iii) प्रतिचयन वितरण (iv) काल श्रेणी के संघटक

इकाई – 28 प्रायिकता के सिद्धान्त

28.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में हमने ''प्रतिचयन के सिद्धान्तं एवं काल श्रेणी'' का अध्ययन किया। प्रतिचयन के माध्यम से हमने यह सीखा कि किस प्रकार सांख्यिकीय नीतियों के माध्यम् से जटिल तथा व्यापक तथ्यों का अध्ययन सरलता तथा सुगमता से किया जा सकता है। वहीं काल श्रेणी के प्रयोग के माध्यम से हम प्रवृत्तियों तथा पूर्वानुमानों का बेहतर ऑकलन कर सकते है।

मानव जीवन के सभी पहलुओं जैसे आर्थिक व्यापारिक राजनैतिक एवं वैज्ञानिक आदि क्षेत्रों में उतार चढाव आते रहते है जिसके फलस्वरूप मानव को भावी परिस्थितियों का पूर्वानुमान लगाते हुयें विभिन्न निर्णय लेने पड़ते है भविष्य की अनिष्चित घटनाओं का वैज्ञानिक तौर पर ऑकलन करने तथा पूर्वानुमान लगाने के लिये सांख्यिकी में विद्वानों ने विभिन्न सिद्धान्तो का विकास किया है। प्रायिकता के सिद्धान्त इसी दिषा में अध्ययन करने हेतु विकसित किये गये है।

भविष्य की अनिष्चित घटनाओं का अपने पक्ष में पूर्वानुमान करने का ऑकलन प्रायिकता के सिद्धान्तों के अर्न्तगत किया जाता है। उदाहरणार्थ किसी मैच में अमुक टीम के सफल होने का क्या ऑकलन है। उपरोक्त सभी संभावनाओं का गणितीय तथा वैज्ञानिक विधियों से पूर्वानुमान किस प्रकार से लगाया जाता है हम यह अध्ययन वर्तमान ईकाई '' प्रायिकता के सिद्धान्त '' के अर्न्तगत करेगें।

28.2 उद्देश्य

इस इकाई में हम प्रायिकता के सन्दर्भ में निम्न जो अध्ययन करेगें उसके उद्देष्य निम्नवत् है –

- प्रायिकता का अर्थ, परिभाषा तथा प्रायिकता का क्या तात्पर्य है ?
- प्रायिकता सिद्धान्तों का उद्गम एवं विकास कैसे तथा किस प्रकार हुआ ?
- प्रायिकता की अवधारणायें कौन सी है ?
- प्रायिकता का परिकलन किस प्रकार से किया जाता है ?
- प्रायिकता के परिकलन में महत्वपूर्ण सहायक गणन क्रियायें कौन–कौन सी है ?
- प्रायिकता के मुख्य सिद्धान्त एवं प्रमेय कौन–कौन सी है ?
- प्रायिकता से सम्बन्धित सरल तथा जटिल संख्यात्मक प्रष्नों को किस प्रकार से हल किया जाता है ?
- प्रायिकता के सिद्धान्तों के उपयोग तथा महत्व कौन से हैं ?
- प्रायिकता के सिद्धान्तों के अध्ययन में महत्वपूर्ण शब्दावलियों को किस प्रकार से परिभाषित किया जाता है ?

28.3 उद्गम एवं विकास

प्रायिकता के उद्गम तथा विकास में सटोरियो एवं जुआरियों का बड़ा ही महत्वपूर्ण योगदान है। यद्यपि द्यूत क्रीड़ा, पासा तथा ताष का खेल सिक्का उछालना, घुड़दौड़ आदि पर सट्टा

तथा जुआ लगाने की प्रक्रिया पूरी दुनिया में लोकप्रिय रही है परन्तु यूरोप इन खेलों का विकास 15 वीं–16 वीं सदी तक आते–आते काफी पेषेवर हो गया था। अतः सट्टोरियों तथा जुआरियों ने भी सफलता के लिये गणितज्ञों से सलाह लेनी आरम्भ कर दी थी। इस दिषा में इटली के गणितज्ञ जेरोम् कार्डन (1501–1576) द्वारा ''बुक बाई चान्स'' नामक पुस्तक की रचना की जिसमें पहली बार संयोग पर आधारित खेलों में होने वाले जोखिमों तथा उन्हें कम करने के नियमों का वर्णन किया गया था। इसी क्रम में इटली के महान वैज्ञानिक गैलिलियो (1564–1642) द्वारा पासा फेंकने की समस्याओं का संख्यात्मक सामाधान प्राप्त करने का प्रयास किया गया था।

परन्तु गणितीय माध्यम् से प्रायिकता के सिद्धान्तों का वैज्ञानिक तथा सुव्यवस्थित प्रतिपादन एवं विकास फ्रान्स में हुआ। यहॉ पर षिवेलियर डी मीयर नामक कुलीन जुआरी द्वारा प्रस्तुत द्यूत समस्याओं का सामाधान करते हुयें फ्रासिसी गणितज्ञ ब्लैज पास्कल (1623–1662) तथा पियर ही फलैट (1601–1665) द्वारा प्रायिकता के सिद्धान्तों का विधिवत विकास आरम्भ किया। इसी क्रम में स्विट्जरलैण्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ जेम्स बर्नोली (1654–1705) का भी नाम आता है जिन्होनें बीस वर्षो तक व्यापक शोध तथा अध्ययन के पश्चात अपनी पुस्तक ''अर्स कॉन जैक्टैनडी'' की रचना की तथा इसके अन्तर्गत उन्होने आधुनिक समय में भी लोकप्रिय प्रायिकता के मषहूर सिद्धान्त '' बर्नोली प्रमेय '' का प्रतिपादन किया।

अठारहवीं तथा उन्नीसवीं शताब्दी का दौर प्रायिकता सिद्धान्तो हेतु विषेष तौर पर उल्लेखनीय रहा है इस समय अनेकों महत्वपूर्ण सिद्धान्तों तथा प्रमेयों का निर्माण किया गया। प्रतिलोम प्रायिकता के प्रसिद्ध सिद्धान्तों की रचना टॉमसबेयज(1702–1761) द्वारा की गयी जिसे बेयज प्रमेय के नाम से जाना जाता है। प्रायिकता सिद्धान्त के विकास में अब तक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण घटना ''थ्योरी आफ एनालिटिकल प्रोबोविलिटी'' के प्रकाषन (1812) की रही है इस पुस्तक की रचना फ्रासिसी गणितज्ञ पियर साइमन डी0 लाप्लेस द्वारा करके प्रायिकता के चिर प्रतिष्ठित या चिर सम्भत् सिद्धान्त का प्रतिपादन किया गया। इसके पश्चात् तो प्रायिकता के विभिन्न सिद्धान्तों तथा अवधारणओं का दौर और भी तीव्र हो गया। रॉनेल्ड फिषर एवं वौन माइजेज ने प्रतिदर्ष समष्टि की अवधरणा के प्रतिपादन कर प्रायिकता के महत्वपूर्ण दृष्टिकोण का विकास किया। जिसको प्रायिकता का '' आधुनिक दृष्टिकोण '' के नाम से जाना जाता है। फ्रेंक रैमेसे ने 1926 में उपनी पुस्तक '' गणितीय एवं अन्य तर्कों के निबन्धो के आधार के माध्यम् से प्रायिकता की व्यक्तिनिष्ठ अवधारणा का प्रतिपादन किया।

प्रायिकता के आधुनिक सिद्धान्तों के प्रतिपादन में सर्वाधिक महत्वपूर्ण योगदान रूसी गणितज्ञों का है। इन गणितज्ञों में चेबिचेव (1821–1894) तथा ए0 मार्कोब (1856–1922) का नाम प्रमुख है। एक अन्य रूसी विद्वान कोल्मोगोरोव द्वारा 1933 में प्रकाषित पुस्तक ''प्रायिकता के आधार'' के माध्यम से प्रायिकता के अभिगृहीत दृष्टिकोण का प्रतिपादन किया जोकि प्रायिकता के सिद्धान्तों के विकास में एक क्रांतिकारी घटना है। उनका सिद्धान्त प्रायिकता की अभिग्रहीत सूक्तियों पर आधारित है तथा प्रायिकता को समुच्च फलन के रूप में व्यक्त करता है। यानि समुच्चय सिद्धान्तों के प्रयोग के माध्यम् से कोल्मोगोरोव ने प्रायिकता के सिद्धान्तों को एक नवीन तथा व्यापक दिशा प्रदान की।

28.4 प्रायिकता की परिभाषा एवं अवधारणा

प्रायिकता सिद्धान्तों के उद्‌भव तथा विकास का एक लंबा इतिहास रहा है जिसके कारण से प्रायिकता की परिभाषाओं तथा अवधारणाओं में समयानुसार परिवर्तन होता चला आया हैं। परन्तु सामान्यतया इसे हमेशा से किसी घटना के होने तथा न होने के सन्दर्भ में भावी संभावनाओं अथवा प्रत्याषाओं की माप के रूप में देखा जाता है। यानि किसी घटना के घटित होने की अनुकूल परिस्थितियों को उस घटना के सन्दर्भ घटित होने वाली समस्त परिस्थितियों के अनुपात के रूप में देखा जाता है। प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावना का माप है। वास्तव में प्रायिकता एक अनुपात है जिसे भिन्न या दषमलव के रूप में व्यक्त करते है। प्रायिकता का माप हमेषा शून्य से एक के मध्य आता है। शून्य से तात्पर्य वह घटना जो कभी घटित नहीं हो सकती है तथा एक से तात्पर्य वह घटना निष्चित रूप से घटित होगी। वास्तव में प्रायिकता के सन्दर्भ में विद्वानों में बड़ा ही मत मतान्तर रहा है परन्तु फिर भी प्रायिकता को निम्न चार अवधारणाओं के माध्यम् से परिभाषित किया जा सकता है।

* प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित अवधारणा।
* प्रायिकता की सांख्यिकीय अवधारणा।
* प्रायिकता की व्यक्तिनिष्ठ अवधारणा।
* प्रायिकता की अभिगृहीयता अवधारणा।

28.4.1 प्रायिकता की चिर प्रतिष्ठित अवधारणा

इस अवधारणा को गणीतीय अथवा पूर्ववर्ती (A Prioi) प्रायिकता भी कहते है। प्रायिकता की इस प्रचीनतम् तथा सरलतम् अवधारणा का प्रतिपादन फ्रैंच गणितज्ञ लाप्लेस ने किया उनके अनुसार ''अनुकूल घटनाओं की संख्या का समान रूप से संम्भावित समस्त घटनाओं का कुल संख्या से अनुपात ही प्रयिकता है। इस विचारधारा की मुख्य मान्यता यह है कि यादृच्छिक अभिप्रयोग (Random Experiment) के परिणाम सम सम्भावी (Equally Likely) तथा परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclusive) होते है। उदाहरण के तौर पर पासे के फैंक में से 1, 2, 3, 4, 5, 6, किसी की भी आने की संभावना समान है। परन्तु एक समय में एक ही अंक आयेगा। इसी प्रकार सिक्के की उछाल में चित (Head) या पट (Tail) आने की संभावना समान है तथा एक समय में मात्र एक ही घटना घटित होगी अर्थात एक ही परिणाम सामने आयेगा। दोनों परिणाम एक साथ नहीं आ सकते है। इस अवधारणा की व्याख्या निम्नवत् प्रकार से की जा सकती है –

यदि किसी यादृच्छिक प्रयोग से कुल परिणाम $m+n$ प्राप्त हो जिनमें से m परिणाम किसी घटना A के घटित होने की अनुकूल परिस्थितियों को दर्षाते हों तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता निम्नवत् होगी –

$$P(A) = \frac{A \text{ घटना के घटित होने के लिये अनूकूल परिस्थितियाँ}}{\text{सभी सम सम्भाव्य परिस्थितियॉ}}$$

$$= \frac{m}{m+n}$$

घटना के घटित होने की स्थिति सफलता को दर्षाती है जिसे $P(A)$ या p संकेत से प्रदर्षित करते है तथा घटना के न घटित होने की स्थिति असफलता का प्रतीक है जिसे q या $P(\bar{A})$ के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

A के घटित होने की प्रायिकता A के न घटित होने की प्रायिकता

$$p = P(A) = \frac{m}{m+n} \qquad q = P(\bar{A})\frac{n}{m+n}$$

चूंकि घटना या तो घटेगी और या तो वह घटेगी ही नहीं। अतः हर परिस्थिति में P और q का योग हमेषा होगा।

अतः $P = 1 - q$ एवं $q = 1 - p$

उदाहरण – के तौर पर यदि किसी परीक्षा में बच्चे के सफल होने की संभावना 60 प्रतिषत है तो इसका तात्पर्य यह हुआ कि असफल होने की संभावना 40 प्रतिषत है।

अतः सफल होने की प्रायिकता $p = .6$ तथा असफल होने की प्रायिकता $.4$ होगी।

इसी प्रकार सिक्के के उछाल में कुल परिणामों का योग $m + n$ हमेषा दो होगा क्योंकि परिणाम चित (Head) अथवा पट (Tail) होगा यदि हम चित के आने की प्रायिकता निकाले तो वह 1/2 हागी।

कुल परिणाम $= \{H, T\}$ अनुकूल घटना $= \{H\}$

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

चिर प्रतिष्ठित विचार धारा में प्रकृति के पूर्व निर्धारित नियमों के आधार पर निगमनात्मक तर्क द्वारा प्रायिकता का निर्धारण किया जाता है इसीलिये इसे गणितीय अथवा अर्मूत (Abstract) प्रायिकता भी कहा जाता है। अभिप्रयोग किये बिना ही तर्क द्वारा पहले ही प्रायिकता के निर्धारण को पूर्व प्रायिकता कहते है यह अवधारणा संयोग प्रधान खेलों जैसे पांसा फेंकना, सिक्का उछालना तथा ताष के पत्ते निकालने पर खूब लागू होती है।

चिर प्रतिष्ठित उपागम की अपनी ही कुछ परिसीमायें है जो कि निम्नवत् हैं –

* परिभाषा में सम सम्भावी शब्द अस्पष्ट है यानि परिभाषा में वही शब्द प्रयुक्त किया गया है जिसको परिभाषित करने का प्रयास किया गया है। अतः इस परिभाषा में हर तथ्य का समावेष कर चक्रीय तर्क को स्थापित करने का प्रयास किया गया है जो कि अपने आप में एक दोष पूर्ण तर्क है।
* यह समान परिस्थितियों की मान्यता पर आधारित है जब कि परिस्थितियॉ कभी भी एक समान नहीं रहती है।

* यदि विभिन्न घटनायें के परिणाम अनिष्चित, असीमित तथा अपरिमित है तो उनका ऑकलन करना आसान नहीं होता है।

* प्रायिकता का सांख्यिकीय क्षेत्र में प्रयोग बिना अवलोकन, अभिप्रयोग तथा निरीक्षण किये बिना मात्र तर्क के आधार पर नहीं किया जा सकता है।

28.4.2 सांख्यिकीय प्रायिकता (Statistical Probability)

प्रायिकता की इस अवधारणा को सापेक्षिक आवृति (Relative Frequency) या अनुभाविक (Emprical) प्रायिकता भी कहते है। यह अवधारणा चिर सम्भत् अवधारणा की भाँति तर्क पर आधारित न हो कर अनुभाविक समंको को (Emprical Data) एवं अभिप्रयोगो तथा परीक्षणों पर आधारित होती है। इस अवधारणा का विकास ब्रिटिष सांख्यिकीविदों द्वारा अठारहवीं तथा उन्नीसवीं शताब्दी में जीवन बीमा तथा व्यावसायिक बीमा में होने वाले जोखिमों से होन वाली हानि के अनुमान के विष्लेषण हेतु किया।

कैने तथा कीपिंग के अनुसार, '' यदि सम आवष्यक परिस्थितियों के अन्तर्गत कियें गये N स्वतंत्र परीक्षणों में कोई घटना निष्चित रूप से m बार घटित होती है तो $\frac{m}{n}$ अनुपात सफलता की सापेक्ष प्रायिकता कहलायेगी। N के अनन्त की ओर प्रवृत होने पर $\frac{m}{n}$ की उपलब्ध सीमा ही एक बार के परीक्षण की सफलता की प्रायिकता है। इसे सूत्र रूप में निम्नवत् निरूपित किया जा सकता है –

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{m}{n}$$

इस अभिधारणा का मुख्य सार यह है कि परीक्षणों के अनन्त रूप से बढ़ने पर सापेक्ष प्रायिकता स्थिरिता की ओर प्रवृत होती जाती है। उदाहरण के तौर पर यदि सिक्के की बीस उछाल में बारह बार चित (H) तथा आठ बार पट (T) आता है तो चित आने की प्रायिकता 0.6 तथा पट आने की प्रायिकता 0.4 होगी परन्तु जैसे परीक्षणों की संख्या बड़ी होकर अनन्त की ओर प्रवृत होती जाती है तो चित तथा पट आने की प्रायिकता की प्रवृत्ति 0.5 के समान होने लगती है।

सापेक्षिक प्रायिकता की भी अर्न्तनिहित सीमायें है जो कि निम्नवत् हैं–

* सबसे प्रमुख समस्या या सीमा इस प्रायिकता में यह है कि इस तथ्य की जानकारी करना बड़ा ही जटिल है कि घटना की प्रायिकता परीक्षणों के दौरान समान रही है अथवा नहीं।

* परीक्षणों की अपरिमित या अनन्त संख्या अपने आप में एक भ्रमपूर्ण विचार होने के साथ–साथ असभंव की धारणा भी है।

* इस प्रायिकता का मान पूर्णतया शुद्ध नहीं होता है अपितु अनुभव तथा प्रयोगों पर आधारित होने के कारण यह अनुमानतः सत्य होता है।

* यह प्रायिकता दीर्घकाल में परीक्षणों के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर शुद्धता के करीब बढ़ती जाती है।

28.4.3 चिर प्रतिष्ठित तथा सांख्यिकीय अवधारणा में अन्तर –

चिर प्रतिष्ठित विचारधारा के अर्न्तगत प्रायिकता का निर्धारण निगमनात्मक तर्कषास्त्र के माध्यम् से किया जाता है। इसलिए इसे पूर्व प्रायिकता (A Priori) प्रायिकता भी कहते है। इसके विपरीत सांख्यिकीय या सापेक्षिक विचारधारा के अन्तर्गत प्रायिकता आनुभाविक समंको के आधार पर परीक्षणों द्वारा निर्धारित की जाती है जिससे इसे उत्तरवर्ती (A Posteriori) या आनुभाविक (Empirical) प्रायिकता भी कहते है। दोनो विचार धाराओं में अन्य अतंर निम्नवत् हैं –

* पूर्व चिर प्रतिष्ठित् विचार धारा तर्क पर तथा सांख्यिकीय विचारधारा आनुभाविक निष्कर्षो पर आधारित है।
* पूर्ववर्ती विचार धारा संयोग प्रधान खेलों (सिक्का, पांसा, ताष आदि) के क्षेत्र तथा समास्याओं पर प्रयोग होती है। जबकि उत्तरवर्ती प्रायिकता बीमा, व्यवसाय, जीवन मरण तालिकाओं तथा अन्य क्षेत्रों में प्रयुक्त होती है।
* पूर्व प्रायिकता में किसी घटना के घटित होने के समस्त परिणामों की पूर्व सूचना या जानकारी होती है। वहीं उत्तरवर्ती प्रायिकता में शुद्ध माप हेतु अधिकाधिक परीक्षण अपरिहार्य है।
* व्यवहार तथा अध्ययन में दोनो उपयोगी हैं क्योंकि पूर्ववर्ती प्रायिकता परीक्षणों से पूर्व की प्रायिकता (P_1) होती है। वहीं उत्तरवर्ती परीक्षणों के पष्चात् की प्रायिकता होती है (P_2)। आज की उत्तर प्रायिकता आने वाले समय की पूर्व प्रायिकता होगी।

28.4.4 प्रायिकता की व्यक्तिनिष्ठ (Subjective) अवधारणा –

इस विचारधारा या उपागम के प्रणेता फ्रैक रैमसे नामक गणितज्ञ जिन्होने अपनी पुस्तक गणितीय तथा अन्य तार्किक निबन्धों के आधार (Foundation of Mathematical and Other Logical Essays) के माध्यम से इस विचारधारा का प्रतिपादन किया जिसे कूपमैन, रिचार्डगुड तथा लियोनार्ड सैवेज ने गति प्रदान की। यह प्रायिकता किसी घटना के प्रति उपलब्ध यथा सम्भव साक्ष्यों (Evidences) एवं किसी व्यक्ति के विष्वास के आधार पर आश्रित होती है। उदाहरण के तौर पर किसी परीक्षण द्वारा घुड़दौड़ में किसी घोड़े की सफलता हेतु निर्धारित कर देगा परन्तु ऐसा करते हुये वह उस घोड़े की पिछली दौड़ों का रिकार्ड, सेहत अन्य जानकारों के विचार तथा घोड़े की नस्ल आदि साक्ष्यों को भी सज्ञान में लेगा यह प्रायिकता ''किसी व्याक्ति विषेष की अपने प्रासंगिक अनुभव पर आधारित किसी संम्भावय घटना में विष्वास की अभिव्यक्ति की माप है।''

प्रायिकता की यह विचारधारा अत्याधिक व्यापक एवं लोचषील है तथा यह वहॉ भी प्रयुक्त होती है जहॉ पर वस्तुनिष्ठ समंक (Objective Data) उपलब्ध नहीं होते है। परन्तु इस विचारधारा की भी अपनी ही सीमायें हैं क्योंकि व्यक्तियों के अनुभव, मूल्यों, विष्वास और व्यवहार में भिन्नता इसकी सार्थकता पर एक बड़ा प्रष्नचिन्ह आरोपित करता है।

28.4.5 प्रायिकता की अभिगृहीयता (Axiomatic) अथवा आधुनिक दृष्टिकोण –

इस अभिधारणा का विकास रूसी विद्वान ए0 एन0 कॉल्मोगोरोव ने 1933 में अपनी प्रकाशित पुस्तक प्रायिकता के आधार (Foundations of Probability) के प्रकाषन के माध्यम् से

किया। इस विचारधारा के अन्तर्गत प्रायिकता को एक पूर्णतया नवीन रूप, यानि समुच्चय फलन (Set Function) के माध्यम से प्रस्तुत किया गया। यह सिद्धान्त पूर्णतया गणितीय सिद्धान्त है तथा इसके अन्तर्गत प्रायिकता को सुनिश्चित होकर परिभाषित नहीं किया जाता अपितु कुछ स्वंयसिद्ध अभिगृहीतों (Axioms) या मूलभूत सूक्तियों (Basic Postulates) के आधार पर प्रायिकता का निर्धारण किया जाता है जोकि निम्नवत् हैं–

* किसी घटना A की प्रायिकता P(A) शून्य से एक की सीमा के मध्य होती है यानि

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

* सम्पूर्ण प्रतिदर्ष समष्टि (Sample Space) की प्रायिकता एक होती है। यह किसी घटना के समस्त परिणामों को निरूपित करता है अर्थात $P(S) = 1$, जहॉ S n स्वतंन्त्र घटनाओं का समुच्चय है यानि

$$S = \{e_1, e_2, e_3 - - - - e_n\}$$

* यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclasive) अर्थात असंयुक्त घटनायें हैं तो A या B के घटने की प्रायिकता निम्न होगी।

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

* इसी प्रकार A तथा B के साथ–साथ घटने की प्रायिकता निम्न होगी–

$$P(A \cap B) = P(A). P(B)$$

आधुनिक उपागम के अन्तर्गत प्रायिकता के सूत्र रूप की व्याख्या निम्नवत् तरीके से की जा सकती है –

यदि किसी यादृच्छिक अभिप्रयोग के n सम सम्भव्य परिणाम हो तो प्रतिदर्ष समष्टि S में n प्रतिदर्ष बिन्दु होगें तथा प्रत्येक बिन्दू के घटने की प्रायिकता $\frac{1}{n}$ होगी।

यदि घटना A के m प्रतिदर्ष बिन्दु हो तो A के घटित होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ - - - - (\text{m Time}) = \frac{m}{n}$$

अतः $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{N}$

अंततः प्रायिकता के समस्त उपागम एवं अवधारणा के अध्ययन से हम निष्कर्षतः यह कह सकते कि प्रत्येक अवधारणा की अपनी खूबियॉ तथा खामियॉ है। अतः समस्या के स्वरूप के अनुसार प्रायिकता के परिकलन हेतु उपयुक्ता विचारधारा के चयन के सम्बन्ध में विवेकपूर्ण निर्णय लेने पड़तें है।

28.5 गणन क्रिया की प्रमुख प्रविधियॉ

प्रायिकता की माप अथवा परिकलन करते हुयें हमें कुछ महत्वपूर्ण सहायक गणन क्रियाओं का अध्ययन करना अति आवश्यक हो जाता है क्योकि प्रायिकता को एक अनुपात या भिन्न के रूप में व्यक्त करना होता है जिसके लिये अंष (Numerator) अर्थात घटना के घटित

होने की अनुकूल परिस्थितियॉ तथा घटना की सभी संम्भाव्य परिस्थितियों के कुल संख्या यानि हर (Denominator) निष्चित करना आवष्यक होता है। अतः इसके लिये कुछ मूलभूत गणना प्रविधियों जैसे क्रमचय, संचय, क्रमगुणित और गणना के मूल नियमों की जानकारी अपरिहार्य है जो कि निम्नवत् हैं –

28.5.1 क्रमगुणित (Factorial) –

एक से लेकर किसी दिये गये धनात्मक पूर्णाक ‘n’ तक के समस्त पूर्णाकों का गुणनफल n का क्रमगुणित कहलाता है तथा इसे हमेषा अवरोही क्रम (Decending Order) में लिखा जाता हैं। उदाहरणार्थ –

$$n! = [n(n-1)(n-2)(n-3) - - - -4.3.2.1]$$
$$8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$
$$0! = 1$$

28.5.2 आधारभूत प्रमेय –

इस प्रयोग को गणना का मूल सिद्धान्त भी कहते हैं इसके अनुसार यदि किसी कार्य को करने के m तरीकें हो और यदि इनमें से किसी भी एक तरीकें से कार्य हो जाने पर किसी दूसरे कार्य को n तरीकों से किया जा सके तो उन दोनों कार्यो को एक साथ पूरा करने के कुल तरीकों की संख्या "$m \times n$" होगी।

उदाहरण के तौर पर छः पहलू वाले दो पासे लेकर उछाले जाये तो सभी संभावित परिणाम $6 \times 6 = 36$ होगें तथा यदि तीन पासे उछाले जाये तो संभावित कुल परिणाम $6 \times 6 \times 6 = 216$ होगें।

उदाहरण 1– मुम्बई से पूना जाने के यदि नौ रास्ते हैं। एक आदमी कितने तरीकों से मुम्बई से पूना जा सकता है और किसी अन्य रास्ते से लौट सकता है।

हल – मुम्बई से पूना जाने के रास्ते = 9
पूना से मुम्बई आने के रास्ते = 8
(क्योंकि जिस रास्ते जाता है उस रास्ते से वापस नहीं जायेगा)
अतः आने–जाने के तरीके $= 9 \times 8 = 72$

उदाहरण 2 – दिल्ली से लखनऊ जाने के लिए 15 बस हर दिन चलती हैं। एक यात्री दिल्ली से लखनऊ जाता है तथा पुनः वापस आ जाता है। ज्ञात कीजिये कि वह दोनों तरफ की यात्रा कितने तरीकों से पूरी कर सकता है?

1. यदि वह किसी भी बस से लौट–फेर करें।
2. उस बस से वापस न लौटे जिससे गया हो।
3. उसी बस से लौटे जिससे वह गया था।

हल – 1. कुल बस सेवायें 15 है तथा दिल्ली से लखनऊ जाने के 15 तथा वापस लौटने के भी 15 ही तरीकें हैं। अतः कुल तरीके $= 15 \times 15 = 225$

2. यदि वह उसी बस से लौटे जिससे गया तो लौटने के तरीके $(12-1) = 11$

होगें जबकि दिल्ली से लखनऊ जाने के तरीकें 12 होगें। अतः कुल तरीके

$12 \times 11 = 132$

4. इस परिस्थिति में जाने के 12 तथा वापसी का 1 ही तरीका है। अतः कुल तरीके $12 \times 1 = 12$

28.5.3 क्रमचय (Permutation) एवं संचय (Combination) –

क्रमचय का शाब्दिक अर्थ है रचना या विकास करना। जब निष्चित ईकाइयों या वस्तुओं को एक निर्धारित क्रम में विन्यासित किया जाता है तो उसे क्रमचय कहते है। क्रमचय से तात्पर्य उन समस्त क्रमों से है जिसमें हमें दी हुयी वस्तुओं A, B तथा C के 6 क्रमचय प्राप्त होगें जोकि निम्नवत् हैं–

I	II	III	क्रमचय
A	B	C	ABC
A	C	A	ACA
B	A	C	BAC
B	C	A	BCA
C	A	B	CAB
C	B	A	CAB

वहीं संचय का अर्थ यह होता है कि क्रम को ध्यान रखे बिना निष्चित वस्तुओं के वर्गो से है अर्थात संचय से तात्पर्य उन वर्गो या चयनों से है जो दी गयी वस्तु 'n' में से कुछ 'r' या सभी को एक साथ लेकर बनते हैं। जैसे तीन वस्तुओं A, B तथा C के मात्र एक ही संचय यानि ABC प्राप्त होगा। क्रमचय तथा संचय को निम्न उदाहरण की सहायता से और भी अधिक स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 3 – तीन पुस्तको A, B तथा C को दो–दो के कितने क्रमचय तथा संचय के रूप में लिख सकते है?

हल – क्रमचयों की संख्या छः तरीकों से लिखी जा सकती है जोकि AB, BA, BC, CB, CA, AC वहीं संचय के तीन ही संयोग बनेगें। जोकि AB, AC, BC तथा BA, CA, CB

28.5.4 क्रमचय तथा संचय सम्बन्धी सूत्र –

यदि दी हुयी ईकाईयों की संख्या अधिक होती है तो क्रमचय तथा संचय हेतु सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है। एवं यदि n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं के क्रमचय तथा संचय के मान निम्नवत् सूत्रों से ज्ञात किये जा सकते हैं–

क्रमचय : $nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, संचय $nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

उपरोक्त सूत्रों की मदद से क्रमचय तथा संचय के मध्य सम्बन्ध को निम्न तरीके से स्थापित किया जा सकता है–

$nP_r = nC_r \times r!$ या $nC_r = \frac{nP_r}{n!}$

उदाहरण 4– 4 पुस्तकों के तीन–तीन के संचय तथा क्रमचय कितने तरीको से व्यक्त किये जा सकते हैं?

हल – संचयों की संख्या $4C_3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4\times3\times2\times1}{1\times3\times2\times1} = 4$

क्रमचयों की संख्या $4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{1!} = 24$

28.5.6 क्रमचय सम्बन्धी नियम –

नियम (1) n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं का एक साथ लेकर बनाये जाने वाले क्रमचयों की संख्या निम्न प्रकार से होगी।

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{ जहॉ } r \leq n)$$

उपप्रमेय – यदि सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर n क्रमचय बनाये जाये तो क्रमचयों की संख्या निम्न होगी –

यहॉ $r = n$, $nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

उदारहरण 5 – 8 सीटों वाली मिनी बस में 4 यात्री कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

हल – यहॉ पर $r = 4$, $n = 8$

अतः $8P_r = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 1680$

उदाहरण 6 – 'SQUARE' शब्द के सभी अक्षरो से कितने क्रमचय बन सकते हैं।

1. एक समय में सभी अक्षरों को लेकर
2. एक समय में तीन अक्षरों को लेकर
3. एक समय में सभी अक्षरों को लेकर यदि S सदैव आरम्भ में आये तथा E हमेंषा अंत में आये ?

हल – 1. 'SQUARE' में 6 विभिन्न अक्षर हैं यहॉ पर सभी अक्षरों को लेने पर $n = 6$ तथा $r = 6$ होगा। अतः क्रमचय

$$6P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1} = 720$$

2. तीन अक्षरों को लेने पर $n = 6$ तथा $r = 3$ होगा। अतः क्रमचय

$$6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 120$$

3. S के सदैव आरम्भ तथा E के हमेंशा अंत में रहने पर (6–2) = 4 अक्षरों के क्रमचय बनाने होगें यहॉ पर $n = 4$ तथा $r = 4$ होगा। अतः क्रमचय

$$4P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

नियम 2. यदि n वस्तुओं में से कुछ वस्तुयें आपस में एक समान तो स्पष्ट है कि उनके क्रमचयों की संख्या n! से कम होगी।

जैसे उदाहरणार्थ n वस्तुओं में से P वस्तुयें पूर्णतया एक ही समान एवं एक ही तरीकों की हैं। q वस्तुयें पूर्णतया एक समान लेकिन अन्य प्रकार की हैं। शेष वस्तुयें भिन्न प्रकार की हैं। तो ऐसी दषा में n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या निम्न सूत्र से ज्ञात की जा सकती है –

क्रमचयों की संख्या $= \frac{n!}{P!q!r!}$

उदाहरण 7– निम्न शब्दों के अक्षरों को कितने प्रकार से लिखा जा सकता है ?

i. TRIANGLE **ii.** STATISTICS

iii. COMMITIEE **iv.** UTTRAKHAND

हल – TRIANGLE में आठ अक्षर है तथा सभी अलग–अलग प्रकार के हैं। अतः यहॉ $n = 6$ तथा $r = 3$ होगा ऐसी दषा में क्रमचयों की संख्या

$$8P_8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 40320$$

ii. STATISTICS में कुल 10 अक्षर हैं इसमें 3S, 3T तथा 2I हैं तथा अन्य अक्षर असमान प्रकार के है। ऐसी दषा में n =10, P = 3, q = 3 तथा r = 2 तथा क्रमचयों की संख्या निम्न होगी –

$$\frac{n!}{P!\,q!\,r!} = \frac{10!}{3!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$
$$= 50400$$

iii. COMMITIEE में 9 अक्षर हैं जिसमें 2 M, 2 T तथा 2E है तथा बाकी अक्षर असमान प्रकार के हैं। अतः क्रमचयों की संख्या निम्न होगी–

$$\frac{n!}{P!\,q!\,r!} = \frac{9!}{2!\,2!\,2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 45360$$

iv. UTTRAKHAND में 10 अक्षर हैं जिसमें 2 T तथा 2 A है। अतः क्रमचयों की संख्या निम्न होगी –

$$\frac{n!}{P!\,q!} = \frac{10!}{2!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$$
$$= 907200$$

नियम 3 – n असान वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाये गये क्रमचयों की संख्या निम्न प्रकार से निकाली जा सकती है। यदि प्रत्येक वस्तु r बार दोहरायी जाये –

पहला स्थान n तरीकों से भरा जायेगा, दूसरा भी n तरीकों से भरा जायेगा न कि

(n-1), तीसरा, चौथा आदि स्थान भी n तरीकों से भरे जायेगें। अतः r स्थान $n \times n \times n - - - - r$ तरीकों से भरे जा सकते है। इस दषा में क्रमचयों की कुल संख्या n^r होगी।

उदाहरण 8 – 6 मैडलों को 4 खिलाड़ियों में किस प्रकार बॉटा जा सकता है ? (i) एक खिलाड़ी को एक ही मैडल मिलें। (ii) किसी भी खिलाड़ी को सभी मैडल दिये जा सकते हैं।

हल – (i) 6 मैडलों का 4 खिलाड़ी में बॉटने की व्यवस्था में $n = 6$ तथा $r = 4$ होगा। अतः इस दषा में क्रमचय

$$6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

यानि पहले खिलाड़ी को 6 तरीको से दूसरे को 5 तरीको से तीसरे का 4 तरीको से तथा चौथे को 3 तरीको से मैडल बॉटा जा सकता है।

(ii) यदि किसी भी खिलाड़ी को सभी मैडल बॉटे जाये तो इस दषा में पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे सभी को 6 तरीको से मैडल दिये जा सकते है। अतः क्रमचयों की संख्या $6 \times 6 \times 6 \times 6$ होगी। यानि $n = 6$ तथा $r = 4$, क्रमचय $= n^r = 6^4 = 1296$

28.5.7 संचय सम्बन्धी नियम –

नियम 1. n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनायें गये संचयों की संख्या nC_r या $\frac{n}{r}$ संकेत द्वारा व्यक्त की जाती है।

अर्थात $nP_r = nC_r \times r!$ या $nC_r = \frac{nP_r}{r!}$

यानि $nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

उदाहरण 9 – 16 खिलाड़ियों में से एक हाकी की टीम कितने तरीके से चयन की जा सकती है?

(i) एक विषिष्ठ खिलाड़ी को सदैव शामिल करना हो।

(ii) एक विषिष्ठ खिलाड़ी को कभी भी शामिल नहीं करना है।

हल – 16 खिलाड़ियों में से हाकी की टीम यानि 11 खिलाड़ियों का चयन $16C_{11}$ तरीको से हो सकता है यानि $n = 16$ तथा $r = 11$ अतः तरीके या संचय

$$16C_{11} = \frac{16!}{(16-11)!\,11!} = \frac{16!}{11!\,5!} = 4368$$

(i) एक विषिष्ठ खिलाड़ी के सदैव चयन से

$n = (16-1) = 15$ एवं $r = (11-1) = 10$

अतः कुल तरीकें $15C_{10} = \frac{15!}{(15-10)!10!} = 1001$

(iii) एक खिलाड़ी का कभी चयन न करने पर $n = 15$ तथा $r = 11$ अतः तरीके $15C_{11} = \frac{15!}{(15-11)!11!} = \frac{15!}{11!4!} = 1365$

उदाहरण 10 – एक थैले में 5 सफेद 4 काली तथा 3 लाल गेंद है। निम्न गेदें को कितने तरीकों से निकाला जा सकता है ?

(i) कोई भी 5 गेदें।

(ii) 3 सफेद गेंद।

(iii) 2 काली गेंद।

(iv) 3 सफेद 2 काली एवं 1 लाल गेंद।

हल – थैले में कुल 12 गेंदे हैं अतः

(i) 5 गेंद $12C_5$ तरीको से निकाली जा सकती हैं अर्थात –

$$12C_5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

(ii) 3 गेंद $5C_3$ तरीको से निकाली जा सकती हैं यानि

$$5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

(iii) 2 काली गेंद $4C_2$ तरीको से निकाली जा सकती हैं यानि $4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

(iv) 3 सफेद, 2 काली तथा 1 लाल गेंद निकालने के तरीके –

$$5C_3 \times 4C_2 \times 2C_1 = 10 \times 6 \times 2 = 120$$

नियम 2 – संचयों में अनुपूर्ति (Complementarity) की प्रवृत्ति होती है अर्थात –

$$nC_r = nC_{n-r} \quad \text{या} \quad nC_n = nC_0 = 1$$

चूँकि $nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$$nC_{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)![n-n+r]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

नियम 3 – n वस्तुओं से सभी संभाव्य संचयों की कुल संख्या $2^n - 1$ होती है।

चूँकि प्रत्येक वस्तु को दो तरीको से चुना जा सकता है या ता उसको चयन किया जाये या फिर उसे छोड़ दिया जायें। प्रत्येक वस्तु के दो तरीके अन्य वस्तु के दो तरीको से सम्बद्ध है।

इसलिये n वस्तुओं के चयन के तरीकों की संख्या

$2 \times 2 \times 2 \times ---n = 2^n$ होगी परन्तु इसमें एक परिस्थिति ऐसी भी शामिल है जिसमें प्रत्येक वस्तु को छोड़ दिया जाये। अतः संचयों की कुल संख्या $2^n - 1$ होगी।

संचयों की संख्या निम्न वैकल्पिक रीति के माध्यम से ज्ञात की जा सकती है –

$$nC_1 + nC_2 + nC_3 + nC_4 + ---- + nC_n = 2^n - 1$$

उदाहरण 11 – एक व्यक्ति के 7 मित्र हैं उनमें से एक या अधिक को वह रात्रि भोज पर कितने तरीकों से आमंत्रित कर सकता है।

हल – 1 या अधिक के चयन के तरीके की संख्या $= 2^7 - 1 = 127$

वैकल्पिक रीति – $7C_1 + 7C_2 + 7C_3 + 7C_4 + 7C_5 + 7C_6 + 7C_7$

$$= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 127$$

28.6 प्रायिकता में प्रयुक्त शब्दावली (Terminology)

प्रायिकता के परिकलन तथा सम्बन्धित प्रमेंयों के अध्ययन करने से पूर्व कुल महत्वपूर्ण शब्दों एवं प्रक्रियाओं की जानकारी अति आवष्यक है।

यादृच्छिक अभिप्रयोग (Random Experiment) – यह वह परीक्षण या अभिप्रयोग होते हैं जिनके सभी संम्भाव्य परिणाम संयोग (Chance) पर निर्भर करते है तथा किसी भी परिणाम की निष्चितापूर्वक भविष्यवाणी नहीं की जा सकती है। उदाहरणार्थ एक संतुलित पासे को फेंकने पर कोई सी भी संख्या आ सकती है। जिसके बारे में निष्चितापूर्वक भविष्यवाणी नहीं की जा सकती है। यह पूरी तरह संयोग पर निर्भर है। इसी प्रकार सुडौल सिक्कें की उछाल तथा तारा की गड्डी से पत्ता खींचना यादृच्छिक अभिप्रयोग का उदाहरण है।

घटना – किसी भी परीक्षण या अभिप्रयोग में संम्भाव्य परिणामों में से प्रत्येक परिणाम को घटना कहते हैं **उदाहरणार्थ** – सिक्के को उछालने पर दो घटनायें चित्त (Head) या पद (Tail) हो सकती है।

समसम्भावी घटना –यदि दो या अधिक घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना प्रायिकता हो तो उन्हें समसम्भावी (Equally Likely Events) कहते हैं : जैसे – सिक्के की उछाल में चित्त (H) या (T) आना समसम्भावी घटना के उदाहरण है।

सरल तथा मिश्रित घटना –किसी परीक्षण के एकल संभाव्य परिणाम के रूप में सरल या प्रारम्भिक घटना कहते हैं इसे अन्य घटनाओं के संयोजन के रूप में उपविभाजित नहीं किया जा सकता है, जैसे – एक पासे की फेंक किसी एक अंक का आना, सिक्के की उछाल में चित्त आना, ताष की गडड़ी में से एक बादषाह खींचना आदि।

वहीं दो या अधिक घटनायें जब एक साथ घटती या संयुक्त रूप से घटित होती है तो उसे संयुक्त घटना कहते हैं। जैसे – एक थैले में 5 काली तथा 4 सफेद गेंद है यदि दो–दो गेंद दोबार निकाली जाये तो यह प्रक्रिया मिश्रित घटना के अन्तर्गत आयेगी, यदि दो सरल घटनाओं का एक साथ घटित होना। जैसे – लाभ की गडड़ी से एक एक करके दो गुलाम के पत्ते खीचे जाये तो पहला गुलाम का पत्ता होगा सरल परन्तु पत्ता गुलाम का होना मिश्रित घटना के अन्तर्गत आता है।

* **स्वतंत्र एवं आश्रित घटनायें** – जब कभी दो घटनायें इस प्रकार से घटित होती है कि एक घटना का प्रभाव दूसरी घटना पर नहीं पड़ता है तो वे स्वतंत्र घटना में होती है। एक पासे को दो बार फेंकने या सिक्के को दो बार उछालने पर प्रत्येक बार के संभावित परिणाम एक दूसरे से स्वतंत्र है यदि ताष की गडड़ी से किसी पत्ते को खींचकर वापस गडड़ी में रखा जाये एवं पुनः पत्ता खीचा जाये तो परिणाम आपस में स्वतंत्र होगें

परन्तु जब घटनाओं के परिणाम पूर्व में घटित घटना के परिणामों पर निर्भर करते हों तो ऐसी घटनाओं को भ्रामित घटनायें कहते है यदि ताष की गडड़ी से बिना वापस किये दो पत्ते निकले जाये तो दूसरे पत्ते का परीणाम निकाले गये पहले पत्ते पर निर्भर करेगा

A के प्रति B स्वतंत्र घटना होगी यदि $P(B/A)=P(B)$

यदि A और B आश्रित घटनाये है तो B की प्रतिबन्धित प्रायिकता

$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

परस्पर अपवर्जी (Exclusive) घटनाये – यदि दो घटनायें एक साथ किसी परीक्षण में घटित नहीं होती है तो वह अपवर्जी घटनायें कहलाती हैं जैसे एक सिक्के की उछाल में एक साथ चित्त तथा पट नहीं आ सकता है अतः चित्त या पट आना अपवर्जी घटनायें हैं इसीलिये अपवर्जी घटनाओं के साथ साथ घटित होने की प्रायिकता शून्य होती है

यदि $P(A \cap B) = 0$ (A और B के साथ घटने की प्रायिकता)

एवं $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (A या B के घटत होने की प्रायिकता)

अतिव्यापी घटनायें (Overlapping or Compatible) - यदि एक घटना का अंष दूसरी घटना के साथ किसी अंष के साथ घटित हो जाये तो यह घटना अतिव्यापी घटनायें कहलाती है **उदाहणार्थ** :– ताष की गड्डी से एक पान का पत्ता तथा एक बेगम खींचना एक अतिव्यापी घटना है क्योंकि एक पान का पत्ता बेगम भी हो सकता है इस परिस्थिति में पान के पत्ते या बेगम खींचने की प्रायिकता निम्न होगी,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

निश्षेष घटनाये (Exclusive Events) – किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संम्भाव्य परिणामों सम्मिलित कर निष्षेष घटनायें कहलाती है एक सुडौल सिक्के के उछाल में दोही सम्भाव्य परिणाम चित तथा पट होते है अतः उक्त परीक्षण में दो ही निष्षेष घटनायें है इसी प्रकार पासे की फेंक में 6 निष्षेष घटनाये होती है।

अनुपूरक घटनायें (Complementary Event) – किसी भी परीक्षण में अनुकूल परिस्थितियों की संख्या घटना A द्वारा व्यक्त की जाती है। तथा इस अभिप्रयोग में प्रतिकूल परिस्थितियों की संख्या A की अनुपूरक घटना $\overline{A}$ कहलायेगी दोनों A तथा $\overline{A}$ परस्पर अपवर्जी तथा सामूहिक रूप से निष्षेष घटनायें कहलायेगी तथा उनकी प्रायिकता का योग होगा ।

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) - किसी पादृच्छिक अभिप्रयोग के सभी संम्भाव्य परिणामों का समुच्चय (Set) प्रतिदर्ष समष्टि कहलाता है इसे s से निरूपित करते है यह किसी परीक्षण के सभी निष्षेष घटनाओं का समूह है तथा इसका प्रत्येक विषिष्ट परिणाम प्रतिदर्ष बिन्दु कहलाता है। संकेत के तौर पर यदि $e_1 e_2 e_3$.............. यदि किसी परीक्षण के संम्भाव्य परिणाम है तो प्रतिदर्ष समष्टि

$$s = \{e_1 e_2 e_3 e_4 \dots\dots\dots\dots . e_4\}$$

प्रतिदर्ष बिन्दुओं की संख्या को n(s) से प्रर्दषित करते हैं।

28.7 प्रायिकता का परिकलन

प्रायिकता परिकलन हेतु निम्न चरण हैं –

किसी यादृच्छिाक अभिप्रयोग की घटना से सम्बन्धित समस्त अनुकूल तथा प्रतिकूल संम्भावित परिस्थितियों की संख्या ज्ञात कर ली जाती है जैसे ताष की गड्डी से किसी पत्ते के खींचने से सम्बन्धित परिस्थितियों की संख्या 52 है, सिक्के की उछाल में 2 तथा पासे की फेंक में कुल परिस्थितियों 6 है।

इसके पश्चात् घटना के घटित होने की n(A) की संख्या ज्ञात की जाती है।

घटना की अनुकूल परिस्थितियों को समग्र संम्भावित परिस्थितियों $n(s)$ से विभाजित कर दिया जाता है।

$$P(A) = \text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{कुल संम्भाव्य परिस्थितियों की संख्या}}$$

$$= \frac{n(A)}{n(s)}$$

उदाहरण 12 – ताष की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक निकाला जाता है तो निम्न की क्या प्रायिकता होगी–

(1) गुलाम होगा, (2) लाल रंग का पत्ता (3) चिड़ी का पत्ता (4) पान का बादषाह

हल– ताश के कुल पत्तों की संख्या =52 यानि कुल संम्भाव्य परिस्थितियाँ अर्थात $n(s) = 52$

(1) गुलाम की संख्या =4 यानि अनुकूल संम्भाव्य परिस्थितियाँ अर्थात $n(s) = 4$

अतः $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(2) लाल रंग के पत्तों की संख्या, यानि अनुकूल परिस्थितियाँ $n(A) = 26$

अतः $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(3) चिड़ी के पत्तों की संख्या, $n(s) = 13$

अतः $(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(4) पान का बादषाह, $n(A) = 1$

अतः $P(A) = \frac{1}{52}$

उदाहरण 13– एक थैले में 8 सफेद, 6 लाल, 6 हरी गेंद है निम्न की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(1) 1 सफेद गेंद (2) 2 लाल गेंद (3) 1 लाल और 1 हरी गेंद

हल– कुल गेंद की संख्या यानि कुल संम्भावित परिस्थितियाँ $n(s) = 20$

(1) 8 सफेद गेंदों में से 1 सफेद गेंद निकालने के तरीके $= 8\,C_1 = 8$

20 गेंदों में से कोई 1 गेंद निकालने के तरीके $= 20C_1 = 20$

$$\text{चूँकि प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल संम्भाव्य परिस्थितियाँ}}$$

इस उदाहरण में अनुकूल परिस्थितियों से तात्पर्य यह है कि हम 1. सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते है तो 1 सफेद गेंद कितने तरीकों से निकाली जा सकती है वहीं कुल संम्भाव्य परिस्थितियाँ यह हुयी कि 20 में से कोई भी एक गेंद निकाले अतः प्रायिक्ता

$$P(A) = \frac{8C_1}{20C_1} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(2) 2 लाल गेंद निकालने के तरीके $= 6C_1 = 15$

20 गेंदों में से कोई 2 गेंद निकालने के तरीके $= 20C_1 = 190$

अतः $P(A) = \frac{6C_2}{20C_2} = \frac{15}{190} = \frac{3}{58}$

(3) 1 लाल तथा 1 हरी गेंद निकालने के तरीके $= 6C_1 \times 6C_1 = 36$

कोई सी भी दो गेंद निकालने के तरीके $= 20C_2 = 190$

अतः $= P(A) = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}$

उदाहरण 14 – पासे की फेंक में 3 से अधिक बिन्दु वाले परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी।

हल – पासे की फेंक में कुल सम्भावित परिस्थितियाँ $n(s) = 6$

3 से अधिक बिन्दुओं की संख्या $= \{4,5,6\}$

अतः अनुकूल परिस्थितियाँ की संख्या $n(A) = 3$

इसलिये $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

उदाहरण–15 : 100 कार्ड पर 1 से 100 तक अंक लिखे गये हैं एक कार्ड यदृच्छया निकाला जाता है इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कार्ड (1) एक वर्ग हो (2) 13 का गुणांक हो (3) विसम संख्या एवं 80 से ऊपर हो

हल – कुल संम्भावित परिस्थितियाँ $n(s) = 100$

(1) खीचा गया पत्ता एक वर्ग हो यह तभी संम्भव है जबकि खीचा गया पत्ते पर $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$

में से कोई एक अंक अंकित हो तथा इस प्रकार के पत्तों की संख्या, $n(A) = 10$ है।

अतः $P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

(2) 13 के गुणक पत्तों की संख्या $\{13,26,39,52,65,78,91\}$

यानि $n(A) = 7$ अतः $P(A) = \frac{7}{100}$

(3) विसम संख्या एवं 80 से ऊपर की संख्या वाले पत्ते $= \{81,83,85,\ldots,99\}$

यानि $n(A) = 10$ अतः $P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

28.7.1 संयोगानुपात के सम्बन्ध में प्रायिकता का परिकलन –

प्रायिकता को किसी घटना के पक्ष अथवा विपक्ष के संयोगानुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है पक्ष के संयोगानुपात (oddsin favour) का पहला अंक P तथा दूसरा q के अनुरूप होता है वही विपक्ष के संयोगानुपात (odds against) में q तथ P के अनुरूप अंक होते है इन अनुपातों को प्रायिकता के माप में निम्नलिखित नियमों के अनुसार परिवर्तित किया जाता है –

पक्ष में संयोगानुपात p:q घटने की प्रायिकता $= \frac{p}{p+q}$

II	परिणाम					
I	1	2	3	4	5	6

विपक्ष में संयोगानुपात q:p न घटने की प्रायिकता $= \frac{q}{p+q}$

उदाहरण 16 – किसी दौड़ में चार घोड़ों A, B, C, D के पक्ष में जीतने का संयोगानुपात 1:2, 1:3, 1:4, 1:6 है। इस मान्यता के साथ कि दो या अधिक घोड़े एक साथ रेस नहीं जीत सकते, यह संम्भावना ज्ञात कीजिये कि उनमें से एक घोड़ा जीतेगा ।

हल – A के पक्ष में संयोगानुपात 1:2 है अतः प्रायिकता $= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = P_A$

B के पक्ष में संयोगानुपात 1:3 है अतः प्रायिकता $= \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = P_B$

C के पक्ष में संयोगानुपात 1:4 है अतः प्रायिकता $= \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} = P_C$

D के पक्ष में संयोगानुपात 1:6 है अतः प्रायिकता $= \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7} = P_D$

चूँकि सिर्फ एक ही घोड़ा रेस जीत सकता है इसलिये घटनाये परस्पर अपवर्जी हैं अतः A,B,C या D के जीतने की प्रायिकता

$$P = P_A + P_B + P_C + P_D = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{377}{420}$$

28.8 प्रायिकता प्रमेय (Probability theorem)

विविध प्रकार की घटनाओं की प्रायिकता का परिकलन करने हेतु अलग–अलग परिस्थितियों में विषिष्ट नियमों एवं प्रमेयों का अनुप्रयोग किया जाता है प्रायिकता सिद्धान्तों के अध्ययन में हम निम्न प्रमेयों का विस्तृत विवेचन करेंगें–

योग प्रमेय बर्नोली प्रमेय
गुणन प्रमेय बेयज़ प्रमेय

28.8.1 योग प्रमेय (Addition theorem) - यदि दो घटनाये A तथा B परस्पर अपवर्जी हो A तथा B दोनो की होने प्रायिकता क्रमषः P_A या P_B हो तो दोनो में से किसी एक घटना A या B के गठित होने की प्रायिकता $P(A) + P(B)$ होगी

यानि P(A या B) अथवा $= P_A + P_B$

समुच्चय सिद्धान्तों के संकेत के रूप में $P(A \cup B)$ अथवा $= P_A + P_B$

उदाहरण 17– दो पासो को फेकने पर निम्न की क्या प्रायिकता होगी

(1) 9 या 12 का योग प्राप्त होने की प्रायिकता
(2) कम से कम 10 का योग आने की प्रायिकता

हल – दो पासो की फेंक में कुल 36 परिणाम यानि 6×6 प्राप्त हो सकते जो कि निम्नवत है

1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

(1) 9 का जोड़ (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) यानि 4 तरीके से प्राप्त हो सकता है अतः प्रायिकता $P_A = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, 12 का जोड़ (6,6) यानि 1 तरीके से प्राप्त हो सकता है अतः प्रायिकता $P_B = \frac{1}{36}$

अतः 9 या 12 के जोड़ प्राप्त होने की प्रायिकता $= P_A + P_B$

अर्थात $\frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

(2) कम से कम 10 का योग तब प्राप्त होगा जबकि योग 10,11 या 12 आये

10 के जोड़ आने के तरीके (6,4), (4,6), (5,5) यानि 3

11 के जोड़ आने के तरीके (6,5), (5,6) यानि 2

12 के जोड़ आने के तरीके (6,6) यानि 1

अतः कुल प्रायिकता $= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

28.8.2 योग प्रमेय का संशोधित रूप (अपवर्जी घटनाओ के न होने पर)

जब दो घटनाओं में A और B में से या तो A या B या दोनो ही साथ घट सकती हैं तो इस दिषा में दोनो परस्पर आपस में अपवर्जी नहीं होगी ऐसी स्थिति में योग प्रमेय द्वारा प्राप्त किये जाने वाले प्रायिकता के हल को संषोधित रूप में प्रयोग किया जाता है। दोनो घटनाओ में अतिव्यापी या सर्वनिष्ठ अंष (overlapped or intersection part) को प्रायिकता के योग में से घटा दिया जाता है

अतः P (A या B) = P (A)+ P (B) – P (A और B)

इसे समुच्चय सिद्धान्त के संकेतो के रूप में लिखने पर

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

दो से अधिक घटनाओं के लिये सूत्र को निम्न रूप मे व्यक्त करते है–

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

उदाहरण 18 –52 पत्तो की गड्डी में से एक पत्ता खींचा जाता है प्रायिकता ज्ञात कीजिये?

(1) वह पत्ता पान का हो या बेगम हो ,

(2) वह काला पत्ता हो या बादषाह हो ,

हल– (1) ताष के 52 पत्तो में सें पान का पत्ता निकालने की प्रायिकता

$P_A = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

एक बेगम निकालने की प्रायिकता $P_B = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

लेकिन चार बेगमों में सें एक बेगम पान की भी शामिल होती है इसलिये पान की बेगम निकालने की प्रायिकता $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$
अतः पान का पत्ता तथा बेगम निकालने की प्रायिकता
यानि $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

(2) ताष में काले पत्ते 26 होते है अतः एक काले पत्ते निकालने की प्रायिकता $= \frac{26}{52}$
बादषाह निकालने की प्रायिकता $= \frac{4}{52}$
चूँकि दो बादशाह ऐसे भी होगे जो कि काले होते है एवं दो काले बादशाह निकालने की प्रायिकता = 2 / 52
अतः काला पत्ता या बादषाह निकालने की प्रायिकता $= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

उदाहरण 19 – 30 टिकटों में जिन पर प्रथम प्राकृत संख्याये (Natural Nembers) अंकित है एक टिकट यदृच्छया निकाला जाता है निम्न की प्रायिकता ज्ञात करिये–
(1) टिकट पर 3 या 5 का अपवर्त्य अंकित हो
(2) टिकट पर 4 या 6 का अपवर्त्य अंकित हो

हल – (1) 3 के अपवर्त्य आने की कुल घटनाये $A = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$ अर्थात 10 घटनाये है
5 के अपवर्त्य आने की कुल घटनाये
$B = \{5,10,15,20,25,30\}$ अर्थात 6 घटनाये है
3 तथा 5 दोनो के अपवर्त्यों में अतिव्यापी घटनाये (common) $= \{15,30\}$ अर्थात 2 घटनाये है
A के घटित होने की प्रायिकता $P_A = \frac{10}{30}$
B के घटित होने की प्रायिकता $P_B = \frac{6}{30}$
दोनों के एक साथ घटित होने की प्रायिकता $P(A \cap B) = \frac{2}{30}$
अतः 3 या 5 के अपवर्त्य घटित होने की प्रायिकता निम्न होगी

$$P(A \cup B) = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

(2) 4 के अपवर्त्य की कुल घटनाये $A = \{4,8,12,16,20,24,28\}$
6 के अपवर्त्य की कुल घटनाये $B = \{6,12,18,24,30\}$
परन्तु उपरोक्त दोनो में $\{12,24\}$ घटनाये अतिव्यापी है
अतः 4 या 6 के अपवर्त्य आने की प्रायिक्ता –

$$P(A \cup B) = \frac{7}{30} + \frac{5}{30} - \frac{2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 20– एक व्यक्ति 5 में से 3 निषाने सही लगाता है तथा दूसरा 4 में से 2 निषाने सही लगाता है यदि दोनो ही प्रयास करे तो सही निषाने लगाने की प्रायिकता क्या होगी ।

हल– पहले व्यक्ति के सही निषाना लगाने की प्रायिकता $P_A = {}^3/_5$

दूसरे व्यक्ति के सही निषाना लगाने की प्रायिकता $P_B = {}^2/_4$

चूँकि दोनो व्यक्ति भी सही निषाना लगा सकते है अतः दोनो के सही निशाना लगाने की प्रायिकता $P(A$ और $B)$ यानि $P(A \cap B)$

अर्थात $P_A \times P_B = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

अतः सही निषाना लगाने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात होनी –

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{4} - \frac{6}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

28.6.3 गुणन प्रमेय (Multi Plcation Theorem) – इस प्रमेय का प्रयोग तब किया जाता है जब दी हुयी स्वतंन्त्र घटनाओं के साथ–साथ घटने की प्रायिकता का अनुमान लगाना हो। यदि दो घटनायें पूर्ण रूप से स्वतंन्त्र है और एक घटना के घटित होने की प्रायिकता P_1 तथा दूसरी के P_2 है तो दोनों घटनाओं के साथ–साथ घटित होने की प्रायिकता $P_1 \times P_2$ होगी यानि दो या अधिक स्वंतन्त्र घटनाओं का एक साथ घटने की प्रायिकता उनके अलग–अलग घटित होने की व्यक्तिगत प्रायिकता का योग है।

अर्थात $P(A$ तथा $B) = P(A) \times P(B)$

समुच्चय के संकेताक्षरों के रूप में $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

तीन स्वतंन्त्र घटनाओं के सन्दर्भ में

P (A तथा B तथा C)$= P(A) \times P(B) \times P(C)$

प्रमाण – यदि A घटना कुल n_1 तरीको से हो सकती है जिनमें से m_1 तरीके अनुकूल हो और B घटना n_2 तरीकों से हो सकती है। जिसमें m_2 तरीके अनुकूल हों तो

$P(A) = \frac{m_2}{n_1}$ $\quad$ $P(B) = \frac{m_2}{n_2}$

यदि दोनो घटनाये साथ–साथ घटे तो आघार भूत प्रमेय के अनुसार कुल समभव्य परिस्थितियॉ $n_1 \times n_2$ होगी तथा अनुकूल परिस्थितिया $m_1 \times m_2$ होगी अतः और के साथ–साथ घटने की प्रकियता

$$P(A\,B) = \frac{m_1 \times m_2}{n_1 \times n_2} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = P(A) \times P(B)$$

उदाहरण 21– एक पांसा दो बार फेका जाता है पहली फेंक मे आना तथा दूसरी फेंक मे सम संख्या आने की प्रयिकता ज्ञात कीजिए ?

हल : दोनो घटनाये स्वतंन्त्र हैं,

पहली फेंक मे 3 आने की प्रयकियता =1/6

दूसरी फेंक मे सम संख्या 2,4,6 आने के तटीतो की संख्या $= 3$

इसलिए सम संख्या आने की प्रयिकता =3/6

अतः पहली फेंक में 3 तथा दूसरी फेंक मे सम संख्या आने की प्रयिकता $= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

उदाहरण 22 – दो पांसे चार बार फेंके जाते है। इस बात की क्या प्रयिकता होगी कि पहली, दूसरी, तीसरी तथा चौथी फेंक मे क्रमषः 9,10,11 तथा 12 का जोड़ प्राप्त हो ?

हलः दो पांसे को साथ फेकने पर सम्भावित परिणाम $= 6 \times 6 = 36$

पहली बार मे 9 के योग आने के तरीको की सख्या $(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)$ यानि 4

अतः 9 के जोड़ आने की प्रयिकता $= \frac{4}{36}$

दूसरी बार मे 10 के योग $(6,4)(4,6)(5,5)$ तरीको से आ सकता है अतः प्रयिकता $= \frac{3}{36}$

तीसरी फेंक मे 11 $\{(5,6)(6,5)\}$ आने की प्रयिकता $= \frac{2}{36}$ चौथी फेंक मे 12 $\{(6,6)\}$ आने की प्रयिकता =1/36

अतः कुल प्रयिकता $= \frac{4}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{2}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{69984}$

उदाहरण 23 – एक सिक्के की तीन उछाल में निम्न की प्रयिकता ज्ञात कीजिए ?

(i) तीनो बार चित्र (Head) आये (ii) दो बार चित तथा एक बार पट (Tail)

हलः सिक्के की हर बार उछाल का परिणाम एक स्वतंन्त्र घटना है,

(i) पहली बार में चित आने की सम्भावना =1/2

उसी प्रकार दूसरी व तीसरी बार मे चित आने की सम्भावना =1/2

अतः चारो बार चित आने की प्रयिकता $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(ii) 2 बार चित तथा 1 बार पट आने की प्रयिकता $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

परन्तु यह स्थिति (2H,IT) निम्न तीन संयोग से उत्पन्न हो सकती है

परिणाम	**प्रयास**	I	II	III
	अ	H	H	T
	ब	H	T	H
	स	T	H	H

अतः अभीष्ठ प्रायिकता $= 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

(वैसे 2 चिट तथा 1 पट 3 c_2 तरीको से आ सकते है) $3c_2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

उदाहरण 24 – एक थैले मे 5 लाल, 4 हरी तथा 3 सफेद गेंद है दो–दो करके गेंदे तीन बार निकाली जाती है तथा निकालने के पष्चात् वापस रख दी यह प्रयिकता ज्ञात कीजिये कि गेंद दोनो गेंदे पहली बार लाल फिर हरी तथा सफेद होगी ?

हल – चूँकि गेंद निकालने के पष्चात वापस रख दी जाती है अतः घटनायें स्वतंन्त्र होगी तथा कुल गेंदों की संख्या 12 है।

अतः 2 लाल गेंद निकालने के तरीके $= 5C_2$

12 गेंदों में से कोई भी दो गेंद निकालने के तरीके (संम्भाव्य परिस्थितियॉ) $= 12C_2$

अतः दो लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5C_2}{12C_2} = \frac{10}{66}$

इसी प्रकार दो हरी गेंद निकालने की प्रायिकता $=\frac{4C_2}{12C_2}=\frac{6}{66}$

इसी प्रकार 2 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $=\frac{3C_2}{12C_2}=\frac{3}{66}$

अतः अभीष्ठ प्रायिकता $=\frac{10}{66}\times\frac{6}{66}\times\frac{3}{66}=\frac{5}{726}$

उदाहरण 25 – उपरोक्त उदाहरण में यदि गेंद निकाली जाये तो प्रयिकता ज्ञात कीजिये कि गेंद अलग अलग रंगो की हो ?

हल : 12 में से तीन गेंदो निकालने के तरीके $=12c_3=220$ अलग अलग रंगो की गेंदो से तात्पर्य कि एक लाल फिर हरी तथा सफेद गेद निकाली जाये,

1 लाल गेद निकालने के तरीके $=5c_1=5$

1 हरी गेद निकालने के तरीक $=4c_1=4$

1 सफेद गेद निकालने के तरीक $=3c_1=3$

अतः कुल तरीके (अनुकूल परिस्थितियॉ) $=5\times4\times3$

इसलिये अभीष्ट प्रायिकता $=\frac{5\times4\times3}{220}=\frac{3}{11}$

उदाहरण 26 – ताश के खेल मे अच्छी तरह से मिलाये पत्तों को चार खिलाड़ियों मे बॉटा जाता है किसी विशिष्ट खिलाड़ी के पास चारो इक्के प्राप्त होने की किया प्रायिकता है ?

हल – प्रत्येक खिलाडी को 13 पत्ते बांटे जायेगे अतः 52 में से 13 पत्ते छॉटने के तरीके $=52c_{13}$

4 में इक्के में से 4 इक्के छाँटने के तरीकें $=4c_4$

शेष 48 पत्तों से 9 पत्ते छाँटने के तरीकें $=48c_9$

अतः विशिष्ठ खिलाड़ी के पास सारे इक्के होने की प्रायिकता $=\frac{4C_4\times48C_9}{52C_3}$

$$=\frac{1\times\frac{48!}{39!\,9!}}{\frac{52!}{13!\,39!}}=\frac{48!\times13!}{13!\times52!}=\frac{11}{4165}$$

28.8.4 सप्रतिबन्ध प्रायिकता (Conditional Probabiloty)– यदि दो घटनायें A तथा B आश्रित घटनायें हो तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता पहली घटना के घटित होने की प्रायिकता एवं दूसरी घटना के उस स्थित में घटित होने की प्रायिकता जबकि पहली हो चुकी हो इन दोनों का गुणनफल सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहलाती है। अर्थात यहॉ पर B तभी घटे जबकि A घटित हो चुकी हो। अतः एक घटना के घटित होने के बाद दूसरी घटना के घटित होने की संभावना क्या है? जैसे ताष के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाता है जोकि लाल है तथा यदि पत्ते की वापस गडडी में ने रखा जायें एवं दूसरा पत्ता फिर खींचा जाये तो दूसरी बार लाल पत्ता निकालने की प्रायिकता 25/51 होगी जोकि पूरी तरह से पहले बार खींचे गये पत्ते के परिणाम पर निर्भर है। अतः

$$P(A \text{ तथा } B)=P(A)\times P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

प्रमाण – माना A के घटित होने की परिस्थितियों की कुल संख्या यदि B घटित हो ना हो $m_1 + m_2$ है जिनमें से m_1 ऐसी परिस्थितियॉ है जिसमें A और B साथ–साथ घटती हैं –

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)/n} = \frac{m_1/n}{(m_1 + m_2)/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

इसलिये $P(A\,B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$

उदाहरण 27 – एक थैले में 6 सफेद गेंदे एवं 4 लाल गेंदे हैं। 3–3 गेंदे थैले में से निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजियें कि 3 गेंदे सफेद हो तथा तीन गेंदे लाल हो यदि –

(i) गेंदे पहली बार निकालनें के बाद वापस रख दी जाती है।

(ii) गेंदे वापस नहीं रखी जाती है।

हल – **(i)** 3 सफेद गेंद निकालन के तरीके $= 6c_3$

अतः 3 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{6C_3}{10C_3} = \frac{20}{120}$

3 लाल गेंद निकालने के तरीकें $= 4c_3$

अतः 3 लाल गेंद निकालन की प्रायिकता $= \frac{4C_3}{10C_3} = \frac{4}{120}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{20}{120} \times \frac{4}{120} =$ 180

(ii) पहली बार 3 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{6C_3}{10C_3} = \frac{20}{120} = P(A)$

चूँकि गेंदे निकालने के वापस नहीं रखी जाती हैं अतः 3 सफेद गेंदो के निकालने बाद सफेद गेंदो की संख्या 3 तथा कुल गेंदो की संख्या नहीं बचेगी ऐसी परिस्थितियों में

3 लाल गेंद निकालने के तरीकें $= 4C_3$

कोई भी 3 गेंद निकालने के तरीके $= 7C_3$

अतः 3 लाल गेंद निकालन की प्रायिकता $= \frac{4C_3}{7C_3} = \frac{4}{35} = P\left(\frac{B}{A}\right)$

इसलिए अभीष्ट प्रायिकता $P(A\,B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$

$= \frac{20}{120} \times \frac{4}{35} =$ 105

उदाहरण 28 – ताश के चार पत्ते एक–एक करके बगैर पुर्नस्थापित के गड्डी से खींचे जाते हैं? प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि वह अलग–अलग रंगों के होगें?

हल – चूँकि ताश की गड्डी में प्रत्येक रंग का एक पत्ता होता है एवं पहला पत्ता किसी भी रंग का हो सकता है?

अतः पहले पत्ते के किसी भी रंग के होने की प्रायिकता = 52/52

एक पत्ते को निकालने के बाद कुल 51 पत्तें शेष रहते हैं तथा तीन वर्गो के 39 पत्तें शेष रह जाते है?

अतः दूसरे रंग के पत्ते के होने की प्रायिकता $= \frac{39}{51}$

इसी प्रकार तीसरे रंग के पत्ते के होने की प्रायिकता $= \frac{26}{50}$

इसी प्रकार चौथे रंग के पत्ते के होने की प्रायिकता $= \frac{13}{49}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{52}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{26}{50} \times \frac{13}{49} = \frac{2197}{20825}$

उदाहरण 28 – ताष के 52 पत्तों से यदि चार पत्ते खीचे जाने हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि वह पत्ते एक बादषाह, एक बेगम, एक गुलाम तथा एक इक्का होगें यदि

(1) चारों पत्ते एक साथ खीचें जाते हैं

(2) एक एक करके पुर्नस्थापन के साथ चार पत्ते खीचे जाते हैं

(3) एक एक करके बगैर पुर्नस्थापन के याथ चार पत्ते खीचें जाते हैं

हल – चारों पत्ते एक साथ खीचने का तात्पर्य यह है कि यह एक ही घटना है तथा चार पत्ते निकाले जाने के कुल तरीकों की संख्या$= 52C_4 = 270725$ बादशाह, गुलाम, बेगम तथा इक्के में से प्रत्येक के एक पत्ता खीचने के तरीके $= 4C_1$ इसलिये अनुकूल परिस्थितियों की संख्या $= 4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1 = 256$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1}{52C_4} = \frac{256}{270725}$

(2) एक एक करके पुर्नस्थापन के साथ चार पत्ते खीचने का तात्पर्य कि यहाँ पर चार घटनाये सम्पन्न हो रही है जो कि स्वतंत्र है तथा निम्न हैं

1 एक बादशाह के निकालने की प्रायिकता $= \frac{4C_1}{52C_1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

2 एक बेगम के निकालने की प्रायिकता $= \frac{1}{13}$

3 एक गुलाम के निकालने की प्रायिकता $= \frac{1}{13}$

4 एक इक्का के निकालने की प्रायिकता $= \frac{1}{13}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{28561}$

(3) बगैर पुर्नस्थापन के एक एक कर चारों पत्ते खीचने पर चारों घटनाये आपस में आश्रित होगीं जो कि निम्न है –

1. एक बादशाह के खीचे जाने की प्रायिकता $= \frac{4}{52}$
2. एक बादशाह के निकाले जाने के पश्चात् बेगम के आने की प्रायिकता $= \frac{4}{51}$
   (चूँकि 1 बादशाह के लिकालने के पश्चात् पत्तों की कुल संख्या 51 होगी)
3. गुलाम के निकाले जाने की प्रायिकता जबकि बादशाह बेगम निकाले जा चुके हैं $= \frac{4}{50}$
4. इक्के के निकाले जाने की प्रायिकता जबकि बादशाह , बेगम, गुलाम निकाले जा

चुके है $= \frac{4}{49}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{4}{50} \times \frac{4}{49} = \frac{8}{812175}$

28.6.5 कम से कम एक घटना घटने की प्रायिकता –अनेकों स्वतंत्र घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता के परिकलन हेतु सभी घटनाओं के न घटित होने की प्रायिकता ज्ञात कर उसे 1 में से घटा दिया जाता है।

सूत्रानुसार – यदि पहली, दूसरी, तीसरी .... घटना के घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots\dots.. P_n$ हैं तो उनके न घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)\dots..(1-P_n)$ होगी

सभी घटनाओं के न घटित होने की मिश्रित प्रायिकता $(1-P_1)(1-P_2)\dots(1-P_n)$

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता निम्न होगी–

$$1-\{(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)\dots..(1-P_n)\}$$

उदाहरण 30 – एक कमरे में चार बल्ब लगे हुये हैं जिनके सही प्रकाश देने की यानि ठीक होने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$ व $\frac{1}{5}$ है इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि कमरे में प्रकाश हो ही जाये

हल– कमरे में प्रकाश होने के लिये कम से कम एक बल्ब का प्रकाश देना जरूरी है

पहले, दूसरे, तीसरे तथा चौथे के प्रकाष न देने की प्रायिकता क्रमशः

$\left(1-\frac{1}{2}\right), \left(1-\frac{1}{3}\right), \left(1-\frac{1}{4}\right)$ तथा $\left(1-\frac{1}{5}\right)$ होगी

इसलिये सभी घटनाओं के घटित न होने की प्रायिकता निम्न होगी –

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

अतः कम से कम 1 बल्ब के प्रकाष देने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

उदाहरण 31– माना कि 36 वर्ष की आयु वाले एक व्यक्ति A के 72 वर्ष तक जीवत रहने के विपक्ष में संयोगानुपात 11:5 तथा 41 वर्ष के दूसरे व्यक्ति B के 77 वर्षों तक जीने के पक्ष में संयोगानुपात 3:5 है इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि दोनों में से कम से कम एक व्यक्ति अगले 36 सालों तक जीवित रहेगा।

हल – माना के अगले 35 वर्षों तक दोनों में से कोई भी जीवित नही रहता है, A के जीवित रहने के विपक्ष में संयोगानुपात 11:5 (यानि q:p) अतः जीवित रहने की प्रायिकता

सूत्रानुसार $P_A = \frac{q}{(p+q)} = \frac{11}{16}$

चूँकि B के जीवित रहने के पक्ष में संयोगानुपात 3 : 5 $(p:q)$

अतः सूत्रानुसार जीवित रहने की प्रायिकता $= \frac{p}{p+q} = \frac{3}{8}$

एवं न जीवित रहने की प्रायिकता $P_B = 1 - {}^{3}/_{8} = {}^{5}/_{8}$

अतः दोनों में से कोई जीवित न रहे इसकी प्रायिकता $= P_A \times P_B = \frac{11}{16} \times \frac{5}{8}$

दोनों में से कम से कम एक जीवित रहे की प्रायिकता $= 1 - \left(\frac{11}{16} \times \frac{5}{8}\right) = \frac{73}{128}$

28.6.6 बर्नोली प्रमेय (Bernoulli theorem)–यदि किसी घटना के एक परीक्षण में घटित होने या सफलता की प्रायिकता ज्ञात हो तो कुल n परीक्षणों में से निष्चित रूप से r बार घटित होने की प्रायिकता जेम्स बर्नोली द्वारा दिये गये निम्न सुत्र से ज्ञात की जा सकती है–

$$P(r) = nc_r p^r q^{n-r}$$

$p =$ घटना होने या सफलता की प्रायिकता, $q =$ घटना के न होने की प्रायिकता $n =$ प्रयासों की कुल संख्या, $r =$ सफलता या घटना होने की संख्या $nc_r = n$ में से r वस्तुओं के संयोग की संख्या

प्रमाण – घटना के एक बार घटित होने की प्रायिकता $= P$

घटना के r बार घटित होने की प्रायिकता $p \times p \times p \ldots \ldots . . r$ बार $= p^r$

घटना के $(n-r)$ बार न घटित होने की प्रायिकता $= q \times q \times q \ldots (n-r)$ बार $= q^{n-r}$

घटना के r बार घटित तथा $(n-r)$ न घटित होने की संयुक्त प्रायिकता $= p^r q^{n-r}$

परन्तु n प्रयासों में से r बार सफलता और $(n-r)$ असफलता कुल nc_r तरीकों से प्राप्त हो सकती है अतः निष्चित रूप से r बार घटना के घटित होने की प्रायिकता

$$P(r) = nc_r \, p^r q^{n-r}$$

उदाहरण 32 – छः सिक्कों को उछालने पर 4 चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

हल – प्रयासों की संख्या $n = 6$, सफलता की आवृती, $r = 4$

असफलता की आवृति $(n-r) = 6 - 4 = 2$

सफलता की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$, असफलता की प्रायिकता $q = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= nc_r p^r q^{n-r}$

$$= 6c_4 \left(\frac{1}{2}\right) 4 \left({}^{1}\!/_{2}\right)^2 = 15 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{64}$$

उदाहरण 33– आठ सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं निम्न परिणाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिये

(1) एक चित (2) कम से कम 6 चित । (3) कोई चित नहीं (4) सभी चित

हल– (1) $n = 8, r = 1, p = q = {}^{1}\!/_{2}$

अतः एक चित आने की प्रायिकता $= nc_r p^r q^{n-r}$

$$= 8c_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} = \frac{8}{256} = \frac{1}{32}$$

(2) कम से कम 6 चित का तात्पर्य है कि 6 बार या 7 बार या 8 बार चित आये अतः तीनों की प्रायिकता ज्ञात कर उसका योग किया जायेगा,

$$n = 8, r = 6,7,8 \quad p = q = \frac{1}{2}$$

6 चित आने की प्रायिकता $p(6) = 8c_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{256}$

7 चित आने की प्रायिकता $p(7) = 8c_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{8}{256}$

8 चित आने की प्रायिकता $p(8) = 8c_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{256}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256}$

(3) कोई चित नहीं की दषा में $n = 8, r = 0,\ p = q = {}^1/_2$

अतः $p(0) = 8c_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1 \times \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$

(4) सभी चित आने की दशा में $n = 8, r = 8,\ p = q = {}^1/_2$

अतः $p(8) = 8c_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$

उदाहरण 34 –एक जहाज के बन्दरगाह पर सुरक्षित पहुँचने के विपक्ष में संयोगानुपात 4:2 इस बात की क्या संभावना है कि 5 में कम से कम 4 जहाज सुरक्षित रूप से पहुँच जायेगें।

हल– चूँकि जहाज के सुरक्षित पहुँचने के विपक्ष में संयोगपनुपात $= 4:2$

अतः $p = \frac{2}{6}$ एवं $q = \frac{4}{6}$

कम से कम 4 जहाजों के सुरक्षित पहुँच जाने की प्रायिकता

$$p(4) + p(5) = 5c_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^1 + 5c_5\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^0$$
$$= 5.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$$
$$= \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$$

28.8.7 बेज प्रमेय– प्रतिलोम प्रायिकता (Bayes theorem Inverse Probability)

बेज प्रमेय वास्तव में सप्रतिबन्ध के अनुसार पूर्व प्रायिकता ज्ञात करने के उपरान्त घटना से सम्बन्ध जो अतिरिक्त एवं नवीन सूचना उपलब्ध होती है उसके आधार पर पूर्व में प्रायिकता

को संषोधित केया जाता है इस प्रकार संषोधित को उत्तरवर्ती प्रायिकता(Revised or Posterior Probability) भी कहते है इस सिद्धान्त का विकास इंग्लैण्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ रेवरेण्ड टॉमस बेज (1702–1761) द्वारा किया गया था। इस प्रमेय का अत्याधिक महत्वपूर्ण एवं रोचक अभिप्रयोग होता है जिसके माध्यम विवेकपूर्ण निर्णय लेने में बड़ी सहायता मिलती है।

चूंकि सप्रतिबन्ध प्रायिकता एक घटना के घटित होने के बाद दूसरी घटना की प्रायिकता की भविष्यवाणी है, यदि अवलोकित घटना अनेक स्वतंन्त्र या असंयुक्त घटनाओं में से किसी एक कारण से घटित हुई है तो इस बात की सप्रतिबन्ध प्रायिकता कि घटना किसी एक विषिष्ट घटना का परिणाम है उस की प्रतिलोम प्रायिकता कहलाती है अर्थात प्रतिलोम प्रायिकता किसी अवलोकित घटना के कारण विषेष की माप का अनुमान है जिसका परिकलन बेज प्रमेय के माध्यम से किया जाता है।

उदाहरण के तौर पर दो कम्पनियां कूलरों का निर्माण करती है कम्पनी A तथा B के कूलरों के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता P_A तथा P_B यदि एक दोषपूर्ण कूलर को चुना जाता है तो यह प्रायिकता ज्ञात करना कि वह दोषपूर्ण कूलर कम्पनी A या B द्वारा बनाया गया है प्रतिलोम प्रायिकता का उदाहरण है। इसी प्रकार यदि दो कलश A तथा B में नीले तथा लाल रंग की गेंद है यदि एक गेंद को निकाला जाता है एवं वह लाल रंग की पायी जाती है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह A या B कलश से निकाली गयी हो यह भी बेज प्रमेय या प्रतिलोम प्रायिकता का ही विषय है।

28.8.8 बेज़ प्रमेय के अनुसार प्रतिलोम प्रायिकता का सूत्र

यदि कोई घटना B, n परस्पर अपवर्जी एवं निष्षेष घटनाओं A_1, A_2, A_3,--------A_n में से किसी एक के संयोजन में घटित हो सकती है और यदि B घटना वास्तव में घटती है तथा $P(B) \neq 0$ तो इस बात की क्या प्रायिकता कि इससे पूर्व विषिष्ट A_i (i = 1,2,3----n) घटी है, निम्न सूत्रानुसार ज्ञात की जायेगी–

$$P(A_i / B) = \frac{P(Ai \text{ and } B)}{P(B)} \quad (i = 1,2,3----n)$$

जहाँ पर $P(A_i / B)$ के दिये होने A_i की उत्तरवर्ती या संशोधित प्रायिकता है

$P(A_i)$ (i = 1,2,3----n) घटी है, निम्न सूत्रानुसार ज्ञात की जायेगी –

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \text{and } B)}{P(B)} \quad (i = 1,2,3----n)$$

जहॉ पर $P\left(\frac{A_i}{B}\right)$, B के दिये होने A_i की उत्तरवर्ती या संशोधित प्रायिकता है।

$P(A_i) = A_i$ की मूल या पूर्ववर्ती प्रायिकता है।

$P(A_i$ और $B) = P(A_i \cap B)$ तथा B घटना की संयुक्त प्रायिकता है।

P(B) = संयुक्त प्रायिकताओं का जोड़ है

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + --- + P(A_i \cap B)$$

अतः समुच्चय सिद्धान्त का उपयोग करते हुये प्रतिलोम प्रायिकता का सूत्र –

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + - - - + P(A_i \cap B)}$$

उदाहरण 35 – एक गेंद बनाने वाले कारखाने में तीन मशीनें A, B, C कुल गेंद उत्पादन का 35%, 40%, तथा 25% उत्पादन करती हैं। उनके उत्पादन में 6%, 4% तथा 8 % गेंदे दोषपूर्ण पायी जाती हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि दोषपूर्ण गेंद का उत्पादन A, B, C द्वारा किया गया है?

हल – चयनित गेंद के A, B, C द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता को A_1, A_2 और A_3 मानने पर –

$P(A_1) = \frac{35}{100} = 0.35, P(A_2) = 0.40,$ तथा $P(A_3) = 0.25$

संयुक्त तथा उत्तरवर्ती प्रायिकता का परिकलन

घटना	पूर्व प्रायिकता $P(A_i)$	सप्रतिबन्ध प्रायिकता $P\left(\frac{A_i}{B}\right)$	संयुक्त प्रायिकता $P(A_i \times B)$	उत्तरवर्ती प्रायिकता $P\left(\frac{A_i}{B}\right) = 4 \div P(B)$
1	2	3	4	5
A_1	0.35	0.06	.021	.021÷.057=.368
A_2	0.40	0.04	.016	.016÷.057=.280
A_3	0.25	0.08	0.020	.020÷.057=.35
योग			0.057	

निष्कर्ष – पूर्ववर्ती सूचना के आधार पर यही कहा जा सकता है कि दोषपूर्ण गेंद दूसरी मशीन से चुनी गयी है क्योंकि इसकी प्रायिकता $P(A_2)$ सर्वाधिक है परन्तु अतिरिक्त सूचना या उत्तरवर्ती के आधार पर अंतिम निष्कर्ष के तौर पर यह कहा जा सकता है कि दोषपूर्ण गेंद A_1 मशीन से ली गयी है क्योंकि इसकी उत्तरवर्ती प्रायिकता सर्वाधिक है।

उदाहरण 36 – तीन कलश रखे गये है पहले कलश में 3 सफेद तथा 2 लाल गेंद हैं दूसरे कलश में 1 सफेद तथा 4 लाल गेंद है तथा तीसरे कलश में 2 सफेद और 3 लाल गेंद है। एक को यादृच्छिक रूप से चयन कर एक गेंद निकाली जाती है जोकि सफेद निकलती है। प्रायिकता ज्ञात कींजियें कि वह गेंद (i) पहले कलश से। (ii) दूसरे कलश से (iii) तीसरे कलश से निकाली गयी है।

हल – चूँकि तीन कलश है अतः किसी एक कलश के चुने जाने की प्रायिकता (पूर्ववर्ती प्रायिकता) $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = {}^1/_3$

पहले कलश से सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $P\left(\frac{B}{A_1}\right) = \frac{3}{5}$

इसी प्रकार $P\left(\frac{B}{A_2}\right) = \frac{1}{5}$ एवं $P\left(\frac{B}{A_3}\right) = \frac{2}{5}$

अतः पहले कलश से सफेद गेंद निकालने की संयुक्त प्रायिकता

$P(A_1$ और $B)$ यानि $P(A_1B)$ या $P(A_1 \cap B)$ होगी।इसलिये

$$P(A_1B) = P(A_1) \times P\left({}^{B}/_{A_1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{2}{15}$$

इसी प्रकार $P(A_2B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

इसी प्रकार $P(A_3B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

चूँकि संयुक्त प्रायिकताओ का $P(B)$ निम्नवत् होगा

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{12} = \frac{2}{5}$$

(i) अतः सफेद गेंद के पहले कलश से निकाले जाने की प्रतिलोम प्रायिकता

$$P\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{{}^{3}/_{15}}{{}^{2}/_{5}} = \frac{1}{2}$$

(ii) सफेद गेंद के दूसरे कलश से निकाले जाने की प्रतिलोम प्रायिकता

$$P\left({}^{A_2}/_{B}\right) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{{}^{1}/_{15}}{{}^{2}/_{5}} = \frac{1\times5}{15\times2} = \frac{1}{6}$$

(iii) सफेद गेंद के तीसरे कलश से निकाले जाने की प्रतिलोम प्रायिकता

$$P\left({}^{A_3}/_{B}\right) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{{}^{2}/_{15}}{{}^{2}/_{5}} = \frac{2\times5}{15\times2} = \frac{1}{3}$$

28.9 प्रायिकता का महत्व तथा अनुप्रयोग

यद्यपि प्रायिकता का आरम्भिक विकास संयोग प्रधान खेलों विषेष कर जुआ तथा लाटरी आदि क्षेत्रों में उपयोग के पर हुआ परन्तु आधुनिक समय में प्रायिकता का प्रयोग सामाजिक, आर्थिक, बीमों का व्यवसायिक राजनैतिक एवं वैज्ञानिक समेत उन सभी क्षेत्रों में होता है जहाँ अनिष्चितता के साथ जोखिम चुनौती के रूप में सामने आते हैं तथा व्यक्ति को हर परिस्थितियों के अनुसार विवेक निर्णय लेने होते हैं अतः वर्तमान में इसका प्रयोग एक रोचक वैज्ञानिक तथा महत्वपूर्ण विषय के रूप में होने लगा है इसके विभिन्न क्षेत्रों में निम्न अनुप्रयोग हैं।

28.9.1. संयोग के खेलों व सट्टा लगाने का आधार प्रायिकता का उदभव एवं विकास संयोग तथा सट्टा जनित खेलों के ही माध्यम से हुआ है इस सिद्धान्त के प्रयोग से किसी भी संयोग तथा सट्टा आदि का अनुमान लगााना आसान हो गया है जिसके कारण से

किसी भी परिस्थितियों में विवेकपूर्ण निर्णय लेने में अत्यधिक सहायता मिलने लगी, प्रत्येक वैकल्पिक परिणामों या समस्त सम्भाव्य परिणामों की प्रायिकता से खेल की बाजी के समस्त प्रत्याषित मूल्यों का किया जाने लगा, अतः संयोग तथा सट्टाजनित खेलों जैसे घुड़दौड़ , पासे फैंकना, सिक्के की उछाल, लॉटरी आदि में इस सिद्धान्त का योगदान महत्वपूर्ण है।

28.9.2. सांख्यिकी नियमों का आधार प्रायिकता के सिद्धान्तों के माध्यम से धारे–धीरे सांख्यिकीय के नियम तथा सिद्धान्तों के विकास में महत्वपूर्ण सहायता मिली है ''सांख्यिकीय नियमितता नियम'' प्रतिचयन के नियम तथा ''महांक जड़ता नियम'' मूल रूप से प्रायिकता सिद्धान्त पर ही आधारित है।

28.9.3. सांख्यिकीय निर्वाचनों में अनुप्रयोग– सांख्यिकीय निर्वचनों हेतु समग्र का परीक्षण प्रतिदर्ष समंकों के माध्यम से किया जाता है जो कि इस प्रायिकता पर आधारित कि यादृच्छिक रूप से चयनित यथोचित प्रतिदर्ष समष्टि की मूलभूत अभिलक्षणों का पर्याप्त मात्रा में प्रतिनिधित्व करते है।

28.9.4. परिकल्पना एवं सार्थकता परीक्षणों का आधार– प्रायिकता सिद्धान्तों के माध्यम् से परिकल्पना तथा सार्थकता परीक्षणों हेतु सहायता मिलती है प्राथिकता के माध्यम् से न सिर्फ तर्क पूर्ण अनुमान एवं प्रत्याषित मूल्य को मापने में मदद मिलती है अपितु प्रायिकता सिद्धान्त कई वंटनो जैसे दिपद्व वंटन बर्नौली प्रमेय,प्यॉयसा वंटन प्रसामान्य वंटन का आधार है जिसके सहायता से प्रत्याषित आवृति से कर सार्थकता का परीक्षण किया जाता हैं।

28.9.5. सांख्यिकीय निर्णयन का आधार – प्रायिकता सिद्धान्त के अनुप्रयोग के बिना सांख्यिकीय निर्णय सिद्धान्त की कल्पना नहीं की जा सकती हैं। वस्तुतः निर्णय सिद्धान्त प्रायिकता के मूलभूत नियमों तथा अवधारणाओं तथा प्रत्याषित मूल्यों के प्रयोग पर आधिारित है। अभिप्रयोगो और परीक्षणों की सहायता से प्रत्येक क्षेत्र की समस्याओ के हल हेतु प्रायिकता के आनुमाविक अवधारणा का प्रयोग किया जाता है जिन परिस्थितियों में वास्तविक और वस्तुनिष्ठ मापन संभव नही होता है वहाँ व्यक्तिनिष्ठ प्राथिकताओं के प्रयोग द्वारा निर्णय लिये जाते है। अतः प्राथिकता के सिद्धान्तों का सांख्यिकीय निर्णयन की प्रकिया में महत्वपूर्ण योगदान हैं।

28.9.6 आर्थिक एवं व्यावसायिक निर्णयों में प्रयोग – आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रो में विषेष तौर पर बीमा, निवेग, वितीय, तथा पूंजीगत बाजारों में अनिष्चितताओं तथा जोखिमों के कारण भविष्य का ऑकलन तथा पूर्वानुमान हमेषा से ही एक चुनौती पूर्ण कार्य रहा है। परन्तु प्रायिकता के विभिन्न सिद्धान्तों कें माध्यम से उनको चुनौती पूर्ण परिस्थितियों का तार्किक,वैज्ञानिक तथा विष्लेषण करना अत्याधिक सरल हो जाता है। जिसमें इन क्षेत्रों में प्रायिकता के सिद्धान्त उपयोगी होने के साथ–साथ लोकप्रिय भी हैं।

28.10 सारांश

सारांश के तौर पर संयोग आधारित खेलो, जुऐ तथा सट्टे की है परन्तु प्रायिकता ने अपने आरम्भ से वर्तमान समय तक एक लंबी यात्रा तय की है तथा आज यह सिद्धान्त अनेकों विषयों तथा क्षेत्रों में महत्वपूर्ण योगदान कर रहा है।

अतः आधुनिक युग में प्रायिकता मात्र अटकलबाजी या भावनात्मक कथन तक सीमित न रह कर एक रोचक तर्क सम्मत् एवं वैज्ञानिक स्वरूप धारण कर चुका है जिसके अपने नियम,

प्रमेय व सिद्धान्त हैं तथा अवधारणायें हैं। जिन्होनें प्रायिकता को अलग–अलग आयाम प्रदान किये है।

वर्तमान युग में प्रायिकता सिद्धान्त का तीव्र गति से विकास हुआ है और आज सामाजिक, आर्थिक, भौतिक और प्राकृतिक विज्ञानों का कोई भी ऐसा क्षेत्र नहीं है जिसमें प्रायिकता सिद्धान्त प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से अनुप्रयोग न होता हो, वास्तव में आज प्रायिकता के सिद्धान्त व्यवसाय, वित्तीय पूँजी बाजारों बीमा क्षेत्र तथा अर्थव्यवस्था के अन्य महत्वपूर्ण क्षेत्रों के अध्ययन हेतु अपरिहार्य हो गये है। यह सांख्यिकीय निर्वचन का एक परमावष्यक उपकरण है और अनिर्षिचित एवं जोखिम की स्थिति में विवेकपूर्ण निर्णय लेने की प्रक्रिया का सुदृढ़ एवं अनिवार्य आधार है।

28.11 बहुविकल्पीय प्रश्न

(1) प्रायिकता की चिर प्रतिस्ठित अवधारणा के जनक कौन है ?

(क) स्पाईगेल (ख) मार्कोस (ग) लाप्लेस (घ) पोपोब

(2) प्रायिकता की आगमनात्मक दृष्टिकोण पर कोन सी विचार धारा निर्भर है ?

(क) सांख्यिकीय सापेक्ष (ख) चिर प्रतिष्ठित (ग) आघुनिक (घ) व्यक्तिष्ठ

(3) प्रायिकता को समुच्चय सिद्धान्त के रुप में व्यक्त करने वाली अवधारणा है ?

(क) सापेक्ष आवृति (ख) उत्तर वर्ती (ग) अभिग्रहीतीय (घ) चिर प्रतिष्ठित

(4) प्रायिकता के आघार (foundation of probabilty) के लेखक कौन है?

(क) रॉनेल्ड फिशर (ख) मार्कोव (ग) बर्नोली (घ) कोल्मोगोरोव

(5) संयोग प्रधान खेलो में कौन सी प्रायिकता की अवघारणा मुख्यतया प्रयुक्त होती है?

(क) उत्तर वर्ती (ख) व्यक्तिनिष्ठ (ग) पूर्ववर्ती (घ) अभिगृहीतीय

(6) छः पहलू वाले तीन पासे यदि उछाले जाये तो कितने संम्भाव्य परिणाम होगें?

(क) 216 (ख) 36 (ग) 256 (घ) 18

(7) चार पुस्तको A,B,C,D में से दो–दो के कितने क्रमचय बनेगे ?

(क) 6 (ख) 8 (ग) 4 (घ) 30

(8) 6 सीटो पर चार लोग कितने तरीको से बैठ सकते है ?

(क) 120 (ख) 240 (ग) 60 (घ) 30

(9) 6गेदो में से 2 गेंदो कितने तरीको से निकाली जा सकती है ?

(क) 15 (ख) 12 (ग) 10 (घ) 18

(10) मुम्बई से कोलकत्ता के यदि रास्ते है तो एक व्यक्ति कितने तरीको से आ जा सकता है ?

(क) 12 (ख) 1 (ग) 24 (घ) 36

(11) चार सिक्कों की उछाल में कुल सम्भाव्य घटनाये होगी ?

(क) 16 (ख) 8 (ग) 6 (घ) 4

(12) P (AB) यानि P(A और B) का मान परस्पर अपवर्जी घटनाओ के लिये होगा ?

(क) 1 (ख) 0 (ग) 1 से कम (घ) 1 से ज्यादा

(13) किसी घटना के घटित होने पक्ष में यदि संयोगनुपात 3:5 है तो घटना के घटित होने की प्रयिकता होगी ?

(क) $\frac{3}{5}$ (ख) $\frac{5}{8}$ (ग) $\frac{3}{8}$ (घ) $\frac{5}{3}$

(14) किसी घटना के घटित होने के विपक्ष में संयोगानुपात यदि 4:7 है तो घटना के घटित होने की प्रयिकता होगी ?

(क) $\frac{4}{11}$ (ख) $\frac{7}{11}$ (ग) $\frac{7}{4}$ (घ) $\frac{4}{7}$

(15) प्रतिलोम प्रायिकता का हल किस विद्वान के द्वारा दिया गया है ?

(क) पास्कल (ख) फरमैट (ग) बैज (घ) माइज़ेज

(16) अनुपूरक घटनाओ का योग हमेषा होता है ?

(क) 0 (ख) 1 (ग) 1 से कम (घ) 1 से ज्यादा

उत्तरमाला – (1) ग (2) क (3) ग (4) घ (5) ग (6) क (7) घ (8) ख (9) क (10) घ (11) क (12) ख (13) ग (14) ख (15) ग (16) ख

28.12 लघु उत्तरीय प्रश्न

(1)निम्न को संक्षेप मे परिभाषित कीजिये ।

(i) सरल घटनायें **(ii)** संयुक्त घटनाये **(iii)** परस्पर अपवर्ती घटनाये **(iv)**निश्शेष घटनाये **(v)** अतिव्यापी घटनाये

(2) उत्तरवर्ती एवं पूर्ववर्ती प्रयिकता में संक्षेप में अंतर बताइये।

(3) क्रमचय तथा संचय में परस्पर सम्बन्ध बताइये।

(4) प्रतिदर्ष समष्टि को संक्षेप में परिभाषित कीजिये ।

(5) अनुकूल परिस्थितियो तथा कुल संम्भाव्य परिस्थितियों को समझाईये।

28.13 संख्यात्मक प्रश्न

(1) एक व्यक्ति A 70% दषाओ में सच बोलता है तथा दूसरा व्यक्ति 80% दषाओ में सच बोलता है एक ही तथ्य का वर्णन करते हुये वह कितने प्रतिषत दषाओ में एक दूसरे के विरुद्ध बोलेगे ?

(संकेत– A तथा B के सत्य बोलने की प्रांयिकता क्रमशः 0.7 एवं 0.80 एक दूसरे के विरुद्ध बोलेगे जबकि, A सत्य बोले एवं B झूट बोले या A झूट बोल तथा B सत्य बोले 70 $\times$.20 +0.30 $\times$ .80 = 0.38 [38%])

(2) एक थैले में 5 लाल तथा 4 हरी गेंद है 3–3 गेंद दो बार निकाली जाती है तथा संभावना है कि पहली बार तीनो लाल गेंदे हो तथा दूसरी बार तीनो गेंद हरी हो यदि

(i) प्रथम बार गेंदे निकालकर वापस थैले में रख दी जाये

(ii) दूसरी बार गेंदे निकालकर वापस थैले में रख दी जाये

$$\left[(\text{i})\,\frac{5}{882}\,(\text{ii})\,\frac{1}{42}\right]$$

(3) उपरोक्त प्रश्न में यदि एक–एक कर तीनो गेंदे निकाली जाये तो क्या संभावना है कि प्रथम गेंद लाल, दूसरी हरी तथा तीसरी गेंद लाल हो यदि

(i) प्रथम बार गेंद पुर्नस्थापन के साथ निकाली जाये

(ii) दूसरी बार गेंद बगैर पुर्नस्थापन के साथ निकाली जाये $\left[(\text{i})\ {}^{1}/_{10}\ (\text{ii})\ {}^{10}/_{63}\right]$

(4) यदि एक थैले में 6 सफेद तथा 4 लाल गेंद है थैले मे से तीन गेंद निकाली जाती है क्या संभावना है कि 2 सफेद गेंद हो तथा 1 गेंद लाल हो यदि

(i) गेंद एक साथ निकाली जाये

(ii) गेंदे एक–एक कर पुर्नस्थापन के साथ निकाली जाये।

संकेत (1) एक साथ निकालने पर एक ही घटना होगी 2 सफेद तथा 1 लाल गेंद निकालने के तरीके $6c_2 \times 4c_1$ एवं प्रायिकता $\frac{6c_2 \times 4c_1}{10c_3}$ होगी

(2) एक–एक कर गेंद निकालने में प्रायिकता $= \left[\frac{6c_1}{10c_1} \times \frac{4c_1}{10c_1} \times \frac{6c_1}{10c_1}\right] \times 3$

एवं यह स्थिति तीन तरीकों से हो सकती है

I	II	III
सफेद	लाल	सफेद
लाल	सफेद	सफेद
सफेद	सफेद	लाल

$\left[(1)\frac{1}{2}, (2)\frac{54}{125}\right]$

(5) यादृच्छिक रूप से चुने गये एक लौंद वर्ष में 53 रविवार चुने जाने की प्रायिकता क्या होगी?

संकेत : लौंद वर्ष में 366 दिन होते है यानि 52 सप्ताह तथा 2 दिन सभी दिन 52 बार आते है और 2 दिन "सोम व मंगल," "मंगल व बुद्ध," "बुद्ध व गुरू," "गुरू व शुक्र," "शुक्र व शनि," "शनि व रवि," एवं "रवि व सोम," के क्रम में आ सकते है यानि 7 में से 2 तरीके से रविवार आ सकता है। $\left(\frac{2}{7}\right)$

(6) 20 वर्ष के व्यक्ति के लिये 70 वर्ष तक जीवित रहने के विपक्ष में अनुपात 9:5 है तथा 60 वर्ष के व्यक्ति के लिये 80 वर्ष तक जीवित रहने के विपक्ष में अनुपात 8:6 है इनमें से कम से कम एक के 20 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये? $\left(\frac{31}{49}\right)$

(7) ताश की गड्डी से चार पत्ते यादृच्छिक रूप से खींचे जाते है इस बात की प्रायिकता ज्ञात करिये कि चारों पत्ते अलग अलग रंगो के होगें ? $\left(\frac{2197}{20825}\right)$

(8) 8 लड़को तथा 7 लड़कियों के समूह से एक समिति बनानी है इस बात की क्या प्रायिकता होगी कि समिति में (1) 3 लड़के तथा 2 लड़कियाँ होगी (2) कम से कम 1

लड़की होगी

$$\left[(1)\frac{1176}{3003}(2)\frac{2947}{3003}\right]$$

(9) एक बम के निशाने पर गिरने की प्रायिकता $1/_5$ है एक पुल को नष्ट करने के लिये दो बम पर्याप्त है यदि पुल पर 6 बम गिराये जाये तो क्या प्रायिकता कि पुल नष्ट हो जाये ? $\left(\frac{1077}{3125}\right)$

(10) एक विद्यालय में छात्र के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.8 है प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि 5 छात्रों में से

(1) कोई नहीं (2) एक (3) कम से कम एक उत्तीर्ण होगा $\left(\frac{1}{3125},\frac{20}{3125},\frac{3124}{3125}\right)$

(11) एक स्कूटर कम्पनी द्वारा स्कूटर निर्माण के दो संयत्र में 80% उत्पादन होता है तथा संयत्र B में 20% उत्पादन होता है संयत्र एक में 85% स्कूटर उच्च गुणवत्ता के है जबकि B 65% एक स्कूटर का चयन किया जाता है जो कि उच्च श्रमिकता का है क्या प्रायिकता कि वह संयत्र A से आया है। (2) कि वह संयत्र B से आया है $\left(\frac{68}{81},\frac{13}{81}\right)$

(12) तीन कलश हैं पहले में 3 लाल तथा 7 हरे गेंद है दूसरे मूें 5 लाल तथा 3 हरे गेंद है तथा तीसरे में 8 लाल तथा 4 हरे गेंद है क्या प्रायिकता है कि एक लाल गेंद निकाली जाती है तथा वह

(1) पहले कलश (2) दूसरे कलश (3) तीसरे कलश से निकाली हो।

$(\frac{36}{191},\frac{80}{191},\frac{75}{191})$

28.14 निबन्धात्मक प्रश्न

(1) प्रायिकता के उद्भव एवं विकास को समझाते हुये आधुनिक समय में प्रायिकता के व्यवहारिक महत्व पर प्रकाश डालिये ?

(2) प्रायिकता की अवधरणाओं को समझाते हुये चिरसम्मत् एवं साख्यिकीय अवधारणाओं अतंर स्पष्ट कीजिये?

(3) प्रायिकता की अवधारणाओं का आलोचनात्मक मूल्याकंन कीजिये ?

(4) प्रायिकता वंटन को स्पष्ट करते हुये इसके उपयोग तथा महत्व पर चर्चा कीजिये ?

(5) प्रतिलोम् प्रायिकता की व्याख्या कीजिये तथा इसके महत्व पर टिप्पणी लिखिये ?

28.15 संद्धर्भ ग्रन्थ सूची

- नागर, कैलाश नाथ (2009), सांख्यिकीय के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाषन
- सिंह, एस0 पी0 (2010), सांख्यिकी कसद्धान्त एवं व्यवहार, एस चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड
- Kumar, Anil, (2000) Statistical Research in methodology Aifa publishing house,
- Bose, Do, (2003) an Introduction to mathematical Economics, Himalaya Publising house

इकाई 29 द्विपद प्रमेय

29.1 प्रस्तावना

पूर्व की इकाई में प्रायिकता सिद्धान्तों का विस्तार से अध्ययन कर प्रायिकता की विभिन्न अवधारणाओं, प्रमेयों तथा उनसे सम्बन्धित समस्याओं का विश्लेषण किया गया । जिसका प्रयोग विभिन्न घटनाओं के घटित होने की सम्भावनाओं का वैज्ञानिक तरीकों से आकलन करने में किया जाता है । जिसका महत्व आज संयोग प्रधान खेलों के साथ–साथ आखथक, व्यावसायिक, वैज्ञानिक एवं राजनैतिक सभी क्षेत्रों में स्थापित हो गया है ।

भावी सम्भावनाओं का आकलन करने के साथ–साथ प्रायिकता सिद्धान्तों के प्रयोग यादृच्छिक चरों के भावी मूल्यों को ज्ञात करने तथा किस प्रकार इन मूल्यों में कुल आवृति किस प्रकार से आवंटित होती है इसके लिये प्रायिकता वंटन प्रयुक्त होते हैं । इन वंटनों में जेम्स बर्नोली द्वारा विकसित द्विपद वंटन प्रमुख है । इस वंटन को बर्नोली प्रमेय या द्विपद प्रमेय के अन्तर्गत अध्ययन किया जाता है ।

द्विपद प्रमेय में एक ऐसे वंटन का अध्ययन किया जाता है जो कि खण्डित आवृति वंटन होता है, जोकि दो घटनाओं की सफलता एवं असफलता की भावी सम्भावनाओं के सम्पूर्ण समूह को व्यक्त करता है जिसका विस्तार से अध्ययन हम वर्तमान इकाई के अन्तर्गत करेंगे –

29.2 उद्देश्य

वर्तमान इकाई के उद्देश्य निम्नवत् है –

- द्विपद प्रमेय उद्भव विकास तथा अर्थ क्या है ?
- द्विपद प्रमेय किन प्रमुख मान्यताओं पर आधारित है ?
- प्रायिकता वंटन से क्या तात्पर्य है तथा प्रमुख प्रायिकता वंटन कौन–कौन से हैं?
- द्विपद प्रमेय का विस्तार किस प्रकार से होता है ?
- द्विपद प्रमेय के प्रमुख अचर मूल्य कौन–कौन से हैं ?
- द्विपद प्रमेय की मुख्य विशेषतायें एवं गुण कौन–कौन से हैं ?

- द्विपद प्रमेय से सम्बन्धित मुख्य फलन कौन–कौन से हैं ?
- द्विपद प्रमेय से प्रत्याशित आवृतियाँ किस प्रकार से ज्ञात की जा सकती हैं ?
- द्विपद प्रमेय पर आधारित समस्याओं का हल किस प्रकार से किया जा सकता है ?
- द्विपद प्रमेय के उपयोग तथा महत्व कौन–कौन से हैं ?

29.3 सैद्धान्तिक प्रायिकता वंटन

ऐसे आवृत्ति वंटन जिन्हें वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों द्वारा निश्चित करके कुछ निश्चित परिकल्पनाओं, मान्यताओं अथवा प्रायिकता नियमों के आधार पर गणितीय रूप से अनुमानिक किया जाता है तो ऐसे वंटन को सैद्धान्तिक आवृत्ति वंटन या प्रायिकता वंटन कहते हैं; यानि इस वंटन में प्रायिकताओं को सापेक्ष बारम्बारता माना जाता है । सैद्धान्तिक प्रायिकता वंटन को निम्न दो भागों में बाँटा जा सकता है –

(1) असतत् प्रायिकता वंटन

(2) सतत् प्रायिकता वंटन

जहाँ तक असतत् या खण्डित प्रायिकता वंटन का प्रश्न है इनमें द्विपद, प्वॉयसॉ तथा समरूप वंटन इसके अन्तर्गत आते हैं, वहीं आयताकार, चर घातांकी तथा प्रसामान्य वंटन सतत् प्रायिकता वंटन के अन्तर्गत आते हैं । प्रायिकता वंटन की मुख्य विशेषतायें निम्न हैं।

प्रायिकता वंटन में विचर के मानों की तत्संवादी प्रायिकता का योग एक होता है –

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1 \text{ ;k } \square p = 1$$

प्रायिकता वंटन की अवधारणा आवृत्ति वंटन के समान होती है । यह वंटन हमें यह बताता है कि विचर के विभिन्न मूल्य कुल आवृति किस प्रकार से वितरित है ।

अवलोकनों की संख्या अधिक होने पर प्रायिकता वंटन सापेक्ष आवृत्ति वंटन का सैद्धान्तिक रूप ग्रहण कर देता है ।

29.4 द्विपद वंटन या द्विपद प्रमेय

द्विपद वंटन की रचना करने का श्रेय स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नोली (1654-1705) को है । परन्तु इसका प्रकाशन उनकी मृत्यु के आठ वर्ष बाद सन् 1713 ई0 में हुआ था । इस वंटन को बर्नोली वंटन भी कहा जाता है । द्विपद का शाब्दिक अर्थ है दो पदों का पाया जाना, जिसमें एक पद घटना की सफलता से सम्बन्धित होता है तथा दूसरा घटना की असफलता से, वास्तव में द्विपद वंटन या वितरण एक ऐसा खण्डित आवृति वितरण है जो द्वन्द्वात्मक विकल्पों यानि अलग–अलग प्रकृति के विकल्पों के सम्भावना को प्रकट करता है । इसे द्विपद प्रमेय के भी नाम से जाना जाता है ।

यदि किसी अभिप्रयोग में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p तथा u घटित होने की प्रायिकता q है तो कुल n परीक्षणों में निश्चित रूप से उसके r बार घटित होने की प्रायिकता जेम्स बर्नोली द्वारा दिये गये निम्न सूत्रानुसार ज्ञात की जा सकती है –

$$p(r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r} q^{n-r}$$

जहाँ $p + q = 1, \quad r = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots. n$

यदि अब सफलताओं की संख्या को $r = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots. n$ से सम्बन्धित प्रायिकताओं क्रमानुसार लिख दी जाती है तो उपलब्ध वंटन ऐसा द्विपद प्रायिकता वंटन कहलाता है । जिससे प्राचल द तथा च है ।

स्पष्टतः $$\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_{r}\, p^{r} q^{n-r} = (p + q)^{n} = 1$$

29.5 द्विपद प्रमेय की मान्यतायें

द्विपद प्रमेय के अनुसार रचित द्विपद वंटन का गणितीय स्वरूप निम्न मान्यताओं के अनुसार विकसित किया जा सकता है –

यादृच्छिक अभिप्रयोग स्वतन्त्र होना चाहिए, यानि एक परीक्षण के परिणाम का दूसरे परीक्षण के परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए ।

यादृच्छिक अभिप्रयोग समान परिस्थितियों में आवर्तक रूप से परीक्षणों को स्थिर और परिमित संख्या के अनुरूप किया जाता है यानि परीक्षणों की संख्या द स्थिर तथा परिमित है ।

प्रत्येक परीक्षण में अभिप्रयोग के दो परस्पर अपवर्जी परिणाम होते हैं जहाँ p सफलता को तथा q असफलता के घटित होने को व्यक्त करता है ।

सभी परीक्षणों में घटना के घटित होने की प्रायिकता p स्थिर रहती है इसी प्रकार q भी स्थिर रहती है ।

29.6 द्विपद वंटन या प्रमेय का विस्तार

सुडौल सिक्का उछालने के अभिप्रयोग के माध्यम से द्विपद प्रमेय के विस्तार को आसानी से समझाया जा सकता है यदि एक सिक्के को उछाला जाये तो दो परिणाम चित (Head) तथा पट (Tail) आयेंगे, जिसमें p को सफलता (चित) तथा q को असफलता (पट) के संकेत से व्यक्त किया जाये तो प्रायिकता सिद्धान्त अनुसार यह कहा जा सकता है कि –

$p = q = ½$ और $p + q = 1$

यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जायें तो निम्न संभावित परिणाम घटित हो सकते हैं ।

दो सिक्के का अभिप्रयोग

परिणाम		तरीके		प्रायिकता	सफलता	प्रायिकता माप
चित (H)	पट (T)	I	II			
2	0	H	H	$p \times p = p^2$	2	¼
1	1	H	T	$p \times q = 2pq$	1	½
		T	H	$p \times q$		
0	2	T	T	$q \times q = q^2$	0	½
योग				$(p + q)^2$		1

दो चित (H, H), दो पट (T, T), एक चित एक पट (H, T), एक पट एक चित (T, H) आ सकते हैं इन परिणामों की प्रायिकता का अनुमान निम्न सारणी से लगाया जा सकता है –

तीन सिक्के का अभिप्रयोग

परिणाम		तरीके	प्रायिकता	सफलता	प्रायिकता माप
चित (H)	पट (T)	I II III			
3	0	H H H	$p \times p \times p = p^3$	3	1/8
2	1	H H	$p \times p \times q = p^2q$		
		T	$p \times q \times p = p^2q \quad 3p^2q$	2	3/8
		H T	$q \times p \times p = p^2q$		
1	2	H	$p \times q \times q = pq^2$		
		T H	$q \times p \times q = pq^2$	1	3/8
		H	$q \times q \times p = pq^2$		
0	3	H T T	$q \times q \times q = q^3$	0	1/8
		T H T			
		T T H			
		T T T			
योग		$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p + q)^3$			1

यदि तीन सिक्के (I, II, III) एक साथ उछाले जायें तो परिणाम निम्न सारणी के माध्यम से प्रस्तुत किये जा सकते हैं μ

इसी प्रकार 4, 5, 6, 7.............. n घटनाओं के लिये द्विपद वंटन बनाये जा सकते हैं यहाँ पर घटनाओं की संख्या (p + q) की घात के समान होगी जिसका कि विस्तार ज्ञात किया जा सकता है ।

एक घटना $(p+q)^1 = p + q$

दो घटनायें $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$

तीन घटनायें $(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^3 + q^3$

चार घटनायें $(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$

पाँच घटनायें $(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$

अतः इस सूत्र को निम्न सामान्य रूप दिया जा सकता है –

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q^1 + \frac{n(n-1)}{2\times1}p^{n-2}q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)\,p^{n-3}q}{3\times2\times1}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)p^{n-4}q^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q^4}{4\times3\times2\times1}$$

उपरोक्त समीकरण में यदि $n = 4$ रखा जाये तो –

$$(p+q)^n = (p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + \frac{4(4-1)}{2\times1}p^{4-2}q^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3\times2\times1}p^{4-3}q + q^4$$

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

विस्तार के विभिन्न पदों में संख्यात्मक गुणांक संचय के नियमों के अनुसार भी प्राप्त किये जा सकते हैं

$$(p+q)^4 = {}^nC_4\, p^4q + {}^nc_3\, p^3q^2 + {}^nC_2\, p^2q^2 + {}^nC_1\, pq^3 + {}^nC_0\, pq^4$$

$$(p+q)^4 = {}^4C_4\, p^4 + {}^4C_3\, p^3q^2 + {}^4C_2\, p^2q^2 + {}^4C_1\, pq^3 + {}^4C_0\, q^4$$

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

अतः स्पष्ट है कि द्विपद विस्तार का प्रत्येक पद बर्नोली प्रमेय द्वारा $p(r) = {}^nC_r\, p^rq^{n-r}$ द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है वास्तव में द्विपद वंटन प्राप्त करने के लिये सभी $(n+1)$ पदों को बर्नोली प्रमेय के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है ।

द्विपद वंटन के विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक पास्कल के त्रिभुज (Pascal Triangle) के माध्यम से देखे जा सकते हैं ।

पास्कल त्रिभुज में प्रत्येक गुणांक उससे पिछली पंक्ति के दोनों ओर का गुणांक है जैसे $10 = 4+6$, $15 = 10 + 5$ आदि ।

घात n	$(p + q)^n$ के विस्तार के गुणांक											योग 2^n
1	1	1										2
2	1	2	1									4
3	1	3	3	1								8
4	1	4	6	4	1							16
5	1	5	10	10	5	1						32
6	1	6	15	20	15	6	1					64
7	1	7	21	35	35	21	7	1				128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			256
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		512
10	1	10	45	120	210	256	210	120	45	10	1	1024

29.7 द्विपद वंटन लिखने के सामान्य नियम

द्विपद प्रमेय के विभिन्न पदों को ज्ञात करते समय निम्न नियम महत्वपूर्ण हैं।

पदों की संख्या - द्विपद विस्तार में $(n+1)$ पद होते हैं अर्थात् $(p+q)$ की घात से एक पद अधिक होता है जैसे – $(p+q)^7$ में 8 पद होंगे ।

घातों का योग - प्रत्येक पद में p और q की घातों का योग n होना चाहिए (क्योंकि r + n — r = n) जैसे $(p+q)^6$ के पहले पद के विस्तार में घातों का योग 6 है (p^6q) इसी प्रकार दूसरे पद में भी 5+1, तीसरे में 4+2, ... अन्तिम में 06 है ।

घातों का क्रम - $(p+q)^n$ के विस्तार में p की घातों के क्रम क्रमशः n, n — 1, n — 2, ...3, 2, 1, 0 होते हैं । यानि घटते जाते हैं वहीं q की घातों के क्रम बढ़ते जाते हैं और अन्तिम पद n घात का प्रयोग है ।

संख्यात्मक गुणांक.– विभिन्न पदों के गुणांकों के सम्बन्ध में तीन बातें महत्वपूर्ण हैं।

(i) पूरे द्विपद विस्तार के विभिन्न गुणांक सदा सममितीय (Symmetrical) होते हैं, जैसा कि पास्कल त्रिभुज से स्पष्ट है । n = 3 के लिये 1, 3, 3, 1, n = 4 के लिये 1, 4, 6, 4, 1 होता है ।

(ii) गुणांक की गणना सूत्र, संचय या पास्कल त्रिभुज के माध्यम से की जा सकती है ।

(iii) किसी द्विपद वंटन के लिये सभी पदों के गुणांकों का योग 2^n होता है । जैसे – n = 4 के लिये गुणांक 1, 4, 6, 4, 1 होंगे जिनका योग 16 होगा तथा प्रत्येक क्रमित घात के लिये यह योग दुगना होता जाता है । जैसे n = 2 के लिये 4, n = 3 के लिये 8, n = 4 के लिए 16 एवं n = 5 के लिए 32 होगा ।

प्रायिकताओं का योग - द्विपद वंटन के सभी प्रायिकताओं का योग हमेशा 1 होगा ।

p तथा q का क्रम - यह एक महत्वपूर्ण बात है द्विपद वंटन का सामान्य रूप $(p + q)^n$ है लेकिन इसमें कठिनाई यह है कि सफलताओं की संख्या को अवरोही क्रम (desending order) में लिखा जाता है यानि पहले बड़ी फिर उससे छोटी तथा अंत में शून्य, परन्तु सफलताओं की संख्या को आरोही क्रम में रखकर प्रायिकता ज्ञात करने के लिए $(q + p)^n$ का विस्तार लिखा जाता है । $(q + p)^n$ का विस्तार ठीक उसी प्रकार से लिखा जाता है जिस प्रकार $(p + q)^n$ का अन्तर मात्र यह है कि p और q का स्थानान्तरण कर दिया

जाता है । $n = 6$, $p =$ सफलता $q =$ असफलता की प्रायिकता तो $(p + q)^6$ rFkk $(q + p)^6$ के विस्तार निम्नवत् होंगे ।

यानि $(q + p)^n$ को निम्न रूप में व्यक्त किया जायेगा।

$$(q+p)^n = {}^nC_0\, q^np^0 + {}^nC_1\, q^{n-1}p^1 + {}^nC_2\, q^{n-2}p^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, q^0p^n$$

$$(q+p)^n = q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}p + {}^nC_2\, q^{n-2}p^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, p^n$$

$(p + q)^6$ **$(q + p)^6$**

सफलताओं की संख्या r (n–r)	प्रायिकता	असफलताओं की संख्या r (n–r)	प्रायिकता
6 (0)	${}^6C_6\, p^6q^0 = p^7$	0 (6)	${}^6C_6\, p^0q^6 = q^6$
5 (1)	${}^6C_5\, p^5q = 6p^5q$	1 (5)	${}^6C_5\, pq^5 = 6pq^5$
4 (2)	${}^6C_4\, p^4q^2 = 15p^4q^2$	2 (4)	${}^6C_4\, p^2q^4 = 15p^2q^4$
3 (3)	${}^6C_3\, p^3q^3 = 20p^3q^3$	(3) 3	${}^6C_3\, p^3q^3 = 20p^3q^3$
2 (4)	${}^6C_2\, p^2q^4 = 15p^2q^4$	4 (2)	${}^6C_2\, p^4q^2 = 15p^4q^2$
1 (5)	${}^6C_1\, pq^5 = 6pq^5$	5 (1)	${}^6C_1\, p^5q = 6p^5q$
0 (6)	${}^6C_6\, p^0q^6 = q^6$	6 (0)	${}^6C_0\, p^6q^0 = p^6$

29.8 द्विपद वंटन का स्वरूप

द्विपद वितरण का सामान्य रूप मुख्यतया दो बातों पर निर्भर करता है –(i) p तथा q का मूल्य (ii) n का मान

यदि किसी घटना की सफलता एवं असफलता की सम्भावना समान है यानि $p = q = ½$ तो प्राप्त आवृति वंटन सममित होगा और प्रत्याशित आवृतियाँ केन्द्रीय प्रवृतियों के दोनों

ओर समान रूप से वितरित होंगी । उदाहरणार्थ यदि 4 सिक्के 256 बार उछाले जाये तो 4, 3, 2, 1, 0 चित्त हेतु आवृतियाँ 16, 64, 96, 64, 16 होंगी यानि वितरण सममित है । यदि p □ q तो वितरण सममित न होकर विषमता लिये हुए होगा, यदि उपर्युक्त उदाहरण में अगर $p = 1/4$ तथा $q = 3/4$ है तो प्राप्त आवृतियाँ 1, 12, 54,108, 81 होंगी । उपरोक्त का स्पष्टीकरण निम्न है –

यदि $p = q = 1/2$ तो

$$256\,(p+q)^4 = 256\,[p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4]$$

$$256\,(½+½) = 256\,[(½)^4 + 256 \times 4(½)^3(½) + 256 \times (½)^2(½)^2 + 256\times 4(½)(½)^3 + 256 \times (½)^4]$$

$$= 16 + 64 + 96 + 64 + 16$$

यानि वितरण सममित है ।

यदि $p = 1/4,\ q = 3/4$ तो

$$256\,(p+q)^4 = 256\,[p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4\,pq^3 + q^4]$$

तो $256\,(¼+3/4)^4 = 256(¼)^4 + 256 \times 4(½)^3(3/4) + 256 \times (½)^2(3/4)^2 + 256 \times(½)(3/4)^3 + 256(3/4)^4$

$$= 1 + 12 + 54 + 108 + 81$$

यानि वितरण असमित है ।

यदि p तथा q का मान समान न हो एवं n के मान में निरन्तर वृद्धि कर दी जाये तो भी विषमता कम होने लगती है यानि वितरण सममित होने लगता है, निष्कर्षतया यह कहा जा सकता है कि कोई आवृति वितरण किस प्रकार का होगा यह p, q और n के मूल्य पर निर्भर करेगा ।

29.9 द्विपद वितरण की प्रत्याशित आवृतियाँ

यदि द स्वतन्त्र बर्नोली अभिप्रयोगों के द्विपद प्रयोग को छ बार दोहराया जाये तब इन छ द्विपद प्रयोगों में त सफलता दिखाने वाले द्विपद प्रयोगों की प्रत्याशित संख्या को द्विपद प्रयोगों की कुल संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है यदि द घटनाओं की छ परीक्षणों में प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं तो प्रत्येक पद की प्रायिकता को परीक्षणों की कुल संख्या से गुणा कर दिया जाता है ।

यानि n घटनाओं की N परीक्षणों में r सफलता की प्रत्याशित आवृति

$= N\, {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$, r = 0, 1, 2, ... n

अतः 0, 1, 2, 3, ... n की प्रत्याशित आवृतियाँ क्रमशः निम्न होंगी –

$N q^n, N\, {}^nC_1\, pq^{n-1}, N\, {}^nC_2\, p^2q^{n-2}............Np^n$

जोकि $N (q+p)^n$ के विस्तार से प्राप्त होती है ।

सफलता की संख्या चित्त (H)	प्रायिकता $(q + p)^n$	प्रत्याशित आवृति $N (q + p)^n$
0	${}^4C_0\, (½)^4(½)^0 = 1/16$	$64 \times 1/16 = 4$
1	${}^4C_1\, (½)^3(½)^1 = ¼$	$64 \times ¼ = 16$
2	${}^4C_2\, (½)^2(½)^2 = 3/8$	$64 \times 3/8 = 24$
3	${}^4C_3\, (½)^1(½)^3 = ¼$	$64 \times ¼ = 16$
4	${}^4C_0\, (½)^0(½)^4 = 1/16$	$64 \times 1/16 = 4$
योग		64

उदाहरण 1. यदि 4 सिक्कों को 64 बार उछाला जाये तो चित आने की प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात कीजिए –

हल - यहाँ पर $p = q = ½, n = 4, N = 64$

अतः 64 $(½ + ½)^4$ का विस्तार ज्ञात किया जायेगा ।

उदाहरण 2. यदि 8 सिक्के 256 बार उछाले जाते हैं तो निम्न परिणामों की प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात कीजिए –

(i) 4 चित्त (Head)

(ii) 5 या अधिक चित

(iii) कोई चित नहीं

(iv) कोई पट (Tail) नहीं

(v) कम से कम 7 चित

हल - यहाँ $N = 256, \ p = q = ½, n = 8$

(i) 4 चित तथा 4 पट आने की प्रायिकता

$$p(4) = {}^nC_r \, p^r q^{n-r} = {}^8C_4 \, (½)^4(½)^4 = 70 \times \frac{1}{256} = \frac{70}{256}$$

अतः 4 चित आने की प्रत्याशित आवृति $= 256 \times \frac{70}{256} = 70$

(ii) 5 या अधिक चित की प्रायिकता

5 चित की प्रायिकता $p(5) = {}^8C_5 \, (½)^5(½)^3$

$$p(5) = 56 \times \frac{1}{256} = \frac{56}{256}$$

6 चित की प्रायिकता $p(6) = {}^8C_6 \, (½)^6(½)^2 = 28/256$

7 चित की प्रायिकता $p(7) = {}^8C_7 \, (½)^7(½) = 8/256$

8 चित की प्रायिकता $p(8) = {}^8C_0 \, (½)^8(½)^0 = 1/256$

अतः 5 या अधिक चित आने की प्रत्याशित आवृति निम्न होगी ।

प्रत्याशित आवृति = 256 [p(5) + 256 p(6) + 256 p(7) + 256 p(8)]

$$= 256\times\frac{56}{256}+256\times\frac{28}{256}+256\times\frac{8}{256}+256\times\frac{1}{256}$$

$$= 56 + 28 + 8 + 1 = 95$$

(iii) शून्य चित की प्रायिकता $p(0) = {}^{8}C_{0}\, p^{0}q^{8} = (½)^{8} = \frac{1}{256}$

प्रत्याशित आवृति $= 256 \times \frac{1}{256} = 1$

(iv) शून्य पट की आवृति यानि सारे के सारे चित –

अतः $p(8) = {}^{8}C_{8}\, p^{8}q^{0} = (½)^{8} = \frac{1}{256}$

यानि आवृति $= 256 \times \frac{1}{256} = 1$

(v) कम से कम 7 चित यानि कि 7 तथा 8 चित आये –

$p(7) = 8/256, p(8) = 1/256$

अतः प्रत्याशित आवृति $= 256 \times p(7) + 256 \times p(8)$

$$= 256 \times \frac{8}{256} + 256 \times \frac{1}{256} = 8 + 1 = 9$$

उदाहरण 3. यह मानते हुए कि किसी बस्ती की आधी आबादी लोकप्रिय टीवी धारावाहिक देखने की शौकीन हैं तथा यह मान्यता है कि यदि 2048 में से प्रत्येक 10 व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर अन्वेषक यह पूछता है कि आप यह धारावाहिक देखते हैं या नहीं तो कितने अन्वेषक यह सूचना देंगे कि चार या कम व्यक्ति यह धारावाहिक देखते हैं ?

हल. N = 2048, n = 10 (प्रतिदर्श की संख्या)

0, 1, 2, 3 .... 10 धारावाहिक दर्शकों में से कम से चार व्यक्ति यह धारावाहिक देखते हैं कि प्रत्याशित आवृति निम्न वितरण से देखी जायेगी –

$(q+p)^{10}$;gk¡ $p = q = ½$

दर्शकों की संख्या = 0 1 2 3 4

प्रत्याशित आवृति = $N\,[q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4]$

$= 2048\ [(½)^{10} + 10(½)^9(½) + 45(½)^8(½)^2 + 120(½)^7(½)^3 + 210(½)^6(½)^4]$

$= 2048 \times (½)^{10}\ [1 + 10 + 45 + 120 + 210]$

$= 2 \times 386 = 772$

अतः 772 अन्वेषक यह सूचना देंगे कि 4 या कम व्यक्ति टीवी धारावाहिक देखते हैं ।

29.10 वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों की तुलना

यह तथ्य स्पष्ट किया जा चुका है कि यदि घटना से सम्बन्धित प्रयोगों की संख्या अधिक हो अर्थात छ की मात्रा अत्यधिक बृहद हो तो वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों के मध्य अन्तर काफी कम हो जाता है । वास्तव में विभिन्न प्रतिचयन परीक्षण इस मान्यता के आधार पर ही किये जाते हैं, वास्तविक तथा प्रत्याशित आवृतियों की तुलना करने की दो रीतियाँ हैं (i) बिन्दुरेखीय रीति तथा (ii) काई वर्ग रीति

(i) बिन्दु रेखीय रीति .– इस विधि के अनुसार वास्तविक तथा प्रत्याशित दोनों आवृतियों को ग्राफ पेपर पर अंकित कर दिया जाता है । अंकित बिन्दुओं से बनने वाले ये दोनों वक्र यदि एक दूसरे के समान हो तो यह अन्तर निरर्थक माना जाता है तथा ऐसी दशा में यह कहा जायेगा कि वक्र आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट है । इसके विपरीत यदि दोनों वक्रों परस्पर एक दूसरे से दूर हों तो वास्तविक तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक माना जायेगा और वक्र अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं माना जाता है।

(ii) काई वर्ग परीक्षण .– काई वर्ग परीक्षण द्वारा भी वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों के मध्य अन्तर स्थापित किया जा सकता है X^2 का मान सूत्र द्वारा निर्धारित करने के बाद स्वातन्त्रय–संख्या (degree of freedom) ज्ञात की जाती है इसके बाद सम्बन्धित स्वातन्त्रयांश के लिए 5ः या 1ः स्तर पर X^2 सारणी (Table) में से X^2का मूल्य देखा जाता है यदि X^2का परिकलित मूल्य (Calculated Value) उसके सारणी मूल्य से अधिक होता है तो अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं होता है यानि वास्तविक तथा अवलोकित आवृतियों के मध्य अन्तर सार्थक होता है इस स्थिति के विपरीत होने पर अन्तर अर्थहीन होता है । यहाँ पर यह बात ध्यान देने योग्य है कि स्वातन्त्रयांश संख्या सफलताओं की संख्या से 1 कम होता है । X^2 का मान निम्न सूत्र द्वारा निर्धारित किया जा सकता है ।

$$X^2 = \Sigma\left[\frac{(fo-fe)^2}{fe}\right]$$

जहा¡ fe = प्रत्याशित आवृति, fo = अवलोकित आवृति ।

उदाहरण 4. 192 परिवारों में, जिनके लिये सूरजमुखी ;ंसइपदवेद्ध बच्चे के उत्पन्न होने की सम्भावना 25ः पायी जाती है प्रथम तीन बच्चों में सूरजमुखी बच्चों का वंटन निम्न प्रकार था।

सूरजमुखी बच्चों की संख्या	0	1	2	3	योग
परिवारों की संख्या	77	90	20	5	192

इस मान्यता के साथ कि द्विपद नियम लागू होता है सैद्धान्तिक आवृतियों को ज्ञात कीजिये और X^2 का प्रयोग करते हुए आसंजन सौष्ठव (goodness of fit) की जाँच कीजिए ।

हल - यहाँ पर सूरजमुखी बच्चे के जन्म की प्रायिकता $p = 25/100 = 1/4$

सूरजमुखी बच्चे के न होने की प्रायिकता $q = 1 — 1/4 = 3/4$

0, 1, 2, 3 सूरजमुखी बच्चों के जन्म की प्रत्याशित प्रायिकता।

$N(q+p)^n = 192(3/4+1/4)^3$ से ज्ञात की जायेगी ।

अतः $192(3/4 + 1/4)^3$

$= 192[(3/4)^3 + {}^3C_1(3/4)^2(1/4) + {}^3C_2(3/4)(1/4)^2 + {}^3C_3(1/4)^3]$

$$= 192\left[\frac{27}{64} + 3\times\frac{9}{64} + 3\times\frac{9}{64} + \frac{1}{64}\right]$$

$$= \frac{192}{64}\,[27 + 27 + 27 + 1] = 81 + 81 + 27 + 3 = 192$$

अतः 0, 1, 2, 3 के सूरजमुखी बच्चे होने की प्रत्याशित आवृति 81, 81, 27 तथा 3 होगी। आसंजन उत्कृष्ट होने के लिये X^2 की जाँच करनी होगी।

r	*fo* (अवलोकित)	*fe* (प्रत्याशित)	fo – fe	$(fo–fe)^2$	$(fo–fe)^2/fe$
0	77	81	–4	16	16/81=0.1975
1	90	81	+9	81	81/81=1.0000
2	20	27	–7	49	49/27=1.8148
3	5	3	+2	4	4/3 = 1.3333
	N = 192	192			$X^2 = 4.3456$

यहाँ पर सफलताओं की संख्या (0, 1, 2, 3) यानि 4 है अतः स्वातन्त्रय संख्या d.f. (4 – 1) = 3 होगी एवं d.f. 3 पर 5ः सार्थकता के स्तर पर सारणी मूल्य 7.815 होती है । जोकि परिकलित मूल्य से अधिक है इससे यह स्पष्ट है कि अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक नहीं है तथा आसंजन उत्तम है ।

उदाहरण 6. 4 सिक्कों का समुच्चय 3200 बार उछाला गया तथा प्रत्येक बार आये चितों की संख्या लिखी गयी है जिसके निम्न परिणाम आये हैं । ज्ञात कीजिए कि सिक्का सुडौल है ।

चितों की संख्या 0 1 2 3 4 आवृति 100 800 1200 950 150

हल - सिक्के के सुडौल होने पर चित तथा पट आने की प्रायिकता p = q =) यहाँ पर n = 4 तथा N = 3200

अतः $N(q+p)^n = 3200\ (½+½)^4$ के विस्तार के द्वारा ही सैद्धान्तिक आवृति वंटन लिखा जायेगा ।

$$3200\ (½+½)^4 = 3200\ [(½)^4 + 4(½)^3(½) + 6(½)^2(½)^2 + 4(½)(½)^3 + (½)^4]$$

$$= 200\ [1 + 4 + 6 + 4 + 1]$$

$$200 + 800 + 1200 + 800 + 200 = 3200$$

अतः 0, 1, 2, 3, 4 चितों की प्रत्याशित आवृति 200ए 800ए 1200ए 800ए 200 होगी ।

सिक्कों के सुडौल होने के लिये अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर अर्थहीन होना चाहिए जिसकी जाँच X^2 के माध्यम से की जा सकती है –

r	*fo* (अवलोकित)	*fe* (प्रत्याशित)	fo – fe	$(fo-fe)^2$	$(fo-fe)^2/fe$
0	100	200	–100	1000	50.000
1	800	800	0	0	0
2	1200	1200	0	0	0
3	950	800	+150	22500	28.125
4	150	200	–50	2500	12.500
	N = 3200	192			$X^2 = 90.625$

यहाँ पर (d.f.) 3 होगी तथा 3 (d.f.) पर 5ः सार्थकता के स्तर पर सारणी मूल्य 7.815 होता है जोकि परिकलित मूल्य से कम है अतः अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक है तथा सिक्का सुडौल नहीं है ।

29.11 द्विपद वंटन के अचर मूल्य

किसी भी द्विपद वंटन के अचर मूल्यों या अचरांक के अन्तर्गत हम इसके माध्य . प्रमाप विचलन तथा परिघातों, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व का अध्ययन करते हैं । यह सभी अचर मूल्य द्विपर वितरण के विश्लेषण में अत्याधिक महत्वपूर्ण होते हैं इनके माध्यम से हमें द्विपद वंटन में आवृतियों के स्वरूप, विस्तार, सममितता आदि गुणों के आंकलन में सहायता मिलती है अर्थात् द्विपद वंटन की आकार प्रकार तथा प्रकृति किस प्रकार की है यह सभी अचर मूल्यों के माध्यम से ही निर्धारित किया जाता है ।

माध्य - ऐसे सैद्धान्तिक आवृति वितरणों में जहाँ स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या और प्रायिकता का मूल्य दिया गया हो माध्य एवं प्रमाप विचलन को सरलता से निर्धारित किया जा सकता है । द्विपद वितरण के समान्तर माध्य या मध्यक का सूत्र निम्नवत् है।

माध्य यानि $\bar{X} = np$

जहाँ n = स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या तथा p = प्रायिकता ।

प्रमाप विचलन - माध्य के पश्चात् दूसरे महत्वपूर्ण अचर मूल्य को भी स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या तथा किसी घटना की सफलता (p) एवं असफलता (q) के माध्यम् से निर्धारित किया जा सकता है जोकि निम्नवत् है।

$\sigma = \sqrt{npq}$

परिघात - आवृति वंटन की विशेषताओं का सांख्यकीय विश्लेषण करने में परिघातों का बहुत महत्व है । वस्तुतया परिघात अथवा आघूर्ण का प्रयोग अधिकांश तथा यान्त्रिक विज्ञान में किया जाता है जिसका शब्दिक अर्थ घुमाव उत्पन्न करने वाली प्रवृत्ति की शक्ति की माप है जहाँ इसे भार तथा केन्द्र से दूरी के रूप में नापते हैं परन्तु सांख्यिकी में इसे वर्ग आवृतियों (Class frequency) तथा समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों की दूरी के गुणनफल के रूप में निर्धारित किया जाता है । इसका मुख्य उद्देश्य किसी वंटन की सरंचना, स्वरूप एवं सममितता का विश्लेषण करना तथा सममिति की प्रकृति की जाँच

करना मुख्य है । सैद्धान्तिक तथा व्यवहारिक तौर पर प्रथम चार प्रतिघातों का अध्ययन महत्वपूर्ण होता है यह प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ परिघात कहलाते हैं जिन्हें $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$ तथा $\square_4$ से निरुपित किया जाता है एवं द्विपद वंटन हेतु इन्हें निम्न तरह से परिभाषित किया जा सकता है ।

प्रथम परिघात - समान्तर माध्य से मूल्यों के विचलनों तथा आवृतियों के गुणनफल को प्रथम परिघात के रूप में परिभाषित किया जाता है यह सदैव शून्य होता है । यानि $\square_1 = 0$।

द्वितीय परिघात - आवृतियों तथा समान्तर माध्य से विचलनों के वर्ग तथा आवृतियों के गुणनफल के रूप में परिभाषित होता है । यहाँ द्विपद प्रमेय हेतु $\square_2 = npq$ वास्तव में यह प्रमाप विचलन का ही वर्ग होता है ।

तृतीय परिघात - इसमें आवृतियों की गुणा विचलनों के घन से की जाती है तथा यहाँ पर $\square_3 = npq(q-p)$ ।

चतुर्थ परिघात - इसमें आवृतियों की गुणा विचलनों की चौथी घात से की जाती है, यहाँ पर $\square_4 = 3n^2p^2q^2 + npq\,(1-6pq)$ ।

परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक - विषमता गुणांक का भी आवृति बंटन के आकार, संरचना के विश्लेषण में महत्व होता है । **कार्ल पियरर्सन** के अनुसार परिघात अनुपातों के आधार पर निम्न दो सूत्रों द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात किये जा सकते हैं।

(i) प्रथम परिघात विषमता गुणांक -इसको r_1 या के द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इसका सूत्र निम्नवत् है μ

$$r_1 = \sqrt{\beta}_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^{\,3}}} = \frac{npq(q-p)}{\sqrt{n^3p^3q^3}} = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$$

(ii) द्वितीय परिघात विषमता गुणांक इसको $\square_1$ के द्वारा निरूपित किया जाता है । जो कि निम्नवत् है।

$$\beta_2 = \frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3} = \frac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}$$

पृथुशीर्षत्व (ककुदता) - आवृति वक्र के शीर्ष की प्रकृति का अध्ययन करने हेतु पृथुशीर्षत्व का माप निकाला जाता है इसे शिखरीयता या ककुदता भी कहा जाता है इससे आवृति वक्र के शीर्ष के नुकीलेपन अथवा चपटेपन को मापा जाता है कार्ल पियरर्सन ने द्वितीय तथा चतुर्थ परिघातों के माध्यम से पृथुशीर्षत्व की माप निम्न प्रकार से निर्धारित की

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \frac{3n^2p^2q^2 + npq\,(n-6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$\beta_2 = \frac{3n^2p^2q^2}{n^2p^2q^2} + \frac{npq\,(n-6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq}$$

यदि $\square_2 > 3$ तो शीर्षनुकीला एवं $\square_2 < 3$ तो शीर्ष चपटा तथा $\square_2 = 3$ शीर्ष मध्यम ।

द्विपद वंटन के समस्त अचर मूल्य संक्षेप में निम्नवत् हैं।

द्विपद वंटन $\quad Pr = {}^nC_r\, q^{n-r}p^r$

$\bar{X} = np, \qquad \sigma = \sqrt{npq}$

$\square_1 = 0, \qquad \square_2 = npq, \qquad \square_3 = npq(q-p)$

$\square_4 = 3n^2p^2q^2 + npq\,(1-6pq)$

$$r_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}, \quad \beta_1 = \frac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}, \quad \beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq},$$

उदाहरण 7. सोलह सिक्के 216 बार उछाले जाते हैं । उक्त सैद्धान्तिक वंटन के माध्य एवं मानक विचलन मूल्य क्या हैं ? साथ ही चारों परिघात मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

हल - यहाँ $p = q = ½,\ n = 16,\ N = 216$

सैद्धान्तिक वंटन के समान्तर माध्य त्र दच त्र 16 ×) त्र 8

प्रमाप विचलन = $\sqrt{npq} = \sqrt{16\times½\times½} = \sqrt{4} = 2$

परिघात : $\square_1 = 0, \quad \square_2 = npq = 16 \times ½ \times ½ = 4$

$$\square_3 = npq(q-p) = 16 \times ½ \times ½(½-½) = 0$$

$$\square_4 = 3n^2p^2q^2 + npq\,(1-6pq)$$

$$= 3\times16\times16\times¼\times¼ + 16\times½\times½(1-6\times½\times½)$$

$$= 48 + 4(-½) = 46$$

उदाहरण 7– एक कारखाने में औसत रूप से 25: पेच दोषपूर्ण पाये जाते हैं । 10 पेचों में से दोषपूर्ण पेचों को ज्ञात करने के लिए माध्य, प्रसरण ज्ञात कीजिए एवं परिघातों पर आधारित विषमता एवं पृथुशीर्षत्व के गुणांक भी परिकलित कीजिए ?

हल - दोषपूर्ण पेचों की प्रायिकता $p = 25/100 = ¼, q = 1-¼ = 3/4$

यहाँ पर $n = 10$

अतः $\overline{X} = np = 10 \times ¼ = 2.5$

चूँकि $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\times¼\times3/4} = \sqrt{7.5}$ एवं प्रसरण $\square^2 = 7.5$

परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक : $\beta_1 = \dfrac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}$

$$\beta_1 = \frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{10\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{10\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{30} = 0.033$$

पृथुशीर्षत्व का माप : $\beta_2 = 3 + \dfrac{(1-6pq)}{npq}$

$$3+\frac{1-6\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{10\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}$$

$$\beta_2 = 3-\frac{1\times4\times4}{10\times8} = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

जोकि 3 से कम अतः शीर्ष चपटा है ।

उदाहरण 9– भारत के किसी राज्य में जहाँ बालक के जन्म होने की सम्भावना 50ः ठीक 4 बच्चों वाले 4096 परिवारों का चयन किया गया किसी परिवार में 0, 1, 2, 3, 4 बालक होने की सम्भावनायें ज्ञात करके इन वालकों की संख्या पर आधारित 4096 परिवारों का सैद्धान्तिक आवृति वंटन ज्ञात कीजिए और उस वंटन का समान्तर माध्य तथा मानक विचलन का परिकलन कीजिए ।

हल– यहाँ पर बालक के जन्म होने की प्रायिकता $p = 50/100 = $) तथा बालिका होने की प्रायिकता $q = $)

$$n = 4,\ N = 4096$$

$$\bar{X} = np = 4 \times ½ = 2$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4\times½\times½} = 1$$

बालक के जन्म लेने की सैद्धान्तिक आवृति $N(q+p)^4$ से ज्ञात होगी।

$$4096(½+½)^4 = 4096[(½)^4 + 4(½)^3(½) + 6(½)^2(½)^2 + 4(½)(½)^3 + (½)^4]$$

$$4096/16\ [1 + 4 + 6 + 4 + 1]$$

$$256\ [1 + 4 + 6 + 4 + 1]$$

$$256 + 1024 + 1536 + 1024 + 256$$

अतः प्रत्याशित आवृति निम्नवत् होगी

लड़कों की संख्या	0	1	2	3	4
परिवारों की संख्या	256	1024	1536	1024	256

29.12 द्विपर वंटन का आघूर्ण जनक फलन

यह द्विपद वंटन का एक महत्वपूर्ण फलन होता है यदि x चर द्विपद वंटन की विशेषताओं को निरूपित करना है तो शून्य के परितः आघूर्ण जनक फलन को निम्न प्रकार से निरूपित किया जा सकता है।

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=o}^{n} e^{tx}\, {}^nC_c\, p^x q^{n-x}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=o}^{n} {}^nC_X\, (pe^t)^X\, q^{n-x} = (q + pe^t)^n$$

इसी प्रकार आघूर्ण जनक फलनः माध्य के पारितः भी निम्न प्रकार से विश्लेषण किया जा सकता है।

$$m_{X-np}(t) = E\,[e^{t(x-np)}]$$

$$= e^{-npt}\, E\,(e^{tx})$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=o}^{n} e^{tx}\, {}^nC_X\, p^X q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=o}^{n} {}^nC_X\, (pe^t)^X\, q^{n-x}$$

$$= e^{-npt}\, (q + pe^t)^X$$

$$= (qe^{-pt} + pe^{t-pt})^n$$

$$= (qe^{-pt} + pe^{qt})$$

$$m_{X-np}(t) = (qe^{-pt} + pe^{qt})$$

29.13 योग प्रमेय

यह एक महत्वपूर्ण प्रमेय है तथा इस प्रमेय के अनुसार स्वतन्त्र द्विपद चरों जिनके प्राचल (n_1, p_1) तथा (n_2, p_2) है का योग भी द्विपद चर होताा है। अर्थात् यदि दो स्वतन्त्र द्विपद चरों में प्राचल (n_1, p_1) तथा (n_2, p_2) हो तो उनके योग का वंटन भी द्विपद चर वंटन होगा।

हल - यदि $X = B\ (n_1\ p)$ यानि X द्विपद वितरण के अनुसार जिसके प्राचल n तथा p हैं ऐसी दशा में शून्य के परितः आघूर्ण जनक फलन $^{m}X\ (t) = (q_1 + p_1 et)^n$ होगा ।

अतः $^{m}X_1\ (t) = (q_1 + p_1e^t)^{n1}$

तथा $^{m}X_2\ (t) = (q_2 + p_2e^t)^{n2}$

अतः $^{m}x_1 + x_2\ (t) = {}^{m}x_1\ (t)\ {}^{m}x_2\ (t)$ (चूँकि x_1, x_2 स्वतन्त्र हैं ।)

इसलिये $^{m}x_1 + x_2\ (t) = (q_1 + p_1e^t)^{n1}\ (q_2 + p_2e^t)^{n2}$ .... (A)

चूँकि (A) से स्पष्ट है कि इसके पदाये पक्ष को तभी $(q + pe^t)^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जबकि $q_1 = q_2 = q$,oa $p_1 = p_2 = p$ मान लिया जाये ।

अतः $^{m}x_1 + x_2\ (t) = (q + pe^t)^{n1+n2}$

यानि $x_1 + x_2$ □ $B\ (n_1 + n_2, p)$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि दो स्वतन्त्र द्विपद चरों x_1 एवं x_2 जिनके प्राचल क्रमशः (n_2, p_1) और (n_2, p_2) हो तो उनके योग का वंटन भी द्विपद वंटन होगा जिसके प्राचल $[(n_1 + n_2), p]$ होंगे एवं यह तभी सम्भव होगा जबकि – $p_1 = p_2$

29.14 द्विपद वंटन के परिघातों के लिये रिकरेन्स सम्बन्ध या फलन

इस सम्बन्ध को $(q + p)^n$ के लिए रेरोविक्सी (Renovsky) के सूत्र द्वारा निरूपित किया जाता है । जो कि निम्नवत् है -

$$\mu_{r+1} = pq(n_r \mu_{r-1} + \frac{d\mu r}{dp})$$

जहाँ μ_r माध्य के परितः r वाँ आघूर्ण है जिसे निम्न प्रकार से हल किया जा सकता है।

μ_r (परिभाषा के अनुसार) $= E(X - EX)^r = E(X - np)^r$

अथवा $\mu_r = \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_r \, p^x (1 - p)^{n-x}$

p के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\mu r}{dp} = \sum_{x=o}^{n} (-rn)(x - np)^{r-1} \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x \, p^{x-1} (1 - p)^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-1-x}$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x (1 - p)^{n-x} \left[\frac{x}{p} - \frac{x-x}{1-p}\right]$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \frac{1}{p(1-p)} \sum_{x=o}^{n} (x - np)^{r+1} \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$\because \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = \frac{x-np}{p(1-p)}$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \frac{1}{p(1-p)} \mu_{r+1}$$

अतः $\mu_{r-1} = pq\,(nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu r}{dp})$ .... B

यह सम्बन्ध परिघातों के लिये रिकरेन्स फलन को दर्शाता है यदि त त्र 1 रखने पर

$$\mu_2 = pq\,(n\mu_0 + \frac{d\mu_1}{dp})$$

$= npq$ (चूँकि $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$)

B में r = 2 रखने पर

$$\mu_3 = pq\,(2n\mu_1 + \frac{d\mu r}{dp})$$

$$= pq\,(\frac{d\mu r}{dp})\ (\text{चूँकि } \mu_1 = 0)$$

$$= pq\,\left(\frac{d}{dp} npq\right)$$

$$= pq\,\left(\frac{d}{dp} np(1-p)\right)\ (\text{चूँकि } q = 1-p)$$

$$= npq\,\left(\frac{d}{dp}(p-p)^2\right)$$

$$= npq\,[(1 - 2p)]$$

$$\mu_3 = npq\,(q - p)\ [\text{pw¡fd } (1 - 2p) = 1-p-p = q-q]$$

B में r = 3 रखने पर

$$\mu_4 = pq\left(3n\mu_2 + \frac{d\mu_3}{dp}\right)$$

$$= pq\,[3n.npq + \frac{d}{dp}\ npq\,(1-2p)]$$

$$= pq\,[3n^2pq + \frac{d}{dp}\ np\,(1-p)\,(1-2p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + pq\,[n(1-p)\,(1-2p) - np(1-2p) - 2np\,(1-p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + pq\,(n - 6np + 6np^2)$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq\,[1 - 6p\,(1-p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq\,(1 - 6pq)$$

$$\square_4 = npq\,(3npq + 1 - 6pq)$$

29.15 द्विपद वंटन, प्रगुण प्रमेय एवं बहुपद वंटन

बहुपद वंटन स्वतन्त्र व सर्वसम अभिप्रयोगों से सम्बद्ध एक ऐसा खण्डित वंटन है जिसके दो या दो से अधिक परिणाम हो सकते हैं । वास्तव में यह द्विपद वंटन का ही व्यापकीकरण है । प्रगुण प्रमेय के अनुसार जब किसी घटना दो या दो से अधिक अपवर्जी तथा निरशेष परिणाम हो तो इन परिणामों के परस्पर आधार पर निखमत वंटन एक बहुपदी वंटन का निर्माण करता है । जहाँ द्विपद वंटन के दो सम्भाव्य परिणाम हो सकते हैं वहीं बहुपद वंटन के दो से अधिक सम्भाव्य परिणाम हो सकते हैं ।

मान्यतायें– वहुपद वंटन की मान्यतायें निम्न हैं ।

(i) परीक्षणों की स्थिर संख्या n के लिए समान परिस्थितियों में अभिप्रयोग किया जाता है ।

(ii) अभिप्रयोग के K (72) परस्पर अपवर्जी एवं निरशेष परिणाम होते हैं जिन्हें $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots\ldots E_K$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः समष्टि प्रतिदर्श $S = \{E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots E_K\}$

(iii) विभिन्न प्ररिणामों $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots E_K$ की क्रमानुसार $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_K$ प्रायिकतायें होती हैं जो परीक्षणों में समान रहती हैं तथा जिनका योग एक होता है ।

$$Ep = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_K = 1$$

(iv) परीक्षण परस्पर स्वतन्त्र होते हैं ।

बहुपद वंटन वस्तुतः $(p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots p_K)^n$ का विस्तार है ।

n परीक्षणों में यह प्रायिकता कि E_1 की x_1, E_2 की x_2 ...... E_K की K_K बार घटित होने की प्रायिकता –

$$p(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_K) = \frac{n!}{X_1!\,X_2!\,X_3!\ldots\ldots\ldots X!}\; p_1^{x1} \times p_2^{x2} \ldots\ldots p_K^{KK}$$

जहाँ ij $x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_K = 4$ तथा □p =1

जोकि बहुपद वंटन का वांछित प्रायिकता फल है । इसे बहुपद विस्तार का सामान्य पद भी कहते हैं ।

29.16द्विपद वंटन की विशेषतायें

द्विपद वितरण की प्रमुख विशेषतायें निम्नवत हैं –

सैद्धान्तिक वंटन– यह वंटन सिद्धान्तया बर्नोली प्रमेय पर आधारित है यानि $p(r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$ तथा प्रायिकता वंटन को N से गुणाकर प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात की जाती हैं ।

खण्डित वंटन - यह आवृति वंटन खण्डित प्रकृति का होता है इसमें सफलताओं की संख्या पूर्णांक रूप में यानि 0, 1, 2, 3 .... n हुआ करती हैं और तत्संवादी प्रायिकतायें और प्रत्याशित आवृतियाँ द्विपद प्रमेय के विस्तार द्वारा परिकलित की जाती हैं ।

आवृति बहुभुज - द्विपद वंटन को ग्राफ पेपर पर आवृति बहुभुज के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है ।

स्वरूप - द्विपद वंटन के प्राचल n तथा p है । इसका स्वरूप p और q के साथ घातांक n की मात्रा पर निर्भर करता है यदि $p = q$ हो तो वंटन सममित होगा चाहे n का मान चाहे कुछ भी हो । परन्तु यदि p और q असमान हों तो वंटन असमित होगा एवं $p > 0.5$ होने पर यह बांयी ओर तथा $p < 0.5$ होने पर यह दाहिनी ओर असममित होगा । घातांक का मान अत्याधिक होने पर यह असममिति कम होती जायेगी एवं n के अत्याधिक अधिक होने पर यह वंटन सममिति की ओर प्रवृत होता जायेगा ।

द्विपद वंटन का प्वॉयसॉ एवं प्रसामान्य वंटन से सम्बन्ध - यद्यपि द्विपद वंटन तथा प्वॉयसॉ वंटन एक असतत् यानि खण्डित वंटन है एवं प्रसामान्य वंटन एक सतत् यानि अखण्डित वंटन है परन्तु तीनों वंटनों में कुछ विशेष परिस्थितियों में गहरा सम्बन्ध स्थापित हो जाता है ।

यदि n का मान अत्याधिक होता जाये एवं घटना के घटित होने की प्रायिकता च अत्याधिक कम हो या शून्य के सन्निकट हो तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता q एक के सन्निकट हो जाये तो द्विपद वंटन एक ऐसे प्वॉयवॉ वंटन का रूप धारण करता है जिसकी निम्न विशेषतायें होती हैं।

यदि n □ □ , p □ 0, q □ 1

तो माध्य = m = np एवं प्रमाप विचलन □□= $\sqrt{m}=\sqrt{np}$ चूँकि दच तथा $\sqrt{npq}$ द्विपद प्रमेय के अचरांक है वहीं उ तथा $\sqrt{m}$ प्वॉयसॉ वंटन के अचरांक हैं ।

इसी प्रकार द्विपद वंटन एवं प्रसामान्य वंटन में भी सुनिश्चित सम्बन्ध होता है द्विपद वंटन निम्न दो परिस्थितियों में द्विपद वंटन का सीमांत रूप होता है ।

(i) p तथा q दोनों ही छोटे न हों तथा एक दूसरे के सन्निकट हों यानि p □ q.

(ii) n परीक्षणों की संख्या अत्याधिक हो यानि n □ □ ।

ऐसी परिस्थितियों में द्विपद वंटन एक ऐसे प्रसामान्य वंटन के सन्निकट होता जाता है जिसका प्रमापीकृत विचार (Standardised Variable) $Z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ हो तथा जिसका माध्य शून्य (□□= 0) एवं प्रसरण एक ; □^{2}त्र 1द्ध हो ।

29.17 द्विपद वंटन की उपयोगिता एवं महत्व

यद्यपि सांख्यिकीय विश्लेषण में सैद्धान्तिक आवृति वंटनों का विशेष महत्व है एक प्रकार से यह वितरण सांख्यिकी के आधार है इस सन्दर्भ में द्विपद प्रमेय का अपनी ही एक महत्वपूर्ण

भूमिका है क्योंकि न सिर्फ अपनी विशिष्ट विशेषताओं के कारण से लोकप्रिय है अपितु यह सांख्यिकीय का सबसे प्राचीन आवृति वंटन है जिसकी आगे चलकर अन्य वंटनों का विकास हुआ है । इस वंटन के उपयोग तथा महत्व निम्नवत है।

भावी पूर्वानुमान – द्विपद वंटन का उपयोग उस क्षेत्र में किया जाता है जहाँ घटनाओं की सफलता–असफलता के आधार पर द्वन्द्व भाजन ;कपबीवजवउवने बसेंपपिबंजपवदद्ध किया जा सकता है जैसे सिक्के की उछाल में चित्त पट का ऑकलन, कारखाने में निख्रमत वस्तुओं के दोषमुक्त या दोषपूर्ण होने के सन्दर्भ में ऑकलन, जनगणना में स्त्री–पुरुष का चयन आदि इस वंटन का प्रयोग दैव पर आधारित घटनाओं पर सफलता से किया जा सकता है जिससे भावी समंकों की प्रवृत्ति ज्ञात कर भावी पूर्वानुमान लगाये जा सके तथा विवेकपूर्ण निर्णय लिये जा सकें ।

अनुसंधान कार्य में सहायक – जहाँ कही पर वास्तविक अनुसंधान दुःरह, असम्भव एवं अत्याधिक खर्चीला हो वहाँ द्विपद प्रमेय की सहायता से ऐसे प्रत्याशित समंकों का निर्धारण किया जा सकता है जोकि वास्तविक समंकों के स्थानापन्न हो तथा जिनका प्रयोग वैज्ञानिक एवं अनुसंधान कार्यों में किया जा सकता है ।

प्रतिचयन के परीक्षण में सहायक – द्विपद वंटन से प्राप्त प्रत्याशित आवृतियों तथा अवलोकित आवृतियों के तुलना करने पर यह निर्धारित किया जा सकता है दोनों मूल्यों में अन्तर होने का क्या कारण है अर्थात् यह अन्तर प्रतिचयन के उच्चावचनों के कारण उत्पन्न हुआ है या किन्हीं अन्य कारणों से अतः यह प्रतिचयन के परीक्षण में सहायक होता है ।

परिकल्पनाओं का परीक्षण – द्विपद प्रमेय की भूमिका परिकल्पनाओं के परीक्षण में भी महत्वपूर्ण है क्योंकि प्रत्याशित आवृतियों के ऑकलन में यह प्रमेय महत्वपूर्ण है । जिसकी तुलना वास्तविक आवृतियों से कर परिकल्पनाओं का परीक्षण एवं अन्वायोजन की उत्कृष्टता की जाँच की जाती है ।

उद्योग, विपणन तथा व्यवसाय में महत्व – द्विपद प्रमेय का व्यवहारिक उपयोग तथा महत्व आखथक जगत में विशेषतौर पर उद्योग, विपणन एवं व्यवसाय में आज स्थापित हो चला है । आज समय वस्तु की गुणवत्ता परीक्षण तथा साख के निर्माण का है जिस दिशा में द्विपद प्रमेय के माध्यम से कम समय में कम खर्च पर बेहतर ऑकलन लगाया जा सकता है । गुणवत्ता परीक्षण में तो द्विपद प्रमेय का उपयोग सबसे महत्वपूर्ण है । इसके अतिरिक्त वित्तीय प्रत्याशाओं के ऑकलन व्यापारिक परिस्थितियों के पूर्वानुमान आदि में भी द्विपद प्रमेय अत्याधिक उपयोगी है ।

29.18 सारांश

द्विपद प्रमेय आधारित वंटन को सन्दर्भ में वर्तमान ईकाई में हमने व्यापक अध्ययन किया एवं इसके विभिन्न सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक पहलुओं पर विचार करते हुए विभिन्न समस्याओं को इस प्रमेय के माध्यम से हल किया तथा महत्वपूर्ण निष्कर्षों एवं परिणामों का विश्लेषण किया।

इसमें कोई भी संशय नहीं है कि द्विपद प्रमेय के माध्यम से भावी पूर्वानुमान लगाने तथा प्रत्याशित आवृतियों के ऑकलन में बहुत सहायता मिलती है परन्तु साथ ही साथ द्विपद प्रमेय उन क्षेत्रों में अत्याधिक सफलतापूर्वक प्रयोग की जाती है जहाँ कि घटनाओं के सफलता तथा असफलता के आधार द्वन्द्व भाजन किया जाता है । इसकी इन्हीं विशेषताओं के कारण से औद्योगिक तथा व्यापारिक जगत में विशेषतौर पर गुणवत्ता नियन्त्रण में इसका प्रयोग किया जाता है।

यद्यपि द्विपद प्रमेय की भी अपनी ही सीमायें तथा खामियाँ हैं परन्तु हमें यह नहीं भूलना चाहिये कि यह सांख्यिकीय के उन महत्वपूर्ण प्रमेयों में से है जिन्होंने सैद्धान्तिक आवृति वंटनों के निर्माण का सूत्रपात करते हुए आने वाले समय में विद्वानों को प्रेरित किया कि वह नवीन प्रमेयों एवं सिद्धान्तों का निर्माण कर सके।

29.19 शब्दावली

प्रत्याशित मूल्य– किसी यादृच्छिक चर का प्रत्याशित मूल्य या गणितिय प्रत्याशा उस चर का भारित माध्य कहलाता है इसे E से निरूपित करते हैं ।

$$\text{अर्थात्}\ E(X) = \sum_{i-1}^{n} p_i X_i$$

यादृच्छिक चर – यादृच्छिक चर उस चर को कहते हैं जिसका मूल्य किसी यादृच्छिक परिणाम द्वारा निर्धारिति होता है ।

आवर्ग या सैद्धान्तिक आवृति वंटन – ऐसे वंटन जो कि अवलोकनों पर आधारित न होकर निश्चित पूर्व कल्पनाओं, मान्यताओं एवं प्रायिकता नियमों के आधार पर गणितीय रूप से अनुमानित किया जाता है ।

अवलोकित समंक – ऐसे परिणाम जो कि एक साथ नहीं घटित हो सकते यानि किसी सिक्के की उछाल में चित या पट आना ।

स्वातन्य संख्या (d.f.) – स्वातन्तय संख्या वह आवृतियाँ होती हैं जिन्हें परीक्षणकर्त्ता अपनी इच्छानुसार निर्धारित कर सकता है । यदि तीन संख्याओं का योग 24 है तो दो संख्यायें हम अपनी स्वेच्छा से निर्धारित कर कसते हैं परन्तु तीसरी नहीं यहाँ पर (d.f.) = (n – 1)

प्राचल – समष्टि के सभी ईकाईयों के अभिलक्ष्णों के सांख्यिकीय मान प्राचल (Paramiter) कहलाते हैं ।

प्रतिचयन – समष्टि से प्रतिनिधि प्रतिपर्ण के चयन करने की रीतियाँ प्रतिचयन कहलातीहैं ।

परिकल्पना – सांख्यिकीय परिकल्पना किसी समष्टि प्राचल के संख्यात्मक मान के सन्दर्भ में की गयी मान्यता होती है जो सत्य या असत्य हो सकती है इसको किसी प्रायिकता वंटन की सहायता से यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर परीक्षण करके स्वीकार या अस्वीकार किया जा सकता है ।

सार्थकता का स्तर- सार्थकता का स्तर विश्वसनीयता की वह सीमा है जहाँ परीक्षणकर्त्ता यह विश्वास से कह सकता है कि परिकल्पना सत्य है या असत्य यह समान्यतया 1ः या 5ः के स्तर पर नापी जाती है ।

आसंजन उत्कृष्ट - यदि प्रत्याशित तथा अवलोकित आवृतियों का अन्तर सार्थक नहीं होता है तो आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट माना जाता है ।

यदि यह अन्तर सार्थक होता है तो आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं माना जाता है ।

प्वॉयवॉ वंटन– फ्रांसीसी गणितज्ञ डेनिस प्वॉयसॉ द्वारा दिया खण्डित वंटन है जो निम्न है -

$$p(x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

यहाँ पर p का मान बहुत कम (0 के सन्निकट) तथा q का मान अधिक यानि (1 के सन्निकट) होता है ।

प्रसामान्य वंटन .– यह एक अखण्डित तथा महत्वपूर्ण वंटन होता है जिसके प्राचल X□ तथा □□होते हैं तथा प्रमापित प्रसामान्य चर मूल्य (Z Score) निम्न होता है।

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

29.20 बहुविकल्पीय प्रश्न

1. द्विपद वंटन किस प्रकार का वंटन है ?

(i) मिश्रित (ii) आश्रित (iii) खण्डित (iv) अखण्डित

2. प्रसामान्य वंटन किस प्रकार का वंटन है ?

(i) सतत् (ii) असतत् (iii) मिश्रित (iv) आश्रित

3.द्विपद वंटन की रचना का श्रेय किस विद्वान को है ?

(i) थॉमस बर्नोली (ii) जेम्स बर्नोली (iii) डेविस (iv) मारकोव

4. द्विपद वंटन का समान्तर माध्य होता है ?

(i) p (ii) q (iii) np (iv) n

5. द्विपद प्रमेय का प्रसरण होता है ?

(i) npq (ii) $\sqrt{npq}$ (iii) np (iv) $\sqrt{np}$

6. द्विपद वंटन का प्रथम परिघात होता है ?

(i) np (ii) npq (iii) 1 (iv) 0

7. द्विपद प्रमेय का दूसरा परिघात होता है ?

(i) $\sqrt{npq}$ (ii) $n^2p^2q^2$ (iii) npq (iv) np

8. द्विपद वंटन में यानि $(p + q)^n$ में पद होते हैं ?

(i) n (ii) n + 1 (iii) n – 1 (iv) np

9. द्विपद वंटन में $(p + q)$ का प्रयोग होता है ।

(i) 1 से ज्यादा (ii) 1 से कम (iii) 1 (iv) 0

10. द्विपद वंटन के सभी पदों के गुणांकों का योग कितना होता है ?

(i) n^2 (ii) 2^n (iii) 2n (iv) n + 1

11. यदि किसी परीक्षणों में सफलताओं की संख्या द है तो स्वान्×य संख्या कितनी होगी ?

(i) n – 1 (ii) n (iii) n + 1 (iv) n^2

12. बर्नोली प्रमेय किसके द्वारा निरूपित होती है ।

(i) ${}^nC_r\, q^r\, p^{n-r}$ (ii) ${}^rC_n\, p^r q^{n-r}$ (iii) ${}^nC_r\, p^r q^{n-r}$ (iv) कोई नहीं

उत्तरमाला 1. (iii), 2. (i), 3. (ii), 4. (iii), 5. (i), 6. (iv), 7. (iii), 8. (ii), 9. (iii), 10. (iii), 11. (i), 12 (iii)

29.21 संख्यात्मक प्रश्न

1. छः पांसे 729 बार फेंके जाते हैं कम से कम तीन पांसों पर 5 या 6 आने की प्रायिकता कितनी बार होगी ?

2. यदि द्विपद वंटन का माध्य 4 तथा प्रसरण 3 है तो दए च ए के मान ज्ञात कीजिए ।

3. द्विपद वितरण ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 4 तथा प्रसरण 6 है ।

4. निम्न द्विपद का पूर्ण विस्तार कीजिए। $256(½+½)^4$

5. यह मानते हुए कि किसी शहर की आधी जनसंख्या शाकाहारी है एवं 100 अन्वेषकों में से प्रत्येक 10 व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर उनसे पूछना है कि वह शाकाहारी है या नहीं, कितने अन्वेषक यह रिपोर्ट करेंगे कि तीन या इससे कम लोग शाकाहारी हैं ? (संकेत यहाँ $p = ½ = q½$ ।

6. एक निर्माण की प्रक्रिया में औसत रूप से 5ः वस्तुयें दोषपूर्ण बनती हैं तीन वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में 0, 1, 2, तथा 3 दोषपूर्ण वस्तुयें पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

7. एक सामान्य पांसा पाँच बार फेंकने पर 5 का अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए (i) एक समय भी नहीं (ii) दो बार (iii) पाँच बार ।

8. यदि प्रत्येक 30 दिनों में औसतन 12 दिन वर्षा होती है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि किसी सप्ताह के प्रथम चार दिन वर्षाहीन होंगे तथा शेष बरसाती होंगे ।

9. 7 सिक्कों की 128 उछालों में चित की संख्या का आवृति वंटन निम्न प्रकार से है प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात करते हुए आसंजन की उत्कृष्टता की जाँच कीजिए ।

10. द्विपद वंटन के लिये μ (i) माध्य (ii) प्रमाप विचलन (iii) विषमता परिघात गुणांक (iv) पृथुशीर्षत्व का माप ·

उत्तरमाला **1.** 233, **2.** 16, ¼, 3/4, **3.** $(2/3 + 1/3)^{18}$ **4.** 16, 64, 96, 64, 16 **5.** 17.2, **6.** 0.8574, 0.1354, 0.0071, 0.0001, **7.** (i) 0.402 (ii) 0.161 (iii) 0.00013 **8.** 0.00829 **9.** 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 **10.** (i) 42 (ii) 3.55 (iii) – 0.1127 (iv) 2.9794

29.22 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सैद्धान्तिक आवृति वंटन का अर्थ स्पष्ट करते हुए द्विपद वंटन की विवेचना कीजिये तथा प्वॉयसॉ एवं प्रसामान्य वंटन से इसकी संक्षिप्त तुलना कीजिए ?

2.द्विपद वंटन की विशेषतायें बताते हुए इसकी उपयोगिता तथा महत्व पर प्रकाश डालिए ।

3. द्विपद वंटन के अचर मूल्यों को स्पष्ट करते हुए उनका महत्व समझाइये तथा परिघातों, विषमता गुणांक एवं पृथुषीर्षत्व का माप परिभाषित कीजिए ।

4. अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों से क्या तात्पर्य है आसंजन की उत्कृष्टता जाँच करने पर द्विपद प्रमेय के महत्व की चर्चा कीजिए ।

5. द्विपद प्रमेय की मान्यतायें तथा सामान्य नियम लिखते हुए पास्कल त्रिभुज को स्पष्ट कीजिए ।

29.23 सन्दर्भ ग्रन्थ सूत्र

- नागर, कैलाश नाथ (2008), सांख्यिकी के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाशन
- सिंह, एस0 पी0, सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिडेट ।
- Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical, Economics, Himalaya Publishing House.
- शर्मा, गोकुल चन्द, चौधरी, एस0 एस0 साख्यिकीय विधियाँ, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी ।