इकाई 1 प्रतिदर्श: परिचय व प्रकार

(Sampling: Introduction and Types)

1.1 प्रस्तावना

1.2 उद्देश्य

1.3 नमूनाकरण की बुनियादी अवधारणाऐं

1.3.1 समस्त विचाराधीन वस्तु या समग्र

1.3.2 नमूना

1.4 संमकों को संग्रह करने की विधियॉ

1.4.1 जनसंख्या विधि

1.4.1.1 जनगणना विधि के गुण

1.4.1.2 जनगणना विधि के दोष

1.4.2 नमूनाकरण विधि

1.4.2.1 नमूने विधि के गुण

1.4.2.2 नमूने विधि के दोष

1.4.3 जनगणना और नमूना विधि में अंतर

1.5 नमूनाकरण विधियॉ

1.5.1 प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1.5.2 गैर प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1.6 नमूनाकरण और गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ

1.6.1 नमूनाकरण त्रुटियॉ

1.6.2 गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ

1.7 नमूनकरण वितरण की अवधारणाऐं

1.7.1 नमूनाकरण वितरण

1.7.2 प्राचल

1.7.3 ऑकडे

1.7.4 प्रतिस्थापना के साथ एवं इसके बिना नमूना

1.8 आंकडे का नमूनाकरण वितरण

1.9 ऑकडों की मानक त्रुटि

1.10 माध्यों का नमूना वितरण

1.11 बडी संख्याओं का नियम एवं केन्द्रीय सीमा प्रमेय

1.11.1 कडी संख्याओं का नियम

1.11.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय

1.12 सारांश

1.13 शब्दावली

1.14 बोध प्रश्न

1.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.16 स्वपरख प्रश्न

1.17 सन्दर्भ पुस्तकें

1.1 प्रस्तावना

जीवन के सभी क्षेत्रों के लिए (जैसे आर्थिक, सामाजिक और व्यापार)सांख्यिकीय जांच और संमकों के विश्लेषण की आवश्यकता दिन प्रतिदिन बढ़ रही है। सांख्यिकीय आंकडों को एकत्र करने के दो तरीके हैंः (1) जनगणना विधि और (2) नमूना विधि । जनगणना विधि के तहत, पूरी जानकारी के लिए संबंधित जॉच के दायरे या जनसंख्या इकाइयों को एकत्र किया जाता है जबकि नमूना विधि के तहत, इसके विपरीत समग्र की सभी इकाइयों के बारे में जानकारी एकत्रित करने की तुलना में केवल चयनित इकाइयों से संबंधित जानकारी एकत्र की जाती है। आधुनिक समय में नमूना विधि सांख्यिकीय जॉच का एक महत्वपूर्ण और लोकप्रिय तरीका है। आर्थिक और व्यापार की दुनिया के अलावा, इस विधि का व्यापक रूप से दैनिक जीवन में प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक घर पत्नी को स्वाद पकवान के एक छोटे से नमूने को चखने पर समग्र के सुगंध, नमक, मिर्च खुशबू आदि का पता चलता है। चिकित्सक मरीज के रक्त की जॉच रक्त की केवल एक या दो बूँद द्वारा कर सकता है। उसी तरह हम, दैनिक उपयोग की वस्तुओं जैसे गेहूँ, चाल, दाल आदि खरीदने से पहले इन चीजों के नमूनों को देखकर चीजों के गुणवत्ता के बारे में जानते हैं।

कारखानों में सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रक उत्पादन की कुछ इकाईयों का परीक्षण कर समग्र की गुणवत्ता का परीक्षण करता है। एक शिक्षक कुछ छात्रों से प्रश्न पूछकर अपने शिक्षण की प्रभावकारिता के बारे में जान लेता है। वास्तविकता में, शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र हो जहॉ नमूने विधि का प्रयोग नहीं किया जाता है।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- नमूनाकरण की मूल आवधारणा की व्याख्या कर सकें।
- आंकडे एकत्रित करने की विधियों के प्रकार की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण विधियों के प्रकार की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण एवं गैर नमूनाकरण त्रुटियों की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण वितरण की अवधारणाओं का वर्णन कर सकें।

1.3 नमूने की बुनियादी अवधारणाऐं

इससे पहले कि आप नमूने के पहलुओं का विस्तृत अध्ययन करें आप को नमूने से संबधित बुनियादी अवधारणाओ समझना चाहिए जो कि निम्नवत हैः

1.3.1 समग्र

सांख्यिकी में समग्र का आशय संग्रहित (कुल) वस्तुऐं/चीजें जिसके बारे में आप जानकारी प्राप्त करते हैं । समग्र का आशय जॉच के तहत पूरे क्षेत्र से है जो ज्ञान की मांग करता है। उदाहरण के लिए यदि आप विद्यालय के 2,000 विद्यार्थियों के औसत मासिक व्यय के बारे मे ंसूचना चाहते हैं, तो उसके सीमित (ii) असीमित प्रकार है।

सीमित समग्र में वस्तुओं की संख्या निश्चित होती है जैसे कालेज में छात्रों या शिक्षकों की संख्या निश्चित है। दूसरी और असीति समग्र में, वस्तुओं की संख्या अनिश्चित होती है जैसे आसमान में तारों की संख्या, समुद्र में पानी की बूँदें, पेड मे ंपत्नियों की संख्या, सिर पर बालों की संख्या ।

1.3.2 नमूना

समग्र के चयन का एक हिस्सा नमूना कहा जाता है। दूसरे शब्दों में समग्र से चयनित या वर्गीकृत इकाईयों को नमूना कहते हैं। वास्तव में, नमूना समग्र का वह हिस्सा है जिसे जॉच करने के

उददेश्य से चयनित करते हैं। उदाहरण के लिए एक अन्वेषक एक कालेज के 2000 छात्रों में से 200 छात्र जो कि 2000 छात्रों का प्रतिनिधित्व करते हैं को चयनित करता है तो इन 200 छात्रों को एक नमूने के रूप मे ंकरार दिया जाएगा। इस प्रकार, नमूने का आशय समग्र से चयनित उन इकाईयों से है जो कि समग्र का प्रतिनिधित्व करते हैं।

1.4 संमकों को संग्रह करने की विधियॉ

संख्यिकी संमकों को संग्रह करने के दो तरीके निम्नवत हैं

1.4.1 **जनगणना विधि वह तरीका** है जिसमें जॉच के लिए जानकारी या संमक जो कि समग्र से सम्बन्धित है के प्रत्येक एवम् हर इकाई को एकत्रित करके एवम् उनके आधार पर निष्कर्ष तैयार किया जाता है। उदाहरण के लिए, (मासिक व्यय, औसत ऊॅचाई, औसत वजन इत्यादि) यदि कालेज के 2000 छा़त्रों के बारे में कुछ जानकारी एकत्र की जा रही है उस उद्देश्य में यदि आप कालेज प्रत्येक एवम् हर छात्र से प्रश्नमय करते हैं तो इस विधि को जनगणना विधि कहते हैं। इस उदाहरण में सम्पूर्ण कालेज या सभी 2000 छात्र समग्र समझे जायेंगे और व्यक्तिगत रूप से प्रतयेक छात्र समग्र इकाई कहलायेगा। भारत में जनगणना विधि या पूर्ण गणन विधि का उपयोग हर 10 वर्षों बाद किया जाता है।

1.4.1.1 जनगणना विधि के गुण

(i) **विश्वसनीय और सटीक संमक** : जनगणना विधि द्वारा प्राप्त ऑकडे अधिक विश्वसनीय एवं सटीक होते हैं क्योंकि इस विधि में संमकों को समग्र के प्रत्येक एवं हर इकाई से सम्पर्क कर एकत्रित किया जाता है।

(ii) **व्यापक जानकारी** : यह विधि समग्र के प्रत्येक इकाई के बारे में विस्तृत जानकारी देता है। उदाहरण के लिए, भारतीय जनगणना केवल व्यक्तियों की संख्या के बारे मे ंज्ञान नहीं देता अपितु व्यक्तियों की आयु, व्यवसाय, आय, शिक्षा, वैवाहिक स्थिति के बारे में भी जानकारी देता है।

(iii) **उपयुक्तता** : यह विधि सीमित दायरे एवम्र विविध विशेषताओं वाले समग्र के लिए अधिक उपयुक्त है। इस विधि का उपयोग गहन अध्ययन मे ंभी वांछित है।

1.4.1.2 जनगणना विधि के दोष :

(i) **अधिक महंगा** : जनगणना विधि एक महंगी विधि है। समग्र के प्रत्येक इकाई से जानकारी एकत्र करने के लिए ज्यादा धन की आवश्यका होती है। यही कारण है कि सरकार द्वारा इस विधि ज्यादातर उपयोग महत्वपूर्ण मुद्दों के लिए किया जाता है जैसे –जनगणना।

(ii) **ज्यादा समय का लगना :** इस विधि में ऑकडों के सग्रह में ज्यादा समय लगता है क्योंकि ऑकडे सम्रग के प्रत्येक एंव हर इकाई से संग्रहित किये जाते हैं इस कारण से सांख्यिकी निष्कर्ष बनाने मे ंदेरी होती है।

(iii) **अधिक श्रम का लगना:** ऑकडें संग्रहित करने की इस विधि मे ंबहुत ज्यादा परिश्रम लगता है। इसके लिए प्रगणक की बडी संख्या की आवश्यकता होती है।

(iv) विशिष्ट समस्याओं के लिए उपयुक्त नहीं : यह विधि कुछ विशिष्ट समस्या और अनंत समग्र के सम्बन्ध में उपयुक्त नहीं है। उदाहरण के लिए, अगर समग्र अनन्त है या समग्र की इकाईयॉ खराब या प्रकृति में बहुत जटिल हैं तो जनगणना विधि उपयुक्त नहीं हैं।

1.4.2 नमूना विधि :

नमूना विधि वह विधि है जिसमें समग्र से चयनित नमूना इकाईयों से ऑकडें एकत्रित कर समग्र के लिए निष्कर्ष निकाला जाता है। उदाहरण के लिए यदि कालेज के 2,000 छात्रों के मासिक व्यय का अध्ययन किया जाता है तो आप 2000 छात्रों से जानकारी एकत्र करने के बजाय कुछ चयनित छात्रों से जैसे 100 छात्रों से जानकारी एकत्र कर निष्कर्ष निकाल सकते हैं, तो इस विधि को नूना विधि कहा जायेगा।

नमूने विधि के आधार पर कालेज के सभी छात्रों के मासिक व्यय का ध्यान करना सम्भव है। नमूने विधि के तीन महत्वपूर्ण चरण हैं:

(i) नमूने का चयन करना (ii) नमूने से जानकारी एकत्र करना (iii) समग्र के लिए निष्कर्ष निकालना

1.4.2.1 नमूने विधि के गुण

(i) **कम खर्चीली** : यह विधि कम खर्चीली है। इस विधि मे ंधन एवं श्रम दोनों की बचत होती है क्येांकि इसमे ंसमग्र की कुछ इकाईयों का अध्ययन किया जाता है।

(ii) **समय की बचत** : इस विधि मे ंऑकडे जलदी से एकत्र किये जा सकते हैं क्योंकि ऑकडे समग्र की कुछ इकाईयों से प्रापत किये जाते हैं जिससे ज्यादा समय की बचत होती है।

(iii) **गहन अध्ययन** : नमूना विधि में इकाईयों की संख्या कम होती है जिससे समग्र का गहन अध्ययन किया जा सकता है।

(iv) **संगठनात्मक सुविधा** : इस विधि में अनुसंधान कार्य का आयोजन एवं क्रियान्वयन अधिक आसानी से किया जा सकता है। अधिक कुशल और सक्षम जॉचकर्ता नियुक्त किये जा सकते हैं।

(v) **अधिक विश्वसनीय परिणाम** : यदि समग्र से नमूनों का चयन इस तरह से किया जाता है कि चयनित नमूने सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधितव करते हैं, तो इससे उत्पन्न परिणाम अधिक सटीक एवं विश्वसनीय होंगें।

(vi) **अधिक विज्ञान संबंधी** :– नमूना विधि ज्यादा विज्ञान संबंधी है क्योंकि इसमें ऑकडों की पूछताछ अन्य नमूनों के साथ की जा सकती है।

(vii) **एकलौती विधि :** कुछ ऐसे क्षेत्र जहॉ पूछताछ जनगणना विधि से सम्भव नहीं है उन परिस्थितियों में केवल नमूना विधि ही ऑकडें एकत्रित करने के लिए उपयुक्त हैं । यदि समग्र अनन्त या बडे पैमाने पर या खराब होने की प्रकृति का है, तो केवल नमूना विधि का प्रयोग इस तरह के मामलों में किया जाता है।

1.4.2.2 नमूने विधि के दोष :

(i) **कम सटीकता** : नमूने विधि मे ंकम सटीकता होती है क्योंकि समग्र की प्रत्येक इकाई मे ंपूछताछ करने के बजाय इसमे ंकेवल चयनित इकाईयेां से आंशिक पूछताछ की जाती है।

(ii) **गलत निष्कर्ष** : यदि एक नमूना चयन की विधि निष्पक्ष या इयके चयन में सावधानी नहीं बरती गई है तो निश्चित रूप से परिणाम गुमराह करते हैं।

(iii) **कम विश्वसनीय** : जनगणना विधि की तुलना में, इस विधि मे ंअन्वेषक के पक्षपात की ज्यादा सम्भावना हेाती है, जो परिणाम को कम विश्वसनीय बनाता है।

(iv) **निर्दिष्ट ज्ञान की आवश्यकता** : यह एक जटिल विधि है जिसमें नमूने के चयन के लिए निर्दिष्ट ज्ञान की आवश्यकता होती है।

(v) **उपयुक्तता का अभावः** नमूना विधि समग्र के इकाईयों के मध्य विविधता के मामले में उपयुक्त नहीं है।।

1.4.3 जनगणना विधि एंव नमूना विधि में अन्तर :

जनगणना विधि एंव नमूना विधि के बीच मुख्य अन्तर निम्नवत है–

(i) **विस्तार :** जनगणना विधि मे ंसमग्र से सम्बन्धित सभी इकाईयों की जॉच की जाती है जबकि नमूना विधि में केवल कुछ इकाईयों से पूछताछ की जाती है।

(ii) **कीमत :** जनगणना विधि समय, धन एवम् श्रम की दृष्टि से कीमती है जबकि इन मामलों में नमूना विधि किफायती है।

(iii) **जॉच का क्षेत्र** : जॉच के लिए जनगणना विधि का प्रयोग सीमित क्षेत्र तक किया जाता है जबकि नमूने विधि का प्रयोग बढे क्षेत्र तक किया जाता है।

(iv) **समरूपता :** जनगणना विधि का प्रयोग वहॉ पर उपयोगी है जहॉ समग्र के इकाईयों मे ंविविधता होती है जबकि नमूना विधि का प्रयोग समग्र की इकाईयों मे ंसमरूपता होने पर किया जाता हे।

(v) **समग्र का प्रकार** : जनगणना विधि उन क्षेत्रों में ज्यादा उपयुक्त है जहॉ समग्र के प्रत्येक एवं सभी इकाईयों का अध्ययन आवश्यक है। इसके विपरीत, जब समग्र अननत या विशाल या पूर्ण गणन के परिणाम में नष्ट किया जा रहा है तो नमूना विधि को अधिक उपयुक्त माना जाता है।

1.5 नमूनाकरण विधियॉ :

दिये गए समग्र में से नमूना चयन की विधि को नमूनाकरण कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, नमूनाकरण संग्रहित सांख्यिकीय सामाग्री के चयन के उस भाग को दर्शाता है जिसके बारे में समग्र की दृष्टि से जानकारी प्रापत की जाती है । विभिन्न आवश्यकताओं के अनुसार समग्र में से नमूना चयन की कई विधियॉ है :

1.5.1 प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1. सरल यादृच्छिक नमूनाकरण
2. स्तरीयकृत यादृच्छिक नमूनाकरण
3. कमबद्ध यादृच्छिक नमूनाकरण
4. बहुचरणीय यादृच्छिक नमूनाकरण
5. गुच्छीय नमूनाकरण

1.5.2 गैर–प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1. आलोचनात्मक नमूनाकरण
2. नियतांश नमूनाकरण
3. विस्तृत नमूनाकरण

1.5.1 प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

प्रायिकता नमूना विधियॉ समग्र में से नमूने चयन की ऐसी विधियॉ हैं जिसमें संस्कृति की सभी इकाईयों को समान अवसर देते हुए नमूने मे ंशामिल किया जताा है। प्रायिकता नमूनाकरण विधियों के विभिन्न रूप होते हैं, जो नीचे दिये गए है :

1. सरल यादृच्छिक नमूनाकरण : सरल यादृच्छिक नमूना वह पद्धति है जिसमें संस्कृति के प्रत्येक इकाई का नमूने में चयनित होने का समान अवसर होता है । कौन सा तत्व नमूने मे ंशामिल होगा और कौन सा नहीं। इस तरह के निर्णय जांचकर्ता द्वारा अपनी इच्छा से नहीं बनाये जाते बल्कि नमूनों का चयन संयोगवश होता है यादृच्छिक नमूना चयन की दो विधियॉ होती हैं :

(अ) लाटरी विधि :– लाटरी विधि :– इस विधि मे समग्र के प्रत्येक इकाई को कागज के एक टुकडे में नामित या क्रमांकित किया जाता है। इन पर्चीयों को मोडकर कलश या थैले में डाला जाता है। तद्पश्चात कई इकाईयों को एक नमूने मे शामिल करने के लिए कई पर्चीयों को किसी व्यक्ति द्वारा चुना जाता है।

(ब) यादृच्छिक अंकों की तालिका :– कुछ विशेषज्ञों ने यादृच्छिक अंक तालिकाओं का निर्माण किया है। ये तालिकाऐं नमूने के चयन मे ंसहायता करती है। इन सभी विभिन्न तालिकाओं मे ंटिपेट तालिका सबसे प्रसिद्ध एवं उपयोग में है। टिपेट ने 10400 संख्याओं की, 41600 संख्याओं के रूप द्वारा चार अंकों वाली तालिका का निर्माण किया है। इस विधि में, सबसे पहले, समग्र की सभी इकाई यों को क्रमिक रूप से लिखा जाता है। तद्प्श्चात नमूने के आकार के अनुसार टिपेट तालिका का प्रयोग करते हुए, अंकों का चयन किया जाता है। एक उदाहरण द्वारा, टिपेट तालिका की सहायता से, नमूना चयन को स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है :

टिपेट की तालिका का एक उदाहरण :

2952	6641	3992	9792	7979	5911
3170	5224	4167	9525	1545	1396
7203	4356	1300	2693	2370	7483
3408	2762	3563	6107	6913	7691
0560	5246	1112	9025	6008	8127

उदाहरण के लिए, मान लें कि 5000 इकाईयों मे ंसे 12 इकाईयों को चुना जाना है। इन इकाईयों को निर्धारित करने के लिए, टिपेट तालिका के लिए , पहले 5000 इकाईयों को 1 से 5000 तक क्रमबद्ध करना होगा और तब टिपेट तालिका से 12 अंकों का चयन प्रारम्भ से जो कि 5000 से कम होगा किया जायेगा। ये 12 अंक निम्नवत हैं :

2952	4156	4356	2370
3992	1545	1300	3408
3170	1396	2693	2762

इकाईयों की यह क्रम संख्या को नमूने मे ंशामिल किया जायेगा। यदि समग्र की इकाईयॉ 100 से कम हो, तब 4 अंक के यादृच्छिक संख्या को , 2 अंकों की संख्या में (छोटा) संक्षिप्त किया जायेगा, और तब इन दो अंकों की संख्या का चयन होगा। इसी तरह 60 इकाईयों मे ंसे यदि 6 इकाईयॉ चयनित करनी है, तो क्रम संख्या 29, 39, 31, 41, 15 और 13 को नमूने में शामिल किया जायेगा।

गुण : –

1. इस पद्धति (विधि) में निजी पूर्वाग्रह की कोई संभावना नहीं होती है। दूसरे शब्दों में, यह विधि व्यक्तिगत पूर्वाग्रह से युक्त होती है।
2. इस विधि के अन्तर्गतत, समग्र की प्रत्येक इकाई के चयन का अवसर एक समान होता है।
3. इस विधि के प्रयोग से समय, धन तथा श्रम की बचत होती है ।

दोष :

(i) यदि नमूने का आकार छोटा है, तो नमूना पर्याप्त रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।

(ii) यदि समग्र बहुत छोटा है, तो यह विधि उपयुक्त नहीं है।

(iii) यदि समग्र में कुछ वसतुऐं इतनी महत्वपूर्ण हैं कि नमूने में उनका शामिल किया जाना बहुत जरूरी है तो इस विधि का प्रयोग उचित नहीं होगा।

(iv) जब समग्र की इकाईयॉ विविध लक्षणों के साथ हो तो इस विधि का प्रयोग उचित नहीं हेागा ।

(ii) स्तरीय यादृच्छिक नमूना :

जब समग्र के इकाईयों मे ंसमरूपता के वजाय विविधता होती है तो इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि के अर्न्तगत समग्र के भी इकाईयों को पहले उनकी विशेषताओं के अनुसार अलग अलग हिस्सों में विभाजित किया जाता है। उसके बाद यादृच्छिक नमूने का उपयोग करके प्रत्येक परत से नमूना इकाई का चयन किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कालेज के 1500 छा़त्रों में 150 छात्रों का चयन करना है तो सबसे पहले कालेज के विद्यार्थियेां को कला, व्यवसाय एंव विज्ञान विषय के आधार पर तीन वर्गों में विभाजित करना होगा । माना इन तीन संकायों में क्रमशः 500, 700, 300 छात्र हैं औ 10% नमूने लेने हे। तब यादृाच्छिक नमूना विधि के प्रयोग के आधार पर क्रमशः 50, 70 और 30 छात्र चयनति किये जा सकेंगें। इस तरह, इस विधि मे ंप्रत्येक कक्षा या वर्ग की आनुपातिक प्रतिनिधित्व की अवधारणा रहती है और समग्र की सभी इकाईयों को नमूने में चयनित किये जाने का बराबर का मौका मिलता है ।

गुण :

(i) इस विधि में इकाईयों के चयनित होने की ज्यादा सम्भावनाएं होती है।

(ii) तथ्यों के आधार पर विभिन्न स्तर पर इस विधि के तहत तुलनात्मक अध्ययन संभव है।

(iii) इस विधि में ज्यादा शुद्धता होती हैं।

दोष :

(i) इस विधि का सीमित दायरा है क्योंकि इस विधि को तभी अपनाया जा सकता है जब केवल समग्र और उसके विभिन्न तबको का ज्ञान हो ।

(ii) इस विधि में पूर्वाग्रह की संभावना हेा सकती है यदि समग्र ठीक से स्तरीकृत न हो ।

(iii) यदि समग्र आकार मे ंभीा बहुत छोटा हो तो इस स्तरीकृत करने में कठनाई होती है।

(iii) कमबद्ध यादृच्छिक नमूना :

इस विधि मे ंसमग्र के सभी इकाईयेां को क्रमबद्ध तरीके से व्यवस्थित ओर गिना जाता है और तब नमूना इकाई को बराबर के अन्तराल में चयनित किया जताा है। उदाहरण के लिए, यदि 50 छात्रों में से 5 को नमूने के लिए चयिनित कर रहे हैं तो 50 छात्रों को गिनकर क्रमबद्ध तरीके से व्यवस्थित किया जायेगा। पहले दस में से एक इकाई को यादृच्दिक तरीके से चयनित किया जायेगा। इसके बाद चयनित संख्या से प्रत्येक 10 वीं इकाई का चयन नमूना बनावट के लिए हेागा। यदि प्रथम चयनित अंक 5वीं इकाई है तो उसके बाद के अंक 15 वीं इकाई, 25 वीं इकाई, 35 वीं इकाई और 45वीं इकाई होंगें।

गुण :

(i) यह एक सरल विधि है। इसके द्वारा नमूने आसानी से प्रापत किये जा सकते हैं।

(ii) इस विधि द्वारा नमूना चयन में बहुत कम समय लगता है और परिणाम लगभग सटीक होता है।

दोष :

(i) इस विधि में, प्रत्येक इकाई को चयनित होने के बराबर मौके नहीं है क्येांकि केवल पहली इकाई का चयन यादृच्छिक नमूना विधि पर आधारित है।

(ii) यदि सभी इकाइयॉ लक्षणों में भिन्न हैं तो परिणाम उचित नहीं हेागें।

(IV) बहु–स्तरीय यादृच्छिक नमूनाः–

जब नमूना पद्धति विभिन्न स्तरों से गुजरती है, तो इसे बहुस्तरीय यादृच्छिक नमूना कहा जाता है। इस विधि मे ंसर्वप्रथम सम्पूर्ण समग्र को स्तरों या उप स्तरों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक स्तर पर कुछ इकाईयों का चयन यादृच्छिक नमूने के आधार पर किया जाता है । तद्पश्चात इन इकाईयों का उप विभाजन किया जाता है और फिर से यादृच्छिक नमूना विधि के आधार पर कुछ उप इकाइयों को चयनति किया जाता है। उदाहरण के लिए एक राज्य में प्रौढ शिक्षा के अध्ययन के उद्‌देश्य को जानने के लिए, सर्वप्रथम यादृच्छिक आधार कुछ जिलों को चयनित किया जायेगा। तद्पश्चात चयनित जिलों कसे कुछ तहसीलें और तहसीलों से कुछ वार्ड और वार्डों से कुछ परिवारों का चयन किया जायेगा जिनसे समस्या क विषय में पूछताछ की जा सकेगी।

गुण : (i) क्षेत्रीय आधार परसमग्र के अध्ययन की यह सर्वोत्तम विधि है। (ii) यह विधि उन समस्याओं के लिए उपयुक्त है जहॉ अकेले नमूने के आधार पर निर्णय नहीं लिया जा सकता है।

दोष :

(i) सही ढंग से सटीकता के स्तर का अनुमान लगाने के लिए इस विधि में कई परीक्षणों जिसमें अधिक समय एवं श्रम शामिल हैं की आवश्यकता होती है।

(ii) इस विधि में अनमानित सटीकता का स्तर पूर्व में ही तय होता है जोकि तर्क संगत प्रतीत नहीं होता है।

(V) गुच्छ नमूना :

इस विधि में सीधे समग्र को कई हिस्सों में विभाजित किया जाता है जिन्हें गुच्छ कहते हैं जिनमें से कुछ गुच्छों को यादृच्छिक आधार पर चयनित किया जाता है तब इन गुच्छों का पूर्ण रूप से गणना की जाती है । यह विधि सामान्यतया उद्योग जगत में प्रयोग की जाती है – जैसे भेषजीय उद्योग, एक मशीन जो कि प्रत्येक 100 के खेप में दवा की गोलियॉ बनाती है, तो गुणवत्ता निरीक्षण के लिए कुछ यादृाच्छिक खेपों को चयनित कर जॉच की जाती है।

1.4.2 गैर –प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ :–

गैर प्रायिकता नमूना विधियॉ वह विधियॉ हैं जिसमें इकाईयों का चयन प्रायिकता या संभाविता के आधार पर न होकर अन्वेषक के सुविधा या निर्णय के अनुसार होता है। इस तरह की विधियों में इकाईयों का चयन विशेष उद्देश्य के साथ एवमु अन्वेषक की सुविधानुसार हेाता है।

(1) निर्णय नमूना :– इस विधि के अन्तर्गत, नमूना इकाईयों का चयन पूरी तरह से अन्वेषक के निर्णय पर निर्भर करता है। दूसरे शब्दों में, अन्वेषक अपने (उसका/उसकी) निर्णय से पसन्द के नमूने का प्रयोग करता है और अध्ययन के अर्न्तगत समग्र से केवल उन नमूना इकाईयों को शामिल करता है जिनमें विशिष्ट लक्षण हैं।

उदाहरण के लिए यदि एक कक्षा के 80 छात्रों से 20 छात्रों का एक नमूना चयनित करना है जिससे 10 छात्रों की खर्चीली प्रवृत्ति का मनोविश्लेषण किया जा सके, उन्वेषक उनहीं 20 छात्रों को चयनित करेगा जिनकी, उसका/उसकी राय कक्षा में उक्त अध्ययन पर प्रतिनिधित्व करेंगी।

गुण :–

(1) यह विधि कम खर्चीली है।

(2) यह विधि बहुत सरल और आसान है।

(3) इस विधि का प्रयोग उन क्षेत्रों में उपयोगी है जहॉ लगभग एक ही तरह की इकाईयॉ मौजूद हैं या कुछ इकाईयॉ आवष्यक हैं जिनहें नमूने से बाहर नहीं निकाला जा सकता है।

दोषः–

(1) इस विधि में अन्वेषक के स्वयं के पूर्वाग्रह का एक बडा मौका होता है।

(2) यह विधि बहुत सटीक एवं विश्वसनीय नहीं है।

(2) नियतांश नमूना :–

इस विधि में जॉचकर्ता कुछ मापदण्डों (कोटा) के अनुसार निश्चित कोटा आवंति करते हैं। उनहें अपेक्षित संख्या प्राप्त कर प्रतयेक कोटा को भरने के लिए निर्देश दिये जाते हैं। जानकारी एकत्र करने के लिए अन्वेषकों को व्यक्तियों या (नमूना इकाईयॉ) का चयन अपने निर्णय से कोटा के भीतर किया जाता है। जब सम्पूर्ण नियतांश के सभी या आंशिक प्रतिक्रियादाता उपलबध या सुगम्य नहीं होते है, तो नियतांश को नये प्रतिक्रियादाता के पूरक में पूर्ण कर लिया जाता है। नियतांष नमूना, निर्णय नमूना का एक प्रकार है।

गुण :– (1) इस विधि मे ंमहत्वपूर्ण इकाईयों को सम्मिलित करने का बडा मौका हेाता है।

(2) नियतांश की निर्धारित इकाईयों के कारण इस विधि में सांख्यिकी जॉच ज्यादा संगठित होती है।

दोष :– (1) प्रायिकता की पूर्वाग्रह पहले के तरह रहेगी। (2) इस विधि में नमूना त्रुटियों की ज्यादा सम्भावना हेाती है।

(3) सुविधा नमूना :–

इस गैर प्रायिकता नमूना मे ंअन्वेषक को सुविधानुसार पूर्ण रूप से नमूना पंसद करने की छूट दी जाती है। अन्वेषक कालेज विवरणिका के आधार पर अध्यापकों की सूची से पसंदित नमूना प्रापत करता है और (उसका/उसकी) अपने प्रकाशन के संदर्भ में जानकारी प्रापत करता है। यह विधि कम कीमती एवं सरल है लेकिन अवैज्ञानिक एवं अविश्वसनीय है। इस विधि का परिणाम गणनाओं पर ज्यादा

निर्भर करता है। जहाँ पर समग्र को स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं किया जाता है या इकाइयों की सूची उपलब्ध नहीं है या नमूना इकाईयों की सूची उपलब्ध नहीं है या नमूना इकाईयॉ स्वयं में स्पष्ट नहीं है तो यह विधि नमूना चयन के लिए उपयुक्त है।

(4) विस्तृत नमूना :–

इस विधि मे नमूने का आकार समग्र के ही रूप में लगभग बडा लिया जाता है जैसे समग्र का 90% केवल उनहीं इकाईयों को छोड दिया जाता है जिनसे ऑकडे एकत्र करने में ज्यादा कठिनाई या लगभग असम्भव होते हैं। बहुत बडा नमूना आकार होने के कारण इस विधि में बडे स्तर की सटीकता हेाती है। समस्या का विस्तृत अध्ययन सम्भव है। इस विधि के निष्कासन में भारी संसाधनों की जरूरत होती है।

1.6 नमूनाकरण और गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ

हालॉकि एक नमूने की पसंद अत्यन्त सावधानी से की जा कसती है, फिर भी निश्चित रूप से इसमें देा तरह की त्रुटियॉ शामिल होती हैः

(1) नमूना त्रुटियां (2) गैर नमूना त्रुटियां

ये त्रुटियॉ ऑकडों के संग्रह, प्रसंस्करण और विश्लेषण में घटित हो सकती हे। ऑकडों के नमूना वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेशता यह होती है कि समग्र से बडे आकार का यादृच्छिक नमूना ($n>30$) लिया गया हो जोकि सामान्य रूप से वितरित है या नहीं लेकिन ऑकडों का नमूना वितरण सामान्य वितरण के समीप होगा।

1.6.1 नमूनाकरण (त्रुटियॉ) :–

नमूना गलतियॉ वे हैं जो कि नमूना विधि के कारण पैदा हेाती है। नमूना गलतीयॉ निम्न कारणों की वजह से मुख्य रूप से उत्पन्न होती हैं:–

(1) नमूना विधि का गलत चयन

(2) नमूना एकत्रित होने की समस्याओं की वजह से एक नमूना इकाई को दूसरे नमूने इकाई के साथ प्रतिस्थापित करने से ।

(3) नमूने इकाईयों का गलत सीमांकन करने से

(4) समग्र के विभिन्न लक्षणों में परिवर्तनशीलता से भिन्नता ।

1.6.2 गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ :–

गैर नमूना त्रुटियॉ वो है जो मानवीय कारकों से घटित होती हैं जो एक अन्वेशक से लेकर दूसरे अन्वेशक तक बदलती है।ये निम्न कारकों में से किसी एक कारक के वजह से उत्पन्न होती है :–

(i) खराब योजना।

(ii) नमूना इकाईयों का गलत चयन

(iii) कर्मचारी जो ऑकडे एकत्रित करते हैं उनमें प्रशिक्षण एवं अनुभव का अभाव

(iv) प्रतिक्रियादाता की तरफ से लापरवाही एवं गैर प्रतिक्रिया होने पर

(v) संकलन मेंत्रुटियॉ होने पर

(vi) गलत सांख्यिकी मापों की वजह से

(vii) गलत प्रश्नावली की बनावट से

(viii) नमूना निरीक्षण की जॉच अपूर्ण होने पर

1.7 नमूना वितरण के अवधारणाएँ

अब, आप नमूना वितरण की कुछ बुनियादी बातें समझेगें, जो कि इस प्रकार से हैः

1.7.1 नमूनाकरण वितरण :–

समग्र से चयनित एवं एक नमूने के परीक्षण का उद्देश्य समग्र के कुछ लक्षणों का आंकलन करना या अनुमान लगाना हेाता है। इस प्रक्रिया में नमूना वितरण के ज्ञान की अत्यधिक आवश्यकता हेाती है।

1.7.2 प्राचल / मापदण्ड :–

समग्र ऑकडों से किसी भी सांख्यिकी मापों की गणना करने को मापदण्ड कहा जाता है। इस प्रकार समग्र माध्य, समग्र मानक विचलन, समग्र परिवर्तनशलता, समग्र अनुपात इत्यादि मापदण्ड हैं। मापदण्डों को ग्रीक शब्द से प्रदर्शित किया जाता है जो कमशः μ, σ ,σ^2 और p है।

1.7.3 ऑकडा / सांख्यिकी :–

नमूना ऑकडों से किसी भी सांख्यिकी मापों द्वारा की गई गणना को सांख्यिकी कहते हैं। इस प्रकार नमूना माध्य, नमूना मानक विचलन, नमूना परिवर्तनशीलता नमूना अनुपात आदि सभी सांख्यिकी है, सांख्यिकी को रोमन शब्दों मे ंप्रदर्शित किया जाता है $\bar{x}$, s, s^2 और p है।

1.7.4 प्रतिस्थापना के साथ और इसके बिना नमूना :–

नमूना, समग्र से चयनित नमूने की एक विधि है। नमूना प्रतिस्थापना के साथ या इसके बिना भी किया जा सकता है। नमूना जहॅा समग्र से प्रत्येक इकाई को एक बार से ज्यादा चुन लिया जाता है तो उसे नमूना प्रतिस्थापना के साथ कहा जाता है। यदि प्रत्येक इकाई को एक बार से ज्यादा नहीं चुन सकते उेस नमूना प्रतिस्थापना के बाहर कहा जाता है। प्रतिस्थापना के साथ नमूना के संदर्भ में समग्र का आकार N होने पर n आकार के नमूनों की कुल सम्भावित संख्या N^n लेकिन यदि प्रतिसीापना के बाहर नमूने के लिए कल्पना कुल सम्भावित नमूनों की संख्या $NC_n =$ m होगी ।

1.8 ऑकडों का नमूनाकरण वितरण

नमूना वितरण सांख्यिकीय अनुमान के सैद्धान्तिक आधार का गठन करता है और इका व्यापार निर्णय लेने के लिए काफी महत्व है।

ऑकडों का नमूना वितरण आवृत्ति वितरण है जो एक ही आकार मे ंएक ही समग्र से तैयार की गई विभिन्न नमूनों से गणना कर विभिन्न मान्यता केसाथ निकाली जाती है। माना आप समग्र (N) से प्रतिस्थापना के साथ या बाहर n आकार के सभी सम्भावित नमूनों को निकालते हैं ।समग्र से निकले हुए सम्भावित प्रत्येक नमूने के लिए आप ऑकडों के लिए जैसे माध्य, माध्यिका, मानक विचालन परिवर्तनशीलता आदि की गणना करते हैं। तब आंकडों के सभी सम्भव मूल्यों को आवृत्ति विभाजन या प्राधिकता विभाजन में वर्गीकृत किया जाता है। इस तरह के ऑकडों के वितरण से प्रापत वितरण को नमूना वितरण कहते हैं। ऑकडों के प्रकृति के आधार पर आप द्वारा गणना किये हुए विभिन्न नमूना वितरण हो सकते हैं। जैसे यदि कोई विशेष ऑकडा जिसका नमूना माध्य ज्ञात किया जाता है तो वह वितरण माध्य का नमूना वितरण कहलायेगौ यदि आप प्रतयेक नमूने की परिवर्तनशीलता की गणना करते हैं तो इसे परिर्वतनशलता का नमूना वितरण कहते हैं। इसी तरह आप अनुपात, माध्यिका मानक विचलन आदि का नमूने वितरण की गणना कर सकेंगें।

1.9 ऑकडों की मानक त्रुटियॅा

ऑकडों के नमूने विवरण के मानक विचलन को ऑकडों का मानक त्रुटियॅा कहते हैं। जैसा कि विभिनन प्रकार के नमूना वितरण होते हैं, नमूना वितरण के प्रकृति के आधार पर आपके पास विभिन्न प्रकार की मानक त्रुटियॅा हो सकती हैं नमूना वितरण के माध्य का मानक विचलन को माध्य की मानक त्रुटियॅा कहते हैं। माध्य की मानक त्रुटि नाप की सीमा है नमूना माध्य, समग्र माध्य से पृथक किया जाता है। इस प्रकार, मानक विचलन एवं माध्य मानक त्रुटि के बीच मूलभूत अन्तर यह है कि मानक विचलन जिसमें व्यक्तिगत इकाईयों की मापों की सीमा को मिलान केन्द्र के मूल्य से पृथक किया जाता है और माध्य मानक त्रुटि वह सीमा है जिसमें व्यक्तिगत नमूना माध्य को समग्र माध्य से पृथक किया

जाता है। माध्य की मानक त्रुटियों की तरह आप के पास माध्यिका मानक त्रुटियॉ, मानक विचलन, अनुपात , परिवर्तनशीलता आदि हो सकते हैं।

मानक त्रुटि का उपयोग बडी संख्या में समस्याओं के लिए किया जताा है जिनका वर्णन निम्नवत किया जाता है:–

1) नमूने की विश्वसनीयता के लिए :– मानक त्रुटि नमूने की विश्वसनीयता एवं यर्थाथता के बारे में एक धारणा देती है अर्थात अनुमानित मान प्रेषित मान से कितना ज्यादा भिनन है। ज्यादा मानक त्रुटि होने पर, अनुमानित एवं प्रेषित मानों के बीच में ज्यादा विचलन होता है और नमूने की विश्वसनीयता बहुत कम होती है। मानक त्रुटि बहुत कम होने पर अनुमानित एवं प्रेषित मानों के मध्य बहुत कम विचलन होता है और नमूने की विश्वसनीयता बहुत ज्यादा होती है।

2) परीक्षणों का महत्व :– मानक त्रुटियों का उपयोग छोटे एवं बडे नमूनों से प्राप्त विभिन्न परिणामों के परीक्षण के महत्व में भी किया जाता है यदि प्रेक्षित एवं अनुमानित मानों के मध्य अंतर मानक त्रुटि की तुलना मे 1.96 से ज्यादा होता है तो आप 5% में परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं औश्र निष्कर्ष निकालते हैं कि नमूना व्यापक रूप में समग्र से भिन्न है। लेकिन यदि प्रेक्षित एवं अनुमानित मानों के मध्य अन्तर मानक त्रुटि तुलना में 2.58 से ज्यादा है तो आप शून्य परिकल्पना को 1% में अस्वीकार करते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि नमूना व्यापक रूप में समग्र से भिन्न होता है।

3) अज्ञात समग्र माध्य की विश्वास सीमाओं को निर्धारित करने के लिए :– मानक त्रुटि विश्वास सीमाओं के भीतर जिसमें विश्वास की निश्चित घात के अस्तित्व की अपेक्षा समग्र प्राचल से निर्धारित कर हमें सक्षम बनाती है।

बडें नमूने के लिए :

μ के 95% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x}$ –1.96 मानक त्रुटि और $\bar{x}$ + 1.96 मानक त्रुटि

μ के 99% विश्वास सीमाओं

$\bar{x}$ –2.58 मानक त्रुटि और $\bar{x}$ + 2.58 मानक त्रुटि

छोटे नमूने के लिए :

μ के 95% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x} \pm t_{0.05}$ मानक त्रुटि

μ के 99% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x} \pm t_{0.01}$ मानक त्रुटि

1.10 माध्यों का नमूना वितरण

यह ध्यान देना आवश्यक है कि नमूना वितरण का प्रयोग नमूना सिद्धान्त में व्यापक रूप से किया जाता है। प्रतिस्थाापना के साथ या के रहित N आकार समग्र जिसका माध्य μ और परिवर्तनशीलता σ^2 है से सभी सम्भव नमूने जिनका आकार n है निकालते हैं। समग्र से निकाले हुए प्रत्येक सभ समीव नमूनों के लिए आप प्रत्येक नमूने के माध्य $\bar{x}$ की गणना करते हैं। माध्य नमूना, नमूना के लिए परिवव्रित होगा। विभिनन नमूनों से प्राप्त समस्त सम्भव माध्यों की सूची को माध्यों का नमूना वितरण कहते हैं।

मध्यों के नमूना वितरण की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताऐं निम्नवत हैं:

(1) माध्यों के नमूना वितरण का माध्य समग्र माध्य (μ) के बराबर होता है।

लक्षणिक रूप से, $\mu\bar{x} = \mu$ or $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$ इस गुण को निम्नवत सिद्ध किया जा सकता है:

N आकार के सीमित समग्र जिसका माध्य μ और परिवर्तनशलता σ^2 है से माना $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ n आकार का यादृाच्छिक नमूना (प्रतिस्थापना के साथ) प्रदर्शित करता है, तो

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_1 + \cdots x_n}{n}$$

$$E(\bar{x}) = E\left[\frac{\Sigma x}{n}\right] = E\left[\frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\{E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)\}$$

$$= \frac{1}{n}\{\mu + \mu + \mu + \cdots + \mu\} = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$$

इस प्रकार माध्यों के नमूना वितरण का माध्य समग्र माध्य के बराबर होता है।

(2) माध्यों के नमूना वितरण की मानक त्रुटि को इस तरीके से प्रापत किया जाता हैः

$S.E._{\bar{x}}\ or\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{S.D.of\ Population}{\sqrt{Size\ of\ the\ sample}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ समग्र का नमूना वितरण

इस गुण को निम्नवत सिद्ध किया जा सकता हैः

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{\Sigma x}{n}\right) = Var\left(\frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}[Var(x_1) + Var(x_2) + \cdots Var(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}[\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots \sigma^2]$$

$$= \frac{1}{n^2}.n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

जहॉ σ^2 परिवर्तनशलता है, n नमूना आकार है।

क्योंकि , n>1, स्पष्टतः $\frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2 \Rightarrow v(\bar{x}) <$ समग्र परिवर्तनशीलता

$\therefore$ S.E.$\bar{x}$ or $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{var(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

इस सूत्र का प्रयोग तभी करते हें जब नमूना वितरण का ध्यान प्रतिस्थापना के साथ रखा जाता है ।

टिप्पणी : जब समग्र निश्चित है और नमूने प्रतिस्थापना के बगैर निकाले जाते है तब $S.E._{\bar{x}}$ को इस तरीके से प्राप्त करते हैं :

$$S.E._{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

(3) माध्यों का नमूना विवरणलगभग सामान्य विवरण माध्य μ और परिवर्तनशीलता σ^2 के साथ होता है,बर्शते बडा नमूना हो (n> 30)।

टिप्पणीयॉ : माध्यों के नमूना वितरण की प्रायिकता को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र काप्रयोग किया जाता है। $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

उदाहरण : 1.1 एक समग्र जिसमें तीन मानों 2, 5 और 8 शामिल हैं का विचार करें। समग्र से सभी सम्भव नमूनों जिनका आकार 2 हैं, निकालें .1 माध्यों के नमूना वितरण की रचना करें। साथ में वितरण का माध्य और मानक त्रुटि ज्ञात करें।

हल : समग्र मे ंतीन मान सम्मिलित हैं। प्रतिस्थापना के साथ निकाले गए सम्पूर्ण सम्भव नमूनों जिनका आकार 2 है $= N^n = 3^2 = 9$

सम्पूर्ण सम्भावित यादृयच्दिक नमूनों और उनका नमूना माध्य निम्न सारिणी मे ंप्रदर्शित किया जा रहा हैः

नमूना अंक	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\bar{x}$**
1	(2,2)	$\frac{1}{2}$(2+2)=2
2	(5,2)	$\frac{1}{2}$(5+2)=3.5
3	(8,2)	$\frac{1}{2}$(8+2)=5
4	(2,5)	$\frac{1}{2}$(2+5)=3.5
5	(5,5)	$\frac{1}{2}$(5+5)=5
6	(8,5)	$\frac{1}{2}$(8+5)=6.5
7	(2,8)	$\frac{1}{2}$(2+8)=5.0
8	(5,8)	$\frac{1}{2}$(5+8)=6.5
9	(8,8)	$\frac{1}{2}$(8+8)=8.0

सभी सम्भव 9 नमूनों के माध्यों के आधारपर माध्यों का नमूना वितरण नीचे दिया जा रहा है।

नमूना माध्य ($\bar{x}$)	आवृत्ति +	$f(\bar{x})$	d=$\bar{x}$ - $\mu_{\bar{x}}$	d^2	fd^2
2	1	2	-3	9	9
3.5	2	7	-1.5	2.25	4.50
5.0	3	15	0	0	0
6.5	2	13	1.5	2.25	4.50
8.0	1	8	+3	9.0	9.0
	$\varepsilon f = 9$	$\varepsilon f(\bar{x})$=45			$\varepsilon\ fd^2$=27

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f} = \frac{45}{9} = 5$$

माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = \frac{\Sigma f(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f} = \frac{27}{9} = 3$$

अतः मानक त्रुटि $S.E._{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{3} = 1.732$

उदाहरण 1.2:– निम्नलिखित समग्र से नमूने माध्यों का नमूना वितरण निर्मित करें :

समग्र इकाईः	1	2	3	4
प्रेषण	22	24	26	28

यदि समग्र से बिना प्रतिसीपना के आकार 2 का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है तो वितरण का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

ळलः समग्र में चार मान (22,24,26,28) शामिल हैं। बिना प्रतिसीपना के आकार 2 वाले सभी सम्भव नमूनों की संख्या $^4C_2=6$ होती है। सभी सम्भव यादृच्छिक नमूनों एवं उनके नमूना माध्यों को नीचे दिए गए तालिका मे ंप्रदर्शित किया जा रहा हैः

टिप्पणीयॉ

नमूना संख्या	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\bar{x}$**
1.	(22,24)	$\frac{1}{2}(22+24)=23$
2.	(22,26)	$\frac{1}{2}(22+26)=24$
3.	(22,28)	$\frac{1}{2}(22+28)=25$
4.	(24,26)	$\frac{1}{2}(24+26)=25$
5.	(24,28)	$\frac{1}{2}(24+28)=26$
6.	(26,28)	$\frac{1}{2}(26+28)=27$

बिना प्रतिस्थापना के आधारपर सभी 6 नमूनों का माध्य $(\bar{x})$, माध्यों के नमूना वितरण नीचे दिया गया हैः

बिना प्रतिस्थापना के माध्यों का नमूना वितरण

नमूना माध्य $(\bar{x})$	**आवृत्ति f**	$f(\bar{x})$	$d=(\bar{x})-\mu_{\bar{x}}$	d^2	fd^2
23	1	23	-2	4	4
24	1	24	-1	1	1
25	2	50	0	0	0
26	1	26	1	1	1
27	1	27	2	4	4
	$\Sigma f=6$	$\Sigma f(\bar{x})=150$			$\Sigma fd^2=10$

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f}=\frac{150}{6}=25$$

मध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x})=\frac{\Sigma f(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f}=\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29$$

विकल्पः माध्यों के नमूने वितरण को प्रायिकता के सम्बन्ध मे ंनिम्नवत भी लिखा जा सकता हैः

नमूना माध्य $(\bar{x})$	23	24	25	26	27
प्रायिकता (p)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

क्योंकि 25 दो बार घटित होता है, $\frac{2}{6}$. दूसरे नमूनों के प्रत्येक माध्य में केवल घटित प्रायिकता $\frac{1}{6}$.है

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$E(\bar{x}) = \Sigma p\bar{x} = \frac{1}{6} \times 23 + \frac{1}{6} \times 24 + \frac{2}{6} \times 25 + \frac{1}{6} \times 26 + \frac{1}{6} \times 27$$

$$= \frac{1}{6}.[23 + 24 + 50 + 26 + 27] = \frac{150}{6} = 25$$

माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = 23^2 \times \frac{1}{6} + 24^2 \times \frac{1}{6} + 25^2 \times \frac{2}{6} + 26^2 \times \frac{1}{6} + 27^2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}.[529 + 576 + 1250 + 676 + 729]$$

$$= \frac{3760}{6} = 626.17$$

$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})^2] = 626.17 - 625 = 1.67$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}} = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{1.67} = 1.29$$

उदाहरण 1.3 : एक समग्र मे ंचार अवयव 3,7,11 और 15 शामिल हैं। सभी सम्भव नमूने जिनका आकार दो है जो समग्र से प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाऐं, का संज्ञान लेते हुए ज्ञात कीजिए (i) समग्र माध्य μ (ii) समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 (iii) माध्यों के नमूने वितरण का माध्य (iv) माध्यों के नमूने वितरण की त्रुटियां iii) और (iv) से (i) और (ii) का प्रयोग करते हुए सत्यापित करें औरउपयुक्त सूत्र का प्रयोग करें ।

हलः

(i) $\mu =$ समग्र माध्य $= \frac{\Sigma X}{N} = \frac{3+7+11+15}{4} = \frac{36}{4} = 9$

(ii) $\sigma^2 =$ समग्र परिवर्तनशीलता $= \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N} = \frac{(-6)^2+(-2)^2+(2)^2+(6)^2}{4} = \frac{80}{4} = 20$

$$\therefore \quad \sigma = S.D. = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

(iii) सभी सम्भव यादृच्छिक नमूना जिनका आकार दो है प्रतिसाीपना के साथ $N^n = 4^2 = 16$ है और उनका नमूना माध्य निम्नवत सारिणी मे ंदर्शाया गया हैः

नमूना संख्या	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\boldsymbol{\bar{x}}$**	**नमूना संख्या**	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\boldsymbol{\bar{x}}$**
1	(3,3)	3	9	(11,3)	7
2	(3,7)	5	10	(11,7)	9
3	(3,11)	7	11	(11,11)	11
4	(3,15)	9	12	(11,15)	13
5	(7,3)	5	13	(15,3)	9
6	(7,7)	7	14	(15,7)	11
7	(7,11)	9	15	(15,11)	13
8	(7,15)	11	16	(15,15)	15

बिना प्रतिस्थापना के आधार पर सभी 16 नमूनों का माध्य, $(\bar{x})$ नमूना वितरण को इस तरह से लिखा जा सकता है:

बिना प्रतिस्थापना के नमूने वितरण के माध्य

नमूना माध्य $(\boldsymbol{\bar{x}})$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f(\bar{x})}$	$\boldsymbol{d = (\bar{x}) - \mu_{\bar{x}}}$	$\boldsymbol{d^2}$	$\boldsymbol{fd^2}$
3	1	3	-6	36	36
5	2	10	-4	16	32
7	3	21	-2	4	12
9	4	36	0	0	0
11	3	33	+2	4	12
13	2	26	+4	16	32
15	1	15	+6	36	36
	$\boldsymbol{\Sigma f = 16}$	$\boldsymbol{\Sigma f(\bar{x}) = 144}$			$\boldsymbol{\Sigma fd^2 = 160}$

नमूना वितरण के माध्यों का माध्य

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f} = \frac{144}{16} = 9$$

मध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = \frac{\Sigma f(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f} = \frac{160}{16} = 10$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{10}$$

सूत्र, $\mu_{\bar{x}} = \mu$ और $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, का प्रयोग करके, माध्यों के नमूना वितरण का माध्य $\mu_{\bar{x}} = \mu = 9$ और माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता $(\sigma_{\bar{x}})^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{20}{2} = 10.$ प्राप्त करते हैं अतः परिणामों (i) और (ii) को प्रयोग करके परिणामों (iii) और (iv) का सत्यापन किया है।

1.11 बडी संख्याओं का नियम एवं केन्द्रीय सीमा प्रमेय

बडी संख्याओं का नियम और केन्द्रीयसीमा प्रयोग दोनों आंकडों के विकास की नींव में उपयुक्त होते हैं।

1.11.1 बडी संख्याओं का नियम :–

बडी संख्याओं का नियम यह बताता है कि जैसे नमूना आकार बढता है, नमूना माध्य समग्र माध्य के और करीब होगा। इसकी आशा नहीं कर सकते कि यदि नमूना आकार पर्याप्त रूप से बढ रहा है तो नमूना माध्य समग्र माध्य के बराबर होगा। बडी संख्याओं के नियम की दो उलझाने होती है।
(1) नमूना आकार को बढाकर, नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच के अन्तर को कम किया जा सकता है और (2) एक नमूना माध्य की परिवर्तनशीलता को दूसरे नमूना माध्य (जो सामन आकार के हैं) को नमूना आकार बढाकर भी कम किया जाता है।

1.11.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय :–

इस विधि काप्रयोग व्यापक रूप से अनुमान एवं निष्कर्ष के क्षेत्र मे ंकिया जाता है। यह प्रमेय बताता हे कि यदि आप सिी समग्र से यादृच्छिक बडे आकार का नमूना n चयनित करते हो जिसका माध्य μऔर मानक विचलन σहै और प्रत्येक नमूने के माध्य की गणना करते हैं, तो माध्य का नमूना वितरण $\bar{x}$सामान्य वितरण जिसका माध्य μ और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ के समीप होता है। यदि समग्र अपने में सामान्य नहीं है तो ीाी यह सत्य है। इस प्रमेय की उपयोगिता यह है कि इसमें बिना प्रतिबन्ध के यर्थाथ रूप में समग्र के वितरण तरीके की आवश्यकता होती है।

1.12 सारांश

कुल मिलकार सांख्यिकी ऑकडों को एकत्रित करने की दो विधियॉ होती हैः (1) जनगणना विधि, और (2) नमूना विधि । वर्तमान में नमूना विधि सांख्यिकी पूछताछ की एक महत्वपूर्ण एवं चर्चित विधि है। अन्वेषक के द्वारा समय और धन की बचत के लिए विभिन्न नमूना विधियों का प्रयोग कर चुनिंदा नमूना लिया जाता है। इसलिए यह कहा जा कसता है कि नमूनाविधि जीवन के सभी क्षेत्रों मे ंअधिक उपयोगी है।

1.13 शब्दावली

गैर प्रायिकता नमूना विधियॉ :वह विधियॉ हैं जिसमें इकाईयों का चयन प्रायिकता या संभाविता के आधार पर न होकर अन्वेषक के सुविधा या निर्णय के अनुसार होता है।

समग्रः सांख्यिकी में समग्र का आशय संग्रहित (कुल) वस्तुऐं/चीजें जिसके बारे में आप जानकारी प्राप्त करते हैं ।

1.14 बोध प्रश्न

रिक्त स्थान भरें

1. ....के तहत, इसके विपरीत समग्र की सभी इकाइयों के बारे में जानकारी एकत्रित करने की तुलना में केवल चयनित इकाइयों से संबंधित जानकारी एकत्र की जाती है।
2. समग्र के चयन का एक हिस्से को .... कहा जाता है।
3. जनगणना विधि का प्रयोग वहॉ पर उपयोगी है जहॉ समग्र के इकाईयों मे ....होती है ।
4. ....विधि मे ंसर्वप्रथम सम्पूर्ण समग्र को स्तरों या उप स्तरों में विभाजित किया जाता है।
5. गैर नमूना त्रुटियॉ वो है जो .... कारकों से घटित होती हैं ।

1.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. नमूना विधि 2. नमूना 3. ंविविधता 4. बहुस्तरीय यादृच्छिक 5. मानवीय

1.16 स्वपरख प्रश्न

1. आंकडा एकत्रित करने के विधियों के साथ साथ इनके गुणों एवं दोषों को समझाइएं।

2. नमूना विधियों का वर्णन करें। संबंधित गुणों एवं दोषों की चर्चा भी करें।
3. नमूना एवं गैर नमूना त्रुटियों पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।
4. माध्यों के नमूने वितरण का वर्णन करें।
5. मानक विचलन एवं मानक त्रुटि में विभेद करें।
6. बढी संख्या के नियम एवं केन्द्रीय सीमा प्रमेय का वर्णन करें।
7. एक समग्र में निम्नलिखित अवयव 2,4,5,8 और 11 शामिल हैं। ज्ञात कीजिएः

(अ) जब बिना प्रतिसीापना के नमूना वितरण किया जाता है, तो कितने विभिन्न प्रकार के आकार 3 के नमूने सम्भव हैं।

(ब) सभी सम्भव विभिन्न तरीके के नमूनों की सूची बताएें।

(स) खण्ड (ब) में दिये गये प्रत्येक नमूनों के माध्यों की गणना करें।

(द) नमूना माध्य $\bar{x}$ के नमूना विवरण को ज्ञात करें।

(न) यदि सभी अवयव समान रूप् से संभावित हैं, समग्र माध्य μ के मान की गणना करें।

उत्तर

7

(अ) बिना प्रतिस्थापना के निकाले गए कुल सम्भव आकार 3 के नमूनों की संख्या
$5c_3 = 10$ है।

(ब) सभी सम्भव विभिन्न नमूनों और उनके नमूना माध्यों को निम्नलिखित तालिका में प्रदर्शित किया गया है।

नमूना संख्या	नमूना मान	नमूना माध्य $\bar{x}$
1.	(2,4,5)	$\frac{1}{3}(2+4+5) = 3.67$
2.	(2,4,8)	$\frac{1}{3}(2+4+8) = 4.67$
3.	(2,4,11)	$\frac{1}{3}(2+4+11) = 5.67$
4.	(2,5,8)	$\frac{1}{3}(2+5+8) = 5.0$
5.	(2,5,11)	$\frac{1}{3}(2+5+11) = 6.0$
6.	(2,8,11)	$\frac{1}{3}(2+8+11) = 7.0$
7.	(4,5,8)	$\frac{1}{3}(4+5+8) = 5.67$
8.	(4,5,11)	$\frac{1}{3}(4+5+11) = 6.67$
9.	(4,8,11)	$\frac{1}{3}(4+8+11) = 7.67$
10.	(5,8,11)	$\frac{1}{3}(5+8+11) = 8.0$

(स) उपरोक्त तालिका में, आपके पास बिना प्रतिस्थापना के आकार 3 के 10 सम्भव नमूने हैं। क्योंकि 567 दो बार घटित होता है, इसके घटित होन की प्रायिकता $\frac{2}{10}$ है। अन्य, प्रत्येक नमूना माध्य में मान केवल एक बार $\frac{1}{10}$ की प्रायिकता के साथ घटित होता है।

(द) माध्यों का नमूना वितरण $(\boldsymbol{x})$ अथवा नमूने माध्य का प्रयिकता वितरण $(\boldsymbol{x})$ नीचे दिया जा रहा है

नमूना वितरण $\bar{x}$	3.67	4.67	5	5.67	6	6.67	6	7.67	8.0

प्रायिकता (p)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(घ) समग्र में मान (2,4,5,8,11) शामिल हैं। इसलिए, क्योंकि प्रत्येक मान समान रूप से संभावित हैं, प्रत्येक मान की घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ हैं।

नमूना माध्य $\bar{x}$	2	4	5	8	11
प्रायिकता (p)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

प्रायिकता माध्य $= \mu = 2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} + 8 \times \frac{1}{5} + 11 \times \frac{1}{5}$

$$= \frac{1}{5}.[2 + 4 + 5 + 8 + 11] = \frac{30}{5} = 6$$

1.17 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई–2 बिन्दु अनुमान एवं अंतराल अनुमान (Point Estimation and Interval Estimation)

2.1 प्रस्तावना
2.2 उद्देश्य
2.3 सांख्यिकीय अनुमान की बुनियादी अवधारणाऐं
 2.3.1 अनुमानक और अनुमान
 2.3.2 बिन्दु अनुमान और अंतराल अनुमान
2.4 एक अच्छे अनुमानक के गुण
 2.4.1 निष्पक्ष अनुमानक
 2.4.2 संगत अनुमानक
 2.4.3 कुशल अनुमानक
 2.4.4 पर्याप्त अनुमानक
2.5 बिन्दु अनुमानक का प्रयोग
 2.5.1 एकल नमूनाकरण की स्थिति मे ंबिन्दु अनुमानक
 2.5.2 पुनरावृत्ति नमूनाकरण की स्थिति में बिन्दु अनुमानक
2.6 अतंराल अनुमानक (या विश्वसनीयता अंतराल)
2.7 अंतराल अनुमानक के प्रयोग
 2.7.1 बडे नमूनों $(n \geq 30)$ के लिए अंतराल अनुमानक (या विश्वसनीयता अंतराल)
 2.7.2 छोटे नमूनों $(n < 30)$ के लिए अंतराल अनुमानक
2.8 सारांश
2.9 शब्दावली
2.10 बोध प्रश्न
2.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
2.12 स्वपरख प्रश्न
2.13 सन्दर्भ पुस्तकें

2.1 प्रस्तावना

रोजमर्रा की जिन्दगी में, नमूना ऑकडा से समग्र प्राचल के बारे मे ंआंकलन करने की आवश्यकता पडती है। उदाहरण के लिए, मान लो कि आप किसी विश्वविद्यालय के छात्रों द्वारा प्रतिदिन औसत मात्रा मे ंपिया हुआ कोका कौला को ज्ञात करने के इच्छुक हैं। सभी छात्रों के औसत मात्रा को ज्ञात करने पर कठनाई होती है। इस समस्या का हल निकालने के लिए, आप एक नमूना ले सकते हैं औसत कोका कौला के औसत मात्रा का पता लगायेंगें। तब इस नमूना माध्य का प्रयोग समग्र का औसत ज्ञात करने में करेंगें। वास्तव में, नमूना औसत के आधार पर आप समग्र औसत को अनुमानित कर सकते है।

आगणन का सिद्धान्त अज्ञात समग्र प्राचलों के अनुमानो ंके साथ (जैसे –समग्र माध्य और समग्र परिवर्तनशीलता) समरूपी ऑकडें नमूनों से (जैसे नमूने बाध्य, नमूने परिवर्तनशीलता) का वर्णन करता है।

2.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- अनुमान की बुनियादी अवधारणाओं की व्याख्या कर सकें।
- अच्छे अनुमानों की विशेषताओं की व्याख्या कर सकें।
- अनुमानों के प्रकारों का वर्णन कर सकें।
- लक्ष्य आंकलनों की उपयोगिता का वर्णन कर सकें।
- अन्तर आंकलन की उपयोगिता का वर्णन कर सकें।

2.3 सांख्यिकी आगणन की बुनियादी अवधारणाऐं

सांख्यिकी आगणन के अध्ययन मकें निम्नलिखित पदों का प्रयोग किया जाता हैः

2.3.1 आगणक एवं अनुमान

समग्र प्राचलों का अनुमान लगाने के लिए आप विभिन्न नमूना आंकडों का प्रयोग कर सकते हैं जो नमूना ऑकडे जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$, नमूना माध्यिका m, नमूना परिवर्तनशीलता S^2 इत्यादि जो अज्ञात समग्र प्राचलों जैसे समग्र माध्य μ, समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 आदि का अनुमान लगाते हैं उन्हें आगणक कहा जाता है और आगणक से वास्तविक मान लेने को अनुमानित कहा जाता है।

यदि θ (ठीटा पडें) समग्र पाचल θ का आगणक है।

टिप्पणीयॉ :– तथ्य अनुमान एवं अन्तराल अनुमान

2.3.2 समग्र प्राचल का अनुमान दो तरीको ंसे किया जा सकता है।

(1) तथ्य अनुमान :– ऑकडों का एक एकल मान जिसे अज्ञात समग्र प्राचल के अनुमान के लिए प्रयोग किया जाता है उसे तथ्य अनुमान कहते हैं। जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$,जिसे μ के तथ्य आगणन के लिए समग्र माध्य μ को अनुमानित करने मे ंप्रयोग कर सकते है। इसी तरह S^2 ऑकडा σ^2 का तथ्य आंगणक है जबकि S^2 के मान की गणना यादृच्छिक नमूने से करते है। तथ्य आंकलन वास्तविक अंक प्रणाली मे ंऔर जिसे तथ्य आंगणक कहते हैं एक एकल तथ्य है।

(2) अंतराल अनुमान :– एक अंतराल का अनुमान संभावित सीमा के भीतर प्राचल को संदर्भित करता है जो वास्तविक मान को असत्य ठहराने के लिए अपेक्षित है । इस तरह के विस्तार की दो चरम सीमाओं को विश्वस्त हो विश्वास सीमाऐं कहा जाता है और इस विस्तार को विश्वास अंतराल कहा जाता है।

इनका निर्धारण समग्र के नमूना अध्ययनों के आधार पर किया जाता है। इस प्रकार, नमूना अध्ययनों के आधार पर जब आप छात्रावास में रह रहे छा़त्रों की औसत मासिक व्यय का अनुमान लगाते हैं जो रू0

5,000 और रू0 6,000 के बीच है यह अन्तर अनुमान का एक उदाहरण होगा। और रू0 5,000 और रू0 6,000 की राशि छात्रों की वास्तविक व्यय के भीतर की चरम सीमाओं के अस्तित्व में होगी।

2.4 एक अच्छे आगणक की विशेषताऐं

समग्र प्राचल मे ंएक से ज्यादा आगणक हो सकते हैं, जैसे समग्र माध्य (μ) का अनुमान या तो नमूना माध्य $(\bar{x})$ या नमूना माध्यिका (m) या नमूना बहुलक के द्वारा किया जा सकता हे। इसी तरह, समग्र परिवर्तनशलता (σ^2) का अनुमान या तो नमूना परिवर्तनशीलता (s^2), नमूना मानक विचलन (s), नमूना माध्य विचलन द्वारा किया जा सकता है। इसलिए ,प्रापय आगणकों की संख्या के बाहर एक अच्छे आगणक को निर्धारित करना आनिवार्य होता है। एक अच्छा आगणक वह है जो प्राचल के सही सम्भव मानों के समीप होता हैं। अच्छे आगणक में निम्नलिखित लक्षण या विशेषताऐं होती हैं।

2.4.1 निष्पक्ष आगणक

निष्पक्ष आगणक को समग्र पाचल θ का निष्पक्ष आगणक कहा जायेगा यदि आगणक के नमूना वितरण का माध्य समग्र प्राचल θ के तुल्य एक समान है।

तथ्य आगणक और अन्तराल आगणक

टिप्पणीयॉ

लाक्षणिक रूप से , $\mu_{\hat{\theta}} = \theta$

गणितीय अपेक्षाओं के मामले में $\hat{\theta}$ एक निष्पक्ष आकलनकर्ता है यदि आकलनकर्ता का अपेक्षित मान प्राचल के अनुमानित मान के बराबर है।

लाक्षणिक रूप से , $E(\hat{\theta}) = \theta$

उदाहरण 2.1 :– नमूना माध्य $\bar{x}$, समग्र माध्य μ , का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है क्योंकि, माध्यों के नमूने वितरण का माध्य $\mu_{\bar{x}}$ या $E(\bar{x})$ समग्र माध्य μ के बराबर है।

लाक्षणिक रूप से , $\mu_{\bar{x}} = \mu$ या $E(\bar{x}) = \mu$

उदाहरण 2.2: नमूना परिवर्तनशीलता s^2 , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के झुकाव का एक आकलन कर्ता हे। क्येांकि नमूना वितरण की परिवर्तनशीलता समग्र परिवर्तनशलता के बराबर नहीं है।

लाक्षणिक रूप से $\mu_s^2 \neq \sigma^2 \; or \; E(s^2) \neq \sigma^2$

फिर भी , परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता (s^2) , समग्र परिवर्तनशीलता का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है, क्योंकि

$$E(\hat{s}^2) \neq \sigma^2 \qquad Where\ \hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} \times s^2$$

उदाहरण 2.3 :– नमूना अनुपात p समग्र अनुपात P का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है क्योंकि, नमूने वितरण का आनुपातिक माध्य, समग्र आनुपातिक माध्य के बराबर हे।

लाक्षणिक रूप से , $\mu_P = p$ or $E(p) = p$

2.4.2 समान आकलनकर्ता

एक आकलनकर्ता को एक समान कहेंगें, यदि नमूना आकार बढे तो आकलन कर्ता का दृष्टिकोण समग्र प्राचल है। दूसरे शब्दों में, एक आकलनकर्ता $\hat{\theta}$ को समग्र प्राचल θ का एक समान आकलनकर्ता कहेंगें यदि n बहुत बडा है तो $\hat{\theta}$ की प्रायिकता का दृष्टिकोण θ के लिए 1 है।

लाक्षणिक रूप से , $P(\hat{\theta} \rightarrow \theta) \rightarrow 1 \quad as \quad n \rightarrow \infty$

टिप्पणी :– एक समान आकलनकर्ता की निष्पक्ष होने की जरूरत है। एक आकलनकर्ता के एक समान होने का पर्याप्त लक्षण यह है कि

(i) $E(\hat{\theta}) \to \theta$

(ii) $Var(\hat{\theta}) \to 0$ as $n \to \infty$

उदाहरण 2.4 :– नमूना $\bar{x}$, समग्र माध्य μ का एक समान आकलन कर्ता है क्योंकि नमूने माध्य के अपेक्षित मान का दृष्टिकोण समग्र माध्य है और यदि नमूने का आकार पर्याप्त रूप से बढाये तो नमूने माध्य की परिवर्तनशीलता का दृष्टिकोण शून्य है।

लाक्षणिक रूप से ,

$$(i) E(\bar{x}) \to \text{ì}$$

$$(ii) Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad as \quad n \to \infty$$

उदाहरण 3.5 : नमूना माध्यिका भी समग्र माध्य का एक समान आकलनकर्ता है क्योंकि $(i) E(m) \to$ ì

$$(ii) Var(m) \to 0 \quad as \quad n \to \infty$$

2.4.3 सक्षम आकलनकर्ता :–

सक्षमता एक सापेक्ष शब्द है। आमतौर पर एक आकलनकर्ता की सक्षमता को दूसरे आकलनकर्ता द्वारा तुलना कर परिभाषित किया जाता है। मान लो कि आप θ के दो निष्पक्ष आकलनकार्त $\hat{\theta}1$ और $\hat{\theta}_2$ का संज्ञान ले रहे हैं। इनमे से $\hat{\theta}1$ आकलन कर्ता को θ को सक्षम आकलनकार्त कहा जायेगा यदि $\hat{\theta}1$ की परिवर्तनशलता, $\hat{\theta}_2$ की परिवर्तनशीलता से कम है।

लाक्षणिक रूप से , $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$

तब $\hat{\theta}_1$ को एक सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है।

उदाहरण 2.6: नमूना माध्य ($\bar{x}$) नमूना माध्यिका (m) की तुलना में समग्र माध्य का एक निष्पक्ष और सक्षम आकलनकर्ता है क्योंकि माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता माध्यिका के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता की तुलना में कम होती हे।

दो निष्पक्ष आकलनकर्ताओं की सापेक्ष सक्षमता नीचे दी जा रही है:

आप जानते हैं कि

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}, Var(m) = \frac{\text{ð}}{2}.\frac{\text{ó}^2}{n}$$

$$= \frac{Var(\bar{x})}{Var(m)} = \frac{\frac{\text{ó}^2}{n}}{\frac{\text{ðó}^2}{2n}} = \frac{2}{\text{ð}} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} = 0.64 \left[\text{ð} = \frac{22}{7}\right]$$

सक्षमता $Var(\bar{x}) = 0.64. Var(m)$

इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$ में नमूना माध्यिका की तुलना में 64% ज्यादा सक्षमता होती है। अतः नमूना माध्य, नमूना माध्यिका की तुलना में समग्र माध्य का ज्यादा सक्षम आकलनकर्ता है।

2.4.4 सक्षम आकलनकर्ता

एक अच्छे आगणक की अन्तिम विशेषता उसकी सक्षमता होनी चाहिएं। एक आकलनकर्ता $\hat{\theta}$ को θ का सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है यदि यह प्राचल के संदर्भ में, नमूने में सभी सूचनाओं को सम्मलित करता है। दूसरे शब्दों मे ंएक सक्षम आकलनकर्ता, समग्र के बारे मे ंनमूने मे ंउपरिथति सभी

सूचनाओं का प्रयोग करके उसे प्रस्तुत करता है। नमूना माध्य $\bar{x}$ को ससमग्र माध्य μ का एक सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है।

2.5 तथ्य आकलनकर्ता का उपयोग

अब आप तथ्य आकलनकर्ता के उपयोगों का अध्ययन करेंगें जो निम्नवत हैः

2.5.1 एकल नमूने की स्थिति में तथ्य आकलनकर्ता

जब अज्ञात समग्र से एक एकल स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना निकालते हैं तो उसे एकल नमूना कहते है। समग्र पाचल के तथ्य आकलनकर्ता की व्याख्या निम्न उदाहरणों से दी जा सकती है।

उदाहरण 2.7ः एक गोले के व्यास (मोटाई) के 10 नामों के नमूने का माध्य $\bar{x} =$ 4.38 इंच और परिवर्तनशीलता = 0.06 इंच दी गई है। (अ) सच्चे/माध्य (अर्थात् समग्र माध्य) और (ब) सही परिवर्तनशीलता (अर्थात समग्र परिवर्तनशलता) के निष्पक्ष एवं सखम अनुमान ज्ञात कीजिए ।

हल : आप को n=10, $\bar{x}$=4.38, s^2=.06 इंच दिया गया है।

(अ) सही माध्य (μ) का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान $\bar{x} = 4.38$ होगा।

(ब) सही परिवर्तनशीलता σ^2 का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान :

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} . s^2$$ है।

इसमें मानों को रखकर आप

$$\hat{s}^2 = \frac{10}{10-1} \times .06 = 1.11 \times 0.06 = .066$$ प्राप्त करते है।

इस प्रकार $\mu = 4.38, \acute{o}^2 = 0.666.$

उदाहरण 2.8 : एक अज्ञात समग्र से निम्नलिखित पांच प्रेक्षण एक यादृच्छिक नमूने को गठित करते हैंः 6.33, 6.36, 6.32 औश्र 6.37 सेंटिमीटर (अ) सही माध्य का और (ब) सही परिवर्तनशीलता का निष्पक्ष और सक्षम अनुमान ज्ञात कीजिए ।

टिप्पणीयॉ (अ)

हल : सही माध्य (अर्थात् समग्र माध्य) का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानित मान दिया जा रहा है।

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37}{5} = \frac{31.75}{5} = 6.35$$

(ब) सही परिवर्तनशीलता (अर्थात समग्र परिवर्तनशीलता) का निष्पक्ष एव सक्षम अनुमान

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

जहॉ $\hat{s}^2$ =संशोधित नमूना परिवर्तनशीलता है

$$= \frac{(6.33 - 6.35)^2 (6.37 - 6.35)^2 (6.36 - 6.35)^2 (6.32 - 6.35)^2 (6.37 - 6.35)^2}{5 - 1}$$

$$= \frac{.0022}{4} = .00055\ cm^2$$ (वर्ग सेन्टीमीटर)

उदाहरण 2.9 : भार (किग्रा) के अनुसार वर्गीकृत निम्नलिखित ऑकडें एक विश्वविद्यालय के 100 छात्रों के यादृच्छिक नमूनों से संदर्भित हैः

भार (किग्रा)	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
छात्रों की संख्या	5	18	42	27	8

(अ) समग्र माध्य और (ब) समग्र परिवर्तनशीलता के निष्पक्ष और सक्षम अनुमानों को ज्ञात कीजिए।

Calculation of Mean and variance

Weight	No. of Students (f)	M.V. (m)	A=67, d=m-A	d'=d/3	fd'	fd'^2
60-62	5	61	-6	-2	-10	20
63-65	18	64	-3	-1	-18	18
66-68	42	67	0	0	0	0
69-71	27	70	+3	+1	+27	27
72-74	8	73	+6	+2	+16	32
	$n = 100$				$\sum fd' = 15$	$\sum fd'^2 = 97$

समग्र माध्य के निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानों के मानों की निम्नवत दिया जा रहा है।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times i$$

$$= 67 + \frac{15}{100} \times 3 = 67 + (0.45) = 67.45$$

(ब) समग्र माध्य का निष्पक्ष एवं अनुमानित मान निम्नवत है

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} . s^2$$

जहॉ

$$s^2 = \frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2 \times i^2$$

$$= \left[\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2\right] \times 3^2$$

$$= [0.97 - .0225] \times 9 = 8.5275$$

अब

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{100}{99} \times 8.5275 = 8.6136$$

इस प्रकार

$$\mu = 67.45, \sigma^2 = 8.6136$$

2.5.2 नमूना पुनरावृत्ति की घटना में तथ्य आंकलन

प्रतिस्थापना के साथ या बिना, समग्र से जब एक ही आकार के एक से ज्यादा यादृच्छिक नमूने निकाले जाते हैं तो उन्हें नमूना पुनरावृत्ति कहा जाता है। इसे निम्नलिखित उदाहरणों से समझा जा सकता है।

उदाहरण 2.10 : एक समग्र में पांच मान : 3,4,5,6 और 7 शामिल है। प्रतिस्थापना के बिना समग्र से आकार 3 के सभी समीव नमूनों की सूची बनाएं और प्रत्येक नमूने के माध्य $\bar{x}$ की गणना करें। वह नमूना माध्य समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है, की जॉच करें।

हल : समग्र मे 5 मान : 3,4,5,6 और 7 शामिल है। प्रतिस्थापना के बिना आकार 3 के सभी सम्भव नमूनों की संख्या $5_{c_3} =$ 10 है जो निम्नलिखित तालिका में प्रदर्शित किए जा रहे हैं।

Sample No.	Sample Values	Sample Mean $(\bar{x})$
1	(3,4,5)	$\frac{1}{3}\ (3+4+5)=\frac{12}{3}4$
2	(3,4,6)	$\frac{1}{3}\ (3+4+6)=\frac{13}{3}4.33$
3	(3,4,7)	$\frac{1}{3}\ (3+4+7)=\frac{14}{3}4.67$
4	(3,5,6)	$\frac{1}{3}\ (3+5+6)=\frac{14}{3}4.67$
5	(3,5,7)	$\frac{1}{3}\ (3+5+7)=\frac{15}{3}5.0$
6	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{16}{3}5.33$
7	(3,5,6)	$\frac{1}{3}\ (3+5+6)=\frac{15}{3}5.00$
8	(3,5,7)	$\frac{1}{3}\ (3+5+7)=\frac{16}{3}5.33$
9	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{17}{3}5.67$
10	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{18}{3}6.00$
Total	k=10	$\sum \bar{x}=50$

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य = $\mu_{\bar{X}} = \sum \frac{\bar{x}}{k} = \frac{50}{10} = 5.$

समग्र माध्य $(\mu) = \frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$

इसलिए निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि $\mu_{\bar{x}} = \mu$ नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

उदाहरण 2.11 : एक परिकल्पित समग्र का विचार करें जिसमे 3 मान 1,2 और 3 शामिल हैं। प्रतिस्थापना के साथ आकार आकर के सभी सम्भव नमूने निकालें। प्रत्येक नमूने के लिए माध्य $\bar{x}$ और परिवर्तनशीलता s^2 की गणना करें। समतुलय प्राचलों के लिए $\bar{x}$ और s^2 ये दो ऑकडे निष्पक्ष एवं सक्षम हैं , की जॉच करें।

हलः समग्र में तीन मान 1,2,3 शामिल है।। प्रतिसीापना के ससाथ आकार आकार आकार के सभी सम्भव नमूनों की संख्या $N^n=3^2=9$ जो निम्नवत दी गई है।

Sample No.	Sample Values	Sample Mean $(\bar{x})$	Sample Variance $s^2=\frac{1}{2}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2]$	Modified Sample Variance $\left(\hat{s}^2=\frac{n}{n-1}\ s^2\right)$
1	(1,1)	$\frac{1}{2}$ (1+1)=1.0	$\frac{1}{2}$ $[(1-1)^2+(1-1)^2]$=0.00	0.00

2	(1,2)	$\frac{1}{2}$(1+2)=1.5	$\frac{1}{2}$[(1-1.5)^2+(2-1.5)^2]=0.25	0.50
3	(1,3)	$\frac{1}{2}$(1+3)=2.0	$\frac{1}{2}$[(1-2)^2 +(3-2)^2] =1.0	2.00
4	(2,1)	$\frac{1}{2}$(2+1)=1.5	$\frac{1}{2}$[(2-1.5)^2+(1-1.5)^2]=0.25	0.5
5	(2,3)	$\frac{1}{2}$(2+2)=2.0	$\frac{1}{2}$[(2-2)^2+(2-2)^2]=0.00	0.00
6	(2,3)	$\frac{1}{2}$(2+2)=2.5	$\frac{1}{2}$[(2-2.5)^2+(3-2.5)^2]=0.25	0.50
7	(3,1)	$\frac{1}{2}$(3+1)=2.0	$\frac{1}{2}$[(3-2)^2 +(1-2)^2] =1.00	2.00
8	(3,2)	$\frac{1}{2}$(3+2)=2.5	$\frac{1}{2}$[(3-2.5)^2 + (2-2.5)^2] =0.25	0.50
9.	(3.3)	$\frac{1}{2}$(3+3)=3.0	$\frac{1}{2}$[(3-3)^2 +(3-3)^2]=0.00	0.00
Total	k=9	$\sum(\bar{x}) = 18$		$\sum \hat{s}^2 = 6$

(अ) माध्यों के नमूने वितरण का माध्य =$\mu_{\bar{x}} = \sum \frac{\bar{x}}{k} = \frac{18}{9} = 2.$ यहाॅ k = नमूनों की संख्या

क्योंकि $\mu_{\bar{x}}$ =μ ,नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

(ब) नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता का माध्य =$\mu_{s^2} = \sum \frac{s^2}{k} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

समग्र परिवर्तनशीलता $\sigma^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = \frac{2}{3}$

क्योंकि $\mu_{s^2} \neq \sigma^2$ नमूना परिवर्तनशीलता s^2 समग्र परिवर्तनशलता (σ^2) का एक निष्पक्ष आकलनकर्ता नहीं है। लेकिन, परिवर्तित नमूना परिवर्तनशलता $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}.s^2$

निष्पक्ष अनुमान को परिभाषित करेगा क्योंकि $\mu_{\hat{s}^2} = \sum \frac{\hat{s}^2}{k} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3}$$

इस प्रकार $\mu_{\hat{s}^2} = \sigma^2$

क्योंकि $\mu_{s^2} = \mu^2$ परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता , समग्र का एक निष्पक्ष अनुमान है।

उदाहरण 2.12 : दर्शाऐं कि नमूना माध्य $\bar{x}$, समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

या

एक स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ समग्र से जिसका माध्य μ है से निकाला जाता है। सिद्ध करें नमूना माध्य $\bar{x}$ का अपेक्षित मान समग्र माध्य μ के बराबर है।

हल : यादृच्छिक नमूना वह होता है जहॉ प्रत्येक नमूने के चयनित होने के बराबर मौके होते हैं आप आकार n के यादृच्छिक नमूने प्रापत कर सकते है। तब

$E(\bar{x}) = E\left[\frac{x_1 + x_{2+} \dots + x_n}{n}\right]$,

जहॉ x_1 नमूना प्रेक्षण हैं।

$= \frac{1}{n}\ [E(x_1) + E(x_2) + \cdots E(x_n)]$

9761309203

अब x_i (जो समग्र का एक सदस्य हैं) का अपेक्षित मानसमग्र माध्य μ हैं। इसलिए

$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\ [\mu + \cdots + \mu]$ क्योंकि $[E(x_1) = (x_2) = E(x_n) = \mu] = \frac{1}{n}.[n\mu] = \mu$

क्योंकि $[\sum C = c_1 + c_2 + \cdots c_n = nC]$

इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

2.6 अन्तराल आंकलन (या अन्तराल विश्वास)

अन्तराल आंकलन के सिद्धान्त में, आप एक अन्तराल या दो अंकों के भीतर जिसमें अज्ञात समग्र प्राचल के अपेक्षित मान का अस्तित्व प्रायिकता के साथ दर्शाते हुए ज्ञात कर सकते हैं।

दो नियत राशियों t_1 और t_2 के निर्धाणि मे अन्तराल आंकलन विधि इस तरीके से शामिल होती है कि $[t_1 < \theta < t_2, t$ के दिये हुए मान के लिए $] = 1-\propto$ जहॉ $\propto$ एक सतर का महत्व है।

$[t_1$ और $t_2]$ का अनतराल जिसके भीतर प्राचल θ के अपेक्षित अज्ञात मान का अस्तित्व हो को विश्वास अन्तराल कहते हैं और ज्ञात की गई सीमाऐं t_1 और t_2 को विश्वास सीमाऐं कहते हैं और $1-\propto$ को अनुमान का वांछित यर्थाथमापी आधारित विश्वास गुणांक कहते हैं। जैसे 2=0.5 (या 0.01) 95% (या 99%) विश्वास सीमाऐं देता है। अब, आप विश्वास सीमा (या अंतराल आंकलन) की पद्धति की स्थापना का या समग्र प्राचल की सीमाओं का अध्ययन करेंगें।

स्मग्र प्राचल θ के लिए नमूना आकडा t से संबन्धित विश्वास अनतराल या विश्वास सीमाओं की गणना के उद्देश्य से निम्नलिखित चरण आपकों सक्षम बनाते हैं।

(1) उपयुक्त नमूना आंकडा t की गणना करें या लें।

(2) मानक त्रुटि t नमूना आंकडे की मानक त्रुटि t ज्ञात करें और

(3) विश्वास स्तर का चयन करें ओर समरूपी दर्शाये गये विश्वास स्तर का आंकडों t के समीक्षात्मक मान को लिखें।

2.7 अन्तराल आंकलन के अनुप्रयोग

अनतराल आंकलन (या विश्वास अन्तराल) से संबन्धित अनुप्रयोगों को निम्नलिखित शीर्षकों के अर्न्तगत अध्ययन करते हैं।

2.7.1 बडे नमूनों ($n \geq 30$) के लिए अन्तराल आंकलन (या विश्वास अन्तराल)

बडें नमूनों के लिए आकलन अंतराल को और आगे निम्नलिखित शीर्षकों के अर्न्तगत विभाजित किया जा सकता है।

- विश्वास अंतराल या समग्र माध्य के लिए सीमाऐं
- विश्वास अंतराल या समग्र अनुपात के लिए सीमाऐं
- विश्वास अंतराल या समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं
- μ या p के अनुमान हेतु उचित नमूना आकार का निर्धारण

(1) विश्वास अंतराल या समग्र माध्य μ के लिए सीमाऐं जब ($n \geq 30$)

बडें नमूने की स्थिति में **($n \geq 30$)** की सीमाओं के निर्धारण मे ंसामान्य वितरण के प्रयोग की आवश्यकता हेाती है।

(1) μ के लिए (1–∝) 100% विश्वास सीमाऐं $\bar{x} \pm Z_{á/2}.S.E_x$ से दी जाती है।

टिप्पणीयॉ या $\bar{x} \pm Z_{á/2}.\frac{ó}{\sqrt{n}}$ जहॉ σ ज्ञात है।

या $\bar{x} \pm Z_{á/2}.\frac{s}{\sqrt{n}}$ σ अज्ञात है। (बडे नमूनों के लिए, $\sigma = s$)

(2) μ के लिए $(1 - á)$ 100% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} - Z_{á/2}\frac{ó}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{á/2}.\frac{ó}{\sqrt{n}}$$ जहॉ σ ज्ञात है।

or $$\bar{x} - Z_{á/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < ì < \bar{x} + Z_{á/2}.\frac{s}{\sqrt{n}}$$ जहॉ σ अज्ञात है।

विशेष रूप से, μ के लिए 95% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 1.96\frac{ó}{\sqrt{n}}$$ [बडें नमूनों के लिए $ó = s$]

इसी तरह μ के लिए 99% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 2.58\frac{ó}{\sqrt{n}}$$

कार्य विधि : समग्र माध्य μ के लिए विश्वास अंतराल के निर्माण हेतु निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

(1) $\bar{x}$ की गणना करें या $\bar{x}$ लें।

(2) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए $S.E._{\bar{x}}$

(a) $S.E._{\bar{x}} = \frac{ó}{\sqrt{n}}$,जब σ ज्ञात है।

(b) $S.E._{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, जब σ अज्ञात है।

आप $z\propto/_2$ का मान ज्ञात करेंगे तो इसके लिए

(3) वांछित विश्वास अंतराल या समतुल्य विश्वास स्तर चयनित करें।

(4) उपरोक्त वर्णित सूत्र में of $\bar{x}, S.E._{\bar{x}}$ and $Z_{\propto/2}$ और $Z_{\propto/2}$ के मानो ंको प्रतिस्थापित करें।

टिप्पणीयॉः (1) यदि समग्र S.D. अज्ञात है तो नमूना S.D.(S) को बडें नमूनों में प्रयोग किया जाता है।

2) $z_{\propto/2}$ के मानों (बडें नमूनों के लिए) को विभिन्न विश्वास स्तर पर निम्नवत दिया जा रहा हैः

विश्वास स्तर (1-α) 100%	90%	95%	96%	98%	99%	**बिना किसी संदर्भ के विश्वास स्तर**
Z-Value	±1.64	±1.96	±2.06	±2.33	±2.58	± 3

टिप्पणी : जहॉ विश्वास अन्तराल का संदर्भ नहीं दिया गया हो तो आपको $z_{\propto/2} = 3$ लेना चाहिए। यह मान 99.73% विश्वास स्तर के समतुल्य है।

उदाहरण 2.13 : 100 प्रेक्षणों का यादृच्छिक नमूना, नमूना माध्य $\bar{x}$ =150 और नमूना परिवर्तनशीलता $s^2 =$ 400 देता है। समग्र माध्य के एिल 95 प्रतिशत और 99 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें।

हलः आपकों $n = 100, \bar{x} = 150, s^2 = 400 \Rightarrow s = 20$ दिया गया है।

$S.E._{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ (बडे नमूनों के लिए $\sigma = s$)

$$= \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$

95% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान $= 1.96$

99% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान $= 2.58$

(अ) μ के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 1.96\, S.E._{x}$$

मानों को रखने, आप प्राप्त करेंगें

$$150 \pm 1.96 \times 2 = 150 \pm 3.92 = 153.92 \; or \; 146.08$$

इस प्रकार $146.08 < \mu < 153.92$

(ब) μ के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 2.58\, S.E._{\bar{x}}$$
$$= 150 \pm 2.58 \times 2$$
$$= 150 \pm 5.16$$
$$= 155.16 \; or \; 144.84$$

इस प्रकार $144.84 < \mu < 155.16$

उदाहण 2.14 : एक इस्पात कारखाने में 900 श्रमिकों के यादृच्छिक नमूने मे ंऔसत आयु 67 इंच, 5 इंच के मानक विचलन के साथ देखी गई ।

(अ) इस्पात कारखाने के सभी श्रमिकों की औसत ऊॅचाई को 95 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल अनुमान पर प्रमाणित करें।

(ब) इस्पात कारखाने के सभी श्रमिकों की औसत ऊॅचाई को 99 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल अनुमान पर प्रमाणित करें।

हल : आपको $: n = 900, \bar{x} = 67, s = 5$ दिया जा रहा है।

$\mathrm{S.E.}(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{900}} = 0.167$ (बडे नमूनों के लिए, $s = ó$)

95% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान है $= 1.96$

99% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान है $= 2.58$

(अ) μ का 99% विश्वसनीयता अंतराल

$$\bar{x} \pm 1.96, S.E._{\bar{x}}$$

मानो ंको रखने पर, आप

$$67 \pm 1.96 \times (0.167)$$

$= 67 \pm 0.327 = 67.327 \text{ to } 66.673$ प्राप्त करेंगें।

इस प्रकार , $66.673 < \mu < 67.327$

(ब) μ का 99% विश्वसनीयता अंतराल

$$\bar{x} \pm 2.58. S.E._{\bar{x}}$$

मानों को रखने पर, आप

$$= 67 \pm 2.58\,(0.167)$$
$$= 67 \pm 0.43$$
$$= 67.43\ to\ 66.57$$ प्राप्त करेंगें।

इस तरह $66.57 < \mu < 67.43$

2. समग्र अनुपात p के लिए विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

यद्यपि नमूना वितरण अनुपातों के साथ द्विपद वितरण से संबंधित है लकिन, सामान्य वितरण निकटता का प्रयोग किया जा सकता है बर्शतें नमूना बडा है (जैसे $n \geq 30$) और np और $nq > 5$ (जब n नमूने का आकार है , p सफलता का अनुपात है और $q = 1 - p$)

(1) P के लिए $(1 - á)\ 100\%$ विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm Z_{á/2}. S.E.(p)$$

या $p \pm Z_{á/2}. \sqrt{\frac{PQ}{n}}$ जब P ज्ञात है।

या $p \pm Z_{á/2}. \sqrt{\frac{pq}{n}}$ जब P अज्ञात है।

दी जा रही है।

(2) P के लिए $(1 - á)\ 100\%$ विश्वसनीयता अंतराल

$$p - Z_{á/2}. \sqrt{\frac{pq}{n}} < P < p + Z_{á/2}. \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ दी जा रही है।

P के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 1.96. \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ है।

P के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 2.58. \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ है।

कार्यविधि :– समग्र अनुपात के विश्वसनीयता सीमाऐं या अंतराल के लिए निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण शामिल है।:–

(1) p की गणना करें या लें

(2) S.E.(p) की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा करें

$$S.E.(p) = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$ जब θ ज्ञात है।

$$S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ जब P अज्ञात हैं।

(3) आप $z_{\propto/2}$ का मान ज्ञात करेंगे तो इसके लिए वांछित विश्वसनीयता अंतराल या समतुल्य विश्वसनीयता स्तर चयनित करें।

(4) उपरोक्त वर्णित सूत्र में $p,\ S.E.(p)$ एवं $Z_{\propto/2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करें।

टिप्पणी :–

1) यदि समग्र अनुपात p अज्ञात है, तो बडे नमूनों मे नमूना अनुपात p का प्रयोग किया जाता है।

2) जब विश्वास अन्तराल का संदर्भ नहीं दिया गया है तो हमेशा 99.73% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z_{\propto/2} = 3$ लें।

उदाहरण 2.15 : एक सिक्के को 1200 बार उछालने पर, इसमें से 480 चित् और 720 पट निकले। चित्तों के लिए 95% पर पर विश्वासनीयता अंतरात ज्ञात करें।

हलः आपको n=1200 , कुल चिट (np)=480 दिये गए है।

$p =$ चित्तों का नमूना अनुपात $\frac{480}{1200}$ =0.4

टिप्पणीयॉ चित्तों का समग्र अनुपात भी $= p = 0.50$

$$q = 1 - p = 1 - 0.50 = 0.50$$

$$S.E(p) = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$ (बडे नमूनों के लिए $q = p$)

$$= \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{1200}} = 0.0144$$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z_{\propto/2}$ का मान $= 1.96$

P के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल :

$p \pm 1.96\, S.E._p$ दिया जा रहा है।

इन मानों को उक्त में रखने पर

$$= 0.4 \pm 1.96 \times 0.0144$$

$$= 0.4 \pm 0.028$$

$$= 0.372\ to\ 0.428$$ प्राप्त करेंगें

इस प्रकार, $0.372 < P < 0.428$

उदाहरण 2.16 : एक बडें प्रेषित माल से 600 अन्नानासों का एक यादृच्छिक नमूना लिया गया था। उनमें 75 खराब पाये गये थे। प्रेषित माल में खराब अन्नानासों के अनुपात का आंकलन करें औश्र अनुमान की मानक त्रुटि बताऐं।

सीमाओं के भीतर जो प्रेषित माल में इक्कठे हुए खराब अन्नानासों के प्रतिशत का निर्धारण करें।

हल :

आपकों n=600, खराब अन्नानासों की संख्या (np)=75 दी गई है।

नमूना अनुपात

$$p = \frac{75}{600} = 0.125 = 12.5\%$$
$$q = 1 - 0.125 = 0.875$$

$$S.E._{(p)} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.125 \times 0.875}{600}} = 0.013$$

(P अज्ञात है।)

क्योंकि विश्वसनीयता स्तर वर्णित नहीं किया गया है तो आप इसके 99.73% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{\propto/2}$ का मान = 3

P के लिए 99.73% विश्वसनीयता सीमाऐं $p \pm 3 \times S.E._{\bar{x}}$ दी जा रही है।

उक्त में मानों को रखने पर, आप

$$= 0.125 \pm 3 \times 0.013$$
$$= 0.125 \pm 0.039$$
$$= 0.164 \pm 0.086$$ से प्राप्त करेंगें।

अतः आवश्यक प्रतिशत 16.4% और 8.6% के (मध्य) बीच है।

जब नमूनें को बिना प्रतिस्थापना के परिमित समग्र से निकाला जाता है, तो समग्र अनुपात p का विश्वसनीयता अनतराल या सीमाऐं :

इस घटना में $(1-\propto)100\%$ विश्वसनीयता अनतराल या सीमाऐं निम्नसूत्र से दी जाती है।,

$$p \pm Z_{\propto/2}.\sqrt{\frac{pq}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

जहॉं, $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ = परिमित समग्र शुद्धि गुणक है।

टिप्पणी : यदि N नमूना आकार n की तुलना में र्प्याप्त रूप से बडा है तो परिमित समग्र के शुद्धि गुणक को उपेक्षित किया जा सकता है।

उदाहरण 2.17 : 2,000 ग्राहकों के बहीखातों में से 600 नमूनों को पविश्टि एवं संतुलन की शुद्धता के परीक्षण के लिए लिया गया था जिसमें 45 गलतियॉ पायी गई थी । सीमाओं के भतर जिसमें त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या की अपेक्षा 95% स्तर पर की जा सकती है, निर्धारित करें।

हल : आपकों n = 600, N = 20,000 ,नमूना बहीखाते में गलतियों की संख्या (np)=45 दी गई है।

नमूना अनुपात $p = \frac{(np)}{n} = \frac{45}{600} = 0.075$

$$q = 1 - p = 1 - 0.075 = 0.925$$

क्योंकि N नमूना आकार n की तुलना में पर्याप्त रूप से बडा है, तो परिमित समग्र शुद्धि गुणक $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ को उपेक्षित किया जा सकता है।

अतः इसे परिमित (बडा) समग्र का एक नमूना समझे, p की मानक त्रुटि

$S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ द्वारा दी जा रही है।

टिप्पणीयॉ $= \sqrt{\frac{0.075 \times 0.928}{600}} = \sqrt{0.0001156} = 0.011$ (लगभग)

95% विश्वसनीयता स्तर पर $z\propto/_2$ का मान =1.96

समग्र p के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाओं को $p \pm 1.96\, S.E._{\bar{x}}$ द्वारा दिया जा रहा है। इन मानों को रखने पर, आप

$$= 0.075 \pm 1.96 \times 0.011$$
$$= 0.075 \pm 0.022 = (0.053, 0.097)$$

प्राप्त करते हैं।

अतः 2,000 समूह के त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या के घटित होने की अपेक्षा 20,000 x 0.053 और 20,000 x 0.095 के मध्य है या 1060 और 1940 ।

टिप्पणी : यदि परिमित शुद्धि गुणक को उपेक्षित नहीं किया जाता है तब p की 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 1.96 . \sqrt{\frac{pq}{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ है}$$
$$= 0.075 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.075 \times 0.925}{600}} \times \sqrt{\frac{20{,}000 - 600}{20{,}000 - 1}}$$
$$= 0.075 \pm 1.96 \times 0.0108$$
$$= 0.075 \pm 0.021168$$
$$= (0.0538, 0.096168)$$

अतः समूह में आवश्यक त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या 20,000 x 0.0538 और

20,000 x 0.096168 या 1076 और 1924 के मध्य होगी।

(3) समग्रों के मानक विचलन की विश्वसनीयता अन्तराल या सीमाऐं

समग्र के मानक क्विलन σ का विश्वसनीयता स्तर निर्धारण में मानक वितरण का प्रयोग आवश्यक है जब नमूना बडा $(n \geq 30)$ होता है।

(i) σ के लिए $(1 - \text{á})\, 100\%$ विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm Z_{\propto/2} . S.E._s$$

या

$$s \pm Z_{\propto/2} . \frac{\text{ó}}{\sqrt{2n}} \qquad \text{जब } \sigma \text{ ज्ञात है।}$$

या

$$s \pm Z_{\propto/2} . \frac{s}{\sqrt{2n}} \qquad \text{जब } \sigma \text{ अज्ञात है।}$$

(ii) σ के लिए $(1 - \text{á})\, 100\%$ विश्वसनीयता अन्तराल

$$s - Z_{\propto/2} . \frac{s}{\sqrt{2n}} < \sigma < s + Z_{\propto/2} . \frac{s}{\sqrt{2n}}$$

σ के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm 1.96 . \frac{s}{\sqrt{2n}} \quad [\text{बडे नमूने के लिए } s = \sigma] \text{ है।}$$

σ के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm 2.5 \pm \frac{s}{\sqrt{2n}} \text{ है।}$$

कार्य विधि : σ के विश्वसनीयता सीमाओं के निर्माण मे ंनिम्नलिखित चरण शामिल हैं:

(i) S की गणना करें या s लें।

(ii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए S.E.(s) की गणना करें

$$S.E.(S) = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \text{ या } S.E.(S) = \frac{s}{\sqrt{2n}}$$

(iii) वांछित विश्वसनीयता स्तर चयनित करें और $z_{\propto/2}$ के समतुल्य विश्वसनीयता स्तर का मान ।

(iv) उपरोक्त वर्णित सूत्र में $s, z_{\propto/2}$ और n के मानों को प्रतिस्थापित करें।

(4) μ या p के आंकलन हेतु नमूने आकार का निर्धारण

ज्ञात नमूना आकार के लिए मान्यताओं के आधार पर आपने विश्वसनीयता अन्तरालों की गणना की है। अब आप जब नमूना आकार अज्ञात है, विश्वसनीयता स्तर की गणना करने में निपुण होंगें।

समग्र माध्य के आंकलन के लिए नमूना आकार :

समग्र माध्य आंकलन के लिए, नमूने आकार के निर्धारण हेतु निम्नलिखित तीन कारक ज्ञात होने चाहिए।

टिप्पणीयॉ :

I. वांछित विश्वसनीयता स्तर और Z का समतुल्य मान ।

II. अनुज्ञेय नमूना त्रुटि E

III. σ का मानक विचलन या σ का एक अनुमान (जैसे $\bar{s}$)

उपरोक्त कारकों को जानने के बाद , नमूना आकार n निम्नवत द्वारा दिया जाता है।

$$n = \left(\frac{Z.\sigma}{E}\right)^2$$

टिप्पणी :

(1) Z और E के मान पूर्वनिश्चित होते हैं।

(2) समग्र का मानक विचलन (S.D) व वास्तविक या अनुमानित हो सकता है।

उदाहरण 2.18 : एक सिगरेट उत्पादक (निर्माता), यादृच्छिक नमूनू का प्रयोग कर औसत, सम्बाकू यात्रा का अनुमान लगाना चाहता है। नमूने में त्रुटि 99 प्रतिशत विश्वसनीयता स्तर पर सच्चे माध्य की तुलना में एक मिलीग्राम से कम या ज्यादा नहीं होनी चाहिए। समग्र मानक विचलन 4 मिलीग्राम है। इन आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए कम्पनी को कितने नमूने आकार का प्रयोग करना चाहिए।

हलः आपको E=1 99% विश्वसनीयता स्तर पर $z_{\propto/2}$= 2.58 और $\sigma = 4$ दिया गया है। नमूना आकार सूत्र $n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2}$ है।

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करेंगे।

$$n = \frac{(2.58)^2\,(4)^2}{1^2} = 106.50\; or\; 107$$

अतः कम्पनी की अवश्यकताओं की पूर्ति के लिए आवश्यक नमूना आकार n=107 होना चाहिए।

(ब) समग्र अनुपात के आंकलन के लिए नमूना आकार :

समग्र अनुपात का अनुमान ज्ञात करने के लिए नमूना आकार हेतु निम्नलिखित तीन कारक ज्ञात होने चाहिए।

1) वांछित विश्वसनीयता स्तर और = का समतुल्य मान ।

2) अनुज्ञेय नमूना त्रुटि E ।

3) सफलता p का वास्तविक या अनुमानित सच्चा अनुपात ।

नमूना आकार $n = \frac{Z^2 \times PQ}{E^2}$ जहॉ , $Q = 1 - P$ से दिया जाता है।

टिप्पणी :

1. Z और E के मान पूर्वनिश्चित हैं।
2. समग्र अनुपात p का मान वास्तवकि या अनुमानित हो सकता है।

उदाहरण : 2.19 : एक व्यवसाय अधिकतम मान्य त्रुटि 0.5 के साथ और 98 प्रतिशत विश्वसनीयता स्तर पर उपभोक्ताओं के अनुपात को, जो इनके उत्पादों को पसंद करते हैं, को ज्ञात करना चाहता हें यदि प्रारम्भिक बिक्री सूचनाऐं दर्शाते हैं कि सभी उपभोक्ताओं में से 25 प्रतिशत व्यवसाय उत्पाद को पसंद करते हैं तो कितने बडे नमूने की आवश्यकता होगी

हलः आपको दिया गया हैः

$$E = 0.05, P = 0.25, Q = 1 - 0.25 = 0.75,$$

98% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z = 2.33$

नमूना आकार सूत्र

$$n = \frac{Z^2 \times PQ}{E^2}$$

इन मानों को उक्त सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर आप प्राप्त करेंगें।

$$n = \frac{(2.33)^2}{(0.05)^2}\,(0.25)(0.75)$$

$$= \frac{5.4289}{0.0025}\,(0.1875) = \frac{1.0179}{0.0025} = 407.16 \; or \; 408$$

अतः आवश्यक नमूना आकार $n = 408$ होगा ।

2.7.2 छोटे नमूनों (n<30) के लिए अन्तराल

छोटे आकार के नमूनों (n<30) की स्थिति में विश्वसनीयता स्तरों का निर्धारण का अध्ययन दो शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता है।

(1) समग्र माध्य (n<30) के लिए विश्वसनीयता स्तर या सीमाऐं :

जब नमूनो का आकार छोटा (जैसे n<30) और σ (समग्र मानक विचलन) अज्ञात हैं तो समग्र माध्य μ के लिए वांछित विश्वसनीयता स्तर या सीमाऐं को t - वितरण का प्रयोग कर प्राप्त किया जा सकता है। छोटे नमूनों की स्थिति में Z मानों के वदले में t मानों का प्रयोग करते हैं।

i. समग्र माध्य के लिए $(1-\propto)\,100\%$ विश्वसनीय अन्तराल के द्वारा दी जाती हैः $\bar{x} \pm t_{á/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$ जहॉ , $\hat{s}$ = परिवर्तित नमूना $S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}}$ $or\; \hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s^2$

ii. μ के लिए $(1 - á)$ 100% विश्वसनीय अन्तराल के द्वारा दी जाती हैः

$$\bar{x} \pm t_{\propto/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < ì < \bar{x} \pm t_{\propto/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

μ के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दिया जाता है।

$$\bar{x} \pm t_{0.025}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

μ के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दिया जाता है।

$$\bar{x} \pm t_{0.005} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

कार्य विधि : छोटे नमूनों (n<30) की स्थिति में विश्वसनीयता अंतराल या सीमाओं के निर्माण में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

i. $\bar{x}$ की गणना करें या $\bar{x}$. लें।

ii. निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए परिवर्तित नमूने वितरण की गणना करें

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1} . s^2}$$ जब, s दिया गया हो।

iii. d.o.f = v = n-1 सूत्र का प्रयोग करते हुए degree of freedom की गणना करें।

iv. दिये गये degrees of freedom के लिए वांछित विश्वसनीयता स्तर और दर्शायी गई समतुल्य विश्वसनीयता स्तर को चयनित करें। आपको $t_{\propto/2}$ का मान t तालिका से देखना चाहिए।

v. उपरोक्त वर्णित सूत्र में $\bar{x}, \hat{s}$ और $t_{\propto/2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करें।

उदाहरण 2.20 : 16 आकार के यादृच्छिक नमूनों का मानक विचलन 3 के साथ माध्य 50 है। 98 प्रतिशत विश्वसनीयता सीमाओं पर समग्र का माध्य प्रापत करें।

हलः आपको दिया गया है : $n = 16, \bar{x} = 50, s = 3 \Longrightarrow s^2 = 9$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1} . s^2} = \sqrt{\frac{16}{16-1} \times 9} = 3.098$$

Degrees of freedom $= v = n = 16 - 1 = 15$

98% विश्वसनीयता स्तर पर $\propto = 0.02 \ so \ that \ \frac{\propto}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$

t तालिका का प्रयोग करते हुए 15d.f के लिए $t_{0.01} = 2.602$

μ के लिए 98% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दी जाती है

$$\bar{x} \pm t_{.01} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

इन मानों को उक्त सूत्र में रखने पर, आप प्राप्त करेंगें

$$= 50 \pm 2.602 \times \frac{3.098}{\sqrt{16}}$$
$$= 50 \pm 2.015$$
$$= 52.015 \ to \ 47.985$$

उदाहरण 2.21 : सामान्य वितरण से एक 16 नमूनों का सादृच्छिक नमूना जिसका माध्य 53 और माध्य से विचलनो के वर्गों का योग 150 के बराबर , को दर्शाया गया है। समग्र के माध्य के लिए 95% और 99% विश्वसनीयता सीमाऐं प्रापत करे।

हल : आपको दिया जा रहा हैः

$$n = 16, \bar{x} = 53, \sum (x - x)^2 = 150$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$= \frac{150}{16 - 1} = \sqrt{\frac{150}{15}} = \sqrt{10} = 3.162$$

$$\text{Degrees of freedom} = v = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए $\propto = 0.05$

इसलिए $\frac{\propto}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

99% विश्वसनीयता स्तर के लिए $\propto = 0.01$

इसलिए $\frac{\propto}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$

15 d.f. के लिए $t_{0.025}$ का तालिका मान = 2.131

15 d.f. के लिए $t_{0.025}$ का तालिका मान = 2.947

(अ) समग्र माध्य μ के लिए 95: विश्वसनीयता सीमाए हैंः

$$\bar{X} \pm t_{0.025} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करेंगें

$$= 53 \pm 2.31 \times \frac{3.162}{\sqrt{16}}$$

$$= 53 \pm 2.131 \times \frac{3.162}{4}$$

$$= 53 \pm 1.684$$

$$= 51.316\ to\ 54.684$$

इस प्रकार, $51.316 < ì < 54.684$

इस प्रकार $51.316 < \mu < 54.684$

(ब) समग्र माध्य μ के लिऐं 99% विश्वसनीयता सीमाए

$$\bar{x} \pm t_{0.005} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

मानों को रखने पर, आप प्राप्त करते हैं

$$= 53 \pm 2.947 \times \frac{3.162}{\sqrt{16}}$$

$$= 53 \pm 2.947 \times \frac{3.162}{4}$$

$$= 53 \pm 2.947 \times 0.7905$$

$$= 53 \pm 2.33$$
$$= 55.33 \; and \; 50.67$$

इस प्रकार, $50.67 < \mu < 55.33.$

(2) समग्र परिवर्तनशीलता के लिए (जब n<30) विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के विश्वसनीयता स्तर या सीमाओं के निर्धारण में x^2 (काई वर्ग) वितरण का प्रयोग आवश्यक है। यहाँ पर x^2 मानों का प्रयोग t मानों के बदले में होता है।

समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के $(1-\propto)\,100\%$ विश्वसनीयता अन्तराल द्वारा दिया जाता हे।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{\propto/2}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{1-\propto/2}}$$

विशेष रूप से , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल है।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.025}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.975}}$$

इसी तरह , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल है।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.005}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.995}}$$

कार्य विधि : परिवर्तनशीलता σ^2 के विश्वसनीयता स्तर के निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण शामिल हैं:

(1) सूत्र का प्रयोग करते हुए परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता की गणना करें।

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \; \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

(2) वांछित विश्वसनीयता स्तर एवं दर्शायी गई समतुल्य विश्वसनीयता स्तर को चयनित करें , आपको विश्वसनीयता गुणांक $x^2_{\propto/2}$ और $x^2_{1-\propto/2}$ के मानों को निश्चित degree of freedom पर x^2 तालिका से लिखना चाहिए।

(3) $\hat{s}^2, x^2_{\propto/2}$ और $x \div^2_{1-\propto/2}$ को उपरोक्त वर्णित सूत्र में रखते हुए σ^2 के लिए विश्वसनीयता अंतराल को निर्मित करें।

उदाहरण 2.22 : आकार 15 के एक यादृच्छिक नमूने जिसका मानक विचलन s=2.5 है को सामान्य समग्र से चयनित किया जाता है। परिवर्तनशीलता σ^2 और मानक विचलन σ के लिए 95% विश्वसनीयता स्तर निर्मित कीजिए।

हल : आपको दिया जा रहा है:

$$n = 15, s = 2.5 \Rightarrow s^2 = 6.25$$

$$\hat{s}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) s^2$$

$$= \frac{15}{15-1} \times 6.25 = 6.696$$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए

$\propto = 0.05$ so $\frac{\propto}{2} = 0.025$ and $1-\propto = 1 - 0.025 = 0.975.$

Degrees of freedom $(v) = n - 1 = 15 - 1 = 14$

$14\, d.f.$ के लिए $x^2_{0.025}$ का तालिका मान $= 26.1$

$14\, d.f.$ के लिए $x^2_{0.0975}$ का तालिका मान $= 5.63$

(अ) σ^2 के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल है

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.025}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.975}}$$

मानों को रखने पर, आप प्राप्त करेंगें।

$$\frac{(15-1)\times 6.696}{26.1} < \sigma^2 < \frac{(15-1)\times 6.696}{5.63}$$

or $\qquad 3.59 < \sigma^2 < 16.65$

(ब) σ के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल है :

$$\sqrt{3.59} < \sigma < \sqrt{16.65}$$

या $\qquad 1.89 < \sigma < 4.08$

2.8 सारांश

कभी कभी समग्र के बारे में आप किसी तरह का निष्कर्ष निकालने मे असमर्थ रहेते हैं या सांख्यिकी पदों में समग्र परिणाम क्या है को प्रकट करने में आप असमर्थ हैं। उन परिस्थितियों में, नमूना ऑकडों के आधार पर समग्र प्राचल के बारे में अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है। इसे आंकलन का सिद्धान्त कहा जाता है। समग्र प्राचल के आंकलन के लिए नमूना ऑकडों का प्रयोग कियाजाता है और इस प्रकार के आंकलनों में निष्पक्ष, अनुरूप, सक्षम और यथेष्ट तरह के विशिष्ट लक्षण होने चाहिए।

2.9 शब्दावली

आगणक: समग्र प्राचलों का अनुमान लगाने के लिए आप विभिन्न नमूना आंकडों का प्रयोग करते हैं जो नमूना ऑकडे जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$, नमूना माध्यिका m, नमूना परिवर्तनशीलता S^2 इत्यादि जो अज्ञात समग्र प्राचलों जैसे समग्र माध्य μ, समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 आदि का अनुमान लगाते हैं, उन्हें आगणक कहा जाता है

2.10 बोध प्रश्न

रिक्त स्थान भरें

1. ऑकडों का एक एकल मान जिसे अज्ञात समग्र प्राचल के अनुमान के लिए प्रयोग किया जाता है उसे ....अनुमान कहते हैं।
2. जब अज्ञात समग्र से एक एकल स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना निकालते हैं तो उसे ....नमूना कहते है।

2.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. तथ्य 2. एकल

2.12 स्वपरख प्रश्न

1) समूहों के नमूने की मापें 8.3, 10.6, 9.7 , 8.8., 10.2 और 9.4 किलोग्राम ज्ञात की गई थी।

(अ) समग्र माध्य

(ब) समग्र परिवर्तनशीलता

(स) नमूना मानक विचलन अनुमानित समग्र मानक विचलन की तुलना निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानो से निर्धारित करें।

(2) 9 व्यक्तियों के एक यादृच्छिक नमूने में उनकी ऊॅचाईयॉ 45, 47, 50, 52, 48, 47, 49, 53 और 51 इंच हैं।

(अ) सच्चा माध्य

(ब) सच्ची परिवर्तनशीलता का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान ज्ञात करें।

(3) एक कम्पनी द्वारा उत्पादित 10 टेलीविजन ट्यूबों के नमूनों ने औसत जीवन 1200 घंटे और 10 घंटे का मानक विचलन दर्शाया।

(अ) समग्र माध्य

(ब) समग्र परिवर्तनशीलता के निष्पक्षएवं सक्षम अनुमानों को ज्ञात करें।

(4) 144 प्रेक्षणों के एक यादृच्छिक नमूने का नमूना माध्य $\bar{x} = 160$ और नमूना परिवर्तनशीलता $s^2 = 100$ देता हे। समग्र माध्य के एिल 95% में विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें।

(5) 64 खेती क्षेत्रों के एक यादृच्छिक में नमूने से, 12 के मानक विचलन के साथ 45 हेक्टेएर का माध खेत्र पाया जाता है। माध्य क्षेत्र क लिए 95% और 99% पर विश्वसनीयता सीमाऐं क्या है ।

(6) 100 खेती क्षेत्रों के एक यादृच्दिक में नमूने से 50 के मानक विचलन के साथ 250 हेक्टेएर का माध्य क्षेत्र पाया गया। माध्य क्षे0 के 99% विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें। विश्वसनीयता अंतराल की चौडाई को कैसे परिवर्तित किया जाता है यदि नमूने के आकार को 400 तक बढाया था।

(7) एक शहर के 300 परिवारों के यादृच्छिक नमूने ने दिखाया कि इन परिववारों मे ंसे 123 के पास धार्मिक पुस्तक रामायण थी। रामायण के साथ शहर के परिवारों के अनुपात के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल ज्ञात करें।

(8) एक शहर में 500 घरों के एक यादृच्छिक नमूने ने यह प्रकट किया था कि इनमें से 125 घरों के पास रंगीन TV Set थे। रंगीन TV के साथ शहर के घरों के लिए 98% विश्वसनीयता स्तर ज्ञात करें। (98% विश्वसनीयता स्तर के लिए Z का तालिक मान 2.33 हैं)

(9) एक नगर में, एक नए उत्पाद को प्रारम्भ करने के लिए 400 लोगों का एक नमूना बाजार सर्वेक्षण हेतु लिया गया था। जब उनसे बिक्री के लिए चर्चा की गई थी, उनमें से 80 लोगों ने उत्पाद खरीदा। नगर में जिन्होंने उत्पाद खरीदा होगा उनके लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं ज्ञात करें।

(10) 10,000 ग्राहकों के बही खातों में से 400 नमूना बही खातों को उनकी प्रविष्टियों एवं संतुलन की शुद्धता को ऑकडे के लिए चयनित किया गया था। उसमें 40 गलतियॉ शामिल थी। सीमाओं का निर्धारण करें जिनके भीतर इन त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या को 95% के विश्वसनीयता स्तर की अपेक्षा की जा सके।

(11) 100 मदों का एक नमूना 25 का मानक विचलन देता है। 95% विश्वसनीयता स्तर पर समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं तैयार करें।

(12) 100 मदों का एक नमूना 4700 का मानक विचलन देता है। 99% विश्वसनीयता स्तर पर समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं तैयार करें।

(13) एक व्यवसाय 0.03 से अधिक की नहीं त्रुटि के साथ और उपभोक्ताओं के अनुपात के लिए 98% विश्वसनीयता स्तर जो घरेलू डिटरजेंट ब्रान्ड का पसंद करते हैं, का आंकलन करनाचाहता है। बिक्री परिणाम संकेत करते हैं कि सभी उपभोक्ताओं में से लगभग 0.2. इस व्यवसाय के ब्रांड को पसंद करते हैं। आवश्यक नमूना आकार क्या है।

(14) मिस्टर X एक निश्चित कार्य को औसत समय में पूर्ण करने का निश्चय करता है। पिछले लिखित प्रमाण प्रदर्शित करते हैं कि समग्र मानक चिलन 10 दिन हे। नमूने आकार का निर्धारण करें यदि मिस्टर X 95% विश्वस्त है कि नमूना औसत , औसत से = 2 दिन रह सकता है।

(15) प्रभाव समय नापने के लिए, एक मनोंचिकित्सक 0.05 सेकण्ड के मानक विचलन का आंकलन करता है। मापने के लिए कितना बडा नमूना लेना चाहिए कि 95% विश्वसनीयता पर उसके आंकलन की त्रुटि 0.01 सेकेण्ड से अधिक की नहीं होगी।

(16) एक निश्चित ब्रान्ड के 9 सिगरटों का एक नमूने के एिल प्रेक्षण किया गया था। इसमें देखा गया कि 25 मिलीग्राम औसत तम्बाकू औसत मानक विचलन 2.8 मिलीग्राम है। इस विशेष ब्रान्ड के सिगरटों का सही औसत के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल निर्मित करें।

(17) एक वस्ती से 15 औरतों का एक यादृच्छिक नमूना उनके द्वारा अंगराज में मासिक 2 खर्च रू0 120 को रू0 40 के मानक विचलन के साथ दर्शाता है। वस्ती की औरतों द्वारा अंगराज मे ंसही औसत मासिक व्यय के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल को निर्मित करें।

(18) 5 व्यक्तियों की ऊँचाईयों (इंच में) का एक नमूना निम्नवत था 63.3, 63.7, 63,6, 63,2 और 3.8 95ः समग्र परिवर्तनशीलता के लिए विश्वसनीयता अनतराल निर्मित करें।

1. [(a) 9.5, (b) 0.736 and (c) $\hat{s}$=σ=0.86, s=0.78]
2. [(a) 49.11 and (b) 6.91]
3. [(a) μ=1200 hrs. and (b) $\hat{s}^2$=111.11]
4. [$158.37 < \mu < 161.03$]
5. [(a) 47.94, 42.06, (b) 48.87, 41.63]
6. [(a) $237.1 < \mu < 262.9$(b) reduced to half]
7. [$0.355 < P < 0.465$]
8. [$0.205 < P < 0.295$]
9. [0.1608, 0.2392]
10. [(a) $0.071 < P < 0.129$ (b) $710 < x < 1290$]
11. [21.55, 28.46]
12. [5032.4, 4367.60]
13. [$n = 965$]
14. [$n = 96$]
15. [$n = 96$]
16. [$21.67 < \mu < 28.33$]
17. [$97.01 < \mu < 142.99$]
18. [$0.0240<\sigma<0.5537$]

2.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 3 प्रायिकता सम्बन्धी दृष्टिकोण
(Approaches to Probability)

3.1 प्रस्तावना
3.2 उद्देश्य
3.3 यादृच्छिक प्रयोग
3.4 समष्टि प्रतिदर्श
3.5 विभिन्न पदों की परिभाषा
3.6 घटना एवं प्रायिकता
3.7 क्रमचय तथा संचय की सहायता से प्रायिकता
3.8 सारांश
3.9 शब्दावली
3.10 बोध प्रश्न
3.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
3.12 स्वपरख प्रश्न
3.13 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर
3.14 संदर्भ पुस्तकें

3.1 प्रस्तावना

रोजमर्रा की जिन्दगी में आप देखते हैं कि क्रिकेट मैच शुरू होने के पहले दोनों कप्तान सिक्का उछालते हैं। सिक्का उछालना एक प्रक्रिया है और चित या पट आना दो संभावित निष्कर्ष है। यह मानते हुए कि सिक्का खड़ा न गिरे। यदि आप एक पासा फेंकते ह। तो संभावित निष्कर्ष 1,2,3,4,5,6 में से कोई भी हो सकता है। एक प्रक्रिया जो परिणाम या निष्कर्ष दे उसे प्रयोग (Experiment) कहते हैं। सामान्यतः एक प्रयोग में का निष्कर्ष संभावित निष्कर्षों में से कोई एक होता है तथा यह संयोग की बात है कि प्रयोग करते समय कौन सा निष्कर्ष आयेगा। इस अध्याय में आप विभिन्न प्रयोग और उनके निष्कर्षों के बारे में पढ़ेंगे।

आपने आज बारिश हो सकती है या ''भारत यह मैच जीत सकता है'' या ''मैं इस पद के लिए चुना जा सकता हूँ'' अवसर इस प्रकार के वाक्यों का प्रयोग किया होगा। इस प्रकार के वाक्यों में अनिश्चितता का अंश है। आप इस अनिश्चितता को कैसे मापेंगे? गणित की एक शाखा जिसे प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) कहते हैं। इस प्रकार की अनिश्चितता को मापती है। किसी घटना घटित होने की अनिश्चितता का परिणाम मापने के लिए प्रायिकता सिद्धान्त का निर्माण किया गया है। प्रायिकता शब्द का कोषिक अर्थ है ''संभावित परन्तु अनिश्चित''। अतः जब एक सिक्के को उछालते हैं, चित आ सकता है परन्तु आता नहीं है। उसी प्रकार जब एक पासा को फेंकते है तो 6 आ सकता है या नहीं आ सकता।

3.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- यादृच्छिक प्रयोग के अर्थ की व्याख्या कर सकें।
- यादृच्छिक प्रयोग में संभावना के महत्व का वर्णन कर सकें।
- एक घटना के लिए प्रतिदर्श समष्टि की व्याख्या कर सकें।
- विभिन्न प्रकार की घटनाओं जैसे पारस्परिक अपवर्जी, सांप्रदायिक घटनाएं, सर्वांगपूर्ण, स्वतंत्र और आश्रित घटनाओं में अंतर कर सकें।
- एक घटना के घटित होने की प्रायिकता और क्रमचय तथा संचय की सहायता से प्रायिकता प्रश्नों का हल कर सकें।

3.3 यादृच्छिक प्रयोग

निम्नलिखित गतिविधियों पर ध्यान दें–

1. एक सिक्के को उछालें और निष्कर्ष को नोट करें। यहाँ पर दो संभावित निष्कर्ष हैं एक चित या पट।
2. एक पासा (fair die) को फेंकने पर 6 संभावित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं जो हैं 1,2,3,4,5,6 पासों का जो तल पर उपर होता है उसे परिणाम कहते हैं।
3. दो सिक्कों को एक साथ उछालें तथा संभावित निष्कर्षों को लिखें। यहाँ पर चार निम्नलिखित निष्कर्ष संभव हैं, HH, HT, TH, TT।
4. दो पासों को फेंके निम्नलिखित 36 संभावित निष्कर्ष प्राप्त होंगे–

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6

5,1 5,2 5,3 5,4 5,5 5,6

6,1 6,2 6,3 6,4 6,5 6,6

उपर्युक्त प्रत्येक गतिविधि निम्नलिखित दो शर्तों को पूरा करती हैं:

क. गतिविधि को एक ही जैसी परिस्थिति में कई बार दोहराया जा सकता है।

ख. चूँकि सभी संभावित निष्कर्षों के चुने जाने की संभावना बराबर हैं इसलिए किसी भी गतिविधि का निष्कर्ष पहले से नहीं बताया जा सकता है। अतः एक गतिविधि जो–

1. एक जैसी परिस्थिति में दोहराया जाए, तथा
2. जिसका निष्कर्ष पहले से न बताया जा सके को एक यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।

उदाहरण 3.1 : क्या अच्छी तरह से फेटे हुए ताश के पत्तों में से एक पत्ता निकालना एक यादृच्दिक प्रयोग है?

हल : क. चँकि एक पत्ता निकालने से पहले ताश के पत्तों की गड्डी को अच्छी तरह फेंटा जा सकता है,

अतः इस प्रक्रिया को कई बार दोहराया जा सकता है।

ख. 52 पत्तों मे से कोई भी पत्ता निकाला जा सकता है। अतः निष्कर्ष को पहले से नहीं बताया जा सकता।

अतः यह प्रक्रिया एक यादृच्छिक प्रयोग है।

उदाहरण 3.2 : सिद्ध करें 00 कुर्सियों में से एक कुर्सी चुनना एक यादृच्छिक प्रयोग है।

हल : क. इस प्रयोग को एक समान परिस्थितियों में दोहराया जा सकता है।

ख. हर कुर्सी के चुने जाने की संभावना बराबर है।

अतः निष्कर्ष पूर्व निर्धारित नहीं है। इसलिए यह एक यादृच्छिक प्रयोग है।

क्या आप इस प्रकार की अन्य गतिविधियों के बारे में सोच सकते हैं जहाँ संभावना प्रकृति है।

आइए अब कुछ क्रियाओं की चर्चा करें जो कि यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

1. अवनि का जन्मः चँकि किसी व्यक्ति के जन्म की प्रक्रिया दोहरायी नहीं जा सकती अतः यह एक यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

2. कैलकुलेटर पर 4 तथा 8 का गुणा करना : चँकि कैलकुलेटर पर इस प्रक्रिया को कई बार दोहराया जा सकता है परन्तु परिणाम हमेशा 32 हो जायेगा। अतः यह यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

3.4 प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)

जब एक पासा फेंकते है तो संभावित निष्कर्ष क्या हो सकते हैं? पासा फेंकने पर निश्चित रूप से कोई एक भाग (हिस्सा) सबसे उपरी सतह पर होगा। अतः प्रत्येक सतह पर लिखा हुआ अंक (number; 1-c) ही संभावित निष्कर्ष है।

सभी संभावित निष्कर्षों का समुच्चय (Set) S इस प्रकार से लिख सकते हैं–

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

इसी प्रकार जब एक सिक्के को उछालते हैं तो संभावित निष्कर्ष चित (Head) या पट (Tail) होगा। अतः संभावित निष्कर्षों का समुच्चय S होगा।

S = {H, T}

किसी प्रयोग (Experiment) के संभावित निष्कर्षों का समुच्चय S जो कि निम्न शर्तों को पूरा करें।

1. समुच्चय (Set) का प्रत्येक (Element) प्रयोग (Experiment) के संभावित निष्कर्ष को दर्शाये।

2. किसी Trial का परिणाम समुच्चय S के सिर्फ एक तत्वों (Elements) हो तो ऐसे समुच्चय S को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं तथा इसके तत्वों (Elements) को प्रतिदर्श तत्व (Sample points) कहते हैं। प्रतिदर्श समष्टि को S से प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण 3.3 : दो सिक्कों को उछालने की क्रिया (Experiment) का प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) लिखें।

हल : माना कि H चित तथा T पट को दर्शाता है

$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

नोट– यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाए तो समष्टि प्रतिदर्श को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं।

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

उदाहरण 3.4 : एक सिक्का तथा पासा को एक साथ फेंकने की प्रक्रिया का प्रतिदर्श समष्टि लिखें।

हल : एक सिक्का उछालने पर संभावित परिणाम है चित H या पट T।

एक पासा फेंकने पर संभावित निष्कर्ष है– 1,2,3,4,5 तथा 6

माना कि $H = 0$ $T = 1$

$S = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (5,0), (5,1), (6,0), (6,1)\}$

$n(S) = 6\times2 = 12$

$n(S) = 2\times2\times2 = 8$

उदाहरण 3.5 : ऐसे परिवारों का चयन करें जिनके सिर्फ 3 बच्चे हैं। प्रथम, द्वितीय और तृतीय बच्चे का लिंग पूछने ही प्रयोग है। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखें।

हल : एक बच्चे का लिंग बालक (Boy = B) अथवा बालिका (Girl = G) हो सकता है अतः

$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\}$

उपरोक्त तरह से प्रतिदर्श समष्टि लिखने का लाभ यह है कि निम्न प्रकार के प्रश्नों क्या दूसरी सन्तान लड़की/कन्या/बालिका थी? या कितने परिवारों में पहली सन्ता बालक है इत्यादि का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है।

3.5 विभिन्न पदों की व्याख्या

3.5.1 घटना (Event)

सिक्के उछालने का एक प्रयोग करते है। इस प्रयोग में Head आने में हमारी दिलचस्पी है। अतः परिणाम में Head आना एक घटना है।

एक पासा फेंकने के प्रयोग में सम संख्या आने में हमारी दिलचस्पी है। अतः 2,4 तथा 6 परिणाम घटना का निर्माण करते हैं। हमने देखा है जब किसी प्रयोग को एक समान परिस्थितियों में कई बार दोहराया जाता है तो हर बार एक ही परिणाम प्राप्त होगा और ये संभावित परिणाम प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) का निर्माण करते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि के कुछ परिणाम/निष्कर्ष एक निर्दिष्ट विवरण को पूरा करते हैं, जिन्हें हम घटना कहते हैं। प्रायः घटना को A, B, C इत्यादि (अंग्रेजी के बड़े अक्षरों) शब्दों से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 3.6 : माना कि E तीन सिक्कों को एक साथ उछालने की घटना को दर्शाता है। सभी संभावित परिणाम तथा घटनाओं की सूची बनाओ जब–

1. Head की संख्या Tail की संख्या से अधिक हो।
2. जब दो Head आए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि S

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8$

माना कि E_1 Head की संख्या की संख्या Tail से अधिक होने की घटना दर्शाता है तथा E_2 जब दो Head आने की घटना को दर्शाता है। अतः

$E_1 = \{ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5\}$

तथा $E_2 = \{ w_2 \quad w_3 \quad w_5\}$

3.5.2 **Equally Likely Events** (समान रूप से संभावित घटनाएं)

यदि किसी भी कारणवश हम एक परिणाम पर दूसरे दूसरे परिणाम को वरीयता नहीं दे सकते तो Trial के ऐसे परिणामों को समान संभावित (Equally likely) कहते हैं।

उदाहरण : 1. एक निष्पक्ष सिक्के को उछालने पर चित या पट प्राप्त करना समान संभावित घटनाएं हैं।

2. एक पांसे फेंकने के प्रयोग में सभी छः तलों के समान रूप से उपरी तल पर आने में संभावित हैं।

3. एक अच्छी तरह से फेंटी हुई 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालने के लिए 52 पत्ते समान रूप से संभावित है।

3.5.3 पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं–

यदि किसी एक घटना के घटित होने पर बाकी सारी घटनाएं नहीं घटित होंगी तो ऐसी घटनाओं को परस्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं। अर्थात् एक ही Trial में दो या दो से अधिक घटनाएं एक साथ घटित नहीं हो सकती।

उदाहरण : 1. एक पांसे फेंकने में 1 से 6 तक अंकित सभी 6 तल परस्पर अनन्य घटनाएं है। अर्थात् यदि कोई भी एक तल उपर आता है तो बाकी सारे तल उस Trial में उपर नहीं आ सकते।

2. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दोनों सिक्कों पर Tail आने की घटना तथा कम से कम एक Head आने की घटना परस्पर अनन्य घटनाएं हैं।

गणितीय भाषा में यदि घटनाओं का Intersection प्रतिछेदन Null set है (अर्थात् खाली) तो ऐसी घटनाओं को परस्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं।

3.5.4 सर्वांगपूर्ण घटनाएं–

यदि सारे पासे ऐसी घटनाओं का संग्रह है जिनकी विशेषता यह है कि घटनाओं के संग्रह में से ही कोई घटना घटित होगी तो ऐसी घटनाओं के संग्रह को संपूर्ण घटनाएं कहते हैं।

उदाहरण के लिए जब एक पांसे को फेंकते हैं तो सम संख्या आने की घटना तथा विषय संख्या आने की घटना संपूर्ण घटनाएं हैं। या जब दो सिक्कों को उछालते हैं तो कम से कम एक Head आने की घटना तथा कम से कम एक Tail आने की घटना को संपूर्ण घटना कहते हैं।

गणितीय भाषा में घटनाओं के संग्रह को संपूर्ण घटना कहेंगे यदि सभी घटनाओं का Union (U set Theory) संग्रहण संपूर्ण प्रतिदर्श समष्टि हो।

3.5.5 स्वतंत्र तथा निर्भर आश्रित घटनाएं

एक घटनाओं के सेट को स्वतंत्र घटना कहेंगे यदि किसी एक के घटित होन पर बाकी घटनाओं पर कोई प्रभाव/असर नही होगा। जबकि दूसरी तरफ, यदि एक घटना के घटित होने पर दूसरी घटनाओं के घटित होने पर प्रभाव पड़ता है तो ऐसी घटनाओं को निर्भर/ परतंत्र घटनाएं कहते हैं।

उदाहरण : 1. एक सिक्के को उछालने पर पहले टॉस पर Head आने की घटना दूसरे, तीसरे और आगे आने वाली टॉसों में Head आने की घटना से स्वतंत्र है।

2. यदि एक अच्छी तरह से फेंटे हुए ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालें और दूसरा पत्ता निकालने से पहले उसे वापस गड्डी में रख दें तो दूसरे पत्ता निकालने का परिणाम पहले बार पत्ता निकालने

पर आए परिणाम से स्वतंत्र है। परन्तु यदि पहली बार में निकाले गये पत्ते को वापस गड्डी में न रखें तो दूसरी बार में निकाला गया पत्ता पहले बार में निकाले पत्ते पर निर्भर करेगा। (क्योंकि पहली बार में निकला पत्ता दूसरी बार नहीं निकल सकता)।

3.6 घटनाएं तथा उनकी प्रायिकता

पिछले भाग में हमने सीखा कि कैसे पता करें कोई क्रिया यादृच्छिक प्रयोग है या नहीं। प्रायिकता का अध्ययन यादृच्छिक प्रयोग दर्शाता है। अतः अंक से आगे यादृच्छिक प्रयोग की जगह सिर्फ प्रयोग शब्द का इस्तेमाल करेंगे। इसके पहले भाग में हमने विभिनन प्रकार के घटनाओं जैसे समान रूप से संभावित, परस्पर अनन्य, संपूर्ण, स्वतंत्र तथा निर्भर घटनाएं को उदाहरण सहित परिभाषित किया।

जब हम कोई प्रयोग करते हैं तो हम यह जानने के इच्छुक होते हैं कि कोई निर्धारित घटना घटित होने की क्या संभावना है। आइए कुछ उदाहरण की सहायता से समझते हैं।

एक निष्पक्ष सिक्का उछालने पर Head आने की क्या संभावना है। यहाँ पर दो Head व Tail नाम की समान संभावित परिणाम है। रोजमर्रा की जिन्दगी में हम कहते हैं कि एक सिक्के पर Head आने की संभावना 2 में से 1 है। तकनीकी भाषा में हम कहते हैं Head आने की प्रायिकता 1/2 है।

इसी प्रकार, एक पांसे फेंकने के प्रयोग में 6 समान रूप से संभावित परिणाम है जो 1,2,3,4,5 और 6 है। जिस तल पर 1 अंकित है उसके उपरी तल पर आने की संभावना 6 में से 1 है। अतः 1 आने की प्रायिकता 1/6 है।

उपरी प्रयोग में, माना कि जब पांसा फेंकते है तो उपरी तल पर सम संख्या की प्रायिकता जानने में इच्छुक है। अतः 2, 4 और 6 आने पर सम आने की घटना की संभावना 6 में से 3 है। इसलिए सम संख्या आने की प्रायिकता 3/6 या 1/2 है।

संपूर्णतया, यदि एक प्रयोग जिसमें 'n' संपूर्ण, परस्पर अनन्य, समान रूप से संभावी परिणाम हों तथा उसमें से 'm' परिणाम घटना के घटित होने के पक्ष में हो तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता p, को ऐसे ज्ञात कर सकते हैं।

p = अनुकूल परिणाम की संख्या/संभावित परिणामों की कुल संख्या

या

$p = m/n$ ---------- (i)

चूंकि, घटना A के घटिन न होने के अनुकूल परिणामों की संख्या n-m है, अतः A के घटित न होने की प्रायिकता q, को निम्न तरह से ज्ञात कर सकते हैं,

$$q + \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{\mathrm{m}}{n}$$

$= 1- p$ ((i) देखें $p + q = 1$)

नोट : p तथा q गैर नकारात्मक है तथा 1 से अधिक नहीं हो सकते।

i.e. $= 0 \leq p \leq 1;$ $0 \leq q \leq 1$

अतः किसी भी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0 तथा 1 के बीच होती है। (0 तथा 1 को समावेशित किए हुए)।

नोट : 1. किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p को सफलता की प्रायिकता कहते हैं तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता q को असफलता की प्रायिकता कहते हैं।

2. असंभव घटना (impossible event) के घटित होने की प्रायिकता 'O' (Zero) हैं तथा निश्चित घटना (sure event) के घटित होने की प्रायिकता '1' (One) है। यदि P(A) = 1, तो घटना A

निश्चित रूप से घटित होगी। और यदि $P(A) = 0$, तो घटना निश्चित रूप से घटित नहीं होगी अर्थात् घटना असंभव है।

3. किसी घटना के कुल अनुकूल परिणामों की संख्या (m) कुल संभावित परिणामों की संख्या (n) से अधिक नहीं हो सकती।

उदाहरण 3.7 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पांसा 6 प्रकार से गिर सकता है जिसमें से केवल एवं घटना (5 आने) के घटित होने के अनुकूल है।

$\therefore P(5) = 1/6$

उदाहरण 3.8 : एक सिक्के को एक बार उछालने पर Head आने की प्रायिकता क्या है?

हल : सिक्का गिरने पर या तो Head (H) या Tail (T) उपर आयेगा। अतः कुल संभावित परिणाम दो है तथा उनमें से 1 घटना के अनुकूल है।

अतः $P(H) = 1/2$

उदाहरण 3.9 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

हल : एक पांसा फेंकने पर 6 संभावित परिणाम हो सकते हैं। जिनमें से 2,3 तथा 5 घटना के अनुकूल है।

अतः P (अभाज्य संख्या) $= 3/6 = 1/2$

उदाहरण 3.10 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 7 से कम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पांसा फेंकने पर 6 संभावित परिणाम हैं 1,2,3,4,5 तथा 6। और उनमें से किसी भी तल पर 7 अंकित नहीं है।

$\therefore P(7) = 0/6 = 0$

चँकि सभी तलों पर अंकित अंक 7 से कम है।

अतः $P(\leq 7) = 6/6 = 1$

उदाहरण 3.11 : एक साथ 2 सिक्के उछालने पर

1. दो Head आने की 2. केवल एक Head आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : यहां संभावित परिणाम हैं HH, HT, TH, TT ।

अतः कुल संभावित परिणाम की संख्या = 4

1. दो Head आने की अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

(i.e. HH)

$\therefore P(HH) = 1/4$

2. केवल एक Head आने की घटना के दो अनुकूल परिणाम हैं (HT तथा TH)

अतः $P(1\ Head) = 2/4 = 1/2$

उदाहरण 3.12 : एक साथ दो पांसें फेंकने पर योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संभावित परिणाम की संख्या $6 \times 6 = 36$ है। जो निम्न तरह से लिख सकते हैं।

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6

6,1 6,2 6,3 6,4 6,5 6,6

योग 9 निम्न तरह से ज्ञात कर सकते हैं।

3 + 6 = 9

4 + 5 = 9

5 + 4 = 9

6 + 3 = 9

अतः (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) घटना के अनुकूल परिणाम है और अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है।

अतः P (योग 9) = 4/36 या 1/9

उदाहरण 3.13 : एक बैग जिसमें 10 लाल, 4 नीली तथा 6 काली गेंदे हैं एक गेंद (अकस्मात् यादृच्छिक) निकालो। 1. एक काली 2. एक नीली 3. काली गेंद न निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल गेंदों की संख्या 20 (10+4+6 = 20) है। अतः कुल संभावित परिणामों की संख्या 20। (यादृच्छिक गेंदे निकालने से सभी समान रूप से संभावित परिणाम है।)

1. लाल गेंदों की संख्या 10

$\therefore$ P (लाल गेंद) = 10/20 = 1/2

2. नीली गेंदों की संख्या = 4

$\therefore$ P (नीली गेंद) = 4/20 = 1/5

3. काली गेंद के अलावा गेंदों की संख्या = 10 + 4 = 14

$\therefore$ P (न काली गेंद) = 14/20 = 7/10

उदाहरण 3.14 : एक अच्छी तरह से फेंटी हुई ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक तरह से निकालिए। यदि रानी आने की घटना है तथा 4 से अधिक तथा 10 से कम वाला पत्ता आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : अच्छी तरह से फेंटे हुई ताश की गड्डी होने के कारण हर पत्ता समान रूप से संभावी है।

अतः कुल संभावी परिणामों की संख्या 52 है।

1. एक गड्डी में 4 रानी होती है।

अतः P (A) = 4/52 = 1/13

2. 4 से अधिकत था 10 से कम वाले पत्ते हैं 5,6,7,8 तथा 9। चूंकि हर कार्ड 4 तरह ईंट, पान, चिड़ी तथा हुकुम में उपलब्ध है। अतः कुल अनुकूल परिणामों की संख्या = 5×4 = 20

$\therefore$ P (B) = 20/52

उदाहरण 3.15 : एक यादृच्छिक रूप से चुने हुए अधिवर्ष (leap year) में 53 रविवार होने की संभावना ज्ञात करें।

हलः एक अधिवर्ष में 366 दिन होते हैं जिस में 52 हफ्तें तथा 2 दिन होते हैं। ये दो अधिक दिन निम्न प्रकार से हो सकते हैं–

1. रविवार तथा सोमवार
2. सोमवार तथा मंगलवार
3. मंगलवार तथा बुधवार
4. बुधवार तथा बृहस्पतिवार
5. बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार

6. शुक्रवार तथा शनिवार
7. शनिवार तथा रविवार

अतः उपर लिखी 7 में से 2 परिणाम 1. तथा 7. घटना के अनुकूल है।

अतः P (53 रविवार) = 2/7

3.7 क्रमचय तथा संयोजन द्वारा प्रायिकता

पिछले भाग में हमने किसी घटना के कुल संभावित परिणाम तथा घटना के अनुकूल परिणामों की गणना करके घटना की प्रायिकता ज्ञात की। परन्तु यह तभी संभव है जब परिणामों की संख्या कम हो अन्यथा यह प्रक्रिया मुश्किल और इसमें बहुत समय लगेगा। साधारणतया आपको सभी परिणामों की सूची की आवश्यकता नहीं होती परन्तु कुल संभावित परिणामों की संख्या तथा अनुकूल परिणामों की संख्या आवश्यकता होती है। बहुत सी परिस्थितियों में यह क्रमचय तथा संयोजन के ज्ञान की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। जो कि आप पहले ही पढ़ चुके हैं।

उदाहरण 3.16: एक बैग/थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंद है। एक सफेद तथा एक नीली एक साथ गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : कुल गेंद की संख्या = 3+6+7 = 16

16 गेंद में से 2 गेंद 7_{C_2} तरह से निकाली जा सकती है।

अतः संपूर्ण घटनाओं की संख्या = $16_{C2} = \dfrac{16\times15}{2} = 120$

6 सफेद गेंद में से 1 गेंद 6_{C_1} तरह से तथा 7 नीली गेंदों से 1 गेंद 7_{C_1} तरह से निकाली जा सकती है। चूंकि प्रत्येक का पहला मामला प्रत्येक के दूसरे मामले से जुड़ा हुआ है। इसलिए अनुकूल परिणामों की संख्या = $6_{C_1} \times 7_{C_1} = 6\times7 = 42$

प्रायिकता = 42/120 = 7/20

उदाहरण 3.17 : एक थैला जिसमें 5 लाल तथा 4 काली गेंदें हो, दो लाल गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें, जब

1. प्रतिस्थापन (पहली गेंद वापस थैले में रख दी जाए)
2. बिना प्रतिस्थापन

हल : 1. कुल गेंदों की संख्या दोनों बार निकालने पर 5+4 = 9 है।

अतः (Fundamental Principle of counting) गणना के मूलभूत सिद्धान्त से, कुल संभावित परिणाम की संख्या $9 \times 9 = 81$

इसी प्रकार, अनुकूल परिणामों की संख्या = $5 \times 5 = 25$

$\therefore$ प्रायिकता (दो लाल गेंद) = 25/81

2. कुल संभावित परिणामों की संख्या बराबर 9 में से 2 गेंद निकालने के तरीके

$$= 9C_2 = \frac{9\times8}{2} = 36$$

अनुकूल परिणामों की संख्या बराबर है 5 में से 2 लाल गेंद निकालने के तरीके

$$= 5C_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$$

$\therefore$ P (दो लाल गेंद) = 10/36 = 5/18

उदाहरण 3.18 : 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से यादृच्छिक 6 पत्ते निकाले जाते हैं उनमें 3 लाख तथा 3 काले पत्तो होने की प्रायिकता बताइए।

हल : 52 पत्तों में से 6 पत्ते $5C_6$ तरह से निकाले जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल संभावित परिणाम = $52C_6$

चूंकि ताश की गड्डी में 26 पत्ते लाल तथा 26 पत्ते काले होते हैं अतः

3 लाल पत्ते $26C_3$ तरह से तथा 3 काले पत्ते $26C_3$ तरह से निकाले जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल अनुकूल परिणाम = $26C_3 \times 26C_3$

$\therefore$ वांछित प्रायिकता = $\frac{26C_3 \times 26C_3}{56C_6} = \frac{13000}{39151}$

उदाहरण 3.19: 3 आदमी, 2 औरत तथा 4 बच्चों के एक समूह से 4 लोगों को यादृच्छिक तरह से चुनते हैं उनमें से दो बच्चे होने की प्रायिकता 10/21 है सिद्ध करो।

हल : समूह में कुल लोगों की संख्या = 3+2+4 = 9

4 लोग चुने जाने पर यदि दो बच्चे हों तो बाकी 2 लोग, 3 आदमी तथा 2 औरत अर्थात् 5 लोग में से होंगे।

4 बच्चों में से 2 बच्चे $4C_2 = 6$ तरह से चुने जा सकते हैं।

बाकी दो लोग 5 में से $5C_2 = 10$ तरह से चुने जा सकते हैं।

9 में से 4 लोग $9C_4 = 126$ तरह से चुने जा सकते हैं।

$\therefore$ वांछित प्रायिकता = $\frac{4C_2 \times 5C_2}{9C4} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{10}{21}$

उदाहरण 3.20 : 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से 3 पत्ते निकाले जाते हैं। उनके राजा, रानी तथा गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : 52 में से 3 पत्ते $5C_3$ तरह से चुने जा सकते हैं चूंकि सभी समान संभावी हैं।

अतः संपूर्ण संभावों की संख्या = $52C_3$

ताश की गड्डी में 4 राजा, 4 रानी तथा 4 गुलाम होते हैं। 1 राजा, 1 रानी तथा 1 गुलाम $4C_1$ तरह से निकाला जा सकता है। चूंकि ये सभी स्वतंत्र घटनाएं है अतः अनुकूल परिणामों की संख्या = $4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1$

$\therefore$ वांछित प्रायिकता = $\frac{4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1}{52C_3} = \frac{16}{5525}$

उदाहरण 3.21: 1 से 25 तक अंकित 25 टिकटों में से एक टिकट निकालो। निकाले टिकट के 5 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : 1 से 25 में 5 के गुणक हैं 5,10,15,20 तथा 25।

अर्थात् संभावित परिणाम की संख्या = 25

अनुकूल परिणाम की संख्या = 5

$\therefore$ वांछित प्रायिकता = $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

3.8 सारांश

एक क्रिया जिसका परिणाम या निष्कर्ष आए प्रयोग कहते हैं। एक क्रिया जिसको एक समान परिस्थितियों में कई बार दोहराया जा सके तथा क्रिया का परिणाम अनुमान लगाने योग्य न हो तो ऐसी क्रिया को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं। यादृच्छिक प्रयोग के कुल संभावित परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि तथा समुच्चय के प्रत्येक तत्व को प्रतिदर्श समंकन बिंदु कहते हैं। प्रतिदर्श समष्टि के

कुछ परिणाम एक निर्धारित स्थिति को परिपूर्ण करते हैं जिसे घटना कहते हैं। जब एक घटना को किसी भी कारणवश दूसरी घटना पर वरीयता नहीं दे सकते तो ऐसी घटनाओं को समान संभावी घटना कहते हैं। यदि एक घटना के घटित होने पर दूसरे घटना न घटित हो तो ऐसी घटनाओं को परम्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं एक Trial (एक के प्रयोग को एक बार करने की क्रिया) में कुल संभावित परिणामों को संपूर्ण घटना कहते हैं। यदि एक घटना के घटित होने से बाकी घटनाओं के घटित होने पर कोई प्रभाव न पड़े तो ऐसे घटनाओं के समूह को स्वतंत्र घटनाएं कहते हैं अन्यथा इन्हें परतंत्र/निर्भर घटनाएं कहेंगे।

3.9 शब्दावली

घटना : प्रतिदर्श समष्टि के कुछ परिणाम/निष्कर्ष एक निर्दिष्ट विवरण को पूरा करते हैं, जिन्हें हम घटना कहते हैं।

समान रूप से संभावित घटनाएंः यदि किसी भी कारणवश हम एक परिणाम पर दूसरे दूसरे परिणाम को वरीयता नहीं दे सकते ।

3.10 बोध प्रश्न

सत्य/असत्य

1. A तथा B परस्पर अनन्य है।
2. A तथा B परस्पर अनन्य तथ संपूर्ण है।
3. A तथा C परस्पर अनन्य हैं।
4. C तथा D परस्पर अनन्य तथा संपूर्ण है।

3.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य

3.12 स्वपरख प्रश्न

1. एक स्कूल से बिना किसी प्रभाव के एक विद्यार्थी चुनने की क्रिया एक यादृच्छिक प्रयोग है सिद्ध करो।
2. एक कैलकुलेटर से दो संख्या जोड़ना यादृच्छिक प्रयोग नहीं है। सिद्ध करो।
3. एक साथ 3 सिक्के उछालने का प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
4. एक सिक्का तथा एक पासा एक साथ फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
5. दो पांसे एक साथ फेंकने पर दोनों पांसों पर उपरी तल पर 6 आए। क्या दोनों घटनाएं परस्पर अनन्य घटनाएं हैं या नहीं?
6. दो पांसे एक साथ फेंकिए। A, B, C तथा D घटनाएं हैं:
   अ. पहले पांसे पर सम संख्या आए
   ब. पहले पांसे पर विषम संख्या आए
   स. दोनों पांसों के उपरी तल पर आए अंकों को योग 7 से कम हो।
   द. दोनों पांसों के अंकों का योग 7 से ज्यादा हो
7. एक थैले में 6 लाल, 4 सफेद तथा 5 नील गेंद हैं इसमें से एक गेंद निकाली जाती है। इसके प्रतिदर्श समष्टि में कितने प्रतिदर्श बिन्दु हैं?
8. एक साथ दो पांसे फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि तथा प्रतिदर्श बिन्दु लिखो।
9. माना कि सिर्फ 2 बच्चों वाले सभी परिवारों को आप चुनते हैं लोगों से उनके पहले तथा दूसरे बच्चे का लिंग पूछने से प्रयोग होता है। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
10. एक पांसे को एक बार फेंकने पर 3 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

11. एक सिक्के को एक बार उछालने पर Tail (पट्ट) आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
12. एक पांसा फेंकने पर 3 से अधिक अंक आने की प्रायिकता बताओ।
13. एक साथ दो सिक्के उछालने पर कम से कम एक Tail आने की प्रायिकता बताओ।
14. एक थैला जिसमें 15 लाल तथा 10 नीली गेंदे हो एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता बताइए निकलने वाली गेंद 1. लाल 2. नीली हो।
15. दो पांसे फेंकने पर योग 1. 6 2. 8 3. 10 4. 12 आने की प्रायिकता बताओ।
16. दो पांसे फेंकने पर उपरी तल पर आए अंको का योग 3 या 4 से विभक्त होने की प्रायिकता बताओ।
17. दो पांसे फेंकने पर दोनों के उपरी तल पर आने वाले अंकों का योग 10 से अधिक होने की प्रायिकता बताओ।
18. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके लाल होने की प्रायिकता बताओ।
19. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक कार्ड निकालने पर उसके 1. हुकुम 2. राजा 3. हुकुम का राजा होने की प्रायिकता बताओ।
20. एक साथ दो पांसें फेंकने पर प्रायिकता ज्ञात करो जब
    1. योग एक अभाज्य संख्या हो।
    2. दोनों पांसों पर एक ही अंक आए।
    3. एक पांसे पर 2 का गुणक तथा दूसरे पर 3 का गुणक आए।
21. तीन सिक्कों को एक साथ उछालो। निम्नलिखित घटनाओं का प्रायिकता ज्ञात करो।
    1. एक भी Head न आए
    2. कम से कम एक Head आए
    3. सभी Head आए।
22. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंदे हैं। दो गेंद निकालने पर दोनों सफेद गेंद आने की प्रायिकता बताओ।
23. एक थैले में 5 लाल तथा 8 नीली गेंद हैं। दो गेंद निकालने पर नीली और लाल आने की प्रायिकता बताओ।
24. एक थैले में 20 सफेद तथा 30 काली गेंद है। दो गेंद निकालने पर सफेद गेंद होने की प्रायिकता ज्ञात करो जब
    1. प्रतिस्थापन 2. बिना प्रतिस्थापन
25. एक ताश की गड्डी से 3 पत्ते निकलने पर तीनों के गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
26. एक 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से दो पत्ते निकालने पर सिद्ध कीजिए 2 इक्के निकालने की प्रायिकता 1/221
27. एक स्कूल के 10 उत्कृष्ट बच्चों के एक समूह में 6 लड़के तथा 4 लड़कियाँ हैं। वाद–विवाद प्रतियोगिता के लिए इन में से 3 बच्चे चुनना हैं प्रायिकता ज्ञात करें जब
    1. एक लड़का दो लड़की
    2. सभी लड़के
    3. सभी लड़कियाँ हों।
28. 1 से 21 तक अंकित 21 टिकटों में से 3 टिकट निकालने पर उनके अंक A P (Arithmatic progression) में होने की प्रायिकता बताओ।
29. 1 से 8 तक अंकित कार्डों में से 2 कार्ड निकालो। दोनों कार्डों के अंकों का योग विषम संख्या होने की प्रायिकता बताओ।

30. 6 लड़कों तथा 8 लड़कियों के समूह में से 5 खिलाड़ियों को चुनना है। 2 लड़के तथा 3 लड़कियों के चयनित होने की प्रायिकता बताओ।
31. प्रथम 200 धनात्मक पूर्णांक में से एक पूर्णांक चुनने पर उसके 6 या 8 से विभक्त होने की प्रायिकता बताओ।

3.13 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. दोनों विशेषताएं हैं।
2. परिणाम अनुमान लगाने योग्य है।
3. S : {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
4. H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6
5. नहीं
6. 15
7.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

8. {MM, MF, FM, FF}
9. 1/6
10. 1/2
11. 1/2
12. 3/4
13. (i) 3/5 (ii) 2/5
14. (i) 3/5 (ii) 5/36 (iii) 1/12 (iv) 1/36
15. 5/9
16. 1/12
17. 1/2
18. (i) 1/4 (ii) 1/13 (iii) 1/52
19. (i) 5/12 (ii) 1/6 (iii) 11/36
20. (i) 1/8 (ii) 7/8 (iii) 1/8
21. 1/8
22. 20/39
23. (a) 4/25 (b) 38/245
24. 1/5525
25. सिद्ध
26. (i) 3/10 (ii) 1/6 (iii) 1/30
27. 10/133

28. 4/7
29. 60/143
30. 1/4

3.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 4 प्रायिकता के सिद्धान्त
(Theorems of Probability)

4.1 प्रस्तावना
4.2 उद्‌देश्य
4.3 योग प्रमेय
    4.3.1 पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय
    4.3.2 अपारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय
4.4 गुणन प्रमेय
    4.4.1 स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय
    4.4.2 आश्रित घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय
4.5 योग तथा गुणन प्रमेय का संयुक्त प्रयोग
4.6 बर्नाली प्रमेय का प्रायिकता सिद्धान्त का उपयोग
4.7 बेज प्रमेय
4.8 सारांश
4.9 शब्दावली
4.10 बोध प्रश्न
4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
4.12 स्वपरख प्रश्न
4.13 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर
4.14 संदर्भ पुस्तकें

4.1 प्रस्तावना

इसके पहले का अध्याय के अध्ययन के उपरान्त आप प्रायिकता के विभिन्न पहलू तथा शब्दावली को समझने योग्य हो गये होंगे। आज बारिश हो सकती है। तथा वह आज पहुँच सकता है। इन दोनों वाक्यों में घटित होना निश्चित नहीं है। दूसरे शब्दों में इन दोनों ही वाक्यों में अनिश्चितता का भाव/अंश है। अनिश्चितता का गणितीय मापन प्रायिकता सिद्धान्त द्वारा दिया गया है। प्रायिकता सिद्धान्त का उद्देश्य अनिश्चितता मापन के तरीके प्रदान करना है। प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति अनिश्चितता के अध्ययन जैसे पत्तों का खेल, सिक्कों को उछालना, पांसा फेंकना इत्यादि से हुई है। परन्तु आज के समय में निर्णय लेने की समस्याओं (decision making problems) के समाधान में इसका विशेष महत्व है।

4.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- प्रायिकता के योग प्रमेय की व्याख्या कर सकें।
- प्रायिकता के गुणन प्रमेय की व्याख्या कर सकें।
- प्रायिकता में बर्नाली प्रमेय के उपयोग का वर्णन कर सकें।
- बेज प्रमेय की सहायता से प्रश्नों का हल कर सकें।

4.3 योग प्रमेय

प्रायिकता के योग प्रमेय को आप निम्न तरह/तरीके से समझ सकते हैं।

4.3.1 पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय

योग प्रमेय कहता है कि यदि A तथा B दो पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं है तो A या B के घटित होने की प्रायिकता सिर्फ A तथा B के घटित होने की प्रायिकता का योग के बराबर होगा।

सांकेतिक भाषा में,

P (A या B) = P(A) + P(B)

या

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

साधारणीकरण–

इस प्रमेय को तीन या उससे अधिक पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए बढ़ाया जा सकता है। यदि A, B तथा C तीन पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं तो

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

उदाहरण 4.1: 52 पत्तों में से 1 पत्ता निकालने पर उसके राजा अथवा रानी होनी की प्रायिकता बताइए।

हल : 52 पत्तों में 4 राजा तथा 4 रानी होते हैं। 1 पत्ता निकालने पर उसके राजा होने की प्रायिकता $P(K) = 4/52$

तथा

निकाले पत्ते के रानी होने की प्रायिकता $P(Q) = 4/52$

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः निकाले पत्ते के राजा या रानी होने की प्रायिकता

P(K या Q) = P(K) + P(Q)

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

उदाहरण 4.2 : एक निवेश सलाहकार भविष्यवाणी करता है कि

हलः माना कि A स्टॉक दाम के बढ़ने की घटना है तथा B स्टॉक स्थिर रहने की घटना है। तो

$P(A) = 1/3$ and $P(B) = 1/4$

P (स्टॉक दाम बढ़ने या स्थिर रहने) = $P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

P (स्टॉक दाम घटेगा) = 1- $P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

उदाहरण 4.3 : 3 घटनाओं A, B तथा C में से केवल एक घटना घटित हो सकती है।

हल : घटना A के घटित होने की प्रायिकता, $P(A) = 3/5$

घटना B के घटित होने की प्रायिकता, $P(B) = 3/7$

चूंकि A, B तथा C पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं।

P(A या B या C) = P(A)+P(B)+P(C) = 1

$$1 = \left(\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{7} + P(C)$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) = P(C) = \frac{6}{35}$$

उदाहरण 4.4 : एक ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। निकाले गये पत्ते के ईंट का इक्का या चिड़ी होने की प्रायिकता बताओ।

हल : चिड़ी का पत्ता निकालने की प्रायिकता

$P(A) = 13/52$

ईंट का इक्का निकालने की प्रायिकता $P(B) = 1/52$

चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं अतः

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{14}{52}$$

$$= \frac{7}{26}$$

उदाहरण 4.5: एक साथ 2 पांसे फेंकने पर योग 7 या 9 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 2 पांसे फेंकने पर 6×6= 36 संभावित परिणाम हो सकते हैं जो निम्नलिखित हैं।

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

योग 7 निम्न 6 तरह से प्राप्त किया जा सकता है।

(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2,5) (1,6)

योग 9 निम्न 4 तरह से प्राप्त किया जा सकता है।

(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)

योग 7 ज्ञात करने की प्रायिकता P(A) = 6/36 = 1/6

योग 9 ज्ञात करने की प्रायिकता, P(B) = 4/36 = 1/9

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं, अतः योग 7 या 9 प्राप्त करने की प्रायिकता–

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

उदाहरण 4.6 : एक थैले में 4 लाल, 5 काली, 3 पीली और 11 हरी गेंदे हैं। एक गेंद प्रायिकता ज्ञात करो कि निकाली गई गेंद

1. लाल, काली या पीली हो।
2. लाल, काली, पीली या हरी हो।

हल : कुल गेंदों की संख्या = 4R+5B +3Y+11G = 23

लाल गेंद आने की प्रायिकता, P(A) = 4/23

काली गेंद आने की प्रायिकता, P(B) = 5/23

पीली गेंद आने की प्रायिकता, P(C) = 3/23

हरी गेंद आने की प्रायिकता, P(D) = 11/23

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः

1. लाल, काली या पीली गेंद आने की प्रायिकता

P(A या B या C) = P(A) + P(B) +P(C)

$$= \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} = \frac{12}{23}$$

2. लाल, काली, पीली या हरी गेंद आने की प्रायिकता

P(A या B या C या D) = P(A) + P(B) +P(C)+ P(D)

$$= \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} + \frac{11}{23}$$

$$= \frac{23}{23} = 1$$

उदाहरण 4.7 : यदि एक जोड़े पांसे फेंके जाए तो प्रायिकता ज्ञात करें

1. योग न तो 7 है न 11
2. न तो दोनों पांसे पर एक ही संख्या आए और न ही योग 9 आए।

हल : यहाँ पर 36 संभावित परिणाम हैं जो निम्न हैं।

1. योग 7 निम्न 6 तरह से आ सकता है–

(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2,5) (1,6)

योग 11 निम्न 2 तरह से प्राप्त कर सकते हैं–

(6,5) (5,6)

योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता, P(A) 6/36

योग 11 प्राप्त करने की प्रायिकता, P(B) = 2/36

चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं, अतः योग 7 या 11 आने की प्रायिकता

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

योग न तो 7 और न ही 11 होने की प्रायिकता

= 1- P(A या B)

$$= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2. दोनों ही पांसो में एक समान अंक निम्न 6 तरह से आ सकता है

(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

योग 9 निम्न 4 तरह से आ सकता हैः

(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)

दोनों पासों में एक समान अंक आने की प्रायिकता, P(A) = 6/36

योग 9 आने की प्रायिकता, P(B) = 4/36

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं, अतः जोड़ा आने या योग 9 आने की प्रायिकता

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

अतः न तो जोड़ा आए न ही योग 9 आने की प्रायिकता

= 1- P(A या B)

$$= 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

उदाहरण 4.8ः एक थैले में 11 लाल और 14 सफेद गेंदें हैं। दो गेंद निकालने पर उनके एक ही रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 25 में से 2 गेंद निकालने के कुल तरीके = $25C_2$

11 लाल गेंदों से 2 लाल गेंद निकालने के कुल तरीके = $11C_2$

14 सफेद गेंदों में से 2 सफेद गेंद निकालने के कुल तरीके = $14C_2$

यहाँ पर दो दशाऍं हैं

1. दोनों गेंद लाल हों

दोनों गेंद लाल आने की प्रायिकता = $11C_2/25C_2$

2. दोनों गेंद सफेद हों

दोनों गेंद सफेद आने की प्रायिकता = $14C_2/25C_2$

चूंकि दशाएं 1. और 2. पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः

P (दोनों गेंद एक रंग की हो) = P(2R or 2W)

= P(2R) + P(2W)

$$= \frac{11C_2}{25C_2} + \frac{14C_2}{25C_2}$$

$$= \frac{11}{60} + \frac{91}{300} = \frac{55+91}{300} = \frac{146}{300}$$

$$= \frac{73}{150}$$

उदाहरण 4.9 : A और B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं। $P(A) = 0.3$ तथा $P(B) = p$ और $P(A+B) = 0.5$ p का मान ज्ञात करो।

हल : चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं तो

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$0.5 = 0.3 + p$$

$$\Rightarrow \quad p = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

4.3.2 अपारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय–

जब घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी न हों तो उपर वर्णित योग प्रमेय उपयुक्त नहीं होगा। उदाहरण के लिए एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता 13/52 है तथा एक राजा निकालने की प्रायिकता 4/52 है, चूंकि ये घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं नहीं है अतः एक हुकुम का पत्ता या राजा वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता दोनों घटनाओं की एकाकी प्रायिकता जोड़कर नहीं निकाल सकते क्योंकि पत्ता राजा भी हो सकता है और हुकुम भी हो सकता है।

जब घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी न हो तो योग प्रमेय में संशोधन करना आवश्यक है।

संशोधित योग प्रमेय कहता है कि यदि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं न हों तो A या B या दोनों के घटित होने की प्रायिकता A के घटित होने की प्रायिकता तथा B के घटित होने की प्रायिकता ऋण का योग और A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता को घटाकर बराबर होगा।

सांकेतिक भाषा में,

P (A या B या दोनों) $= P(A) + P(B) - P(AB)$

इस फार्मूले में हम P(A और B)$= P(AB)$ को घटाते हैं अर्थात् $P(A)+P(B)$ के घटित होने पर जिन घटनाओं की प्रायिकता को दो बार गिना गया है। अतः प्रमेय को इस प्रकार संशोधित किया गया है कि A तथा B को पारस्परिक अपवर्जी प्रस्तुत किया जा सके।

निम्नलिखित चित्र से इसे दर्शाया/समझाया जा सकता है।

साधारणीकरण (Generalization)

इस प्रमेय को तीन या अधिक घटनाओं के लिए विस्तृत/बढ़ाया जा सकता है। अतः

P(A या B या C) $= P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

निम्नलिखित उदाहरण संशोधित योग प्रमेय के उपयोग को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 4.10 : एक अच्छी तरह फेंटी हुई ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालिए। पत्ते के राजा या हुकुम होने की प्रायिकता क्या है?

हल : एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता, $P(A) = 13/52$

राजा वाला पत्ता निकालने के प्रायिकता, $P(B) = 4/52$

चूंकि राजा के पत्तों में से एक हुकुम का पत्ता हो सकता है अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

हुकुम के राजा निकालने की प्रायिकता, $P(AB)= 1/52$

अतः हुकुम या राजा निकालने की प्रायिकता

P(A या B या दोनों) $= P(A)+P(B) - P(AB)$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उदाहरण 4.11 : एक थैले में 1 से 30 तक अंकित 30 गेंदें हैं। एक गेंद दैव दर्शन से निकाला जाता है। निकाली गई गेंद पर अंकित नंबर 5 या 6 का गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : गेंद के 5 के गुणक होने की प्रायिकता

(5,10,15,20,25,30) ' P(A) = 6/30

गेंद के 6 के गुणक होने की प्रायिकता

(6, 12, 18, 24, 30) ' P(B) = 5/30

चूंकि 30, 5 तथा 6 दोनों का गुणक है अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P(A तथा B) = 1/30

अतः गेंद के 5 या 6 के गुणक होने की प्रायिकता

P (A या B) = P(A) + P(B) - P(A B)

$$\frac{6}{30}+\frac{5}{30}-\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

उदाहरण 4.12: 1 से 150 तक की संख्याओं में से एक संख्या निकाली जाती है। उसके 3 या 5 से विभाजित होने की प्रायिकता बताओ।

हल : संख्या के 3 से विभाजित होने वाले की प्रायिकता

(3, 6, 9, ... 147, 150) ; P(A) = 50/150

संख्या के 5 से विभाजित होने की प्रायिकता

(5,10,15, ... 145, 150) ; P(B) = 30/150

चूंकि (15,30,45, ...135, 150) = 10 संख्याएं दोनों में हैं अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P (A या B) = 10/150

3 या 5 से विभाजित होने की प्रायिकता

P (A या B) = P(A) + P(B) - P(A B)

$$=\frac{50}{150}+\frac{30}{150}-\frac{10}{150}$$

$$=\frac{70}{150}=\frac{7}{15}$$

उदाहरण 4.13 : एक पत्तों की गड्डी से दैव दर्शन द्वारा एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता बताओ 1. पत्ता राजा या रानी हो 2. पत्ता या तो राजा हो या काला पत्ता हो।

हल : 1. राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता P(K) = 4/52

रानी पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(Q) = 4/52

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः पत्ते के राजा अथवा रानी होने की प्रायिकता

P(K या Q) = P(K) + P(Q)

2. राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(A) = 4/52

काला पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(B) = 26/52

चूंकि काले राजा दोनों घटनाओं में Common है। अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P (काला राजा) = 2/52

अतः पत्ते के राजा या काला पत्ता होने की प्रायिकता

P (राजा या काला पत्ता) P(राजा) + P(काला पत्ता) − P(काला राजा)

$$= \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52}$$
$$= \frac{28}{52}$$

उदाहरण 4.14 : एक चार्टर्ड एकाउन्टेंट ने दो फर्मों X तथा Y में एक नौकरी के लिए आवेदन किया। उसने उसके फर्म X में चयनित होने की प्रायिकता 7/10 तथा Y फर्म में अस्वीकृत होने की प्रायिकता 5/10 अनुमान लगाया तथा उसके दोनों फर्मों में चयनित होने की प्रायिकता 4/10 है। उसके फर्म में चयनित होने की प्रायिकता बताओ।

हलः P(फर्म X में चयनित होना) = 7/10

P(फर्म Y में चयन) = P(फर्म Y में अस्वीकृत)

$$= 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10}$$

P(X तथा Y में चयन) = 4/10

P(एक फर्म में चयन) = P(X) + P(Y) - P(XY)

$$= \frac{7}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

4.4 गुणन प्रमेय

अब आप प्रायिकता के गुणन प्रमेय का दो आयामों के अंतर्गत अध्ययन करेंगे।

4.4.1 स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय–

गुणन प्रमेय कहता है यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएं हों तो A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता उनकी एकाकी प्रायिकता के गुणन के बराबर होगी। सांकेतिक भाषा में,

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

साधारणीकरण : इस प्रमेय को तीन या उससे अधिक घटनाओं के लिए विस्तारित किया जा सकता है। यदि A, B तथा C तीन स्वतंत्र घटनाएं हो, तो

$$P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

उदाहरण 4.15: A एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। 3 चित आने की प्रायिकता बताओ।

हलः पहले टॉस में चित आने की प्रायिकता P(A) = 1/2

दूसरे टॉस में चित आने की प्रायिकता, P(B) = 1/2

तीसरे टॉस में चित आने की प्रायिकता, P(C) = 1/2

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः 3 चित आने की प्रायिकता,

$$P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 4.16 : 52 पत्तों की गड्डी से दो पत्ते दैव निदर्शन द्वारा निकाले जाते हैं एक के बाद दूसरा जबकि पहला पुनः गड्डी में शामिल कर दिया जाता है। दोनों पत्तों के राजा होने की प्रायिकता बताओ।

हल : राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(A) = 4/52

रिप्लेसमेंट के उपरांत राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(B) = 4/52

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः दो राजा निकालने की प्रायिकता,

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

उदाहरण 4.17: एक थैले में 5 सफेद और 3 काली गेंदें हैं दैव निदर्शन से दो गेंदे एक के बाद एक प्रतिस्थापन के बाद निकाली जाती है। दोनों गेंदे काली होने की प्रायिकता बताओ।

हल : पहली बार में काली गेंद निकालने की प्रायिकता, P(A) = 3/8

दूसरी बार में काली गेंद निकालने की प्रायिकता, P(B) = 3/8

चूंकि दोनों घटनाएं स्वतंत्र हैं अतः दोनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता,

P(2B) = P(प्रथम काली) × P(द्वितीय काली)

$$= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

उदाहरण 4.18 : एक विद्युत उपकरण तीन घटकों A, B तथा C से मिलकर बना है। एक निर्धारित समय में घटक A के खराब होने की प्रायिकता 0.01 है, B तथा C के खराब होने की प्रायिकता क्रमशः 0.02 तथा 0.05 है। यह मानते हुए कि तीनों घटक स्वतंत्र रूप से काम करते हैं, निश्चित अवधि में उपकरण के सफलतापूर्वक काम करने की प्रायिकता बताओ।

हल : माना कि खराब घटक क्रमशः तथा द्वारा दर्शाते हैं।

P(A) = 0.01, P(B) = 0.02, P(C)= 0.05

घटकों के खराब होने की प्रायिकता

P(A) = 1-P(A) = 1-0.01 = 0.99

P(B) = 1-P(B) = 1-0.02 = 0.98

P(C) = 1-P(C) = 1-0.05 = 0.9

उपकरण के सफलतापूर्वक काम करने की प्रायिकता

P(ABC) = P(A) × P(B) × P(C)

= 0.99 × 0.98× 0.95

= 0.092162 = 0.092 (Approx.)

4.4.1.1 n स्वतंत्र घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

यदि आपके पास n स्वतंत्र घटनाएं $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ हो तथा उनके घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ हो, तो स्वतंत्र घटनाओं $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

P(कम से कम एक घटना घटित होना)

= 1 - P(किसी घटना का घटित न होना)

$= 1- [(1- p_1) \quad (1- p_2) \quad (1- p_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (1- p_n)$

उदाहरण 4.19 : तीन विद्यार्थियों A, B तथा C को एक सांख्यिकी की समस्या/प्रश्न हल करने के लिए दी जाती है तथा उनको इसको हल कर लेने का संयोग 1/2, 1/3 तथा 1/4 है। समस्या हल कर लेने की प्रायिकता बताइये।

हल : A के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, P(A) = 1/2

B के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, P(B) = 1/3

C के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, P(C) = 1/4

A के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, $P(\bar{A})$ = 1- 1/2 = 1/2

B के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, P(B) = 1- 1/3 = 2/3

C के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, $P(\bar{A})$ = 1- 1/4 = 3/4

चँकि सभी घटनाएं स्वतंत्र हैं, अतः

P(कोई भी समस्या हल नहीं कर पाया) = $P(A) \times P(B) \times P(C)$

$= 1/2 \times 1/3 \times 1/4 = 1/4$

P(समस्या हल हो जाए) = 1 - P(कोई समस्या हल न कर पाए)

$= 1 - 1/4 = 3/4$

उदाहरण 4.20: एक अभ्यर्थी X ने 3 पदों के लिए साक्षात्कार दिया। प्रथम पद के लिए 3 अभ्यर्थी, द्वितीय के लिए 4 तथा तृतीय के लिए 2 अभ्यर्थी थे। X के चयनित होने की प्रायिकता बताओ।

हल : प्रथम पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(A) = 1/3$

द्वितीय पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(B) = 1/4$

तृतीय पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(C) = 1/2$

प्रथम पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$

द्वितीय पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(B) = 1 - 1/4 = 3/4$

तृतीय पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(C) = 1 - 1/2 = 1/4$

चँकि सभी घटनाएं स्वतंत्र है अतः X के चयनित न होने की प्रायिकता

के कम से कम एक पद पर चयनित होने की प्रायिकता

उदाहरण 4.21 : एक पांसे को 6 बार फेंकने पर कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता बताओ।

हलः कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता

= 1 − एक बार 6 न आने की प्रायिकता

पहले बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

दूसरी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

तीसरी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

चौथी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

पांचवी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

छठी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

चँकि घटनाएं स्वतंत्र है, अतः किसी भी बार 6 के न आने की प्रायिकता

$= P(\bar{I}), P(\bar{I}\,\bar{I}), P(\bar{I}\,\bar{I}\,\bar{I}), P(\bar{I}V), P(V), P(V\,\bar{I})$

$= 5/6, 5/6, 5/6, 5/6, 5/6, 5/6$

$= (5/6)^6$

अतः कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता $= 1 - (5/6)^6$

उदाहरण 4.22: x वर्षीय एक आदमी की किसी वर्ष में मृत्यु हो जाती है। x वर्षीय आदमियों $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ में से x की मृत्यु सबसे पहले होने की प्रायिकता बताओ।

हल :

x वर्षीय एक आदमी के किसी वर्ष में मृत्यु होने की प्रायिकता = p

अतः x वर्षीय आदमी के किसी वर्ष में मृत्यु न होने की प्रायिकता = 1- p

n में से किसी भी आदमी की उस वर्ष में मृत्यु न होने की प्रायिकता,

$p = (1-p), (1-p), (1-p) .... n$

$= (1-p)^n$

उस वर्ष में कम से कम एक आदमी की मृत्यु होने की प्रायिकता,

= 1- P(किसी की मृत्यु न हो)

= [(1- (1 - p)^n]

n आदमियों में से A_1 की मृत्यु की प्रायिकता = 1/n

अतः वांछित प्रायिकता = 1/n [(1- (1 - p)^n]

उदाहरण 4.23 : A तथा B दो स्वतंत्र गवाह हैं A के सत्य बोलने की प्रायिकता x है और B के सत्य बोलने की प्रायिकता y है। A तथा B कथन सहमत हैं। कथन के सत्य होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : दिया गया है, P(A) = x P(B)= y

P(A) = 1-x P(B) = 1-y

A तथा B सहमत होंगे जब 1. दोनों सत्य बोंले 2. दोनों असत्य बोलें।

A तथा B के सत्य बोलने की प्रायिकता = P(A). P(B) = xy

A तथा B के असत्य बोलने की प्रायिकता = P(A). P(B) = (1-x) (1-y)

अतः दोनों के सहमत होने के cases की संख्या = xy + (1-x) (1-y)

P (कथन के सत्य) = सत्य कहने के cases की संख्या / कुल cases की संख्या

$$= \frac{xy}{xy + (1-x)\,(1-y)}$$

4.4.1.2 सशर्त (शर्तयुक्त प्रायिकता)

यदि घटनाएं आश्रित हों तो उपर वर्णित गुणन प्रमेय उपयुक्त नहीं होगा। आश्रित घटनाएं वो हैं जिसमें एक से घटित होने के दूसरे घटनाओं की प्रायिकता प्रभावित हो। घटना B के घटित होने की प्रायिकता जब A पहले ही घटित हो चुका हो को B की शर्त युक्त प्रायिकता कहते हैं। इसे P(B/A) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसी तरह शर्तयुक्त A जब B पहले घटित हो चुका है को P(A/B) द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

शर्तयुक्त प्रायिकता की परिभाषा–

यदि A तथा B आश्रित घटनाएं हो तो B की शर्तयुक्त प्रायिकता जब A पहले ही घटित हो चुका हो इस प्रकार परिभाषित करते हैं और

P(B/A) = P(AB)/P(A), P(A)> 0

इसी प्रकार A की शर्तयुक्त प्रायिकता given B को परिभाषित करते हैं तथा

P(A/B) = P(AB)/P(B), P(B)> 0

4.4.2 आश्रित घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय या सशर्त प्रायिकता के संदर्भ में गुणन प्रमेय–

जब घटनाएं स्वतंत्र न हों अर्थात् आश्रित घटनाएं हो तो गुणन प्रमेय को संशोधित करने की आवश्यकता है। संशोधित गुणन प्रमेय कहता है कि यदि A और B दो आश्रित घटनाएं हो तो उनके एक साथ घटित होने की प्रायिकता (समसामयिक प्रायिकता) बराबर होगी एक घटना की प्रायिकता और दूसरी घटना की सशर्त प्रायिकता के गुणन के बराबर।

सांकेतिक भाषा में,

P(A B) = P(A) . P(B/A)

या P(A B) = P(B). P(A/B)

जहां P(B/A) = B की सशर्त प्रायिकता given A

P(A/B) = A की सशर्त प्रायिकता given B

उदाहरण 4.24 : एक थैले में 10 सफेद और 5 काली गेंदे हैं। दैव निदर्शन द्वारा दो गेंदों बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। दोनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता बताओ।

हल : प्रथम प्रयास में काली गेंद निकालने की प्रायिकताए P(A) = $\frac{5}{10+5} = \frac{5}{15}$

पहले प्रयास में काली गेंद निकालते और बिना प्रतिस्थापन दूसरी काली गेंद निकालने की प्रायिकता = $P(B/A) = \frac{4}{10+4} = \frac{4}{14}$

चँकि घटनाएं आश्रित है अतः दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता

$P(A\ B) = P(A)\ .\ P(B/A)$

$= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$

उदाहरण 4.25: तीन लगातार प्रयासों में बिना प्रतिस्थापन क्रमशः राजा, रानी और गुलाम के पत्ते निकालने की प्रायिकता बताओ।

हल : राजा निकालने की प्रायिकता = 4/52

एक रानी निकालने की प्रायिकता जब एक राजा पहले ही निकाला जा सकता है,

$P(B/A) = 4/51$

एक राजा और रानी निकालने के बाद गुलाम आने की प्रायिकता,

$P(C/AB) = \frac{4}{50}$

चँकि घटनाएं आश्रित है अतः एक राजा, एक रानी और गुलाम निकालने की प्रायिकता, P(ABC) = $\frac{4}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{8}{16575}$

उदाहरण 4.26: चार पत्ते बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। उन सबके इक्के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः प्रथम प्रयास में एक इक्का निकालने की प्रायिकता = 4/52

पहले इक्के के बाद दूसरे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 3/51

पहले तथा दूसरे इक्के के बाद तीसरे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 2/50

पहले, दूसरे, तीसरे इक्के के बाद चौथे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 1/49

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं, अतः वांछित प्रायिकता

P(I इक्का × II इक्का × III इक्का × IV इक्का) = $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} = \frac{1}{270725}$

उदाहरण 4.27: एक बैग में 5 सफेद और 8 लाल गेंद है। दो बार 3 गेंद इस प्रकार निकाली जाती है कि 1. दूसरी निकासी के पहले गेंद प्रतिस्थापित कर दी जाती है। और 2. दूसरी निकासी के पहले गेंद प्रतिस्थापित नहीं कि जाती। दोनों परिस्थितियों पहली निकासी में 3 सफेद और दूसरी निकासी में 3 लाल गेंद आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 1. जब गेंदों का प्रतिस्थापन किया गया है बैग में कुल गेंदों कीसंख्या= 8+5=13

13 में से 3 गेंद $13C_3$ तरह से निकाली जा सकती है।

5 सफेद में से 3 सफेद गेंद $5C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

3 सफेद गेंद की प्रायिकता, P(3W) = $\frac{5C_3}{13C_3}$

चूंकि पहली निकासी के बाद गेंदों का प्रतिस्थापन हुआ है अतः बैग में 13 गेंद है तो 8 लाल में से 3 लाल गेंद $8C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

$\therefore$ 3 लाल गेंद की प्रायिकता = $P(3R) = \dfrac{8C_3}{13C_3}$

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः वांछित प्रायिकता

$P(3W \text{ and } 3R) = P(3W) \times P(3R)$

$$= \frac{5C_3}{13C_3} \times \frac{8C_3}{13C_3} = \frac{10}{286} \times \frac{56}{286}$$

$$= \frac{140}{20449}$$

2. जब दूसरी निकासी से पहे गेंदों का प्रतिस्थापन न किया गया हो

बैग में कुल गेंदों की संख्या = 8 + 5 = 13

13 में से 3 गेंद $13C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

5 सफेद में से 3 सफेद गेंद $5C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

3 सफेद गेंद आने की प्रायिकता = $\dfrac{5C_3}{13C_3}$

प्रथम निकासी के बाद 10 गेंदें बची हैं, 10 में से 3 गेंद $10C_3$ तरह से निकाली जा सकती है।

8 लाल में से 3 लाल गेंद तरह से निकाली जा सकती है।

3 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = $\dfrac{8C_3}{10C_3}$

चूंकि दोनों घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

$$P(3W \text{ and } 3R) = \frac{5C_3}{13C_3} \times \frac{8C_3}{10C_3}$$

$$= \frac{5}{143} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{429}$$

उदाहरण 4.28 : एक बैग, जिसमें 5 सफेद और 3 लाल गेंद है, चार गेंदे एक के बाद एक करके बिना प्रतिस्थापन निकाली जाती है। प्रायिकता बताओ।

1. सफेद और लाल गेंद एक के बादएक आएगी।
2. लाल और सफेद गेंद वैकल्पिक रूप से आएगी।

हल : 1. 1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता= 5/8

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 3/7

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 4/6

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 2/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

$$P(1W\ 1R\ 1W\ 1R) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{14}$$

2. 1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 3/8

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 5/7

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 2/6

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 4/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

P(1R 1W 1R 1W) = $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{14}$

4.5 योग तथा गुणन प्रमेय का संयुक्त प्रयोग

प्रायिकता के अन्तर्गत कुछ समस्याएं हैं जहॉ दोनों योग तथा गुणन प्रमेय का एक साथ उपयोग होता है। ऐसी परिस्थितियों में सबसे पहले आप गुणन प्रमेय लागू करेंगे और उसके बाद अंततः योग प्रमेय उपयोग करेंगे।

उदाहरण 4.29: A 80% प्रतिशत मामलों सत्य बोलता है और B 90% कितने प्रतिशत मामलों में एक ही तथ्य को बताने में दोनों में विरोधाभास है।

हलः माना कि A तथा B की सत्य बोलने की प्रायिकता क्रमशः A तथा B है।

$$P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5},\ P(A)=1-P(A)=\frac{1-4}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(B)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10},\ P(B)=1-P(B)=\frac{1-2}{10}=\frac{1}{10}$$

उनमें विरोधाभास तभी होगा जब तक सत्य बोले और दूसरा असत्य। अतः निम्न 2 संभावनाएं हैं

1. A सत्य बोले और B असत्य
2. B सत्य बोले और A असत्य

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

1. I संभावना की प्रायिकता $=P(A).P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$
2. II संभावना की प्रायिकता $=P(A).P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{50}$

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछति प्रायिकता = $\frac{4}{50}+\frac{9}{10}=\frac{13}{50}=26\%$

उदाहरण 4.30 : एक थैले में 5 सफेद और 4 काली बेंदे हैं थैले से एक गेंद निकाली जाती है और पुनः थैले में प्रतिस्थापित करने के उपरांत दूसरी गेंद निकालते हैं। दोनों गेंदों के अलग–अलग रंग के होने की प्रायिकता बताओ अर्थात् एक सफेद और एक काली?

हलः यहाँ पर दो संभावनाएं हैंः

1. पहली बार सफेद और दूसरी बार काली गेंद निकालते हैं।
2. पहली बार काली और दूसरी बार सफेद गेंद निकालते हैं।

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से–

1. प्रथम केस की प्रायिकता = $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{81}$
2. द्वितीय केस की प्रायिकता$=\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{20}{81}$

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी है अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता– $=\frac{20}{81}+\frac{20}{81}=\frac{40}{81}$

उदाहरण 4.31: एक थैले में 5 सफेद और 3 लाल गेंदें हैं और क्रमशः 4 गेंद बिना प्रतिस्थापन निकाली जाती है। उनके alternatively अलग होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : अल्टरनेटिवली 4 रंग हो सकते हैं।

1. सफेद, लाल, सफेद, लाल (1W 1R 1W 1R)
2. लाल, सफेद, लाल, सफेद (1R 1W 1R 1W)

1. सफेद गेंद से शुरूआत हो

पहली गेंद सफेद होने की प्रायिकता = 5/8

पहली गेंद लाल होने की प्रायिकता = 3/7

पहली गेंद सफेद होने की प्रायिकता = 4/6

पहली गेंद लाल होने की प्रायिकता = 2/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

P(1W 1R 1W 1R) = $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{14}$

चूंकि 1. तथा 2. पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं है अतः योग प्रमेय द्वारा

वांछित प्रायिकता = $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

उदाहरण 4.32 :

हल : माना कि सम संख्या आने की प्रायिकता च तथा विषम संख्या आने की प्रायिकता q है।

सम संख्या : विषम संख्या : : 2 :।

p = p (सम) = 2/3 ; q = p (विषम) = 1/3

यहाँ पर दो पारस्परिक संभावनाएं है जिसमें दो संख्याओं का योग सम हो सकते है:

1. पहले बार फेंकने पर विषम संख्या आए और दूसरी बार फेंकने पर विषय संख्या आए।
2. पहल बार फेंकने पर सम संख्या आए और दूसरी बार फेंकने पर सम संख्या आए।

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः गुणन प्रमेय की सहायता

1. I केस की प्रायिकता = $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
2. II केस की प्रायिकता = $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

चूंकि संभावनाएं पारस्परिक अपवर्जी है अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता = $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

उदाहरण 4.33: कारीगरों के तीन समूह में 3 आदमी और 1 औरत, 2 आदमी और 2 औरत और 1 आदमी और 3 औरत हैं। प्रत्येक समूह से दैव निदर्शन द्वारा एक कारीगर चुना जाता है। चुने गये कारीगरों के समूह में 1 आदमी और 2 और होने की प्रायिकता बताओ।

हल : यहाँ पर 3 संभावनाएं हो सकती हैं

1. पहले समूह से 1 आदमी और दूसरे व तीसरे समूह से एक–एक और चुनी जाए।
2. दूसरे समूह से एक आदमी तथा पहले और तीसरे समूह से एक–एक औरत चुनी जाए।
3. तीसरे समूह से एक आदमी तथा पहले व दूसरे समूह से एक–एक औरत चुनी जाए।

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

1. प्रथम केस की प्रायिकता $=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$

2. द्वितीय केस की प्रायिकता $=\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{64}$

3. तृतीय केस की प्रायिकता $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{64}$

चूंकि संभावनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता $=\frac{18}{64}+\frac{6}{64}+\frac{2}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}$

4.6 प्रायिकता सिद्धान्त में बर्नाली प्रमेय का उपयोग

प्रायिकता समस्याओं के समाधान में बर्नाली प्रमेय बहुत उपयोगी है। यह प्रमेय कहता है कि यदि एक घटना या परख या प्रयोग के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात हो तो इसके 1,2,3........r बार घटित होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

$$P(r)=n_{C_r}\ p^r\, q^{n-r} \qquad ; \qquad r=1,2,3,.........n$$

जहां

P(r) = n परख में r सफलता की प्रायिकता

p = सफलता की प्रायिकता या एक परख में घटना के घटित होने की प्रायिकता

q = असफलता की प्रायिकता या एक परख में घटना के घटित न होने की प्रायिकता

n = कुल परखों की संख्या

निम्नलिखित उदाहरण इस प्रमेय के उपयोग को दर्शाते हैं।

उदाहरण 4.34 : तीन सिक्के एक साथ (समसामयिक) उछाते जाते हैं। एक साथ दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : चूंकि दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात करना है अतः बर्नाली प्रमेय की सहायता से यह आसान होगा। इस प्रमेय के अनुसार

$$P(r)=n_{C_r}\ p^r\, q^{n-r}$$

दिया गया है n = 3, r = 2, p= सिक्के के एक उछाल पर चित आने की प्रायिकता = 1/2

$$P(2H)={}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$=\frac{3!}{(3-2).!2!}\times\frac{1}{8}=3\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

उदाहरण 4.35: एक सेना की टुकड़ी में 3/5 सैनिक विवाहित/शादीशुदा है और बाकी के 2/5 सैनिक अविवाहित है। 5 सैनिकों की पंक्ति में 4 सैनिकों के विवाहित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : यहाँ पर n= 5, r= 4; p = विवाहित सैनिक होने की प्रायिकता = 3/5

q = 1-p = 1-3/5 = 2/5

P(4 विवाहित सैनिक) = $={}^5C_4\left(\frac{B}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1$

$$=\frac{5!}{4!1!}\,\frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}\times\frac{2}{5}=\frac{162}{625}$$

उदारहण 4.36 : यदि एक परिवार में 3 बच्चे हो तो परिवार में 1 लड़की होने की प्रायिकता बताओ।
हल : दिया गया है, n= 3, r = 1

p = लड़की होने की प्रायिकता = 1/2

$$q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(r=1)=P(1G)={}^3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3!}{2!1!}\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{8}$$

उदाहरण 4.37: इंग्लैण्ड के खिलाफ भारत के क्रिकेट मैच जीतने की प्रायिकता 1/3 है। यदि भारत और इंग्लैण्ड के बीच 3 टेस्ट मैच खेले जाने हो तो प्रायिकता ज्ञात करो 1. भारत तीनों मैच हार जाए 2. भारत कम से कम एक मैच जीत जाए।

हल : n = 3

p = मैच जीतने की प्रायिकता = 1/3

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

1. P (सभी मैच हार जाए) = $P(o)={}^3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

2. P (कम से कम एक मैच जीत जाए)

= 1-P (एक भी मैच न जीते)

$$=1-{}^3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

4.7 बेज प्रमेय

बेज प्रमेय का नामकरण ब्रिटिश गणितज्ञ थॉमस बेज के आधार पर किया गया है और यह 1763 में मुद्रित हुआ। बेज प्रमेय की सहायता से स्वयंसिद्ध प्रायिकताएं (prior probabilities) कुछ न्यादर्श जानकारी की सहायता से संशोधित करके प्रतिबंधी प्रायिकताएं प्राप्त की जाती है। इस प्रमेय को विपरीत प्रायिकता प्रमेय भी कहते हैं। माना कि एक फैक्ट्री में A_1 तथा A_2 दो मशीनों द्वारा माल तैयार किया जाता है। माना कि A_1 और A_2 मशीन क्रमशः कुल माल का 70% तथा 30% माल तैयार करती है और क्रमशः 5% तथा 3% की दर से खराब बोल्ट बनाती है। माना कि कुल तैयार माल से एक item समान चुना जाता है और यह खराब पाया जाता है और अब हम यह जानना चाहते हैं कि ये माल, सामान A_1 तथा A_2 मशीन द्वारा बनाये जाने की क्या प्रायिकता है तो यह बेज प्रमेय की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। माना कि एक थैले 6 काली और 4 सफेद गेंदें हैं। दूसरे थैले में 45 काली और 6 सफेद गेंद हैं। एक थैले से दैव निदर्शन द्वारा एक गेंद निकालने पर वह काली पायी जाती है यदि आप

यह जानना चाहते हैं कि वह गेंद पहल या दूसरे थैले से आयी है तो इसे बेज प्रमेय को उपयोग करके निकाल/ज्ञात कर सकते हैं।

बेज प्रमेय का कथन :

यदि A_1 तथा A_2 परस्पर अपवर्जी और सर्वांगपूर्ण घटनाएं हो तथा B एक ऐसी घटना हो जो कि A_1 तथा A_2 के जोड़े के साथ घटित हो तो A_1 तथा A_2 शर्तयुक्त/सशर्त प्रायिकता जबकि B घटित हो चुका हो इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)}$$

इसी तरह

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)}$$

साधारणीकरणः

बेज प्रमेय को तीन या अधिक घटनाओं के लिए विस्तृत कर सकते हैं। यदि तथा तीन पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हो तथा एक ऐसी घटना हो जो तथा के संयोजन के साथ घटित हो तो

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)}$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3).P(B/A_3)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)}$$

उदाहरण 4.38 : एक बोल्ट फैक्ट्री में A, B तथा C मशीनें कुल माल का क्रमशः 25%, 35% तथा 40% तैयार करती है। तैयार माल से क्रमशः 5, 4 तथा 2 प्रतिशत बोल्ट खराब हो जाते हैं। दैव निदर्शन से एक बौल्ट निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है। इसके मशीन C से तैयार होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि A, B तथा C मशीनों द्वारा तैयार बोल्ट को निकालने की घटना क्रमशः A, B, तथा C है और D बोल्ट के खराब होने की घटना दर्शाता है।

दी गई सूचना का आधार पर

P(A) = 35% = 25/100 = 0.25

P(B) = 35% = 35/100 = 0.35

P(C) = 40% = 40/100 = 0.40

सशर्त प्रायिकता

P(D/A) 5% = 5/100 = 0.05

P(D/B) = 4% = 4/100 = 0.04

P(D/C) = 2% = 2/200= 0.02

नीचे दिए गए तालिका/टेबल में दी गई जानकारी रखने पर

घटना	**स्वयंसिद्ध प्रायिकता**	**सशर्त प्रायिकता**	**संधि प्रायिकता**
A	P(A) = 0.25	P(D/A) = 0.05	0.25 × 0.05
B	P(B) = 0.35	P(D/B) = 0.04	0.35 × 0.04
C	P(C) = 0.40	P(D/C) = 0.02	0.40 ×0.02

हमें ज्ञात करना है कि खराब बोल्ट मशीन द्वारा तैयार किया गया है अर्थात् P(C/D)

$$P(C/D) = \frac{\text{मशीन C की सन्धि प्रायिकता}}{\text{तीनों मशीनों की संधि प्रायिकता का योग}}$$

$$= \frac{0.40 \times 0.02}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.008}{0.0125 + 0.014 + 0.008} = \frac{0.008}{0.0345}$$

$$= 0.2318 \ \ or \ \ 23.18\%$$

उदाहरण 4.39: एक स्टील पाईप बनाने वाली फर्म अपने तीन प्लांटों से क्रमशः 500, 1000 तथा 2000 इकाई का निर्माण करती है। पूर्व अनुभव के अनुसार तीनों प्लांटों द्वारा खराब माल बनाने का अंश क्रमशः 0.005, 0.008 और 0.010 है। दिन भर में बनाए गए सभी माल में से एक पाईप चुना जाता है और वह खराब निकलता है। उसके पहले प्लांट द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : मानाकि E_1, E_2 तथा E_3 प्लांट्स I, II तथा III से स्टील पाइप चुनने की घटनाएं है तथा D पाइप के खराब होने की प्रायिकता है।

दी गई जानकारी : सशर्त प्रायिकताएं हैंः

$$P(E_1) = \frac{500}{500 + 1000 + 2000} = \frac{1}{7} \qquad P(D/E_1) = 0.005$$

$$P(E_2) = \frac{1000}{5 + 1000 + 2000} = \frac{2}{7} \qquad P(D/E_2) = 0.008$$

$$P(E_3) = \frac{2000}{500 + 1000 + 2000} = \frac{4}{7} \qquad P(D/E_3) = 0.010$$

दी गई जानकारी को टेबल में रखने पर

घटना 1	स्वयंसिद्ध प्रायिकता 2	प्रतिबंधी प्रायिकता 3	संधि प्रायिकता 2×3
E_1	$P(E_1)= 1/7$	$P(D/E_1) = 0.005$	$1/7 \times 0.005$
E_2	$P(E_2)= 2/7$	$P(D/E_2) = 0.008$	$2/7 \times 0.008$
E_3	$P(E_3)= 4/7$	$P(D/E_3) = 0.010$	$4/7 \times 0.010$

आपको ज्ञात करना है अर्थात् खराब पाइप के प्लांट I द्वारा बनाये जाने की प्रायिकता

$$P(E_1/D) = \frac{\text{I प्लांट की संधि प्रायिकता}}{\text{तीनों मशीनों की संधि प्रायिकता का योग}}$$

$$= \frac{\frac{1}{7} \times 0.05}{\frac{1}{7} \times 0.005 + \frac{2}{7} \times 0.008 + \frac{4}{7} \times 0.010}$$

$$= \frac{0.005}{0.005 + 0.008 + 0.010} = \frac{0.005}{0.061}$$

$$= \frac{5}{61}$$

उदाहरण 4.40: एक कंपनी के अध्यक्ष पद के लिए तीन अभ्यर्थी A, B तथा C ने आवेदन किया। उनके चयनित होने की प्रायिकता अनुपात क्रमशः 4:5:3 है। यदि A का चयन हो जाता है तो उसके कंपनी में

इंटरनेट ट्रेनिंग को लागू कराने की प्रायिकता 0.30 है। इसी तरह B तथा C की प्रायिकता क्रमशः 0.50 तथा 0.60 है। कंपनी के इंटरनेट ट्रेनिंग को लागू कराने की प्रायिकता क्या है? और अध्यक्ष B के इंटरनेट ट्रेडिंग का परिचय कराने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः माना कि A, B तथा C के कंपनी का अध्यक्ष चुने जाने की घटना क्रमशः A_1, A_2 तथा A_3 है तथा माना कि E कंपनी में इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करने की घटना है। अतः

$$P(A_1)=\frac{4}{4+5+3}=\frac{4}{12}, \qquad P(A_2)=\frac{5}{4+5+3}=\frac{5}{12}$$

$$P(A_3)=\frac{3}{4+5+3}=\frac{3}{12}, \qquad P(E/A_1)=0.30$$

$$P(E/A_2)=0.50, \qquad P(E/A_3)=0.60$$

दी गयी जानकारी को टेबल में रखने पर

घटना **1**	**स्वयंसिद्ध प्रायिकता** **2**	**प्रतिबंधी प्रायिकता** **3**	**संधि प्रायिकता** **2 × 3**
A_1	$P(A_1) = 4/12$	$P(E/A_1) = 0.30$	$4/12 \times 0.30$
A_2	$P(A_2) = 5/12$	$P(E/A_1) = 0.50$	$5/12 \times 0.50$
A_3	$P(A_3) = 3/12$	$P(E/A_1) = 0.60$	$34/12 \times 0.60$

1. P (कंपनी इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करता है।)

$$P(E) = P(A_1 E \text{ या } A_2 E \text{ या } A_3 E)$$
$$= P(A_1 E) + P(A_2 E) + P(A_3 E)$$
$$= P(A_1) \,.\, P(E/A_1) + P(A_2) .\, P(E/A_2) + P(A_3) \,.\, P(E/A_3)$$
$$= \frac{4}{12}\times 0.30+\frac{5}{12}\times 0.50+\frac{3}{12}\times 0.60$$
$$= \frac{55}{120}=\frac{11}{24}$$

2. आपको ($P(A_2/E)$) ज्ञात करना है अर्थात् इंटरनेट ट्रेडिंग अध्यक्ष B द्वारा लागू किया जाए।

बेज प्रमेय की सहायता से

P (अध्यक्ष B इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करे)

B की संधि प्रायि

संधि प्रायिकता व $P(A_2/E) =$

$$=\frac{\frac{5}{12}\times 0.50}{\frac{4}{12}\times 0.30+\frac{5}{12}\times 0.50+\frac{3}{12}+0.60}$$

$$= \frac{\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}}{\frac{11}{24}}=\frac{5}{11}$$

4.8 सारांश

प्रायिकता का योग प्रमेय पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए उपयोग करते हैं न कि अपारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए। प्रायिकता का गुण प्रमेय स्वतंत्र तथा आश्रित घटनाओं के लिए उपयोग करते हैं। अतः इसे सशर्त प्रायिकता में भी उपयोग कर सकते हैं। एक परख या घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करने में बर्नाली प्रमेय बहुत उपयोगी है और बेज प्रमेय का उपयोग प्रायिकता समस्याओं के समाधान में उपयोगी है। (स्वयंसिद्ध प्रायिकता और प्रतिबंधी प्रायिका की सहायता से)

4.9 शब्दावली

पारस्परिक अपवर्जी घटनाएः दो घटनाएँ उस समय परस्पर अपवर्जी होती हैं जब वे एक ही समय घटित नहीं हो सकती हैं

4.10 बोध प्रश्न

1. ....वो हैं जिसमें एक से घटित होने के दूसरे घटनाओं की प्रायिकता प्रभावित हो।
2. .... = $P(A) \times P(B)$
3. बेज प्रमेय का नामकरण ब्रिटिश गणितज्ञ .... के आधार पर किया।

4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. आश्रित घटनाएं 2. $P(AB)$ 3. थॉमस बेज

4.12 स्वपरख प्रश्न

1. 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके पान अथवा चिड़ी की रानी होने की प्रायिकता बताओ।
2. 25 छात्रों की कक्षा में प्रत्येक छात्र को 1 से 25 तक रोल नं0 दिया गया है। एक प्रश्न का उत्तर देने के लिए एक छात्र को दैव निदर्शन द्वारा चुना जाता है। चुने गये छात्र के रोल नं0 का 5 या 7 से गुणक होने की प्रायिकता बताइए?
3. एक थैले में 63 लाल, 6 सफेद, 4 नीली तथा 7 पीली गेंदें हैं। एक गेंद निकालने पर उसके सफेद या पीली होने की प्रायिकता बताओ।
4. एक साथ तीन पांसे फेंकने पर योग 17 या 18 आने की प्रायिकता बताओ।
5. एक साथ 2 पांसे फेंकने पर योग 9 या 11 आने की प्रायिकता बताओ।
6. एक पत्तों की गड्डी में से पान या राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता बताओ।
7. एक थैले में 1 से 50 से अंकित 50 गेंदें हैं। दैव निदर्शन से एक गेंद निकालने पर उसके 5 या 7 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
8. एक कांट्रैक्टर के मरम्मत कांट्रेक्ट हासिल करने की प्रायिकता 2/3 है तथा बिजली कांट्रैक्ट हासिल न कर पाने की प्रायिकता 5/9 है। कम से कम एक कांट्रैक्ट हासिल करने की प्रायिकता 4/5 है। दोनों कांट्रैक्ट हासिल करने की प्रायिकता ज्ञात करो।
9. एक छात्र दो फर्मों X तथा Y में नौकरी के लिए आवेदन करता है। X फर्म में चयनित होने की प्रायिकता 0.7 है तथा Y फर्म में 0.5। दोनों फर्मों में उसका अभ्यर्थन निरस्त होने की प्रायिकता 0.6 है। किसी एक फर्म में चयनित होने की प्रायिकता बताओ।
10. एक कक्षा के 3 पेपरों A, B तथा C की परीक्षा का परिणाम दिया गया है। यह अनुमान लगाया जाता है कि 40 प्रतिशत विद्यार्थी पेपर A में फेल हुए, 30 प्रतिशत पेपर B में फेल हुए तथा 25 प्रतिशत पेपर C में फेल हुए, 15 प्रतिशत पेपर A तथा B दोनों में फेल हुए, 12 प्रतिशत पेपर B तथा C में फेल हुए, 10 प्रतिशत पेपर A तथा C में फेल हुए तथा 3 प्रतिशत सभी पेपरों में फेल

हुए। दैव निदर्शन से चयनित छात्र के कम से कम एक पेपर में चयनित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

11. एक सिक्के को 3 बार उछालने पर 3 पट आने की प्रायिकता बताओ।
12. 3 वायुयान बाम्बे से लंदन की उड़ान भरते हैं। उनके सुरक्षित तरीके से पहुँचने के अनुकूल स्थिति 2:1, 3:1 तथा 4:1 है। उन सभी के सुरक्षित पहुँचने की प्रायिकता बताओ।
13. एक पद के 2 स्थानों पर साक्षात्कार के लिए एक पति और पत्नी आवेदन करते हैं पति के चयन की प्रायिकता 4/5 है और पत्नी की चयन प्रायिकता 3/4 है। प्रायिकता बताओ जब
    1. दोनों का चयन हो
    2. दोनों में से किसी का भी चयन न हो
    3. केवल पत्नी का चयन हो।
14. मोहन के ड्राइविंग टेस्ट पास करने की अनुकूल स्थिति 3:5 है तथा राम के लिए उसी टेस्ट को पास करने की अनुकूल स्थिति 3:2 है। दोनों के टेस्ट पास करने की प्रायिकता क्या है?
15. एक विश्वविद्यालय को सांख्यिकी का पेपर जांचने के लिए परीक्षण नियुक्त करना है। 40 परीक्षकों के पैनल में 10 महिला हैं, उनमें से 30 हिन्दी जानती हैं तथा 5 पी.एचडी. हैं। हिन्दी जानने वाली पीएचडी धारी महिला के परीक्षक चुने जाने की प्रायिकता बताओ।
16. सांख्यिकी की एक समस्या 4 विद्यार्थियों को दी जाती है। उनके समस्या हल करने का संयोग क्रमशः 1/2, 1/3, 1/4 तथा 1/5 है। समस्या के हल हो जाने की प्रायिकता बताओ।
17. A तथा B ने सायं 5 से 7 के बीच दुर्गा मंदिर पर मिलने का निर्णय लिया और साथ ही शर्त रखी कि कोई भी 30 मिनट से ज्यादा इंतजार नहीं करेगा। उनके मिलने की प्रायिकता बताओ।
18. एक लड़के को छात्रवृत्ति प्राप्त करने की प्रायिकता 0.90 है तथा लड़की के लिए प्रायिकता 0.80 है। उनमें से कम से कम एक को छात्रवृत्ति प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
19. एक पांसे को 3 बार फेंकने पर कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता बताओ।
20. एक थैले में 6 सफेद तथा 4 काली गेंदे हैं। एक के बाद एक बिना प्रतिस्थापन के 2 गेंद निकालने पर उन दोनों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
21. एक थैले में 7 लाल, 5 सफेद तथा 4 नीली गेंदे हैं। एक के बाद एक करके तीन गेंद निकाली जाती है उनके लाल, सफेद और नीले क्रम में निकाले जाने की प्रायिकता बताओ जब प्रतिस्थापन न किया गया हो।
22. एक बादशाह और एक इक्का इसी क्रम में निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो जब पहला कार्ड प्रतिस्थापित न किया गया हो।
23. एक बक्से में 1,2,3,4,5,6,7,8 तथा 10 अंकित 8 टिकट हैं। दैव निदर्शन से एक टिकट निकाल कर उसे अलग रख दिया जाता है। पुनः एक कार्ड निकाला जाता है। दोनों टिकटों पर सम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
24. एक थैले में 5 सफेद तथा 4 काली गेंदे हैं। बिना प्रतिस्थापन के 4 गेंदे निकाली जाती है। सफेद तथा काली गेंदें एक के बाद एक निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें।
25. A के सत्य बोलने की अनुकूल स्थिति 3:2 तथा B के सत्य बोलने की अनुकूल स्थिति 5:3 है। कितने प्रतिशत केसों में उनके जवाब एक दूसरे से विपरीत होंगे।
26. एक बक्से में 10 सफेद और 5 काली गेंदे हैं बिना प्रतिस्थापन के 4 गेंद निकाले जाने पर उनके क्रमशः भिन्न रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
27. दो थैले हैं। एक थैले में 4 सफेद तथा 2 काली गेंद हैं। दूसरे थैले में 5 सफेद तथा 4 काली गेंद हैं। एक थैले से दूसरे थैले में 2 गेंद विस्थापित की जाती है। दूसरे थैले से एक गेंद निकालने पर उसके सफेद होने की प्रायिकता बताओ।

28. एक पर्स में 2 चांदी तथा 4 तांबे के सिक्के हैं। एक दूसरे पर्स में 4 चांदी तथा 3 तांबे के सिक्के हैं। यदि दोनों पर्स से दैव निदर्शन द्वारा एक सिक्का निकालने पर उसके चांदी का होने की क्या प्रायिकता है।
29. A के सत्य बोलने की स्थिति 3:2 तथा B के सत्य बोलने की स्थिति 5:3 है। कितने प्रतिशत मामलों में तथ्यों को बताने पर विरोधाभास की स्थिति होगी?
30. एक जहाज के पोर्ट पर सुरक्षित पहुँचने की संभावना 9/10 है। 5 में से 4 जहाज के पोर्ट पर सुरक्षित पहुँचने की प्रायिकता बताओ।
31. एक सिक्के को 5 बार फेंकने पर 3 चित आने की प्रायिकता बताओ।
32. यदि तीन सिक्कों को एक साथ फेंका जाए तो उनके एक जैसे गिरने की प्रायिकता बताओ।
33. 8 सिक्कों को एक साथ उछालने पर 6 चित तथा 2 पट आने की प्रायिकता बताओ।
34. एक सिक्के को 5 बार फेंकने पर कम से कम एक बार चित आने की प्रायिकता बताओ।
35. एक फैक्ट्री में दो मशीन हैं। मशीन 1 कुल उत्पादन का 30 प्रतिशत तथा मशीन 2 70 प्रतिशत माल निर्मित करती है। मशीन 1 तथा मशीन 2 द्वारा क्रमशः 5 प्रतिशत तथा 1 प्रतिशत माल खराब होता है। यदि एक खराब माल चुना जाए तो उसके मशीन 1 द्वारा निर्मित होने की प्राथमिकता बताइए।
36. रूम नं0 1 में 4 लड़के तथा 2 लड़कियाँ तथा रूम नं0 2 में 4 लड़के तथा 3 लड़कियाँ हैं। दोनों में से किसी रूम की एक लड़की बहुत जोर से हसती है। उस हँसने वाली लड़की के रूम नं0 2 के होने की प्राथमिकता बताओ।
37. एक पर्स में 3 एक रूपये के सिक्के हैं तथा चार 50 पैसे के सिक्के हैं। पर्सों में से किसी पर्स से एक रूपये के एक सिक्के को निकाला जाता है। उसके पहले पर्स से निकाले जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
38. एक समान दो बक्सों में क्रमशः 4 सफेद तथा 3 लाल गेंद और 3 सफेद तथा 7 लाल गेंद हैं। एक बक्सा दैव निदर्शन द्वारा चुना जाता है और एक गेंद भी निकाली जाती है। यदि चुनी गई गेंद सफेद हो तो उसके पहले बक्से से निकाले जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।
39. एक स्टील पाइप का निर्माण करने वाली कंपनी 3 प्लांटों से प्रतिदिन क्रमशः 250, 350 तथा 400 यूनिट उत्पादन होता है। पूर्व अनुभव के अनुसार इन प्लांटों द्वारा खराब माल का उत्पादन करने का अंश क्रमशः 0.05, 0.04 तथा 0.02 है। यदि दिन भर के कुल उत्पादन से एक पाइप चुनने पर उसके खराब होने पर उसके पहली प्लांट से निर्मित होने की प्रायिकता बताओ।

4.13 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1.	14/52	2.	8/25
3.	13/20	4.	1/54
5.	1/54	6.	4/13
7.	8/25	8.	14/15
9.	0.8	10.	0.39
11.	1/8	12.	2/5
3.	3/5, 1/20, 3/20	14.	9/40
15.	3/128	16.	4/5
17.	7/16	18.	0.98
19.	91/216		
20.	1/3	21.	1/24
23.	4/663	23.	5/14
24.	5/63	25.	19/40

26	10/91	27.	19/33
28.	19/21	29.	47.5%
30.	59049/100000	31.	5/16
32.	1/4	33.	28/256
34.	31/32	35.	15/22
36.	9/17	37.	27/55
38.	40/61	39.	25/69

4.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 5 द्विपद एवं प्वायसन वितरण
(Binomial and Poisson Distribution)

5.1 प्रस्तावना
5.2 उद्देश्य
5.3 वास्तविक आवृत्ति वितरण
5.4 सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण
5.5 सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण का उपयोग
5.6 सैद्धान्तिक तथा प्रायिकता वितरण के प्रकार
5.7 द्विपद वितरण
  5.7.1 द्विपद वितरण की परिभाषा
  5.7.2 द्विपद वितरण लागू करने की दशाएं या मान्याताएं
  5.7.3 द्विपद वितरण की विशेषताएं
5.8 द्विपद वितरण का उपयोग
5.9 प्वायॅसन वितरण
  5.9.1 प्वॉयसन वितरण द्विपद वितरण के लिमिटिंग रूप में
  5.9.2 प्वॉयसन वितरण की परिभाषा
5.10 प्वॉयसन वितरण की विशेषताएं
5.11 प्वॉयसन वितरण का महत्व
5.12 प्वॉयसन वितरण का उपयोग
5.13 प्वॉयसन वितरण को फिट करना
5.14 सारांश
5.15 शब्दावली
5.16 बोध प्रश्न
5.17 बोध प्रश्नों के उत्तर
5.18 स्वपरख प्रश्न
5.19 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर
5.20 संदर्भ पुस्तकें

5.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी में विभिन्न तरह के वितरणों का अध्ययन किया जाता है। वे प्रमुखतया दो श्रणी में वर्गीकृत किये गये हैं। पहला वास्तविक आवृत्ति वितरण तथा दूसरा सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण। पहला वितरण वास्तविक Observations समंकों था घटना/प्रयोग पर आधारित है तथा जबकि दूसरा न तो वास्तविक समंकों या प्रयोग पर आधारित है और न ही उससे जनित है।

5.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- वास्तविक आवृति वितरण की व्याख्या कर सकें।
- सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण की व्याख्या कर सकें।
- द्विपद प्रायिकता वितरण की व्याख्या कर सकें।
- प्वॉयसन वितरण एवं उनके उपयोग का वर्णन कर सकें।

5.3 वास्तविक आवृत्ति वितरण

वास्तविक आवृत्ति वितरण उन आवृत्ति वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंक या प्रयोग से प्राप्त किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, किसी कक्षा के 70 विद्यार्थियों को प्राप्त हुए अंकों का वास्तविक वितरण निम्न प्रकार है :

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	5	15	20	25	5

वास्तविक आवृत्ति वितरणों का विश्लेषण सामान्यतया विभिन्न सांख्यिकीय उपकरणों जैसे औसत, अपकिरण तथा विषमता इत्यादि की सहायता से करते हैं।

5.4 सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंकों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं होते परन्तु निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त किए जा सकते हैं। सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या प्रत्याशित आवृत्ति वितरण कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि 4 सिक्कों को 160 बार टास किया जाए तथा चित आने की घटना को सफलता मानी जाए तो प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर प्रत्याशित आवृत्ति वितरण निम्न प्रकार से है :

सफलता की संख्या	प्रायिकता	प्रत्याशित आवृत्ति
(X)	(p)	Expected frequency
0	1/16	160×1/16 = 10
1	4/16	160×4/16 = 10
2	6/16	160×6/16 = 10
3	4/16	160×4/16 = 10
4	1/16	160×1/16 = 10
योग	$\Sigma p = 1$	160

अतः सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण वास्तविक अवलोकन पर आधारित नहीं है जबकि निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय निकाला जाता है।

5.5 सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के उपयोग

सैद्धान्तिक वितरण के उपयोग निम्न है :

1. दिये गये वितरण की प्रकृति के विश्लेषण में सैद्धान्तिक वितरण उपयोगी है।
2. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण से प्राप्त प्रत्याशित आवृत्तियाँ तार्किक निर्णय लेने में सहायक है।

3. वास्तविक और प्रत्याशित आवृत्तियों की तुलना करने में सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण सहायक है तथा दोनों के बीच का अंतर सार्थक है या अथवा यह अंतर सभी अन्य कारण से है।
4. भविष्यवाणी, प्रक्षेपण तथा पूर्वानुमान में सैद्धान्तिक वितरण सहायक है।
5. सैद्धान्तिक वितरण कई व्यावसायिक तथा अन्य समस्याओं को हल करने में सहायक है। प्वॉयसन वितरण गुणवत्ता नियंत्रण से संबंधित महत्वपूर्ण निर्णय लेने में सहायक है।
6. ऐसी परिस्थितियों में जब वास्तविक प्रयोग कर पाना संभव न हो अथवा वास्तविक अवलोकन प्राप्त करने में बहुत पैसा लगता हो तो अवलोकित आवृत्ति वितरण के स्थान पर सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण का उपयोग किया जाता है।

5.6 सैद्धान्तिक तथा प्रायिकता वितरण के प्रकार

सैद्धान्तिक वितरण के प्रमुख प्रकार :

अ. प्रायिकता वितरण

1. द्विपद वितरण
2. प्वॉयसन वितरण

ब. सतत प्रायिकता वितरण

1. सामान्य वितरण

इस अध्याय में आप सिर्फ द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण का अध्ययन करेंगे। सामान्य वितरण पर अगले अध्याय में चर्चा करेंगे।

5.7 द्विपद वितरण

द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है। इस वितरण की खोज स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नाली ने की। इसका प्रयोग ऐसी परिस्थितियों में करते हैं जब प्रयोग का परिणाम सफलता अथवा असफलता आए। द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जो कि दो संभावितों सफलता तथा असफलता की प्रायिकता बताता है।

5.7.1 द्विपद वितरण की परिभाषा :

द्विपद वितरण को निम्न प्रायिकता फंक्शन से परिभाषित करते हैं

$P(X = x) = {}^{n}C_{x}\ Q^{n-x}\ p^{x}$

जहाँ P =सफलता की प्रायिकता

q = असफलता की प्रायिकता= 1-p

n= परखों की संख्या

P(X = x) = n परखों में x सफलता की प्रायिकता

द्विपद वितरण के प्रायिकता फंक्शन में X के भिन्न मान –2 रखने पर 0,1,2, ...n सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता निम्न है

सफलता की संख्या (X)	**सफलता की प्रायिकता** P (X = x)
0	${}^{n}C_{0}\, q^{n-0} p^{0} = q^{n}$
1	${}^{n}C_{1}\, q^{n-1} p = nq^{n+1} p$
2	${}^{n}C_{2}\, q^{n-2} p^{2} = \frac{n(n-1)}{2\times 1} q^{n-2} p^{2}$

....	$^{n}C_{2}\, q^{n-2} p^{2} = \dfrac{n(n-1)}{2\times 1} q^{n-1} p$
X	$^{n}C_{2}\, q^{n-x} p^{x}$
N	$^{n}C_{n}\, q^{n-n} p^{n} = p^{n}$

5.7.2 द्विपद वितरण लागू करने की मान्यताएँ/परिस्थितियाँ

द्विपद वितरण का प्रयोग केवल निम्न परिस्थितियों में ही कर सकते हैं :

1. परखों की निश्चित संख्या–

यादृच्छिक प्रयोगों की पुनरावृत्ति एक निश्चित संख्या में होती है। अन्य शब्दों में परख की संख्या 'n' निश्चित एवं स्थिर होती है।

2. पारस्परिक अपवर्जी परिणाम–

प्रत्येक परख के दो पारस्परिक अपवर्जी परिणाम–सफलता या असफलता होते हैं। उदाहरण के लिए यदि एक सिक्के को उछाला जाए तो या चित आएगा या पट।

3. प्रत्येक परख में सफलता की प्रायिकता स्थिर है–

सफलता की प्रायिकता जिसे p से प्रदर्शित करते हैं, प्रत्येक परख में स्थिर होती है। दूसरे शब्दों में, सफलता की प्रायिकता प्रत्येक परख में स्थिर रहती है। उदाहरण के तौर पर, एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता बराबर रहती है। अतः $p = p(H) = 1/2$।

4. परख स्वतंत्र है–

द्विपद वितरण में परख स्वतंत्र होते हैं अर्थात् एक परख के परिणाम का अन्य परख के परिणामों पर कोई प्रभाव नहीं डालता।

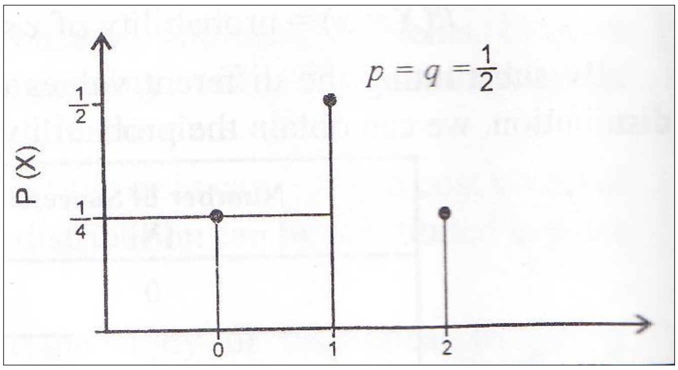
5.7.3 द्विपद वितरण की विशेषताएँ

द्विपद वितरण की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित है :

1. द्विपद वितरण एक सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण है जो कि बीजगणित के द्विपद प्रमेय पर आधारित है।
2. **असतत प्रायिकता वितरण–**द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जिसमें सफलता की संख्या 0, 1, 2, ... n पूर्ण संख्या में दी जाती है।
3. **पंक्ति आरेखः** द्विपद वितरण एक पंक्ति आरेख की सहायता से भी प्रदर्शित कर सकते हैं। सफलता की संख्या (X) को X-अक्ष पर तथा सफलता की प्रायिकता (p) को y-अक्ष पर दर्शाते हैं। निम्नलिखित पंक्ति आरेख एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त होता है।

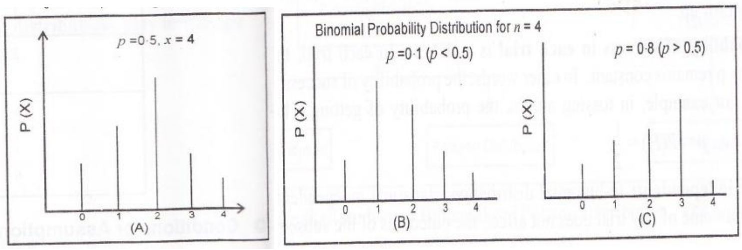
चित की संख्या (X)	**प्रायिकता** P (X = x)
0	$^{2}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
1	$^{2}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

2	${}^2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



4. **द्विपद वितरण का आकार** –द्विपद वितरण का आकार p तथा q के मान पर निर्भर करता है।

1. यदि p = q = 1/2 तो द्विपद वितरण सममित है। (symmetrical) (चित्र A देखें)
2. जब p ≠ 1/2, तब द्विपद वितरण असममित है (asymmetrical)। यदि p <q अर्थात् (p < 1/2) तो वितरण धनात्मक में विषमता पायी जाती है और p> q अर्थात् (p < 1/2) तो वितरण में ऋणात्मक विषमता पाई जाती है। चित्र (B) तथा (c) देखें



5. **प्रमुख पाचाल (Main Parameters):**

द्विपद वितरण के दो प्राचाल है n तथा p। इन दो प्राचालों की मदद से पूरा वितरण ज्ञात कर सकते हैं।

6. **द्विपद वितरण के स्थिर (Constants) :**

द्विपद वितरण के स्थिर निम्न सूत्र के आधार पर प्राप्त किया जा सकता है।

माध्यम $(X) = np$

प्रसरण = $\sigma^2 = npq$

प्रमाप विचलन = S.D. = $\sqrt{npq}$

संवेग विषमता गुणांक = $\sqrt{\beta_1} = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$

संवेग पृथुशीर्षत्व गुणांक = $\sqrt{\beta_2} = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

7. **उपयोग** :यह उन क्षेत्रों में उपयोगी है जहाँ निष्कर्ष सफलता और असफलता में वर्गीकृत किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, सिक्कों के प्रयोग पांसा फेंकने, मदों/किसी कंपनी द्वारा चीजों का निर्माण इत्यादि में उपयोगी है।

5.8 द्विपद वितरण के उपयोग

अब आप द्विपद वितरण के उपयोग का इस प्रकार अध्ययन करेंगे :

अ. द्विपद वितरण सूत्र का उपयोग :

जब किसी समस्या से संबंधित घटना के घटित होने की प्रायिकता आपको ज्ञात हो अर्थात् p तथा q का मान ज्ञान हो तो n परख में से x सफलता घटित होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

$$p\,[X = x] = {}^nC_x\ p^x\ q^{n-x}$$

उदाहरण 5.1 : एक सिक्के को तीन बार उछालें जाने पर प्रायिकता ज्ञात करें।

1. पूर्णतया 2 चित
2. कम से कम 2 चित
3. अधिकतम 2 चित

हल : माना कि चित आने की प्रायिकता = $p = 1/2$

$q =$ पट आने की प्रायिकता $= 1/2$

और $n = 3$, $p\,[X = x] = {}^nC_x\ q^{n-x}\ p^x$

(i) $p(2H) = {}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(ii) P(कम से कम 2 चित) = P(2H) + P(3H)

$$= {}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \; = 3\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(iii) P (अधिकतम 2 चित) = P(0H) + P(1H) + P(2H)

$= 1-P(3H)$

$$= 1 - {}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 1 - 1\times\frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

उदाहरण 5.2 : चार सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात करें जब

1. एक भी चित न आए
2. एक भी पट न आए
3. केवल दो चित आए

हल : माना कि चित आने की प्रायिकता = $p = 1/2$

पट आने की प्रायिकता = $q = 1-p = 1-1/2 = 1/2$

n = 4, $P(X=x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

$$(i) P(0H) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$(ii) P(0T) = P(4H)^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$(iii) P(2H) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

उदाहरण 5.3 : एक बम के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता 1/5 है। एक पुल को ध्वस्त/उड़ाने के लिए 2 बम काफी है। यदि 6 बम फेंके जाए तो पुल के ध्वस्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि p = बम के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता

q = लक्ष्य न भेदने की प्रायिकता

यहाँ पर

p = 1/5, q= 4/5 q= 1-p

n=6, $P(X=x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$

यदि दो या उससे अधिक बम पुल से टकराने पर पुल ध्वस्त हो जाएगा।

चूंकि वांछित प्रायिकता = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)

= 1- [P(0) + P(1)]

$$= \left[{}^6C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^0 + {}^6C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \right]$$

$$= 1 - \left[1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6 + 6 \frac{(4)^5}{(5)^6} \right] = 1 - \frac{4^6 + 6 \times 4^5}{5^6}$$

$$= 1 - \frac{10240}{15625} = \frac{15625 - 10240}{15625} = \frac{5385}{15625}$$

$$= 0.345$$

उदाहरण 5.4: एक कंपनी में कर्मचारियों के व्यावसायिक बीमारी से ग्रस्त होने का आपतन (incidence) 20% है। दैव दर्शन से चुने गये कर्मचारियों में से 4 या अधिक कर्मचारियों के बीमारी से ग्रस्त होने की प्रायिकता बताओ।

हल : माना कि p = कर्मचारी के बीमारी ग्रस्त होने की प्रायिकता

चूंकि p = 20/100 = 4/5

q = 1-1/5 = 4/5

n= 6

$P(X=x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$

वांछित प्रायिकता= P(4) + P(5) + P(6)

$$= {}^6C_4\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^4 + {}^6C_5\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^5 + {}^6C_6\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$= 15\times\frac{16}{15625} + 6\times\frac{4}{15625} + \frac{1}{15625}$$

$$= \frac{240+24+1}{15625} = \frac{265}{15625} = \frac{53}{3125}$$

$$= 0.01696$$

उदाहरण 5.5 : 1000 परिवारों में जिसमें प्रत्येक के 4 बच्चे हों तो

1. कम से कम एक लड़का
2. अधिकतम 2 लड़की
3. होने का प्रतिशत ज्ञात करो। मनो लड़का तथा लड़की की बराबर प्रायिकता हो।

हल : माना कि p = लड़का की प्रायिकता= 1/2

q = लड़की की प्रायिकता = 1/2

n = 4, N= 1000

1. कम से कम एक लड़का

p (कम से कम एक लड़का) = P(1B) + P(2B)+P(3B)+P(4B)

= 1-P(0B)

$$= 1 - {}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

कम से कम एक लड़के वाले परिवारों का प्रतिशत = 15/16 ×100 = 93.75%

2. अधिकतम 2 लड़की = P(0G) + P(1G) + P(2G)

= P(4B) + P(3B) + P(2B)

$$= {}^4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

ऐसे परिवारों का प्रतिशत= 11/16 ×100= 68.75%

उदाहरण 5.6 : एक जोड़े पांसे को 7 बार फेंका जाए यदि लोग 7 आने को सफलता माना जाए तो प्रायिकता ज्ञात करें जब

1. एक भी सफलता न हो
2. 6 सफलता हो
3. कम से कम 6 सफलता हो।

36 परिणामों में से योग 7 निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)

हलः माना कि p = योग प्राप्त करने की प्रायिकता = 6/36 = 1/6

$\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$= 7$

$P(X = x) = {}^n C_x \quad q^{n-x} \quad p^x$

1. P(o सफलता) = ${}^7C_0 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \left(\frac{1}{6}\right)^0 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$

2. सफलता $= {}^7 C_6 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^6 = 35\left(\frac{5}{6}\right)^7$

3. कम से कम 6 सफलता = P(6) + P(7)

$$= {}^7 C_6 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^6 + {}^7 C_7 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^7$$

$$= 35\left(\frac{1}{6}\right)^7 + \left(\frac{1}{6}\right)^7$$

$$= 36.\left(\frac{1}{6}\right)^7$$

ब. X तथा σ से n, p और q प्राप्त करना

यदि आपके पास द्विपद वितरण का माध्य (X) तथा प्रसरण (σ2) या प्रमाप विचलन (σ) का मान ज्ञात हो आप n, p तथा q का मान ज्ञात कर सकते हैं। निम्नलिखित उदाहरण इस प्रकिया को समझाएगा।

उदाहरण 5.7 : एक द्विपद वितरण का माध्य 20 तथा प्रमाप विचलन 4 है। n, p तथा q का मान ज्ञात करो।

हल : द्विपद वितरण में, माध्य = np

प्रमाप विचलन, SD = √npq

$$X = np = 20 \qquad (1)$$

$$= \sigma = \sqrt{npq} = 4 \qquad (2)$$

दोनों तरह वर्ग करने पर,

$\Rightarrow$ σ= npq = 16 (3)

3. को 2 से विभाजित करने पर

$$\frac{npq}{np} = \frac{16}{20}$$

$\Rightarrow$ q = 16/20 = 4/5

$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

p का मान 1. में रखने पर

$$n \times \frac{1}{5} = 20$$
$$= n = 100$$

अतः n = 100 , p = 1/5 तथा q= 4/5

उदाहरण 5.8: एक द्विपद वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो जब

P(X=3) = 16, P(X = 7) तथा n = 10

हल :

$$P(X=3) = {}^{10}C_3 q^{10-3} p^3 = {}^{10}C_3 q^7 p^3$$
$$P(X=7) = {}^{10}C_7 q^{10-7} p^7 = {}^{10}C_7 q^3 p^7$$

प्रश्नानुसार

$${}^{10}C_3 q^7 p^3 = {}^{10}C_7 q^3 p^7$$

$\Rightarrow q^7 p^3 = 16p^3 q^7$ $({}^{10}C_3 = {}^{10}C_7)$

$\Rightarrow q^4 = 16p^4$

$\Rightarrow q^4 = (2p)^4$

$\Rightarrow q = 2p$

द्विपद वितरण में

$p+q = 1 \Rightarrow p+2p =1 \Rightarrow p = 1/3$

$\therefore$ q = 1-p = 1- 1/3 = 2/3

$\therefore$ माध्य = NP = 10/3

प्रमाप विचलन, $SD = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{10}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{20}}{3}$

उदाहरण 5.9 : एक द्विपद वितरण जिसका माध्य 6 तथा प्रसरण 2 हो तो 5 सफलता आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : द्विपद वितरण में

माध्य = np = 6 (1)

प्रसरण = npq = 2 (2)

2. को 1. सये विभाजित करने पर

$$\frac{npq}{np} = \frac{2}{6}$$
$$\therefore q = \frac{1}{3}$$
$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

p का मान 1. में रखने पर

$$n \times \frac{2}{3} = 6$$
$$\Rightarrow n = 9$$

यहाँ पर, n = 9, p= 2/3, q 1/3

अतः $P(X=5) = {}^9C^5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^5$

$$=126\times\frac{32}{19683}=0.2048$$

स. X तथा σ का मान ज्ञात करना जब n, p तथा q का मान ज्ञात हो।

उदाहरण 5.10: यदि दोषयुक्त बोल्ट की प्रायिकता 0.1 हो तो 1. माध्य तािा 2. प्रमाप विचलन 500 में से दोषयुक्त बोल्ट के वितरण का 1. माध्य तथा 2. प्रमाप विचलन ज्ञात करें। विषमता तथा पृथुशीर्षत्व गुणांक प्राप्त करें।

हल : दिया गया है,

$p = 0.1;\ q = 1- 0.1 = 0.9\ \ n= 500$

1. माध्य $=np=500\times0.1=500\times\frac{1}{10}=50$

2. प्रमाप विचलन $=\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{500\times0.1\times0.9}$

3. विषमता गुणांक $=\left(\sqrt{\beta_1}\right)=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}=\frac{0.9-0.1}{500\times0.1\times0.9}$

$$=\frac{0.8}{6.70}=0.119$$

4. पृथुशीर्षत्व गुणांक $=\left(\sqrt{\beta_2}\right)=3+\frac{1-6pq}{npq}$

$$=3+\frac{1-6(0.1)(0.9)}{500\times0.1\times0.9}$$
$$=3.010$$

उदाहरण 5.11: एक सिक्के को 100 बार टॉस करने पर चित आने की संख्या के वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

हल: $n= 100,\ P(H) = p= 1/2,\ \ q = 1/2$

$\therefore$ माध्य $= np = 100 \times 1/2 = 50$

प्रमाप विचलन $= =\sqrt{npq}=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times}\frac{1}{2}=\sqrt{25}=5$

द. द्विपद वितरण को फिट करना–

वास्तविक डाटा/अवलोकन पर द्विपद वितरण निम्नलिखित प्रक्रिया से फिट करते हैं।

1. दी गई जानकारी के आधार पर p तथा q का मान ज्ञात करो।
2. n तथा N का मान नोट करो, जहां n एक प्रयोग के परखों की संख्या है तथा N सभी प्रयोगों के सभी परखों की कुल संख्या है।
3. दिये गये प्रयोग से आने वाले सभी संभावित सफलताओं की संख्या की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. इन प्रायिकताओं को N से गुणा करने पर आप वांछित प्रत्याशित आवृत्ति प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 5.12 : 4 सिक्कों को 160 बार उछालने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

चित की संख्या	0	1	2	3	4
आवृत्ति	17	52	54	31	6

सिक्कों को निष्पक्ष मानते हुए द्विपद वितरण फिट कीजिए।

हल : माना कि सिक्के निष्पक्ष है तो चित आने की प्रायिकता (p) तथा पट आने की प्रायिकता (q) 1/2 तथा 1/2 है।

यदि $n = 4, N = 160$

अतः 0,1,2,3,4 चित आने की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात करते हैं

$P(X=x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करने के लिए प्रायिकता को N से गुणा करो।

प्रत्याशित प्रायिकता इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

चित की संख्यां (n)	प्रत्याशित आवृत्ति $N\,{}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$
0	$160 \times {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 10$
1	$160 \times {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 40$
2	$160 \times {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 60$
3	$160 \times {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 40$
4	$160 \times {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10$

उदाहरण 5.13 : 4 बच्चों वाले 800 परिवारों के एक सर्वे में निम्नलिखित वितरण प्राप्त हुआ?

लड़कों की संख्या	0	1	2	3	4
परिवारों की संख्या	42	178	290	226	64

एक लड़का तथा लड़की के जन्म की प्रायिकता बराबर होने की परिकल्पना के आधार पर द्विपद वितरण फिट करो।

हल : माना कि लड़का तथा लड़की के जन्म की प्रायिकता बराबर है तो लड़के के जन्म की प्रायिकता, $p = 1/2$

$q = 1- 1/2 = 1/2$

यहाँ पर $n = ,\ N= 800$

0,1,2,3, तथा 4 लड़के होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P(X-x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$$

P(x) को N से गुणा करने पर प्रत्याशित आवृत्ति प्राप्त होती है। अर्थात् N. P(x)

ये इस प्रकार दी जाती है:

लड़कों की संख्या (n)	प्रत्याशित आवृत्ति $N\,{}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$

0	$800 \times {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 800 \times \frac{1}{16} = 50$
1	$800 \times {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 800 \times \frac{4}{16} = 200$
2	$800 \times {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 800 \times \frac{6}{16} = 300$
3	$800 \times {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 800 \times \frac{4}{16} = 200$
4	$800 \times {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 800 \times \frac{1}{16} = 50$

5.9 प्वॉयसन वितरण

प्वॉयसन वितरण एक असतत् प्रायिकता वितरण है और सांख्यिकीय कार्यों में इसका बहुत प्रयोग होता है। 1837 में फ्रेंच गणितज्ञ डा0 सिमन डेनिस प्वॉयसन ने इस वितरण का विकास किया तथा उनके नाम पर इस वितरण का नाम रखा गया। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग उन स्थितियों में करते हैं जब किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत छोटी हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ हो। उदाहरण के लिए, एक निर्माण करने वाली कंपनी में दोषयुक्त मद की प्रायिकता बहुत कम है, एक वर्ष में भूकंप आने की प्रायिकता बहुत कम है, रोड/रास्ता/सड़क पर होने वाले दुर्घटना की प्रायिकता बहुत कम है। ये सभी ऐसी घटनाओं के उदाहरण है जब घटना के होने की प्रायिकता बहुत कम है।

5.9.1 द्विपद वितरण का सीमित रूप में प्वॉयसन वितरण

निम्नलिखित परिस्थितियों में द्विपद वितरण के सीमित रूप में प्वॉयसन वितरण को प्राप्त किया जाता है :

1. n परखों की संख्या अंतत रूप से बड़ी हो, अर्थात् $n \to \infty$
2. p, सफलता की प्रायिकता बहुत कम हो तथा q असफलता की प्रायिकता बहुत अधिक हो अर्थात् $p \to 0,\ q \to 1$
3. सफलता की औसत संख्या (np) एक धनात्मक निश्चित संख्या (m) के बराबर है अर्थात् np = m जहाँ m वितरण का प्राचाल (parameter) है।

5.9.2 प्वॉयसन वितरण की परिभाषा :

द्विपद समीकरण से

$$^nC_x = \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$$

चूंकि $np = m \Rightarrow p = m/n$ अतः $q = 1 - m/n$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{n^x \, x!} n^x p^x q^{n-x}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).......\left(1-\frac{x-1}{n}\right) q^{n-x} \frac{(np)^x}{x!}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).......\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x} \frac{m^x}{x!}$$

जब $n \to \infty = e^{-m} \dfrac{m^x}{x!} = e^{-m} \dfrac{m^x}{x!}$

प्वॉयसन वितरण निम्नलिखित प्रायिकता फंक्शन से परिभाषित और प्रदर्शित किया जाता है

$$P(X = x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

जहाँ P(X= x) = x सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता

m = np = वितरण का प्राचाल

e = 2.7183

उपरोक्त प्रायिकता वितरण में के विभिन्न मान रखने पर सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं :

सफलता की संख्या (X)	प्रत्याशित P (x)
0	$e^{-m} \dfrac{m^0}{0!} = e^{-m}$
1	$e^{-m} \dfrac{m^1}{0!} = me^{-m}$
2	$e^{-m} \dfrac{m^2}{2!} = \dfrac{m^2}{2} e^{-m}$
3	$e^{-m} \dfrac{m^3}{3!} = \dfrac{m^3}{3} e^{-m}$
...	
x	$e^{-m} \dfrac{m^x}{x!}$

5.10 प्वॉयसन वितरण की विशेषताएँ

प्वॉयसन वितरण की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित हैं :

1. असतत प्रायिकता वितरण :

प्वॉयसन वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जहाँ पर सफलताओं की संख्या पूर्ण संख्या जैसे 0,1,2............. इत्यादि के रूप में हैं।

2. p तथा q का मान :

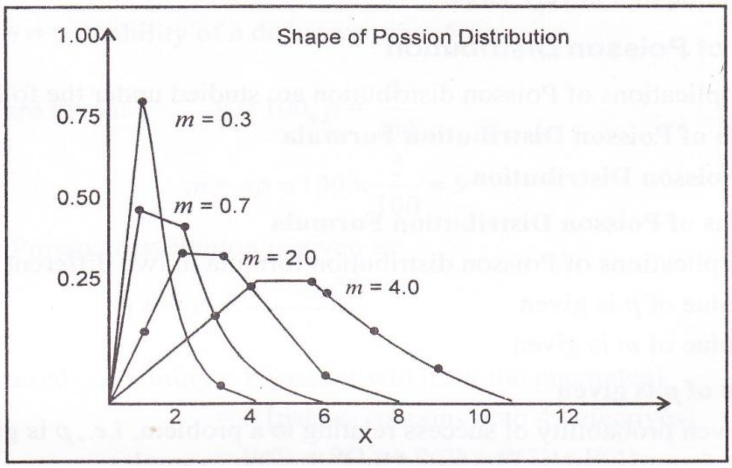
प्वॉयसन वितरण उन स्थितियों में प्रयोग करते हैं जहाँ घटना के घटित होने की प्रायिकता करते हैं जहाँ है अर्थात् $(p \to o)$ तथा घटना के घटित न होने की प्रायिकता बहुत अधिक हो अर्थात् $(q \to o)$ तथा n का मान अनन्त रूप से बड़ा हो।

3. **प्रमुख प्राचाल :**

इसका बस एक ही प्राचाल है और उसका मान np के बराबर है अर्थात् $m = np$। इस प्राचाल की सहायता से पूरा वितरण जाना जा सकता है।

4. **प्वॉयसन वितरण का आकार :**

प्वॉयसन वितरण हमेशा धनात्मक विषम है लेकिन m का मान बढ़ने से विषमता घटती है। m का मान बढ़ाने पर वितरण दायीं और खिसकता है और विषमता स्तर गिरता है। जो कि निम्नलिखित चित्र द्वारा दर्शाया जाता है :



5. **प्वॉयसन वितरण के स्थिर :**

प्वॉयसन वितरण के निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

माध्य $= X = np$

विषमता गुणांक संवेग $= \sqrt{\beta} = 1/\sqrt{m}$

प्रसरण $= \sigma^2 = m$

प्रमाप विचलन $= SD = \sigma = \sqrt{m}$

पृथुशीर्षत्व गुणांक संवेग $= \beta_2 = 3 + 1/m$

6. **माध्य तथा प्रसरण की बराबरी :**

प्वॉयसन वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसका माध्य और प्रसरण बराबर है अर्थात् $X = \sigma^2$ अथवा माध्य प्रसरण।

5.11 प्वॉसन वितरण की महत्ता

प्वॉयसन वितरण निम्नलिखित क्षेत्रों में बहुतायत उपयोग होता है :

1. इसका प्रयोग सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण में दोषयुक्त मदों की गणना करना।
2. बायोलाजी में, बैक्टीरिया की संख्या की गणना करना।
3. इन्श्योरेन्स में, कारणों की गणना में समस्या।
4. एक टाइप किए गए पेज पर टाइपिंग के दौरान होने की गलतियों की संख्या की गणना।
5. एक टाउन में आने वाली फोन काल की संख्या।
6. एक ब्लेड बनाने वाली कंपनी के एक लॉट में दोषयुक्त ब्लेड की संख्या की गणना करना।
7. एक टाउन में एक क्रासिंग पर रोड दुर्घटना में होने वाली मौतों की संख्या।

8. एक वर्ष में लर्क्स प्वाइंट पर होने वाली आत्महत्या की संख्या।

साधारणतया प्वॉयसन वितरण का उपयोग दुर्लभ घटनाओं में होता है जहाँ सफलता की प्रायिकता (p) बहुत कम है और n का मान बहुत अधिक है।

5.12 प्वॉयसन वितरण के उपयोग

प्वॉयसन वितरण के उपयोग का अध्ययन इस प्रकार है :

अ. प्वॉयसन वितरण सूत्र का प्रयोग :

आप प्वॉयसन वितरण सूत्र के उपयोग का अध्ययन निम्न दो अलग तरह की परिस्थितियों में कर सकते हैं : 1. जब p का मान ज्ञात हो तथा 2. जब m का मान ज्ञात हो।

1. जब p का मान ज्ञात हो :

उदाहरण 5.14 : यह ज्ञात है कि एक पेंच का निर्माण करने वाली कंपनी में 2% पेंच दोषयुक्त निर्मित होते हैं। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करते हुए 100 पेंच वाले एक पैकेट में 1. एक भी दोषयुक्त पेंच न हो 2. एक दोषयुक्त पेंच हो तथा 3. दो या उससे अधिक दोषयुक्त पेंच होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (दिया है = 0.135)

हल : माना कि p = पेंच के दोषयुक्त होने की प्रायिकता = 2% = 2/100

p = 2/100 ; n = 100

चूंकि m = np = 100 × 2/100 = 2

प्वॉयसन वितरण इस प्रकार

$$P(X=x) = P(X=0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!}$$

$$= e^{-2} = 0.135 \qquad (e^{-2} = 0.135)$$

2. $$P\text{ (एक दोषयुक्त)} = P(X=1) = \frac{e^{-2}2^1}{1!}$$

$$= e^{-2} \times 2 = (0.135) \times 2 = 0.270$$

3. P(दो या उससे अधिक दोषयुक्त) = 1-[P(0) + P(1)]

= 1-[0.135 + 0.270] = 1-0.405 = 0.595

उदाहरण 5.15 : एक पिन का निर्माण करने वाला जानता है कि औसतन उसके 5% उत्पाद दोषयुक्त है। वह 100 पिन का पैकेट बनाकर उन्हें बेचता है और विश्वास दिलाता है कि पैकेट में 4 से अधिक दोषयुक्त पिन नहीं है। पैकेट के विश्वसनीय गुणवत्ता पर खरा उतरने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि p = दोषयुक्त पिन की प्रायिकता = 5% = 5/100

दिया है n = 100, p= 5/100

चूंकि m = np = 100 × 5/100 = 5

प्वॉयसन वितरण

$$P(X = x) = \frac{e^{-m}m^x}{x!}$$

वांछित प्रायिकता = P[पैकेट गुणवत्ता पर खरा उतरे]

= P[पैकेट में अधिकतम 4 दोषयुक्त]

= P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)

$$= e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} + e^{-5}\frac{5^3}{3!} + e^{-5}\frac{5^4}{4!}$$

$$= e^{-5}\left(\frac{5}{1} + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24}\right)$$

$$= 0.0067 \times 65.374 = 0.438$$

2. जब m का मान ज्ञात हो

उदाहरण 5.16 : दोपहर 2 से 4 के बीच किसी कंपनी के स्विच बोर्ड पर औसतन 2.5 फोन काल प्रति मिनट आता है। प्रायिकता ज्ञात करो जब एक मिनट में 1. एक भी फोन कॉल न आए 2. पूर्णतया 3 काल 3. कम से कम 2 काल।

(दिया है $e^{-2} = 0.1353$, $e^{-5} = 0.6065$)

हल : यह प्वॉयसन वितरण की समस्या है।

$P(X=x)\ e^{-m}\ m^x / x!$ where $X = 1,2,3.....$

औसतन फोन काल की संख्या = $X = m = 2.5$

प्वॉयसन वितरण $P(X=x) = e^{-m}\ m^x / x!$

1. P(एक भी फोन काल न आए) = $P(x=0)$

$= e^{-2.5}\ (2.5)^0 / 0! \quad = e^{-2.5}$

$= e^{-2}\ .e^{-0.5} \quad (e^{-2} = 0.1353,\ e^{-0.5} = 0.6065)$

$= 0.1353 \times 0.6065 = 0.0821$

अतः एक मिनट में एक भी फोन काल न आने की प्रायिकता = 0.0821

2. पूर्णतया 3 काल = $P(X=3) = e^{-2.5}\ (2.5)^3 / 3!$

$= (0.0821)\ (2.5)^3 / 3\times2\times1 = 0.2138$

3. P(कम से कम 2 काल आए)= $1-[P(X=0) + P(X=1)]$

$= 1- [e^{-2.5} +(2.5)\ e^{-2.5}]$

$= 1- [e^{-2.5}\ [1+2.5] = 1- [(0.0821)\ (3.5)]$

$= 1- 0.28735 = 0.71265$

उदाहरण 5.17 : पूर्व अनुभव के आधार पर ज्ञात है कि एक कंपनी में औसतन औद्योगिक दुर्घटना की संख्या प्रति मासिक 4 है। एक महीने में 4 से कम दुर्घटना होने की प्रायिकता ज्ञात करो। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करके उत्तर की व्याख्या करो। (दिया गया है $e^{-4} = 0.0183$)

हल : औसत दुर्घटना की संख्या = $X = m= 4$

$P(X) = e^{-m}\ m^x/x!$

$P(0) = e^{-m}\ m^0 / 0! = e^{-m} = e^{-4}$

$P(1) = e^{-m}\ m^1 / 1! = e^{-m}.m = 4e^{-4}$

$P(2) = e^{-m}\ m^2 / 2! = m^2/ 2!\ e^{-m} = (4)^2/2!.\ e^{-4}$

$P(3) = e^{-m}\ m^3 / 3! = m^3/ 3!\ e^{-m} = (4)^3/3!.\ e^{-4}$

4 से कम दुर्घटना होने की प्रायिकता

$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$= e^{-4}\ [1 + 4 + 4^2/2! + 4^3 /3!]$

$= 0.0183\ [1 + 4 + 8 + 10.67] \qquad (e^{-4}= 0.0183)$

$= 0.0183 \times 23.67 = 0.4332$

अतः 4 से कम दुर्घटना की प्रायिकता 0.4332 या 43.32% ।

उदाहरण 5.18 : एक प्वॉयसन प्रायिकता वितरण जिसमें घटना के घटित होने का औसत प्रति समयकाल 2 है।

1. उचित प्वॉयसन प्रायिकता फंक्शन लिखें।
2. 3 समयकाल में औसतन घटित होने की प्रायिकता बताओ।
3. 3 समयकाल में 6 घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : 1 समयकाल में औसतन घटित होने की संख्या = m = 2

1. प्वॉयसन प्रायिकता फंक्शन = $P(X=x) = (e^{-2}\, 2^{X})/ X!$
2. 3 समयकाल में औसत घटनाओं की संख्या = 2×3= 6
3. $P[X=6] = e^{-6}\,(6)^6 / 6! = 0.1575$

5.13 प्वॉयसन वितरण को फिट करना

अवलोकित डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं:

1. सर्वप्रथम वास्तविक आवृत्ति से माध्य (X) की गणना निम्न सूत्र से करें।

   $X = \Sigma fx / n$

   आप माध्य के इस मान को प्वॉयसन वितरण का प्राचाल की तरह उपयोग करेंगे अर्थात् $x = m$
2. e^{-m} का मान प्राप्त करें। यदि e^{-m} का मान प्रश्न में न दिया गया हो तो निम्न सूत्र से ज्ञात करें :

   e^{-m} = reciprocal [antilog (m ×0.4343)]
3. 0,1,2,3, या x सफलता की प्रायिकता निम्न प्वॉयसन प्रायिकता वितरण सूत्र से गणना करते हैं।

   $P(X=x) = e^{-m}\, m^X /x!$
4. प्रत्याशित या सैद्धान्तिक आवृत्ति प्राप्त करने के लिए उपर निकाली गई प्रायिकता को N (कुल आवृत्ति) आप मध्य से गुणा करें। अतः

सफलता की संख्या X	प्रायिकता P(X)	प्रत्याशित प्रायिकता fe (X)
0	$P(0) = e^{-m}\frac{m0}{0!} = e^{-m}$	$N.P(0) = Ne^{-m}$
1	$P(1) = e^{-m}\frac{m1}{1!} = me^{-m}$	$N.P(1) = Ne^{-m}.m$
2	$P(2) = e^{-m}\frac{m^2}{2!} = e^{-m}\frac{m^2}{2!}$	$N.P(2) = Ne^{-m}\frac{m^2}{2!}$
...		
x	$P(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$	$N.P(x) = Ne^{-m}\frac{m^x}{x!}$

वैकल्पिक प्रक्रिया :

प्रत्याशित आवृत्तियों को निम्न प्रकार से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं :

1. सर्वप्रथम गणना करें $Fe(0) = N.\, P(0) = N.\, e^{-m}$
2. अन्य प्रत्याशित आवृत्तियों को निम्न प्रकार से गणना कर सकते हैं :

   $fe(0) = N.\, P(0) = N\, e^{-m}$

   $fe(1) = m/1 .\, fe(0)$

$fe(2) = m/2\ fe(1)$

$fe(3) = m/3\ fe(2)$

$fe(4) = m/4\ fe(3)$ और इसी तरह

उदाहरण 5.19 : निम्न डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करें तथा सैद्धान्तिक आवृत्ति की गणना करें।

मृत्यु	0	1	2	3	4
आवृत्ति	109	65	22	3	1

उपरी वितरण का माध्य तथा प्रसरण का मान ज्ञात करें (दिया है $e^{-0.61} = 0.5432$)

हल : प्वॉयसन वितरण को फिट करना।

मृत्यु (x)	आवृत्ति (f)	fx
0	109	0
1	65	65
2	22	44
3	3	9
4	1	4
	$\Sigma f = 200$	$\Sigma fx = 122$

$X = \Sigma fx / \Sigma f = 122/200 = 0.61$

$m = 0.61$

अब आप $e^{-0.61}$ का मान या तो तालिका से या निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं :

$e^{-m} = \text{Rec. [Antilog } (m \times 0.4343]$

$m = 0.61$ का मान रखने पर,

$e^{-0.61} = \text{Rec [Antilog } (0.61 \times 0.4343]$

$= \text{Rec [Antilog } (026492]$

$= \text{Rec } [1.841] = 0.5432$

अब $P(0) = e^{-0.61} . (0.61)^0 /0!$

$= e^{-0.61} = 0.5432$

प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना :

$fe(0) = N\ P(0) = 200 \times (0.5432) = 108.64 \approx 109$

$fe(1) = fe(0) \times m/1 = 108.64 \times 0.61/1 = 66.22 \approx 66$

$fe(2) = fe(1) \times m/2 = 66.27 \times 0.61/2 = 20.21 \approx 20$

$fe(3) = fe(2) \times m/3 = 20.21 \times 0.61/3 = 4.11 \approx 4$

$fe(4) = fe(3) \times m/4 = 4 \times 0.61/4 = 0.61 \approx 1$

अतः

X	0	1	2	3	4
fe	109	66	20	4	1

माध्यम $= X =$ प्रसरण $\sigma^2 = 0.61$

उदाहरण 5.19 : एक पुस्तक के प्रथम 50 पन्नों की प्रूफरीडिंग के समय औसतन प्रति 5 पन्ना 3 गलती/त्रुटि पाई जाती है। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 1000 पन्नों वाली पुस्तक में 0,1,2,3,..... त्रुटियों वाले पन्नों की संख्या ज्ञात करें।

हल : त्रुटियों की औसत संख्या = m = 3/5 = 0.6

जहाँ $P(0) = e - m\dfrac{m^0}{0!} = e^{-0.6}.\dfrac{(0.6)^0}{0!} = e^{-0.6} = 0.5488$

$$P(1) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^1}{1!} = \frac{0.5488 \times 0.6}{1} = 0.32928$$

$$P(2) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^2}{2!} = \frac{0.5488 \times 0.36}{2 \times 1} = 0.098784$$

$$P(3) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^3}{3!} = \frac{0.5488 \times 0.216}{3 \times 2 \times 1} = 0.0197568$$

$$P(x > 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$= 1 - [0.5488 + 0.32928 + 0.098784 + 0.197568]$$

$$= 1 - [0.9966208]$$

$$= 0.0033792$$

प्वॉयसन वितरण को फिट करना

X	P(X)	fe(x) = n. P(x)
0	0.5488	1000 × 0.5488 = 548.8 ≈ 549
1	0.32928	1000 × 0.32928 = 329.28 ≈ 329
2	0.098784	1000 × 0.098784 = 98.74 ≈ 98
3	0.0197568	1000 × 0.0197568 = 19.7568 ≈ 20
3 से अधिक	0.0033792	1000 × 0.0033792 = 3.37 ≈ 3
		n = 1000

5.14 सारांश

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं किया जाता बल्कि निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त करते हैं। सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या प्रत्याशित आवृत्ति वितरण कहते हैं। सैद्धान्तिक वितरण के प्रमुख प्रकार हैं 1. द्विपद वितरण 2. प्वॉयसन वितरण तथा 3. सामान्य वितरण। द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है बर्नाली ने की। इसका प्रयोग ऐसी स्थितियों में करते हैं जब प्रयोग दो संभावितों सफलता और असफलता में निष्कर्षित हो। प्वॉयसन वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है और फ्रेंच गणितज्ञ डॉ0 सिमन डेनिस प्वॉयसन ने इसका विकास किया। प्वॉयसन वितरण को उन परिस्थितियों में प्रयोग करते हैं जब घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत म हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ है।

5.15 शब्दावली

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण: उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंकों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं होते परन्तु निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त किए जा सकते हैं।

5.16 बोध प्रश्न

1. .... उन आवृत्ति वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंक या प्रयोग से प्राप्त किये जाते हैं।
2. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या ....कहते हैं।
3. द्विपद वितरण की खोज स्विस गणितज्ञ ....ने की।
4. .... का प्रयोग उन स्थितियों में करते हैं जब किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत छोटी हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ हो।

5.17 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.	वास्तविक आवृत्ति वितरण	2.	प्रत्याशित आवृत्ति वितरण
3.	जेम्स बर्नाली	4.	प्वॉयसन वितरण

5.18 स्वपरख प्रश्न

1. एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। चार या उससे अधिक चित आने की प्रायिकता ज्ञात करें।
2. एक पांसा को 4 बार फेंका जाता है। 2 से अधिक आने पर उसे सफलता माना जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो।
   अ. पूर्णतया 1 सफलता
   ब. 3 से कम सफलता
   स. 3 से अधिक सफलता
3. 5 स्वतंत्र परख वाले द्विपद वितरण में 1 तथा 2 सफलता की प्रायिकता 0.4096 तथा 0.2048 हैं वितरण के प्राचाल p का मान ज्ञात करो।
4. एक बर्फवाली फैक्टरी में जाड़े में कर्मचारियेां के सर्दी होने का संवेग 20 प्रतिशत है। 5 में से 4 या अधिक मजदूरों के सर्दी होने की प्रायिकता बताओ।
5. एक प्रयोग जितनी बार फेल होता है उसके दुगुनी बार सफल होता है। 6 परखों में कम से कम 5 सफलता की प्रायिकता बताओ।
6. द्विपद वितरण का माध्य और प्रमाप विचलन क्रमशः 2 तथा 1 हैं n, p तथा q का मान ज्ञात करो।
7. द्विपद वितरण जिसका माध्य 2 तथा प्रसरण 3/2 हो उसके 3 सफलता की प्रायिकता ज्ञात करो।
8. एक असतत दैव चर (random variable) का माध्य 6 तथा प्रसरण 2 है। यदि यह द्विपद वितरण है तो $5 \leq \times \leq 7$ की प्रायिकता ज्ञात करो।
9. यदि दोषयुक्त बोल्ट की प्रायिकता 10 प्रतिशत है। ज्ञात करो 1. माध्य 2. प्रमाप विचलन 3. संवेग विषमता गुणांक 4. संवेग पृथुशीर्षत्व गुणांक कुल 400 बोल्ट में दोषयुक्त बोल्ट का वितरण ज्ञात करो।
10. एक निष्पक्ष सिक्क को दस बार उछाला जाता है। इसका माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।
11. 5 पांसों को एक 96 बार फेंका जाता है। 4,5 या 6 आने वाले पांसों की संख्या ही प्रयोग है।

4,5,6 आने वाले पांसों की संख्या	0	1	2	3	4	5
आवृत्ति	2	8	22	35	24	5

द्विपद वितरण फिट करो तथा प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करो।

12. चार सिक्कों को 200 बार उछाला जाता है। उछालने पर 0,1,2,3 तथा 4 चित इस प्रकार पाए गए :

चित की संख्या	0	1	2	3	4
आवृत्ति	15	35	90	40	20

13. एक मशीन द्वारा निर्मित बोल्ट का परीक्षण 7 बोल्ट के निदर्शन लेकर किया गया। कुल 128 निदर्श परीक्षण के लिए गए। 128 निदर्शों में पाए गए दोषयुक्त बोल्ट की संख्या इस प्रकार है।

दोषयुक्त बोल्ट की संख्या 128 निदर्श में	0	1	2	3	4	5	6	7
निदर्श की संख्या	7	6	19	35	30	23	7	1

द्विपद वितरण फिट करो और प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो (यदि मशीन के दोषयुक्त होने की प्रायिकता 1/2 है)। फिट किए गए वितरण का माध्य और प्रसरण ज्ञात करो।

14. 5 सिक्कों को 128 बार उछाला जाता है। 3 या अधिक चित आने की प्रायिकता बताओ और 3 या अधिक चित की प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करो।

15. दिया गया है एक बल्ब बनाने वाली कंपनी तैयार बल्क में 3 प्रतिशत दोषयुक्त बल्क बनाती है। प्वॉयसन वितरण की सहायता हसे 100 बल्ब वाले निदर्श में प्रायिकता ज्ञात करो जब
अ. एक भी दोषयुक्त न हो
ब. पूर्णतया एक दोषयुक्त हो $(e^{-3} = 0.04979)$

16. 200 बल्ब वाले बक्से में 5 बल्क के दोषयुक्त होने की प्रायिकता बताओ जब यह दिया गया हो कि 2 प्रतिशत बल्क दोषयुक्त हैं। (आप प्वॉयसन वितरण का उपयोग कर सकते हैं) $(e^{-4} = 0.0183)$

17. माना कि 80 जन्मों में एक जन्म जुड़वा होता है। एक दिन में 30 जन्मों पर 2 या अधिक जुड़वा जन्म की प्रायिकता ज्ञात करो।

18. पिन का निर्माण करने जानता है औसतन 2 प्रतिशत पिन दोषयुक्त हैं वह 200 पिन एक बक्से में बेचता है और 3 से अधिक पिन दोषयुक्त न होने की गारंटी देता है। बक्से के गारंटी पर खरा न उतरने की प्रायिकता ज्ञात करो। $(e^{-4} = 0.0183)$

19. ब्लेड का निर्माण करने वाली एक कंपनी के 1/5 भाग दोषयुक्त ब्लेड का निर्माण करती है।

10 ब्लेड के सेट के रूप में पैकेट बेचा जाता है। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 100000 पैकेट में एक भी दोषयुक्त न हो, सिर्फ एक दोषयुक्त और दो दोषयुक्त ब्लेड होने की सन्निकट संख्या ज्ञात करो। $(e^{-0.02} = 0.9802)$

20. माना कि एक निर्मित उत्पाद के परीक्षण में प्रति यूनिट उत्पाद में 4 दोषयुक्त उत्पाद पाए जाते हैं। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 2 दोषयुक्त उत्पाद पाए जाने की प्रायिकता ज्ञात करो। $(e^{4} = 0.0183)$

21. एक वर्ष में टैक्सी ड्राइवरों द्वारा होने वाले दुर्घटना प्वॉयसन वितरण जिसका माध्य 3 है। का अनुसरण करता है। 1000 टैक्सी ड्राइवरों में ड्राइवरों की संख्या ज्ञात करो जिनसे एक वर्ष में
अ. एक भी दुर्घटना न हुई हो और
ब. तीन से अधिक दुर्घटना हुई है।
$(e^{-1} = 0.3679, e^{-2} = 0.1353, e^{-3} = 0.0498)$

22. एक टीवी कंपनी ने अनुमान लगाया कि प्रतिदिन टीवी की मरम्मत करने के लिए औसतन 1.5 इंजीनियर की मांग है। प्वॉयसन वितरण को मानते हुए वह दो इंजीनियर नियुक्त करता है। एक वर्ष में कितने दिन दोनों इंजीनियर के पास काम न होने का समानुपात ज्ञात करो। $(e^{-1} = 0.3678, e^{-0.5} = 0.6065)$

23. एक टेलीविजन इक्सचेंज में औसतन 4 कॉल प्रति मिनट आती है। प्वॉयसन वितरण के आधार पर प्रायिकता ज्ञात करो 1. 2 या कम कॉल प्रति मिनट 2. प्रति मिनट 4 कॉल 3. 4 काल से अधिक प्रति मिनट ($e^{-4} = 0.08$, $e^{-4} = 0.0183$)

24. एक पुस्तक में प्रति पन्ना निम्न त्रुटि पायी गईं।

त्रुटि प्रति पन्ना	0	1	2	3	4
पन्नों की संख्या	211	90	19	5	0

25. 100 कार रेडियो का परीक्षण किया गया और प्रति रेडियो सेट दोषों की संख्या इस प्रकार सूचीबद्ध किया गया।

दोषों की संख्या	0	1	2	3
रेडियो सेट की संख्या	79	18	2	1

प्रति रेडियो सेट औसत दोषों की संख्या का अनुमान लगाओ और 0,1,2,3 की प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

26. निम्न डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करो और सैद्धान्तिक आवृत्ति ज्ञात करो।

मृत्यु	0	1	2	3	4
आवृत्ति	122	60	15	2	1

($e^{-0.5} = 0.60657$)

27. 96 वर्षों में एक उच्च न्यायालय में न्यायाधीश की रिक्तियों की संख्या नीचे दी गई है।

28. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण से आप क्या समझते हैं?

29. द्विपद तथा सामान्य वितरण की विशेषताएं बताओ।

30. द्विपद वितरण क्या है? किन परिस्थितियों में द्विपद वितरण का प्रयोग होता है चर्चा करें।

31. प्वॉयसन वितरण क्या है? प्वॉयसन वितरण की विशेषताएं बताओ।

32. द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण की प्रमुख विशेषताओं पर चर्चा करें।

33. प्वॉयसन वितरण क्या है? यह कहाँ पर प्रयुक्त किया जा सकता है उदाहरण दो।

5.19 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. 11 / 32
2. अ. 0.0988 ब. 0.4074 स. 0.1975
3. $p = 0.2$
4. 0.0067
5. 256 / 719
6. $n = 4$, $p = 1/2$, $q = 1/2$
7. 0.2076
8. 0.712
9. $X = 40$, $\sigma^2 = 36$, $\sqrt{\beta_1} = 0.133$, $\sqrt{\beta_2} = 3.013$
10. $X = 5$, $= \sigma = \sqrt{2.5}$
11. 3, 15, 30, 15, 3
12. 12.5, 50, 75, 50, 12.5
13. 1, 7, 21, 35, 21, 7, 1 ; $X= 3.5$, $\sigma^2 = 1.75$
14. अ. 16 / 32, ब. 64
15. अ. 0.05 ब. 0.15
16. 0.784
17. 0.055
18. 0.567

19. 98020, 1960.4, 19.604
20. 0.146624
21. अ. 50 ब. 353
22. अ. 0.2231 ब. 0.1913
23. अ. 0.2379 ब. 0.6283 स. 0.3717
24. 209.40, 92.14, 20.27, 2.97, 0.33
25. m = 0.25, 77.88, 19.47, 2.43, 0.21
26. 121.3, 60.65, 15.16, 2.53, 0.32
27. 58.22, 29.11, 7.278, 1.21, $x = \sigma^2 = 0.5$

5.20 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 6 घातीय, बीटा एवं सामान्य वितरण
(Exponential, Beta & Normal Distribution)

6.1 प्रस्तावना
6.2 उद्देश्य
6.3 घातांकी वितरण
6.4 बीटा वितरण
6.5 सामान्य प्रायिकता वितरण
6.6 सामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल मापना
6.7 सामान्य वितरण के प्रयोग
6.8 सामान्य वक्र को फिट करना
6.9 सारांश
6.10 शब्दावली
6.11 बोध प्रश्न
6.12 बोध प्रश्नों के उत्तर
6.13 स्वपरख प्रश्न
6.14 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर
6.15 संदर्भ पुस्तकें

6.1 प्रस्तावना

प्रायिकता सिद्धांत और सांख्यिकी में, घातांकी, बीटा, और सामान्य वितरण सतत वितरण परिवार का हिस्सा है। सामान्य वितरण बहुत ही महत्वपूर्ण तथा बहुतायत उपयोगी सतत प्रायिकता वितरण है। इसका प्रयोग प्रमुखतया सतत दैव चरों जैसे लंबाई, भार / वजन और छात्रों के एक समूह के बुद्धिमत्ता के बयवहार का अध्ययन करने में होता है।

6.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- घातांकी वितरण की व्याख्या कर सकें।
- बीटा वितरण की व्याख्या कर सकें।
- सामान्य प्रायिकता वितरण एवं उनके प्रयोग का वर्णन कर सकें।

6.3 घातांकी वितरण

घातांकी वितरण दो घटनाओं के मध्य के समय को प्वायन प्रक्रिया के रूप में प्रदर्शित करता है अर्थात् एक ऐसी प्रक्रिया जिसमें घटनाएं स्वतंत्र तथा सतत रूप से एक निश्चित औसत दर से घटित होती है। यह गुणोत्तर वितरण (Geometric Distribution) का सतत रूप है।

6.3.1 घातांकी वितरण की विशेषताएं

घातांकी वितरण की विशेषताएं निम्नलिखित हैं:

(अ) प्रायिकता घनत्व फलन (probability density function (pdf))

घातांकी वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

वैकल्पिक रूप में इसे Heaviside step function, H(x) की सहयता से इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda} H(x)$$

यहां पर $\lambda > o$ वितरण का प्राचाल है और प्रायः इसे प्राचाल दर कहते हैं। यह वितरण $[0,\infty)$ अंतराल पर आधारित होता है। यदि एक दैव चर X इस वितरण को लागू करता है तो हम कहते हैं $X \sim Exp(\lambda)$

(ब) संचयी वितरण फलन

संचयी वितरण फलन को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

वैकल्पिक रूप में इसे Heaviside step function] H(x) की सहयता से इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$F(x;\lambda) = (1 - e^{-\lambda}) H(x)$$

(स) वैकल्पिक प्रचालीकरण

वैकल्पिक प्राचालीकरण का अर्थ है घातांकी वितरण के प्रायिकता घनत्व फलन को इस प्रकार पारिभाषित करना

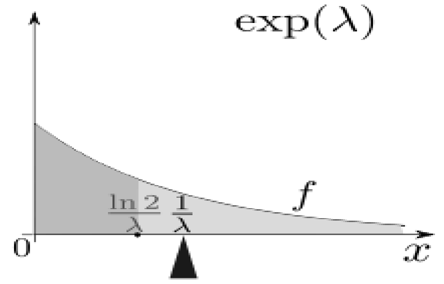
$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

जहां स्केल $\beta>o$ प्राचाल है और यह प्राचाल दर λ का reciprocal है। इस विशिष्टीकरण में, β उत्तर जीविता (survival) प्राचाल कहलाता है जब दैव चर X किसी बायोलाजिकल या मेकैनिकल प्रक्रिया में जीवित रहने कि समयावधि को प्रदर्शित करे और X~Exp (β) तो E(X) = β। अतरू प्रक्रिया के जीवित रहने की प्रत्याशित अवधि β इकाई समय है। जब दो घटनाओं के मध्य समय की चर्चा करते हैं तो प्राचाल दर, λ, प्राचालीकरण का उपयोग करते हैं और इसका माध्य $\beta = \lambda^{-1}$ होता है।

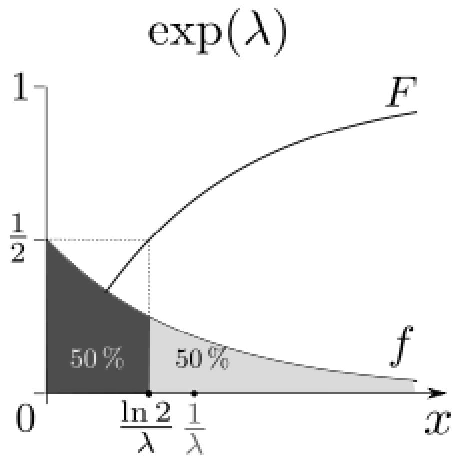
6.3.2 घातांकी वितरण के गुण

घातांकी वितरण **के गुण** निम्न हैंः

(अ) माध्य, प्रसरण, संवेग तथा माध्यिका



इसका माध्य प्रायिकता भार केन्द्र (probability mass centre) है जो कि संवेग है (first moment preimage) (पूर्वचित्र)



$F^{-1}(1/2)$ माध्यिका है।

माध्य अथवा घातांकी वितरित दैव चर का प्रत्याशित मान जिसका प्रचाल दर λ है, इस प्रकार है

$$E(X) = 1/\lambda$$

ऊपर वर्णित उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि यदि आप औसतन 2 फोन काल प्रति घंटा करते हैं तो आपको प्रत्येक काल के लिए औसतन आधा घंटा इंतजार करना पड़ता है।

X का प्रसरण, $Var(X) = 1/\lambda^2$

X का संवेग जब n = 1,2,3,......

$m[X] = \ln 2/(\lambda) < E(X)$

जहां पर ln प्राकृतिक लागरिथम (natural logarithm) है। अतः माध्य तथा माध्यिका का वास्तविक अंतर, माध्य – माध्यिका inequality के अंतर्गत

$E[X] - m[X] = (1-\ln 2)/\lambda < 1/\lambda \quad = SD$

(ब) स्मृति विभ्रम Memory lessness

घातांकी वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि स्मृति विभ्रम। इसका अर्थ यह है कि यदि एक दैव चर (Random variable) T घातांकी वितरित है तो सशर्त प्रायिकता

$$P[T > s+t \mid T > s] = P(T > t)\ s, t \geq 0$$

इसका अर्थ है कि इंतजार करने की सशर्त प्रायिकता उदाहरणार्थ प्रथम आगमन से पहले 10 सेकेंड से अधिक की प्रतीक्षा करने की सशर्त प्रायिकता जब दिया गया है कि पहला आगमन 30 सेकेंड तक नहीं हुआ है, शुरुआती प्रायिकता कि प्रथम आगमन के लिए 10 सेकेंड से अधिक की प्रतीक्षा करने के बराबर है। अतः यदि आप 30 सेकेंड प्रतीक्षा करने के बाद भी प्रथम आगमन नहीं होता ($T>30$) तो पहले आगमन के लिए 10 सेकेंड और इंतजार करने की प्रायिकता ($T>30+10$) शुरुआती प्रायिकता जो कि प्रथम आगमन के लिए 10 सेकेंड से अधिक ($T>10$) का इंतजार करना के बराबर होगी।

वास्तव में, $P(T>40|T>30) = P(T>10)$ का अर्थ यह नहीं है कि घटनाएं $T>40$ तथा $T>30$ स्वतंत्र हैं। सारांशः स्मृति विभ्रम प्रथम आगमन होने तक इंतजार करने का समय का प्रायिकता वितरणका स्मृति विभ्रम का अर्थ है

(सही) $P(T>40|T>30) = P(T>10)$

इसका अर्थ यह नहीं है कि

(गलत) $P(T>40|T>30) = P(T>40)$

वे स्वतत्र हो सकते हैं। ये घटनाएं स्वतत्र नहीं हैं। घातांकी वितरण तथा गुणोत्तर वितरण में ही स्मृति विभ्रम विशेषता होती है।

घातांकी वितरण ही सिर्फ एक ऐसा सतत प्रायिकता वितरण है जिसका असफलता दर (failure rate) स्थिर (constant) है।

(स) चतुर्थांश

घातांकी वितरण का चतुर्थांश फलन (quartile function) विपरीत संचयी वितरण फलन (inverse cumulative distribution function)

$$F^{-1}(p;\lambda) = -\ln(1-p)/\lambda \quad 0 \leq p < 1$$

अतः चतुर्थांश निम्न हैं:

प्रथम चतुर्थांश = $\mathrm{Ln}(4/3)/\lambda$

माध्यिका= $\ln(2)/\lambda$

तृतीय चतुर्थांश= $\ln(4)/\lambda$

6.4 बीटा वितरण (Beta distribution)

बीटा वितरण एक सतत प्रायिकता वितरण है जो कि अंतराल (0,1) पर पारिभाषित है और जिसके दो धनात्मक आकार प्राचाल (shape parameter) α तथा β हैं। इसका प्रयोग समानुपातों के सांख्यिकीय माडलिंग (statistical modelling) में होता है जहां समानुपातों का मान या याँग के बराबर नहीं होता। एक दैव चर जो गासियन (Gaussian) वितरित हो तो उसके तथा एक और स्वतंत्र गासियन चर, जिसका स्केल प्राचाल पहले चर के बराबर तथा संभवतः अलग आकार प्राचाल हो, के योग से भाग देने पर प्राप्त अनुपात का वितरण का एक सैद्दांतिक उदाहरण है।

6.4.1 विशेषताएं charateristics:

बीटा वितरण की विशेषताएं निम्नलिखित हैं:

(अ) प्रायिकता घनत्व फलन

बीटा वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

जहां पर $\Gamma(z)$ गामा फलन है। बीटा फलन B पूरी प्रायिकता जुड़कर करं होने के लिए सामान्यीकरणधारित है। एक दैव चर जो कि बीटा वितरित है और जिसका प्रचाल α और β है को

$X \sim Be(\alpha,\beta)$

द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(ब) संचयी वितरण फलन

संचयी वितरण फलन को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं

$F(x;\alpha,\beta) = B_x(\alpha,\beta)/B(\alpha,\beta) = I_x(\alpha,\beta)$

जहां पर B_X (α,β) अधूरा बीटा फलन(incomplete Beta function) है और I_X (α,β) निरंतर बीटा फलन(regularized incomplete Beta function) है।

6.4.2 गुण

बीटा वितरण के गुण ˙ निम्नलिखित हैं:

बीटा वितरित दैव चर X जिसका प्राचाल α>1 तथा β>1 का बहुलक

बहुलक =(α-1)/(α+β-2)

प्रत्याशित मान, माध्य तथा प्रसरण(द्वितीय केन्द्रीय संवेग)

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

सभी परिस्थितियों में, Var(X)<1/4

विषमता:

$$\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{[\mathrm{E}(X-\mu)^2]^{3/2}} = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\sqrt{\alpha\beta}}.$$

$$\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^4}{[\mathrm{E}(X-\mu)^2]^2} - 3 = \frac{6[\alpha^3-\alpha^2(2\beta-1)+\beta^2(\beta+1)-2\alpha\beta(\beta+2)]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)},$$

या

$$\frac{6[(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta+1)-\alpha\beta(\alpha+\beta+2)]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}.$$

समान्यतया, k^{th} कच्चा संवेग (raw moment)

$$E(X^k) = \frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha)_k}{(\alpha+\beta)_k}$$

जहां पर $(x)_k$ पोसोम्बर चिन्ह(Pochhammer symbol) है जो कि rising factorial को प्रदर्शित करता है। इसे recursive form में इस प्रकार लिख सकते हैं

$E(X^k)= (\alpha+k-1)/(\alpha+\beta+k-1)\, E(X^{k-1})$

हम यह भी दिखा सकते हैं

$E(\log X)=\psi(\alpha)-\psi(\alpha+\beta)$

और

$E(X^{-1})= (\alpha+\beta-1)/(\alpha-1)$

(स) सूचना की मात्रा Quantities of Information

दो बीटा वितरित दैव चर $X\sim Be(\alpha,\beta)$ और $Y\sim Be(\alpha',\beta')$ हैं तो X का differential entropy है h(X)=

डिगामा फलन (Digamma function) कहां है?

क्रास इन्ट्रापी (cross entropy) है

$$H(X,Y) = \ln B(\alpha',\beta') - (\alpha'-1)\psi(\alpha) - (\beta'-1)\psi(\beta) + (\alpha'+\beta'-2)\psi(\alpha+\beta).$$

6.5 सामान्य प्रायिकता वितरण

सामान्य प्रायिकता वितरण की खोज अंग्रेजी गणितज्ञ अब्राहम डिमोरे ने 1733 में की थी। परन्तु बाद में लाप्लास और कार्ल गास ने इसे पुनः खोजा और उपयोग किया। कार्ल गास के नाम पर सामान्य वितरण को गासियन वितरण भी कहते हैं।

निम्न निश्चित परिस्थितियों में सामान्य वितरण को द्विपद वितरण का सन्निकट समझा जा सकता है:

(i) परखों(trial) की संख्या, (n), बहुत अधिक हो अर्थात् $n\rightarrow\infty$

(ii) p तथा q में से कोई भी बहुत छोटा न हो।

सामान्य वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$P\,(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < X < +\infty$$

जहां पर $\overline{X}$ = माध्य, σ= प्रमाप विचलन, e= नेचुरल लागिरथम का बेस=2.7183, π= 3.1415

सामान्य वितरण का`जंदकंतक दवतउंस अंतपंजम (SNV) फार्म निम्न है:

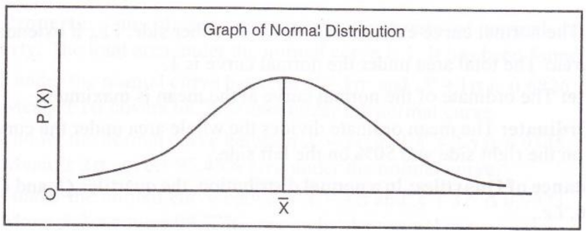
$$P\,(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < Z < \infty \text{ where } Z = \frac{X-\overline{X}}{\sigma}$$

जहां पर $Z= (X-\overline{X})/\sigma$

Z का माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन σ=1 है। अर्थात्वो सामान्य वितरण है जिसका माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन σ इकाई है।

6.5.1 सामान्य वितरण वक्र

सामान्य वितरण के वक्र को सामान्य वितरण वक्र कहते है। सामान्य वक्र सामान्य वितरण का चित्रीय प्रदर्शन है। निम्न चित्र सामान्य वक्र दर्शाता है:



सामान्य वक्र का आकार माध्य ($\overline{X}$) के मान तथा प्रमाप विचलन (σ) पर निर्भर करता है। माध्य तथा प्रमाप विचलन के भिन्न–2 मानों के लिए सामान्य वक्र का आकार भिन्न होगा।

6.5.2 सामान्य वितरण की मान्यताएं

सामान्य वितरण निम्न मान्यताओं पर आधारित होता है

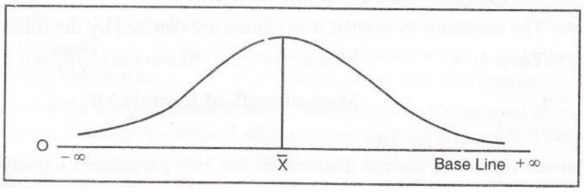
1. **स्वतंत्र कारण**–घटनाओं को प्रभावित करने वाले कारण एक दूसरे से स्वतंत्र होने चाहिए।
2. **विषमता की परिस्थिति** –कारणीय ताकतों का क्रियान्वयन इस प्रकार है कि माध्य से विचलन किसी भी दिशा में संख्या तथा आकार में बराबर हो।
3. **विभिन्न कारण**–कारणीयताकत बहुतायत तथा करीब–करीब बराबर वजन या महत्व हो।

6.5.3 सामान्य वितरण/सामान्य वक्र की चारित्रिक विशेषताएं

1. **पूर्णतया सममितीय तथा घंटाकार आकार**–सामान्य वक्र माध्य के प्रति पूर्णतया सममित तथा घंटाकार आकार का है। अर्थात यदि हम वक्र को इसके लम्बवत् अक्ष के तहत मोड़ें तो दोनों आधे भाग एक दूसरे पर मेल खाएंगे।
2. **एक बहुलक वितरण**–इसमें सिर्फ एक ही बहुलक होता है। अर्थात् एक बहुलक वितरण है।
3. **माध्य, माध्यिका तथा बहुलक की समानता**–सामान्य वितरण में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक बराबर/समान होते हैं अर्थात्

$$\overline{X} = M = Z$$

4. **बेस लाइन से स्पर्शोन्मुखी**–सामान्य वक्र बेस लाइन सेदोनों तरफ स्पर्शोन्मुखी है अर्थात् इसकी प्रवृत्ति बेस लाइन से छू जाने की है किन्तु यह कभी छूती नहीं है। यह निम्न चित्र से पूर्णतया साफ है।

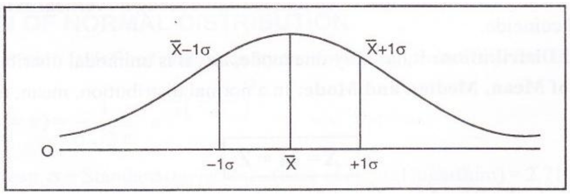


5. **प्रसार/विस्तार** (Range)–सामान्य वितरण का प्रसार दोनों ही तरफ अनन्त तक है अर्थात् $-\infty$ से $+\infty$ तक।
6. **पूर्ण क्षेत्रफल**–सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 1 है।
7. **ordinate**–सामान्य वक्र का कोटि (**ordinate**) माध्य के सापेक्ष उच्चतम है।
8. **माध्य कोटि**– माध्य कोटि पूरे क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। अर्थात् 50%बायीं तरफ तथा 50%दायीं तरफ ।
9. **चतुर्थांश का समान दूरी पर होना**–सामान्य वितरण में चतुर्थांश Q_1तथाQ_3 माध्यिका से समान दूरी पर है। अर्थात$Q_3 - M = M - Q_1$
10. चतुर्थांश विचलन; QD) – सामान्य वितरण में, चतुर्थांश विचलन प्रमापविचलन का 2/3 है अर्थात्

    QD=2/3 SD

11. **मध्य विचलन**(MD)– सामान्य वितरण में, माध्य विचलनप्रमाप विचलन का 4/5 है अर्थात MD= 4/5 SD

12. Point of inflextion: -सामान्य वितरण में दो Point of inflextion है (अर्थात् वह बिन्दु जहाँ पर वक्र अपनी वक्रता बदलता है) और वह बिन्दु $\overline{X}-1\sigma$ तथा $\overline{X}+1\sigma$ अन्य शब्दों में inflextion बिन्दु $\overline{X}\pm1\sigma$ अर्थात $\overline{X}-1\sigma$तथा Xbar+1σपर होता है। यह निम्न चित्र से साफ है।



13. **सतत प्रायिकता वितरण**–सामान्य वितरण सतत चरों का वितरण है। अतः इसे सतत प्रायिकता वितरण कहते हैं।

14. **धारित**(constant)–सामान्य वितरण के धारित निम्न चिह्नों से प्रदर्शित करते हैं। माध्य = $\overline{X}$ या μया m

विषमता गुणांक संवेग=$\sqrt{\beta_1}=0$

प्रमाप विचलन = σ

प्रथुशीर्षत्व गुणांक संवेग =$\sqrt{\beta_2}=3$

प्रसरण = σ

15. **प्रमुख प्राचाल**–सामान्य वितरण के दो प्राचल हैं माध्य($\overline{X}$)तथा प्रमाप विचलन (σ) इन दो प्राचालों की सहायता से हम पूरा वितरण ज्ञात कर सकते हैं।

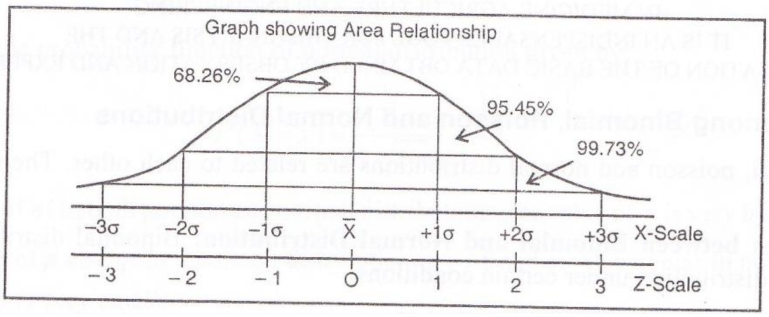
16. **क्षेत्रफल विशेषता**–सामान्य वक्र की सबसे प्रमुख विशेषताओं में से एक विशेषता इसकी क्षेत्रफल विशेषता है। वक्र के नीचे का पूरा क्षेत्रफल 1 होता है। यह पाया जाता है किः

(अ) $\overline{X}-1\sigma$ तथा $\overline{X}+1\sigma$के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.6826 है अर्थात माध्य ± 1σवक्र के कुल क्षेत्रफल का 68.26% क्षेत्रफल धारण करता है।

(ब) $\overline{X}-2\sigma$ तथा $\overline{X}+2\sigma$ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल0.95450.9973 अर्थात माध्य± 2σवक्र के कुल क्षेत्रफल का 95.45% भाग रहता है।

(स) $\overline{X}-2\sigma$ तथा $\overline{X}+2\sigma$ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.9973 है अर्थात माध्य ± 3σ वक्र के कुल क्षेत्रफल का 99.73% भाग रहता है।

निम्नलिखित चित्र क्षेत्रफल विशेषता को दर्शाता है–



6.5.4 सामान्य वितरण का महत्व–

संख्यिकीय समीक्षा में सामान्य वितरण का बहुत महत्व है। यह नवीन सांख्यिकी का आधार है। निम्न सामान्य वितरण के उपयोग तथा महत्व को चिह्नांकित करते हैं:

1. **प्राकृतिक घटनाओं का अध्ययन**—सभी प्राकृतिक घटनाएं सामान्य वितरण की चारित्रिक विशेषताएंधारण करते हैं जैसे एक पेड़ की पत्तियों की लम्बाई,जन्म दर तथा मृत्यु दर इत्यादि। सामान्य वितरण प्राकृतिक घटनाओं के अध्ययन में बहुतायत उपयोग होता है।

2- **निदर्शन सिद्धान्त का आधार**—सामान्य वितरण का निदर्शन सिद्धान्त में भी बहुत महत्वपूर्ण है। सामान्य वितरण की सहायता से हम यह परीक्षण कर सकते हैं कि ब्रह्मांड Universe से चुने गए निदर्श ब्रह्मांड को पूर्णतः प्रदर्शित करते हैं या नहीं।

3- **सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण**—यह टालरेंस या स्पेस्फिक जिसके मध्य उत्पाद की गुणवत्ता होती है, जानने में मदद करता है। उत्पाद की गुणवता Specification limits के मध्य ही स्वीकार्य है।

4. **वृहद प्रतिदर्श परीक्षणः**—सामान्य वितरण का प्रयोग वृहद प्रतिदर्श परीक्षण में भी होता है। वृहद प्रतिदर्श परीक्षण सामान्य वितरण की विशेषताओं पर आधारित है।

5. **द्विपद तथा प्वायसनवितरण का सन्निकटीकरणः**
सामान्य वितरण कई सैद्धांतिक वितरणों जैसे द्विपद, प्वायसन इत्यादि का अच्छा सन्निकटीकरण है। जैसे अवलोकनों की संख्या बढ़ती है प्वायसन, द्विपद इत्यादि से संबंधित समस्याओं को हल करने में सामान्य वितरण का महत्व बढ़ता है।

6. **प्रो योडेन** ने सामान्य वक्र के आकार के आधार पर सामान्य वितरण का महत्व बताया है जो कि नीचे दर्शाया गया हैः

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY. IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE, AGRICULTURAL AND ENGINEERING
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT.

6.5.5 द्विपद(BD), प्वायसन (PD) तथा सामान्य वितरण (ND) में संबंध—

द्विपद प्वायसन तथा सामान्य वितरण एक दूसरे से संबंधित हैं। संबंध नीचे दर्शाया गया हैः

अ. द्विपद तथा सामान्य वितरण के मध्य संबंध

द्विपद वितरण निम्न परिस्थितियों में सामान्य वितरण की ओर उन्मुख होता हैः

1. n अनंत की ओर उन्मुख हो अर्थात्
2. p तथा qमें से कोई भी बहुत छोटा न हो।

ब. प्वायसन और सामान्य वितरण के मध्य संबंध

जब प्वायसन वितरण का प्राचाल ‘m’ बहुत बड़ा हो जाता है अर्थात् $m \rightarrow \infty$तो प्वायसन वितरण सामान्य वितरण की ओर उन्मुख हो जाता है।

6.5.6 सामान्य तथ द्विपद वितरण में अंतर

सामान्य तथा द्विपद वितरण में निम्नलिखित अंतर होते हैं:—

1. **प्रकृति**— द्विपद वितरण असतत प्रायिकता है जबकि सामान्य वितरण सतत प्रायिक वितरण है।
2. **प्रायिकता फलन**— द्विपद वितरण का प्रायिकता फलन निम्न प्रकार से है—

$$P(X = x) = {}^{n}C_{x} q^{n-x} . p^{x}$$

सामान्य वितरण का प्रायिकता फलन

$$P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma}\right)^2}$$

3. **N का मान**–द्विपद वितरण में परखों की संख्या निश्चित होती है जबकि सामान्य वितरण में अनंत के निकट होता है अर्थात् $n \to \infty$

प्राचल– द्विपद वितरण के दो प्राचल हैं, n तथा p जबकि सामान्य वितरण के भी दो प्राचल हैं $\overline{X}$ तथा σ

4. **आकार**– सामान्य वितरण सममित तथा असममित हो सकता है। वह तथा के मान पर निर्भर करता है जबकि दूसरी तरफ सामान्य वितरण हमेंशा सममित होता है।

6.6 सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल का मापन

सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल को मापने के लिए निम्न कदम उठाए जाते हैं

1. सर्वप्रथम दिए गए सामान्य चर को standard normal variate में बदलते हैं। बदलीकरण का सूत्र निम्न है:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$

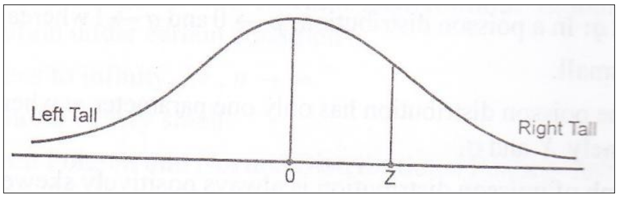
उदाहरण के लिए, यदि $\overline{X}$ =30, σ=5तथा X 35 हो तो 35 के सापेक्ष standard normal variate होगा:

$$Z = (35-30)/5 = 1$$

अतः 35 का बदलीकरण 1 होगा

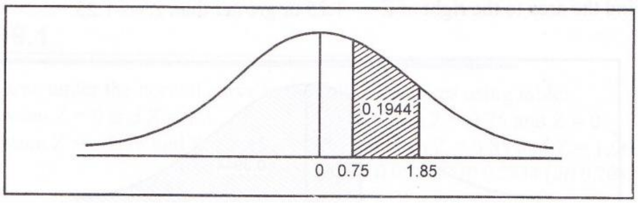
2) तब किसी निश्चित मान के लिए क्षेत्रफल अध्याय के अंत में दिए गए क्षेत्रफल तालिका से प्राप्त किया जा सकता है।

अध्याय के अंत में दी गयी तालिका 0 से Z के मध्य का क्षेत्रफल दर्शाती है जो कि निम्न चित्र से दर्शाया गया है:



उदाहरण 6.1 Z=0.75तथा Z=1.85के मध्य सामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल:

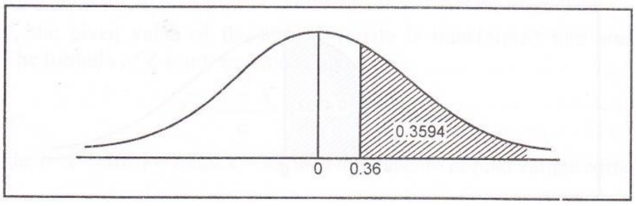


वांछित क्षेत्रफल = (Z=0से Z=1.85के मध्य क्षेत्रफल)- (Z=0 से Z=0.75 के मध्य क्षेत्रफल)

$= 0.4678 - 0.2734 = 0.1944$

उदाहरण 6.2 : $Z= +0.36$ **के दायें का क्षेत्रफल ज्ञात करो।**

हलः



वांछित क्षेत्रफल

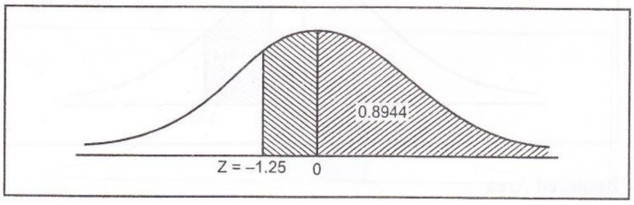
=(Z=0 के मध्य क्षेत्रफल)- (Z=0 से Z= 0.36 के मध्य क्षेत्रफल

$= 0.5000 - 0.1406$

$= 0.3594$

उदाहरण 6.3 : $Z= -1.25$ के दायीं ओर या $Z= -1.25$ से अधिक का क्षेत्रफल ज्ञात करो

हल



वांछित क्षेत्रफल = (Z=-1.25 तथा Z= 0 के मध्य क्षेत्रफल के दायीं ओर का क्षेत्रफल

$= 0.3944 + 0.5000$

$= 0.8944$

6.7 सामान्य वितरण का उपयोग

अब आप सामान्य वितरण के उपयोंगों का अध्ययन करेंगे।

6.7.1 सामान्य चर के Xbar तथा σका मान ज्ञात होने/दिए जाने पर क्षेत्रफल ज्ञात करना

सामान्य वितरण के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सामान्य चर को Z चर में बदलना पड़ता है। उदाहरण के लिए यदि $\overline{X}=30, \sigma=5$ तथा $X=35$ हो तो standard normal variate इस प्रकार बदला जाएगाः

$Z= (35-30)/5 =1$

जहाँ $Z= (X-\overline{X})/\sigma$

अतः $X=35$ के लिए standard normal variate =1 है।

Z बदलीकरण के पश्चात सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल वाले तालिका लेते हैं।

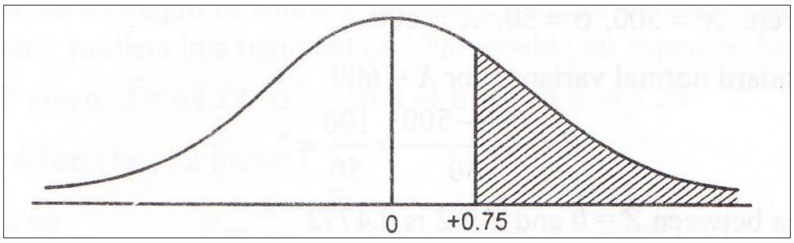
उदाहरण 6.4: 1000 परीक्षार्थियों पर किए गए अभिक्षमता परीक्षण करने पर पता चलता है कि औसत स्कोर 42 तथा स्कोर का प्रमाप विचलन 24 है। स्कोर के लिए सामान्य वितरण मानते हुए ज्ञात कीजिए 1) 60 से अधिक स्कोर पाने वाले परीक्षार्थियों की संख्या तथा 2) 30 से 66 के मध्य स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या

हलः दिया है $\overline{X}=42, \sigma=24, N=1000$

1) 60 से अधिक

Z=60 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)

$= (X-\overline{X})/\sigma$
$=(60-42)/24$
$=18/24$
$=3/4$
$=0.75$

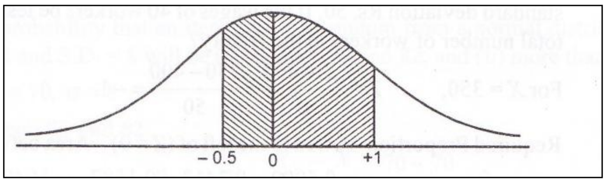


वांछित प्रायिकता =
(Z=0 के दायीं ओर क्षेत्रफल) - (Z=0**तथा** Z=0.75 के मध्य क्षेत्रफल)
= 0.5000- 0.2734 = 0.2266
अर्थात् 60 से अधिक स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या =1000 x 0.2266 =222.6 या 227

2) 30 तथा 66 के मध्य

Z_1= 30 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)
$= (X-\overline{X})/\sigma = (30-42)/24 = -12/24 = -0.5$

Z_2 = 66 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)
$= (X-\overline{X})/\sigma = (66-42)/24 = 24/24 = +1$



वांछित क्षेत्रफल
=(Z= -0.5 से Z= 0 के मध्य क्षेत्रफल)+(Z=0 तथा Z= =1 के मध्य क्षेत्रफल)
=0.1915 + 0.3413 = 0.5328

अतः 30 तथा 66 के मध्य स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या=1000 x 0.5328 = 532.8 या 533

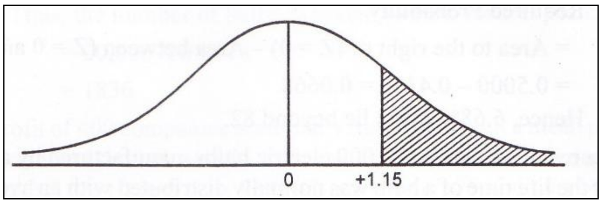
उदाहरण 6.5 : सैनिकों की औसत लम्बाई 68.22 इंच तथा प्रसरण 10.8 है। 1000 सैनिकों वाली टुकड़ी में 6 फीट से अधिक लम्बे सैनिकों की संख्या बताओ।

हलः दिया है $\overline{X} = 68.22$, $\sigma^2 = 10.8$ या$\sigma=\sqrt{10.8} = 3.28$

6 फीट से अधिक (अर्थात्72 इंच से अधिक)

X=72 के लिए, $Z = (X - \overline{X})/\sigma = (72-68.22)/3.28 = 3.78/3.28 = 1.15$

वांछित क्षेत्रफल=
(Z=0 के दायीं ओर क्षेत्रफल) - (Z=0**तथा** Z=1.15 के मध्य क्षेत्रफल)
= 0.5000- 0.3749 = 0.12251



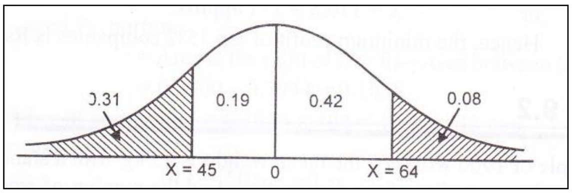
अतः 6 फीट अधिक लम्बाई वाले सैनिकों की प्रत्याशित संख्या= 1000x 0.1251 = 125. ≈125

6.7.2 सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल ज्ञात होने पर माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करना

जब सामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात हो तो माध्य तथा प्रमाप विचलन का मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 6.6 : एक साममन्य वितरण में 31% मद के नीचे तथा 8% मद 64 से ऊपर हैं। $\overline{X}$ तथा σका मान ज्ञात करो।

हलः



$Z=(X-\overline{X})/\sigma$

तालिका से Z=0.5 -0.3 के सापेक्ष Z का मान

= 0.19 क्षेत्रफल

= -0.5

$\therefore$ -0.5 = (45-$\overline{X}$)/σ

या, -0.5σ= 45-$\overline{X}$

$\overline{X}$ -0.5σ = 45 (i)

Z=0.5-0.08 के सापेक्ष Z का मान

= 0.42 क्षेत्रफल = +1.41 (तालिका स)

$\therefore$ 1.41 = (64-$\overline{X}$)/σ

या 1.41σ = 64-$\overline{X}$

या $\overline{X}$ + 1.41σ = 64 (तालिका से)

दोनों समीकरणों को हल करने पर

$\overline{X}$ -0.5σ = 45

$\overline{X}$ +1.41σ = 64

- - -

-1.91σ = -19

σ = 10

σका मान समीकरण 1) पर रखने पर

$\overline{X}$ -0.5 (10) = 45

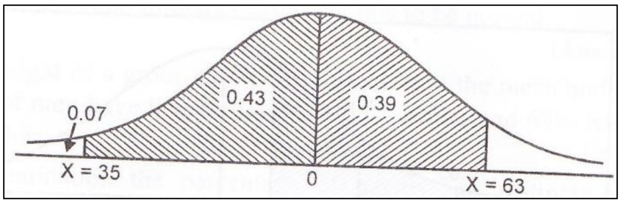
$\overline{X}$ -5=45

या, $\overline{X}$ =50

$\therefore \overline{X} = 50, \sigma = 10$

उदाहरण 6.7 : एक वितरण पूर्णतया 7% मद 35 से कम हैं तथा 89% मद 63 से कम/नीचे हैं। वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

हलः 0.43 क्षेत्रफल के सापेक्ष Z का मान =1.48



$\therefore 1.48 = (35-\overline{X})/\sigma$

या $-1.48\sigma = 35-\overline{X}$

या $\overline{X} - 1.48\sigma = 35$ (i)

0.39 क्षेत्रफल के सापेक्ष Z का मान =+1.23

$1.23 = (63-\overline{X})/\sigma$

$1.23\sigma = 63-\overline{X}$

$\overline{X} + 1.23\sigma = 63$ (ii)

दोनों समीकरण हल करने पर

$\overline{X} - 1.48\sigma = 35$

$\overline{X} + 1.23\sigma = 63$

$-\quad 2.71\sigma = -28$

$\sigma = 28/2.71$

$= 10.33$

σका मान समीकरण 1) पर रखने पर

$\overline{X} - 1.48(10.33) = 35$

$\overline{X} - 15.3 = 35$

$\overline{X} = 50.3$

अतः $\overline{X} = 50.3, \sigma = 10.33$

6.7.3 उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग में उच्चतम तथा न्यूनतम स्कोर ज्ञात करना।

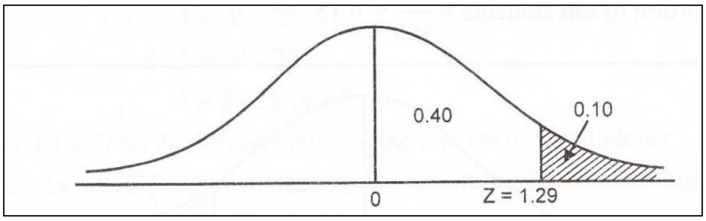
जब $\overline{X}$, σतथा उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग का समानुपात ज्ञात हो तब आप उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग में उच्चतम तथा न्यूनतम स्कोर ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 6.8 : 5000 कर्मचारियों का भाड़ा सामान्य रूप से वितरित है जिसका माध्य रू 2000 तथा प्रमाप विचलन रू 120 है। ऊपर से 500 सबसे धनी कर्मचारियों के लिए न्यूनतम भाड़ा क्या है?

हलः दिया है $N=5000, \overline{X} = 2000, \sigma=120$

सबसे धनी कर्मचारियों का अनुपात = 500/5000 = 1/10 = 0.10

0.40 क्षेत्रफल के सापेक्ष का मान = 1.29



हम जानते हैं $Z= (\overline{X})/\sigma$

$\overline{X} - 2000 = 154.8$

$\overline{X} = 2154.8$

अतः सबसे धनी 500 कर्मचारियों के लिए न्यूनतम भाड़ा रू 2154.8 है।

उदाहरण 6.9 एक परीक्षण के अंक/ मार्कस सामान्य रूप से वितरित हैं जिसका माध्य 75 तथा प्रमाप विचलन 5 है। यदि ऊपर से 5 प्रतिशत छात्र ग्रेड ए प्राप्त करें तथा नीचे 25 प्रतिशत ग्रेड एफ तो ए का न्यूनतम तथा एफ का अधिकतम अंक ज्ञात करें।

हलः दिया है $\overline{X} = 75, \sigma=5$

$Z=(X-\overline{X})/\sigma$

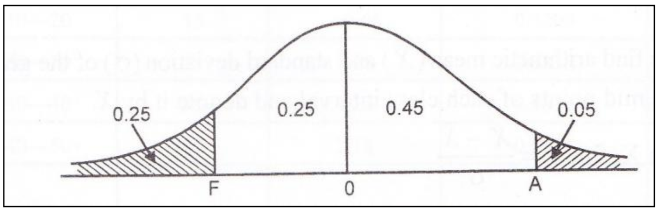
0.5-0.25 के सापेक्ष Zका मान = 0.25 क्षेत्रफल

= -0.68 (तलिका से)

$\therefore$ -0.68 = (X-75)/5

या,-0.68x5= X-75

X = 71.6 या 72



अतः नीचे से 25 प्रतिशत छात्रों का उच्चम अंक 72 होगा।

(0.05-0.05)= 0.45 क्षेत्रफल के सापेक्ष Zका मान

= 1.65 (तालिका से)

$\therefore$ 1.65 = (X-75)/5

या,1.65x5= X-75

या,8.25 = X-75

या,X=83.25 या83

अतः ऊपर से 5 प्रतिशत छात्रों का न्युनतम अंक 83 है।

6.8 सामान्य वक्र को फिट करना

सामान्य वक्र को फिट करने के दो तरीके हैं:

6.8.1 कोटि विधि तरीका

इस विधि में SNV के कोटि का उपयोग करते हैं। इस विधि में निम्नलिखित चरण होते हैं:

(i). सर्वप्रथम दिए गए वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन का मान ज्ञात करो।

(ii). प्रत्येक वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु ज्ञात करो तथा इसे से प्रदशित करो।

(iii). प्रत्येक Xके लिए $Z=(X-\overline{X})/\sigma$ज्ञात करो।

(iv). कोटि तालिका से Zके प्रत्येक मान के लिए कोटि का मान ज्ञात करो।

(v). इन प्रत्येक मानों को $N \times i/\sigma$ से गुणा करो तथा प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

यहाँ पर N = मदों की संख्या

i=वर्ग अंतराल की लम्बाई

σ =प्रमाप विचलन

उदाहरण 6.10 निम्नलिखित डाटा पर कोटि विधि से सामान्य वक्र फिट करो।

चर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	3	5	8	3	1

हलः सामान्य वक्र फिट करने के लिए $\overline{X}$ तथा σ ज्ञात करो

$\overline{X}$ तथा σ को ज्ञात करना

चर	F	MV (X)	d	d'=d/i	fd'	fd'²
0-10	3	5	-20	-2	-6	12
10-20	5	15	-10	-1	-5	5
20-30	8	25	0	0	0	
30-40	3	35	+10	1	+3	3
40-50	1	45	+20	2	+2	4
	N=20				∑fd'=-6	$\sum fd'^2=24$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times i = 25 + \frac{-6}{20} \times 10 = 22$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{24}{20} - \left(\frac{-6}{20}\right)^2} \times 10 = 10.53$$

$\overline{X}$ तथा σका मान ज्ञात करने के पश्चात निम्न प्रक्रिया अपनाओ–

चर (1)	f (2)	MV (X) (3)	$Z=(X-\overline{X})/\sigma$ (4)	कोटि तालिका से कोटि का मान (5)	fe=कोटि x Nx i/σ (6)
0-10	3	5	-1.61	0.1092	2.07=2
10-20	5	15	-0.66	0.3209	6.09=6
20-30	8	25	0.28	0.3836	7.28=7
30-40	3	35	1.28	0.1872	3.55=4
40-50	1	45	2.18	0.0371	0.7046=1

					N=20

6.8.2 क्षेत्रफल विधि

इस विधि में SNV के अन्तर्गत क्षेत्रफल तालिका का उपयोग करते हैं। इस विधि में निम्न चरण होते हैं–

(i). सर्वप्रथम दिए गए वितरण का $\overline{X}$ तथा σ ज्ञात करो।

(ii). प्रत्येक वर्ग अन्तराल की न्यून सीमा को लिखो तथा इसे X से प्रदर्शित करो।

(iii). प्रत्येक न्यून वर्ग सीमा,X, के लिए $Z=(X-\overline{X})/\sigma$ज्ञात करो।

(iv). Zके प्रत्येक मान के लिए क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।(क्षेत्रफल तालिका से)

(v). इसके बाद प्रत्येक दो लगातार मानों के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात करो। इनके चिन्ह समान हैं और जब Z में भिन्न चिन्ह हों तो उनको जोड़ो।

(vi). इन प्रत्येक मानों में N से गुणा करके प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

उदाहरण 6.11 : निम्न डाटा पर सामान्य वक्र फिट करो।

चर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	3	5	8	3	1

हल : ऊपर के उदाहरण से हम प्राप्त करते हैं कि $\overline{X}=22$, σ=10.53 तथा N=20

$\overline{X}$ तथा σ का मान ज्ञात करने के पश्चात हम निम्न विधि अपनाते हैं:

चर (1)	न्यून वर्ग सीमा (2)	$Z=(X-\overline{X})/\sigma$ (3)	0 से Z का क्षेत्रफल (4)	प्रत्येक वर्ग अंतराल का क्षेत्रफल (5)	fe=क्षेत्रफल x N (6)
0-10	0	-2.09	0.4817	0.1088	2.17≈2
10-20	10	-1.14	0.3729	0.2975	5.95≈6
20-30	20	-0.19	0.0753	0.3518	7.036≈7
30-40	30	0.76	0.2764	0.1800	3.6≈4
40-50	40	1.71	0.4564	0.0397	0.794≈1
50-60	50	2.66	0.4961		
					N=20

6.9 सारांश

प्वायसन प्रक्रिया में दो घटनाओं के मध्य समय को घातांकी वितरण से वर्णन करते हैं। अर्थात एक प्रक्रिया जिसमें घटनाएं औसत दर से सतत तथा स्वतंत्र रूप से घटित होती हैं। यह गुणोत्तर वितरण का सतत रूप है। बीटा वितरण भी सतत प्रायिकता वितरण है जो कि अंतराल (0,1) पर परिभाषित है तथा इसके दो आकार प्राचल हैं तथा। बीटा वितरण का प्रयोग उन अनुपातों की सांख्किीय माडलिंग में करते हैं जहाँ पर अनुपात 0 या 1 न हो। सामान्य वितरण एक बहुत महत्वपूर्ण तथा बहुतायत उपयोग होने वाला वितरण है इसका उपयोग मुख्यतः सतत दैव चरों जैसे वजन, लम्बाई, तथा छात्रों के समूह का बुद्धिमत्ता इत्यादि के व्यवहार के अध्ययन में होता है।

6.10 शब्दावली

घातांकी वितरणः एक ऐसी प्रक्रिया जिसमें घटनाएं स्वतंत्र तथा सतत रूप से एक निश्चित औसत दर से घटित होती है।

6.11 बोध प्रश्न

1. द्विपद वितरण असतत प्रायिकता है जबकि सामान्य वितरण ....प्रायिकता वितरण है।
2. सामान्य प्रायिकता वितरण की खोज अंग्रेजी गणितज्ञ ....ने 1733 में की थी।
3. सामान्य वितरण का प्रसार दोनों ही तरफ .... तक है ।
4. $\overline{X}$ -2σ तथा $\overline{X}$ +2σ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल ....है ।

6.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. सतत 2. अब्राहम डिमोरे 3. अनन्त 4. 0.9973

6.13 स्वपरख प्रश्न

1. सामान्य वक्र के अंतर्गत तालिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित स्थितियों में क्षेत्रफल ज्ञात करो:
   - **(i).** Z=0तथा Z=1.3के मध्य।
   - **(ii).** Z=0.75 तथा Z=0के मध्य।
   - **(iii).** Z=-0.56 तथा Z=2.45 के मध्य।
   - **(iv).** Z=0.85 तथा Z=1.96 के मध्य।
2. 1000 मजदूरों के प्रतिदर्श में औसत वजन 45 किग्रा तथा प्रताप विचलन 15 किग्रा है। सामान्य वितरण मानते हुए 40 तथा 60 किग्रा के मध्य वजन वाले मजदूरों की संख्या बताइए।
3. सामान्य वितरण जिसका माध्य 5 तथा SD = 3 हो से एक मद दैव निदर्शन द्वारा चुने जाने पर उसके 2.57 तथा 4.34 के मध्य होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. एक सामान्य वितरण का माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 है। X_1= 9.6 तथा X_2= 13.8 के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
5. एक सामान्य वितरण जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 हो X_1=6 तथा X_2= 18 के मध्य वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करो।
6. एक परीक्षा में परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंक सामान्य वितरित है। यदि 10 प्रतिशत ने 40 से कम अंक प्राप्त किए हों तथा 15 प्रतिशत ने 80 से अधिक अंक प्राप्त किए हों तो अंको का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।
7. एक परीक्षा में 15 प्रतिशत उम्मीदवार विशिष्टता के साथ उत्तीर्ण हुए जबकि 25 प्रतिशत फेल हो गए। हमें यह ज्ञात है कि 100 में से 40 से कम अंक प्राप्त करने पर उम्मीदवार फेल हो जाता है तथा विशिष्टता प्राप्त करने के लिए 75 से अधिक अंक प्राप्त करना होता है। अंकों को सामान्य वितरित मानते हुए उनके वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।
8. दिया गया है कि 84 प्रतिशत आदमियों की लम्बाई 65.2 इंच से कम है तथा 68 प्रतिशत आदमियों की लम्बाई 65.2 इंच 62.8 के मध्य है। आदमियों के समूह के लम्बाई को सामान्य वितरित मानते हुए उसका माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।
9. एक परीक्षा में उत्तीर्ण तथा विशिष्टता का प्रतिशत क्रमशः 46 तथा 9 है। उम्मीदवारों द्वारा प्राप्त औसत अंक तथा उनका प्रमाप विचलन ज्ञात करो। जब न्यूनतम उत्तीर्ण अंक तथा विशिष्टता अंक क्रमशः 40 तथा 75 है। (मानो कि अंकों का वितरण सामान्य है।)

10. 500 मजदूरों की मासिक आय सामान्य वितरित है जिसकामाध्य रू 2000 तथा प्रमाप विचलन रू 200 है। सबसे अमीर मजदूरों की न्यूनतम आय बताओ।

11. 5000 व्यक्तियों के एक समूह की आय सामान्य वितरित है जिसका माध्य रू 100 तथा प्रमाप विचलन रू 75 है। 200 सबसे गरीब आदमियों की अधिकतम आय बताओ। ($Z=0$ से $Z=1.75$ तक के सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.46 है।)

12. एक कक्षा के विद्यार्थियों के अंक सामान्य वितरित हैं जिसका $\overline{X}=6.7$ तथा SD=1.2 है। अंकों को सामान्य वितरित मानते हुए कक्षा के निचले 10 प्रतिशत विद्यार्थियों का अधिकतम अंक बताओ।

13. 1000 छात्रों पर किए गए एक बुद्धिमत्ता परीक्षण का औसत स्कोर 42 तथा प्रमाप विचलन 24 है। यदि ऊपरी 10 प्रतिशत छात्र ग्रेड ए प्राप्त करते हैं तो ए ग्रेड प्राप्त करने के लिए न्यूनतम अंक/स्कोर क्या है?

14.

(i). सामान्य वक्र को फिट करने के दो विधियों के नाम बताओ।

(ii). निम्नलिखित डाटा पर कोटि विधि से सामान्य वक्र फिट करो।

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	5	8	12	8	7

15. क्षेत्रफल विधि से निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करो।

वर्ग अंतराल	10.5-20.5	20.5-30.5	30.5-40.5	40.5-50.5	50.5-60.5	60.5-70.5	70.5-80.5
f:	12	28	40	60	32	20	8

16. निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करें।

माध्यबिन्दु	61	64	67	70	73
f:	5	8	42	27	8

17. निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करें।

ऊँचाई (सेमी)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	5	8	42	27	8

दिया है $\overline{X}=67.45$ cm, $\sigma=2.92$ cm, N=100

6.14 स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. **अ) 0.4032 ब) 0.2734 स)0.7052 द)0.1727**

2. **471**

3. **0.2039**

4. **70.08 प्रतिशत**

5. **99.74 प्रतिशत**

6- [=62.15, =17.16]

7- [53.79, =20.46]

8- [=64, =1.2]

9- [=37.18, =28.22]

10- 2,134Rs

11- Rs 768.75

12- 5.164 या5

13- 72.73 या73

14- f=3,9,14,10,4

15- f=9,26,45,54,40,20,6

16- f=4,20,41,28,7

17- f=4,20,41,28,7

6.15 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 11 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया
(Procedure of Testing a Hypothesis)

इकाई की रुपरेखा

11.1 प्रस्तावना
11.2 उद्देश्य
11.3 नमूने का वितरण एवं मानक त्रुटि
11.4 अनुमान के सिद्धान्त
11.5 परिकल्पनाओं का परीक्षण
11.6 सारांश
11.7 शब्दावली
11.8 बोध प्रश्न
11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
11.10 स्वपरख प्रश्न
11.11 सन्दर्भ पुस्तकें

11.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय जॉच में, विचाराधीन वस्तुओं की कुलता को समग्र कहा जाता है। एक समग्र जिसमें वस्तुओं/चीजों/इकाईयों की परिमित संख्या होती है उसे परिमित समग्र कहा जाता है। एक समग्र जिसमें वस्तुओं/चीजों/इकाईयों की अपरिमित संख्या हेाती है उसे अपरिमित समग्र कहा जाता हैं । समग्र से संबंधित इकाईयों में विशेषताऐं जैसे ऊँचाई, वजन आदि शामिल है। इस प्रकार, सांख्यिकीय जॉच में हम छात्रों की ऊँचाईयों का जो एक विद्यालय में अध्ययन करते हैं, का हवाला दे सकते हैं। दूसरी परिस्थिति में हम आमों के वजनों का जो एक पेड में व्यस्क हो रहें हैं का हवाला दे सकते हैं। जब समग्र विशाल है, सांख्यिकीय जॉच करते समय, हम समग्र में प्रत्येक इकाई के साथ संपर्क करने में सक्षम नहीं हो सकते है। इसलिए, जॉच नमूने पर आधारित हो सकती है (समग्र का एक प्रतिनिधि भाग) इस परिस्थिति में जॉच को नमूना सर्वेक्षण कहा जाता है।

मान लीजिए 'N' आकार के समग्र से 'n' इकाईयों को चयनित करना है आकार 'n' मके एक नमूने से ये चयनित इकाईयॉ समग्र के एक नमूने से निकाली जातीा हे, यदि इकाईयों का चयन निश्चित पूर्व निर्धारित प्रायिकताओं के अनुसार होता है, इस तरह के नमूने को यादृच्छिक नमूना कहा जाता हे। यदि सभी इकाईयों के लिए प्रायिकताऐं समान हैं, तो चयन सरल यादृच्छिक नमूनाकरण कहलाता है।

समग्र मे ंचर राशि के लिए, मान लीजिए हम जैसे माध्य, मानक विचलन आदि स्थिर राशि ज्ञात करते हैं तो इन स्थिर राशियों को समग्र का प्राचल कहा जाता है। दसरी तरफ, यदि हम नमूने का माध्य, मानक विचलन आदि ज्ञात करते हैं, उन्हें सांख्यिकीय कहा जाता है। प्राचलन समग्र की एक सांख्यिकीय स्थिर राशि है। आंकडा नमूनों मानो का एक फलन है।

इस प्रकार, एक विद्यालय के छा़त्रों की माध्य ऊँचाई एक प्राचल है। जबकि विद्यालय के 50 यादृच्छिक चयनित छात्रों की माध्य ऊँचाई एक ऑकडा है।

समग्र का सांख्यिकीय वितरण एक प्राचल (पायसन वितरण) के द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। या इसका निर्धारण एक से ज्यादा प्राचलों द्वारा किया जा सकता है जैसे सामान्य वितरण मे ंदो प्राचल माध्य एवं मानक विचलन होते हैं, द्विपद वितरण मे ंदो प्राचल n एवं p होते हैं समग्र प्राचल के सभी स्वीकार्य मानो ंका समूह (समुच्चय) प्राचल अतंराल कहलाता हैः यदि एक प्राचल अकेले समग्र के सांख्यिकीय वितरण के वर्णन के लिए पर्याप्त है तो प्राचल अंतराल एक आयामी है। दूसरी तरफ, यदि दो प्राचल समग्र का वर्णन करते हैं तो प्राचल अंतराल द्वि आयामी है और इसी तरह।

11.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- परिकल्पना के परीक्षण के विभिन्न तरीकों को समझ सकें।
- परिकल्पना के परीक्षण के अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकें।

11.3 नमूने का वितरण एवं मानक त्रुटि

मान लीजिऐ एक समग्र से 'n' आकार का एक नमूना लिया जाता है और नमूना माध्य $\bar{x}$ की गणना की जाती है। समग्र मे ंसे समान आकार के इस तरह के बहत से नमूने लिये जा सकते हे। 'n' आकार के सभी नमूनों का समुच्चय जिसे समग्र में से लिया जा सकता है, नमूना अंतराल कहा जाता है। प्रत्येक नमूने के लिए $\bar{x}$ की गणना की जा सकती है। इसलिए $\bar{x}$ के बहुत मान हो सकते हैं मान लीजिए प्राचल अंतराल में, $\bar{x}$ के इन विभिन्न मानो ंको आवृत्ति वितरण के रूप में सारणीबद्ध किया गया हो, तो परिणामी वितरण को $\bar{x}$ का नमूने का वितरण कहा जाता है। इस नमूने के वितरण का मानक विचलन मानक त्रुटि (S.E) कहलाता है।

समान आकार के विभिन्न नमूनों के लिए ऑकडों के मानों का वितरण आंकडों का नमूना वितरण कहलाता है।

ऑकडों की मानक त्रुटि, ऑकडों के नमूने वितरण का मानक विचलन है। अन्य आंकडों का नमूना वितरण जैसे नमूना माध्यिका भी लिखा जा सकता है।

इन प्रत्येक परिस्थिति मे ंसमतुल्य मानक विचलन मानक त्रुटि (S.E) होगा!

एक समग्र जिसका माध्य (μ) एवं मानक विचलन (σ) है का ध्यान करें। चर्चाऐं आरामदायक होंगी, इसलिए यहॉ हम अपने को केवल बडे समग्र तक सीमित करते हैं तब $\bar{x}$ का नमूना वितरण का माध्य μ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है। जो कि $E(\bar{x}) = \mu$ और $S.E(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है।

यदि समग्र से आकार n_1 का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है जिसका माध्य μ_1 है और मानक विचलन σ_1 है। दूसरे , समग्र से यदि n_2 आकार का यादृच्छिक नमूना भी लिया जाता है जिसका माध्य μ_2 और मानक विचलन σ_2 है यदि $\overline{x_1}$ पहले नमूने का माध्य हो और $\overline{x_2}$ दूसरे नमूने का माध्य हो तो

$$E(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = (\mu_1 - \mu_2) \text{ and } S.E.(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}$$

मानक त्रुटि या अनुपात

समग्र में, मान लीजिए इकाईयों का द्विपालिक वर्गीकरण (दो वर्गों मे ंवर्गीकरण) उन इकाईयों के रूप में संभव है जो एक गुण रखते हैं और जो गुण नहीं रखते हैं उदाहरण के लिए:

(i) गॉव के लोगों का वर्गीकरण जैसे शिक्षित एवं अशिक्षित

(ii) विद्यालय के छा़त्रों का वर्गीकरणजैस गरीब एवं अमीर

(iii) फलों का वर्गीकरण जैसे पका एवं कच्चा

(iv) कर्मचारियों का वर्गीकरण जैसे संतुष्ट एवं असंतुष्ट

(v) ग्राहकों का वर्गीकरण

समग्र में यदि p इकाईयों का अनुपात है जो विशेषता (गुण) रखता है। इस तरह के समग्र में से, मान लीजिए एक n आकार का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है। यदि x इन n इकाईयों के वर्ग से सम्बन्धित है जो इस गुण को रखते हैं।

तब, $p = \frac{x}{n}$ गुण का एक नमूना अनुपात है।

यहॉ, $p = \frac{x}{n}$ माध्य $E(p) = p$

और मानक त्रुटि $S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

जहॉ $Q = 1 - p$

यदि एक आकार n_1 का सहज गुण यादृच्छिक नमूना एक समग्र से p_1 अनुपात के साथ लिया जाता है। यदि x_1 इकाईयों मे ंनमूना सहजगुण रखता है। तब, नमूना अनुपात $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$ है। यदि एक आकार n_2 का सहजगुण यादृच्छिक नमूना समग्र से p_2 अनुपात के साथलिया जाता है। यदि x_2 इकाईयो ं में नमूना सहजगुण रखता है। तब नमूना अनुपात $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$ है। यहॉ नमूना अनुपातों के माध्य मे ंअन्तर

$E(p_1 - p_2) = (p_1 - p_2)$ और मानक त्रुटि $S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$ जहाँ $Q_1 = 1 - P_1$ और $Q_2 = 1 - P_2$.

यहाँ यदि $P_1 = P_2 = P$

तब मानक त्रुटि $\sqrt{PQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n2}\right]}$ है।

इस प्राकर, कुछ ऑकडों के माध्यों एवं मानक त्रुटियॉ निम्नवत है।

ऑकडा	माध्य	मानक त्रुटि
x (*Sample mean*)	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ (*difference of means*)	$\mu_1 - \mu_2$	$\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}$
P (*Sample mean*)	P	$\sqrt{\frac{PQ}{n}}$
$P_1 - P_2$ (*difference of proportions*)	$P_1 = P_2$	$\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$
$P_1 - P_2$ (*when* $P_1 = P_2 = P$)	0	$\sqrt{pQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}$

मानक त्रुटि की उपयोगिता

मानक त्रुटि आंकडे की परिवर्तनशीलता की माप है। यह आंकलन एवं परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए उपयोगी है।

(i) आंकलन के सिद्धान्त में, मानक त्रुटि का प्रयोग एक अनुमानक के रूप में ऑकडों की दक्षता एवं तालमेल को निर्धारित करना है।

(ii) आंकलन अंतराल में, मानक त्रुटि का प्रयोग विश्वसनीयता अंतरालों को लिखना है।

(iii) परिकल्पनाओं के परीक्षण में, परीक्षण की मानक त्रुटि का उपयोग ऑकडे परीक्षण के विवरण को मानकीकृत करने के लिए किया जाता है।

सांख्यिकीय अनुमानः सांख्यिकीय अनुमान सांख्यिकी की वह शाखा है जो समग्र से लिये गये नमूनों का उपयोग करते हुए समग्र के सांख्यिकीय प्रकृति के बारे मे ंनिर्णय लेने के सिद्धान्त और तकनीकों से संबंधित है। सांख्यिकीय अनुमानो ंकी दो शाखाऐं होती है, वो हैं, (1) अनुमान के सिद्धान्त (2) अनुमानों का परीक्षण

11.4 अनुमान के सिद्धान्त

सांख्यिकीय में, हम प्रायः ऐसी स्थिति में आते हैं जहॉ हम समग्र के एक प्राचल के संभावित मूल्य के बारे मे ंबात करेंगें। मान लीजिए एक बागवानी अनुसंधान केंद्र ने केले का संकर किस्म विकसित किया है। केन्द्र हमसे इस तरह के केले के औसत वजन को जानना चाहता है। इस उद्देश्य के लिए, कुल केले यादृच्छिक चुने जाते हैं और उनके माध्य वजन की गणना की जाती है। यह माध्य वजन (नमूना माध्य) संभावित समग्र माध्य के रूप में प्रस्तावित है। इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$,समग्र

माध्य μ का एक अनुमानक है। एक विशिष्ट नमूने के लिए मान लीजिए नमूना माध्य वजन 84 ग्राम है, $\bar{x}$ के इस विशिष्ट मान समग्र माध्य का आंकलन कहा जाता है। अज्ञात प्राचल का अनुमानक एक आंकडा है जो उस प्राचल के संभावित मान को निर्दिष्ट करता है। अनुमान विशिष्ट नमूने के लिए अनुमानक का एक विशिष्ट मान है। अनुमानक एक आंकडा है, जबकि अनुमान (आंकलन) एक संख्यात्मक मान है।

अनुमान (आंकलन) समग्र से लिये हुए नमूने के सांख्यिकीय का प्रयोग करते हुए समग्र प्राचल के संम्भावित मान के लिए अपनाई गई विधियों और तकनीकों से सम्बन्धित है। आंकडों के दो प्रकार होते हैं वो हैं, (1) बिन्दु आंकलन (2) अंतराल आंकलन

बिन्दु आंकलन (अनुमान) :– एक अज्ञात प्राचल का अनुमान लगाते समय, यदि एक एकल मान अनुमान के रूप में प्रस्तावित होता है, तो इस तरह के अनुमान को बिन्दु अनुमान कहते हैं इस प्रकार, नमूना माध्य $\bar{x}$ =84 ग्राम है के आधार पर यदि हम निष्कर्ष निकालें कि समग्र माध्य 84 ग्राम है यह बिन्दु आंकलन है। यहॉ $\bar{x}$ एक समग्र माध्य μ का बिन्दु आंकलन है। निर्दिष्ट मान 84 ग्राम μ का बिन्दु आंकलन है। आम तौर पर n_1 का बिन्दु आंकलन n_1 को $\frac{\wedge}{\mu}$ द्वारा प्रदर्शित कियाजाता है। इसलिए

$$\frac{\wedge}{\mu} = \bar{x}$$

अन्तराल आंकलन :– अंतराल आंकलन में, अज्ञात प्राचल के अनुमान के रूप में हम एक एकल मान का प्रस्ताव करते हैं। अधिकांश स्थितियों में प्रस्तावित मूल्य प्राचल के वास्तविक मूल्य की संभावना नहीं होंती है। इसके बजाय, यदि हम बिन्दु अनुमान के आसपास एक छोटे से अंतराल का प्रस्ताव करते हैं, तो प्राचल को शामिल करने की संभावना अंतराल, हमारा प्रस्ताव मजबूत होगा। यह अंतराल जिसमें प्राचल को शामिल करने की संभावना है अंतराल अनुमान कहा जाता है। अंतराल आंकलन में, एक अंतराल (T_1 से T_2) जिसमें प्राचल को शामिल करने की संभावना है प्राचल के अनुमानक के रूप मे प्रस्तावित है। अंतराल (T_1 से T_2) को विश्वसनीयता अंतराल कहा जाता है। विश्वास अंतराल में प्राचल के सम्मिलित होन की संभावना को विश्वास गुंणांक कहा जाता है। विश्वास अंतराल की सीमा T_1 और T_2 को विश्वास सीमा कहा जाता है। ये सीमाऐं सम्बन्धित बिन्दु अनुमानक (सांख्यिकी) के नमूनाकरण वितरण पर आधारित है।

विश्वास अंतराल में प्राचल शामिल होने की संम्भावना को विश्वास गुणांक कहा जाता है। इसे $(1-\alpha)$है। अन्तराल अनुमान में, हम विभिन्न विश्वास गुणंकों के विश्वास अंतराल लिख सकते हैं, जैसे $95\%, 99\%$ इत्यादि।

उदाहरण :– हम केले के वनज के बारे मे पहले उर्वधृत उदाहरण पर गौर करते हैं। यहॉ, केलों का अज्ञात माध्य वजन (समग्र माध्य μ) का अनुमान नमूना आकार $n = 100$ के प्रयोग से लगाया गया है। जिसके लिए नमूना माध्य $\bar{x} = 84$ ग्राम है। यदि समग्र मानक विचलन $\sigma = 5$ ग्राम है तो केले का वजन सामान्य रूप से वितरित किया जाता है। तब , $\bar{x}$

माध्य 84 ग्राम और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{100}$

1. $\bar{x} = 84$ ग्राम μ का एक बिन्दु अनुमानक है। इसलिए, हम कहते हैं कि केलों का माध्य वनज 84 ग्राम है।
2. μ के लिए 95$\%$ विश्वसनीयता अंतराल

$$(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

जो $(84-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}, 84+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}).$ है।

इसलिए 95% विश्वसनीयता के साथ हम कहते हैं कि कैलों का माध्य वजन 83.02 एवं 84.98 ग्राम के मध्य है।

3. μ के लिए 99% विश्वसनीयता $(\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

जो $(84-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}, 84+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}).$

जो (81.62 , 85.29) है। इसलिए, 99: विश्वसनीयता के साथ हम कहते हैं कि कैलों का माध्य वजन 81. 61 और 85.29 ग्राम के मध्य है।

टिप्पणी –1 हम जानते हैं कि द्विपद समग्र मे ंमाध्य np एक अनुमानक है इसलिए p का अनुमानक

$$\hat{p}=\frac{\bar{x}}{n}=\frac{3.38}{7}=0.48$$

टिप्पणी –2 पायसन समग्र में माध्य का अनुमानक $\hat{\lambda}=\bar{x}=0.2$

टिप्पणी –3 पायसन समग्र में माध्य n_1 का अनुमानक $\hat{\lambda}=\bar{x}=1.2$ है।

11.5 परिकल्पनाओं का परीक्षण

अनुमानों का परीक्षण समग्र से लिऐ गये नमूनों का उपयोग करके समग्र के प्राचल के संबंध मे ंअनुमानों की वैधता के सत्यापन के साथ संबंधित हैं मान लीजिए हम मानते हैं कि x शहर के निवासी की औसत आय रू0 50 प्रतिदिन हे। इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए, x शहर के कुछ निवासीयों को यादृाच्दिक तरीके से चयनित किया गया और उनकी औसत दैनिक आय ज्ञात की गई। यदि यह नमूना माध्य रू0 50 के करीब है तो हम यह निष्कर्ष निकालते है कि x शहर के निवासी की औसत आय 50 रूपये है इस प्रकार यदि नमूना माध्य रू0 50.60 है, चूॅकि यह मान रू0 50 के करीब है, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि x शहर के निवासी की औसत आय रू0 50 प्रतिदिन है। दूसरी और यदि नमूना माध्य रू0 68.60 है चूॅकि यह मान रू0 18 से दूर है, तो हम यह निष्कर्ष निकालते हैं, कि x शहर के एक निवासी की औसत आय रू0 50 से भिन्न है।

सांख्यिकीय परिकल्पना :– एक सांख्यिकीय परिकल्पना समग्र के सांख्यिकीय विवतरण के संबंध मे ंएक अभिप्राय है। यह समग्र के मापदंडों के बारे में बयान है।

सांख्यिकीय परिकल्पना को H द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण

1) H : समग्र का माध्य $\mu = 25$ ।

2) H : समग्र सामान्य रूप से माध्य $\mu = 25$ और मानक विचलन $\sigma = 2$ के साथ वितरित है।

एक अनुमान जो पूरी तरह से समग्र के सांख्यिकीय वितरण को निर्दिष्ट करती हे, सरल परिकल्पना कहा जाता है यह एक ऐसी अवधारणा है जो समग्र के सभी मापदंडों को निर्दिष्ट करता है। H : समग्र का माध्य $\mu = 25$ के साथ सामान्य रूप से वितरण एक सरल परिकल्पना है।

एक परीक्षण प्रक्रिया की शुरूआत करने के लिए, एक परिकल्पना बना दी जाती है, इस परिकल्पना की वैद्यता का परीक्षण किया जाता है यदि परिकल्पना सही पायी जाती है तो इसे स्वीकार किया जाता है। दूसरी ओर, यह गलत पायी जाती है तो इसे अस्वीकार कर दिया जाता है। परिकल्पना संम्भव नकारों की जॉच की जा जिसमे ंरही है, शून्य परिकल्पना कहा जाता हे। शून्य परिकल्पना को μ_0 से प्रदर्शित किया जाता है यदि शून्य परिकल्पना को गलत पाया जाताहै, तो एक और अवधारणा जो शून्य अवधारणा के विपरीत है, जब शून्य परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है , दूसरी परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है उसे वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं। वैकल्पिक परिकल्पना को H_1 से प्रदर्शित करते है।

मान लीजिए एक शून्य परिकल्पना $H_\sigma : \mu = 1oo$ है(औसत मजदूरी 100 रू0 है)

परिस्थितियों के आधार पर वैकल्पिक परिकल्पना निम्न में से कोई भी हो सकती है।

$H_1 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से भिन्न हो)

$H_2 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से ज्यादा हो)

$H_3 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से कम हो)

परीक्षण प्रक्रिया :– एक शून्य परिकल्पना के परीक्षण के एिल सांख्यिकीय प्रक्रिया के चरण इस प्रकार हैः–

1) शून्य परिकल्पना की स्थापना
2) वैकल्पिक परिकल्पना की स्थापना
3) परीक्षण ऑकडों और शून्य वितरण की पहचान करना
4) Critical क्षेत्र की पहचान करना
5) यादृच्छिक नमूने को लेना औरवास्तव में इसके परीक्षण का आयोजन करना।
6) निर्णय लेना (अनुमान देना)

1) शून्य परिकल्पना की स्थापना :– संभव अस्वीकृति के लिए परीक्षण किया जा रहा है जो परिकल्पना शून्य अवधारणा है। शून्य परिकल्पना मे ंयह हो सकता है कि

- प्राचल किसी दिए गए मान के बराबर है। ($\mu = \mu_0$)
- दो समग्र के एिल प्राचल बराबर है। ($\mu_1 = \mu_2$)
- अन्तर नगण्य है। (सार्थक नहीं है)
- वितरण उपयुक्त है।
- विशेषताऐं स्वतन्त्र है, और इसी तरह।

2) वैकल्पिक परिकल्पना की स्थापना :–

परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है, जब शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है, वैकल्पिक परिकल्पना कहते है। यह हो सकता है कि :

- प्राचल दिए गए मान के बराबर नहीं है। ($\mu \neq \mu_0$)
- प्राचल दिए गए मान से अधिक है। ($\mu > \mu_0$)
- दो समग्रो के लिए प्राचल समान नहीं है। ($\mu_1 \neq \mu_2$)

- पहले समग्र का प्राचल दूसरे समग्र के प्राचल से कम है ($\mu_1=\mu_2$)
- अतंर अर्थपूर्ण है।
- वितरण समुचित नहीं है।
- विशेषताऐं निर्भर है। (स्वतन्त्र नहीं)

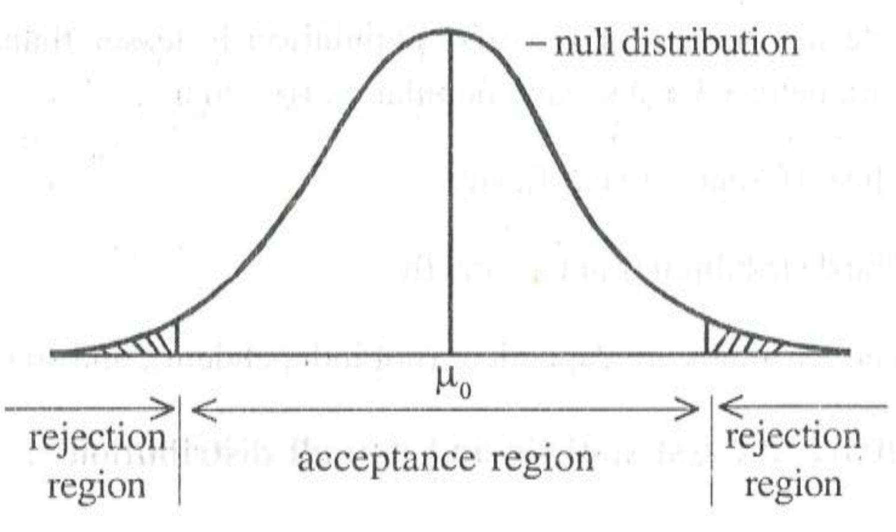
3) परीक्षण ऑकडों और शून्य वितरण की पहचान करना :–

परीक्षण ऑकडे वे ऑकडे हैं जिनके वितरण के आधार पर परीक्षण किया जाता है। H_0 के अंतर्गत परीक्षण ऑकडों के सांख्यिकीय वितरण को शून्य वितरण कहा जाता है। $H_0 : \mu = \mu_0$ (*mean is euqual to* μ_0) के परीक्षण के लिए, सांख्यिकीय परीक्षण $\bar{x}$ नमूना माध्य है। H_o के अर्न्तगत $\bar{x}$ का वितरण $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ है। यह $\bar{x}$ शून्य वितरण है हालॉकि सुविधा के लिए, मानकीकृत रूप Z= $\frac{x-\mu_0}{\sigma_m}$ समझा जा सकता है जिसमे शून्य N(0,1) वितरण है।

4) Critical (अस्वीकृत) क्षेत्र की पहचान करना :–

परीक्षण ऑकडों के उन मानों का समूह जो शून्य अवधारणा के लिए अस्वीकृति का नेतृत्व करता है, को अस्वीकृति क्षेत्र कहा जाता है। परीक्षण ऑकडों के उन मानों का समूह जो शून्य अवधारणा की स्वीकृति का नूतृत्व करता हे, स्वीकृति क्षेत्र कहा जाता है।

स्वीकृति क्षेत्र की सीमांकन सीमा को स्वीकृति मान कहा जाता है स्वीकृति क्षेत्र ऐसा बना हुआ है कि जब H_6 सही हो, इसकी अस्वीकृति की संभावना एक छोटा सा पूर्व निर्धारित मान है इस पूर्व निर्धारित मान को महत्व का स्तर कहा जाता है।



महत्व का स्तर एक पूर्व निर्धारित ऊॅपरी सीमाा है जो कि वास्तव मे सही है जब शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति की संभावना होती है। महत्व का स्तर ∝ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

आमतौर पर ∝ का पूर्व निर्धारित मान 0.05 या 0.01 होगा। दूसरे शब्दों में , यह 5% या 1% होगा । परीक्षण की प्रकृति औरवैकल्पिक परिकल्पना की प्रकृति के आधार पर , Critical क्षेत्र का एक हिस्सा हो सकता हे या इसके दो भाग हो सकते है। यदि Critical क्षेत्र मे एक भाग है तो परीक्षण को एकतरफा परीक्षण कहते है। यदि Critical क्षेत्र के दो भाग होत हैं, तो उसे दो तरफा परीक्षण कहते हैं।

5) यादृच्छिक नमूने को लेना और वास्तव में इसके परीक्षण का आयोजन करना :– आकार 'n' का एक यादृच्छिक नमूना समग्र से लिया जाता है। ऑकडे परीक्षण के मान की गणना नमूना मान से की जातीा

है। यदि परिकलित मान (प्रेक्षित मान) Critical क्षेत्र को सम्बन्धित है, H_1 के पक्ष मे H_0 अस्वीकार होगी दूसरी ओर यदि परिकलित मान स्वीकृति से सम्बन्धित होता है तो H_0 स्वीकार होगी।

6) निर्णय लेना (अनुमान देना) :–

अंतिम निर्णय (अनुमान, निष्कर्ष) की घोषणा की जाती है

निर्णय

(अ) नई दवा पुनाने की तुलना मे अधिक प्रभावी है।

(ब) नर नवजात शिशुओं के बीच नवजात जन्मोत्तर वृद्धि समान होती है, जैसे कि नर शिशुओं में हो सकता हे।

प्रथम एवं द्वितीयक प्रकार की त्रुटियॉ

जब एक वैकल्पिक परिकल्पना के विरूद्ध एक शून्य परिकल्पना का पीरक्षण करते हें, निम्न परिस्थितियों मे एक सामने आती हैं

क्र0सं0	वास्तविक तथ्य	नमूने के आधार पर निर्णय		त्रुटि
1	H_0 सत्य है।	स्वीकार H_0	सही निर्णय	---
2	H_0 सत्य है।	अस्वीकार H_0	गलत निर्णय	Type I
3	H_0 असत्य है।	स्वीकार H_0	गलत निर्णय	Type II
4	H_0 असत्य है।	अस्वीकार H_0	सही निर्णय	---

यहॉ परिस्थितियों (2) और (3) में, गलत फैसले आते है। इन गलत निर्णयों को क्रमशः पहली तरह की त्रुटि (I प्रकार त्रुटि) और दूसरी तरह की त्रुटि (II प्रकार त्रुटि) कहा जाता हे। इस प्रकार

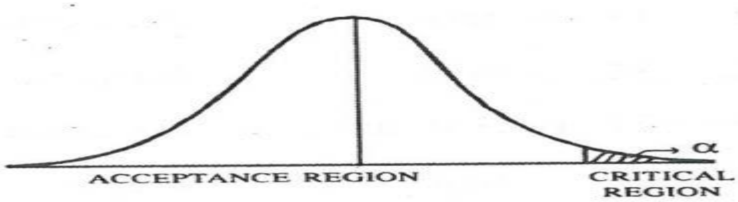
- पहली तरह की त्रुटि वासतव मे सही है जब शून्य अवधारणा के अस्वीकार करने का बेहद गलत निर्णय लिया जाता है।
- द्वितीयक प्रकार की त्रुटि मे गलत अनुमानों को स्वीकार करने का गलत निर्णय लिया जाता है, जब यह वास्तव मे सत्य है। पहले तरह की त्रुटि होने की संभावना $\propto$ हे। यह पीरक्षण का एक आकार है।

दूसरी तरह की त्रुटि की संभावना के घटित होन केा B द्वारा प्रदर्शित करते हैं

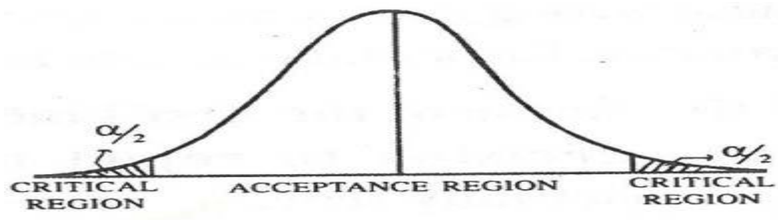
(1-B) के मान को परीक्षण का घात कहा जाता है।

परीक्षण की घात H_0 को अस्वीकार करने की संभावना है जब यह सत्य नहीं है। जबकि परीक्षण, महत्व का स्तर $\propto$ अग्रिम में तय किया जाता है। फिर महत्वपूर्ण क्षेत्र इस तरह निर्धारित किया जाता है कि (1-B) की अधिकतम हो इस प्रकार Critical मान महत्व के स्तर पर आधारित होता है।

एक पूंछ और दो पूंछ परीक्षण (एक तरफा और दो तरफा परीक्षण)



एक पूंछ परीक्षण



दो पूंछ परीक्षण

दूसरी आर, यदि Critical क्षेत्र परीक्षण ऑकडों के शून्य वितरण की पूँछ पर माना जाता हे, तो परीक्षण दो पुच्छिक परीक्षण (दो तरफा परीक्षण) है। दो पूँछ के मामले में H_0 का मान μ से कम σ से ज्यादा हो सकता है। एक पुच्छीय परीक्षण में $\mu > \mu_0$ या $\mu < \mu_0$ या दिशाऐं दी जाती है।
निम्नलिखित मे से कुछ एक पुच्छीय परीक्षण हैं :–

- परीक्षण $\mu_0{:}\mu = \mu_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu > \mu_0$
- परीक्षण $\mu_0{:}\mu_1 = \mu_2$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu_1 > \mu_2$
- Goodness of Fit के लिए परीक्षण
- आकस्मिकता तालिका मे विशेषताओं की आबादी के लिए परीक्षण

कुछ निम्नलिखित दो पुच्छीय परीक्षण हे।

- परीक्षण $\mu_0{:}\mu = \mu_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu \neq \mu_0$
- परीक्षण $\mu_0{:}\mu_1 = \mu_2$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu_1 \neq \mu_2$
- परीक्षण $\mu_0{:}\sigma = \sigma_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\sigma > \sigma_0$

उदाहरण 1:– पिछला अनुभव कहता है कि काजू गिरी मे 1.2 ग्राम वजन का मानक विचलन है। 40 माध्य वजन के यादृच्छिक चुने गिरी (दानों) के लिए माध्य त्रुटियॉ ज्ञात कीजिए।

हल :– यहॉ, σ = 1.2 ग्राम और n = 40

नमूना माध्य की मानक त्रुटि $\text{S.E}(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= \frac{12}{\sqrt{40}}$ = 0.1897 ग्राम है।

उदाहरण 2 :– एक कालेज के लडकों के वजन का माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 47 किलोग्राम एवं 31 किलोग्राम है। उसी कालेज के लडकियों के वजन का माध्य एवं मानक विचलन 45 किलोग्राम एवं 2.8 किलोग्राम है। कालेज मे से 16 लडके एवं 9 लडकियॉ यादृच्छिक चयनित की जाती हे।

(i) 16 चयनित लडकों के माध्य वजन का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

(ii) 9 चयनित लउकियों के माध्य वजन का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

(iii) चयनित लडकों के औसत वनज एवं चयनित लडकियों के औसत वजन के अन्तर का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल :– यहॉ

μ_1 =47 किग्रा	$\sigma_1 =$ 3.1 किग्रा	$n_1 = 16$
μ_2 =45 किग्रा	$\sigma_{12} =$ 2.8 किग्रा	$n_2 = 9$

यदि $\overline{x_1}$ चयनित लडको का माध्य वजन है।

$\overline{x_2}$ चयनित लडकियों का माध्य वजन है।

(1) माध्य = E $(\overline{x_1}) = \mu_1 = 47$ किग्रा

S.E. $(\overline{x_1})\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{3.1}{\sqrt{16}} = 0.775$ किग्रा

(2) माध्य = E $(\overline{x_2}) = \mu_2 = 45$ किग्रा

S.E. $(\overline{x_2})\ \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = \frac{2.8}{\sqrt{9}} = 0.993$ किग्रा

(3) माध्य $= (\overline{x_1} - \overline{x_2}) = \mu_1 - \mu_2$

47–45 $=$ 2 किग्रा

$$S..E.(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}} + = \sqrt{\frac{(3.1)^2}{16}} + \frac{(2.8)^2}{9} = 1.213\, kgs$$

एक नमूना जॉच, परिणाम पैदा करता है, और इन परिणामों के साथ, समग्र के लिए निर्णय बनाये जाते हैं लेकिन ऐसे निर्णयों मे ंअनिश्चितता का एक तत्व शामिल है, जो गलत फैसले का कारण है। परिकल्पना एक ऐसी धारणा है जो समग्र प्राचल के बारे मे ंसत्य या असत्य भी हो सकती है ंउदाहरण के लिए, सिक्के को 300 बार उछालने पर कोई 190 चिट और 110 बार पट प्राप्त कर सकता है। इस उदाहरण पर, हम यह जांचने में रूचि रखते हैं कि क्या सिक्का निष्पक्ष हे या नहीं। इसलिए, हम इसका मूल्यांकन करने के लिए एक परीक्षण आयोजित कर सकते हैं कि क्या अंतर नमूनाकरण के कारण है। एक महत्वपूर्ण परीक्षण के क्रियान्वयन की प्रक्रिया निम्नानुसार है।

अवधारणा का निर्माण – हमारी धारणा को सत्यापित करने के लिए जो नमूना अध्ययन पर आधारित है, हम ऑकडे एकत्र करते हैं और नमूना मान और समग्र मान के बीच के अंतर को पता करते है। यदि इनमें कोई अंतर नहीं है या यदि अंतर बहुत छोटा है, तो हमारा अनुमानित मान सही है, सामान्यतया दो अवधारणाओं का निर्माण किया जाना चाहिए और मगर एक परिकल्पना सही है, तो दूसरे को अस्वीकार करेंगें।

(अ) शून्य परिकल्पना :– यह अंतर के महत्व का परीक्षण करने के लिए बहुत उपयोगी उपकरण है। समग्र से सम्बन्धित किसी भी परिकल्पना को सांख्यिकीय अवधारणा कहा जाता है। सांख्यिकीय परीक्षण की प्रक्रिया में, समग्र से प्राप्त नमूने पर आधारित अवधारणा को अस्वीकार या स्वीकार किया जाता है। सांख्यिकीयविद् अवलोकन के माध्यम से परिकल्पना की जॉच करते हैं और संभावित देते हैं। सरल परिकल्पना से पता चलता है कि नमूना मान और अध्ययन के तहत समग्र मान किसी तरह या अंतर प्रदर्शित नहीं करते हें परिकल्पना हमने कल्पित की है, वह शून्य अवधारणा है, इसका अर्थ है कि न मूना के माध्य और समग्र माध्य के बीच वास्तवकि अंतर शून्य है कम से कम अंतर होना महत्वहीन है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति का अर्थ है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच का वास्तविक अंतर काफी महत्वपूर्ण है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति से पता चलता है कि समय पर वैकल्पिक परिकल्पना।

उदाहरण के लिए :–

(1) एक विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई 155 सेन्टीमीटर है।

(2) एक व्यवसाय की औसत दैनिक बिक्री रू0 1,50,000 है।

(3) किसी विशेष गांव के निवासी की औसत आय 100 रूपये है। इन सभी बयानों को नमूना परीक्षणो ंके आधार पर सत्यापित करना होगा।सामान्यतया एक परिकल्पना में कहा जाता है कि नमूना माध्य एवं समग्र माध्य के बीच कोई अंतर नहीं हैं या $\mu = \mu_0$ शून्य परिकल्पना को μ_0 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(ब) वैकल्पिक परिकल्पना :– μ_0 की अस्वीकृति वैकल्पिक परिकल्पना की स्वीकृति की ओर जाता है, जिसे H_1 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जैसे :–

$H_0 = \mu = 155$ (शून्य परिकल्पना)

$H_1 = \mu \neq 155$ या $\mu > 155$ या $\mu < 155$ (वैकल्पिक परिकल्पना)

ज्ब दो अवधारणाओं को स्थापित किया जाता है, तो शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति एक नमूना अध्ययन पर आधारित होती है। इस प्रकार यह दो गलत निष्कर्ष की ओर जाता है। (1) H_0 को अस्वीकृत करते हुए जब H_0 सत्य है (2) H_0 को अस्वीकृत करते हुए जब H_0 असत्य है । इसे निम्नलिखित तालिका मे ंवर्णित किया जा सकता है।

	नमूने में से निर्णय	
	H_0 स्वीकार	H_0 अस्वीकार
H_0 सत्य	सही	गलत Type I त्रुटि
H_0 असत्य (H_1सत्य)	गलत Type II त्रुटि	सही

फिर से लिखते हुए

H_0 अस्वीकृत जब यह सत्य है(Type I त्रुटि) $=\alpha$

H_0 स्वीकृत जब यह असत्य है (Type II त्रुटि) $= \beta$

H_0 स्वीकृत जब यह सत्य है (सही निर्णय)

H_0 अस्वीकृत जब यह असत्य है (गलत निर्णय)

स्तर का महत्व :– टाइप I त्रुटि करने की अधिकतम संभावना, जिसे हमने एक परीक्षण मे ंनिर्दिष्ट किया है, को महत्व का स्तर कहा जाता है।

सामान्यतया सांख्यिकीय आंकडों के परीक्षण के लिए 50% महत्व या स्तर निर्धारित किया जाता है। इसका अर्थ है कि हम एक अवधारणा को स्वीकार करने मे ं95% तक विश्वस्त हो सकतें हैं या हम 5% गलत हो सकते है।

महत्वपूर्ण क्षेत्र :– भिन्नता की सीमा में दो क्षेत्र हैं स्वीकृत क्षेत्र और मत्वपूर्ण क्षेत्र या अस्वीकृति क्षेत्र अगर नमूना आंकडा महत्वपूर्ण क्षेत्र में पडते हैं तो हमें शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करना पडता है, क्योंकि इससे गलत निर्णय होता हे। हम H_1 के लिए जाते हैं, यदि नमूना आंकडों का परिकलित माना अस्वीकृत क्षेत्र में होता है।

एक पुच्छ एवं दो पुच्छ परीक्षण :– एक सामान्य चक्र के तहत अस्वीकृत (महत्वपूर्ण) क्षेत्र, जैसा कि पहले कहा गया है दो तरह से विभाजित किया जा सकता है।

(अ) वक्र के नीचे दोनो ंतरफ

(ब) वक्र के नीचे एक तरफ, या तो दायी पूंछ पर या बांए पूंछ पर

निर्णय या निष्कर्ष निकालना :– आखिरकार हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए निष्कर्ष पर आते हैं, यदि निर्णय परिकलित मान के आधार पर है चाहे वह स्वीकृति क्षेत्र या अस्वीकृत क्षेत्र है।

मानक त्रुटि :– नमूना वितरण के मान विचलन को मनक त्रुटि कहते हैं उदाहरण के लिए $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{\overline{x_3}}$..... ....इत्यादि सभी नमूनों के माध्यों को समग्र से लिया गया है। इन सभी माध्यों के मानक विचलन माध्य की मानक त्रुटि है। इसके लिए सूत्र $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है।

उपयोगिता :– (i) यह परिकल्पना के परीक्षण मे ंउपयोगी साधन है। हम परिकल्पना को 5: स्तर के महत्व पर जांच सकते हैं, जिसका अर्थ है कि यदि प्रेक्षित मान एवं अपेक्षित मान के बीच में अंतर $\pm 1.96\, S.E$ से अधिक है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार नहीं की जाती है और किसी को वैकल्पिक परिकल्पना के लिए जाना पडता है। स्तर का महत्व 1% भी हो सकता है। सामान्यतया, परिकल्पना स्वीकार की जाती है यदि अंतर 3 S.E से कम है। 5% स्तर का महत्व प्रचलित है।

2. नमूने के विश्वसनीयता की जांच की जा सकती हे।

3. मापदंडों (प्राचलों) का मान सीमा के साथ निर्धारित किया जा सकता है।

उदाहरण 3 :– A शहर में, 32% मतदाताओं ने राजनैतिक पार्टी X के लिए मत दिया। शहर 13 में, 29% मतदाताओं ने X राजनैतिक पार्टी के लिए मत दिया

(i) शहर A मे ंसे 70 यादृच्छिक रूप से चुने हुए मतदाताओं मे ंसे यदि p_1 उन मतदाताओं का अनुपात है जिन्होंने X राजनैतिक दल के लिए मतदान किया, p_1 के लिए माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

(ii)शहर B में से 60 यादृच्छिक रूप से चुने हुए मतदाताओं में से, यदि p_2 एन मतदाताओं का अनुपात है जिन्होने X राजनैतिक दल के लिए मतदान किया, p_2 के लिए माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

(iii) $(p_1 - p_2)$ का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

हल :–

यहाॅ , $p_1 = \frac{32}{100} = 0.32 \; and \; p_2 = \frac{29}{100} = 0.29$

$n_1 = 70 \; and \; n_2 = 60$

$$(i)\; Mean = E(p_1) = p_1. = 0.32$$

$$S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.32 \times 0.68}{70}} = 0.05575$$

$$(ii)\; Mean = E(p_2) = p_2. = 0.29$$

$$S..E.(p_2) = \sqrt{\frac{P_2 Q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.29 \times 0.71}{60}} = 0.05858$$

$$(iii)\; Mean = E(p_1 - p_2) = p_1 - p_2. = 0.32 - 0.29 = 0.03$$

$$S..E.(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1} + \frac{P_2 Q_2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.323 \times 0.68}{70}} + \frac{0.29 \times 0.71}{60}$$

$$= 0.08087$$

उदाहरण 4 :एक समाज मे ंमहिलाओं का अनुपात 0.48 है। जिसमें से 64 सदस्यों को यादृच्छिक तरीके चयनित किया गया, यदि p_1 महिलाओं का अनुपात है। दूसरे चयन मे ंजिसने 86 सदस्य चयनित किये गये हो उसमे ं p_2 महिलाओं का अनुपात है।
ज्ञात कीजिए :–
(i) p_1 की मानक त्रुटि
(ii) p_2 की मानक त्रुटि
(iii) $(p_1 - p_2)$ के अंतर की मानक त्रुटि
हल :–
यहाँ $p_1 = p_2 = 0.48 = p$ (माना)
$n_1 = 64$ और $n_2 = 86$

$$(i)\ S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{PQ}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.42\times0.52}{64}} = 0.06245$$

$$(i)\ S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{PQ}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.48\times0.52}{86}} = 0.05387$$

$$S..E.(p_1 - p_2) = \sqrt{PQ\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}$$

$$= \sqrt{0.48\times0.52\left[\frac{1}{64}+\frac{1}{86}\right]}$$

$$= \sqrt{0.48\times0.52\left[\frac{86+64}{64\times86}\right]}$$

$$= 0.08248$$

उदाहरण 5 :– विभिन्न बीजों के लिए आवश्यक औसत अंकुरण समय का अनुमान लगाना जरूरी हैं दस यादृच्छिक रूप से चयनित बीज दिखाये जा रहे हैं और अंकुरण का समय नीचे दिया जा रहा है। समय (दिन) 28,32,27,38,30,31,30,30,27 और 33 नमूना माध्य को समग्र माध्य के अनुमानक के रूप में लेते हुए औरसत अंकुरण समय का औसत माध्य बताऐं।

हल :– नमूना माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$$\frac{28+32+27+38+30+31+30+30+27+33}{10}$$

$= \frac{306}{10} = 31$दिन (लगभग)

इस प्रकार औसत अंकुरण समय का अनुमान 31 दिन है इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि औसतन 31 दिनों मे ंबीज की विविधता अंकुरित होती है।

उदाहरण 6 :– पत्नीयों की अपेक्षा औसतन, पति कितने लम्बे हैं जानने के लिए 8 जोडों को यादृच्छिक तरीके से लिया जाता है। प्रत्येक मामले में पति और पत्नीयों की ऊँचाईयों को मापा जाता है और उनका अंतर निम्नानुसार दर्ज होता है।

जोडा	1	2	3	4	5	6	7	8
अंतर (सेन्टीमीटर में)	5	7	12	23	6	-4	10	9

नमूना माध्य $\bar{x}$ का अनुमानक के रूपम` ंप्रयोग करते हुए समग्र माध्य μ को अनुमानित करें।
हल : –

अनुमानित $\mu = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$= \frac{5+7+12+23+6+4+10+9}{8} = \frac{68}{8} = 8.5$ सेन्टीमीटर

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि पति अपनी पत्नियों से औसतन 8.5 सेन्टीमीटर लम्बे हैं।
उदाहरण 7 5– एक बेकरी का मालिक शहर मे ंकके की औसत दैनिक मांग का अनुमान लगाना चाहता है। 156 दिनों में, सवेक्षण ने लिम्नलिखित मांग का खुलासा किया।

मांग (केक)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
दिन	13	43	70	27	3

औसत मांग का अनुमान लगाऐं।
हल :–

मांग	दिन (f)	मध्य मान (x)	f.x.
120-130	13	125	1625
130-140	43	135	5805
140-150	70	145	10150
150-160	27	155	4185
160-170	3	165	495
Total	156	-	22260

$\bar{x}$ का अनुमान $= \frac{\sum fx}{N} = \frac{22260}{156} = 143$ (लगभग)

इस प्रकार औसत मांग को अनुमान 143 केक/प्रतिदिन है।

निर्णय लेने के लिए परिकल्पना परीक्षण मे ंउचित वितरण का प्रयोग :–

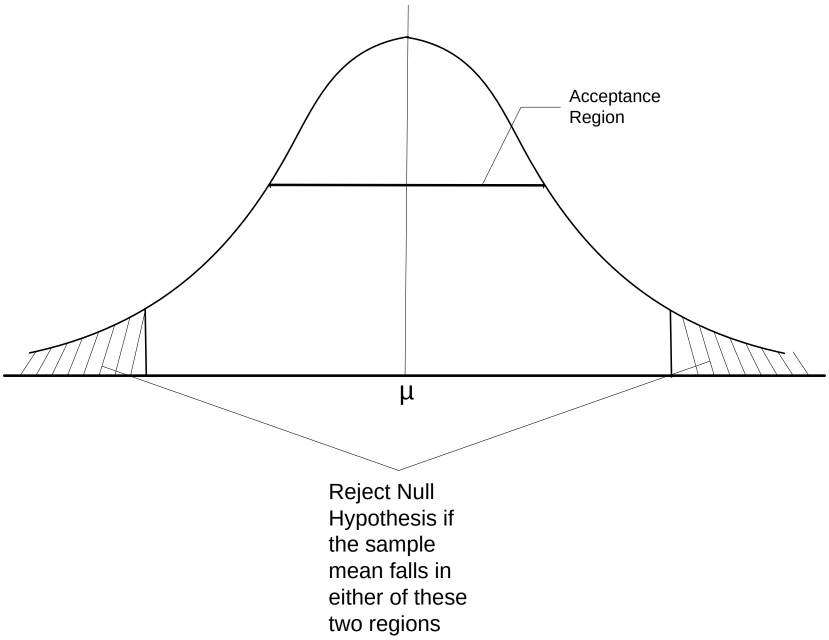
किस स्तर के महत्व का उपयोग करना है, तय करने के लिए, परिकल्पना परीक्षण में हमारा अगला कार्य उचित संभाव्यता वितरण को निर्धारित करना है। हमारे पास सामान्य वितरण और t वितरण के बीच एक विकल्प है। उचित वितरण को चुनने के लिए नियम, उन इकाईयों मे ंसमान है जो हमें आकलन के आधार पर मिला था। नीचे दी गई सारणी का सारांश है कि मध्यों को परीक्षण करने मे ंसामान्य और t वितरण का उपयोग किया जाता है। बाद में इस अध्याय, में हम अनुपातों के बारे मे ंपरीक्षण परिकल्पना के लिए उपयुक्त वितरण की जांच करेंगे। एक नियम को याद रखे जब एक माध्य के मान पर विचार किया जाए । अनुमान में, जब भी समग्र आकार परिमित है, परिमित जनसंख्या गुणक का उपयोग करें, नमूनाकरण प्रविस्थापन के बिना किया जाता है और नमूनाकरण प्रविस्थापन के बिना किया जाता है औश्र नमूना समग्र से 5% अधिक होता है।

माध्यों के बारे मे ंपरीक्षण परिकल्पना में सामान्य और t वितरण का उपयोग करने के लिए शर्तें		
	जब समग्र मानक विचलन ज्ञात	जब समग्र मानक विचलन अज्ञात

	हो	हो
नमूना आकार n 30 से ज्यादा हो	सामान्य वितरण, Z तालिका	सामान्य वितरण, Z तालिका
नमूना आकार n 30 है या उससे कम और समग्र लगभग सामान्य है	सामान्य वितरण, Z तालिक	t वितरण , t तालिका

दो पुच्छीय परीक्षण और एक पुच्छीय परीक्षण
दो पुच्छीय परीक्षण :–

दो पुच्छीय परीक्षण में, शून्य परकिल्पना को खारिज कर दिया जाता है यदि नमूना माध्य अनुमानित समग्र माध्य से अर्थपूर्ण रूप मे ंज्यादा या कम होता है इस प्रकार दो पुच्छीय परीक्षण में, दे़ा अस्वीकृति क्षेत्र होत हैं इसे नीचे दिए गए चित्र मे ंदिखाया गया हैः–



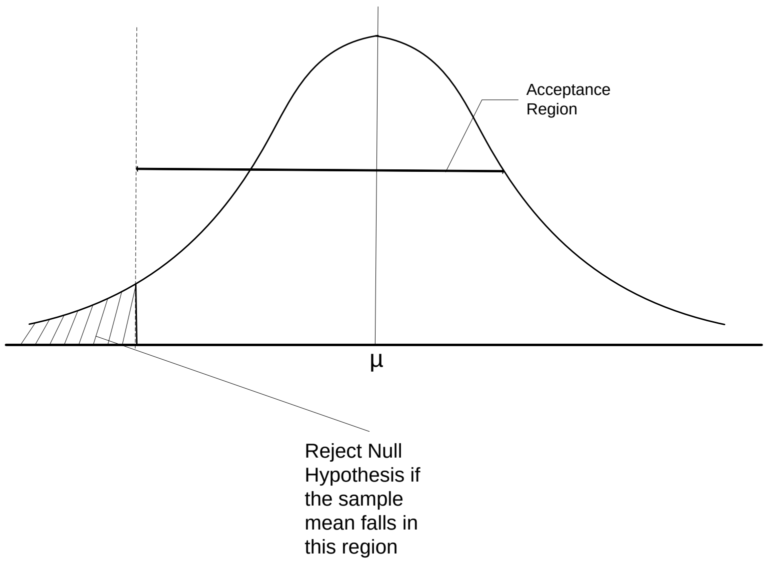
जब शून्य परिकल्पना $\mu = \mu_{Ho}$ है (जहॉ μ_{Ho} कोई विनिर्दिष्ट मान है।) और वैकल्पिक परिकल्पना $\mu \neq \mu_{Ho}$ है द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त होता है।

मान लें कि प्रकाश बल्ब का निर्माता $\mu = \mu_{Ho} = 1000$ घन्टे के औसत जीवन के साथ बल्ब बनाना चाहता है। यदि जीवनकाल छोटा होता है, वह प्रतिर्स्पधा में अपने ग्राहकों नुकसान । यदि जीवनकाल अधिक हेाता है, तो उसमें उच्च उत्पादन कीमत अधिक लगेगी क्योंकि तन्तु अतिशय प्रगाए कीमत होगी।

क्या उसकी उत्पादन प्रक्रिया सही तरीके से काम कर रही है को देखने के लिए परिकल्पना के परीक्षण $\mu_0\mu = 1000$ के लिए, वह उत्पादन का एक नमूना लेता है। क्योंकि वह किसी भी स्थिति में 1000 घन्टे से आगे नहीं हटना चाहता है, उचित वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 1000$ है और वह द्विपुच्छीय परीक्षण प्रयोग करता है। इसका अर्थ है कि ,वह शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करता है, यदि नमूने मे ंबल्बों का औसत जीवन या तो 1000 घन्टे से बहुत अधिक हो या 1000 घन्टे से बहुत कम हो।

यद्यपि इन परिस्थितियों में द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त नहीं होता है, और हमें एक पुच्छीय परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए। थोक व्यापारी मामले में विचार करते हैं कि वह प्रकाश बल्ब के निर्माता के

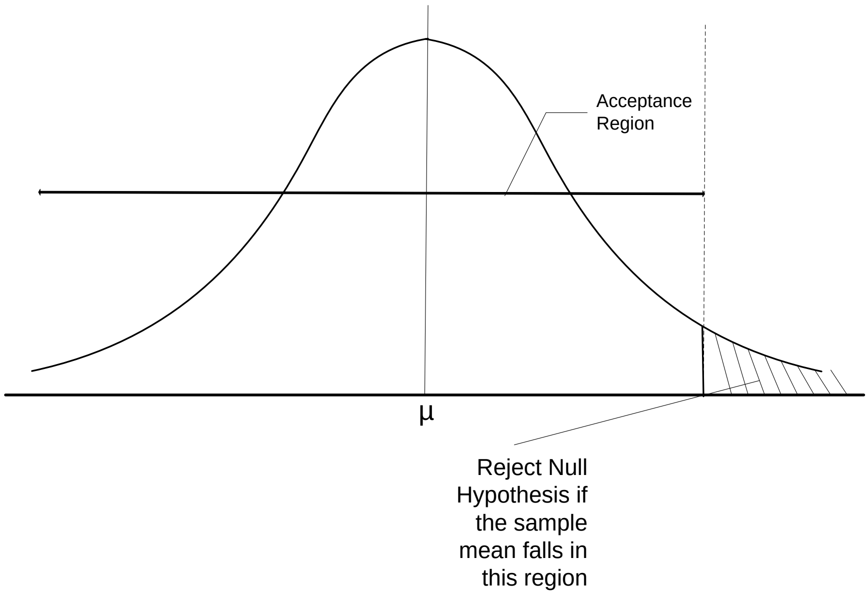
उपरोक्त वर्णन से प्रकाश बल्ब खरीदता है । थोक व्यापारी प्रकाश बल्ब का बढा ढेर खरीदता है बल्ब के ढेरों को तब तक स्वीाकर नहीं करना चाहित है जब तक उनका औसत जीवन कम से कम 1000 घन्टा या न्यूनतम 1000 घन्टा हो। प्रत्येक शिपमेंट के आने पर, थोक व्यापारी यह तय करने के लिए एक नमूने का परीक्षण करता है कि क्या शिपमेंट को स्वीाकर करना चाहिए। कम्पनी शिपमेंट को तभी अस्वीकार करेगी यदि कम्पनी महसूस करती है कि इनका औसत जीवन 1000 घन्टे से कम हो। यदि कम्पनी महसूस करती है कि बल्ब अपेक्षित की तुलना (औसत जीवन 1000 घन्टे से ज्यादा) में बेहतर है, यह निश्चित रूप से शिपमेंट को अस्वीकार नहीं करेगो अधिक लम्बे जीवन मे ंकोई अतिरिक्त कीमत नहीं होती है। इसलिए थोक व्यापारी की परिकल्पनाऐं $\mu_0: \mu = 1000$ घन्टे और $\mu_0: \mu < 1000$ घन्टे है। यह H_0 को तभी अस्वीकार करती है यदि नमूना बल्बों का औसत जीवन 1000 घन्टों से उल्लेखनीय ढंग से कम होता है। इस परिस्थिति को निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जाता है। इस चित्र से , हम देख सकते हैं कि इस परीक्षण को क्यों बायॉ पुच्छीय परीक्षण (या एक निचला पुच्छीय परीक्षण) कहा जाता है।



यदि नमूना माध्य इस क्षेत्र में आता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार करते हैं।

सामान्य रूप में, यदि परिकल्पनाऐं $\mu_0: \mu = \mu H_0$ और $H_1: \mu < \mu_{Ho}$ हो तो बायें पुच्छीय (निचला पुच्छीय) परीक्षण प्रयोग होता है। इस तरह की परिस्थिति में, यह नमूना साक्ष्य नमूना माध्य के साथ उल्लेखनीय ढंग से अनुमानित समग्र माध्य से कम है जो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हुए वैकल्पिक परिकल्पना के पक्ष की और जाता है। दूसरे शब्दों में, अस्वीकृत क्षेत्र नमूना माध्य के वितरण में निचला पुच्छीय (बायीं पुच्छीय) होता है, और इसलिए इसे बायी पुच्दीय परीक्षण कहते हैं।

एक बायी पुच्छीय परीक्षण दो प्रकार के एक पुच्छीय परीक्षणोों मे से एक हैं सम्भवतः अब तक अनुमान लगाया जाता है, परीक्षण दायीं पुच्छीय परीक्षण (या एक ऊपरी पुच्छीय परीक्षण) है। एक ऊपरी पुच्छीय परीक्षण प्रयोग किया जाता है जब परिकल्पनाऐं $Ho: \mu = \mu_{Ho}$ और $H_1: \mu > \mu_{\mathbf{Ho}}$ हों। केवल नमूना माध्य के मानों जो कि अनुमानित समग्र माध्य से अधिक हैं वैकल्पिक परिकल्पना के पक्ष में शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करने का कारण होगा। इसे ऊपरी पुच्छीय परीक्षण कहा जाता है क्योंकि अस्वीकृत क्षेत्र नमूना माध्य के वितरण के ऊपरी पुच्छीय है।



यह आपको फिर से याद दिलाना है कि , परिकल्पना परीक्षण के प्रत्येक उदाहरण में, नमूना सूचना के आधार पर जब हम शून्य परिकल्पना को स्वीाकर करते हैं, तो हम वास्तव मे कहते हैं कि इसमें कोई सांख्यिकी साक्ष्य नहीं है जिससे इसे अस्वीकार कर दिया जाये। हम यह नहीं कह रहे होते हैं कि शून्य परिकल्पना सत्य है। शून्य परिकल्पना को सिद्ध करने के लिए एक ही तरीका समग्र प्राचल को जानना है और जो नमूनाकरण के साथ सम्भव नहीं होता है। इस प्रकार, हम शून्य परिकल्पना स्वीकार करते हैं और व्यवहार करते हैं कि यह सच है क्योंकि हमें इसे अस्वीकार करने के लिए कोई साक्ष्य नहीं मिल सकते हैं।

परिकल्पना परीक्षण में अवधारणाऐं

- दो पुच्छीय, ऊपरी पुच्छीय या निचला पुच्छीय परीक्षण के प्रयोग के निर्धारण के लिए नमूना परिणामों का प्रयोग न करें।
- किसी भी तरह के आंकडों के संग्रह से पहले, निर्णयकर्ता द्वारा यह मानना है कि उसे क्या पता लगाना है तब परीक्षण के रूप को निर्धारित किया जाता है।

11.6 सारांश

परिकल्पना परीक्षण अवधारणा के साथ आरम्भ होती है, जिसे एक परिकल्पना कहा जाता है, जो समग्र प्राचल के बारे मे होती है । तब हम नमूना आंकडा एकत्र करते हैं, जिससे नमूना सांख्यिकी की रचना होती है, और इस जानकारी को निर्धारित करने के लिए कितनी संभावना है कि हमारा अनुमानित समग्र प्राचल सही है। हम मान लेते हैं कि समग्र माध्य के लिए निश्चित मान है। हमारी अवधारणा की वैद्यता के परीक्षण के लिए हम नमूना आंकडा एकत्र करते हैं और परिकल्पित मान एवं नमूना माध्य का वास्तविक मान के मध्य अन्तर निर्धारित करते हैं। तब हम निर्णय लेते है, कि क्या अंतर उल्लेखनीय ढंग से है। छोटा सा अंतर, माध्य के लिए हमारे परिकल्पित मान के सही होने की ज्यादा संभावना होती है। ज्यादा अंतर होने पर संभावना कम की ओर अग्रसर होती है। दुर्भाग्यवश, परिकल्पित समग्र प्राचल और वास्तविक आंकडे के बीच अंतर प्रायः न तो बहुत बडे हैं जिन्हें हम स्वतः अपनी परिकल्पना में अस्वीकार करते हैं न तो इतने छोटे हेाते हैं कि हम उसे शीध्रता से स्वीकार करते हैं। इसलिए परिकल्पना परीक्षण में, सबसे ज्यादा उल्लेखनीय वास्तविक जीवन निर्णयों के रूप में,स स्पष्ट रूप से समाधान अपवाद हैं, न कि नियम। पूर्वानुमान में, जब कभी समग्र का आकार निश्चित हैं, निश्चित समग्र गुणक का प्रयोग करते

हैं, नमूनाकरण बिना प्रतिस्थापन के साथ किया जाता है, और नमूना समग्र का 5 प्रतिशत से अधिक होता है।

11.7 शब्दावली

परिकल्पना : एक शर्त जिसमें से कुछ इस प्रकार है, यह एक भ्रान्ति है।
सरल परिकल्पना : एक परिकल्पना जो सटीक वितरण निर्दिष्ट करता है।

11.8 बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित परिस्थितियों में, निर्दिष्ट करें कि कौन सा प्रायिकता वितरण परिकल्पना परीक्षण में प्रयोग होता है :

 (अ) H_o: $\mu = 27$, H_1: $\mu \neq 27$, $\bar{x} = 33$, नमूना $\sigma = 4$, $n = 25$

 (ब) H_o: $\mu = 98.6$, H_1: $\mu > 98.6$, $\bar{x} = 99.1$, $\sigma = 1.5$, $n = 50$

 (स) H_o: $\mu = 3.5$, H_1: $\mu < 3.5$, $\bar{x} = 2.8$, नमूना $\sigma = 0.6$, $n = 18$

 (द) H_o: $\mu = 382$, H_1: $\mu \neq 382$, $\bar{x} = 363$, $\sigma = 68$, $n = 12$

 (घ) H_o: $\mu = 57$, H_1: $\mu > 57$, $\bar{x} = 65$, नमूना $\sigma = 12$, $n = 42$

2. भारत में सिनेमाघरों के मालिकों को पता है कि एक हिट फिल्म चलाने के लिए प्रत्येक शहर में औसतन 84 दिन, 10 दिनों के मानक विचलन के साथ फिल्म प्रदर्शित होती थी। एक विशेष फिल्म वितरक समग्र के साथ अपने क्षेत्र में फिल्म की लोकप्रियता की तुलना में रूचि रखता है। उसने यादृच्छिक रूप से 75 सिनेमाघरों को यादृच्छिक रूप से क्षेत्र में चुना है और पाया कि फिल्म 81.5 दिन तक चली।

 I. परीक्षण के लिए उपयुक्त परिकल्पनाएँ लिखें की क्या, समग्र और वितरक के क्षेत्र में सिनेमाघरों के मध्य उल्लेखनीय अन्तर हैं ?

 II. 1: महत्व के स्तर पर, इन परिकल्पनाओं का परीक्षण करें ।

11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

इसका अर्थ है अस्वीकृत क्षेत्र दोनों पुच्छों के अर्न्तगत 0.01 है और स्वीकृत क्षेत्र 0.99 है। इसलिए स्वीकृत क्षेत्र का आधा भाग $\frac{0.99}{2}$ = .4950 है और Z का मान 2.58 इसलिए, स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं $z = \pm 2.58$ or $\bar{x} = \mu_{Ho} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} = 84 \pm 2.58 x \frac{10}{\sqrt{75}}$

निचली सीमा 81.02 और ऊपरी सीमा 86.98 के रूप में हैं।

क्योंकि अवलोकित मान स्वीकृत क्षेत्र में, है, हम शून्य परिकल्पना H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। फिल्म के चलने की अवधि दूसरे सिनेमाघरों के समान है। या दूसरे रूप में :

अवलोकित Z मान $\bar{x} - \frac{\mu_{Ho}}{SE}$ है जहॉं $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{81.4 - 84}{(1.155)}$

$= -2.17$ स्वीकृत Z क्षेत्र $\pm z = \pm 2.58$ है।

11.10 स्वपरख प्रश्न

1. (अ) 24 df के साथ t (स्वतन्त्रता की श्रेणियॉं)

 (ब) Z या सामान्य वितरण : दायीं पुच्छीय परीक्षण

 (स)17 df के साथ t

 (द) Z या सामान्य वितरण द्वि पुच्छीय परीक्षण

(घ) इस परिस्थिति में वास्तविक 41 d.f के साथ t चूँकि 41 df यहॉ नहीं है हम सामान्य वितरण परीक्षण तालिका प्रयोग करते हैं।

2. निम्नलिखित आंकडे दिये गए है :

$\sigma = 10$ दिन , $n = 75$सिनेमाघर $\overline{x} = 81.5$

Ho: $\mu = 84$ दिन H_1: $\mu \neq 84$ दिन $\alpha = 0.01$

3. माइक्रोसाफट ने पिछले साथ अनुमान लगाया था कि 35 प्रतिशत सम्भावित साफटवेयर ग्राहक, नऐ OS विंडोज विस्टा की खरीद की प्रतीक्षा की योजना बना रहे थे, जब तक एक नवीनीकरण जारी न किया गया हो। जनता को आश्वस्त करने के लिए विज्ञापन अभियान के पश्चात माइक्रोसाफट ने 3000 ग्राहकों का सर्वेक्षण किया और पाया कि 950 ग्राहक अभी भी संदेहपूर्ण है। 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर क्या कम्पनी यह निष्कर्ष निकाल सकती है कि संदेहपूर्ण लोगों का अनुपात कम हुआ था। (शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। Z वितरण का प्रयोग करें।)

11.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकी – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड–कलकत्ता ।
2. व्यावसायिक आंकडों के बुनियादी सिद्धान्त, संचेती और कपूर ।
3. प्रबंधन मे ंमात्रात्मक विधियॉ – श्रीवासतव, शेनायॅ और गुप्ता ।
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता ।

इकाई 12 गुणों का साथर्क परीक्षण
(Significance Test in Attributes)

12.1 प्रस्तावना
12.2 उद्देश्य
12.3 परिकल्पना का परीक्षण
12.4 मानक त्रुटि
12.5 विशेषताओं के लिए महत्व का परीक्षण
12.6 महत्व सृजन फलन
12.7 सारांश
12.8 शब्दावली
12.9 बोध प्रश्न
12.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
12.11 स्वपरख प्रश्न
12.12 सन्दर्भ पुस्तकें

12.1 प्रस्तावना

आंकडों के औद्योगिक अनुप्रयोग प्रायः समग्र और समग्र प्राचलों के बारें में निर्णय लेने से संबंधित हैं। उदाहरण के लिए दो प्रक्रियाओं के लिए क्या बेहतर है के बारे मे निर्णय था किसी विशेष मशीन के उत्पादन को बंद करना है क्योंकि यह एक दोषपूर्ण घटकों की आर्थिक रूप से अस्वीकार्य संख्या पैदा कर रहा है । प्रायः समग्र के निर्धारित माध्य या मानक विचलन पर आधारित होता है, की गणना समग्र में से नमूना आंकडों का प्रयोग किया जाता है। इन निर्णयों तक पहुचनें में, कुछ मान्यताओं का निर्माण किया जाता है, जो सत्य या असत्य भी हो सकता है। बनाई गई धारणाऐं सांख्यिकीय अनुमान या सिर्फ परिकल्पना कहलाती है और आमतौर पर समग्र की संभावना वितरण के बारे में बयान से संबंधित है।

12.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- परिकल्पना के परीक्षण के विभिन्न तरीकों को समझ सकें।
- विशेषताओं के महत्व के परीक्षण का वर्णन कर सकें।
- महत्व सृजन फलन को समझ सकें।

12.3 परिकल्पना का परीक्षण

एक नमूना जांच परिणाम उत्पन्न करता है, और इन परिणामों के साथ निर्णय समग्र पर बनाये जाते हैं । लेकिन ऐसे फैसलों में गलत निर्णय लेने के कारण अनिश्चितता का एक तत्व शामिल है, परिकल्पना एक ऐसी धारणा है जो समग्र प्राचल के बारे में सत्य या असत्य भी हो सकती है।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को 300 बार उछालने पर कोई 190 चिट और 110 पट प्राप्त कर सकता है। इस उदाहरण पर हम यह जांचने में रूचि रखते हैं कि क्या सिक्का निष्पक्ष है या नहीं इसलिए हम इसका मूल्यांकन करने के लिए एक परीक्षण आयोजित कर सकते हैं कि अन्तर नमूनाकरण के कारण है। एक महत्व के परीक्षण करने की प्रक्रिया निम्नानुसार हैः

अवधारणा का निर्माण :– हमारी अवधारणा को सत्यापित करने के लिए जो नमूना अध्ययन पर आधारित है, हम नमूना मान और समग्र मान के बीच का अंतर जानने के लिए हम आंकडे एकत्र करत हैं। यदि कोई अंतर नहीं है या यदि अंतर बहुत छोटा है, तो हमारा अनुमानित मान सही है, आमतौर पर दो अनुमानों का निर्माण किया जाना चाहिए और यदि एक परिकल्पना सही है, तो दूसरे को अस्वीकार करेंगें।

(अ) शून्य परिकल्पना : यह अंतर के महत्व के परीक्षण करने के लिए बहुत उपयोगी उपकरण है। समग्र से संबंधित कोई भी परिकल्पना को एक सांख्यिकीय परिकल्पना कहा जाता है। सांख्यिकीय परीक्षण की प्रक्रिया में, समग्र से प्राप्त नमूने के आधार पर अवधारणा को अस्वीकार या स्वीकार किया जाता है। सांख्यिकविद् अवलोकन के माध्यम से परिकल्पना की जांच करते हैं और एक संभावित बयान देते हैं सरल परिकल्पना से पता चलता है कि नमूने का मान और अध्ययन के तहत समग्र के मान में कोई अंतर नहीं दिखता है। हम जिस परिकल्पना को ग्रहण करते हैं उसे शून्य परिकल्पना कहा जाता है । इसका अर्थ है कि नमूने के माध्य और समग्र के माध्य के बीच वास्तविक अंतर शून्य है, न्यूनतम पाया गया अन्तर महत्वहीन है। शून्य परिकल्पनपा की अस्वीकृति का अर्थ है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच वास्तविक अंतर शून्य है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति प्रदर्शित करती है कि निर्णय सही है। उदाहरण के लिए :

(1) एक विश्वविद्यालय के छात्रों की औसत ऊॅचाई 155 सेमी है।

(2) एक फर्म की औसत दैनिक बिक्री 1500 रूपये हैं।

(3) किसी विशेष गांव की औसत आय 100 रूपये है।
इन सभी बयानों को नमूना परीक्षणों के आधार पर सत्यापित करना होगा। आमतौर पर एक परिकल्पना में कहा जाता है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच कोई अंतर नहीं है। एक सांख्यिकीय अनुमान एक शून्य परिकल्पना है यदि इसे स्वीकार किया जाता है। शून्य परिकल्पना को μ_0 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(ब) वैकल्पिक परिकल्पना :

μ_0 की अस्वीकृति वैकल्पिक परिकल्पना की स्वीकृति की ओर जाता है, जिसे H_1
द्वारा दर्शाया गया है। उदाहरण के लिए , $H_0 = \mu = 155$ (शून्य परिकल्पना)
$\mu_1 = \mu \neq 155$ अर्थात $\mu > 155$ या $\mu < 155$ (वैकल्पिक परिकल्पना)
जब दो अवधारणाओं को स्थापित किया जाता है, तो शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति एक नमूना अध्ययन पर आधारित होती है। इस प्रकार यह दो गलत निष्कर्षों के ओर जाता है अर्थात
(1) μ_0 अस्वीकृत, जब H_0 सत्य है।
(2) H_0 स्वीकृत, जब H_0 असत्य है। इसे निमनलिखित तालिका में व्यक्त किया जा सकता है।

	नमूने में से निर्णय	
	H_0 स्वीकृत	μ_0 अस्वीकृत
μ_0 सत्य	सही	गलत (I प्रकार की त्रुटि
μ_0 गलत (H_1 सही)	गलत (II प्रकार की त्रुटि	सही

फिर से लिखते हुए
H_0 अस्वीकार जब यह सत्य है (I प्रकार की त्रुटि)$=\propto$
μ_o स्वीकार जब यह गलत है (II प्रकार की त्रुटि)$= B$
μ_o स्वीकार जब यह सत्य है (सही निर्णय)
μ_o अस्वीकार जब यह गलत है (सही निर्णय)

महत्व का स्तर

I प्रकार की त्रुटि करने की अधिकतम संभावना, जिसे हमने एक परीक्षण में निर्दिष्ट किया है, को महत्व का स्तर कहा जाता हे। सामान्य तथा सांख्यिकीय परीक्षणों में 5 प्रतिशत महत्व का स्तर तय किया जाता है। इसका अर्थ है कि हम एक अवधारणा को स्वीकार करने पर 95 प्रतिशत विश्वस्त हो सकते हैं या हम 5 प्रतिशत गलत हो सकते हैं।

महत्वपूर्ण क्षेत्र : विविधता की सीमा में दो क्षेत्र हैं :– स्वीकृति क्षेत्र और महत्वपूर्ण क्षेत्र या अस्वीकृति क्षेत्र । यदि नमूना आंकडे महत्वपूर्ण क्षेत्र में आते हैं तो हमें परिकल्पना को अस्वीकार करना पडता है, क्योंकि इससे गलत निर्णय होता है। हम H_1 के लिए जाते हैं, यदि सरल आंकडों का गणित मान अस्वीकृत खेत्र में होता है।

एक पुच्छीय और द्विपुच्छीय परीक्षण :

एक सामान्य वक्र के अन्तर्गत महत्वपूर्ण क्षेत्र , जैसा कि पहले बताया गया है, दो तरह से विभाजित किया जा सकता है।

(अ) वक्र के नीचे दोनों तरफ

(ब) वक्र के नीचे एक तरफ, और दोनों या तो दाई पूंछ पर या बाएं पूंछ पर है।

निर्णय या निष्कर्ष पर पहुॅचना :

अनत में हम इस निष्कर्ष मे ंआते हैं कि या तो शून्य परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है या अस्वीकार किया जाता है। यह निर्णय गणना मान के आधार पर है चाहे वह स्वीकृति क्षेत्र में है या अस्वीकृत क्षेत्र में है।

12.4 मानक त्रुटि

नमूनाकरण वितरण के मानक विचलन को मानक त्रुटि कहा जाता है। उदाहरण के लिए $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ...$ इत्यादि समग्र से लिए हुए सभी नमूनों के माध्य है। इन सभी माध्यों का मानक विचलन माध्य की मानक त्रुटि हेाती है। इसके लिए सूत्र $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. है।

उपयोगिता :–

1. यह परिकल्पना के परीक्षण में एक उपयोगी उपकरण है। हम 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण की जांच कर सकते हैं, जिसका अर्थ है, यदि अवकलित और अपेक्षित माध्यों के मध्य अंतर 1.96 S.E ज्यादा है तो परिकलपना स्वीकृत नहीं होती है और उसे वैकल्पिक परिकल्पना की और जाना पडता है। महत्व का स्तर 1 प्रतिशत हो सकता है। सामान्यतः परिकल्पना स्वीकृत होती है यदि अन्तर 3 S.E से कम है, 5 प्रतिशत स्तर लोकप्रिय है।
2. एक नमूने की विश्वसनीयता ज्ञात हो सकती है।
3. प्राचलों के मान सीमाओं के साथ निर्धारित किये जा सकते हैं।

अब हम विभिन्न स्थितियों पर लागू होने वाले महत्व के विभिन्न परीक्षणों पर चर्चा करते हैं । वो हैः–

1. विशेषताओं के लिए महत्व का परीक्षण
2. चरों के लिए महत्व का परीक्षण

12.5 विशेषताओं के लिए महत्व का परीक्षण

विशेषताओं का नमूनाकरण एक समग्र से नमूनों के चित्रण के रूप में माना जा सकता है जिनके सदस्यों मे एक विशिष्ट विशेषता की उपस्थिति या अनुपस्थिति होती है। उदाहरण के लिए, अंधे (विशेषता) के अध्ययन में, एक नमूना तैयार किया जा सकता है और इसके सदस्यों को अंधे हैं या नही ंके रूप में वर्गीकृत किया जाता है। विशेषता की उपस्थिति का p द्वारा प्रतिनिधित्व किया जा सकता है और विशेषता की अनुपस्थिति को q द्वारा प्रतिनिधित्व किया जा सकता है। इस प्रकार, 1000 लोगों में, 25 अंधे हैं और शेष अंधे नहीं हैं। दूसरे शब्दों मे $p = \frac{25}{1000}$ या 0.025 और $q = 0.975$ विभिन्न प्रकार के महतव के परीक्षण का अध्ययन निम्नलिखित प्रमुखों के अन्तर्गत किया जा सकता है।

(अ) सफलता की संख्या का परीक्षण

यह द्विपद वितरण का अनुसरण करता है। सूत्रः सफलता की संख्या का

S.E. = $\sqrt{npq}$

$n =$ नमूना आकार

$p =$ प्रत्येक परीक्ष्ज्ञण में सफलता कीसंभावना

$q = (1 - p)$ अर्थात विफलता की संभावना

उदाहरण –1 1,00,000 टेनिस के खेप से 400 गेंदों को यादृच्छिक चयनित गेंदों किया गये और जॉच की गई। यह पाया गया कि इनमें से 20 दोषपूर्ण थे। कितने दोषपूर्ण गेंदों को आप 95 प्रतिशत

विश्वसनीयता के स्तर पर सम्पूर्ण खेप में उचित रूप से उम्मीद कर सकते हैं।

हल : यहाँ

$p = \frac{20}{400} = 0.05$

q = 0.95

$$\overline{X} = np = 1,00,000 \times (0.05) = 5,000$$

$$S.E. = \sqrt{npq} = \sqrt{1,00,000 \times .05 \times .95}$$

$$= \sqrt{4750} = 68.9$$

95% विश्वसनीयता सीमाऐं हैं

$5,000 \pm 1.96 \times 68.9 = 5,000 \pm 135.044$ (या)

5135 और 4.865

उदाहरण –2 राजस्थान के एक गांव के 500 लोगों के नमूने में, 280 लोग चावल खाने वाले और बाकी गेहूॅ खाने वाले पाए गये, क्या हम यह मान सकते हैं कि दोनों खाद्य पदार्थ समान लोकप्रिय है।

हल :– हम यह परिकलपना करते हैं कि खाद्य पदार्थ समान रूप से लोकप्रिय है।

तब, गेहूॅ खाने वालों और चावल खाने वालों की अपेक्षित आवृत्तियॉ 250:250 है।

$$S.E. = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 11.18$$

वास्तविक और प्रेक्षित के मध्य अंतर $= 280 - 250 = 30$

$$\frac{\text{Difference}}{\text{S.E.}} = \frac{30}{11.18} = 2.68$$

1% स्तर पर अंतर $2.58\, S.E$ से ज्यादा है।

यह नमूनाकरण उतार चढाव के कारण नहीं है।

इसलिए हम मान सकते हैं कि दोनों खाद्य पदार्थ समान रूप से लोकप्रिय नहीं है।

उदाहरण –3 एक सिक्के को 400 बार उछाला जाता है और जिसमें 216 बार चिट आता है। इस बात पर चर्चा करें कि क्या सिक्का निष्पक्ष है, और इस उद्देश्य के लिए सैद्धांतिक सिद्धान्तों का संक्षेप मे वर्णन करें।

हल :– निष्पक्ष सिक्के में चिट आने की संभावना उछालों $= \frac{1}{2}$

400 में अपेक्षित चिटों की संख्या $= 200$

लेकिन प्रेक्षित चिटों की संख्या $= 216$

$$S.E. = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

वास्तविकता से विचलन = 216 – 200 = 16

$$Z = \frac{Difference}{S.E.} = \frac{16}{10} = 1.6$$

चूॅकि प्रेक्षित विचलन $S.E$ का 1.6 गुना है, जोकि 1.96 S.E., (5% स्तर), से कम है, यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि शून्य परिकलपना स्वीकार्य है। इसलिए, सिक्का निष्पक्ष है।

(ब) सफलता के अनुपातों का परीक्षण

प्रत्येक नमूने में सफलता की संख्या लेने के बजाय, सफलता का एक हिस्सा अर्थात $p = \frac{1}{n}$ अभिलिखित है। हिस्से की स्थिति में मानक त्रुटि की गणना निम्नवत की जाती है।

$$S.E. = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

जहाँ $q = 1 - p$

उदाहरण –4 500 अनानासों का यादृच्छिक नमूना एक बडे खेप में से लिया गया था और जिसमें 65 खराब पाये गए। दिखाऐं कि खराब अनानासों की इन नमूनों में मानक त्रुटि 0.015 आकार की है, औश्र निष्कर्ष निकाले कि खेप में खराब अनानास का प्रतिशत लगभग 8.5 और 17.5 के बीच में होता है।

हल : यहाँ

$$p = \frac{65}{500} = 0.13,$$

$$q = 1 - 0.13 = 0.87$$

$$S.E. = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.13 \times 0.87}{500}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.1131}{500}}$$

$$= \sqrt{.000226} = 0.015$$

खेप में खराब अनानासों की प्रतिशत सीमाऐं हैं :

$$(0.13 \pm 3S.E.) \times 100 = (0.13 \pm 3 \times 0.015)100$$

$$= (.13 \pm .045)\,100$$

$$= (13 \pm 4.5) = 17.5 \text{ और } 8.5$$

टिप्पणी $3\,S.E$ सीमाऐं लगभग निश्चित हैं।

उदाहरण 5 :– सेब के एक थोक व्यापारी का दावा है कि उसके द्वारा उपलब्ध कराये गऐ सेब में केवल 4 प्रतिशत सेब दोषपूर्ण होते हैं। 600 सेबों का यादृच्छिक नमूने मे 36 सेब दोषपूर्ण थे। थोक व्यापारी के दावे का परीक्षण करें।

हल :–

$$S.E. = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{.96 \times .04}{600}} = 0.008$$

95% विश्वसनीयता सीमाऐं = $p \pm 1.96$ S.E.

$$= p \pm 1.96 \times 0.008$$

$$= .96 \pm 0.01568$$

$$= 0.94432 \text{ to } = .97568$$

600 सेबों में से, अच्छे सेब $0.94432 \times 600 = 566.59$ से $0.97568 \times 600 = 585.4$ या 567 से 585 के बीच मे हो सकते हैं। इसलिए अपेक्षित दोषपूर्ण सेबों की संख्या 15 से 30 सेबों के बीच संभावित है। उसका दावा है कि दोषपूर्ण सेब 4 प्रतिशत है। लेकिन वास्तविक दोषपूर्ण संख्या 36 है।

इसलिए उसका दावा स्वीकार नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 6 :– एक बडे शहर से यादृच्छिक चयनित 600 लोगों का एक नमूने आकार दर्शाता है कि नमूने में पुरूषों का प्रतिशत 53 है। यह माना जाता है कि शहर में कुल आबादी के लिए पुरूषों का अनुपात $\frac{1}{2}$ है। जांच करें कि इस विश्वास की पुष्टि अवलोकन द्वारा की गई है या नहीं।

हल :– शून्य परिकल्पना यह है कि कुल जनसंख्या पुरूषों की संख्या $\frac{1}{2}$ या 0.5 है।

प्रेक्षित मान $= 0.53$

$$S.E. = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{600}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{600}} = \sqrt{\frac{1}{2400}} = 0.02$$

$$S.E. = \frac{0.53-0.05}{S.E.} = \frac{(0.53-0.5)}{0.02} = 1.5$$

चूँकि $z, 1.96$ से कम है, 5% विश्वसनीयता के स्तर पर अंतर महत्वपूर्ण नहीं है औश्र नमूनाकरण उतार–चढाव के कारण उत्पन्न हो सकता है। इसलिए शून्य परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जा सकता है। विश्वसनीयताा की पुष्टि है।

(स) अनुपातों मे अंतर का परीक्षण :–

हम विभिन्न समग्रों से दो नमूने लेते हैं और यह सत्यापित करते हैं कि सफलता का अनुपात महत्वपूर्ण है या नहीं ।

सूत्र

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

यदि $S.E.\ (p_1 - p_2) < 1.96$

अंतर यादृच्छिक नमूनाकरण उतार चढाव के कारण माना जाता है।

उदाहरण –7 एक कारखाने मे एक हजार लेखों की जांच की जाती है और 3 प्रतिशत दोषपूर्ण पाये जाते हैं। दूसेर कारखाने से पन्द्रह सौ समान लेखों की जांच की जाती है केवल 2 प्रतिशत लेख दोषपूर्ण पाये जाते हैं । क्या यह उचित रूप से निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि पहले कारखाने का उत्पाद दूसरे से हल्का है।

हल : आइए हम शून्य परिकल्पना तैयार करें :–

$H_0 : p_1 = p_2$

$$p_1 = \frac{30}{1000} = 0.03$$

$$p_2 = \frac{30}{1500} = 0.02$$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{(1000\times0.03)+(1500\times0.02)}{1000+1500} = \frac{(30+30)}{2500} = 0.024$$

$$S.E.=\sqrt{0.024\times0.976\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1500}\right)}$$

$= 0.006$

$$Z = \frac{0.03-0.02}{0.006}=1.67$$

95% विश्वसनीयता के स्तर पर $z = 1.96,$ अंतर महत्वपूर्ण नहीं है। शून्य परिकल्पना जो कि $p_1 = p_2$ स्वीकार्य है।

उदाहरण –8 एक मशीन 500 के एक नमूने मे ं16 अपूर्ण वस्तु बनाती है। मशीन की मरम्मत के बाद , यह 100 के एक खेप मे ं3 अपूर्ण वस्तु बनाता है। क्या मशीन में सुधार हुआ है।

हल :–

$p_1=\frac{16}{500}=0.032$ (पहले नमूने में)

$p_2=\frac{3}{100}=0.03$ (दूसरे नमूने में)

कल्पना करते हैं कि मरम्मत के बाद भी मशीन में सुधार नहीं हुआ है या $p_1 = p_2$

$$S.E.(p_1-p_2)=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

$$p=\frac{500\times0.032+100\times0.3}{500+100}$$

$$=\frac{16+3}{600}=0.03$$

$q = 1 – 0.03 = 0.97$

$$S.E.(p_1-p_2)=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$=\sqrt{(0.03)(0.97)\left(\frac{1}{500}\right)+\left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$=\sqrt{(0.03)(0.97)[0.002+0.01]}$$

$= 0.0187$

$$Z=\frac{0.032-0.03}{0.0187}=\frac{0.002}{0.0187}=0.106$$

चूँकि $(1\%$ स्तर) पर अंतर $2.58\,S.E$ से कम है, प्रयोग का परिणाम परिकल्पना का सर्मथन करता है। इसलिए हम निष्कर्ष निकालते है कि मरम्मत के बाद भी मशीन में सुधार नहीं हुआ है।

उदाहरण –9 A शहर 1000 लोगों के यादृच्छिक नमूनों में, 400 लोग गेहूॅ के उपभोक्ता पाए गए। B शहर के 800 लोगों के नमूने में, 400 लोग गेहूॅ के उपभोक्ता पाए गए। क्या इन आंकडों से शहर A और शहर B के बीच एक महत्वपूर्ण अंतर का पता चलता है, जहॉ तक गेहूॅ उपभोक्ताओं का अनुपात है।

हल :– आइए हम इस परिकल्पना को मान लें कि दोनों शहरों में, गेहॅू की खपत के अनुपात के बीच कोई अनतर नहीं हैं।

H_0: $p_1 = p_2$

$$p_1 = \frac{400}{1000} = 0.4,\ p_2 = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$p = \frac{(1000 \times 0.4) + (800 \times 0.5)}{1000 + 800}$$

$$= \frac{4}{9} \qquad \therefore q = \frac{5}{9}$$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{800}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{20}{81} \times \frac{9}{4000}} = 0.024$$

$p_1 – p_2 = 0.4 – 0.5 = 0.1$

$$\frac{\text{Difference}}{\text{S.E}} = \frac{0.1}{0.024} = 4.17$$

चॅूकि अंतर $2.58\, S.E.$ से (1% स्तर) पर ज्यादा है, नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण ऐसा नहीं हो सका। इसलिए आंकडे शहर A और शहर B के बीच महत्वपूर्ण अंतर को दर्शाते हैं, जहॉ तक गेहॅू उपभोक्ताओं के अनुपात का सम्बन्ध है।

12.6 महत्व सृजन फलन

मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है अर्थात x नमूना अंतराल में से वास्तविक संख्याओं का एक फलन है, यादृच्छिक चर x की विभिन्न विशेषताओं की गणना में, अर्थात E(x) या V(x), हम x की प्रायिकता वितरण के साथ सीधे काम करते हैं। [संभाव्यता वितरण फलन द्वारा दिया जाता है या तो संभाव्यता वितरण फलन निरंतर स्थिति में, या बिन्दु संभाव्यता $p(x_i) = P(X = x_i)$ असतत् स्थिति में।] R के उपसमुच्च S के लिए प्रयोगात्मक मानों को लेते हुए X यादृच्छिक चर है। X का महत्व सृजन फलन Mx द्वारा परिभाषित होता है।

$M_x(t) = E[\exp(tx)]$ t के लिए R में

टिप्पणी : चॅूकि exp(tx) गैर ऋणात्मक यादृच्छिक चर है, $M_x(t)$ किसी t के लिए एक वास्तविक संख्या या धनात्मक अनन्त आस्तित्व में है।

1. दर्शाये कि यदि x एक असतत् वितरण सघनता फलन f के साथ है। तो $M_x(t) = \sum_{x \in s} e^{tx} f(x)$

2. दर्शाये कि यदि x सतत् वितरण सघनता फलन f के साथ है, तो $M_x(t) = \int_s e^{tx} f(x)dx$

चॅूकि चर घांतांकी फलन धनात्मक है, x का महत्व सजृन फलन हमेशा अस्तित्व में होता है, या तो वासतविक संख्या के रूप मे या धनात्मक अनन्त के रूप में।

उदाहरण –10 मान लीजिए x एक समान रूप से अंतराल [a,b] में वितरित है इसलिए

m.g.f $M_x(t) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx$

$$= \frac{1}{(b-a)t}\left[e^{bt} - e^{at}\right], t \neq 0$$

द्वारा किया जाता है।

टिप्पणी : m.g.f स्वतन्त्र चरों की संख्या के योग का गुणनफल उनका m.g.f

$$E\left\{e^{t(x_1+x_2+x_3+\ldots)}\right\} = E\left(e^{tx_1}\right).E\left(e^{tx_2}\right).E\left(e^{tx_3}\right)\ldots$$

द्विपद वितरण का m.g.f

हम जानते हैं कि द्विपद वितरण की स्थिति ${}^nC_x p^x q^{n-x}$ में x सफलता की तुलनात्मक आवृत्ति है। इसलिए m.g.f मूल के बारे दिया जायेगा।

$$M_0(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, {}^nC_x p^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}^nC_x \left(pe^t\right)^x q^{nx}$$

$$= (q+pe^t)^n$$

$$= \left[q+p\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots\right)\right]^n = \left[1+pt+\frac{pt^2}{2!}+\ldots\right]^n$$

$$M_0(t) = \left[1+pt+\frac{pt^2}{2!}+\ldots\right]^n$$

हम यह भी जाते हैं कि इस वितरण में माध्य m=np द्वारा निकाला जाता है और

$$M_a(t) = e^{-at} M_0(t)$$

m.g.f. माध्य के बारे निकाला जाता है।

$M_m(t) = e^{-mt} M_0(t)$ जहॉं m = np

$$= e^{-npt}(q+pe^t)^n$$

$$= [qe^{-pt}+pe^{qt}]^n$$

पायसन वितरण का m.g.f.

हम जानते हैं कि पायसन वितरण की स्थिति में x की सफलता की प्रायिकता वितरण $e^{-m}\frac{m^x}{x!}$ के द्वारा दी जाती है।

m.g.f. मूल के बारे में द्वारा निकाला जाता है।

$$M_0(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{e^{-m}m^x}{x!}\right)$$

$M_0(t) = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(me^{t}\right)^{x}}{x!} = e^{-m}e^{me^{t}}$

$e^{t} = \mu'_2 = \sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}^{n}C_x p^x q^{n-x}$

या $M_0(t) = e^{m(e^{t}-1)}$

हम यह भी जानते हैं कि इस वितरण में माध्य m होता है , और जहॉ

$M_a(t) = e^{-at} M_0(t)$

माध्य के बारे में m.g.f निकाला जायेगा

$M_m(t) = e^{-mt}M_0(t)$

$_m(t) = e^{m\left(e^{t}-1-t\right)}$

उदाहरण – 11 दर्शायें कि यदि x_1 और x_2 पायसन वितरण के साथ m_1 और m_2 क्रमशः प्राचल के साथ दो स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हैं, तब $x_1 + x_2$ का योग पायसन वितरण के साथ प्राचल $m_1 + m_2$ के साथ एक यादृच्छिक चर है।

हल : यदि $M_1(t)$ और $M_2(t)$ X_1 और X_2 के m.g.f. हैं, तब

$M_1(t) = e^{m_1(e^{t}-1)}$ और $M_2(t) = e^{m_2(e^{t}-1)}$

हम यह भी जानते हैं कि स्वतन्त्र संख्या के चरों का योग m.g.f.का गुणनफल है।

$(X_1 + X_2)$ का m.g.f.जहॉ X_1 , X_2 स्वत़ंन्त्र चर है।

= X_1 और X_2 के गुणनफल का m.g.f

= $M_1(t)\times M_2(t)$

= $e^{m_1(e^{t}-1)} \times e^{m_2(e^{t}-1)}$

= $e^{(m_1+m_2)(e^{t}-1)}$

= पायसन वितरण का (m_1+m_2) प्राचल के साथ m.g.f

अतः सिद्ध

सामान्य वितरण का m.g.f

सामान्य वितरण की स्थिति में हम जानते हैं कि मूल के माध्य के साथ प्रायिकता फलन निकाला जाता है।

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$M_0(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}dx$$

$M_0(t) = e^{mt+(1/6)t^2\sigma^2}$

माध्य m के सन्दर्भ में m.g.f.

$M_m(t) = e^{-mt} M_0(t)$

$= e^{-mt}\{ e^{mt+(1/2)t^2\sigma^2} \}$

$M_m(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

उदाहरण – 12 सिद्ध करें कि यदि x_1 और x_2 माध्य m_1 और m_2 के साथ और विचलन क्रमशः σ_1^2 and σ_2^2 के साथ स्वतन्त्र सामान्य चर हैं, तब चर (X_1+X_2) भी सामान्य चर माध्य (m_1+m_2) और $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ के साथ है।

हल :– यदि $M_1(t)$ और $M_2(t)$ मूल से X_1 और X_2 के m.g.f. है।

$M_1(t)=e^{m_1t+\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2}$ और $M_2(t)=e^{m_2t+\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2}$

और हम यह भी जानते ळैं कि स्वतत्र संख्या के चरों का योग m.g.f का गुणनफल होता है।

(X_1+X_2) का m.g.f. जहॉ X_1 एवं X_2 स्वतन्त्र चर है।

= m.g.f. के X_1 और X_2 गुणनफल

$= M_1(t)\times M_2(t)$

$= e^{m_1t+\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2} \times e^{m_2t+\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2}$

$= e^{(m_1+m_2)(t)+\frac{1}{2}t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}$

= सामान्य चर का m.g.f. माध्य (m_1+m_2) और विचलन $\sigma_1^2+\sigma_2^2$. के साथ

यादृच्छिक चरों का फलन

यादृच्छिक चर स्थिति का कार्य प्रायः व्यवस्था विश्लेषण मे उत्पन्न होता है जहॉ व्यवस्था की कुछ विशेषताओं का ज्ञान, इनपुट के ज्ञान के साथ, आउटपुट में व्यवहार के कुछ अनुमान की अनुमति देगा। उदाहरण के लिएए इनपुट यादृच्छिक चर x और इसकी सघनता f(x) ज्ञात है और इनपुट आउटपुट व्यवहार की विशेषता $Y = \phi(x)$ द्वारा दी जाती है।

ळम यादृच्छिक चर y की सघनता की गणना करने में रूचि रखते हैं। ध्यान दें किसी दिए गए यादृच्छिक चर x और फलन ϕ के लिए, y एक यादृच्दिक चर की परिभाषा को संतुष्ट नहीं कर सकता। लेकिन यदि हम मानते हैं कि ϕ सतत है, तब $Y = \phi(x)$ यादृच्छिक चर होगा।

उदाहरण – 13 यदि $Y = \phi(x) = X^2$ उदाहरण के रूप में निश्चित शारीरिक प्रयोग मे ंमापन त्रुटि को पदर्शित करेंगा और तब Y त्रुटि का वर्ग होगा ध्यान दें कि $F_Y(y) = 0$ $y \le 0$ के लिए $y > 0$ के लिए

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$= P(X^2 \le y)$$
$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Y की सधनता के अवकलन द्वारा है :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right], \quad y>0$$

$$= 0$$

उदाहरण 14 :– यदि $x(o,1)$ में एक समान रूप से वितरित है। हम दर्शाते हैं कि $Y = -\lambda^{-1}\text{In}(1 - X)$ के पास $\lambda > 0$ प्राचल के साथ चरघातांकी वितरण है। अवलोकन है कि Y एक गैर ऋणात्मक यादृच्छिक चर है जो दर्शाता है $F_y(y) = 0\ y \le 0$ के लिए $y > 0$ के लिए , हमारे पास :

$$F_y(y) = P(Y\le y) = P[-\lambda^{-1}\text{In}(1 - X) \le y]$$
$$= P[\text{In}(1 - X)\ge -\lambda y]$$
$$= P[(1 - X) \ge e^{-\lambda y}]$$

चूँकि e^x x का बढता हुआ फलन है

$$= P(X\le 1 - e^{-\lambda y})$$
$$= F_x(1 - e^{-\lambda y})$$

लेकिन चूँकि $x(0,1)$ पर एकसमान है, $F_x(x) = x, 0 \le x \le 1$ इस प्रकार है:

$$F_y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

इसलिए Y प्राचल λ के साथ चर घातांकी वितरण है।

नमूनाकरण सिद्धान्त :– यदि आंकडे केवल समग्र के एक हिस्से से एकत्र किये जाते हैं अर्थात् समग्र की कुछ ही इकाईयों से, इसे नमूनाकरण के विशिष्ट समग्र (लोगों, विर्निमित वस्तुतओं आदि) जिसके बारे मे हम हर एक वस्तु पर ध्यान दिए बिना कुछ अनुमान बनाना चाहते हैं। इस प्रकार हम नमूने में अर्थात् हम कुछ विशिष्ट वस्तुओं पर विचार करने की कोशिश करते हैं, जिससे हम पूरे समग्र की विशेषता जिसकी कुछ समझ है, कुछ जानकारी निकालने की आशा करते हैं। मान लीजिए कि हम एक संख्या के साथ परिमित आबादी के प्रत्येक सदस्य को लगातार वर्गीकृत करते हैं, ताकि सामान्यता के नुकसान के बिना एक समग्र जो N वस्तुओं को शामिल करता है जिसे 1,2,……….,N से प्रदर्शित किया जा सकता है। अब नीचे वर्णित किये गए वस्तुओं में n वस्तु चुनते है। निम्नलिखित यादृच्छिक चरों को परिभाषित करें।

X_i = प्राप्त समग्र मान जब i^{th} चुना जाता है $i = 1,2\ldots,n$

यादृच्छिक चरों $X_1, X_2, \ldots,X_n$ की संभावना वितरण स्पष्टः हम नमूनाकरण के बारे मे कैसे जानते हैं पर निर्भर करता है। यदि हम प्रतिस्थापना के साथ नमूना लेते हैं, प्रत्येक समय में वस्तु को यादृच्छिक चुनते हुए, यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \ldots,X_n$ स्वतन्त्र_है और एक समान रूप से वितरित होते हैं। जो कि प्रत्येक X_i, i=1,2, ..., n के लिए हमारे पास है।

$$P(X_i=j) = 1/N, j = 1,2\ldots N$$

इसके सिवाय उनकी संयुक्त संभावना वितरण द्वारा दिया जाता है :

$$P[X_i=j_1,\ldots,X_n=j_n]= \frac{1}{N(N-1)(N-2)..(N-n+1)}$$

जहॉ $j_1,\ldots.j_n$ (1,2…N) में से कोई n मान है।

नमूना निकालने की विधियॉ

नमूना निकालने की कुछ विधियॉ निम्नलिखित हैं:

1. सरल यादृच्दिक नमूनाकरण

2. स्तरीय यादृच्छिक नमूनाकरण

बिन्दु अनुमान

यदि x प्रायिकता वितरण $f(x)$ के साथ एक यादृच्छिक चर है, जिसे अज्ञात प्राचल द्वारा अवगत कराया गया है और यदि $X_1, X_2, \ldots X_n$ में से n आकार के यादृच्छिक नमूने हैं, आंकडे $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots X_n)$ को θ का बिन्दु अनुमानक कहा जाता है। ध्यान दें कि $\hat{\theta}$ यादृच्छिक चर है क्योंकि यह यादृच्छिक चर का एक फलन है। नमूना चयन होने के पश्चात, $\hat{\theta}$ एक विशेष संख्यात्मक मान लेता ह $\hat{\theta}$ को θ का बिन्दु अनुमानक कहते हैं। सामान्यतयाः कुछ समग्र प्राचल θ का बिन्दु अनुमानक $\hat{\theta}$ आंकडे $\hat{\theta}$ का एक संख्यात्मक मान हे।

आंकडा $\hat{\theta}$ को बिन्दु अनुमानक कहा जाता है।

निष्पक्ष अनुमानक

बिन्दु अनुमानक $\hat{\theta}$ प्राचल θ के लिए एक निष्पक्ष अनुमानक है यदि $E(\hat{\theta}) = \theta$

यदि अनुमानक निष्पक्ष नहीं है, तब अन्तर $E(\hat{\theta}) - \theta$ को अनुमानक $\hat{\theta}$ का पक्षपाती कहा जाता है।

जब अनुमानक निष्पक्ष है, तब पक्षपाती शून्य है अर्थात् $E(\hat{\theta}) - \theta = 0$

उदाहरण 15 :– मान लीजिए X माध्य μ और विचलन σ^2 के साथ एक यादृच्छिक चर है और $X_1, X_2, \ldots Xn$ समग्र में से n आकार के यादृच्छिक नमूना X द्वारा प्रदर्शित है। दर्शायें कि नमूना माध्य $\overline{X}$ और नमूना विचलन S^2 क्रमशः μ और σ^2 के निष्पक्ष अनुमानक हैं।

हल : सबसे पहले नमूना माध्य समझे हम जानते हैं कि $E(\overline{X}) = \mu$ इसलिए , नमूना माध्य $\overline{X}$ समग्र माध्य μ का एक निष्पक्ष अनुमानक है। अब नमूना विचलन समझे । हमारे पास

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 + \overline{X^2} - 2\overline{X}X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right) - nE\left(\overline{X^2}\right)\right]$$

चूँकि $E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$ और $E(\overline{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n$, हमारे पास

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mu^2 + \sigma^2\right) - n\left(\mu^2 + \sigma^2/n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2$$

इसलिए, नमूना विचलन S^2 समग्र विचलन σ^2 का एक निष्पक्ष अनुमानक है।

बिन्दु अनुमानक का विचलन :– यदि हम समझे θ के सभी निष्पक्ष अनुमानक, जिसका सबसे छोटा विचलन का मान (MUVE) न्यूनतम विचरण निष्पक्ष आकलनकर्ता कहलाता है। यदि $X_1, X_2, \ldots, Xn$ माध्य μ और विचलन σ^2 के साथ सामान्य वितरण में से आकार n के यादृच्छिक नमूने हैं, नमूना माध्य $\overline{X}$ μ के लिए MUVE है।

12.7 सारांश

इस इकाई मे हमने अध्ययन किया है कि एक सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण आंकडों का उपयोग करके निर्णय लेने की एक विधि है, चाहें वह नियंत्रित प्रयोग से हो या अवलोकन अध्ययन (नियंत्रित प्रयोग से न हो)। सांख्यिकीय में, एक परिणाम सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण कहलाता है, अगर इसके एक पूर्व निर्धारित सीमा संभावना के अनुसार अकेले मौके में होने की संभावना नहीं है, महत्व स्तर वाक्यांश ''महत्व का परीक्षण'' रोनाल्ड फिशर द्वारा दिया गया था। ''इस तरह के गंभीर परीक्षण को महत्व का परीक्षण कहा जा सकता है, और जब ऐसे परीक्षण उपलब्ध होते हैं तो हमें पता चल जायेगा कि कोई दूसरा नमूना है या जो पहले से काफी अलग नहीं है।'' अन्वेषण संबंधी आंकडा विश्लेषण के विपरीत, कभी कभी परिकल्पना परीक्षण को पुष्टिक आंकडा विशलेषण कहा जाता है। आवृत्ति की संभावना में, इन निर्णयों को लगभग शून्य परिकल्पना वाले परीक्षणों का उपयोग करके लगभग हमेशा बनाया जाता है। ये ऐसे परीक्षण हैं जो इस प्रश्न का उत्तर देते हैं कि शून्य परिकल्पना सही है, परीक्षण आंकडों के लिए एक मान का निरीक्षण करने की संभावना क्या है जो वास्तव मे प्रेक्षित मान के रूप मे कम से कम चरम हो ? अधिक औपचारिक रूप में, वे इस प्रश्न के उत्तर का प्रतिनिधित्व करते हैं, जो एक प्रयोग करने से पहले सामने आते हैं, प्रयोग के परिणामों से गलत अस्वीकृति की पूर्व निर्दिष्ट संभावना के लिए शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति हो सकती है। परिकल्पना परीक्षण का एक उपयोग यह तय करना है कि पारंपरिक ज्ञान पर संदेह डालने के लिए प्रायोगिक परिणामों के पर्याप्त जानकारी है या नहीं। बायिसियन परिकल्पना के परीक्षण के लिए दृष्टिकोण पिछली संभावना पर परिकल्पना की अस्वीकृति का आधार है। आंकडों के आधार पर निर्णय लेने के लिए अन्य दृष्टिकेाण निर्णय सिद्धानत और अनुकूल निर्णय के माध्यम उपलब्ध है। महत्वपूर्ण क्षेत्र एक परिकलपना परीक्षण के सभी परिणामों का समुच्चय है, जिसे वैकल्पिक परिकलपना के पक्ष में खारिज कर दिया जाता हे। महत्वपूर्ण क्षेत्र को आमतौर पर शब्द c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

12.8 शब्दावली

अनुमानक :– गुणों के नमूनों का दिया हुआ मान जो आवश्यक अर्थ खोजने के लिए उपयोग किया जाता है।

ऊपरी सीमा :– दिये गए समग्र मे ऊपरी मान ।

12.9 बोध प्रश्न

1. थाम्पसन प्रेस की परिकल्पना है कि इसकी नवीनतम बेब आफसेट प्रेस का औसत जीवन 14,500 घंटे है। वो जानते हैं कि प्रेस का SD 2,100 घंटे है। 25 प्रेसों के एक नमूने मे से , कम्पनी ने 13,000 घंटे नमूना माध्य ज्ञात किया। 0.01 महत्व के स्तर पर, क्या कम्पनी ने निष्कर्ष निकालना चाहिए कि प्रेस का औसत जीवन 14,500 घंटे की तुलना में कम है।
2. फिल्म की जांच होने पर भारत में रंगमंच मालिकों को पता है कि एक हिट फिल्म प्रत्येक शहर

मे 10 दिनों के मानक विचलन के साथ औसतन 84 दिनों तक चलती है। एक विशेष फिल्म वितरक को जनसंख्या के साथ अपने क्षेत्र में फिल्म की लोकप्रियता की तुलना करने में दिलचस्पी थी। उसने उस क्षेत्र के 75 थियेटरों को यादृच्छिक तरीके से चुना और पाया कि एक लोकप्रिय फिल्म 81.5 दिनों तक चलती है।

(अ) परीक्षण के लिए उचित परिकलपनाओं का संज्ञान लेते हुए बताऐं कि क्या वितरकों के क्षेत्र मे थिएटर और आबादी के बीच महत्वपूर्ण अन्तर है।

(ब) 1% महत्व के स्तर पर, इन अनुमानों का परीक्षण करें।

12.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. यहॉ परिकलपनाऐं निम्नानुसार लिखी जा सकती है।

H_o: $\mu = 14500$ और H_1: $\mu < 14500$ और महत्वपूर्ण स्तर $\alpha = 0.01$

$\alpha = 0.01$ के लिए z क्षेत्र में निचलास्वीकृत क्षेत्र $z = -2.33$ या

(तालिका से z का मान 2.33 होने की संभावना 0.4901है, स्वीकृति बाऐं पुच्छीय क्षेत्र के).

$$\bar{x} = \frac{\mu H o - 2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{145000 - 2.33(2100)}{5}$$

= 13521.4 hours

चॅूकि नमूना माध्य $\bar{x}$ अनुमानित मान से कहीं कम है, शून्य अवधारणा को अस्वीकार कर दिया जाता है।

निम्नलिखित आंकडों को देखते हुए $\sigma = 10$ दिन $n = 75$ सिनेमाघर $\bar{x} = 81.5$ Ho: $\mu = 84$ दिन H_1: $\mu \neq 84$ दिन $\alpha = 0.01$ इसका अर्थ है कि दोनों पूंछों के तहत अस्वीकृत क्षेत्र 0.01 है और स्वीकृत क्षेत्र 0.99 है।

इसमें स्वीकृत क्षेत्र का हिस्सा आधा $\frac{0.99}{2}$ = .4950 है , Z का मान 2.58 है। इसलिए स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं हैं।

$$z = \pm 2.58 \text{ or } \bar{x} = \mu_{Ho} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} = 84 \pm 2.58 x \frac{10}{\sqrt{75}}$$

= 81.02 निचली सीमा और 86.98 ऊपरी सीमा

क्योंकि पर्यवेक्षक का मान स्वीकृति क्षेत्र में है, इसलिए हम रिक्त परिकल्पना H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। फिल्म के चलने की लम्बाई अन्य सिनेमाघर के समान है।

दूसरे शब्दों में :

Z का प्रेक्षित मान है $\bar{x} - \frac{\mu_{Ho}}{SE}$

जहॉ SE = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{81.4 - 84}{(1.155)}$

Z का स्वीकृत क्षेत्र है $\pm z = \pm 2.58$

12.11 स्वपरख प्रश्न

1. अनुपात में अन्तर के परीक्षण से आप क्या समझते हैं ?
2. महत्व सृजन फलन पर टिप्पणी लिखें ?
3. मानक त्रुटि से आप क्या समझते हैं ?

12.12 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दास गुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकी की बुनियादी बातें – संचेती और कापोर
3. प्रबन्धन मे मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनॉय और गुप्ता
4. व्यावसायि सांख्यिकी – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 13 चरों का साथर्क परीक्षण (बड़े प्रतिदर्श)
(Significance Test in Variables (Large Samples)

13.1 प्रस्तावना
13.2 उद्देश्य
13.3 माध्य के लिए परीक्षण
13.4 बडे नमूने
13.5 सारांश
13.6 शब्दावली
13.7 बोध प्रश्न
13.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
13.9 स्वपरख प्रश्न
13.10 सन्दर्भ पुस्तकें

13.1 प्रस्तावना

परिकल्पना परीक्षण, आंकडे परीक्षण के नमूना वितरण पर आधारित होती है, और इसलिए महत्वपूर्ण (Critical) क्षेत्र को परिभाषित करने के लिए नमूना वितरण को जानना आवश्यक है। यहॉ, नमूना वितरण उनमे से एक हो सकता है, जिनका पहले के अध्यायों में चर्चा की गई है या उनमें से भिन्न हो सकता है। बडें नमूनों के लिए $n > 30$ परीक्षण संबंधित नमूना वितरण पर आधारित होगा। यद्यपि, बडे नमूनों $n > 30$ के लिए अधिकांश नमूना वितरण सामान्य वितरण की ओर अग्रसर हेाता है, और इसलिए, परीक्षण सामान्य वितरण पर आधारित हो सकता है। आइए हम कुछ नमूना परीक्षणों पर विचार करते हैं जो सामान्य वितरण पर आधारित है।

13.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- बडे नमूनों के लिए महत्व के परीक्षण को प्रयोग में ला सकें।
- महत्वपूर्ण परीक्षण के आधार पर एक दिये हुए आंकडे का विश्लेषण कर सकें।

13.3 माध्य के लिए परीक्षण

मान लें कि समग्र के लिए माध्य (μ) अज्ञात है। हम परीक्षण करना चाहते हैं कि दिये हुए मान का माध्य μ_0 है।

शून्य परिकल्पना $\mu_0: \mu = \mu_0$ है।

एक बडे यादृच्छिक नमूने के आकार के लिए $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\mu/\sqrt{n}}$ $N(0,1)$ है और इसलिए, आंकडा परीक्षण

$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\mu/\sqrt{n}}$ है।

वैकल्पिक परिकलपना निम्न में से कोई भी हो सकती है।

1. $\mu_0: \mu = \mu_0$ यहॉ , परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $H_1: \mu > \mu_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय है ऊपरी पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
3. $H_1: \mu < \mu_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय, निचले पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
4. दो माध्यों के बीच अन्तर के लिए परीक्षण $\mu_0: \mu_1 < \mu_2$ वैकल्पिक परिकल्पना निम्न मे से एक हो सकती है।
    1) $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।
    2) $H_1: \mu_1 > \mu_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , ऊपरी पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
    3) $H_1: \mu_1 < \mu_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय, निचले पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

    छो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान की स्थिति में, महत्वपूर्ण $-k_{\propto/2}$ और $k_{\propto/2}$ है। ऊपरी पूँछ परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $k_{\propto}$ है। निचले पुच्छीय परीक्षण में, यह मान $k_{\propto}$ है।

    ध्यान दें : यहॉ, यदि μ_1 और μ_2 अज्ञात हो, आंकडा परीक्षण

$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}}$ जहॉ s_1, s_2 नमूना मानक विचलन है।

अनुपात के लिए परीक्षण :– मान लीजिए कि समग्र मे ंकिसी विशेषता का अनुपात ज्ञात नहीं है, हम जानना चाहते है कि क्या अनुपात का दिया हुआ मान p_0 है।

शून्य परिकल्पना $\mu_o: p = p_0$ (समग्र p_0) है।

वैकल्पिक परिकल्पना निम्न मे ंसे कोई एक हो सकती है।

1) $H_1: p \neq p_0$ यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।

2) $H_1: p > p_0$ यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय, ऊपरी पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

3) $H_1: p < p_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय निचले पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

समग्र से n आकार के बडे यादृच्छिक नमूने में, यदि x इकाई विशेषता रखते हैं तब, नमूना अनुपात $p = \frac{x}{n}$ है।

और इसलिए , μ_0 के अन्तर्गत $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$ N(0,1) है। और यही आंकडा परीक्षण है।

दो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-k\propto/_2$ और $k\propto/_2$ है। निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति मे ंयह $-k_\propto$ है।

<u>अनुपातों की समानता के लिए परीक्षण</u>

मान लीजिए निश्चित विशेषता के लिए दो समग्र अज्ञात अनुपातों p_1 और p_2 के साथ है। हम परीक्षण करना चाहते हैं कि अनुपात समान है। शून्य परिकल्पना $\mu_0: p_1 = p_2$ (समग्र अनुपात समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना निम्नमे ंसे कोई एक हो सकती है।

1. $H_1: p_1 \neq p_2$, यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $H_1: p_1 > p_2$, यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , ऊपरी पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
3. $H_1: p_1 < p_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , निचले पूँछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

μ_0 के अर्न्तगत यदि p सामान्य अनुपात है। यदि पहले समग्र मे ंसे n_1 आकार का बडा यादृच्छिक नमूना लिया जाता है ंn_1 की इन इकाईयों के बीच, यदि x_1 इकाईयॉ विशेषता रखती है तो नमूना अनुपात $p_1 = \frac{\overline{x_1}}{n_1}$ हैं ।

यदि दूसरे समग्र से n_2 आकार का बडा यार्च्छिक नमूना भी लिया जाता है। n_2 की इन इकाईयों के बीच, यदि x_2 इकाईयॉ विशेषता रखती है तो नमूना अनुपात $Z = \frac{p_1 - p_2}{pQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}$ N(0,1) है। और यही आंकडा परीक्षण है। सामान्यता, सार्वजनिक अनुपात p ज्ञात नहीं होगा और इसलिए, इसका अनुमान नमूनों मे ंसे किया जाता है।

अनुमान $\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ है।

इसलिए , आंकडा परीक्षण $Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$ है।

दो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2}$ और $K_{\alpha/2}$ है। ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में महत्वपूर्ण मान $k_{\propto}$ है। निचले पुच्छीय परीक्ष्ज्ञण की स्थिति में यह मान $-k_{\propto}$ है।

उदाहरण –1

'मंदाकिनी मिल्क' 500 मिलीलीटर के प्रत्येक पाउच में दूध बेचता है। दूध को एक मशीन द्वारा पाउच मे भरा जाता है जिसके लिए भरने का मानक विचलन 5 मिलीलीटर है। तीन अलग अलग संभावित स्थितियॉ हैं :–

(अ) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या मशीन 500 मिलीलीटर दूध औसतन भर रही है । इसका अर्थ है कि मशीन ठीक से व्यवस्थित है।

(ब) ग्राहकों से शिकायत है कि पाउच मे 500 मिलीलीटर से कम दूध की मात्रा है।

(स) प्रबंध चाहता है कि औसतन दूध 500 मिलीलीटर से ज्यादा नहीं होना चाहिए।

(द) मान लीजिए कि ऊपर की स्थितियों मे से कोई एक स्थिति घटित होती है और हमें किसी निष्कर्ष मे पहुॅचने कि आवश्यकता है। भरे हुए पाउचों के बीच 72 यादृच्छिक तरीके से उठाऐं जाते हैं और उनकी मात्रा को मापा जाता है। इन मापों का माध्य 501.1 मिलीलीटर पाया गया। आपका निष्कर्ष क्या है? (5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें)

हल : यहॉ $\mu_0 = 500$ मिलीलीटर , $\sigma = 5$ मिलीलीटर , n=72, $\bar{x}$ =501.1 मिलीलीटर $\propto = 0.05$ मिलीलीटर

(अ) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य $\mu = 500$ मिलीलीटर है या नहीं और, इसलिए, शून्य परकिल्पना $\mu_0 = \mu \neq 500$ मिलीलीटर है। (मशीन ठीक से व्यवस्थित है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_0 = \mu \neq 500$ (मशीन ठीक से व्यवस्थित नहीं है।),

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1)

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है, क्योंकि $\mu_0 \colon \mu \neq 500$ मिलीलीटर

दिये हुए नमूने के लिए 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2} = -1.96$ और $K_{\alpha/2} = 1.96$

Z के सही मान के लिए $Z_{obs} = \frac{\bar{x}\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1 - 500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

$Z_{obs} = 1.87$ एक मान (–1.96,1.96) के अन्तराल में है, μ_0 स्वीकार्य है।

क्योंकि

निष्कर्ष : माध्य 500 मिलीलीटर है इसका अर्थ है कि मशीन ठीक से व्यवस्थित है।

(ब) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य 500 मिलीलीटर से कम है, और इसलिए, शून्य परिकल्पना $\mu_0 \colon \mu = 500$ (माध्य 500 मिलीलीटर है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_0 \colon \mu < 500$ मिलीलीटर है। (माध्य 500 मिलीलीटर से कम है)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण निचला पुच्छ है क्योंकि $\mu_0 : \mu < 500$ मिलीलीटर

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2} = -1.645$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र Z=-1.645 है। $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1-500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

$Z_{obs} = 1.87 > 1.645,$ यह 500 मिलीलीटर से कम नहीं है।

(स) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है और इसलिए, शून्य परिकलपना $\mu_0 : \mu = 500$ मिलीलीटर (माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है)।

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ , परीक्षण ऊपरी पुच्छ है क्योंकि $\mu_1 : \mu > 500$ मिलीलीटर ।

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $k_\propto = 1.645$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र $Z > 1.645$ है। $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1-500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

चूँकि Zobs +1.87>1645, μ_0 अस्वीकार्य हैं ।

निष्कर्ष :– माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है। इसलिए औसत भरान 500 मिलीलीटर से ज्यादा है।

उदाहरण है :– 2 एक फर्म प्रतिरोधक बनाती है। उने प्रतिरोधों का मानक विचलन 0.02 ओम ज्ञात किया गया। क्या उनका औसत प्रतिरोधक 1.39 ओम है का परीक्षण आवश्यक है। 64 प्रतिरोधकों का एक यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य 1.39 ओम है लिया जाता है। इस नमूने के आधार पर , क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सम्पूर्ण समूह का औसत प्रतिरोधक 1.4 ओम है।

हल : यहॉ, $\mu_0 = 1.4$ ओम , $\sigma = 0.02$ ओम , n=64 , $\bar{x} = 1.39$ ओम

महत्व का स्तर अंकित नहीं किया गया है इन परिस्थितियों मे हम $\propto = 5\%$ मान सकते हैं। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 1.4$ ओम (माध्य प्रतिरोधक 1.4 ओम है)

वैकल्पिक परिकलपना $\mu_0 : \mu \neq 1.4$ ओम (माध्य प्रतिरोधक 1.4 ओम के समान नहीं है)

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय हे।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k\propto_{/2} = -1.96$ है।

$Zobs = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1.39-1.4}{\frac{0.02}{64}} = -4$ चूकि Zobs = -4 का मान अन्तराल (-1.96,1.96) से बाहर है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : प्रतिरोधकों का औसत प्रतिरोधक 1.4 ओम के बराबर नहीं है।

उदाहरण 3 : इस परिकल्पना की जांच करना आवश्यक है कि औसतन, 1 पंजाबी 180 सेन्टीमीटर लम्बे होते हैं। इसके लिए, 50 पंजाबी यदृच्छया चयनित किये और उनकी ऊँचाई मापी गई। यदि औसत ऊँचाई 181.1 सेमी0 है और मानक विचलन 3.3 सेमी0 है 1 आपका निष्कर्ष है? (महत्व का स्तर 1% उपयोग करें।)

हल : यहॉ, $\mu_0 = 180$ सेमी0, $n = 50$, $\bar{x} = 181.1$ सेमी0 , $\sigma = 3.3$सेमी0 और $\propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 180$सेमी0 (पंजाबियों की औसत ऊँचाई 180 सेमी0 है)

वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 : \mu > 180$सेमी0 (औसत ऊँचाई 180 सेमी0 से ज्यादा है)
μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।
यहॉ, परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।
1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र
Z > 2.33 है ।
$Zobs = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{181.1-180}{\frac{3.3}{\sqrt{50}}} = 2.36$ चूकि Zobs = 2.36, 2.33 से ज्यादा है, μ_0 अस्वीकार्य है।
निष्कर्ष : औसतन पंजाबी 180 सेमी0 से लम्बे हैं।
उदाहरण 4 : समग्र में से 836 माध्य के साथ, 225 प्रेक्षणों वाला यादृच्छिक नमूना लिया गया है, नमूने के लिए माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 840.5 और 45 है।
1 % महत्व के स्तर पर, परीक्षण करें कि क्या नमूना माध्य, समग्र माध्य से उल्लेलखनीय ढंग से भिन्न है ?
हल : यहॉ, $\mu_0 = 836, n = 225, \bar{x} = 840.5, \sigma = 45$ और $\propto = 0.01$
शून्य परिकलपना $\mu_0 : \mu = 836$ (नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न नहीं है।)
वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 : \mu \neq 836$ (नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न है)
μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है
यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय हैं
10% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k\propto_{/2} = -2.58$ और $k\propto_{/2} = 2.58$
$Zobs = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{840.5-836}{\frac{45}{\sqrt{50}}} = \frac{4.5}{6.33} = 0.1579$ चूकि Z_{obs} = 1.5, मान अंतराल (–2.58,2.58) से बाहर है, μ_0 स्वीकार्य है।
निष्कर्ष :– नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न नहीं है।
उदाहरण 5 : यह ज्ञात हे कि लडकों के IQ का मानक विचलन 10 और लडकियों के IQ का मानक विचलन 12 है। 200 यादृच्छिक चयनित लडकों का माध्य 99 और 300 यादृच्दिक चयनित लडकियों का माध्य 97 है।

I. क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि औसतन लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान हो सकता है?
II. क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि औसतन लडकों का IQ लडकियों के IQ से ज्यादा हो सकता है ?

हल :– यहॉ, $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 12$, $n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $\overline{x_1} = 99$,
$\overline{x_2} = 97$,
चूँकि $\propto$ अंकित नहीं किया गया है, हम $\propto = 5\% = 0.05$ ले सकते हैं

i. शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = \mu_2$ (लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान है) वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 : \mu_1 = \mu_2$ (लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान नहीं है।)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\overline{x_1} - x_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} isN(0,1)$

$$Z_{obs} = \frac{\overline{x_1} - x_2}{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}} = \frac{99-97}{\sqrt{\frac{10^2}{200} + \frac{12^2}{300}}} = 2.02$$

चूँकि Zobs=2.02 का मान अन्तराल (–1.96, 1.96)से बाहर है,

μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : लडकें एवं लडकियों का IQ एक समान है।

ii यहॉ वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ (लडकों का IQ लडकियों से ज्यादा है।) यहॉ, परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k_\propto = 1.645$ है। चूँकि Z_{obs}=2.02, 1.645 से ज्यादा है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– लडकों का IQ लडकियों के IQ से ज्यादा है।

उदाहरण –6 : एक बाग से 1000 सेवों को यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य वजन 187 ग्राम एवं मानक विचलन 8 ग्राम है। दूसरे बाग से 800 सेवों का यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य वजन 188.4 ग्राम एवं मानक विचलन 10 ग्राम है । परिकल्पना का परीक्षण करें कि दोनों बागों के सेवों का औसत वजन एक समान है।

यहॉ $n_1 = 1000,\quad \overline{x_1} = 187$ग्राम $\quad \sigma_1 = 8$ ग्राम

$n_2 = 800,\quad \overline{x_2} = 188.4$ग्राम $\quad \sigma_1 = 10$ ग्राम

शून्य परिकल्पना $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$ (माध्य एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 \neq \mu_1 \neq \mu_2$ (माध्य एक समान नहीं है)

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k\propto_{/2} = 1.96$ और $k\propto_{/2} = 1.96$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} = \frac{187-188.4}{\sqrt{\frac{8^2}{1000} + \frac{10^2}{800}}} = -3.22$$

चूँकि Z_{obs} = -3.22 मान अंतराल (-1.96,1.96) के बाहर है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : दो बागों के सेवों का औसत माध्य वजन एक समान नहीं है ।

उदाहरण 7 : किसी बीमारी से ग्रसित यादृच्छिक चयनित मरीजों के समूह का प्रकुंचक रक्तचाप अध्ययन मे एवं दूसरे समूह मे 36 व्यक्तियों जो कि किसी बीमारी से ग्रसित नहीं है, निम्नलिखित परिणाम निकाले

	ग्रसित	गैर ग्रसित
नमूना आकार	36	36
माध्य प्रकुंचक चाप	178	141
मानक विचलन	24	12

परीक्षण करें कि क्या बीमारी से ग्रसित मरीजों का औसत प्रकुंचक, गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है। परीक्षण 1% महत्व के स्तर पर करें।

हल : यहॉ $n_1 = 36 \quad \overline{x_1} = 178 \quad \sigma_1 = 24$

$n_2 = 36 \quad \overline{x_2} = 141 \quad \sigma_2 = 12$ और $\propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$(औसत प्रकुंचक रक्तचाप दोनों समूहों का एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 = \mu_1 > \mu_2$ (औसत प्रकुंचक रक्तचाप बीमारी से ग्रसित मरीजों का गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

यहॉ परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

1: महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = \frac{178 - 141}{\sqrt{\frac{24^2}{36} + \frac{12^2}{36}}} = -8.27$$

चूँकि $Z_{obs} = 8.27$, 2.33 से ज्यादा है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : औसत प्रंकुचक रक्तचाप बीमारी से ग्रसित मरीजों का, गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है।

उदाहरण 8 : लडके एवं लडकियों के दो समूहों के बुद्धि परीक्षण मे ंनिम्नलिखित परिणाम निकले :

	माध्य अंक	मानक विचलन	नमूना आकार
लडकें	70	20	250
लडकियॉ	75	15	150

क्या हम 1% महत्व के स्तर पर यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि लडकियों के औसत अंक लडकों से ज्यादा है ।

हल : यहॉ $n_1 = 250 \quad \overline{x_1} = 70 \quad \sigma_1 = 20$

$n_2 = 150 \quad \overline{x_2} = 75 \quad \sigma_2 = 15$ और $\propto = 1\% = 0.01$

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (माध्य एक समान है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_0 = \mu_1 < \mu_2$ (लडको के औसत अंक, लडकियों के औसत अंक से है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

परीक्षण एक पुच्छीय है – लडकों के औसत अंक लडकियों से कम है।

1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -2.33$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = \frac{70 - 75}{\sqrt{\frac{20^2}{250} + \frac{15^2}{150}}} = -2.84$$

चूॅंकि $Z_{obs} =$ 2.84, –2.33 से कम है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : लडकों के औसत अंक लडकियों से कम है या लडकियों के औसत अंक, लडकों से ज्यादा है।

उदाहरण 9 : एनाजेसिक (दर्द निवारक) की कुछ खुराक जब 32 महिलाा रोगियों को दी जाती है तो दर्द निवारण की औसत अवधि 3.5 घन्टे थी। वहीं खुराक जब 36 पुरूष रोगियों को दी जाती है तो दर्द निवारण की औसत अवधि 4 घंटे थी। पिछले अनुभवों से , यह ज्ञात है कि दर्द राहत की अवधि का मानक विचलन 0.5 घंटे हैं।

यह परीक्षण करें कि औसतन, पुरूषों और महिलाओं में दर्द निवारण की अवधि एक समान है।

हल : यहॉ, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ घंटे $n_1 = 32$ $\overline{x_1} = 3.5$ घंटे $n_2 = 36$ और $\overline{x_2} = 4$ घंटे चूॅंकि $\propto$ अंकित नहीं किया गया है, हम $\propto = 5\% = 0.05$ समझ लेते हैं

शून्य परिकल्पना

$H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषो एंव महिलाओं में एक समान है) है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$ (औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषों एवं महिलाओं में एक समान नहीं है) है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।

5: महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -1.96$ और $k_{\propto/2} = 1.96$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = \frac{3.5 - 4}{\sqrt{\frac{(0.5)^2}{32} + \frac{(0.5)^2}{36}}} = -33.88$$

चूॅंकि Zobs = 33.88 मान अन्तराल (–1.96, 1.96)के मान से ज्यादा है, H_0 अस्वीाकार्य है।

निष्कर्ष : औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषों एवं महिलाओं में एक समान नहीं है।

उदाहरण 10 : बैंड R कलम का निर्माण करने वाले कहना है कि बैंगलौर के कालेज के छात्रों का अनुपात जो R कलम का प्रयोग करते हैं, 0.3 से अधिक है इस विवाद का परीक्षण करने के लिए, 40 छात्रों को यादृच्छिक तरीके से चुना गया और इस संबंध में पूछताछ की गई। इन 40 छात्रों मे से 10 ब्रांड R कलम का उपयोग करने के लिए पाए गए। 0.05 महत्व के स्तर पर, जांच करें कि निर्माताओं का तर्क स्वीकार्य है या नहीं ।

हल : यहॉ $p_0 = 0.3,\ n = 40,\ x = 10$ और $\propto = 0.05$

और इसलिए, नमूना अनुपात $p = \frac{x}{n} = \frac{10}{40} = 0.25$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p = 0.3$ (ब्रान्ड R के कलम का प्रयोग करने वालों का अनुपात 0.3 है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_0 = p > 0.3$ (ब्रान्उ R के कलम का प्रयोग न करने वालों का अनुपात 0.3 है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.25 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3 * 0.7}{40}}} = -0.69$

Zobs = -0.69, 1.645 से कम है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : ब्रान्ड R के कलम का प्रयोग करने वालों का अनुपात 0.3 है और यह 0.3 ज्यादा नहीं है।

उदाहरण –11 : इस पुस्तक के लेखक का मानना है कि कर्नाटक के पीयूसी के 90% से ज्यादा छात्र, राजमोहन द्वारा रचित सांख्यिकी पुस्तक का उल्लेख करते हैं पूरे कर्नाटक से 225 सांख्यिकी छात्रों के

यादृच्छिक निरीक्षण के लिए लिया जाता है, उनमें से 93.1% उवन्त पुस्तक को दर्शाते हैं। क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 1% महत्व के स्तर पर लेखक की राय मान्य है।

हल : यहाँ $P_0 = \frac{90}{100} = 0.9,\ n = 225, \quad p = \frac{93.1}{100} = 0.931,$

$\propto = 0.01$ शून्य परिकल्पना $\mu_0 : p = 0.9$ (यह पुस्तक 90% छात्रों द्वारा उल्लेखित है)है।

$H_1 : P > 0.9$ (यह पुस्तक 90% से ज्यादा छात्रों द्वारा उल्लेखित है)है।

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ , परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

1% महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है।

$$Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.931-0.9}{\sqrt{\frac{0.9*0.1}{225}}} = -1.55$$

Zobs = -1.55, 2.33 से कम है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : पुस्तक को 90% छात्रों द्वारा नहीं अपितु 90% से अधिक छात्रों द्वारा संदर्भित किया जाता है। इस प्रकार, लेखक की राय मान्य नहीं है।

उदाहरण 12 : यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या एक सिक्का पक्षपाती है। सिक्के को 32 बार उछाला जाता है और परिणाम लिखे जाते हैं। 32 में से 19 परिणामों मे ंचिट घटित होता है। क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सिक्का पक्षपाती है।

हल :– हम जानते हैं कि निष्पक्ष सिक्के के लिए चिट आने की प्रायिकता 0.5 है।

इसलिए, हम परीक्षण करते हैं कि क्या $p = 0.5$

इस प्रकार $p_0 = 0.5, \quad n = 32, \quad x = 19$

इसलिए, $p = \frac{x}{n} = \frac{19}{32} = 05938$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : p = 0.5$ (सिक्का निष्पक्ष है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_0 : p \neq 0.5$ (सिक्का पक्षपाती है)

H_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k\propto_{/2} = -1.96$ और $k\propto_{/2} = 1.96$ है।

$$Zobs = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.5938-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{32}}} = 1.06$$

Zobs = 1.06 मान, अन्तराल (-1.96,1.96) में है, हम μ_0 स्वीकार्य करते हैं

निष्कर्ष : सिक्का निष्पक्ष है।

उदाहरण 13 :– प्रायिकता सिद्धान्त के अनुसार, एक ऐसे परिवार जिसमें दो बच्चे हैं और दोनों ही लडके हैं कि प्रायिकता 0.25 है और इलाके में जहॉ 136 परिवारों में प्रत्येक में दो बच्चे हैं। जिनमें से 46 परिवारों मे 2 लडके हैं। क्या यह जानकारी सिद्धान्त की पुष्टि करती है। (1% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें)

हल :– यहॉं, $p_0 = 0.25, \quad n = 136, \quad x = 46\,, \quad \propto = 0.01$

इसलिए $p = \frac{x}{n} = \frac{46}{136} = 0.3382$

शून्य परिकल्पना $H_0 : p = 0.25$ (दो लडकों के साथ परविारों का अनुपात 0.25 है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 : p \neq 0.25$ (अनुपात 0.25 में से भिन्न है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉं, परीक्षण दो पुच्छीय है।

1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -2.58$ और $k_{\propto/2} = 2.58$ है।

$$Zobs = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.3382-0.25}{\sqrt{\frac{0.25*0.75}{136}}} = 2.375$$

चूॅंकि Zobs = 2.375 मान, अन्तराल (-2.58,2.58) में है, हम H_0 स्वीकार्य करते हैं

निष्कर्ष : 2 लडके के साथ परिवारों का अनुपात 0.25 है।

उदाहरण 14 :– यह परीक्षण करना आवश्यक है कि क्या छात्रों के बीच सिगरेट के घुएं का अनुपात व्याख्याताओं के बीच में कम है। 60 यादृच्छिक चुने गए छात्रों मे 2 धूम्रपान करने वाले थे। 17 यादृच्छिक चुने गए व्याख्याताओं में से 5 धूम्रपान करने वाले थे। आपका निष्कर्ष क्या होगा ?

हल :– यहॉं $n_1 = 60, \quad x_1 = 2, \quad p_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{2}{60} = 0.0333$

$$n_2 = 17, \quad x_2 = 5, \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{5}{17} = 0.2941$$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p_1 = p_2$ (छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों एवं व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात समान है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = p_1 < p_2$ है (छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात, व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों के अनुपात से कम है।)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}}$ N(0,1) है।

यहॉं, परीक्षण निचला पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto} = -2.33$ है चूॅंकि सार्वजनिक अनुपात p अज्ञात है, इसका आंकलन दिये हुए आंकडे से करते हैं। आंकलन है

$$\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} = \frac{2+5}{60+17} = 0.0909$$

$$Zobs = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{0.0333-0.2941}{\sqrt{0.0909*0.9091\left[\frac{1}{60}+\frac{1}{17}\right]}} = \frac{-0.2608}{\sqrt{\frac{0.0909*0.9091}{60*17}}}$$

$$= -3.302$$

चूॅंकि Zobs = -3.302 मान -2.33 से कम है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों के अनुपात से कम है।

उदाहरण 15 :– एक घंटे की अवधि के दौरान बैंगलौर मे मैसूर बैंक जंक्शन को पार कर चुके 326 स्कूटरों मे से 143 ब्रांड बी स्कूटर थे। एक घंटे की अवधि के दौरान पुणे मे शिवाजी मूर्ति जंक्शन को पर कर चुके 213 स्कूटरों में, 137 ब्रांड की स्कूटर थ। बैंगलौर की सडकों पर ब्रांड बी स्कूटर का अनुपात पुणे के अनुपात से भिन्न है।

हल :– यहॉ $n_1 = 326, \quad x_1 = 143, \quad p_1 \frac{x_1}{n_1} = \frac{143}{326} = 0.4387$

$$n_2 = 213, \; x_2 = 137\,, \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{137}{213} = 0.6432$$

शून्य परिकल्पना

$H_0 = p_1 = p_2$ है(बैंगलौर एवं पुणे की सडकों पर ब्रांड बी स्कूटर का अनुपात एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = p_1 < p_2$ है (बैंगलौर एवं पुणे की सडकों पर ब्राड बी स्कूटर का अनुपात भिन्न है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}}$

$= \frac{0.4387-0.6332}{\sqrt{0.5195*0.4805\left[\frac{1}{326}+\frac{1}{213}\right]}} = -4.646$

Zobs = -4.646 मान अन्तराल (-1.96, 1.96) से बाहर है। H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : बैंगलौर की सडकों में ब्रांड B स्कूटरों का अनुपात , पूणे की सडकों में ब्रांड B स्कूटरों के अनुपात से भिन्न है।

उदाहरण 16 :– निम्नलिखित आंकडों से, परीक्षण करें क्या दो नमूनों के अनुपातों के बीच अन्तर उल्लेखनीय है।

	आकार	**अनुपात**
नमूना -I	1,000	0.02
नमूना -II	1,200	0.01

हल : यहॉ $n_1 = 1000, \quad n_2 = 1200, \quad p_1 = 0.02, \quad p_2 = 0.01$

इसलिए , $\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{100*0.02+1200*0.01}{1000+1200} = 0.0146$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p_1 = p_2$ है (अनुपात एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 = p_1 \neq p_2$ (अनुपात भिन्न है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}}$ N(0,1) है।

यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।

5: महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k\propto_{/2} = -1.96$ और $k\propto_{/2} = 1.96$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{0.02-0.01}{\sqrt{0.0146*0.9854\left[\frac{1}{1000}+\frac{1}{1200}\right]}} = 1.9471$$

चॅूकि Zobs=1.9471 मान अन्तर (01.96,1.96) के बीच है। H_0 स्वीकार्य हैं।

निष्कर्ष : अनुपात एक समान हैं।

उदाहरण 17 :– यह परीक्षण करना आवश्यक है कि क्या एक सिक्का पक्षपाती है।

(अ) मान लीजिए सिक्का 40 बार उछाला जाता है औरचिट के परिणामस्वरूप सिक्के का अनुपात 0.4 है। निष्कर्ष क्या है।

(ब) मान लीजिए सिक्के को 100 बार उछाला जाता हे और चिट के परिणामस्वरूप सिक्के का अनुपात 0.4 है। निष्कर्ष क्या है।

हल :– दोनों परिस्थितियों में, हमारे पास $H_0: P = 0.5$ (सिक्का निष्पक्ष है)

$H_1: P \neq 0.5$ (सिक्का पक्षपाती है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -1.96$ और $k_{\propto/2} = 1.96$

(अ) यहॉ, n=40 और p=0.4 , $Zobs = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.4-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{40}}}$ = -1.2649

चूॅकि Zobs = -1.2649 मान अन्तराल (-1.96,1.96) के बीच है। H_o स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : सिक्का निष्पक्ष है।

(ब) यहॉ, n=100, p=0.4 अतः Zobs = $\frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.04-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{100}}}$ = -2

चूॅकि Zobs = -2 मान अन्तराल (-1.96,1.96) के बाहर है। H_o अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : सिक्का पक्षपाती है।

ध्यान दें :– परिस्थिति (अ) और परिस्थिति (ब) में अनुपात (0,4) एक समान है। इसके बावजूद निर्णय एक समान नही है। क्योंकि बडे n के लिए, SE छोटा है।

13.4 बडे नमूने

बडे एवं छोटे नमूनों मे भेद करना बहुत कठिन है। यदि नमूना आकार 30 से बडा है या n>30, तब उन नमूनों को बडा नमूना कहा जा सकता है।

बडे एवं छोटे नमूने के बीच अन्तर महत्व के परीक्षण के प्रयोग से है, क्यांकि हम दो नमूनों के लिए जा धारणाऐं बनाते हैं वो एक समान नहीं हेाती है। बडे नमूनों के लिए अवधारणाऐं हैः

1. आंकडों का यादृच्छिक नमूना वितरण लगभग सामान्य हो ।
2. नमूना मान पर्याप्त रूप से समग्र के करीब हो और इसका प्रयोग आंकलन की मानक त्रुटि की गणना में किया जा सके। बडे नमूनों की स्थिति में, जब हम आंकडों के महत्व का परीक्षण कर रहे हों तो मानक त्रुटि की संकल्पना प्रयोग होती है। विभिन्न आंकडों के लिए मानक त्रुटि ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नवत है।

माध्य की मानक त्रुटि :– यह केवल नमूना त्रुटियों को मापता है। नमूना त्रुटि सिवाय समग्र के सभी भावात्मक जानकारी नमूने मे से एक समग्र प्राचल के आंकलन में शामिल है।

(i) जब समग्र का मानक विचलन ज्ञात है, $S.E\bar{x} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}$ सूत्र है।

$S.E\bar{x} =$ माध्य की मानक त्रुटि

$\sigma_p =$ समग्र का मानक विचलन

$n =$ नमूनों में प्रेक्षणों की संख्या

(ii) जब समग्र का मानक विचलन अज्ञात है, हमें माध्य की मानक त्रुटि के लिए नमूने के मान विचलन सूत्र का प्रयोग करना है।

$S.E\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, σ नमूने का मानक विचलन

यदि नमूने एवं समग्र का मानक विचलन दिया हुआ हो, तो माध्य की मानक त्रुटि की गणना के लिए हमें समग्र के मानक विचलन का प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण –1 : निम्नलिखित आंकडे से माध्य के मानक त्रुटि की गणना करें, कोलकाता में दुर्गा पूजा के अवसर पर 100 फर्मों द्वारा देय राशि दिखाई गई है।

मध्य मान (रू0)	39	49	59	69	79	89	99
फर्म की संख्या	2	3	11	20	32	25	7

हल $S.E\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

मध्य मान (m)	f	$\frac{m-69}{10} = d^1$	fd^1	fd^{1^2}
69	2	-3	-6	18
49	3	-2	-6	12
59	11	-1	-11	11
69	20	0	0	0
79	32	+1	+32	32
89	25	+2	+50	100
99	7	+3	+21	63
	100		$\sum fd^1 = 80$	$\sum fd^{1^2} = 236$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{80}{100}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.36 - 0.64} \times 10 = \sqrt{1.72} \times 10$$

$$= 1.311 \times 10 = 13.11$$

$$S.E.\bar{X} = \frac{13.11}{\sqrt{100}} = \frac{13.11}{10} = 1.311$$

अनुपातों का परिकल्पना परीक्षण :–

अवधारणाऐं : अनुपात को शामिल करते हऐु परिकल्पना परीक्षण में, हम नमूना वितरण के रूप में द्विपदीय वितरण का उपयोग करते है। हम द्विपदीय वितरण के सन्निकट के रूप में सामान्य वितरण का उपयोग कर सकते हैं जब तक np और nq कम से कम 5 हो।

उदाहरण 2 :– श्री X के पास एक हार्डवेयर स्टोर है और वह एक विशेष ब्रांड की कैंची बेचता है। वह उन सभी की तुलना करना चाहता है जो पूरे देश में उन सभी की तुलना करना चाहता है जो पूरे देश में बेचे गए हैं। वह अनुभव से जानता है कि पूरे देश में बेची गई कैंची के 15% को पहले वर्ष में मरम्मत की आवश्यकता होती है। उसने 120 ग्राहकों का नमूना लिया और पाया कि उनमें से केवल 22 को उन्हें खरीदने के पहले वर्ष में मरम्मत की आवश्यकता है। महत्व के 2% स्तर पर, क्या पर्याप्त प्रमाण हैं कि उसकी कैंची पूरी दुनिया में बेची गई उन लोगों की विश्वसनीयता में अलग होती है।

हल :– $n = 120, \quad H_0 : p = 0.15, \qquad H_1 : p \neq 0.15$ माध्य

$p = \frac{22}{120} = 0.1833, \qquad \propto = 2\%$ या 0.02

दोनों आधे हिस्से के अन्तर्गत स्वीकृत क्षेत्र 0.98 हैं और इसलिए एक आधे हिस्से के अन्तर्गत स्वीकृत क्षेत्र सामान्य क्षेत्र का 0.4950 है।

यह Z का 2.33 (महत्वपूर्ण मान) देता है। इसलिए स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं

$$\pm Z = \pm \frac{p - p_{H_0}}{\sqrt{\frac{p_{H_0} q_{H_0}}{n}}} = \frac{0.1833 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 * 0.85}{120}}} = \pm 1.02$$

जैसा कि प्रेषित मान महत्वपूर्ण मान 2.33 से कम है। शून्य अवधारणा स्वीकार्य है। इसका अर्थ यह है कि श्री X की दुकान पर बेची जाने वाली कैंची पूरे देश मे ंबेची जाने वाली की तुलना मे ंविश्वसनीय नहीं है।

13.5 सारांश

संख्यिकी में, परिणाम को सांख्यिकी सार्थक कहा जाता है यदि मौके पर ऐसा होने की संभावना न घटित हो । सांख्यिकी सार्थक मुहावरे का आविष्कार रोनार्ड फिशर ने किया था। जैसा कि सांख्यिकी मे प्रयोग किया जाता है कि , सार्थक का अर्थ महत्वपूर्ण या अर्थपूर्ण नहीं है, जैसा कि रोजमर्रा की बातों में होता है। अनुसंधान विश्लेषकों का ध्यान केवल महत्वपूर्ण परिणामों पर केन्द्रित होता है जो महत्वपूर्ण प्रतिक्रिया तरीकों को दिखा सकते हैं। जो अलग अलग महत्व के परीक्षण के लिए थ्रेसहोल्ड व्यवस्थित कर सकते हैं। कई शोधकर्ताओं ने आग्रह किया कि महत्व के परीक्षणों को हमेशा प्रभाव के आकार के आंकडों के साथ होना चाहिए, जो आकार का अनुमान लगाते हैं और इस प्रकार का अंतर व्यवहारिक महत्व है।

सक्ष्यों की मात्रा को स्वीकार करने के लिए यह आवश्यक है कि एक घटना अविश्वसनीय संयोग द्वारा उत्पन्न हुई है जिसे महत्व का स्तर या महत्वपूर्ण P मान कहते हैं। पारंपरिक सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण में, P मान की प्रायिकता कम से कम चरम रूप में देखे गए आंकडों को देखते हुए कि शून्य परिकल्पना सही है। यदि ज्ञात किया हुआ P मान छोटा होता है तो यह कहा जा सकता है शून्य परिकल्पना या तो गलत है या एक असामान्य घटना घटित हुई है। P मान किसी दोहराए जाने वाले नमूनाकरण की व्याख्या नहीं करते हैं।

एक वैकल्पिक (फिर भी सम्बन्धित) सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण संरचना नाइमन पीयरसन वारकृटिस्ट स्कूल है जिसमें दोनो परिकल्पनाऐं शून्य एवं वैकल्पिक परिभाषित करना चाहिए और जांचना चाहिए कि प्रक्रिया का नमूनाकरण गुण दोहराएं अर्थात् एक शून्य अवधारणा को अस्वीकार करने का निर्णय तब किया जायेगा जब यह वास्तव में सत्य हो और इसे अस्वीकार नहीं किया जाना चाहिए था (इसे गलत सकारात्मक या I प्रकार की त्रुटि कहा जाता है) और संभावना होती है कि कोई निर्णय शून्य परिकल्पना के स्वीकार के लिए किया जायेगा t यह वास्तव मे गलत है (II प्रकार की त्रुटि) फिशरियन P मान दार्शनिक रूप से नेमन पियरसन के I प्रकार की त्रुटियों से भिन्न है।

13.6 शब्दावली

महत्व स्तर : साक्ष्यों की मात्रा को स्वीकार करने के लिए यह आवश्यक है कि एक घटना अविश्वसनीय संयोग द्वारा उत्पन्न हुई है।

नमूनाकरण त्रुटियॉ : नमूने से समग्र प्राचल आंकलन में नमूनाकरण त्रुटियॉ शामिल हेाती है।

13.7 बोध प्रश्न

1. एक केचप निर्माता यह तय करने की प्रक्रिया में है कि क्या केचप के एक नए अतिरिक्त मसालेदार ब्रंाड का उत्पादन किया जाय। कम्पनी के बाजार शोध दल में पाया कि 6000 परिवारों में किये गये सर्वेक्षण में से 355 परिवार अतिरिक्त मसालेदार ब्रान्ड खरीदेंगें। दो साल पहले किये गये अधिक व्यापक अध्ययन से पता चला है कि कब 5 प्रतिशत परिवार ब्राड खरीदेंगे। 2 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, क्या कम्पनी को निष्कर्ष निकालना चाहिए कि कोई एक अतिरिक्त मसालेदार की रूचि में बढोतरी हुई है ?
2. मुम्बई विश्वविद्यालय के 1000 छात्रों का नमूना लिया गया और उनका औसत वजन 112 Ibs, 20 Ibs के मानक विचलन के साथ पाया गया। क्या समग्र में छात्रों का औसत वजन 120 पाउन्ड हो सकता है।
3. विद्युत प्रकाश बल्बों का निर्माण करने वाली कम्पनी का दावा है कि उनके बल्बों का औसत जीवन 1600 घंटे हैं। 100 के इन बल्बों के यादृच्छिक नमूने का औसत जीवन और मानक विचलन क्रमशः 1570 घन्टे और 120 घन्टे था। क्या हमें कम्पनी के दावे को स्वीकार करना चाहिए ?

13.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

हलः $n = 6000$, $p = 335/6000 = 0.05583$

$H_0: P = 0.05$ $H_1: P > 0.05$ $\alpha = 0.02$

$\beta = 0.4800$ के लिए स्वीकृत क्षेत्र की ऊपरी सीमा 0.4800 है इसके लिए Z का मान Z तालिका 2.05 है।

$$p = p_{Ho} + z\sqrt{\frac{p_{Ho}\,q_{Ho}}{n}} = 0.05 + 2.05\sqrt{\frac{0.05 x 0.95}{6000}} = 0.05577$$

क्योंकि अवलोकित मान P (0.05577) is > than P (0.05) की तुलना है हम नाममात्र μ_0 को अस्वीकार करते हैं।

13.9 स्वपरख प्रश्न

1. माध्य के लिए परीक्षण की व्याख्या कीजिए ।
2. बडे नमूने से आप क्या समझते है ?

13.10 सन्दर्भ पुस्तकें

1. बुनियादी सांख्यिकी, गौण, गुप्ता औश्र दास गुप्ता – वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड–कलकत्ता ।
2. व्यावसायिक सांख्यिकी के बुनियादी सिद्धान्त सांचेथी औश्र कपूर ।
3. प्रबन्ध में मात्रात्मक विधियॉ श्रीवास्तव, शेनॉय और गुप्ता ।
4. व्यावसायिक सांख्यिकी – गुप्ता और गुप्ता ।

इकाई 14 चरों का सार्थक परीक्षण (छोटे प्रतिदर्श)

(Significance Test in Variables (Small Samples)

14.1 प्रस्तावना
14.2 उद्देश्य
14.3 स्टूडेन्ट का t वितरण
14.4 t परीक्षण
14.5 काई –वर्ग परीक्षण
14.6 सारांश
14.7 शब्दावली
14.8 बोध प्रश्न
14.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
14.10 स्वपरख प्रश्न
14.11 सन्दर्भ पुस्तकें

14.1 प्रस्तावना

यदि नमूना आकार 30 से कम है या $n < 30$, तो उन नमूनों को छोटा नमूना समझा जा सकता है। यथाविधि, छोटे नमूनों के तरीके और छोटे नमूनों के सिद्धान्त बडे नमूनों पर लागू होते हैं, लेकिन बडे नमूनों के तरीके और बडे नमूनों के सिद्धान्त छोटे नमूनों पर लागू नहीं होते हैं। छोटे नमूनों का उपयोग एक अनुमानित अवधारणा को जॉचने के लिए किया जाता है, जो प्रेक्षित मानों ज्ञात करने के लिए होता है, जो अग्रिम में दिए गए कुछ मानों के उतार चढाव नमूनाकरण के कारण उत्पन्न होता है। उदाहरण के लिए 12 के नमूने में यदि सहसम्बन्ध गुणांक $+0.5$ है, हम परीक्षण कर सकते हैं कि क्या सहसम्बन्ध का मान मूल समग्र में महत्वपूर्ण है।

छोटे नमूनों में, जांचकर्ताओं का अनुमान नमूनों से नमूनों तक व्यापक रूप से भिन्न होगा। छोटे नमूने परणिाम से निकला हुआ अनुमान, बडे नमूने परिणाम से कम सटीक होता है।

14.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- छोटे नमूनों के लिए महत्व परीक्षण को प्रयोग कर सकें।
- महत्वपूर्ण परीक्षणों के द्वारा छोटे नमूनों के बीच दिए गए आंकडों का विश्लेषण कर सकें।

  t परीक्षण एवं काई वर्ग परीक्षण का वर्णन कर सकें।

14.3 स्टूडेंट का t – वितरण

छोटे नमूनों के सिद्धान्त में सबसे बडा योगदान सर गोस्सेट और आर0ए0 फिशर द्वारा किया गया था। गोस्सेट ने अपनी खोज 1905 में स्टूडेन्टेस उपनाम के तहत प्रकाशित की और इसे सामान्यतया t परीक्षण या स्टूडेन्ट्स का t वितरण या स्टूडेन्टस वितरण कहा जाता है।

जब नमूना आकार 30 या 30 से कम है और समग्र का मानक विचलन अज्ञात है, हम t वितरण का प्रयोग कर सकते हैं।

$t = (\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}) \times \sqrt{n}$ सूत्र है।

जहॉ $\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

सामान्य समग्र वितरण की अवधारणा के अर्न्तगत t वितरण को गणितीय रूप में सिद्ध किया गया है या

,

$f(t) = c\ (1 + \frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}$

जहॉ $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$

$c =$ एक स्थिरता को समानता के बराबर वृक के अर्न्तगत क्षेत्र बनाने की आवश्यकता होती है।

$v = n - 1$, स्वतन्त्रता के दर्जे की संख्या उदारहण – निम्नलिखित परिणाम विस्किट के 10 डिब्बों के नमूनों मे से प्राप्त किये गये :–

निहित वस्तु का माध्य वजन = 490 ग्राम

बजन का मानक विचलन = 9 ग्राम

क्या नमूना आबादी में से आ सकता है जिसका माध्य 500 ग्राम है।

परिकल्पना लें कि $\mu = 500$ ग्राम

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$\overline{X} = 490 : \mu = 500 ; \sigma = 9 ; n = 10$$

$$t = \frac{490 - 500}{9}\sqrt{10}$$

df =10 – 1 = 9

$$= \frac{10}{9}\sqrt{10}$$

$$= \frac{10}{9} \times 3.16 = \frac{31.6}{9} = 3.51$$

df = 9, $t_{0.01} = 3.25$

$3.51 > 3.25$, हमारी परिकल्पना अस्वीकार्य है।

उदाहरण – एक आपरेटर दाबा करता है कि वह एक घंटे में 40 लेख तैयार करता है। 10 यादृच्छिक घंटों का नमूना दिखाता है कि 43, 45, 38, 37, 41, 42, 44, 39, 43 और 38 लेख तैयार होते है। क्या आपरेटर का दावा 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर उचित है। आपरेटर के घंटे में तैयार लेख का वितरण सामान्य है और 9 degree of freedom के लिए 5 प्रतिशत महत्वपूर्ण स्तर पर एक पुच्छीय परीक्षण का मान 1.833 लें।

हल :– शून्य परिकल्पनाः आपरेटर का औसत निर्माण 40 है। शून्य परिकल्पना के विरूद्ध वैकल्पिक परिकल्पना है औसत निर्माण 40 से कम है।

$$\overline{X} = \frac{1}{10}(43 + 45 + 38 + 37 + 41 + 42 + 44 + 39 + 43 + 38) = 41$$

$$\delta^2 = \frac{1}{9}(43-41)^2 + (45-41)^2 + (38-41)^2 + (37-41)^2 + (41-41)^2 +$$

$$(42-41)^2 + (44-41)^2 + (39-41)^2 + (43-41)^2 + (38-41)^2$$

$$= \frac{1}{9} \times 72 = 8$$

$$\delta = \sqrt{8} = 2.8284$$

$$t = \frac{\sqrt{X} - \mu}{\delta}\sqrt{n} = \frac{41 - 40}{2.8284} \times \sqrt{10}$$

= 1.118 < 1.833

इसलिए अन्तर महत्वपूर्ण नहीं हैं इसलिए यह संयोग हेाने के कारण उत्पन्न हो सका। अवधारण को अस्वीकार्य नहीं किया जा सकता है। आपरेटर की मांग तर्क संगत है।

14.4 t परीक्षण

एक परिकल्पना परीक्षण आंकडों के नमूने वितरण पर आधारित होता है। और इसलिए एक महत्वपूर्ण खेत्र के परिभाषित करने के लिए नमूना वितरण का ज्ञात होना आवश्यक है।

सामान्य वितरण $N(\mu, \sigma^2)$ से यादृच्छिक नमूना आकार n के लिए, नमूना माध्य $\bar{x}$ माध्य μ मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ के साथ सामान्यता वितरित है।

इसलिए $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $N(0,1)$ हैं और $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट $t(n-1)$ के साथ चर है।

$N(\mu, \sigma^2)$ से दो क्रमशः लिये गए यादृच्छिक नमूनों n_1 और n_2 आकार के और

$N(\mu, \sigma^2)$ समग्रों $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$

स्टूडेन्ट t चर $(n_1 + n_2 - 2)d.f$ के साथ है।

जब समग्र मानक विचलन अज्ञात है, उपरोक्त t चर को परिकल्पना परीक्षण के लिए प्रयोग करते हैं यद्यपि बडे नमूनों के लिए, t लगभग सामान्य है।

<u>मध्य के लिए छोटे नमूने</u>

मान लें कि $N(\mu, \sigma^2)$ समग्र में, μ और σ दोनों अज्ञात हैं

हम परीक्षण करना चाहते हैं कि क्या माध्य दिया हुआ मान μ_0 है।

शून्य परिकल्पना $\mu_0 = \mu = \mu_0$ (समग्र माध्य μ_0 है)

आकार n के यादृच्दिक नमूने के लिए , μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $t = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$ एक स्टूडेन्ट का t चर (n-1)d.f के साथ है।

निम्न में से कोई एक वैकल्पिक परिकल्पना हो सकती है।

1. $\mu_1 : \mu \neq \mu_0$ यहॉ t परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $\mu_1 : \mu > \mu_0$ यहॉ परीक्षण महत्वपूर्ण के साथ ऊपरी एक पुच्छीय है।
3. $\mu_1 : \mu > \mu_0$ यहॉ परीक्षण महत्वपूर्ण के साथ निचला पुच्छीय है।

द्विपुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2}$ और $t_{\propto/2}$ है।

ऊपरी पुच्छीय परीक्षण में, महत्वपूर्ण मान $t_{\propto}$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण में, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto}$ है।

विभिन्न $\propto$ के महत्वपूर्ण मानों के लिए और विभिन्न degree of freedom (स्वतन्त्रता के विभिन्न स्तरों के लिए) t तालिका मान पुस्तक के अंत में प्रदान की गई t वितरण से प्राप्त की जाती है।

ध्यान दें : यह परीक्षण इस धारणा पर आधारित है कि समग्र सामान्य है।

माध्यों की समानता के लिए छोटा नमूना परीक्षण

मान लें कि दो समग्र $N(\mu_1, \sigma^2)$ और $N(\mu_2, \sigma^2)$ अज्ञात μ_1 और μ_2 और σ^2 के साथ है।

हम परीक्षण करना चाहते हैं कि μ_1 और μ_2 समान है।

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (समग्र माध्य समान है।)

इन समग्रों में से, यादृच्छिक नमूना आकार n_1 और n_2 के लिए , आंकडा परीक्षण

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

$(n_1 + n_2 - 2)d.f$ के साथ स्टूडेन्ट t परीक्षण है।

वैकल्पिक परिकलपना निम्न में से कोई एक हो सकती है।

1. $\mu_1 : \mu \neq \mu_0$ यहॉ t परीक्षण दो पुच्छीय है।

2. $\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहाँ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ ऊपरी पुच्छीय है।
3. $\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहाँ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ निचला पुच्छीय है।

छो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण क्षेत्र $-t\propto/_2$ और $t\propto/_2$ है।

ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $t_\propto$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto$ है।

विभिन्न $\propto$ के मानों के लिए और विभिन्न स्वतंत्रता के स्तरों के लिए t वितरण का मान तालिका से प्राप्त किया जाता है।

ध्यान दें: 1. यह परीक्षण इन अवधारणों पर आधारित है

(अ) समग्र सामान्य है।

(ब) समग्र मानक विचलन समान है (अज्ञात)

ध्यान दें : 2 युगल अवलोकन की स्थिति में n यादृच्छिक युग्मों के साथ आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{Sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट t चर (n-1)d.f के साथ है।

यहाँ, d युग्मों के अवलोकनों के बीच अन्तर हैं माध्यों की समानता के लिए परीक्षण जब प्रेक्षण युग्मित है (पेयर टी परीक्षण, अश्रित नमूने) दो चरों के सामान्य समग्र में, यदि समग्र में दो चर इकाई विशेषताऐं x और y जो कि $N(\mu_2, \sigma^2)$, और $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ क्रमशः है। उदारहण के लिए,

1. उच्च रक्तचाप, के लिए योग उपचार से गुजरने वाले मरीजों मे रक्तचाप के दो माप होत हैं – पहला–उपचार से पहले (x) और दूसरा उपचार के बाद किसी परीक्षा में।
2. कोंचिंग कक्षाओं में किसी परीक्षा में अच्छे अंक प्राप्त करने के लिए भाग लेने वाले छात्रों का कोंचिग से पहले (x) कोंचिग के बाद (y)

इस तरह की परिस्थितियों में, मान लें कि हम परीक्षण करना चाहते हैं कि क्या माध्य μ_1 और μ_2 एकसमान है। शून्य परिकल्पना

$H_0 = \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य एक समान है)

n यादृच्छिक युग्म प्रेक्षणों के लिए

$(x_1 y_1), (x_2 y_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n y_n)$, यदि $d_1 = x_i - y_i$ होगा। यदि $\bar{d}$ नमूना माध्य आर Sd उन विचलनों का नमूना माध्य विचलन है। तो, H_0 के अर्न्तगत आंकडा t परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{Sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट t चर (n-1)d.f के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना निम्न में से कोई एक हो सकती है।

1. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ यहाँ परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहाँ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ ऊपरी पुच्छीय है।
3. $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ यहाँ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ निचला पुच्छीय है।

द्विपुच्छीय परीक्षण की स्थिति में , यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-t\propto/_2$ और $t\propto/_2$ है।

ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में महत्वपूर्ण $t_\propto$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto$ है। विभिन्न $\propto$ के महत्वपूर्ण और विभिन्न स्वतंत्रता के स्तरों के लिए t वितरण का मान तालिका से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण :– आठ यादृच्छिक दिनों पर, कालेज तक पहुँचने के लिए शहर की बस से लिया गया समय नीचे दिखाया गया है। इस परिकल्पना का पीरक्षण करें कि बस से कालेज पहुँचने के लिए औसत समय 30 मिनट है।

दिन	:	1	2	3	4	5	6	7	8
समय (मिनट)	:	27	34	30	35	31	30	29	32

हल :– $\mu_0 = 30$ मिनट और n=8 नमूना छोटा और ∝ अज्ञात हैं सामान्य वितरण मानते हुए हम स्टूडेन्ट t परीक्षण का प्रयोग करते हैं वैकल्पिक परकिल्पना $\mu_0 : \mu = 30$ है (माध्य समय 30 मिनट है) H_0 के अर्न्तगत ज परीक्षण $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t परीक्षण (चर) (n-1) के साथ हैं = 8-1=7d.f

यहाँ परीक्षण द्विपुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर 7d.f के लिए महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2} = -2.37$ और $t_{\propto/2} = 2.37$ है।

$Time(x)$	x^2
27	729
34	1156
30	900
35	1225
31	961
30	900
29	841
32	1024
248	7736

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{248}{8} = 31$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left[\frac{\sum x}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{7736}{8} - \left[\frac{248}{8}\right]^2} = 2.4495$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n-1}} = \frac{31-30}{2.4495/\sqrt{8-1}} = 1.08$$

क्योंकि $t_{obs} = 1.08$ अंतराल $(-2.37, 2.37)$में है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : बस से कालेज पहुँचने का माध्य समय 30 मिनट है।

उदाहरण : एक फैक्ट्री का प्रबंधन इस बात का तर्क करता है कि कारखाने में औसत ध्वनि की तीव्रता 120 डेसिबल से कम है। 23 यादृच्छिक मापों में ध्वनि की तीव्रता 117 डेसिबल और मानक विचलन 8 डेसीबल था। प्रबंधन का तर्क स्वीकार हे या नहीं, इसके लिए 1% स्तर के महत्व पर परीक्षण करें।

हल : यहाँ $\mu_0 = 120$ डेसीबल और $n = 23$ $\bar{x} = 117$डेसीबल ,

$s = 8$ डेसीबल और $\propto = 1\%$ 0.01

चूँकि नमूना छोटा है और σ अज्ञात है, ध्वनि की तीव्रता को सामान्य वितरण मानते हुए हम स्टूडेन्ट के t परीक्षण का उपयोग करते है। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 120$ है (औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल से कम हैं)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

एक स्टूडेन्ट t के चर (n-1)=23-1 =22 d.f है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_1 : \mu < 120$ है (औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल से कम नहीं हैं)

परीक्षण निचला पुच्छीय है।

यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय है।

22 d.f के लिए, 1% महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto} = -2.51$ है।

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{117-120}{\frac{8}{\sqrt{23-1}}} = -1.76$$

चूँकि -1.76 –2.51 से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल है और इससे कम नहीं हैं

उदाहरण : 5 मादा बिल्लियों और 8 नर बिल्लियों के दिलों का वजन ग्राम में नीचे दिया गया है:

मादा बिल्ली	:	7.5	7.3	7.1	9.0	7.6			
नर बिल्ली	:	12.7	15.6	9.1	12.8	8.3	11.2	9.4	8.2

1: महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि नर बिल्लियों का वनज मादा बिल्लियों से अधिक है।

हल :– यहॉ $n_1 = 5, \quad n_2 = 8\,, \quad \propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य वनज एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट t का चर $n_1 + n_2 - 2 = (5+8-2) = 11 d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ है।

(नर बिल्ली के दिल का वजन मादा बिल्ली के वजन से ज्यादा है)

1% महत्व के स्तर पर, 11d.f. के लिए , महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2} = -2.72$ है।

मादा बिल्ली		नर बिल्ली	
x_1	x_1^2	x_2	x_2^2
7.5	56.25	12.7	161.29
7.3	53.29	15.6	243.36
7.1	50.41	9.1	82.81
9.0	81.00	12.8	163.84
7.6	57.76	8.3	68.89

		11.2 9.4 8.2	125.44 88.36 67.24
38.5	298.71	87.3	1001.23

मादा बिल्लीयॉ :

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1 x}{n_1} = \frac{38.5}{5} = 7.7$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_1 x^2}{n_1} - \left[\frac{\sum_1 x}{n_1}\right]^2 = \frac{298.71}{5} - \left[\frac{38.5}{5}\right]^2 = 0.452$$

नर बिल्लीयॉ

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_2 x}{n_2} = \frac{87.3}{8} = 10.91$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_2 x^2}{n_2} - \left[\frac{\sum_2 x}{n_2}\right]^2 = \frac{1001.23}{8} - \left[\frac{87.3}{8}\right]^2 = 6.12$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}} = \frac{7.7-10.1}{\sqrt{\frac{5\times 0.452 + 8\times 6.12}{5+8-2}\left[\frac{5+8}{5\times 8}\right]}} = -2.61$$

चूॅकि $t_{obs} = -2.61\,, -2.72$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– नर बिल्लियों के दिलों का वजन, मादा बिल्लियों के वजन के एक समान है। साक्ष्य यह निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त है कि पुरूष बिल्लियों के दिलों का वजन महिला (मादा) बिल्लीयों की तुलना में अधिक है।

उदारहण : एसएसएलसी की कक्षा में बेतरतीब ढंग से चुने गए लडके व लडकियों की ऊॅचाईयों के बारे में निम्नलिखित आंकडे बताते हैं कि एसएसएलसी के लडके औसतन एसएसएलसी लडकियों से लम्बे हैं।

	लडके	लडकियॉ
नमूना आकार	9	12
औसत ऊॅचाई (सेमी)	171	169
मानक विचलन (सेमी)	3	2

हल :– यहॉ $n_1 = 9, n_2 = 12\,, \bar{x}_1 = 171, \bar{x}_2 = 169, s_1 = 3\,, s_2 = 2$

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ है (लडके एवं लडकियों की औसत ऊॅचाई एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट का t चर
$n_1 + n_2 - 2 = (9 + 12 - 2) = 19 d.f$
के साथ है।
वैकल्पिक परिकल्पना $H_1: \mu_1 > \mu_2$ (औसतन लडके लडकियों की तुलना में लम्बे हैं)
परीक्षण ऊपरी पुच्छीय है।
19 d.f. के लिए 5% महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $t_{\propto} = 1.73$ है।

$$t_{0bs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}} \quad \frac{171 - 169}{\sqrt{\frac{9 \times 3^2 + 12 \times 2^2}{9 + 12 - 2}\left[\frac{9 + 12}{9 \times 12}\right]}} = 1.74$$

चूँकि
$t_{obs} = -1.74 , 1.73$ से बडा है, H_0 अस्वीकार्य है।
निष्कर्ष :– लडके, औसतन, लडकियेां की तुलना में लम्बे हैं।
उदाहरण :– एक मवेशी चारा के निर्माता ढावा करते हैं कि गायों के ज्यादा चारा देने से अधिक दूध मिलता है। आने ढावे को सही साबित करने के लिए निम्न गाय प्रयोगों का आयोजन किया गया।
(अ) 6 गायों को सामान्य चारा खिलाया गया और 8 गायों को निर्माता का चारा खिलाया गया था। 6 गायों की माध्य उपज 9.7 लीटर और मानक विचलन 1.3 लीटर थी। 8 गायों की माध्य उपज 10.5 लीटर औश्र मानक विचलन 2.7 लीटर थी।
(ब) 8 गायों को निर्माता का चारा खिलाया गया था। दूध का उत्पादन लीटर मे तब होता है जब वे हमेशा के तरह चारा लेते थे और नीचे दिये हुए निर्माता के बारे मं अन्तर चारा भी लेते थे।

सामान्य चारा	:	6.3	7.4	9.7	12.4	11.1	10.4	9.6	7.1
निर्माता का चारा	:	7.4	7.2	14.6	13.6	10.5	11.6	10.4	8.7

उपरोक्त सभी मामलों, सत्यापित करें कि क्या निर्माता का ढावा सही है।
हल :– मामले (अ) में, गायों के दो स्वतन्त्र नमूने हैं जिसमें गायों को सामान्य चारा और निर्माता का चारा खिलाया जाता है। इसलिए, स्वतन्त्र नमूने के लिए t परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। मामले (ब) में, गायों के एकसमान समुच्चय के अन्तर्गत सामान्य चारा निर्माता का चारा को प्रेक्षित किया जाता है। यहॉ आंकडे व्यक्तिगत मामलों में उपज में परिवर्तन दर्शाते हैं। इसलिए t युग्यित परीक्षण प्रयोग किया गया है।
यहॉं $n_1 = 6, n_2 = 8, \bar{x}_1 = 9.7 , \bar{x}_2 = 10.5 , s_1 = 1.3, \ s_2 = 2.7$
शून्य परिकल्पना $H_0: \mu_1 : \mu_2$ हैं (माध्य एकसमान H_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट का t चर $n_1 + n_2 - 2 = (6 + 8 - 2) = 12d.f$ हैं (निर्माण का चारा ज्यादा अच्छा है)
परीक्षण निचला पुच्छीय है।
12 d.f के लिए 5: महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $-t_\propto = 1.78$ है।

$$t_{0bs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}} \quad \frac{9.7 - 10.5}{\sqrt{\frac{6 \times (13.3)^2 + 8 \times (2.7)^2}{6 + 8 - 2}\left[\frac{6+8}{6 \times 8}\right]}} = 0.62$$

चूँकि $t_{obs} = -0.62 , -1.78$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।
निष्कर्ष :– माध्य एक समान है। (कोई साक्ष्य नहीं है कि निर्माता का चारा बेहतर उपज है)
(ब) यहॉ, n=8, मान लें d=x-y है जहॉ x सामान्य चारें मे उपज है। और y निर्माता के चारें में उपज है।

H_0 के अन्तर्गत $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का चर
(n-1) = (8-1)=7 d.f के साथ है।
(अ) के मामले मे शून्य एवं वैकल्पिक परिकल्पनाऐं एकसमान हैं, परीक्षण निचला पुच्छीय है।
5% महत्व के स्तर पर, 7d.f के लिए, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto = -1.90$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
6.3	7.4	-1.1	1.21
7.4	7.2	0.2	0.04
9.7	14.6	-4.9	24.01
12.4	13.6	-1.2	1.44
11.1	10.5	0.6	0.36
10.4	11.6	-1.2	1.44
9.6	10.4	-0.8	0.64
7.1	8.7	-1.6	2.56
-	-	-10.0	31.70

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{8} = \frac{-100}{8} = -1.25$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{31.70}{8} - \left[\frac{-10}{8}\right]^2} = 1.55$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = \frac{-1.25}{1.55 / \sqrt{8-1}} = 2.13$$

चूँकि $t_{obs} = -2.13 , -1.90$ से कम नहीं है, H_0 अस्वीकार्य है।
निष्कर्ष :– निर्माता के दावे के लिए समर्थन दिया गया है कि गायों को अपने चारे से अधिक देने पर अधिक दूध मिलता है।

उदाहरण :– CET के लिए एक कोचिंग क्लास है। 10 यादृच्छिक रूप से चयनित छात्रों को कोचिंग से पहले एक परीक्षा दिलाई गई थी और उनहें कोचिंग के बाद भी एक परीक्षा दिलाई गयी थी। परीक्षण स्कोर निम्नानुसार है।

कोंचिग से पहले	:	35	39	47	53	27	19	36	46	08	17
कोचिंग के बाद	:	41	37	45	56	31	21	47	41	05	12

क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि कोचिंग प्रभावी है।

हलः– यहॉं, कोचिंग से पहले एवं कोचिंग के बाद के अंकों का युग्म बनाया जा सकता है और इसलिए युग्मित t परीक्षण प्रयोग किया जायेगा।

मान लें x कोचिंग से पहले अंकों को प्रदर्शित करते हैं और y कोचिंग के बाद अंकों को प्रदर्शित करते है। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu_1 = \mu_2$ है।

(माध्य एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत t आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t परीक्षण

$(n-1) = 10 - 1 = 9\ d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ है। (माध्य बढा हुआ है कोचिंग प्रभावशाली है।)

परीक्षण निचला पुच्छीय है।

9 d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto} = -1.83$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
35	41	-6	36
39	37	2	4
47	45	2	4
53	56	-3	9
27	31	-4	16
19	21	-2	4
36	47	-11	121
46	4	5	25
08	05	3	9
17	12	5	25
-	-	-09	253

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-9}{10} = -0.9$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{253}{10} - \left[\frac{-9}{10}\right]^2} = 4.95$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = 4.95 \frac{-0.9}{1.55 / \sqrt{10-1}} = 0.55$$

चूॅंकि $t_{obs} = -0.55, -1.83$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– कोचिंग प्रभावशाली नहीं है।

उदाहरण :– 7 पतियों और उनकी पत्नियों के वनज किलोग्राम में निम्नवत हैं।

जोडे	:	1	2	3	4	5	6	7
पति	:	62	56	59	73	49	54	67
पत्नी	:	55	61	62	68	52	51	62

परिकल्पना का परीक्षण करें कि पतियों का माध्य वजन एवं पत्नीयों का माध्य वजन एक समाज है।

हल :– यहॉ हमारें पास n=7 प्रक्षेणों का युग्म और इसलिए, हम t युग्म परीक्षण का प्रयोग करते हैं मान लें x पति का वजन एव y पत्नी का वजन है। मान लें $d = x - y$ विचलन है।

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य वजन एक समान है।)

H_0 के अर्न्तगत , ज आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t चर $(n-1) = 7 - 1 = 6\, d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ है।

(माध्य एक समान है)

परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर , 6d.f के लिए, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2} = -2.45$ और $t_{\propto/2} = 2.45$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
62	55	7	49
56	61	-5	25
59	62	-3	9
73	68	5	25
49	52	-3	9
54	51	3	9
67	62	5	25
-	-	9	151

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{9}{17} = 1.29$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{151}{7} - \left[\frac{9}{7}\right]^2} = 4.46$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = \frac{+1.29}{4.46 / \sqrt{7-1}} = 0.71$$

चूॅकि 0.71 अंतराल (–2.45 , 2.45) के बीच हे, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– पतियों का माध्य वजन एवं पत्नीयों का माध्य वजन एक समान है।

14.5 काई वर्ग परीक्षण (x^2)

अनुमानित आंकडों के वितरण को सत्यापित करने के लिए काई वर्ग का प्रयोग सांख्यिकी में गुणों के तर्क संगत के लिए किया जाता है इसलिए, वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियों के विचलन का अध्ययन करने के लिए यह एक उपाय है।

नमूने के अध्ययन मे विशेष रूप से आंकडों में इसका और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच दो गुना संयोग और नमूने में उतार–चढाव के कारण अंतर को अनदेखा किया जा सकता है। यदि वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच कोई अंतर नहीं है x^2 शून्य होता है। इस प्रकार, काई वर्ग परीक्षण सिद्धान्त और अवलोकन के बीच विसंगति का वर्णन करती है।

x^2 परीक्षण की विशेषताऐं

1. परीक्षण आवृत्तियों की घटनाओं पर आधारित है, जबकि सैद्धान्तिक वितरण में, परीक्षण माध्य और मानक विचलन पर आधारित है।
2. निष्कर्ष निकालने के लिए, यह परीक्षण विशेष रूप से परिकल्पना परीक्षण के लिए प्रयोग किया जाता है लेकिन अनुमान के लिए उपयोगी नहीं है।
3. परीक्षण अवलोकन की पूर्ण स्थित एवं अपेक्षित
4. आवृत्तियों के बीच प्रयोग किया जा सकता है।
5. स्वतन्त्रता की श्रेण संख्या में हर वृद्धि के लिए, एक नया x^2 वितरण का गठन होता है।
6. यह एक सामान्य प्रयोजन परीक्षण है और जैसा कि अनुसंधान मे बेहद उपयोगी है।

मान्यताऐं :–

1. सभी प्रेक्षण स्वतन्त्र होने चाहिए।
2. सभी घटनाऐं परस्पर अनन्य होने चाहिए ।
3. बडे अवलोकन (प्रेक्षण) होने चाहिए।
4. तुलना प्रयोजनों के लिए आंकडे मूल इकाईयों में होने चाहिए।

स्वतन्त्रता की श्रेणी :– जब हम x^2 की गणना मान की तुलना तालिका मान के साथ करते हैं। स्वतन्त्रता की श्रेणी होती है। स्वतन्त्रता की श्रेणी का अर्थ है वर्गों की संख्या, जिनके मानों को बिना प्रतिबंध के बिना बंदिशों में सौंपा जा सकता है। उदारहण के लिए हम कोई भी चार अंक चुनते हैं, जिनका योग 50 है। यहॉ हमारे पास कोई भी तीन अंक के चयन करने का विकल्प है 10 , 15 , 20 और चौथ अंक $[50-(10+15+20)]$। इस प्रकार, हमारी आजादी के श्रेणी की पसंद इस शर्त पर एक करके कम हो जाती है कि योग 50 हो। इसलिए स्वतन्त्रता पर लगा प्रतिबंध एक और स्वतन्त्रता की श्रेणी तीन है। जैसे ही प्रतिबंध बढता है स्वतन्त्रता की श्रेणी कम हो जाती है।

इस प्रकार $v=n-k$

v : (न्यू) स्वतन्त्रता की श्रेणी

k : स्वतन्त्र प्रतिबंधों की संख्या

n : आवृत्ति वर्गों की संख्या

2×2 आकास्मिक तालिका के लिए, स्वतन्त्रता की श्रेणी

$$v=(c-1)(r-1)$$
$$=(2-1)(2-1)$$
$$=1$$ है।

उपयोग :–

1. **गुणों के तर्क संगत का x^2 परीक्षण :–** परीक्षण के माध्यम से हम प्रेक्षित मानों और अपेक्षित मानों के बीच के विचलन का पता लगा सकते है। यहॉ हम प्राचलों से संबन्धित नहीं है। लेकिन वितरण के रूप में सम्बन्धित है। कार्ल पियर्सन ने सैद्धान्तिक मान (परिकलपना) और प्रेक्षित मान के बीच अन्तर का परीक्षण करने के लिए एक विधि विकसित की है। परीक्षण गणना मान का x^2 के तालिका मान के वांक्षित स्वतन्त्रता श्रेणी के साथ तुलना करने से किया जाता

है। x^2 ग्रीक शब्द का प्रयोग तथ्य औश्र सिद्धान्त के बीच के अंतर के परिणाम का वर्णन करने के लिए किया जाता है।

x^2 को इस तरीके से परिभाषित किया जाता है।

$$\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(O-E)^2}{E}\right\}$$

O = प्रेक्षित आवृत्तियॉ

E = अपेक्षित अवृत्तियॉ

चरण :–

1. एक परिकल्पना महत्व के स्तर के साथ स्थापित की गई हैं ।
2. प्रेक्षित मान और अपेक्षित मान के बीच विचलनों की गणना (O-E) ।
3. गणित विचलनों का वर्ग $(O-E)^2$
4. $(O-E)^2$ को इसकी अपेक्षित आवृत्तियों से विभाजित करें।
5. चरण 4 से प्राप्त मानों का योग करें।
6. x^2 तालिका में से एक निश्चित महत्व के स्तर पर, सामान्यतया 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान ज्ञात करें।

यदि x^2 का परिकलित मान x^2 के तालिका मान से एक निश्चित महत्व के स्तर पर ज्यादा है, हम परिकल्पना को अस्वीकार्य करते हैं यदि x^2 का परिकलित मान शून्य है तब प्रेक्षित मान और अपेक्षित मान पूर्णतया मेल खाते हैं। यदि x^2 का परिकलित मान पूर्णतया मेल खाते हैं यदि x^2 का परिकलित मान तालिका मान से एक निश्चित महत्व के स्तर पर कम है, तो यह महत्वपूर्ण नहीं है। इसका अर्थ है कि प्रेक्षित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच नमूनाकरण में उतार चढाव के कारण विसंगतियॉ हो सकती है।

उदाहरण :– 4 सिक्के 160 बार उछाले गये थे और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये गये थे।

चिट्टों की संख्या	:	0	1	2	3	4
प्रेक्षित आवृत्तियॉ	:	17	52	54	31	6

0, 1, 2, 3 या 4 सिक्कों के होने की अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करें और गुणों के तर्क संगत परिकल्पना क्या सिक्का निष्पक्ष है का परीक्षण देखें

हल :– अपेक्षित आवृत्ति $= N.n_{c_4}p^2q^{n-2} = 160.4_{c_2}(0.5)^2(0.5)^{4-2}$

X	**अपेक्षित आवृत्ति**
	$160^4cx\ (.5)^4 = E$
0	$160\ X^4\ C0\ (.5)^4 = 10$
1	$160\ X^4\ C1\ (.5)^4 = 40$
2	$160\ X^4\ C2\ (.5)^4 = 60$
3	$160\ X^4\ C3\ (.5)^4 = 40$
4	$160\ X^4\ C4\ (.5)^4 = 10$

जब x^2 प्रयोग करते हैं।

चिट्टों की संख्या	*O*	*E*	*O – E*	*(O – E)²*	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	17	10	7	49	4.900
1	52	40	12	144	3.600
2	54	60	– 6	36	0.600
3	31	40	– 9	81	2.025
4	6	10	– 4	16	1.600

$$\Sigma\frac{(O-E)^2}{E}=12.725$$

d.f. = 5 – 1 = 4; χ^2 0.05 = 9.488.

x^2 का परिकलित मतान 12.725 है जो तालिका मान 9.488 से अधिक है, गलत तर्क है।

2. **स्वतन्त्रता के परीक्षण के रूप में :–** x^2 परीक्षण का उपयोग यह पता लगाने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए कोंचिंग कक्षा और सफल उम्मीदवार विवाह और विफलता आदि, हम यह पता कर सकते हैं कि क्या वे सम्बन्धित है या स्वतन्त्र । हम एक अवधारणा लेते हैं कि गुण स्वतन्त्र हैं। यदि x^2 का परिकलित मान एक निश्चित महत्व के स्तर पर तालिका मान से कम है, तो अनुमान सही है अन्यथा विपरीत।

उदाहरण :– एक गॉव में 120 लोगों के नमूनों में से , इन्फ्लुएंजा को रोकने के लिए 76 लोगों को एक नई दवा दी गई थी और उनमें से 24 व्यक्ति इन्फलुएंजा द्वारा ग्रसित थे। जिन व्यक्तियों मे नई दवा का प्रबंध नहीं किया गया उनमें से 12 इन्फलूएंजा से प्रभावित नहीं थे।

(अ) वास्तविक एवं अपेक्षित आवृत्तियों को दर्शाते हुए 2×2 तालिका तैयार करें।

(ब) काई–वर्ग का प्रयोग करते हुए ज्ञात करें कि क्या नई दवा प्रभावी है या नही ।

(5% महत्व के स्तर पर एक स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए काई वर्ग 3.84 है)

हल :–

2 × 2 तालिका

	A	α	
B	24	32	56 (B)
β	52	12	64
	76	44	120
	(A)		N

मान लें इंफलुएंजा और नई दवा स्वतन्त्र हैं।

अपेक्षित आवृत्तियॉ

$\frac{76\times56}{120}=35.5$	$\frac{56\times44}{120}=20.5$	56
$\frac{76\times64}{120}=40.5$	$\frac{64\times44}{120}=23.5$	64
76	44	120

O	E	O – E	(O – E)²	$\frac{(O-E)^2}{E}$

24	35.5	– 11.5	132.25	3.725
52	40.5	11.5	132.25	3.265
32	20.5	11.5	132.25	6.451
12	23.5	– 11.5	132.25	5.627

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 19.068$$

$d.f = (2-1)(2-1) = 1, d.f$ के लिए $x^2 = 3.84$

x^2 का परिकलित मान 19.068 है जो कि तालिका मान की तुलना मे बहुत ज्यादा है। इसलिए, परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि इन्फलूएंजा को नियंत्रित करने मे ंदवा निस्संदेह प्रभावी है।

उदाहरण :– 2000 परिवारों के एक निश्चित नमूने मे ं1400 परिवार चाय के उपभोक्ता है। 1800 हिन्दू परिवारों में से 1236 परिवार चाय का सेवन करते हैं। x^2 परीक्षण का उपयोग करें और बताएं कि क्या हिंदू और हिंदू परिवारों के बीच चाय की खपत के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर है।

हल :– 2×2 आकस्मिता तालिका में जानकारी के सारणीकरण पर, हम प्राप्त करते हैं :–

	हिन्दू	गैर हिन्दू	योग
उपभोग चाय	1236	164	1400
गैर उपभोग चाय	564	36	600
योग	1800	200	2000

परिकल्पना गुण स्वतन्त्र है।

अपेक्षित आवृत्तियॉ

$$\frac{1800\times1400}{2000} = 1260$$
$$\frac{1800\times600}{2000} = 540$$
$$\frac{200\times1400}{2000} = 140$$
$$\frac{200\times600}{2000} = 60$$

x^2 की गणना

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
1236	1260	– 24	576	0.457
564	540	+ 24	576	1.068
164	140	+ 24	576	4.114
36	60	– 24	576	9.600

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 15.239$$

$d.f$ 1 है , 1 $d.f$ के लिए x^2 का तालिका मान = 3.841

x^2 का परिकलित मान 15.239 तालिका मान (3.841) से बहुत अधिक है। इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसलिए चाय के उपभोग के संबंध मे ंदो समुदायों में काफी अंतर है।

उदाहरण :– निम्नलिखित परिणामों के साथ एक पासा 120 उछाला जाता है।

ऊपर की संख्या :	1	2	3	4	5	6	Total
आवृत्ति :	30	25	18	10	22	15	120

इस परिकल्पना का परीक्षण करें कि पासा निष्पक्ष है।

हल :– परिकल्पना है कि पासा निष्पक्ष है।

अपेक्षित आवृत्ति $\left[120 \times \frac{1}{6}\right] = 20$ है।

x^2 परीक्षण का प्रयोग करते हुए

O	**E**	**O – E**	**(O – E)^2**	$\frac{(O-E)^2}{E}$
30	20	10	100	5.00
25	20	5	25	1.25
18	20	– 2	4	0.20
10	20	– 10	100	5.00
22	20	2	4	0.20
15	20	– 5	25	1.25

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 12.90$$

d.f. = n – 1 = 6 – 1 = 5

5% महत्व के स्तर पर 5d.f के लिए तालिका मान 11.07 है जो कि x^2 के परिकालित मान 12.90 से कम है परिकल्पना जो कि पासा निष्पक्ष है, 5% महत्व के स्तर पर अस्वीकार्य है।

उदाहरण 5– टाइफाइड के खिलाफ इसकी प्रभावशीलता का परीक्षण करने के लिए एक निश्चित इलाके में कुल 720 में से 456 पुरूषों को एक निश्चित दवा दी गई थी। टाइफाइड की घटनाओं को नीचे दिखाया गया है।

रोग के खिलाफ दवा की प्रभावशीलता का पता लगाएं।

(1d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.84 है)

हल :– 2×2 आकस्मिकता तालिका

	संक्रमण	गैर संक्रमण	योग
दवा	144	312	456
बिना दवा के	192	72	264
योग	336	384	720

परिकल्पना है कि दवा स्वतन्त्र है। अपेक्षित आवृत्तियॉ

$$\frac{336 \times 456}{720} = 212.80$$

$$\frac{336 \times 264}{720} = 123.2$$

$$\frac{384 \times 456}{720} = 243.2$$

$$\frac{384 \times 264}{720} = 140.8$$ है।

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
144	212.8	– 68.8	4733.44	22.24
192	123.2	+ 68.8	4733.44	38.42
312	243.2	+ 68.8	4733.44	19.46
72	140.8	– 68.8	4733.44	33.62

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 113.74$$

x^2 का परिकलित मान = 113.74 जो कि 1 d.f में 5% महत्व के स्तर पर तालिका मान से बहुत ज्यादा है। इसलिए यह अत्यन्त महत्वपूर्ण है। शून्य परिकल्पना गलत है। इसलिए टायफाइड को नियंत्रित करने मे दवा निश्चित रूप से प्रभावी है।

उदारहण :– एक शहर में 8000 स्नातकों मे से 800 महिलाएं हैं 1600 स्नातक कर्मचारियों मे से 120 महिलाएं हैं x^2 का प्रयोग करके ज्ञात करें कि लिंग के आधारपर नियुक्ति में कोई विभेद है। 1 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 5% स्तर पर x^2 का मान 3.84 है।

हल :– प्रश्न में दी गई जानकारी को 2×2 तालिका में सारणीबद्ध किया जा सकता है।

	कार्यरत	बेरोजगार	योग
पुरूष	1480	5720	7200
महिला	120	680	800
योग	1600	6400	8000

हम इस अवधारणा को मानते हैं कि लिंग के आधार पर नियुक्ति में कोई अंतर नहीं है।

$$\frac{7200 \times 1600}{8000} = 1440$$

$$\frac{7200 \times 6400}{8000} = 5760$$

$$\frac{1600 \times 800}{8000} = 160$$

$$\frac{6400 \times 800}{8000} = 640$$ है।

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
1480	1440	40	1600	1.111
120	160	– 40	1600	10.000
5720	5760	– 40	1600	0.278
680	640	40	1600	2.500

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 13.889$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 13.889$$

d.f. = (r – 1) (c – 1)

= 1 × 1 = 1

1d.f के लिए $x_{0.05}^2 = 3.84$ है जो कि तालिका मान 3.84 से बहुत अधिक है इसलिए , परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि लिंग के आधार पर नियुक्तियॉ हुई है।

14.6 सारांश

महत्व का स्तर आमतौर पर यूनानी प्रतीक (लोअरकेस अल्फा) द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। महत्व के लोकप्रिय 10%(0.1), 5%(0.05), 1%(0.01), 0.5%(0.005), 0.1%(0.001) है। यदि महत्व का एक परीक्षण महत्व स्तर से कम पी मान देता है, तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाता है। ऐसे परिणामों को अनौपचारिक रूप से सांख्यिकी में महत्वपूर्ण कहा जाता हैं उदाहरण के लिए, यदि कोई तर्क करता है कि ''एक हजार में केवल एक ही मौका संयोग से होता है।,'' सांख्यिकीय महत्व का 0.001 एक स्तर निहित है। कम महत्व के स्तर के लिए मजबूत साक्ष्य की आवश्यकता होती हैं महत्व का स्तर चुनना काफी हद तक मनमाना कार्य है, लेकिन कई अनुप्रयोगों के लिए 5% का स्तर चुना जाता है, इसके कोई बेहतर कारण नहीं है, यह परंपरागत है।

कुछ स्थितियों मे यह $1-\propto$ के रूप में सांख्यिकीय महत्व व्यक्त करने के लिए सुविधाजनक है। सामान्य तौर पर, जब एक घोषित महत्व की व्याख्या करते हैं, तो सावधानी वरतनी चाहिए कि, वास्तव में सांख्यिकीय तरीके से परीक्षण किया जा रहा है। बराबर प्रभावों को बंद करने के विभिन्न स्तरों में महत्व के निर्धारण विश्वसनीयता बढाने के छोटे स्तर लेकिन गलत शून्य परिकल्पना (II प्रकार की त्रुटियॉ ''गलत नकारात्मक दृढ संकल्प) को अस्वीकार करने में विफल रहने का अधिक जोखिम चलाते हैं , और इसलिए कम सांख्यिकीय शक्ति होती है। इस स्तर का चयन अनिवार्यतः महत्व एवं शक्ति के बीच एक समझौता है, और इसका परिणाम टाइप I त्रुटि और टाइप II त्रुटि के बीच होता है।

14.7 शब्दावली

स्वतन्त्रता की श्रेणी : – जिसका अर्थ है कि वर्गों की संख्या जिनाक मान बिना किसी प्रतिबंध के उल्लंघन के मुताविक सौंपा जा सकता है।

काई वर्ग परीक्षण :– गुणों के तर्क संगत के लिए सांख्यिकीय में प्रयोग किया जाता है।

14.8 बोध प्रश्न

1. नमूना आकार $n = 10, \mu = 5$ किग्रा

दिए हुए नमूने आंकडों मे से सबसे पहले $\bar{x}$ और s की गणना करते हैं।

								Total
x:	4.7	4.9	5.0	5.1	5.2	4.6	4.7	**49.3**
x^2:	22.09	24.01	25.00	26.01	27.04	21.16	22.09	**243.73**

$$\bar{x} = \frac{49.3}{10} = 4.93$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{243.73}{10} - (4.93)^2}$$

$$= \sqrt{2.4373 - 24.30}$$

$$= \sqrt{0.073} = 0.27$$

$H_0 = \mu = 5$ किग्रा

$H_1 = \mu \neq 5$ किग्रा

t आंकडा परीक्षण $= \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{4.93-5}{\frac{.27}{\sqrt{9}}} = \frac{-0.07\times 3}{.27} = -0.78$

$d.f = n-1 = 10-1 = 9$

$9.d.f.$ के लिए 5% महत्व के स्तर पर तालिका मान $= 2.262$

2. $\mu = 2.00$ सेमी, $n = 10$ ट्यूब $\bar{x} = 2.01$ सेमी

$\sigma = \sqrt{0.004}$ सेमी

चूंकि $n < 30$, नमूना, छोटा नमूना है। इसलिए माध्य के परीक्षण के लिए t परीक्षण का प्रयोग करते हुए

$H_0: \mu = 2.00$ सेमी

$H_1: \mu \neq 2.00$ सेमी

आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ है।

$= \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{2.01-2.00}{\sqrt{\frac{0.004}{9}}} = \frac{.01\times 3}{\sqrt{.004}} = \frac{0.03}{0.0632} = 0.475$

$d.f$ (स्वतन्त्रता की श्रेणी की संख्या)$= 9$

$9.d.f$ के लिए 5% स्तर पर तालिका मान $= 2.262$

3. $p_1 = \frac{16}{500} = 0.032$(पहले नमूने में)

$p_2 = \frac{3}{100} = 0.0.$(दूसरे नमूने में)

मान लें कि मशीन मरम्मत के बाद नहीं सुधरी हुई है।

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$p = \frac{500\times 0.032 + 100\times 0.3}{500+100}$$

$$= \frac{16+3}{600} = 0.03$$

$$q = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= \sqrt{(0.03)(0.97)\left(\frac{1}{500}\right) + \left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{(0.03)(0.97)(0.002 + 0.01)}$$

$$= 0.0187$$

$$z=\frac{0.032-0.03}{0.0187}=\frac{0.002}{0.0187}=0.106$$

4. माना x_1 और x_2 क्रमशः घंटों में कारखानों (A) और कारखाना (B) के मजदूरों की मजदूरी (रू0 में) को प्रदर्शित करते हैं तो हमें दिया गया है।

$$n_1 = 150 \quad \bar{x}_1 = 2.56 \quad s_1 = 1.08 \quad = \sigma_1$$
$$n_2 = 200 \quad \bar{x}_2 = 2.87 \quad s_2 = 1.28 \quad = \sigma_2$$

शून्य परिकल्पना H_0

$\mu_1 = \mu_2$ कारखाना A एवं कारखाना B में मजदूरों के मजदूरी के औसत स्तर के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर नहीं है।

वैकल्पिक परिकल्पना H_1

$\mu_2 > \mu_1$ या $\mu_1 < \mu_2$ (आंये पुच्छीय परीक्षण)

आंकडा परीक्षण

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण (बडे नमूनों के लिए)

$$z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\therefore z=\frac{2.56-2.87}{\sqrt{\frac{(1.08)^2}{150}+\frac{(1.28)^2}{200}}}$$

$$z=\frac{-0.31}{\sqrt{0.016}}=\frac{-0.31}{0.126}$$

$$=-2.46$$

महत्वपूर्ण क्षेत्र

एक पुच्छीय परीक्षण के लिए, 5% महत्व के स्तर पर Z का महत्वपूर्ण मान 1.645 है। बाएं पुच्छीय परीक्षण्सा के लिए महत्वपूर्ण क्षेत्र में Z के सभी मान शामिल है।

14.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. निष्कर्ष :– 5: स्तर पर शून्य परिकल्पना (H_0) स्वीकार हैं इसलिए मशीन उचित ढंग से काम कर रही है।

2. निष्कर्ष : 5: स्तर पर H_0 स्वीकार्य है चूकि t का परिकलित मान, t के तालिका मान से कम है। इसलिए समग्र माध्य और नमूना माध्य के बीच का अंतर महत्वपूर्ण नहीं है।

3. चूंकि (1% स्तर पर) अंतर 2.58 से कम है, प्रयोगों के परिणाम परिकल्पना को प्रमाणित करते हैं। इसलिए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि मशीन मरम्मत के बाद भी नहीं सुधरी है।

4. निष्कर्ष :– चूॅकि 5% महत्व के स्तर पर Z का परिकलित मान (–2.46) महत्वपूर्ण मान (1. 645) की तुलना में कम है। इसलिए शून्य परिकल्पना 5% महत्व के स्तर पर अस्वीकार्य है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि कारखाना B द्वारा प्रदत्त औसतन प्रति घंटा मजदूरी कारखाने A द्वारा भुगतान की तुलना मे निश्चित रूप से अधिक है।

14.10 स्वपरख प्रश्न

1. एक भरने की मशीन से 5 किलो पाउडर भरने की उम्मीद है। 10 थैलों के नमूने ने 4.7, 4.9, 5. 0, 5.1, 5.4, 5.2, 4.6, 5.1, 4.6 और 4.7 के वनज दिए । जांच करें कि मशीन ठीक से कमान कर रही है।
2. एक कम्पनी 2.00 सेमी की औसत व्यास के स्टील ट्यूब का निर्माण क्र रही है। 10 ट्यूबों का एक नमूना 2.01सेमी का एक आंतरिक व्यास और 0.004 सेमी^{2} का विचलन देता है। क्या माध्य के मान में अंतर महत्वपूर्ण है। 5% के स्तर पर 9 d.f के लिए t का मान =2.262
3. एक मशीन ने 500 के नमूने मे से 16 अपूर्ण लेखों को मशीन में लिया, मशीन की मरम्मत के बाद यह 100 के खेप में से 3 अपूर्ण लेखों को लेती हैं क्या मशीन मे सुधार हुआ है।
4. कारखाना A में 150 श्रमिकों के एक नमूने की औसत प्रतिघंटा मजदूरी रू0 2.56, रू0 1.08 के मानक विचलन के साथ थी। कारखाना B मे 200 श्रमिकों के एक नमूने की औसत प्रतिघंटा मजदूरी रू0 2.87 , रू0 1.28 के मानक विचलन के साथ थी। क्या एक सुरक्षित रूप में अनुमान लगाया जा सकता है कि कारखाना A द्वारा भुगतान किए गए प्रति घंटे की मजदूरी कारखाना B से अधिक है।

14.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई – 20 काई–वर्ग परीक्षण
(Chi-Square Test)

20.1 प्रस्तावना

20.2 उद्देश्य

20.3 काई–वर्ग परीक्षण का अर्थ एवं प्रयोग

20.4 x^2 वितरण

20.4.1 x^2 वितरण के गुण

20.4.2 x^2 परीक्षण के प्रयोगों के लिए शर्तें

20.5 विचरण की तुलना करने के लिए काई–वर्ग एक परीक्षण के रूप में

20.6 काई वर्ग एक गैर प्राचलिक परीक्षण के रूप में

20.6.1 काई वर्ग स्वतंत्र परीक्षण के रूप में

20.6.2 काई वर्ग Goodness of fit के रूप में

20.6.3 काई वर्ग एकरूपता के रूप में

20.7 काई वर्ग परीक्षण के प्रयोग में चरण

20.8 Yate के सुधार

20.9 काई–वर्ग परीक्षण का महत्वपूर्ण अवलोकन

20.10 सारांश

20.11 शब्दावली

20.12 बोध प्रश्न

20.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

20.14 स्वपरख प्रश्न

20.15 सन्दर्भ पुस्तकें

20.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं कि विभिन्न सांख्यिकीय उपकरणों का प्रयोग परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए किया जाता है। इन सांख्यिकीय परीक्षणों को दो अलग अलग समूहों मे वर्गीकृत किया जा सकता है। प्राचल परीक्षण और गैर प्राचल परीक्षण। प्राचल परीक्षण वे होते हैं जो समग्र के मापदंडों पर आधारित होते हैं। प्राचल परीक्षणों को प्रयोग करने में, समग्र वितरण की निश्चित मान्यताओं को पूरा करना आवश्यक है। यह इन परीक्षणों के कार्यान्वयन के लिए प्रतिबंध बनता है। इन प्रतिबंधों को रोकने के लिए हम दूसरे वर्ग के परीक्षणों का प्रयोग कर सकते हैं जिन्हें गैर प्राचल परीक्षणों के रूप मे जाना जाता है। इस ढांचे में, आप विभिन्न गैर प्राचल परीक्षणों के बारे में अध्ययन करेंगें। इन सभी परीक्षणों में, काई वर्ग परीक्षण सबसे लोकप्रिय गैर प्राचल परीक्षण है लेकिन इसे प्राचल परीक्षण के रूप में भी प्रयोग किया जा सकता है। इस अध्याय में आप सैद्धान्तिक अवधारणा और काई वर्ग परीक्षण के विभिन्न उपयोगों के बारे मे विस्तार से अध्ययन करेंगें।

20.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- काई–वर्ग वितरण की अवधारणा की व्याख्या कर सकें।
- काई–वर्ग वितरण के प्रयोग का वर्णन कर सकें।

20.3 काई वर्ग परीक्षण का अर्थ एवं उपयोग

संख्यिकीविदों द्वारा विकसित किये गये कई परीक्षणों के बीच काई–वर्ग परीक्षण एक महत्वपूर्ण परीक्षण है। 1900 में प्रोफेसर कार्ल पियरसन द्वारा इस परीक्षण का प्रस्ताव किया था। काई वर्ग परीक्षण को x^2 प्रतीक द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इसकी उत्पत्ति ग्रीक अक्षर 'ची' से होती है। काई–वर्ग परीक्षण का उपयोग समग्र के भिन्नता की तुलना करने के लिए प्राचलन के साथ ही गैर प्राचल परीक्षण के रूप में किया जा सकता है, जैसे स्वतन्त्र के परीक्षण के रूप में या Goodness of fit के परीक्षण के रूप में । सैद्धांतिक विचरण को भिन्नता के लिए नमूना विश्लेषण के संदर्भ में यह परीक्षण मुख्य रूप से प्रयोग किया जाता है। नील आर उल्लमन के अनुसार,''गैर प्राचलन परीक्षण के रूप में, यह निर्धारित करने के लिए प्रयोग किये जा सकते हैं कि क्या आंकडे स्पष्ट निर्भरता दिखाते हैं या दो वर्ग स्वतन्त्र है। जब वर्ग प्रयोग किये जाते हैं, इसका प्रयोग सैद्धान्तिक समग्र एवं वासतविक आंकडों के बीच तुलना करने में किया जा सकता है।'' x^2 की यात्रा सैद्धान्तिक एवं अवलोकित विसंगति के परिमाण का वर्णन करती है, अर्थात् x^2 की सहायता से हम जान सकते हैं कि क्या सिद्धानत एवं अवलोकन के बीच दी हुई विसंगति संयोगवश विशेषता से हुई है या क्या यह सिद्धान्त की अपर्याप्तता से बनाये अवलोकित तथ्यों को जोडने के लिए है।

x^2 परीक्षण सांख्यिकीय कार्य में सबसे आसान और सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयोग किया जाने वाला गैर प्राचल परीक्षणों मे से एक है, जिसे कई स्थितियों मे प्रयोग किया जा सकता है। इस तकनीक को निम्नलिखित प्रयोजनों के लिए प्रयोग किया जाता है:

- Goodness of fit के परीक्षण के लिए
- दो विशेषताओं के बीच सम्बन्ध के बीच महत्व के परीक्षण के लिए
- समरूपता या समग्र में भिन्नता के महत्व को जानने के लिए

20.4 काई वर्ग–वितरण

काई–वर्ग चर के प्रायिकता वितरण को काई वर्ग वितरण कहते हैं। यदि $Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots Z_K$ स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हों, प्रत्येक के पास एक मानक सामान्य वितरण N(0,1) हो, तब $\chi_k^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Z_k^2$ के वितरण को x^2 वितरण कहा जाता है।

वैचारिक रूप में, x^2 अवलोकित एवं अपेक्षित आवृत्तियों के अस्तित्व के बीच विसंगति की माप है जिसका मान मुख्य रूप से स्वतन्त्रता की मात्रा पर निर्भर करता है। स्वतन्त्रता की मात्रा मानो की वह संख्या है जिसे हम स्वतन्त्र रूप से चुन सकते हैं, अर्थात वे अन्य पूर्व निर्धारित प्राचलों द्वारा तय नहीं किया जाता है। इसका अर्थ है कि काई वर्ग परीक्षण में केवल एक प्राचल होता है अर्थात स्वतन्त्रता की मात्रा की संख्या । उदाहरण के लिए, यदि यह दिया गया है कि तीन चरों का योग 50 के बराबर हो, तो हम कोई भी दो चरों का चयन करने के लिए स्वतन्त्र हैं लेकिन तीसरा चर 50 (दो चरों का योग) के बराबर होना चाहिए, क्योंकि केवल तभी तीन चरों का योग 50 के बराबर होगा। यहॉ स्वतन्त्रता की मात्रा 2 है। स्वतन्त्रता की मात्रा को सामान्यतया r या df द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। x^2 परीक्षण के माध्यम से हम सिद्धान्त या अपेक्षित मान और अवलोकित या वास्तविक मान के बीच अंतर की सीमा निर्धारित करने में सक्षम है।

गणितीय रूप में इसे निम्नवत परिभाषित किया जाता है :

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

जहॉ O = अवलोकित आवृत्तियॉ

E = अपेक्षित आवृत्तियॉ

काई वर्ग परीक्षण विशेष रूप से संज्ञात्मक आंकडों से जुडे परीक्षणों मे उपयोगी है, लेकिन इसका उपयोग उच्च मानदण्डों के लिए भी किया जा सकता है। संज्ञात्मक आंकडा माप का सबसे प्रारम्भिक रूप है, जो विभाजन को एक श्रेणी मे व्यवस्थित करता है जो कि पारस्परिक रूप से अनन्य और सामूहिक रूप से संपूर्ण है। उदाहरण के लिए, समग्र को दो श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है। पुरूष और महिलाएं।

20.4.1 x^2 वितरण के गुण

x^2 वितरण में कई गुण है, वितरण के कुछ महत्वपूर्ण गुण निम्नानुसार हैः

1. x^2 वितरण एक निरंतर संभाव्यता वितरण है जिसका निचली सीमा में मान शून्य है और धनात्मक दिशा में अनंनता तक फैली हुई है। x^2 का नकारात्मक मान सम्भव नहीं है क्योंकि अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच के अंतर की हमेशा वर्ग होता है, इसलिए x^2 का मान कभी नकारात्मक नहीं हो सकता है।
2. वितरण का सही आकार स्वतन्त्रता की मात्रा की संख्या (v) पर निर्भर करता है। सामान्य रूप में जब v छोटा है, वक्र का आकार दायीं ओर तिरछा है और जैसे ही v बडा हो जाता है, वितरण अधिक से अधिक सममित हो जाता है और सामान्य वितरण द्वारा अनुमानित किया जा सकता है।
3. x^2 वितरण का माध्य स्वतन्त्रता की मात्रा द्वारा दी जाती है और भिन्नता स्वतन्त्रता की मात्रा की दो गुनी है। इसे निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है :
   $$E(\chi^2) = \mu = v$$
   $$V(\chi^2) = \sigma^2 = 2v$$
4. x^2 एक नमूना आंकडा है जिसके पास कोई संगत प्राचल नहीं है। यह x^2 वितरण गैर प्राचल वितरण को बनाता है।

5. x^2 वितरण के लिए योगात्मक गुण अच्छा निर्णय देता है। इसका अर्थ है कि स्वतन्त्र x^2 चरों का योग भी x^2 चर होता है। इस प्रकार यदि $\chi_1{}^2$ $v_1\, d.f.$ के साथ x^2 चर है और $\chi_2{}^2$ $v_2\, d.f.$ के साथ x^2 का दूसरा चर है। $\chi_1{}^2$ स्वतन्त्र है, तब उनका योग $\chi_1{}^2 + \chi_2{}^2$ भी एक $v_1 + v_2\, d.f$ के साथ x^2 का चर है।

20.4.2 x^2 परीक्षण के प्रयोग के लिए शर्तें :–

एक काई –वर्ग परीक्षण का उपयोग किया जाना चाहिए, यदि निम्न स्थितियॉ संतुष्ट होती है

1. सैद्धान्तिक रूप से सही वितरण और अध्ययन के नमूनाकरण वितरण के बीच समानता के एक माडेम के दायित्व के लिए 'N' की कुल संख्या बहुत बडी हेानी चाहिए। N का सामान्यतया स्वीकार किया गया मान 50 होता है। इसलिए नमूने कम से कम 50 अवलोकन होने चाहिए।
2. नमूना आंकडा लक्षित समग्र से यादृच्छिक तरीके से लिया जाना चाहिए ताकि पक्षपाती (पूर्वाग्रह) कोई तत्व न हो ।
3. प्रयोगिक आंकडा या नमूना अवलोकन, अर्पित सभी वस्तुऐं या नमूने मे अवलेाकलन एक दूसरे से अलग होन चाहिए।
4. तुलनात्मकता की सुविधा के लिए आंकडों को मूल इकाईयों (पूर्ण रूप) में व्यक्त किया जाना चाहिए न कि तुलनात्मक रूप में जैस कि प्रतिशत या अनुपात या समानुपात इत्यादि।
5. किसी भी कक्ष में पॉच अवलोकन से कम नहीं होना चाहिए। (प्रत्येक आंकडे प्रविष्टि को एक कक्ष के रूप में जाना जाता है)। यदि किसी समूह में स्वीकार स्तर के नीचे आवृत्तियॉ होती हैं तो आवृत्तियों का एकत्रीकरण किया जाता है जिससे कम आवृत्तियों को पूर्ववर्ती या बाद की आवृत्तियों मे ंजोडा जाता है ताकि परिणामस्वरूप मान स्वीकार्य स्तर से अधिक हो कुछ सांख्यिकीयविद् 5 के बजाय न्यूनतम स्वीकार्य स्तर के लिए 10 अंक को बेहतर मानते हैं।
6. प्रतिबंधों को रैखिक होना चाहिए अर्थात् प्रतिबंधों की परिभाषित करने वाले सभीकरणों में आवृत्तियों का कोई वर्ग या उच्च घातें नहीं होनी चाहिए।

20.5 विविधता की तुलना के लिए , काई वर्ग परीक्षण

काई–वर्ग मान प्रायः समग्र विचरण के महत्व के आकलन के प्रयेाग के लिए किया जाता है। इसका अर्थ यह है कि जब सामन्य वक्र जिसका माध्य μ और विचलन σ_p^2 है में से एक यादृच्छिक नमूना लिया जाता है तो χ^2 परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है। समग्र विचलन के महत्व के आंकलन केलिए, यह माना जाता है कि नमूना विचलन समग्र विचलन के बराबर हो। इस प्रकार शून्य परिकल्पना को निम्न प्रकार से लिया जाता है : $H_0 : \sigma_s^2 = \sigma_p^2$

यह स्पष्ट है कि χ^2 परीक्षण χ^2 वितरण पर आधारित होता है जो कि मानों के संग्रह से संबंधित होती है और जिसमें वर्गों का योग शामिल हेाता है। जब हमें काई वर्ग का प्रयेाग समग्र विचलन के परीक्षण के रूप में करना होता है, तो हमें शून्य परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए निम्नलिखित सूत्र द्वारा χ^2 का मान निकलना पडेगा।

$$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$$

जहॉ

σ_s^2 = नमूने का विचलन

σ_p^2 = समग्र का विचलन

$(n-1)$ = स्वतन्त्रता का अंश

n = नमूने में वस्तुओं की संख्या

स्वतन्त्रता के विभिन्न अंशों एवं स्तरों के लिए x^2 के महत्वपूर्ण मान तालिका के रूप मे उपलब्ध हैं। आप इस तालिका को सांख्यिकीय की किसी भी अच्छी किताबों के परिशिष्टों मे पा सकते हैं। किसी निर्णय मे पहुँचने के लिए उपरोक्त सूत्र द्वारा x^2 के मान की गणना की जाती है, गणना किये हुए मान को (n-1) स्वतंत्रता के अंश के साथ किसी विशेष स्तर पर तालिका मान से तुलना करते हैं। यदि x^2 का गणितीय मान, तालिका के मान से कम है तो शून्य परिकल्पना को स्वीकृत किया जाता है। इसके विपरीत, यदि x^2 का गणना किया हुआ मान, तालिका मान के बराबर या अधिक हो तब परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है।

इस सम्बन्ध में याद रखने के लिए एक महत्वपूर्ण बात यह है कि काई वर्ग वितरण सममित नहीं है और सभी मान सकारात्मक है। भिन्नता की तुलना करने के लिए x^2 परीक्षण का उपयोग समग्र के सामान्य वितरण की धारणा पर आधारित हेाती है।

उदाहरण – 1 10 छात्रों का वजन इस प्रकार है :–

क्रम0 संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वजन(किग्रा)	38	40	45	53	47	43	55	48	52	49

क्या हम कह सकते हैं कि 10 छात्रों के ऊपर दिए गए नमूने से सभी छात्रों के वजन का विचलन 20 किलोग्राम के बराबर है ? 5 प्रतिशत एवं प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण करें।

हल :– सबसे पहले हमें नमूना आंकडा ज्ञात करना चाहिए, अर्थात σ^2 जिसकी गणना निम्नानुसर की जाती है :–

क्रम0सं0.	X_i (वनज किग्रा में.)	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	38	– 9	81
2	40	– 7	49
3	45	– 2	04
4	53	+ 6	36
5	47	0	00
6	43	– 4	16
7	55	+8	64
8	48	+1	01
9	52	+5	25
10	49	+2	04
$n = 10$	$\sum X_i = 470$		$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 280$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{470}{10} = 47 \text{ kgs}$$

$$\therefore \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{280}{10-1}} = \sqrt{31.11}$$

या $\sigma_s^2 = 31.11$

$H_0 : \sigma_s^2 = \sigma_p^2$

इस रिक्त परिकल्पना के परीक्षण के लिए, हमें χ^2 के मान पर निम्नानुसार कार्य करना पडेगा।

$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$

$= \frac{31.11}{20}(10-1) = 13.999$

स्वतन्त्रता का अंश = n – 1 or 10 –1 = 9

5% महत्व के स्तर पर, x^2 का तालिका मान 16.92 है और 1% महत्व के स्तर पर यह $9d.f.$ के लिए 21.67 है और ये दोनों मान x^2 के गणना किये हुए मान जो कि 13.999 हे से ज्यादा है। इसलिए, हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिये हुए वितरण का विचलन 5% एवं 1% महत्व के स्तर पर 20 किलोग्राम लिया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, नमूने को समग्र से 20 किलोग्राम वजन के साथ लिया जा सकता है।

उदाहरण – 2 15 बोतलों का एक नमूना यादृच्छिक तरीके से एक निश्चित समग्र से लिया जाता है। दिये हुए नमूने के माध्य से विचलन के वर्ग का योग 55 है। क्या इस नमूने का 6 के विचलन के साथ समग्र से लिया गया है ?

हल :– $n = 15$, $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 55$, $\sigma_p^2 = 6$ दिया गया है :

शून्य परिकल्पना को निम्नानुसार लिया जा सकता है : H_0: $\sigma_s^2 = \sigma_p^2$

सबसे पहले हमें नमूना विचलन की गणना

$\sigma_s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{55}{15-1} = 3.93$ के अन्तर्गत करते हैं

अब हमें x^2 के मान की गणना $\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$ के अन्तर्गत करनी है।

$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1) = \frac{3.93}{6}(15-1) = 9.17$

(n-1) के लिए अर्थात् (15–1) या 14 स्वतन्त्रता के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का परिकलित मान x^2 के तालिका मान से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है, अर्थात् नमूना विचलन और समग्र विचलन के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर नहीं है और नमूने को 6 के विचलन के साथ समग्र से लिया गया है।

20.6 काई–वर्ग गैर–प्राचल परीक्षण के रूप में

काई–वर्ग का उपयोग प्राचल के साथ ही गैर–प्राचल परीक्षण के रूप मे किया जा सकता है। पहले के खंड में, आपने पढा है कि काई–वर्ग का प्रयोग नमूना विचलन की तुलना, समग्र विचलन के साथ की जा सकती है। इस स्थिति में, इसे प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह समग्र प्राचल पर आधारित है। लेकिन यह ज्यादातर गैर–प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, काई वर्ग सबसे महत्वपूर्ण और लोकप्रिय गैर प्राचल परीक्षण मे से एक है जो उन सम्बन्ध में पूरा करना है। यह परीक्षण विशेष रूप से संज्ञात्मक आंकडों के सम्बन्ध मे उपयोगी है। लेकिन इसे उच्च स्तरों (क्रमिक, अंतराल, अनुपात) के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है। गैर प्राचलन परीक्षण के रूप में, निम्न परिस्थितियों में काई वर्ग प्रयोग किया जा सकता है।

20.6.1 काई–वर्ग स्वतन्त्रता के परीक्षण के रूप में

गुणों के समूह के क्षेत्र मे काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग बहुत उपयोगी है। विशेषताओं के समूह से, हमारा उद्देश्य यह पता लगाना है कि क्या दो विशेषताऐं स्वतन्त्र है या उनके बीच कोई सम्बन्ध है। इस प्रयोजन के लिए, हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि दो विशेषताओं के बीच कोई समबन्ध नहीं है अर्थात दो विशेषताऐं स्वतन्त्र है। उसके बाद x^2 के मान की गणना की जाती है और इसकी तुलना

x^2 के तालिका मान से की जाती है यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से कम या उसके बराबर है तो शून्य अवधारणा को स्वीकार किया जाता है और दो विशेषतओं को स्वतन्त्र माना जाता है, अन्यथा अगर परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो शून्य परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार कर दी जाती है और यह माना जाता है कि दो विशेषताओं के बीच सम्बन्ध है। इसलिए दो विशेषताओं के बीच परस्पर स्वतन्त्रता के परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण के लिए, मान लिजिए हमें यह जानने में रूचि है कि क्या एक नई दवा बुखार को नियंत्रित करने में प्रभावी है या नहीं। हम यह निर्णय लेने मे काई वर्ग परीक्षण की सहायता ले सकते हैं। सबसे पहले हम शून्य अवधारणा लेंगें कि दो विशेषताओं, अर्थात् नई दवा और बुखार का नियंत्रण स्वतन्त्र है जिसका अर्थ है कि नई दवा बहुखर को नियंत्रित करने मे प्रभावी नहीं है। इस आधार पर, हम पहले अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं और फिर x^2 का मान ज्ञात करते हैं। यदि x^2 का परिकलित मान स्वतन्त्रता के दिये गए अंश के लिए एक निश्चित स्तर पर तालिका मूलय से कम है, तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि शून्य परिकल्पना सत्य है जिसका अर्थ है कि देा विशेषताऐं स्वतन्त्र हैं या सम्बन्धित नहीं है। (अर्थात नई दवा बुखार को नियंत्रित करने मे प्रभावी नहीं है) लेकिन यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो हमारा अनुमान गलत होगा जिसका अर्थ है कि दो विशेषताऐं सम्बन्धित है और सम्बन्ध संयोगवश नही है अपितु यह वास्तविकता मे मौजूद है (अर्थात नई दवा बुखार को नियंत्रित करने में प्रभावी है और जैसा कि निर्धारित किया जा सकता है)। यहॉ पर घ्यान देने योग्य एक महत्वपूर्ण बात यह है x^2 सम्बन्ध के अंश की माप नहीं है या दो विशेषता के बीच सम्बन्ध के रूप मे उपाय नहीं है, लेकिन यह केवल इस तरह के सहयोग के महत्व को पहचानने की एक तकनीक या दो विशेषताओं के संबंध को पहचानने की एक तकनीक है।

20.6.2 काई वर्ग Goodness of fit के परीक्षण के रूप में

काई–वर्ग परीक्षण का प्रयोग यह पता लगाने के लिए भी किया जाता है कि सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के अनुरूप अपेक्षित वितरण मे कितना अंतर है अर्थात Goodness of Fit का परीक्षण किया जाता है। इसका अर्थ यह है कि x^2 का परीक्षण Goodness fo Fit के रूप में प्रयोग यह निर्धारित करने के लिए प्रयोग किया जाता है कि अवलेाकित आंकडे सैद्धान्तिक वितरण मे कितने अच्छे हैं। कई बार, अपेक्षित आवृत्तियों को गणितीय तकनीकों जैसे द्विपद, सामान्य और पायसन वितरण आदि की सहायता से ज्ञात किया जाता है। कभी कभी यह जानना हमारे लिए महत्वपूर्ण हो जाता है कि कितनी वास्तविक आवृत्तियॉ, अपेक्षित आवृत्तियों से मिलती है। यह आवश्यकता मुख्य रूप से नमूना अध्ययन के मामले मे उत्पन्न होती है। ऐसी परिस्थितियों में, हमें यह देखना होगा कि नमूना अध्ययन से प्राप्त वास्तविक आवृत्तियों का सैद्धांतिक या गणितीय वितरण से प्राप्त अपेक्षित आवृत्तियों के साथ मिलान है और उनके बीच का अंतर महत्वपूर्ण है या नहीं। इसे Goodness of Fit कहा जाता है।

अस्वीकृति यह बताती है कि Goodness of Fit खराब है। इस सम्बन्ध में Goodness of Fit एक अन्य उल्लेखनीय बात यह है कि अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के वक्र एक समान होते है। दूसरी ओर, यदि Goodness of Fit नहीं है तब दोनों वक्र एक समान नहीं होते है। जैसा कि आप जानते हैं कि Goodness of fit के रूप में , काई वर्ग मुख्य रूप से नमूने अध्ययनों मे उपयोग किया जाता है। लेकिन अलग अलग तरह के नमूनों में काई वर्ग का उपयोग करते समय एक बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि Goodness of Fit भी इसकी विश्वसनीयता पर प्रश्न चिन्ह उठाती है। चाउ के अनुसार ,''यह ध्यान में रखा जाना चाहिए खराब Goodness of Fit के रूप में एक समान है। जब गणना किये गए काई वर्ग का मान शून्य के निकट है तो हमें इस सम्भावना पर संदेह करना चाहिए कि

दो आवृत्तियों के आवंटन को उनके साथ सहमत होने के लिए बाध्य किया गया है और इसलिए हमारे प्रयोग के प्रारूप की पूर्ण रूप से जांच करनी चाहिए।

20.6.3 काई–वर्ग समरूपता के रूप में

विभिन्न नमूनों के बीच एकरूपता परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का भी प्रयोग किया जाता है। एकरूपता के परीक्षण के लिए, यह पता लगाया जाता है कि क्या दो विभिन्न नमूने एक ही समग्र से लिये गये हैं या नहीं। दूसरे शब्दों में, काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग दो अलग नमूनों के मानों के बीच अंतर के महत्व के परीक्षण करने के लिए किया जाता है। इसलिए, यह दो विशेषताओं के बीच स्वतन्त्र परीक्षण के समान है। लेकिन एक ही समय में, यह दो बिन्दुओं के स्वतन्त्र परीक्षण से भिन्न है। सबसे पहले स्वतन्त्र परीक्षण यह पता करने की कोशिश करता है कि एक विशेषता दूसरे से स्वतन्त्र है, और समरूपता का परीक्षण यह पता लगाने की कोशिश करता है कि यादृच्छिक नमूने समग्र से लिये गये है। दूसरा स्वतन्त्र परीक्षण एक नमूने का प्रयोग करता है जबकि समरूपता की जांच मे ंदो या अधिक नमूनों का प्रयोग होता है।

20.7 काई–वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोग में चरण

x^2 परीक्षण प्रारम्भ करने के एिल निम्नलिखित चरणों का पलन किया जाता हैः

- काई वर्ग x^2 परीक्षण की प्रक्रिया शून्य परिकलपना की अवधारणा के साथ प्रारम्भ होती है। यह माना जाता है कि अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के बीच कोई अंतर नहीं है। स्वभाविक रूप से, अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर के लिए वैकल्पिक अनुमान भी शून्य परिकल्पना से तैयार किया जाता है। इसे निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है।

  $H_0: O_i = E_i$

  $H_0: O_i \neq E_i$

  जहॉ $O_i =$ अवलोकित आवृत्ति और

  $E_i =$ अपेक्षित आवृत्ति

  कुछ सांख्यिकीयविदों द्वारा अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों को दर्शाने के लिए क्रमशः f_0 और f_e या O और E प्रतीक चिन्ह प्रयोग किये जाते हैं।

- x^2 के मान की गणना करने के लिए, हमारे पास वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियॉ हमारे पास पहले से उपलब्ध है। दूसरे चरण में, इन वास्तविक आवृत्तियों के आधार पर, परिस्थितियों के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं। अपेक्षित आवृत्तियों को यह मानकर विकसित किया जाता है कि संबंधित सांख्यिकीय समग्र के लिए एक विशेष संभावना वितरण उचित है। सामान्यता, 2x2 किसी भी आकस्मिकता तालिका के लिए किसी भी कक्ष मे अपेक्षित आवृत्ति को निम्नानुसार ज्ञात किया जाता है।

  किसी भी कक्ष में अपेक्षित आवृत्ति =

  (उस कक्ष की पंक्ति के लिए पंक्ति योग) x (उस कक्ष के स्तम्भ के लिए स्तम्भ योग)/कुल योग

- अगले चरण में, अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच अन्तर को देखते हैं, अर्थात (O-E)
- इसके पश्चात्, अन्तर का वर्ग करते हैं। अर्थात् $(O - E)^2$
- अगले चरण में, इस अंतर के वर्ग को इसकी अपेक्षित आवृत्तियों से विभाजित करते हैं, अर्थात $(O – E)^2/ E$ । यह प्रत्येक कक्षा की आवृत्तियों के लिए दोहराया जाना चाहिए।

- उसके बाद $(O - E)^2/ E$ का कुल योग ज्ञात करते हैं। यही आवश्यक x^2 मान है। इसे निम्नवत व्यक्त किया जा सकता है। $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$
- उपर्युक्त विधि द्वारा x^2 के मान की गणना करने के बाद, शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति के सम्बन्ध में निर्णय लेने के लिए इसकी तुलना तालिका मान से की जाती है, हमें दो पहलुओं के बारे मे ंनिणय लेना चाहिए – महत्व का स्तर और स्वतन्त्रता का अंश।
- महत्व के स्तर का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने के उतार चढाव के कारण गलत होने वाले अधिकतम संभावित प्रतिशत। उदाहरण के लिए 1% महत्व का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने में उतार चढाव के कारण अधिकतम 1% संख्या गलत हो सकती है। इसी तरह, 5% महत्व का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने में उतार चढाव के कारण अधिकतम 5% संख्या गलत हो सकती है। x^2 के तालिका मान ज्ञात करने के लिए शोधकर्ता द्वारा उनकी सुविधा एवं अध्ययन के उद्देश्य के अनुसार महत्व के स्तर का निर्णय लेना होता है। अभ्यास में 5% महत्व का स्तर ज्यादा प्रचलित है।
- x^2 के तालिका मान को जानने एक और मापदंड तय किया जाता है वह स्वतन्त्रता का अंश है। स्वतन्त्रता के अंश का अर्थ चयन की स्वतन्त्रता की सीमा से है। किसी भी परिस्थिति में, जब विभिन्न आवृत्ति अंतराल दिये हों, पहले के तरह ही योग निकालते हैं, आवृत्ति बदलने के लिए उपलब्ध विकल्पों की संख्या को वांछित स्वतंन्त्रता के रूप में जाना जाता है। स्वतन्त्रता के वांछित अंश को कुल संख्या में से एक को घटाकर प्राप्त किया जाता है। इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। $d.f. = n - 1$ यदि वर्ग आवृत्तियॉ को पंक्तियों और स्तम्भों में व्यवस्थित किया जाता है, तो स्वतन्त्रता के अंश जानने के लिए, एक पंक्ति की संख्या और स्तम्भ की संख्या दोनों से घटाया जाता है क्योंकि पहले की तरह पंक्तियों और स्तम्भों का योग ज्ञात करना आवश्यक होता है। इन स्थितियों में, स्वतन्त्रता के अंश का सूत्र निम्नवत दिया जाता है:

  $d.f. = (c - 1)\ (r - 1)$

  जहॉ c = स्तम्भों की संख्या

  r = पंक्तियों की संख्या
- महत्व के स्तर और स्वतन्त्रता का अंश तय करने के पश्चात x^2 के तालिका मान को विशिष्ट स्तर और अंश को देखा जाता है। काई वर्ग का तालिका मान अधिकतम सीमा तक, परिकलित मान है जो नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण उत्पन्न हुआ माना जाता है।

  अंतिम चरण में, x^2 के गणना मान और तालिका मान के बीच तुलना की जाती है। यदि परिकलित मान, तालिका मान से कम है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है जो इंगित करता है कि अपेक्षित ओर वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर महत्वपूर्ण नहीं समझा जाता है। इसके विपरीत, यदि परिकलित मान, तालिका मान से ज्यादा है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है औश्रअपेक्षित एवं वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर महत्वपूर्ण समझा जाता है। इस सम्बन्ध मे ंएक और उल्लेखनीय तथ्य यह है कि जब स्वतन्त्रता का अंश 30 से अधिक हो तो $\sqrt{2\chi^2}$ का वितरण सामान्य वितरण के अनुरूप होता है, जिसमें $\sqrt{2\chi^2}$ वितरण का माध्य $\sqrt{2\, d.f. -1}$ है और मानक विचलन =1 । फलस्तरूप जब स्वतन्त्रता का अंश 30 से ज्यादा

हो, $\left[\sqrt{2\chi^2} \ -\sqrt{2d.f.-1}\right]$ की मात्रा का प्रयोग इकाई के विचलन के साथ सामान्य चर के लिए किया जा सकता है, अर्थात् $Z\alpha = \left[\sqrt{2\chi^2} \ -\sqrt{2d.f.-1}\right]$

उदाहरण 3 :— नीचे दी गई तालिका मे हैजा के महामारी के दौरान प्राप्त आंकडों को दर्शाया गया है :—

	आक्रमण	गैर आक्रमण	योग
टीकाकरण	31	469	500
गैर टीकाकरण	185	1315	1500
योग	216	1784	2000

हैजा के हमले को रोकने मे टीकाकरण की प्रभावशीलता का परीक्षण करें। 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 1 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 3.84 है।

हल :— हम परिकल्पना को निम्नानुसार लेंगें :

शून्य परिकल्पना : टीकाकरण एवं हैजे के हमले की रोकथाम के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात दो विशेषताऐं स्वतन्त्र हैं। x^2 के मान की गणना करने के लिए हमारे पास वासतविक एवं अपेक्षित आवृत्तियॉ होनी चाहिए । वास्तविक या अवलोकित आवृत्तियॉ प्रश्न मे दी गई हैं (हैजे का आक्रमण A द्वारा प्रदर्शित है और टीकाकरण B द्वारा) जो निम्नवत है।

अवलोकित आवृत्ति

	आक्रमण (A)	गैर आक्रमण (α)	
टीकाकरण (B)	31 (AB)	469 (αB)	500
गैर टीकाकरण (β)	185 $(A\beta)$	1,315 $(\alpha\beta)$	1500
	216	1,784	2,000 (N)

इन वास्तविक आवृत्तियॉ के आधार पर, हम निम्नलिखित तरीके से अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करते हैं।

$(AB) = \frac{500 \times 216}{2000} = 54 \qquad \therefore (\alpha B) = (B) - (AB)$ or $500 - 54 = 446$

$(A\beta) = (A) - (AB)$ or $216 - 54 = 162$

$(\alpha\beta) = (\beta) - (A\beta)$ or $1500 - 162 = 1{,}338$

इसे निम्नलिखित तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है:

अपेक्षित आवृत्ति

	आक्रमण (A)	गैर आक्रमण (α)	
टीकाकरण (B)	$\frac{500 \times 216}{2000}$ = 54 (AB)	500 – 54 = 446 (α B)	**500**
गैर टीकाकरण β)	216 – 54 = 162 (Aβ)	1500 – 162 = 1,338 ($\alpha\beta$)	**1500**
	216	**1,784**	**2,000 (N)**

$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर :

$$\chi^2 = \frac{(31-54)^2}{54} + \frac{(469-446)^2}{446} + \frac{(185-162)^2}{162} + \frac{(1315-1338)^2}{1338}$$

$$= \frac{(-23)^2}{54} + \frac{(23)^2}{446} + \frac{(23)^2}{162} + \frac{(-23)^2}{1338}$$

$$= 9.8 + 1.19 + 3.27 + 0.40 = 14.66$$

इस प्रकार, χ^2 का परिकलित मान **14.66** है।

स्वतन्त्रता के अंश की संख्या = (c – 1) (r – 1) = (2 – 1) (2 – 1) = 1

5% महत्व के स्तर पर 1d.f के साथ =1 x^2 का तालिका मान =3.84 है, जबकि x^2 का परिकलित मान 14.66 है जो कि तालिका मान से बहुत अधिक है इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है जिसका अर्थ है टीकाकरण एवं हैजे के हमले की रोकथाम स्वतन्त्र नहीं है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि टीकारण हैजे की रेाकथाम के लिए प्रभावशाली है।

x^2 की गणना के लिए वैकलल्पक विधि

हम 2x2 अकस्मिकता तालिका के मामले में x^2 के मान की गणना के लिए अन्य विधि का प्रयोग कर सकते है। हम मान सकते हैं कि अवलोकित आवृत्तियों को निम्नलिखित तरीकों से व्यवस्थित किया गया है :

a	b	(a + b)
c	d	(c + d)
(a + c)	(b + d)	N

तब x^2 की गणना निम्न सूत्र के आधार पर की जा सकती है :

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc)^2 \times N}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

इस सूत्र को इस प्रश्न में प्रयोग किया जा सकता है ताकि x^2 के मान की गणना के बिना अपेक्षित आवृत्तियों को भी ज्ञात किया जा सके। ऐसी स्थिति में, हमें केवल वास्तविक आवृत्तियों की आवश्यकता होती है जो प्रश्न में पहले से ही दिए गए है।

$$\chi^2 = \frac{[(31 \times 1315) - (185 \times 469)]^2 \times 2000}{(31+469)(185+1315)(31+185)(469+1315)}$$

$$= \frac{(40675 - 86765)^2 \times 2000}{(500)(1500)(216)(1784)}$$

$$= \frac{4232000000000}{28900800} = 14.6$$

उदाहरण –4 1000 छात्रों पर जो डिस्कवरी चैनल देखते हैं और उनके बुद्धि स्तर में किये गए सर्वेक्षण मे ंनिम्नलिखित जानकारियॉ सामने आई है।

	डिस्कवरी देखने वाले	गैर डिस्कवरी योग देखने वाले	योग
उच्च IQ	415	185	600
निम्न IQ	65	335	400
योग	480	520	1,000

5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि डिस्कवरी चैलन देख रहे छात्रों में उच्च IQ होता है।

हल : आइऐं हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि डिस्कवरी चैनल देखने और IQ स्तर में कोई भी सम्बन्ध नहीं है। अब वास्तविक आवृत्तियों के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं

$\frac{480 \times 600}{1000}$ = 288	600 – 288 = 312	**600**
480 – 288 = 192	400 –192 = 208	**400**
480	**520**	**1000**

अवलोकित आवृत्ति (O)	अपेक्षित आवृत्ति (E)	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/ E$
415	288	127	16129	56
185	312	– 127	16129	51.7
65	192	– 127	16129	84
335	208	127	16129	77.54
			Total	269.24

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 269.24$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या $= (c-1)(r-1) = (2-1)(2-1) = 1$

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.841 है। चूँकि, परिकलित मान (269.24) तालिका मान (3.841) से बहुत अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि डिस्कवरी चैलन देखने वाले छात्रों का IQ ऊँचा है।

उदाहरण 5 :– एक पासे को 150 बार उछालने पर निम्नलिखित परिणाम आये

अंकों की संख्या	1	2	3	4	5	6
आवृत्ति	19	23	28	17	32	31

परिकल्पना का परीक्षण करें कि पासा निष्पक्ष है।

हल :– पासे को उछालने पर हम यह परिकल्पना करते हैं कि अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात् पासा निष्पक्ष है। एक पासे मे 6 मुख होते हैं और प्रत्येक मुख के घटित होने की प्रायिकता एक समान है, इसलिए 150 उछालों के लिए प्रत्येक मुख की अपेक्षित आवृत्ति 150/6 = 25 होगी।

O	E	(O – E)	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
19	25	– 6	36	1.44
23	25	– 2	4	0.16
28	25	3	9	0.36
17	25	– 8	64	2.56
32	25	7	49	1.96
31	25	6	36	1.44
			Total	$\boxed{7.92}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.92$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या $= n - 1 = 6 - 1 = 5$

5 स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ, 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 11.07 है। चूँकि x^2 का परिकलित मान (7.92) तालिका मान (11.07) से कम है। इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पासा निष्पक्ष है।

उदाहरण 6 :– निम्नलिखित आकस्मिकता तालिका 300 लोगों के आंखों के रंग और बालों के रंग का विश्लेषण प्रदर्शित करती है। जांच के लिए x^2 परीक्षण का प्रयोग करें, क्या आंखों के रंग और बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध है।

हल :

आंख का रंग		**बाल का रंग**		**योग**
	काला	**सुन्दर**	**भूरा**	
भूरा	30	10	40	80
नीला	40	20	40	100
धुँधला	50	30	40	120
योग	120	60	120	300

शून्य परिकल्पना : आंखों के रंग और बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात् दोनों स्वतन्त्र हैं।
प्रश्न में दिये गए वास्तविक आवृत्तियों के आधार अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं।
अपेक्षित आवृत्ति

आंख का रंग	बाल का रंग			योग
	काला	सुन्दर	भूरा	
भूरा	$\frac{80 \times 120}{300}$ = 32	$\frac{80 \times 60}{300}$ = 16	80 – (32 +16) = 32	**80**
नीला	$\frac{100 \times 120}{300}$ = 40	$\frac{100 \times 60}{300}$ = 20	100 – (40 + 20) = 40	**100**
धुंधला	120 – (32 + 40) = 48	60 – (16 +20) = 24	120 – (32 + 40) = 48	**120**
योग	**120**	**60**	**120**	**300**

O	**E**	**(O – E)**	**$(O – E)^2$**	**$(O – E)^2/E$**
30	32	– 2	4	0.125
10	16	– 6	36	2.250
40	32	+ 8	64	2.000
40	40	0	0	0
20	20	0	0	0
40	40	0	0	0
50	48	+ 2	4	0.08
30	24	+ 6	36	1.50
40	48	– 8	64	1.33
			Total	$\boxed{7.285}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.285$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या = (c – 1) (r – 1) = (3 – 1) (3 – 1) = 4

4 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 9.488 है । x^2 का परिकलित मान 7.285 है जो कि तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इसका अर्थ है कि आंखों के रंग एवं बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है।

उदाहरण –7 प्रत्येक 5 बच्चों वाले 320 परिवारों के एक सर्वेक्षण से निम्नलिखित वितरण का पता चला :

लडकों की संख्या :	5	4	3	2	1	0
लडकियों की संख्या :	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या :	14	56	110	88	40	12

क्या हम परिणाम कल्पना के अनुरूप हैं कि पुरुष और महिला जन्म समान रूप से संभावित है।
हलः– आइए हम शून्य परिकल्पना लेते हैं कि पुरूष और महिला का जन्म समान रूप से संभावित है, अर्थात् पुरूष औश्र महिला के जन्म की संभावना के बीच कोई अंतर नहीं है।

इस प्रश्न में , अपेक्षित आवृत्तियों को जानने के एिल द्विपद वितरण प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि यह द्विपद वितरण की सभी शर्तों को पूरा करता है।

पुरूष के जन्म की संभावना = $p = \frac{1}{2}$

महिला के जन्म की संभावना = $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

यदि प्रत्येक 5 बच्चों के 320 परिवारों पर एक सर्वेक्षण किया जाता है, तो द्विपद विस्तार निम्नानुसार हेागा :

$320\,(p + q)^5$

or $320\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$

$= 320\,[p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5]$

$=320[\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5]$

$= 320\left(\frac{1}{32}\right) + 320\,(5)\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 320\,(10)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 320\,(10)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + 320\,(5)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{16}\right) + 320\left(\frac{1}{32}\right)$

$= 10 + 50 + 100 + 100 + 50 + 10$

उपरोक्त द्विपदीय विस्तार की विभिन्न पदों से अपेक्षित आवृत्तियों का पता चलता है।

O	E	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/E$
14	10	4	16	1.60
56	50	6	36	0.72
110	100	10	100	1.00
88	100	– 12	144	1.44
40	50	– 10	100	2.00
12	10	2	4	0.40
			Total	7.16

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.16$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या = $n – 1 = 6 – 1 = 5$

5 स्वतन्त्रता के श्रेणी के साथ 5: महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 11.07 है। x^2 का परिकलित मान तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि पुरूष और महिला जन्म एक समान रूप से संभावित है।

उदाहरण –8 200 एमबीए के परीक्षा परिणामों का एक विश्लेषण किया गया था। यह पाया गया कि 46 छात्र असफल हुए हैं, 68 ने तृतीय श्रेणी प्राप्त की है, 62 ने द्वितीय श्रेणी और शेष ने प्रथम श्रेणी प्राप्त की है। क्या ये आंकडे सामान्य परीक्षा परिणाम के अनुरूप हैं जो कमशः विभिन्न श्रेणीयों के लिए 2:3:3:2 के अनुपात में है ?

हल : आइए हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि अवलोकित और अपेक्षित परिणामों में कोई अंतर नहीं है। अपेक्षित आवृत्तियों को 2:3:3:2 के सामान्य परीक्षा परिणाम अनुपातों के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है। इन अनुपातों के आधार पर, विद्यार्थियों के असफल, तृतीय श्रेणी, द्वितीय श्रेणी एवं प्रथम श्रेणी प्राप्त की अपेक्षित आवृत्तियॉ कमश : $\frac{200 \times 2}{10} = 40$, $\frac{200 \times 3}{10} = 60$, $\frac{200 \times 3}{10} = 60$ and $\frac{200 \times 2}{10} = 40$ होना चाहिए ।

O	E	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/E$
46	40	+ 6	36	0.900
68	60	+ 8	64	1.067
62	60	+ 2	4	0.067
24	40	– 16	256	6.400
			Total	$\boxed{8.434}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 8.434$$

स्वतन्त्रता के श्रेणी की संख्या = n – 1 = 4 –1 = 3

3 स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 7.81 है। x^2 का परिकलित मान 8.434 है जो कि तालिका मान से अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकार है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिए गए परिणाम सामान्य परीक्षा परिणाम के अनुरूप नहीं है।

20.8 येट का सुधार

1934 में, येट ने एक (2x2) तालिका के सम्बन्ध में गणना की गई x^2 मान निरंतरता के लिए सुधार का सुझाव दिया है, विशेषकर जब कक्ष मे छोटी आवृत्तियॉ होती हैं और x^2 केवल महत्व के सतर पर होता है। x^2 विश्लेषण का उपयोग करते समय, यह महत्वपूर्ण है कि कक्ष में (कम से कम 5) कम से कम 80 प्रतिशत अपेक्षित या सैद्धान्तिक आवृत्तियॉ हों और किसी भी कक्ष में अपेक्षित आवृत्ति 5 से कम हेा, तो 2x2 आकस्मिकता तालिका में 1d.f के लिए हम येट का सुधार का प्रयोग करते हैं । इस सुधार के अनुसार, अवलोकित आवृत्ति जो कि 5 से कम है में 0.5 तक वृद्धि की जाती है और दूसरी आवतृत्तियों को भी व्यवस्थित किया जाता है (0.5 जोडकर और 0.5 घटाकर) कि कुल पंक्ति और कुल स्तम्भ एक समान हों।

आवृत्तियों का वर्गीकरण

यदि छोटी सैद्धान्तिक आवृत्तियॉ घटित होती है, तो आमतौर पर दो या दो से अधिक कक्षाएं एक साथ जोडकर इस समस्या को दूर करना सम्भव हो। दूसरे शब्दों में, 5 से कम सैद्धान्तिक आवृत्तियों को एक या अधिक कक्षों के मिश्रण मे से लेकर एक वर्ग में किया जा सकता है, जो अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच अंतर की गणना करने से पहले हेा सकता है। पुर्नगठन के बाद आजादी के श्रेणी की संख्या को निर्धारित किया जायेगा। येट का सुधार (2x2) आकस्मिकता तालिका में उपयोग किया जाता है। आवृत्तियों का वर्गीकरण nxn (m>2,n>2) आकस्मिक तालिकाओं में उपयोग किया जाता है जहॉ 5 से कम अपेक्षित अवृत्तियों को आसन्न आवृत्ति में जोडा जाता है।

उदाहरण – 9 50 छोटी सामान्य दुकानों के एक नमूने मे निम्नलिखित जानकारी प्राप्त की गई थी। क्या यह कहा जा सकता हे कि शहर की तुलना मे गॉवों मे अपेक्षाकृत अधिक महिला दुकानदार हैं ? x^2 परीक्षण का प्रयोग करें

	दुकानें		
	शहर में	गॉवों में	योग
पुरूष दुकानदार	17	18	**35**
महिला दुकानदार	3	12	**15**
योग	**20**	**30**	**50**

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 3.841 है।

हल : शून्य परिकल्पना महिला दुकानदारों की संख्या शहर और गॉव में एक समान है। कक्ष आवृत्ति 3 में 0.5 जोडना और अन्य कक्ष आवृत्तियों को समायोजित करना है ताकि पंक्ति का योग समान ही रहे, हमारे पास निम्नलिखित आकस्मिकता तालिका है :

अवलोकित आवृत्ति तालिका

	A	α	योग
B	16.5	18.5	**35**
β	3.5	11.5	**15**
	20	**30**	**50**

अपेक्षित आवृत्ति तालिका

	A	α	योग
B	$\frac{35 \times 20}{50} = 14$	$\frac{35 \times 30}{50} = 21$	**35**
β	$\frac{15 \times 20}{50} = 6$	$\frac{15 \times 30}{50} = 9$	**15**
	20	**30**	**50**

O	E	(O – E)	$(O - E)^2$	$(O - E)^2/E$
16.5	14	+ 2.5	6.25	0.45
18.5	21	– 2.5	6.25	0.30
3.5	6	– 2.5	6.25	1.04
11.5	9	+ 2.5	6.25	0.69
			Total	$\boxed{2.48}$

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.841 है। x^2 का परिकलित मान 2.48 है जो कि तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इसका अर्थ है कि महिला दुकानदारों की संख्या शहर और गॉव में एक समान है।

20.9 काई–वर्ग परीक्षण की महत्वपूर्ण समीक्षा

आपने उपरोक्त खण्डों में देखा है कि काई–वर्ग परीक्षण का प्रयोग कई क्षेत्रो में किया जाता है जैसे कि नमूना विचरण और समग्र विचरण के बीच तुलना करने के लिए, दो विशेषताओं के बीच स्वतन्त्रता या सम्बन्ध के लिए या विभिन्न नमूनों के बीच समरूपता को जानने के लिए। यह सैद्धान्तिक वितरण के सम्बन्ध में Goodness of fit के निर्णय के एिल भी प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, x^2 परीक्षण के महत्व के बारे मे कोई संदेह नहीं हैं।

x^2 एक बहुत ही लोकप्रिय परीक्षण है और अपने गुणों के कारण अक्सर (प्रायः) प्रयोग किया जाता है। x^2 परीक्षण की मुख्य विशेषता यह है कि यह मूल वितरण या इसके प्राचल के रूप में कोई अवधारणा नहीं होती है। चूँकि x^2 अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों पर आधारित होता है, न कि प्राचलों मे जैसे माध्य एवं मानक विचलन, इसलिए मूल वितरण के सन्दर्भ मे इसे कोई अवधारणा बनाने की आवश्यकता नहीं होती है। मुक्त परीक्षण वितरण होने के नाते, इसका प्रयोग किसी भी प्रकार के समग्र वितरण मे किया जा सकता है जो x^2 परीक्षण के दायरे को बढाता है। इस परीक्षण की लोकप्रियता का एक कारण यह है कि प्राचल परीक्षणों t परीक्षण,Z परीक्षण और f परीक्षण की तुलना में, x^2 परीक्षण की गणना और व्याख्या की प्रकिया आसान (सरल) है। फिर भी x^2 परीक्षण का एक अन्य लाभ इसका योगात्मक गुण है, जिसके कारण स्वतन्त्र से सम्बन्धित नमूनों के परिणामों को जोडना सम्भव होता है। इन सभी गुणों के कारण, काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग प्रायः व्यापारिक समस्याओं और सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र मे किया जाता है।

इन गुणों के बावजूद, काई वर्ग परीक्षण की निश्चित सीमाऐं या दोष भी है। जैसा कि आप जानते हैं, x^2 परीक्षण का प्रयोग करने के लिए निश्चित शर्तों को पूरा किया जाता है। इन शर्तों को पूर्ण करना ही इस परीक्षण की एक सबसे बडी सीमा है। इस सम्बन्ध मे एक उल्लेखनीय बात यह है कि प्राचल परीक्षणों की तरह x^2 परीक्षण विश्वसनीय नहीं है। इस प्रकार, किसी स्थिति में यदि x^2 एवं प्राचल दोनों तरह के परीक्षण प्रयोग होते हों तो उस स्थिति में वरीयता प्राचल परीक्षणों को दी जानी चाहिए। इस प्रकार इस परीक्षण का प्रयोग केवल परिकल्पना के परीक्षण के लिए किया जा सकता है। यह आंकलन के लिए उपयुक्त नहीं हैं इस परीक्षण की दूसरी सीमा यह है कि, घटनाओं के घटित होने के साथ घटनाओं के घटित न होने के सम्बन्ध में आंकडे आवश्यक हैं। फिर भी काई वर्ग परीक्षण का एक और दोष यह है कि x^2 का मान परिकलित नहीं किया जा सकता है, यदि एक ही तालिका में समान या मिलान वाले समूहों की दोहराई गई माप दर्शायी जाती है। लेकिन इन सभी सीमाओं के पश्चात भी x^2 परीक्षण का महत्व या लोकप्रियता को कम नहीं किया जा सकता है। इसके महत्व या लोकप्रियता के बारे मे कोई संदेह नहीं है लेकिन इसका सही अनुप्रयोग भी एक महत्वपूर्ण और कठिन कार्य है। x^2 परीक्षण का उपयोग करते समय हमेशा याद रखना चाहिए कि परीक्षण केवल तभी प्रयोग किया जा सकता है जब नमूने के व्यक्तिगत अवलोकन स्वतन्त्र हों। इसका अर्थ है कि व्यक्तिगत पद या घटना या अवलोकन की घटना का विचाराधीन नमूना के घटित अवलोकन का कोई प्रभाव नहीं पडता है। छोटे सैद्धान्तिक आवृत्तियों वाला नमूना विशेष तरीके से समझा जाना चाहिए। इस परीक्षण के अनुचित प्रयोग या दुरूप्रयोग से सम्बन्धिता गैर घटनाओं के आवृत्तियों के बारे मे लापरवाही, परिकलित मान, अवलोकित मानों का योग और अपेक्षित मानों का योग और गलत गणना आदि संभावित कारण के गलत निर्धारण से विफलता हो सकती है। इस प्रकार शोधकर्ता को इन सभी सावधानियों को ध्यान में

रखना चाहिए जब वे x^2 परीक्षण का प्रयोग कर रहे हैं और परिकल्पना के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालते हैं।

20.10 सारांश

1900 में कार्य पीयरसन द्वारा काई वर्ग परीक्षण का प्रतिपादन किया गया था। x^2 परीक्षण प्राचल के साथ साथ एक गैर प्राचल परीक्षण है। लेकिन यह मुख्यतः गैर प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है।

x^2 परीक्षण से हमें, सैद्धान्तिक या अपेक्षित मान और अवलोकित या वास्तविक मान के बीच अंतर की सीमा निर्धारण में सहायता मिलती है। कुछ परिस्थितियॉ ऐसी होती हैं जहॉ x^2 परीक्षण प्रयोग करने के लिए कुछ पदों की संख्या कम से कम 50 होनी चाहिए। और किसी भी कक्षा मे आवृत्ति 5 से कम नहीं हेानी चाहिए। नमूना यादृच्छिक तरीके से चयनित होना चाहिए और आंकडों को पूर्ण रूप में दिखाया जाना चाहिए। यदि यादृच्छिक नमूना, सामान्य वितरण में माध्य μ और विचलन σ_p^2 के साथ लिया गया हो तो परीक्षण के लिए x^2 का प्रयोग किया जा सकता है।

गैर प्राचल परीक्षण के रूप में, x^2 का प्रयोग स्वतन्त्र परीक्षण के रूप में Goodness of fit और समरूपता के रूप में किया जा सकता है। x^2 स्वतन्त्र परीक्षण के रूप में स्थापित किया जा सकता है यदि दो या अधिक विशेषताऐं एक दूसरे से सम्बन्धित हैं या स्वतन्त्र हैं। x^2 Goodness of fit के रूप में अवलोकित आंकडों मे सैद्धान्तिक वितरण के निर्धारण के लिए प्रयोग किया जाता है। x^2 समरूपता के एक परीक्षण के रूप मे यह ज्ञात करने के लिए प्रयोग किया जाता है कि दो या अधिक यादृच्दिक रूप से चयनित स्वतन्त्र नमूने समान समग्र से लिये गऐ हैं या नहीं। सूत्र $\sum \frac{(O-E)^2}{E}$ का प्रयोग x^2 की गणना के लिए किया जाता है। x^2 के परिकलित मान की तुलना निश्चित स्तन्त्रता की श्रेणी और महत्व के स्तर पर तालिका मान के साथ की जाती है। यदि परिकलित मान, तालिका मान से कम है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है अन्यथा अस्वीकार। स्वतन्त्रता की श्रेणी वर्गों की संख्या को संदर्भित करते हैं, जिसमें मान को स्वतन्त्र रूप से निर्धारित किये जा सकता है जो सीमाओं के बिना बडे (n-1) या (c-1) (r-1) के प्रयोग से स्वतन्त्रता की श्रेणी के संख्या के निर्धारण के लिए होती है। यदि किसी कक्ष मे आवृत्ति 5 से कम है तो येट का सुधार प्रयोग होता है जिसके द्वारा 0.5 को उस आवृत्ति और अन्य आवृत्तियों में इस तरह से समायोजित किया जाता है कि पंक्ति और स्तम्भ का योग एक समान रहें।

20.11 शब्दावली

स्वतन्त्रता की श्रेणी : आंकडों के एक समूह में स्वतन्त्र बाधाओं की संख्या ।

महत्व का स्तर : यादृच्छिक नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण संख्या में होने वाले अधिकतम संभावित प्रतिशत ।

Goodness of fit : सिद्धान्तिक वितरण का अवलोकित वितरण से सुमेल।

20.12 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. जब अवलोकित एवं अपेक्षित आवृत्तियॉ पूर्णतया सुमेलित होती हैं, तो x^2 का मान ––––––होगा।
2. प्रोफेसर –––––ने x^2 परीक्षण का प्रतिपादन किया।
3. x^2 की मात्रा सिद्धान्त एवं ––––के बीच विसंगति के परिमाण का वर्णन करता है।

4. x^2 वितरण एक ———–—प्रायिकता वितरण है।
5. येट का सुधार ———–—आकस्मिकता तालिका में प्रयोग होता है।

(ब) सही या गलत

1. x^2 की गणना के लिए सूत्र $\sum \frac{(O-E)^2}{O}$ है।
2. x^2 का परिकलित मान सकारात्मक या नकारात्मक है।
3. स्वतन्त्रता की श्रेणी v द्वारा प्रदर्शित की जाती है।
4. (c-2) (r-2) सूत्र का प्रयोग आकस्मिकता तालिका मे स्वतन्त्रता की श्रेणी निर्धारित करने के ऐिल किया जाता है।
5. यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से कम होता है तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाता है।

20.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ) 1. शून्य 2. कार्ल पियर्सन 3. अवलोकन 4. सतत् (निरंतर) और 5. 2x2
(ब) 1. असत्य, 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य

20.14 स्वपरख प्रश्न

1. x^2 परीक्षण के विभिन्न उपयोगों को बताऐं।
2. स्वतन्त्रता की श्रेणी से आप क्या समझते हैं ?
3. किस स्थिति में येट का सुधार प्रयोग किया जाता है।
4. काई वर्ग परीक्षण क्या है ? काई वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोग में शामिल विभिन्न चरणों का उल्लेख करें।
5. काई वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोगों का समीक्षात्मक विश्लेषण करें।
6. एक कक्षा के सात छात्रों का नमूना निम्नानुसार दिया गया है

क्रम सं0	1	2	3	4	5	6	7
अंक(प्रतिशत में)	52	50	56	61	45	54	39

यह निर्धारित करने के लिए x^2 परीक्षा का उपयोग करें कि क्या उपरोक्त नमूना एक छात्र समग्र से लिया गया है जिसका विवरण 25 है। 5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें। स्वतन्त्रता की 6 श्रेणीयों के साथ x^2 का तालिका मान 14.1 है।

[12.64, H_0स्वीकार]

7. 10 का एक नमूना यादृच्छिक तरीके से एक निश्चित समग्र से लिया गया है। दिये गये नमूने के माध्य से विचलनों का योग 50 है। इस परिकलपना का परीक्षण करें कि 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर समग्र का विचरण 5 है। x^2 का तालिका मान 9 स्वतन्त्रता की श्रेणीयों के साथ 16.92 है।

[10, H_0 स्वीकार]

8. नीचे दिये गए आंकडे मलेरिया से हुए महामारी के दौरान लिये गए आंकडे दिखाता है

	ग्रसित	गैर ग्रसित	योग
टीकाकरण	120	240	360
गैर टीकाकरण	280	360	640
	400	600	1000

मलेरिया के आक्रमण को रोकने में टीकाकरण के प्रभाव का परीक्षण करें। स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ x^2 का तालिका मान 3.841 है।

[10.41, H_0 अस्वीकार]

9. एक निश्चित शहर में पुलिस दस्तावेज, जनवरी 2012 के पहले सप्ताह के दौरान हुए दुर्घटनाओं की संख्या से संबंधित निम्न आंकडे दिखाते हैं :–

दिन	रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरू	शुक्र	शनि	योग
दुर्घटनाओं की संख्या	20	12	13	17	19	20	18	119

आप को यह ज्ञात करना है कि दुर्घटनाऐं सप्ताह में एक समान रूप से हुई हैं। 5% महत्व के स्तर पर स्वतन्त्रता की 6 श्रेणीयों के साथ x^2 का मान 12.59 हैं

[3.77, H_0 स्वीकार]

7. तालिकाओं के एक समूह में से 200 अंकों को यादृच्छिक रूप से चुना गया था। अंकों की आवृत्तियॉ थी :

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
आवृत्ति	18	19	23	21	16	25	22	20	21	15

अभिकल्पना की शुद्धता के आंकलन के लिए x^2 परीक्षण का प्रयोग करें, जो उन तालिकाओं में अंकों की समान संख्या में वितरित किए गए थे जिनसे इन्हें चयनित किया गया था। 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 9d.f के लिए 16.919 है।

[4.3, H_0 स्वीकार]

8. नमूना अध्ययन के आधारपर आय वर्गों में कुछ लोगों को वर्गीकृत करने के लिए दो शोध अध्ययन किए गए। उनके परिणाम इस प्रकार थे :

ुसंधान अध्ययन	आय वर्ग			योग
	गरीब	मध्य	अमीर	
अ	160	30	10	200
ब	140	120	40	300
योग	300	150	50	500

परीक्षण करें कि आय वर्गीकरण के लिए दोनों अध्ययन एक समान परिणाम देते हैं। 5% महत्व के स्तर पर 9d.f के लिए x^2 का मान 16.919 है।

[55.54, H_0 अस्वीकार]

9. पांच सिक्कों को 3200 बार उछाला जाता है और हर बार प्रदर्शित होने वाले चिटों की संख्या का उल्लेख किया जाता है। अन्त में, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए गए :

चिटों की संख्या	0	1	2	3	4	5
आवृत्ति	80	570	1100	900	500	50

यह निर्धारित करने के लिए कि क्या सिक्का निष्पक्ष है या नहीं, Goodness of fit के लिए काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग करें। 5 d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 11.07 है।

[58.8, H_0 अस्वीकार]

10. एंथ्रेक्स के बकरियों के प्रतिरक्षण पर एक प्रयोग के बाद निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए गए :

	मरे हुए	जीवित	कुल
टीकाकरण	2	10	12
गैर टीकाकरण	6	6	12
योग	8	16	24

येट के सुधार से x^2 की गणना करें और वैक्सीन की प्रभावकारिता पर अपना अनुमान दें।

20.15 सन्दर्भ पुस्तकें

1. रॉय रामेंड , 'सांख्यिकीय के सिद्धान्त' प्रयाग पुस्तक भवन
2. गुप्ता एस0पी0 और गुप्ता एम0पी0, 'व्यावसायिक सांख्यिकी' सुल्तान चंद एंड संस, नई दिल्ली
3. शुक्ला एस0एम0 और सहाय एस0पी0 'उन्नत सांख्यिकी' साहित्य भवन प्रकाशन, आगरा ।

इकाई – 21 साइन परीक्षण एवं माध्यिका परीक्षण
(Sign Test and Median Test)

21.1 प्रस्तावना
21.2 उद्देश्य
21.3 साइन परीक्षण
21.3.1 एक प्रतिदर्श साइन परीक्षण
21.3.2 दो प्रतिदर्श साइन परीक्षण
21.4 माध्यिका परीक्षण
21.5 बिल्कोक्सोन मिलान युग्म परीक्षण
21.6 बिल्कोक्सोन – मन – ब्हिटनी परीक्षण (v परीक्षण)
21.7 मकनर परीक्षण
21.8 एक प्रतिदर्श रन्स परीक्षण
21.9 गैर प्राचल परीक्षणों का समीक्षात्मक मूल्यांकन
21.10 सारांश
21.11 शब्दावली
21.12 बोध प्रश्न
21.13 बोध प्रश्नों के उत्तर
21.14 स्वपरख प्रश्न
21.15 संदर्भ पुस्तकें

21.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आप काई–वर्ग के बारे में जो कि सबसे प्रचलित गैर प्राचल परीक्षण है, का अध्ययन कर चुके हैं। काई वर्ग परीक्षण के अतिरिक्त हाल के वर्षों के दौरान कई अन्य गैर प्राचल परीक्षणों को विकसित किया गया है। जैसा कि आप जानते हैं कि गैर – प्राचल परीक्षण वितरण मुक्त परीक्षण होते हैं जिसमें कल्पना नहीं की जाती है कि कोई विशेष वितरण लागू हुआ है या कोई निश्चित मान समग्र के प्राचल से जुडा हुआ है। इस प्रकार इनका प्रयोग आसान होता है। यही कारण है कि जहॉ भी इन परीक्षणों में समतुल्य प्राचल परीक्षण की विधियॉ एकसमान होती हैं, गैर प्राचल संस्करणों को अधिक यथार्थवादी होने के लिए पसंद किया जाता है, इसलिए परिकल्पित समग्र को सामान्य या सामान्य के निकट होने की आवश्यकता नहीं हेाती है। कई गैर–प्राचल परीक्षणों जो हमारे लिए उपलब्ध है के मध्य उन वास्तविक जीवन परिस्थितियों की संख्याओं पर सोचेगें जो प्रायः प्रयोग किये जाते हैं। इस इकाई में आप प्रायः प्रयोग होने वाले एवं प्रचलित गैर प्राचल परीक्षणों जैसे साइन परीक्षण माध्यिका परीक्षण, फिशर इरविन परीक्षण, मन व्हाइटने U परीक्षण मैक नेयर परीक्षण, लिकोक्सन परीक्षण, एक नमूना रन्स परीक्षण आदि का अध्ययन करेगें।

21.2 उद्‌देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- विभिन्न प्रकार के गैर प्राचल परीक्षण का वर्णन कर सके।
- गैर प्राचल परीक्षणों की उपयुक्तता को समझ सकें।
- गैर प्राचल परीक्षणों के लाभ एवं सीमाओं का वर्णन कर सके।

21.3 साइन परीक्षण

साइन परीक्षण सबसे पहले में से एक और सबसे सरलतम गैर प्राचल है। इसका नाम इस तथ्य से आता है कि यह अवलोकन के एक जोडे की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) पर आधारित होता है न कि उनकी संख्यात्मक परिमाण पर । इस प्रकार इस परीक्षण मे पूर्वानुमानित मानों और अवलोकित मानों के मध्य परिमाणों का अन्तर आवश्यक नहीं होता है, बल्कि दिशा क अन्तर का, अर्थात + या – चिन्ह प्रासंगिक होता है। यह दो प्रकार के तरीकों की प्रभावशीलता का मूल्यांकन करने के लिए उपयोगी होता है जिनके प्रभावों को मापा नहीं जा सकता है। लेकिन इसका केवल उत्कृष्ट/निकृष्ट या अच्छा/बुरा या/बेहतर/बेहतर नही के रूप में अनुमान लगाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, छात्रों के एक समूह को दो विभिन्न प्रकार के शिक्षण विधियों का मूल्यांकन करने के लिए कहा जाता है। दो विधियों के मूल्यांकन करने के लिए कहा जाता है। दो विधियों के मूल्यांकन को चिन्हों मे परिवर्तित किया जाता है। धनात्मक चिन्ह का अर्थ पहली विधि के लिए प्राथमिकता है, ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ दूसरी विधि की प्राथमिकता है और शून्य बराबरी को प्रदर्शित करता है। अर्थात कोई प्राथमिकता नहीं है। हम + चिन्हों और – चिन्हों की गणना करते हैं और बराबर के मूलयांकनों को छोड देते हैं। इस परीक्षण का उपयोग करने के लिए आवश्यक एकमात्र आवश्यकता यह है कि समग्र वितरण लगभग माध्य μ_0 के सममित हो। साइन परीक्षण दो प्राकर का होता है :

- एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण
- द्वि प्रतिदर्श साइन परीक्षण

21.3.1 एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण :– एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण बहुत सरल गैर–प्राचल परीक्षण होता है, जब हम एक निरंतर सममित समग्र का प्रतिदर्श लेते हैं, तो उस स्थिति में प्रतिदर्श मान कम

होने की संभावना $\frac{1}{2}$ होती है और अपेक्षा से अधिक प्रतिदर्श मान प्राप्त करने की संभावना $\frac{1}{2}$ होती है। साइन परीक्षण आयोजित करने की प्रक्रिया निम्नानुसार होती है :

- सबसे पहले समग्र में से n आकार का यादृच्छिक प्रतिदर्श चयनित करते है और हम शून्य परिकलपना लेते हैं कि समग्र माध्य परिकल्पित माध्य के बराबर है अर्थात $\mu_0: \mu = \mu_0$
- n प्रतिदर्श के प्रत्येक मानों को अवलोकित कर यह पता लगाया जाता है कि यह मान μ_0 से अधिक है या इससे कम है। μ_0 से ज्यादा प्रतिदर्श मानों को + चिन्ह निर्दिष्ट किया जाता है और इसे सफल के रूप में निर्दिष्ट करते हैं और जो μ_0 से कम होते हैं उन्हें – चिन्ह निर्दिष्ट करते हैं और उस असफल के रूप में निर्दिष्ट करते हैं।
  - यदि कोई ऐसा एकांश है जिसका मान माध्य के बराबर है, तो उसे शून्य निर्दिष्ट करते हैं और इनके मानों को केवल त्याग दिया जाता है। यह प्रतिदर्श आकार को छोटा (कम) कर देता है।
  - कुल चिन्हों की संख्या को n द्वारा प्रदर्शित करते हैं ओर प्रायः कम चिन्हों की संख्या को s द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
  - इसके उपरान्त 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर दो तरफा विकल्प के लिए गणना करते हैं और इसे 'k' प्रदर्शित करते हैं। k के मान की गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं :

$$k = \frac{n-1}{2} - (0.98)\sqrt{n}$$

- अन्तिम चरण में, s और k के मान के बीच तुलना की जाती है। यदि s का मान k के मान से अधिक होता है , तब शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है। यदि फिर भी s का मान k के मान से कम या इसके समान हेाता है तब शून्य परिकलपना अस्वीकार होती है। एक प्रतिदर्श चिन्ह परीक्षण तब प्रयोग करते हैं जब प्रतिदर्श छोटा होता है, हम द्विपद प्रायिकताओं की सारणीयों का प्रयोग कर सकते हैं। सामान्य वितरण के z महत्वपूर्ण मानों का प्रयोग करते हुए, शून्य परिकलपना का परीक्षण किया जाता है। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :–

$$z = \frac{p \pm 0.50 - n/2}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

जहॉ p = धन चिन्हों की संख्या

n = कुल धन एवं ऋण चिन्हों की संख्या (निकाले हुए शून्य चिन्ह)

जब $p < \frac{n}{2}$ $(+0.5)$ प्रयोग होता है और जब $p > \frac{n}{2}$ (-0.5) सूत्र में प्रयोग हेाता है ।

यदि परिकल्पित z मान सारणी मान से अधिक होता है, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है अन्यथा शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है। जब प्रतिदर्श बडा होता है, हम द्विपद वितरण के लिए सामान्य सादृश्य का प्रयोग करते हैं। z के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :

$$z = \frac{s-np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ या } z = \frac{s-np}{\sqrt{npq}}$$

जहॉ p = सफलता का अनुपात और

q = 1-p

s = धनात्मक चिन्हों की संख्या

यदि परिकलित z मान, महत्वपूर्ण मान से कम हेाता है तब शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है और यदि परिकलित z मान सारणी मान से अधिक होता है तब यह अस्वीकार्य होता है।

यहाँ इस बिन्दु में ध्यान देना आवश्यक है कि यह अपेक्षित है कि समग्र एक सतत् द्विपद समग्र नहीं है तब शून्य परिकलपना को माध्य के बदले माध्यिका के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण –1 एक विक्रेता ने अपने क्षेत्र के बिक्री प्रबंधक के लिए 12 यात्राओं का भुगतान किया और कहा कि उसने कार्यालय के लिए कम से 10, 15, 20, 17, 11, 25, 30, 27, 36, 40, 5 और 26 मिनट का प्रतीक्षा करना पडता है। क्षेत्रीय प्रबंधक का दावा है कि उनसे मिलने वाले विक्रेता को 20 मिनट से अधिक समय तक प्रतीक्षा नहीं करनी पडती । साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए 0.05 महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि क्षेत्रीय बिक्री प्रबन्धक का दावा सही है।

हल :

$\mu_0 : \mu = 20$ मिनट

$\mu_0 : \mu > 20$ मिनट

अब हम प्रतिदर्श मानो के आधार पर धनात्मक एवं ऋणात्मक चिन्ह देंगें कि ये मान 20 से अधिक है या कम है।

समय (मिनट में) : 10 15 20 17 11 25 30 27 36 40 5 26

चिन्ह : – – 0 – – + + + + + - +

चिन्हों की संख्या या n = 11

प्रायः कम चिन्हों की कुल संख्या , अर्थात (–) या

$$s = 5$$

$$k = \frac{n-1}{2} - (0.98)\sqrt{n}$$

$$k = \frac{11-1}{2}(0.98)\sqrt{11}$$

$$k = 5 - 3.25 = 1.75$$

यदि s(5) का मान k(1.75) के मान से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है, इसका अर्थ है कि क्षेत्रीय बिक्री प्रबंधक द्वारा प्रस्तुत दावा प्रमाणित है।

उदाहरण 2 : मान लें कि शहर के क्लब में गोल्फ के चार छोरों को खेल रहे 11 पेशेवर खिलाडियों ने 280,282,290,273,283,283,275,284,282,279 और 281 की संख्या बनाई। 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करें कि वैकल्पिक परिकल्पना

$h_0 < 284$ के विपरीत शून्य परिकल्पना चार दोरों के लिए पेशेवर गोल्फरों का औसत $\mu_0 = 284$ है।

हल : $h_0 : \mu_0 = 284$

$h_1 : \mu_0 < 284$

अब हम प्रतिदर्श मानों के आधार पर धनात्मक एवं ऋणात्मक मान देंगें कि ये मान 284 से अधिक है या 284 से कम है।

अंक	चिन्ह
280	–
282	–
290	+
273	–
283	–
283	–

275	−
284	0
282	−
279	−
281	−

शून्य को अलग करते हुए कुल चिन्हों की संख्या, अर्थात् 'n' = 10

प्रायः कम चिन्हों की कुल संख्या (+) अर्थात s = 1 इस प्रश्न को विभिन्न वैकल्पिक विधियों द्वारा हल किया जा सकता है जो कि निम्नवत स्पष्ट है :

1. प्रायोगिक विधि के अर्न्तगत :

$$k = \frac{n-1}{2} - 0.98\sqrt{n}$$
$$= \frac{10-1}{2} - 0.98\sqrt{10}$$
$$= 4.5 - 3.099 = 1.4$$

चूँकि s(1) का मान k(1.4) के मान से कम है इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है। इसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दौरों में गोल्फरों का औसत 284 से कम है।

2. द्विपद प्रायिकता विधि के अर्न्तगत : जब प्रतिदर्श आकार छोटा होता है, साइन परीक्षण का प्रयोग करने के लिए हम द्विपद प्रायिकता वितरण का प्रयोग कर सकते है।

n=10 , p = $\frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

प्रायः कम चिन्हों की संख्या (+) 1 है। इसलिए, n= 10 और $p = \frac{1}{2}$ के साथ एक या कम सफलता की संभावना की प्रक्रिया निम्नवत है।

$$P(1) = {}^{10}C_1\, p^1 q^9 + {}^{10}C_0\, p^0 q^{10}$$
$$= 10\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$= 0.010 + 0.001 = 0.011$$

चूँकि p(s) , अर्थात 0.011 मान 0.5 (अर्थात वांछित महत्व स्तर) से कम है इसलिए शून्य परिकलपना को अस्वीकार किया जाना चाहिए। इसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दौरों के गोल्फरों का औसत 284 से कम है।

आप को याद रखना चाहिए कि शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है यदि $p(s) > \propto$ और शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है यदि $p(s) < \propto$

3. सामान्य वक्र विधि के अन्तर्गत : $n = 10$ $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

चिन्हों के आधार पर, अवलोकित सफलता अनुपात $\hat{p} = \frac{1}{10} = 0.1$

शून्य परिकल्पना $p = \frac{1}{2}$ मानते हुए अनुपात की मानक त्रुटि निम्नवत है :

$$S.E._{prop} = \sqrt{\frac{p.q}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{10}} = 0.1581$$

शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए, अर्थात

$p = \frac{1}{2}$ वैकल्पिक परिकलपना के विपरीत

$p < \frac{1}{2}$ एक पुच्छीय परीक्षण (बायीं पुच्छीय) उपयुक्त है।

चूँकि महत्व स्तर 5 प्रतिशत है इसलिए स्वीकृत क्षेत्र 0.5–0.05 = 0.45 क्षेत्र है। सामान्य वक्र के अर्न्तगत क्षेत्र सारणी के प्रयोग द्वारा हम निर्धारित करते हैं कि 0.45 क्ष के समतुल्य z मान के लिए क्षेत्र 1.64 है। अब, हम स्वीकृत क्षेत्र की सीमा को p से अनुपात के मानक त्रुटि को घटाके ज्ञात करेंगें (क्योंकि यह बायी पुच्छीय परीक्षण हैं, इस प्रकार SE_{prop} कम होना चाहिए न कि जुडना

स्वीकृत क्षेत्र की सीमा $= P - z \,.\, S.E._{prop}$

$$= \frac{1}{2} - (1.64)\,(0.1581)$$

$$= 0.5 - 0.2593 = 0.2407$$

जैसा कि सफलता का अवलोकित अनुपात केवल 0.1 है जो कि अस्वीकृत क्षेत्र में आता है (क्योकि यह 0.247 क्षेत्र के अन्तर्गत आता है), इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकृत होती है और परिणामस्वरूप वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकृत होती है जिसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दोरों के लिए पेशेवर गोल्फर का औसत 284 से कम है।

21.3.2 दो प्रतिदर्श साइन परीक्षण :– साइन परीक्षण मे समस्याओं के महत्वपूर्ण अनुप्रयोग होते हैं, जहॉ हम युग्मित आंकडों का वर्णन करते हैं यह दो सममित समग्रों से संबंधित n युग्मित अवलोकनों पर प्रयोग किया जा सकता है। इसलिए इसे युग्मित आंकडों के लिए साइन परीक्षण के रूप में जाना जाता है। परीक्षण आंकडें एवं निर्णय नियम एक प्रतिदर्श साइन परीक्षण के समान होते है। अन्तर केवल धन चिन्ह एवं ऋण चिन्ह कैसे निर्दिष्ट होते हैं, पर निर्भर करता है। प्रत्येक वस्तु या एकांश के लिए पहले अंक को दूसरे अंक के साथ तुलना की जाती है। यदि अन्तर धनात्मक होता हे अर्थात पहला अंक दूसरे अंक से अधिक है, हम धन चिन्ह निर्दिष्ट करते हैं, यदि अनतर ऋणात्मक होता है अर्थात पहला अंक दूसरे से छोटा है तब ऋण चिन्ह निर्दिष्ट करते है। वस्तुओं के लिए, जहॉ दो मान या अंक एक समान हैं, उनको 0 निर्दिष्ट किया जाता है और इन युग्मों को अलग कर देते हैं। जिस परिस्थिति मे ंदो प्रतिदर्श समान आकार में नहीं होते हैं तब बडे प्रतिदर्श के कुछ मानों को जिनका कोई युग्म नहीं होता है, अलग कर देते हैं। दो प्रतिदर्श साइन परीक्षण का मुख्यतः प्रयोग दो पुनरावृत्ति मापों के परीक्षण के लिए किया जाता है यदि दो प्रतिदर्श के माध्यों के बीच कोई अर्थपूर्ण अन्तर होता है।

उदाहरण – 3 22 मरीजों की स्पंद दर एक औषधि के प्रबन्ध के पहले और बाद मापी जाती है जो निम्नवत है :

मरीज	औषधि लेने से पहले स्पंद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर	मरीज	औषधि लेने से पहले स्पंद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर
1	73	75	12	70	72
2	71	73	13	70	69
3	69	70	14	67	70
4	68	69	15	74	75
5	74	73	16	72	74
6	72	73	17	71	71
7	73	73	18	73	75
8	71	72	19	71	69

9	70	68	20	70	72
10	69	74	21	73	75
11	73	70	22	74	75

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए ''औषधि का स्पंद दर में कोई प्रभाव नहीं है'' परिकल्पना का परीक्षण करें।

हल :

मरीज	औषधि लेने से पहले स्पद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर	चिन्ह
1	73	75	–
2	71	73	–
3	69	70	–
4	68	69	–
5	74	73	+
6	72	73	–
7	73	73	0
8	71	72	–
9	70	68	+
10	69	74	–
11	73	70	+
12	70	72	–
13	70	69	+
14	67	70	–
15	74	75	–
16	72	74	–
17	71	71	0
18	73	75	–
19	71	69	+
20	70	72	–
21	73	75	–
22	74	75	–

धन चिन्हों की कुल संख्या = 5

ऋण चिन्हों की कुल संख्या = 15

प्रतिदर्श आकार या $n = 20$

जो '0' चिन्ह के साथ निर्दिष्ट है हम दो युग्मों को अलग करेंगें। इसलिए प्रतिदर्श आकार 22-2=20 होगा ।

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$= \frac{5 - \left(20 \times \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{20 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}}$$

$$= \frac{5 - 10}{\sqrt{20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{-5}{\sqrt{5}}$$

$$= -2.23$$

चूँकि $z(-2.23)$ का परिकल्पित मान z के सारणी मान 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर कम है, इसलिए, शून्य परिकलपना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि औषधि का स्पंद दर पर कोई प्रभाव नहीं है।

21.4 माध्यिका परीक्षण

पिछली इकाई में, आपने काई वर्ग परीक्षण के बारे में जो कि संज्ञात्मक स्तर पर दो या अधिक स्वतन्त्र प्रतिदर्श मापों के लिए प्रयोग होता है का अध्ययन कर चुके हैं लेकिन यदि प्रतिदर्शों को कमवार स्तर पर मापा जाता है तब हम माध्यिका परीक्षण का प्रयोग कर सकते हैं। इसी तरह पिछले खण्ड में, अपने साइन परीक्षण के बारे में अध्ययन किया जो मुख्यतः उन परिस्थितियों में प्रयोग होता है जहॉ हम युग्म अवलोकनों के n समुच्चयों के साथ वर्णन करते हैं। लेकिन साइन परीक्षण के अनुप्रयोग के लिए एक आवश्यक शर्त यह है कि एक ही आकार के दो प्रतिदर्शों को लिया जाना चाहिए यदि प्रतिदर्श परिणामी आंकडा युग्मित परिणाम हो। व्यवहारिक परिस्थितियों में, हमें उन समस्याओ के साथ वर्णन करना पडता है जहॉ दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन आवश्यक होता है। विभिन्न समग्रों से समान आकार का प्रतिदर्श आवश्यक नहीं है। इन परिस्थितियों में यह प्रमाणित करना आवश्यक होता है कि समग्रों से लिये गये प्रतिदर्श उनके माध्य मानों से भिन्न है। माध्यों की तुलना द्वारा, माध्यिका परीक्षण का प्रयोग यह निर्धारित करने के लिए किया जाता है कि समगों से लिये गये प्रतिदर्शों की माध्यिका एकसमान है। यह दो या अधिक यादृच्छिक प्रतिदर्शों के माध्यिकाओं के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर को निर्धारित करती हैं माध्यिका परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है।

- पहले चरण में, मिश्रित प्रतिदर्शों के माध्यिका की गणना की जाती है। इस चरण में, प्रतिदर्शों के चयन के पश्चात प्रत्येक अवलोकनों मे ंवर्णित प्रतिदर्शों की मिश्रित किया जाता हैं, प्रतिदर्शों को परिमाणों के आधार पर व्यवस्थित करते हैं और माध्यिका ज्ञात की जाती है। माध्यिका मध्य का अवलोकन होता है जब n एक विषय संख्या होती है और जब n एक सम संख्या होती है तो यह दो मध्य के अवलोकनों का माध्य हेाती हैं
- अगले चरण में, पहले प्रतिदर्श n_1 के सभी अवलोकनों की तुलना माध्यिका मान के साथ की जाती है और इन्हें दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है।

1. माध्यिका से अधिक a_1 और
2. माध्यिका से कम b_1

इसी तरह, माध्यिका के साथ तुलना करने के पश्चात दूसरे प्रतिदर्श n_2 के सभी अवलोकनों को दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है। माध्यिका से अधिक a_2 और माध्यिका से कम b_2

- तदपश्चात परिणामी आंकडों को 2x2 आकस्मिकता तालिका के रूप में प्रदर्शित करते हैं।

माध्यिका परीक्षण के लिए प्रतिदर्श आंकडे का वर्गीकरण

	माध्यिका से अधिक	माध्यिका से कम	प्रतिदर्श आकार
प्रतिदर्श I	a_1	b_1	$n_1 = a_1 + b_1$

प्रतिदर्श II	a_2	b_2	$n_2 = a_2 + b_2$
कुल	$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$n = n_1 + n_2$

- जब प्रतिदर्श आंकडा का वर्गीकरण 2x2 आकस्मिकता तालिका में करते हैं, यदि कोई अवलोकन माध्यिका के मान के बराबर पाया जाता है तब या तो इसे प्रतिदर्श में से अपमार्जित किया जा सकता है या इसे माध्यिका वर्ग से ऊपर सम्मिलित किया जा सकता हैं । यदि प्रतिदर्श का आकार पर्याप्त रूप से बडा होता है तब माध्यिका मान के बराबर अवलोकनों को प्रतिदर्श में से अपमार्जित किया जा सकता है लेंकिन यदि प्रतिदर्श का आकार छोटा होता है तब इसे माध्यिका वर्ग से ऊपर समिमलित किया जाना चाहिए।
- यदि प्रतिदर्श आकार बडा है (न्यूनतम 30 या 30 से अधिक) तब हम शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग करेंगें। इस परिस्थिति में, 2x2 आकस्मिकता तालिका के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करने के पश्चात हम x^2 की गणना करेंगें और इसकी तालिका मान के साथ तुलना पूर्व निर्धारित महत्व के स्तर के साथ $1d.f.$ में करेंगें। यदि परिकल्पित मान तालिका मान से कम होता है तो शून्य परिकलपना स्वीकार्य हेाती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य हेाती है।
- यदि प्रतिदर्श आकार छोटा होता है तब हम शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए फिशर के यथार्थ प्रायिकताा परीक्षण का प्रयोग करेंगें। इस परिस्थिति में हम आवृत्तियों के युग्म के लिए व्यवस्थित 2x2 आकस्मिकता तालिका से फिशर की यथार्थ प्रायिकता का निर्धारण निम्नलिखित विधि से हाइपर ज्यामितीय वितरण के प्रयोग द्वारा करेंगें।

$$P_{(a_1\, a_2)} = \frac{\left(n_{1C_{a_1}}\right)\left(n_{2C_{a_2}}\right)}{\left(n_1 + n_2\, C_{a_1 + a_2}\right)}$$

शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है या अस्वीकार्य का निर्णय p के परिकल्पित मान के साथ महत्व के स्तर α की तुलना द्वारा लिया जाता है। यदि p का परिकल्पित मान महत्व के स्तर की तुलना में कम होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य हेाता है और यदि p का मान महत्व के स्तर की तुलना में अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है।

उदाहरण 4 :– टीवी स्वरसमंजक के s_1 और s_2 के रूप में चिन्हित दो बडे नौवहन एक आयातक द्वारा प्राप्त किये जाते हैं। वह दो नौवहन से दो प्रतिदर्शों को जिसमें 25 स्वरसमंजक शामिल हैं का चयन करता है। दोषपूर्ण टुकडों की संख्या को जांचने के लिए, वह दोषपूर्ण स्वरसमंजक की संख्या के लिए निम्नलिखित आंकडे प्रदान करता है :–

प्रतिदर्श I (S_1) : 2 1 0 4 2 3 6 5 3 1

प्रतिदर्श II (S_2): 3 2 0 6 3 4 8 6 5 2

माध्यिका परीक्षण प्रयोग द्वारा 0.05 महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि दो नौवहन मे दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के एकसमान है।

हल :– शून्य परिकल्पना μ_0दो नौवहन में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के एक समान है। वैकल्पिक परिकल्पना h_1 दो नौवहन में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के समान नहीं है। अब, हम माध्यिका के मान की गणना करने के एिल पहले एवं दूसरे प्रतिदर्श के अवलोकनों को बढते हुए क्रम मे व्यवस्थित करेंगें।

S.No:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Values:	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	8

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वें पद का मान

$= \frac{20+1}{2}$ वें पद का मान

$= 10.5$ वें पद का मान

$=$ 10 वें और 11 वें पद का मान

$= \frac{3+3}{2} = 3$

अब हम पहले एवं दूसरे प्रतिदर्श के मानों को माध्यिका 3 के मान के साथ तुलना करेंगें और उनको माध्यिका से अधिक और माध्यिका से कम वर्गों में वर्गीकृत करेगें। इसे निम्नलिखित 2x2 आकस्मिकता तालिका में अभिव्यक्त किया जा सकता है :

	M_d से अधिक	M_d से कम	प्रतिदर्श आकार
S_1	5	5	10
S_2	7	3	10
कुल	12	8	20

चूंकि प्रतिदर्श (20) का आकार छोटा है (30से कम) है इस प्रकार हम फिशर का यर्थार्थ प्रायिकता परीक्षण प्रयोग करेंगें।

$$P_{(a_1\, a_2)} = \frac{\left(n_{1C_{a_1}}\right)\left(n_{2C_{a_2}}\right)}{\left(n_1 + n_{2\ C\ a_1 + a_2}\right)}$$

$$P_{(5,7)} = \frac{(10_{C_5})(10_{C_7})}{(20\ _{C_{12}})} = \frac{252 \times 120}{125970} = 0.24$$

चूँकि $p(5,7)$ 0.24 है जो महत्व के स्वर (0.05) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकलपना स्वीकार्य है, इसका अर्थ है कि दो पोतलदानों मे ंदोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के समान है।

21.5 विल्कसन मिलान युग्मित परीक्षण

यह परीक्षण मिलान युग्मित आंकडों के लिए उपयुक्त होता है। अर्थात सम्बन्धित प्रतिदर्शों के साथ एक द्विभाजित चर और निरंतर चर के महत्व के परीक्षण करने के लिए किया जाता है। इस परीक्षण को बिल्कसन चिन्हित श्रेणी भी जाना जाता है क्योंकि चिन्ह परीक्षण में हम केवल मानों के मध्य अन्तर का चिन्हों के साथ वर्णन करते हैं जबकि यह परीक्षण न केवल दिशा परीक्षण करता है, अपितु मिलान युग्मों के मध्य के अन्तर के परिमाणों का भी परीक्षण करता है। यह परीक्षण विशेष रूप से मिलान युग्मों के पहले और बाद के प्रयोग प्रकार के लिए उपयुक्त होता है । यह मुख्यतया मिलान युग्मों की परिस्थिति में प्रयोग होता है जैसे एक अध्ययन जहॉ पति और पत्नी में मिलान हाता है या जब हम दो एक ही तरह के मशीनों के परिणामों की तुलना करते हैं या पहले बाद के प्रयोग के परिणाम इस प्रकार यह एक महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण जो मिलान युग्मों के बीच अन्तर की दिशा एवं परिमाण का संज्ञान लेता है। दो एक ही तरह के के मशीनों के परिणामों की तुलना करते हैं या पहले बाद के प्रयोग के परिणाम । इस प्रकार यह एक महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण जो मिलान युग्मों के बीच अन्तर की दिशा एवं परिमाण का संज्ञान लेता हे। विल्कसन चिन्हित श्रेणी परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है :

- सबसे पहले, समस्या के गुण के आधार पर, विचार के अर्न्तगत दो श्रेणीयों के मध्य कोई अन्तर नहीं है, शून्य परिकल्पना बनाई जाती है।
- प्रत्येक युग्म को अंकों या मानों के बीच अन्तर पर कार्य किया जाता है।
- चिन्ह के बगैर छोटे से बडे के बीच श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है। इसका अर्थ है कि श्रेणी 1 सबसे छोटे अन्तर को निर्दिष्ट करते हैं, 2 इसी क्रम में अगले और इसी तरह। जब श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है, अन्तर के चिन्ह को संज्ञान में नहीं लिया जाता है।
- जब इस परीक्षण को प्रयोग करते है, दो प्रकार की बराबर की परिस्थितियॉ समझ में आ सकती है।
- पहली स्थिति दृष्टिगोचर होती है जब कुछ मिलान युग्मों के दो मान समान होते हैं अर्थात मानों के मध्य अन्तर शून्य होता है। इन युग्मों को गणना से अलग कर देते हैं। इस प्रकार उन युग्मों को जिनका अन्तर समान या शून्य होता है उन्हें बाद की गणनाओं से अलग कर देते हैं।
- दूसरी बराबर की स्थिति दृष्टिगोचर होती है जब दो या अधिक युग्मों का अन्तर एकसमान होता है। इस स्थिति में हम सम्बन्धित स्थिति सदिश के औसत श्रेणी पर कार्य करते हैं और उन्हें औसत श्रेणी निर्दिष्ट करते हैं। उदारहण के लिए मान लें 1, 2 और 3 श्रेणी निर्दिष्ट करने के बाद हमारे पास दो समान अन्तर के मान हैं। यदि उनके अन्तर एक समान नहीं होगें तो उनको श्रेणी 4 और 5 के साथ निर्दिष्ट किया जायेगा। इस प्रकार, हम दोनों को 4 और 5 वीं श्रेणी को औरसत निर्दिष्ट करेंगें, अर्थात $\frac{4+5}{2} = 4.5$ अगले अन्तर मान को 6वीं श्रेणी निर्दिष्ट करेंगें।
- एक बार अन्तरों को श्रेणीबद्ध कर लिया, प्रत्येक को तब वास्तविक अंतर के चिन्ह के साथ निर्दिष्ट करते हैं।
- अगले चरण में, परीक्षण आंकडा (T) की गणना की जाती है जो दो योगों से छोटा घटित होता है अर्थात ऋणात्मक श्रेणीयों का योग और घनात्मक श्रेणीयों का योग।
- मिलान युग्मों की कुल संख्या, संज्ञान के पश्चात छोडे हुये युग्मों की संख्या 25 के बराबर या कम होती है, T के महत्वपूर्ण मान की तालिका का प्रयोग शून्य परिकल्पना के स्वीकृत या अस्वीकृत के प्रयोग के लिए की जाती है। शून्य परिकलपना स्वीकार हाती है यदि T आंकडे का परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है यदि T तालिका मान से कम या बराबर होता है शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है।
- जब मिलान युग्म 25 से अधिक होते हैं तब शून्य परिकल्पना के स्वीकृत या अस्वीकृत सम्बन्धित निर्णय के लिए z के मान की गणना के लिए विधि निम्नवत है :

  $Z = \frac{T-U_T}{\sigma_T}$

  जहॉ U_T = माध्य

  σ_T = मानक विचलन

  T = छोटे चिन्हित वर्ग के श्रेणीयों का योग

  माध्य या $U_T = \frac{n(n+1)}{4}$

  मानक विचलन या $\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

  जहॉ : n = अलग किये गये युग्मों को छोडकर मिलान युग्मों की संख्या

उदाहरण 5 :– गणित के अभ्यास के लिए पॉचवी कक्ष के छात्रों को के दो सेट दिये गए थे। अभ्यास पुस्तिकाओं के नीचे दिये गये आंकडे क्रमशः कार्य पुस्तिका A और B से अभ्यास करने वाले छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों को दर्शातें हैं। शोधकर्ता इस बात को जानने में रूचि रखते हैं कि क्या अंकों में स्पष्ट अंतर है जिसमें अभ्यास पुस्तिका के प्रकार के उपयोग के लिए बच्चों को जिम्मेदार ठहराया जा सकता है।

Student No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A:	73	43	47	53	58	47	52	58	38	61	56	56	34	55	65	75
B:	51	41	43	41	47	32	24	58	43	53	52	57	44	57	40	68

हल : इस समस्या के लिए शून्य एवं वैकल्पिक परिकल्पना निम्नवत की जा सकती है।

$\mu_0 =$ विद्यार्थियों के दो वर्गों के अंकों के बीच कोई अंतर नहीं है।

$\mu_a =$ दो वर्गों के अंकों के बची अंतर ।

विल्कसन मिलान युग्मों परीक्षण का प्रयोग करते हुए , हम T आंकडा परीक्षण के मान के लिए निम्न के अन्तर्गत कार्य करते हैं :

युग्म	कार्य पुस्तिका A	कार्य पुस्तिका B (di)	अन्तर $\|di\|$	अन्तर की श्रेणी.	चिन्ह +	श्रेणीयॉ –
1	73	51	+22	13	+13	…..
2	43	41	+2	2.5	+2.5	…..
3	47	43	+4	4.5	+4.5	…..
4	53	41	+12	11	+11	…..
5	58	47	+11	10	+10	…..
6	47	32	+15	12	+12	…..
7	52	24	+28	15	+15	…..
8	58	58	0	…..	…..	…..
9	38	43	– 5	6	…..	– 6
10	61	53	+8	8	+8	….
11	56	52	+4	4.5	+4.5	…..
12	56	57	–1	1	…...	–1
13	34	44	–10	9	…..	–9
14	55	57	–2	2.5	…...	–2.5
15	65	40	+25	14	+14	…..
16	75	68	+7	7	+7	…..
				Total	***+101.5***	***–18.5***

हम युग्म संख्या 8 को अलग करेंगें क्योंकि इसका अन्तर मान शून्य है।

n= 16-1 =15 और += छोटे साइन वर्ग का योग = 18.5

जब n=15 5% महत्व के स्तर पर T का तालिका मान 25 है (द्विपुच्छीय परीक्षण का प्रयोग करते हुए क्योंकि हमारी वैकल्पिक परिकल्पना यह है कि दो वर्गों के मध्य अन्तर है) T का परिकल्पित मान 18.5 है जो तालिका मान 25 से कम हे। उसी रूप में हम शून्य परिकलपना को अस्वीकार करते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि दो वर्गों के मध्य अंतर है।

21.6 विल्कसन–मन–व्हाइटने परीक्षण (U परीक्षण)

श्रेणी योग परीक्षणों के मय U परीक्षण सबसे अधिक लोकप्रिय परीक्षण है। इसे सामान्यतया विल्कसन मन व्हाइटने परीक्षण के रूप मे भी जाना जाता है। पूर्ववर्ती परीक्षणों के समान, U परीक्षण भी

दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों से प्राप्त आंकडों पर आधारित होता है। इसका प्रयोग यह निर्णारित करने में किया जाता है कि लिये गये प्रतिदर्श समान समग्र में से है या समान वितरण के दो विभिन्न समग्रों से है इसे साइन परीक्षण के ऊपर और फिशर ईरविन समझा जाता है। क्योंकि धन और ऋण चिन्ह के बदले इसमे श्रेणी सूचना का प्रयोग होता है । मन –व्हाइटने U और विल्कसन मिलान युग्म सामान्यतः समान होते हैं जिसमे उनको दो माध्यिकाओं के बीच तुलना करने की सलाह दो प्रतिदर्श समान समग्र से लिये गये हैं या नहीं। यदि आपके दोनों प्रतिदर्श पूर्ण रूप से एक दूसरे से स्वतन्त्र नहीं है और कुछ कारक एक समान है, अर्थात भौगोलिक परिस्थिति या पहले/बाद प्रतिपादन मे ंविल्कसन मिलान युग्म परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है। यदि आपके पास दो प्रतिदर्श जो कि स्वतन्त्र हैं, आपको मन –व्हाइटने U परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए। अत्यधिक परिवर्तनशील गैर प्राचल परीक्षण के रूप में, इसे उन परिस्थितियों मे प्रयोग किया जाता है जहॉ प्रतिदर्श छोटे और समान आकार के नहीं होते हैं। यह परीक्षण बहुत सामान्य शर्तों के अन्तर्गत लागू होता है और केवल समग्र प्रतिदर्श सतत होने की आवश्यकता होती है।

U परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है :

- एकल समग्र में से या दो विभिन्न समग्रों से दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श सामान्यतः विभिन्न आकार के लिये जाते है। छोटे आकार के प्रतिदर्श जिसमें n_1 अवलोकन निहित है और बडे आकार के प्रतिदर्श जिसमें n_2 अवलेाकन समाहित होते है।
- शून्य और वैकल्पिक परिकल्पनाऐं ली जाती है। शून्य परिकल्पना व्यक्त करती है कि अंकों के दो समूहों में कोई अन्तर नहीं है जबकि वैकल्पिक परिकल्पना व्यक्त करती है कि अंकों के दो समूहों में व्यवस्थित ढंग से अंतर हेाता है। यह एकपुच्छीय या द्विपुच्छीय हो सकती है।
- दो प्रतिदर्शों को मिश्रित किया जाता है और सभी $n = (n_1 + n_2)$ अवलोकनों को छोटे से लेकर बडे तक बढते क्रम में व्यवस्थित करते हैं। तदपश्चात श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है। प्रतिदर्शों को ध्यान दिये बिना मिश्रित प्रतिदर्शों n_1 और n_2 के मानों को सबसे कम से लेकर सबसे अधिक तक श्रेणीबद्ध किया जाता है, सबसे छोटे अंक को श्रेणी 1, अगले को श्रेणी 2 और इसी क्रम में प्रत्येक प्रतिदर्श की पहचान इंगित करता है। पुनरावृत्ति मानों को अनेक प्रारम्भिक मानों के औसत के साथ श्रेणीबद्ध किया जाता है।
- तब पहले प्रतिदर्श के श्रेणी के योग को प्राप्त करते हैं और इसे R_1 के रूप में प्रदर्शित करते हैं और तब दूसरे प्रतिदर्श के श्रेणी के योग को प्राप्त करते हैं और इसे R_2 के रूप में प्रदर्शित करते हैं।
- अगले चरण में, हम आंकडे परीक्षण के मान पर कार्य करते हैं अर्थात U जो श्रेणीबद्ध अवलोकन के दो प्रतिदर्शों के अनतर के मध्य की माप के अन्तर्गत इस रूप में होती है : $U = n_1 \times n_2 + \frac{n_1\,(n_1+1)}{2} - R_1$
- तब U तालिका से n_1 और n_2 के लिए U का महत्वपूर्ण मान लिया जाता है। यदि U तालिका उपलब्ध नहीं है और प्रतिदर्श आकार (n_1 और $n_2 > 8$) बडा है तब U आंकडे को Z आंकडों में परिवर्तित किया जाता है। $n_1 + n_2$ अवलोकनों की शून्य परिकल्पना एक जैसी समग्र के लिए सत्य है, तब U आंकडे का प्रतिदर्श वितरण माध्य या $U = \frac{n_1 \times n_2}{2}$ और

  मानक विचलन या $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1.n_2(n_1+n_2+1)}{12}}$ के साथ होता है।

इसलिए Z आंकडे का निम्नलिखित सूत्र से गणना की जा सकती है।

$$Z = \frac{U - (n_1\, n_2)/2}{\sqrt{\frac{n_1 \,.\, n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

- यदि Z का परिकल्पित मान, महत्वपूर्ण मान से छोटा या कम होता है, तब शून्य परिकलपना स्वीकार्य होती है। दूसरी ओर, यदि Z का परिकलिपत मान महत्वपूर्ण मान से अधिक होता है, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है।
- प्रतिदर्श आकार के छोटे होने की स्थिति में, अर्थात n_1 या $n_2 < 8$ तक हम वैकल्पिक विधि प्रयोग कर सकते हैं। U को w_s से न्यूनतम w_s का घटाकर ज्ञात किया जाता है, जहॉ w_s R_1 या R_2 से छोटा है और s प्रतिदर्श मे तत्वों की संख्या छोटे योग के साथ है। तब हम इस परिकल्पित मान को U के महत्वपूर्ण मान की बिल्कसन तालिका से तुलना करते हैं और शून्य परिकलपना के स्वीकृत या अस्वीकृत के सम्बन्ध में निर्णय लेते हैं।

उदाहरण 6 :– एक परीक्षा में लडकों एवं लडकियों द्वारा प्राप्त अंकों से सम्बन्धित आंकडे निम्नवत दिये गये हैं :

लडके (B):	44	56	32	36	52	48	40	44	56	52	36	32
लडकियॉ (G):	40	48	44	36	44	24	32	16	36	44	28	30

U परीक्षण का प्रयोग 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर यह परीक्षण करने के लिए करें कि दोनों लडकें एव ॅलडकियॉ समान माध्य के साथ एक समग्र से ली गई है।

हल :– H_0 : लडकें एवं लडकियों का प्रतिदर्श समान माध्य के साथ्ज्ञ एक समग्र से लिया गया है।

H_1 : लडके एवं लडकियों का प्रतिदर्श समान माध्य के साथ भिन्न समग्र से लिया गया है।

अब हम सभी अवलोकनों को बढते क्रम में व्यवस्थित करेंगे और उन्हें श्रेणी निर्दिष्ट करेंगे।

प्रतिदर्श मान	श्रेणी	लडकों की श्रेणी (B)	लडकियों की श्रेणी (G)
16 (G)	1	-	1
24 (G)	2	-	2
28 (G)	3	-	3
30 (G)	4	-	4
32 (B)	6	6	-
32 (B)	6	6	-
32 (G)	6	-	6
36 (B)	9.5	9.5	-
36 (B)	9.5	9.5	-
36 (G)	9.5	-	9.5
36 (G)	9.5	-	9.5
40 (B)	12.5	12.5	-
40 (G)	12.5	-	12.5
44 (B)	16	16	-
44 (B)	16	16	-
44 (G)	16	-	16
44 (G)	16	-	16
44 (G)	16	-	16
48 (B)	19.5	19.5	-
48 (G)	19.5	-	19.5
52 (B)	21.5	21.5	-
52 (B)	21.5	21.5	-
56 (B)	23.5	23.5	-
56 (B)	23.5	23.5	-

Total ***R_1 = 185*** ***R_2 = 115***

अब, इसके अर्न्तगत U आंकडे का मान ज्ञात करेंगें :

$$U = n_1 \times n_2 + \frac{n_1\,(n_1+1)}{2} - R_1$$
$$= (12 \times 12) + \frac{12\,(12+1)}{2} - 185$$
$$= 144 + 78 - 185 = 37$$

Or

$$U = n_1 \times n_2 + \frac{n_2\,(n_2+1)}{2} - R_2$$
$$= (12 \times 12) + \frac{12\,(12+1)}{2} - 115$$
$$= 144 + 78 - 115 = 107$$

चूँकि $n_1 = n_2$ $n_1 = 12$ और $n_2 = 12$ (दोनों ही 8 से अधिक है), इसलिए, U का प्रतिदर्श वितरण लगभग सामान्य वक्र की ओर होता है। निम्नलिखित सूत्र U को Z आंकडे मे परिवर्तित किया जाता है :–

$$Z = \frac{U - (n_1\, n_2)/2}{\sqrt{\frac{n_1\,.\,n_2(n_1+n_2+1)}{12}}}$$

$$= \frac{37 - (12 \times 12)/2}{\sqrt{\frac{12 \times 12(12+12+1)}{12}}}$$ [जब U = 37]

$$= \frac{37-72}{17.32} = -2.02$$

या $$Z = \frac{107 - (12 \times 12)/2}{\sqrt{\frac{12 \times 12(12+12+1)}{12}}}$$ [जब U = 107]

$$= \frac{107-72}{17.32} = +2.02$$

चूँकि यह एक द्विपुच्छीय परीक्षण है, 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर Z का महत्वपूर्ण मान ± 1.64 है। Z का परिकल्पित मान ± 2.02 महत्वपूर्ण मान से अधिक है । इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि लडके एवं लडकियां समान माध्य के साथ समग्र से लिये गए हैं।

उदाहरण 7 :– दो प्रतिदर्श पहली स्थिति में 90, 94, 36 और 44 मानों के साथ ओर दूसरी स्थिति में 53, 39, 6, 24 और 33 मानों के साथ दिये गए हैं। U परीक्षण का प्रयोग 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर करें कि समान माध्य के साथ प्रतिदर्श समग्र से लिये गये हैं।

हल :– μ_0: समान माध्य के साथ दो प्रतिदर्श समग्र से लिये गये हैं।

H_1 : विभिन्न माध्यों के साथ दो प्रतिदर्श समग्र से लिये गए हैं। अब, हम अवलोकनों को बढते हुए क्रम मे व्यवस्थित करेंगें और उन्हें श्रेणीबद्ध करेंगें।

प्रतिदर्श मान	*श्रेणी*	*पहले प्रतिदर्श की श्रेणी*	*दूसरे प्रतिदर्श की श्रेणी*
6 (II)	1	……	1
24 (II)	2	……	2
33 (II)	3	……	3
36 (I)	4	4	……
39 (II)	5	……	5

44 (I)	6	6	…….
53 (II)	7	…….	7
90 (I)	8	8	……
94 (I)	9	9	…...
कुल		$R_1 = 27$	$R_2 = 18$

जैसा कि दो प्रतिदर्शों में पदों की संख्या 8 से कम है $(n_1 = 4$ और $n_2 = 5)$, हम सामान्य वक्र करीब (निकट) तकनीकी प्रयोग नहीं कर सकते हैं। हम दिये हुए विल्कसन के (अयुग्मित) वितरण तालिका का प्रयोग करेंगें।

$w_s =$ दो योगों का छोटा = 18

S = छोटे योग के साथ प्रतिदर्श में पदों की संख्या = 5

$w_l =$ दो योगों का बडा = 27

L = बडे योग के साथ प्रतिदर्श मे ंपदों की संख्या = 4

w_s का न्यूनतक मान =1+2+3+4+5 =15 (जब S=5)

w_l का अधिकतम मान =6+7+8+9=30 (जब L=4)

$U = w_s - w_s$ न्यूनतम $= 18 - 15 = 3$ या $U = w_l$ अधिकतम $w_l = 30 - 27 = 3$

U का प्रायिकता मान विल्कसन तालिका के अनुसार स्तम्भ 3 के कक्ष से , S=5 और L=4 टुकडे द्वारा 0.056 है। यह 3 से छोटी या छोटी से छोटी मान प्राप्त करने की आवश्यक प्रायिकता है हमें इसकी 10 प्रतिशत महत्व के स्तर के साथ तुलना करनी चाहिए चूँकि वैकल्पिक परिकल्पना यह है कि दो प्रतिदर्श विभिन्न माध्यों के साथ समग्र से लिये गये हैं, एक द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त है और 10 प्रतिशत महत्व स्तर का अर्थ 5 प्रतिशत बायॉ पुच्छीय और 5 प्रतिशत दायॉ पुच्छीय अनुसार है। दूसरे शब्दों में, हमें परिकल्पित प्रायिकता की 0.05 प्रायिकता के साथ तुलना करनी चाहिए। चॅूकि परिकल्पित प्रायिकता (0.056) 0.05 से अधिक है, इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दो प्रतिदर्श समान माध्य से साथ समग्र से लिये गए हैं।

21.7 मैकनेमर परीक्षण

मैकनेयर परीक्षण महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षणों मे से एक है जो प्रायः संज्ञात्मक आंकडों और दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों से सम्बन्ध मे प्रयोग होता है । इसका प्रयोग यह निर्धारित करने में किया जाता है कि दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों के अनुपातों के मध्य अंतर प्रमाणित है। एकल प्रतिदर्श गिनती आंकडे पर आधारित, यह पूर्व निर्णय और बाद मे निर्णय, प्रतिक्रिया परिणामों की तुलना करता है। दूसरे शब्दों में मैकनेमर परीक्षण स्थितियों में दो सम्बन्धित प्रतिदर्श के लिए प्रयोग होता है जहॉ लोगों की प्रवृत्ति का यदि कोई विचारों मे परिवर्तन के महत्व का परीक्षण पहले और बाद के प्रतिपादन के मूलयांकन से किया जाता है।

इस परीक्षण के उपयोग के लिए प्रयोग को इस तरीके से अभिकल्पित किया जाता है कि तत्रं के बारे में विषयों की आरम्भ में उनके अनुकूल ओर प्रतिकूल दृष्टिकोणों को समान वर्ग में विभाजित किया जाता है। कुछ प्रतिपादन के पश्चात समान संख्या के विषयकों से दिये हुए तन्त्र के बारे में अपने दृष्टिकोण व्यक्त करने को कहा जाता है कि क्या वे इसके पक्ष में है या नहीं। समान विषयक पहले और बाद की प्रतिक्रियाओं के प्रबंधकीय प्रतिपादन से निम्नलिखित 2×2 आकस्मिकता तालिका के रूप मे प्रदर्शित किया जा सकता है।

परिवर्तन के महत्व के परीक्षण के लिए प्रतिक्रिया तालिका

पहले प्रतिपादन	बाद का प्रतिपादन	
	पक्ष	विपक्ष

पक्ष	A	B
विपक्ष	C	D

इस तालिका में A प्रतिक्रियादाताओं के दृष्टिकोण हमेशा धनात्मक होते हैं पहले और बाद के प्रतिपादन से कोई परिवर्तन नहीं होता है के रूप को प्रदर्शित करता है। इसी तरह D भी प्रतिक्रियादाताअें के दृष्टिकोण मे पहले और बाद के प्रतिपादन मे कोई अन्तर नहीं होता है और वे हमेशा ऋणात्मक होते हैं को इंगित करता है। लेकिन B और C प्रतिपादन के प्रभाव के कारण प्रतिक्रियादाताओं के दृष्टिकोण मे परिवर्तन को दर्शाता है। B प्रतिक्रियादाताओं की उस संख्या को प्रदर्शित करता है जो प्रतिपादन से पहले धनात्मक थे और बाद मे ऋणात्मक थे। इसी तरह, C उन प्रतिक्रियादाताओं को इंगित करता है। जो प्रतिपादन से पहले ऋणात्मक थे और बाद मे धनात्मक थे। इस प्रकार, B और C केवल दो प्रासंगिक निर्णय की आवृत्ति कक्ष है जो महत्व मे परिवर्तन के होने या न होने को दर्शाता है। चूँकि (B+C) प्रतिक्रियादाताअें के दृष्टिकोण के कुल परिवर्तन को इंगित करती है, इस प्रकार शून्य परिकल्पना के अन्तर्गत अपेक्षा यह है कि (B+C) स्थिति में परिवर्तन एक दिशा मे और समान अनुपात मे दूसरी दिशा मे होता है। मैकनेमर परीक्षण आंकडा एक x^2 रूपान्तर परीक्षण प्रारूप निम्नवत रूप में है :–

$$\chi^2 = \frac{(|B-C|-1)^2}{(B+C)} \qquad \text{(with 1 } d.f.\text{)}$$

असतत् वितरण से सतत् वितरण बनाने के लिए उपरोक्त वर्णित x^2 सूत्र को -1 से सुधार किया जाता है। अन्तिम चरण में, पूर्व निर्धारित महत्व के स्तर पर 1 स्वतन्त्रता के अंश के साथ x^2 के परिकल्पित मान की तालिका मान से तुलना की जाती है। यदि परिकल्पित मान तालिका मान से कम होता है महत्वपूर्ण परिवर्तन नहीं है की शून्य परिकलपना स्वीकृत होती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। मैकनेमर परीक्षण का x^2 के ऊपर लाभ यह है कि इस परीक्षण मे मिलान युग्मों को संज्ञान में लिया जाता है जबकि x^2 परीक्षण मे इन्हें संज्ञान में नहीं लेते हैं।

उदाहरण 8 :– एक कंपनी एक नई ब्रांडिंग रणनीति पर कार्य कर रही है, जो सोचती है कि वह अधिक प्रभावी है। इसकी स्वीकृत होने पर, प्रबन्धक जानना चाहता है कि नई रणनीति अपेक्षा से अधिक प्रभावी है। 50 प्रतिक्रियादाताओं का प्रतिदर्श नई रणनीति के अंगीकरण के दोनों पहले और बाद की प्रतिक्रिया जानने के लिए चयनित किया जाता है। प्रतिदर्श प्रतिक्रिया आंकडे का विश्लेषण निम्नलिखित परिणाम देता है :–

अंगीकरण के पहले	अंगीकरण के बाद	
	धनात्मक	**ऋणात्मक**
धनात्मक	10	16
ऋणात्मक	12	11

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि क्या नई ब्रांडिग रणनीति वास्तविकता मे अधिक प्रभावशाली है।

हल :– μ_0 : नई ब्रांडिग रणनीति अधिक प्रभावशाली नहीं है।

H_1 : नई ब्रांडिग रणनीति अर्थपूर्ण ढंग से अधिक प्रभावशाली है।

$$\chi^2 = \frac{(|B-C|-1)^2}{(B+C)} = \frac{(|16-12|-1)^2}{(16+12)} = \frac{9}{28} = 0.32$$

1 d.f के साथ 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.84 है। चूँकि परिकल्पित मान 0. 32 तालिका मान 3.84 से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है। इसका अर्थ है कि नई ब्रांडिग रणनीति अधिक प्रभावशाली है।

21.8 एक प्रतिदर्श रन्स परीक्षण

एक प्रतिदर्श रन परीक्षण एक परीक्षण होता है जिसका उपयोग एक प्रतिदर्श की यादृच्छिकता के क्रम के आधार पर किया जाता है जिससे अवलोकन लिये जाते हैं। कई बाद हमें उन स्थितियों से समझौता करना पडता है जहॉ हमारा आंकडे पदो के चयन में कोई नियंत्रण नहीं होता है। इन परिस्थितयों मे, निर्णय लेना बहुत कठिन होता है कि चयनित प्रतिदर्श यादृच्छिक है या नहीं। इन परिस्थितियों में, हमें प्रतिदर्श मे यादृच्छिक परीक्षण के लिए रन परीक्षण प्रयोग करना चाहिए। यहॉ एक महत्वपूर्ण बिन्दु ध्यान मे रखना चाहिए कि यादृच्छिक प्रतिचयन के लिय यह आवश्यक है लेकिन पर्याप्त परीक्षण नहीं है। यदि कल्पित यादृच्छिक प्रतिदर्श रन परीक्षण को असफल करता है, यह प्रकट करता है कि ये यादृच्छिक प्रतिचयन के साथ प्रतिदर्श विसंगत के क्रम में ये असामान्य है, न यादृच्छिक काल चक्र में है। एक रन परीक्षण समान अक्षरों या किसी अन्य प्रकार के प्रतीकों का अनुक्रम होता है जो विभिन्न अक्षरों या किसी भी अक्षर का नहीं द्वारा अनुसरण और पूर्ववर्तिता करता है । स्थिति की संख्या, पद या रन मे प्रतीकों की संख्या को रन की लम्बाई के रूप में जाना जाता है। यादृच्छिक आंकडे समूह में (I+1)th मान की प्रायिकता Ith मान से अधिक या कम हो तो द्विपद वितरण का अनुसरण होता है जो रन परीक्षण का आधार बनता है।

उदाहरण के लिए, XX YYYYY XXX ZZZZ XX एक रन को प्रदर्शित करते हैं।

हम निम्न प्राकर से उपरनों मे एक उपभाग को विभाजित करने के लिए रेखांकन के माध्यम से लगातार समान अक्षर समूह बना सकते हैं।

XX YYYYY XXX ZZZZ XX इस स्थिति मे, हमारे पास 5 उप रन (r) है, x की $7(n_1)$ घटनाऐं हैं, y की 5 (n_2) घटनाऐं हैं और z की $3(n_3)$ घटनाऐं हैं। इस प्रकार, रन की लम्बाई या कुल अवलोकनों (N) की संख्या $(7 + 5 + 3) = 15$ है।

यदि किसी भी प्रकार के अवलेाकनों के आकार 10 से कम हेाता है (अर्थात n_1या n_2 या $n_3 < 10$) तब r के परिकल्पित मान की तुलना रन तालिका मे से प्राप्त r के तालिका मान के साथ से की जाती है। लेकिन जब सभी प्रकार से अवलोकनों का आकार 10 या इससे अधिक होता है तब निम्नलिखित तरीके से r में आधारित सांख्यिकी की गणना करते हैं :

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$

जहॉ : $\mu_r = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$ & $\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}$

एकल प्रतिदर्श रन्स परीक्षण केवल श्रेणी के सहजगुण के यादृच्छिकता सीमाबद्ध नहीं होता है। यहॉ तक कि माध्यिका से अधिक और माध्यिका से कम वर्गों या रन्स के अन्दर मानों के पृथककरण द्वारा संख्यात्मक मानों में शामिल प्रतिदर्श हेतु प्रयोग किया जा सकता है। यह आर्थिक आंकडे से संबंधित प्रवृत्तियों या चक्रियी तरीके के पीरक्षण के लिए मुख्य रूप से उपयोगी होता है।

उदारहण 9 :– 26 लोगों के प्रतिदर्श जिसमें 16 महिलाऐं (W) और 10 पुरूष (M) का साक्षात्मकार लिया गया। इनका साक्षात्मकार निम्नलिखित क्रम में था।

M WWWW MMM WW M WWW MM WWW MMM WWWW

5 प्रतिशत के स्तर पर इस प्रतिदर्श के यादृच्छिक परीक्षण के लिए रन परीक्षण का प्रयोग करें।

हल :– H_0 : प्रतिदर्श यादृच्छिक है।

H_1 : प्रतिदर्श यादृच्छिक नहीं है।

रन्स की संख्या $= r = 10$

महिला के घटित होने की संख्या $= n_1 = 4 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$

पुरूष के घटित होने की संख्या $= n_2 = 1 + 3 + 1 + 2 + 3 = 10$

कुल अवलोकनों की संख्या $= N = 16 + 10 = 26$

चूँकि दोनों n_1 और $n_2 \geq 10$, इसलिए Z- आंकडे की गणना निम्नवत करेंगें :–

$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2(16)(10)}{16+10} + 1 = 13.3$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1n_2\,(2n_1\ n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{2(16)(10)(2\times16\times10-16-10)}{(16+10)^2(16+10-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{94080}{16900}} = 2.359$$

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{10 - 13.3}{2.359} = -1.398$$

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, द्विपुच्छीय परीक्षण के लिए Z का महत्वपूर्ण मान ± 1.96 होता है। इसलिए परिकलिपत Z मान तालिका मान से छोटा है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रतिदर्श यादृच्छिक है।

21.9 गैर प्राचल परीक्षणों का समीक्षात्मक मूल्यांकन

परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए हमारे पास दो प्रकार के परीक्षण होते हैं प्राचल परीक्षण और गैर प्राचल परीक्षण। हमें प्राचल परीक्षण के निश्चित रूप से चयन करना चाहिए यदि हम विश्वस्त होते हैं कि समग्र से प्रतिदर्शित किया हुआ आंकडा सामान्य वितरण का अनुसरण करता है। लेकिन कई बार, हमें उन परिस्थितियों के साथ समझौता करना पडता है जहॉ महत्व के मानक परीक्षणों के लिए विभिन्न अवधारणाऐं आवश्यक होती है जैसे समग्र सामान्य है, प्रतिदर्श स्वतन्त्र है, मानक विचलन ज्ञात है इत्यादि को पूरा नहीं किया जा सकता है तब हम गैर प्राचल विधियों का प्रयोग कर सकते हैं। निम्नलिखित तीन परिस्थितियों में हमे निश्चित रूप से गैर प्राचल परीक्षण का चयन करना चाहिए :

- परिणाम एक श्रेणी या एक अंक है और समग्र पूर्णतया सामान्य नहीं है।
- कुछ मान पैमाने से बाहर होते है अर्थात माप मे ंबहुत बडे या बहुत छोटे। यहॉ तक की समग्र सामान्य है, प्राचल परीक्षण के साथ इन आंकडों का विश्लेषण असम्भव होता है चूँकि हम सभी मानों को नहीं जानते है। इन आंकडों के साथ गैर प्राचल परीक्षण का प्रयोग आसान हेाता है।
- आंकडे को क्रम संख्या पैमाने पर मापा जाता है। और समग्र का वितरण गौसियन तरीके से नहीं हुआ है।

गैर–प्राचल परीक्षणों मे ंप्राचल परीक्षणो ंके ऊपर बहुत लाभ होते हैं। गैर –प्राचल परीक्षण का सबसे बढा लाभ इसकी अस्थिरता होती है। इन परीक्षणों का प्रयोग सभी प्रकार के आंकडो ंके लिए किया जा सकता है चाहे समग्र सामान्य है या असामान्य, परिमाणात्मक है या गुणात्मक है। यह श्रेणीबद्ध आंकडे के लिए सबसे अधिक उपयोगी होता है। जब हम इस तरह के आंकडों के साथ समझौता करते हैं जिन्हें प्रतिक्रियादातों की पसंद के अनुसार श्रेणीबद्ध किया जा सकता है। लेकिन उनका सटीक परिमाणीकरण सम्भव नही होता है, तब हमारे पास एक ही विकल्प गैर –प्राचल परीक्षण होता है। इसी प्रकार, यह निर्णयात्मक या संज्ञात्मक आंकडे के साथ सबसे अच्छे विकल्प का भी समझौता है। कभी कभी हम इस तरह के आंकडे के साथ कार्य करते हैं जिसे विभिन्न समग्रों से सम्बन्धित प्रतिदर्शों के

माध्यम से प्राप्त करते हैं। इस तरह की परिस्थितियों में, हमें कुछ अयथार्थवादी अवधारणाओं को प्राचल परीक्षणों के प्रयोग के लिए बनाना पडता है। लेकिन गैर प्राचल परीक्षणों के अनुप्रयोग से इन परिस्थितियों में कोई समस्या नहीं होती है। जब प्रतिदर्श आकार छोटा है या केवल कुछ अवलोकन उपलब्ध होते हैं तब भी केवल गैर–प्राचल परीक्षण का प्रयोग किया जाना चाहिए।

गैर–प्राचल परीक्षण के लोकप्रियता का मुख्य कारण उनकी प्राचल परीक्षण की तुलना मे आसान गणना का होना है, चूँकि गैर प्राचल परीक्षण समझ मे आसान गणना मे सरल, सभी प्रकार के आंकडों के लिए अनुकूल और कम समय लेने वाले होते हैं, इसलिए ये अनुसंधानकर्ताओं द्वारा पसंद किये जाते हैं ।

यद्यपि गैर प्राचल परीक्षणों के बहुत लाभ है लेकिन इसकी कुछ हानियॉ भी होती है इस कारण से पहली पसंद हमेशा प्राचल परीक्षणों को दी जाती है। गैर–प्राचल परीक्षण, प्राचल परीक्षणों से कम शक्तिशाली होते हैं क्योंकि वेा बहुत सी अवधारणाओं पर आधारित नहीं होती है। अवधारणाओं का अभाव निर्णय लेने के क्षेत्र को सीमाबद्ध करता है। इस प्रकार, प्रतिदर्शी आंकडा सभी वांछित अवधारणाओं को पूर्ण करता है, या आंकडों को अन्तराल मे ंया अनुपात पैमाने मे मापा जाता है, तब इसे हमेशा प्राचल परीक्षण का प्रयोग, गैर–प्राचल परीक्षण की तुलना मे अच्छा समझा जाता है।, इसी तरह, प्रतिदर्श का आकार बडा होता है तब गैर–प्राचल परीक्षणों मे शामिल गणनाऐ ज्यादा लम्बी होती है। इस प्रकार, बडे प्रतिदर्शों की स्थिति में, गैर–प्राचल परीक्षणों को नकार देना चाहिए। गैर–प्राचल परीक्षणेां के क्रियान्वयन के साथ दूसरी समस्या तालिका समीक्षात्मक मान की उपलब्धता होती है। अर्थपूर्ण निर्णयों के पहुॅच के क्रम में, समीक्षात्मक मान आवश्यक होते हैं। यद्यपि, इनमे से कुछ मानों को प्रासंगिक तालिकाओं मे संकलित नहीं किया गया होता है और प्रचलित तालिका हमेशा ही उपलब्ध नहीं होती है, ये आसानी से उपलब्ध नहीं है।

21.10 सारांश

गैर–प्राचल परीक्षण वे परीक्षण होते हैं जो समग्र के प्राचलेां पर आधारित नहीं होते हैं, ये वितरण मुफ्त परीक्षण होते हैं । इस इकाई मे आप कुछ लोकप्रिय और प्रयाः गैर–प्राचल परीक्षणों, काई वर्ग परीक्षण के अतिरिक्त के बारे में जिसे पिछले इकाई मे अध्ययन किया गया है।

गैर प्राचल परीक्षणों मे साइन परीक्षण सबसे महत्वपूर्ण है जिसका परीक्षण दिशा के अन्तरों के लिए प्रयोग होता है । यदि समग्र माध्य परिकलित माध्य के बराबर होता है। दो प्रकार के साइन परीक्षण होते है एक प्रतिदर्श साइन परीक्षण और द्वि प्रतिदर्श साइन परीक्षण ।

माध्यिका परीक्षण का प्रयोग यह निर्धारित करने में होता है कि समान माध्यिका के साथ समग्र में से प्रतिदर्श लिये गये है। यह देा या अधकि यादृच्छिक प्रतिदर्शों के माध्यिकाओं के बीच महत्वपूर्ण अन्तर को निर्धारित करता है।

दूसरा महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण विल्कसन मिलान युग्म परीक्षण है जो पहले आर बाद के प्रयेाग प्रकार का मिलान युग्मों के लिए उपयुक्त होता है। इस परीक्षण में, दिशाओं के साथ साथ अन्तर के परिमाणों को संज्ञान मे ंलिया जाता है। तब भी दूसरा गैर–प्राचल परीक्षण विल्कसन मन व्हाइटले परीक्षण है जो U परीक्षण के रूप मे जाना जाता है। यह दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के बीच अलग के अंशों की माप करता है।

इसका प्रयोग यह निर्धारित करने मे ंकिया जाता हैं कि दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श एक ही समग्र से लिये गये हैं या समान वितरण के दो या अधिक समग्रों से लिये गये हैं।

मैकनेयर परीक्षण का प्रयोग उन परिस्थितियों में जहॉ दो सम्बन्धित प्रतिदर्श स्थितियों में लोगों की प्रवृत्ति को परीक्षण के पहले और बाद के प्रतिपादन मे ंविचार मे यदि कोई अर्थपूर्ण परिवर्तन होता है वहॉ एकल प्रतिदर्श रन परीक्षण का प्रयोग प्रतिदर्श के यादृच्छिक परीक्षण के लिये किया जाता है। श्रेणी आंकडे के प्रयोज्य संज्ञात्मक और छोटे आकार प्रतिदर्श में गैर प्राचल परीक्षणेां के अस्थिरता होने के

लाभ होते हैं। इसकी कुछ हानियॉ भी हैं, जैसे ये परीक्षण बडे प्रतिदर्श के लिए कम शक्तिशाली एवं उपयुक्त नहीं है। इस प्रकार, प्राचल परीक्षण गैर–प्राचल परीक्षणों से अधिक पसंदनीय होते हैं।

21.11 शब्दावली

साइन परीक्षण : यह अवलोकन के एक जोडे की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) पर आधारित होता है न कि उनकी संख्यात्मक परिमाण पर ।

21.12 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. विल्कोवसोन मिलान युग्म परीक्षण को विल्कोक्सोन ————————परीक्षण के रूप में भी जाना जाता है।
2. एक रन में घटनाओं की संख्या को रन के ———— रूप में जाना जाता है ।
3. मकनर परीक्षण आंकडा प्रयोग एक परिवर्तित ——————परीक्षण प्रारूप है।
4. ——————परीक्षण श्रेणी योग परीक्षणों के मध्य बहुत प्रसिद्ध है।
5. साइन परीक्षण में, प्रतिदर्श मान μ_0 की तुलना में अधिक ——————निर्दिष्ट किये जाते हैं।

(ब) सत्य या असत्य

1. जब समग्र का वितरण स्पष्टतया सामान्य होता है, हमें निश्चित रूप से गैर प्राचल परीक्षणों का चयन करना चाहिए। (सत्य / असत्य)
2. यदि प्रतिदर्शों को क्रमवार मापा जाता है, तब हम माध्यिका परीक्षण का उपयोग कर सकते हैं। (सत्य / असत्य)
3. u परीक्षण में जब n_1 एवं $n_2 < 8$ हो तब u को z में परिवर्तित करना चाहिए। (सत्य / असत्य)
4. माध्यिका परीक्षण में, हम z के परिकलित मान की तुलना z के महत्वपूर्ण मान से शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए करते हैं। (सत्य / असत्य)
5. गैर प्राचल परीक्षण छोटे प्रतिदर्शों के लिए अधिक उपयुक्त होते हैं। (सत्य / असत्य)

21.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ)

1. साइन की श्रेणी (Signed Rank), 2. लम्बाई (Length), 3. काई – वर्ग (Chi-sauare), 4. u, 5 धन (Plus)

(ब)

1. असत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. सत्य

21.14 स्वपरख प्रश्न

1. साइन परीक्षण के उपयोग का उद्देश्य क्या होता है ?
2. माध्यिका परीक्षण में परीक्षण से सन्दर्भित शून्य परिकल्पना को लिखें ?
3. गैर प्राचल परीक्षणों के तीन लाभों का वर्णन करें ?
4. दो गैर प्राचल परीक्षणों के महत्व को समझाते हुए इनकी संक्षिप्त विवेचना करें।
5. गैर प्राचल परीक्षणों के लाभों एवं (नुकसान) हानियों का वर्णन करें।
6. 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए विद्यालय के सभी विद्यार्थियों ने औसतन 80 प्रतिशत अंक प्राप्त किये हैं यह सत्य है या नहीं :

क्र0सं0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

अंक %	81	70	93	94	82	80	76	78	83	95	75	89

(μ_0स्वीकार)

7. 30 दिनों में एक प्राचीन चट्टान पर दो पुरातात्विकों द्वारा खोदें गए कलाकृतियों की संख्या निम्नलिखित है :

X द्वारा	1	0	2	3	1	0	2	2	3	0	1	1	4	1	2	1	3	5	2	1	3	2	4	1	3	2	0	2	4	2
Y द्वारा	0	0	1	0	2	0	0	1	1	2	0	1	2	1	1	0	2	2	6	0	2	3	0	2	1	0	1	0	1	0

1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए शून्य परिकल्पना का परीक्षण करें कि दोनों पुरातात्विक x एवं y कलाकृतियों ज्ञात करने में वैकल्पिक परिकल्पना कि x अच्छा है के विरूद्ध एक समान है। (μ_0अस्वीकार)

8. एक शारीरिक प्रशिक्षण दावा करता है कि एक विशेष व्यायाम को जब न दिनों के लिए लगातार किया जाता है , शरीर का वजन न्यूनतम 3.5 किग्रा कम हो जाता है। 5 अधिक वनज वाली लडकियों में 7 दिनों के लिए व्यायाम किया और उनके शरीर का वजन निम्नवत पाया गया था :

लडकियॉ	व्यायाम से पहले वजन	व्यायाम के बाद वजन
1	70	66
2	72	70
3	75	72
4	71	66
5	78	72

साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए $\propto = 0.05$ पर दावे को प्रमाणित करें कि व्यायाम वजन को न्यूनतम 3.5 किग्रा करता है । (μ_0स्वीकार)

9. एम0बी0ए0 विद्यार्थियों के दो वर्गो को लागत लेखांकन के समान पाठ्यक्रम को अध्यापन की दो भिन्न विधियों द्वारा बताया गया था। जिन्हें T_1 तथा T_2 द्वारा जानें। 6 विद्यार्थियों के एक प्रतिदर्श को दो वर्गों के प्रत्येक में से 20 अंकों का एक कक्ष परीक्षा दिया गया था। अंक निम्नवत पाये गये थे।

प्रतिदर्श I $(T)_1$	15	10	11	12	18	15
प्रतिदर्श II $(T)_2$	12	17	14	11	09	15

0.05 महत्व के स्तर पर माध्यिका का परीक्षण का प्रयोग करते हुए परीक्षण करें कि एम0बी0ए0 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक दोनों वर्गों में माध्यिका अंक के रूप में एक समान है । (μ_0स्वीकार)

10. नीचे दिये गये आंकडों के मिलान युग्म दो मशीनों A एवं B के उत्पादन क्षमता से सम्बन्धित हैं :

मशीन A	142	140	144	144	142	146	149	150	142	148
मशीन B	138	136	147	139	143	141	143	145	136	136

विल्कोवन्सोन साइन श्रेणी का प्रयोग करते हुए शून्य परिकल्पना को 1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि दो मशीनों के मध्य उत्पादन क्षमता में कोई अन्तर नहीं हैं। (μ_0अस्वीकार)

11. एक नाइट क्लब का सुरक्षा विभाग सामान्य दैनिक प्रयोग के लिए हाथ ज्योंति बैटरीयों B_1 एवं B_2 के दो ब्रान्डों में से एक के चयन की इच्छा दर्शाता है। महत्वपूर्ण जीवन के लम्बाई की माप घन्टों में ज्ञात करने के लिए ब्रान्ड B_1 एवं B_2 के 5 बैटरीयों के प्रतिदर्श को परीक्षण के लिए लिया गया था। परीक्षण परिणाम के निम्नलिखित आंकडे हैं :

$B_1\ (n_1 = 5)$	25	31	26	33	35	
$B_2\ (n_2 = 6)$	24	30	28	32	29	34

5 प्रतिशत के स्तर पर u परीक्षण का प्रयोग करते हुए परिकल्पना का परीक्षण करें कि दो ब्रान्ड की बैटरीयों में समान लम्बाई का महत्वपूर्ण जीवन है। (μ_0स्वीकार)

12. एक पहले एवं बाद के प्रयोग में 300 प्रतिक्रियादाताओं से प्राप्त प्रतिक्रियाओं को निम्नवत वर्गीकृत किया गया था :

पहले उपचार	बाद में उपचार	
	प्रतिकूल	अनुकूल
अनुकूल	60	90
प्रतिकूल	120	30

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण करें, मकनर परीक्षण का प्रयोग करते हुए प्रमाणित करें कि उपचार के पश्चात लोगों की राय में कोई महत्वपूर्ण अन्तर है। (μ_0स्वीकार)

13. बहुत वर्ष पहले एक सडक के पास पास 30 आम के पेड स्थापित किये गये थे। एक शोधकर्ता ने पेडों को निरोगी (H) एवं रोगी (D) क्रम में निम्नवत पाया :

HH	DD	HHHHH	DDD	HHHH	DDDDD	HHHHHHHHH

1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर रन्स परीक्षण का प्रयोग करते हुए इस प्रतिदर्श के लिए यादृच्छिकता का परीक्षण करें।

21.15 संदर्भ पुस्तकें

1. होडा आर0पी0, व्यवसाय एवं अर्थशास्त्र के लिए सांख्यिकीय, मैक मिल्लन व्यवसाय पुस्तकें, नई दिल्ली ।
2. राय रमनद्यू एवं बैनर्जी सुमोजित, अनुसंधान प्रणाली के मूल किताब महल इलाहाबाद ।
3. शुक्ला एस0एम0 एण्ड शशि एस0पी0, उन्नत सांख्यिकीय साहित्य भवन प्रकाशन आगरा ।

इकाई – 22 F –परीक्षण और प्रसरण का विश्लेषण (अन्नोवा)
(F Test and Analysis of Variance (ANOVA))

22.1 प्रस्तावना

22.2 उद्देश्य

22.3 F – परीक्षण

22.3.1 F- परीक्षण की अवधारणाऐं

22.3.2 F- परीक्षण की तकनीकें

22.4 प्रसरण का विश्लेषण

22.4.1 विचरण के श्रोत

22.4.2 ANOVA (एनोवा) का औचित्य

22.4.3 ANOVA (एनोवा) तकनीक

22.5 सारांश

22.6 शब्दावली

22.7 बोध प्रश्न

22.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

22.9 स्वपरख प्रश्न

22.10 संदर्भ पुस्तकें

22.1 प्रस्तावना

पिछले दो इकाईयों में, आपने काई–वर्ग परीक्षण और दूसरे गैर प्राचल परीक्षणो का अध्ययन किया है। आपको ज्ञात होना चाहिए कि प्राचल परीक्षण गैर प्राचल परीक्षणो की तुलना में अधिक प्रभावशाली होते हैं। इस प्रकार, आपको परिकल्पना परीक्षणों या निष्कर्ष निकालने के लिए प्राचल परीक्षणों में अधिक निभ्रर रहना चाहिए।

पिछले इकाईयों में आप पहले ही कुछ महत्वपूर्ण प्राचल परीक्षणों जैसे t परीक्षण z परीक्षण इत्यादि के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। दो प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच के महत्वपूर्ण अन्तर को या तो z परीक्षण या t परीक्षण द्वारा अपनिर्णीत किया जा सकता है। लेकिन जब हम एक ही समय में दो प्रतिदर्श माध्यों से अधिक अन्तर के महत्व का अध्ययन कर रहे होते हैं, ये दोनो परीक्षण उपयोगी नहीं होते हैं और हमें परिवर्तनशीलता के विश्लेषण का प्रयोग करना पडता है। दूसरा महत्वपूर्ण प्राचल परीक्षण F परीक्षा होता है जो स्वतन्त्र अनुमानों के लिए समग्र परिवर्तनशीलता के महत्व परीक्षण मे प्रयोग किया जाता है।

इस इकाई में, आप f परीक्षण और परिवर्तनशीलता के विश्लेषण के बारे मे अध्ययन करेंगें जो दो प्रतिदर्शों के बीच से अधिक परिवर्तनशीलता के महत्व के निर्णय में अपकी सहायता करेंगें।

22.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- F- परीक्षण की अवधारणा एवं अनुप्रयोग की व्याख्या कर सकें।
- ANOVA की अवधारणा का वर्णन कर सके।
- प्रसारण के विश्लेषण की तकनीक का वर्णन कर सके।

22.3 F परीक्षण

प्राचल परीक्षणों के क्षेत्र में परिवर्तनशीलता अनुपात परीक्षण या F परीक्षण एक महत्वपूर्ण परीक्षण होता है। इसे सामान्यतया F परीक्षण के रूप मे जाना जाता है क्योंकि आर0ए0फिशर महान साख्यिकीयविद् ने पहली बाद परिवर्तनशीलता शब्द का प्रयोग और परीक्षण को विकसित किया था। F परीक्षण सामान्यतया उपयोगी होता है जब बहु प्रतिदर्श स्थितियॉ शामिल होती है और आंकडे के अन्तराल या अनुपात पैमाने मे मापा जाता है। F परीक्षण का उद्देश्य यह निर्धारित करने में किया जाता है क्योंकि दो स्वतन्त्र अनुमानों की समग्र परिवर्तनशीलता में अर्थपूर्ण अन्तर है, या क्या दो प्रतिदर्श सामान्य समग्रों से जिनकी परिवर्तनशीलता समान है से लिये जा सकते है। F परीक्षण एक बहुत उपयोगी परीक्षण है जिसे दो सामान्य समग्रों के समानता की परिवर्तनशीलता के परीक्षण मे प्रयोग किया जा सकता है। दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों से अधिक के लिए यह परिवर्तनशीलता का विश्लेषण कर सकता है। इसका प्रयोग सह प्रसरण के विशलेषण के लिये किया जा सकता है। इस प्रकार, यह एक महत्वपूर्ण, लोकप्रिय और उपयोगी प्राचल परीक्षण है जिसे सभी क्षेत्रों में जैसे अर्थशास्त्र, व्यवसाय, शिक्षा कृषि इत्यादि में प्रयोग किया जा सकता है।

22.3.1 F परीक्षण की अवधारणाऐं

F परीक्षण निश्चित अवधारणाओं पर आधारित होता है जिसे इसके अनुप्रयोग के लिए पूर्ण होना चाहिए ये अवधारणाऐं निम्नवत हैं :–

- पहली अवधारणा समग्र की सामान्य स्थिति होती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक वर्ग में मान सामान्य रूप से वितरित हुए हैं।

- दूसरी अवधारणा वर्गों की एकरूपता होती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक वर्ग के अर्न्तगत प्रसरण सभी वर्गों के लिए एकसमान होना चाहिए। यह अवधारणा मिश्रित या संघीय वर्गों के अर्न्तगत प्रसरणों के एकल भीतर वर्ग प्रसरण के श्रोत के क्रम के अंदर लिए आवश्यक होता है।
- तीसरी अवधारणा त्रुटि की स्वतन्त्रता होती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक मान के लिए अपने स्वयं के समूह के चारों ओर एक मान के विचरण का मध्य स्वतन्त्र होना चाहिए।
- अन्तिम अवधारणा यादृच्छिकता की होती है। इसका अर्थ है कि प्रतिदर्श पदों को यादृच्छिक तरीकों से समग्र से लिया जाना चाहिए।

22.3.2 F परीक्षण की तकनीकें

F परीक्षण दो प्रसरणों के अनुपात पर आधारित होता है। इसी कारण इसे, प्रसरण अनुपात परीक्षण कहा जाता है। दो प्रसरणों का अनुपात F वितरण का अनुसरण करता है जो उपरोक्त वर्णित अवधारणाओं पर आधारित होता है। इस परीक्षण में, सबसे पहले, एक शून्य परिकल्पना ली जाती है जिसका कथन यह होता है कि दो समग्रों के प्रसरण के बीच कोई अन्तर नहीं हैं। इस परिकल्पना के परीक्षण के लिए, हमें F (प्रसरणों का अनुपात) के मान के लिए कार्य करना पडता है। F की गणना निम्नवत की जाती है।

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

जहॉ $S_1^2 = \frac{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$ & $S_2^2 = \frac{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$

यहॉ यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि अंशगणक हमेशा ही ज्यादा प्रसरण का होता है। इसका अर्थ है कि S_1^2 हमेशा की प्रसरण के बडे अनुमान का हेाता है। (अर्थात $S_1^2 > S_2^2$) इसे निम्नलिखित सूत्र के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

F = प्रसरण का बडा अनुमान / प्रसरण का छोटा अनुमान

v_1 के लिए $v_1 = n_1 - 1 =$ बडे प्रसरण के प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता का अंश

$v_2 = n_2 - 1 =$ छोटे प्रसरण के प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता का अंश

F के मान की गणना के बाद, इसे वांछित महत्व के स्तर (5% या 1%) पर v_1 और v_2 (बडे एवं छोटे प्रसरणों की स्वतन्त्रता के अंश के लिए) F के तालिका मान से तुलना करते हैं। यदि F अनुपात का परिकल्पित मान F के तालिका मान से कम होता है, तब F अनुपात अर्थपूर्ण नहीं होता है और शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है। तब यह अनुमान लगाया जा सकता दोनों प्रतिदर्श समान प्रसरण के समग्र में से लिये गये हैं। दूसरी तरफ, यदि F का परिकल्पित मान F के तालिका मान से अधिक होता है, तब F अनुपात अर्थपूर्ण समझा जाता है और शून्य परिकल्पना अस्वीकार हेाती है।

उदाहरण –1 दो यादृच्छिक नमूने दो सामान्य समगों में से लिये गये थे और उनके मान निम्नरूप में हैं :–

A:	66	67	75	76	82	84	88	90	92	--	--
B:	64	66	74	78	82	85	87	92	93	95	97

5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि क्या दोनों समगों में समान प्रसरण है (संकेत : 5% स्तर पर $v_1 = 10$ और $v_2 = 8$ के लिए F=3.36)

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते हैं कि दोनों समग्रों में समान प्रसरण हैं

A (X_1)	$(X_1 - \bar{X}_1)$	$(X_1 - \bar{X}_1)^2$	B(X_2)	$(X_2 - \bar{X}_2)$	$(X_2 - \bar{X}_2)^2$
66	–14	196	64	–19	361
67	–13	169	66	–17	289

75	–5	25	74	–9	81
76	–4	16	78	–5	25
82	+2	4	82	–1	1
84	+4	16	85	+2	4
88	+8	64	87	+4	16
90	+10	100	92	+9	81
92	+12	144	93	+10	100
			95	+12	144
			97	+14	196
720	***0***	***734***	***913***	***0***	***1298***

$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{720}{9} = 80$ $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{913}{11} = 83$

$S_1^2 = \frac{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1} = \frac{734}{9-1} = 91.75$

$S_2^2 = \frac{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1} = \frac{1298}{11-1} = 129.8$

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{129.8}{91.75} = 1.4$ (दूसरे प्रतिदर्श के प्रसरण को अंश गुणक बनाया गया क्योंकि दूसरे प्रतिदर्श का प्रसरण पहले की तुलता मे अधिक है) 5% महत्व के स्तर पर $v_1 = 10$ और $v_2 = 8$ के लिए F का तालिका मान 3.36 है। चूँकि F(1.4) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.36) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है। इस प्रकार, यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि दो समग्रों में एक समान प्रसरण है।

उदाहरण –2 दो कृषि भूखंडों के समान क्षेत्र के सार्वजनिक 10 उपखण्डों के एक प्रतिदर्श मे गेहूॅ की उत्पादकता अवलोकित की गई। यह देखा गया था कि वर्ग विचलनों का योग माध्य से क्रमशः 0.92 और 0.26 था। 5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि क्या दो यादृच्छिक समग्रों से लिए गऐ प्रतिदर्शों का प्रसरण समान है।

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते है। कि दो समग्रों के प्रसरण के बीच कोई अन्तर नहीं हैं

दिया है :–

$n_1 = 10,$ $n_2 = 10,$ $\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2 = 0.92,$ $\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 0.26$

$S_1^2 = \frac{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1} = \frac{0.92}{10-1} = 0.102$

$S_2^2 = \frac{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1} = \frac{0.26}{10-1} = 0.028$

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.102}{0.028} = 3.64$

$v_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9,$ $v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$

5% महत्व के स्तर पर $v_1 = 9$ और $v_2 = 9$ के लिए F का तालिका मान 3.18 है। चूँकि F(3.64) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.18) से अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि समग्र से लिये गये प्रतिदर्शों में का प्रसरण भिन्न है।

22.4 प्रसरण का विश्लेषण

प्रसरण के विशलेषण को प्रायः ANOVA के रूप में उल्लेखित किया जाता है। विचरण में वर्गों की वजह से प्रसरण के पृथककरण जो कि अन्य वर्गों की वजह से होते हैं को सांख्यिकीय तकनीक के रूप

में परिभाषित किया जाता है। अर्थशास्त्र, जीवविज्ञान, शिक्षा, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, व्यवसाय या उद्योग के क्षेत्रों और विभिन्न दूसरे शिक्षणों में यह शोध सम्बन्धी अत्यधिक उपयोगी तकनीक हेाती है। ANOVA तकनीक का आरम्भ में कृषि सम्बन्धी शोध में प्रयोग किया गया था और अब इसे सक्रिय रूप से प्रायोगिक प्रारूप पर आधारित शोधों के लिए प्रयोग किया जाता है, जैसे कि प्राकृतिक विज्ञान या सामाजिक विज्ञान। यह तकनीक तब प्रयोग की जाती है जब विविध प्रतिदर्श घटनाऐं शामिल होती है। ANOVA को यह परीक्षण करने के लिए कि क्या दो से अधिक परिमाणात्मक समग्रों के माध्य समान होते हैं, विशेषरूप से प्रारूपित किया जाता है। इसमें आंकडों का वर्गीकरण और क्रास वर्गीकरण शामिल हेाता है तब परीक्षण होता है यदि निर्दिष्ट वर्ग के माध्य मे अर्थपर्णू अन्तर है।

डोनाल्ड एल हरनैट और जेम्स एल मर्फी के अनुसर ''ANOVA का सार यह है कि आंकडों के समूह मे प्रसरण की कुल मात्रा को दो हिस्सों में बांटा जाता है जैसे कि मात्रा जो संयोगवश सहजगुण के कारण हो सकती है और मात्रा जो कि निर्दिष्ट घटनाओं के सहजगुण के कारण हो सकती है।'' प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण हो सकता है और प्रतिदर्श पदो के बीच भी हो सकता है। ANOVA में विश्लेषणात्मक उद्देश्यों के लिए प्रसरण विखंडन शामिल होते है। आप जानते है कि t परीक्षण का प्रयोग जहॉ दो समग्र माध्य समान होते है के परीक्षण के लिए किया जाता है जबकि ANOVA का प्रयोग विविध समगों के माध्यों के बीच समानता के परीक्षण के लिए किया जाता है। इस प्रकार, ANOVA को ज परीक्षण के विस्तार के रूप में सुविचारित किया जा सकता है।

ANOVA एक तकनीक है जिसे विभिन्न क्षेत्रों में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यह तकनीक हमें वर्णन करने में सहायता करती है कि बीजों की विभिन्न प्रजातियॉ या रासायनिक उर्वरकों या मिट्टीयो में अर्थपूर्ण अन्तर है जिसकी विजह से कृषि शोधों के क्षेत्र में नीति निर्णय तद्नुसार लिये जा सकते हैं इसी तरह, इस तकनीक के अनुप्रयोग के माध्य से, जानवर के विशेष वर्ग के लिए तैयार संभरण में अन्तर या निर्दिष्ट बिमारी के संसाधन के लिए विभिन्न प्रकार की औषधि प्रौद्योगिक में अन्तर का अध्ययन किया जा सकता है या अन्तर अर्थपूर्ण है या नहीं का निर्णय लिया जा सकात है। इसका प्रयोग व्यवसाय से सम्बन्धित नीति निर्णय क्षेत्रों में भी प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक बडे कारोबार का एक प्रबन्धक अपनी देखरेख में आने वाले विभिन्न विक्रेताओं के कार्यों के प्रदर्शन का विश्लेषण कर सकता है और उनके प्रदर्शन को अर्थपूर्ण अन्तर मे जानने के क्रम में नियंत्रित कर सकता है। इसी तरह, विभिन्न मशीनों के परिणामों के माध्य गुणों में अर्थपूर्ण अन्तर को निर्धारित किया जा सकता है। इस तरह का अध्ययन निर्धारित करेगा कि परिणामों के गुणों में एकरूपता को संचालन की मानकीकरण प्रक्रिया द्वारा बढाया जा सकता है या इसे मशीनों के मानकीकरण द्वारा बढाया जा सकता है। इस तरह से ANOVA व्यवसाय से सम्बन्धित नीति निर्णयों के लिए एक बहुत महत्वपूर्ण सांख्यिकीय तकनीक सिद्ध हो सकता है। आपको हमेशा याद रखना चाहिए कि प्रसरण का विशलेषण परीक्षण दो प्रतिदर्श प्रसरणों के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर के परीक्षण के सर्वश्रेष्ठ उद्देश्य के लिए अभीष्ट नहीं है, बल्कि इसका उद्देश्य प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर के अर्थपूर्ण उद्देश्य के परीक्षण के लिए होता है। दो प्रसरणों के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर के लिए इसे F परीक्षण की प्रक्रिया माध्यम से सम्पन्न किया जाता है, लेकिन परीक्षण को इस तरीके से प्रारूपित किया जाता है कि तुलना किये जा रहे प्रसरण भिन्न होते हैं केवल यदि संज्ञान के अन्तर्गत माध्य सभांगी नहीं होते हैं इस तरह से, F का अर्थपूर्ण मान निर्दिष्ट करता है कि माध्य एक दूसरे से अर्थपूर्ण तरीके से भिन्न है।

22.4.1 प्रसरण के श्रोत

प्रसरण का विश्लेषण उन सभी परिस्थितियों के सन्दर्भ में महत्वपूर्ण तकनीक होती है जब शोधकर्ता दो से अधिक समग्रों की तुलना करना चाहता है। विभिन्न समग्रों के मध्य अन्तर के विश्लेषण के लिए हमें निर्णय करना पडता है कि प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर केवल घटना के कारण होता है या क्या अन्तर विभिन्न समग्रों के माध्य के कारण जो लिये गये वास्तविक प्रतिदर्शों में से घटित होता

है। आंकडों में दो प्रकार के प्रसरण हो सकते है। और ANOVA तकनीक आंकडों में हमें इन दो प्रकार के प्रसरण के अध्ययन में सहायता करता है। पहला ''विभिन्न प्रतिदर्शों के बीच'' और दूसरा ''प्रतिदर्श के भीतर''

यदि प्रसरण प्रतिदर्श के भीतर और प्रतिदर्श के बीच एक दूसरे से अर्थपूर्ण भिन्न नही होते हैं, तब प्रतिदर्श केवल प्रसरण के भीतर एकसमान होते हैं । यदि प्रतिदर्श के मध्य विचरण, प्रतिदर्श के भीतर विचरण से बहुत अधिक होता है, इसका अर्थ है कि प्रतिदर्श समग्र के विभिन्न प्रकार से लिये गये हैं अन्यथा प्रतिदर्शों के मध्य और प्रतिदर्शो। के भीतर कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं रहेगा। इसलिए, प्रसरण के विशलेषण में, हम प्रतिदर्शो के बीच और प्रतिदर्शों के भीतर सम्बन्ध ज्ञात करते हैं। यदि समग्रों के सभी माध्य समान होते हैं, तब प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता केवल घटना परिणाम हेागा और इसलिए प्रतिदर्शे के भीतर उत्पन्न हुए परिवर्तनशीलता के समान होगा। दूसरी ओर, यदि समग्र माध्य एक समान नहीं होते हैं, प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता प्रतिदर्शों के भीतर परिवर्तनशीलता से अधिक होगी।

परितर्वनशीलता को प्रसरण के विश्लेषण में मापने को 'माध्य वर्ग' कहा जाता है जिसकी गणना निम्नलिखित सूत्र से की जाती है।

माध्य वर्ग = माध्य से विचलनों के वर्ग का योग / स्वतन्त्रता का अंश

प्रतिदर्शों के भीतर परिवर्तनशीलता मापने के लिए, विचलनों को विशेष प्रतिदर्श माध्यों से और विचलनों के वर्ग के योग को स्वतन्त्रता के अश से विभाजित (प्रतिदर्श की संख्या को कुल प्रतिदर्श आकार से घटाकर) कर लिया जाता है जिसे प्रतिदर्शों के भीतर माध्य वर्ग कहा जाता है। यह माध्य वर्ग परिवर्तनशीलता की माप को जोकि घटना या प्रयोगात्मक त्रुटि के कारण हुई है को प्रदर्शित करता है। प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता मापने के लिए प्रतिदर्श माध्य के विचलनों को सभी अवलोकनों के सर्वोच्च माध्य से लिया जाता है और विचलनों के वर्ग के योग को स्वतन्त्रता के अंश द्वारा (प्रतिदर्शों की संख्या को एक से घटाकर) विभाजित किया जाता है जिसे प्रतिदर्शों के मध्य माध्य वर्ग द्वारा जाना जाता है। यह माध्य वर्ग वर्ग प्रभाव को या प्रतिदर्शों के मध्य संभावित अंतर को प्रदर्शित करता है।

यदि सभी समग्रों का माध्य समान होता है, उनमें कोई वर्ग प्रभाव नहीं होता है और प्रतिदर्शों का माध्य वर्ग भी अकेले घटना के कारण परिवर्तनशीलता को प्रदर्शित करेगा। इसलिए, जब समग्र में प्रतिदर्श माध्य एकसमान होते है, प्रतिदर्शों के भीतर माध्य वर्ग और प्रतिदर्शों के बीच माध्य वर्ग में बहुत अधिक अंतर नहीं होना चाहिए और उनका अनुपात एक के करीब होना चाहिए। असमान्यतः बडे अनुपात इंगित करेंगे कि समग्र में प्रतिदर्श माध्य एक समान नहीं होते हैं।

22.4.2 ANOVA का औचित्य :–

ANOVA के पीछे वैचारिक औचित्य यह है कि आंकडों के समूह में प्रसरण की मात्रा की दो तरह से विशेषता हो सकती है अर्थात घटना और निर्दिष्ट कारणों से और ANOVA के प्रयोग से हम विश्लेषणात्मक उद्देश्य के लिए इस प्रसरण को विभाजित कर सकते है। ANOVA कारकों के किसी संख्या के अनुसंधान के लिए स्वीकृति देता है जो आश्रित चर के प्रभाव के लिए अनुमानित हों। ANOVA का मूलभूत नियम प्रतिदर्शों भीतर प्रसरण की मात्रा का समग्रों के माध्य अन्तर के लिए परीक्षण द्वारा जांच पडताल करना और प्रतिदर्शों के मध्य सम्बन्धित प्रसरण की मात्रा का परीक्षण करना होता है। जबकि ANOVA का प्रयोग करते हुए, हम मानते है, कि प्रत्येक प्रतिदर्श को सामान्य समग्र से लिया गया है और प्रत्येक समग्र का प्रसरण एक समान है। यह भी कल्पना की जाती है कि एक या अधिक कारको के अतिरिक्त किये जा रहे परीक्षण प्रभावशाली तरीके से नियत्रण में है।

तद्पश्चात प्रत्येक आंकडे वर्ग के लिए स्वतन्त्र यादृच्छिक प्रतिदर्शों को चयनित किया जाता है, प्रतिदर्शो के बीच प्रसरण की मात्रा और प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की मात्रा के अनुपात पर कार्य किया जाता है,

इसे F अनुपात के रूप में जाना जाता है। इसे निम्नलिखित सूत्र के आकार में वर्णित किया जा सकता है।

F = प्रतिदर्शो के मध्य प्रसरण पर आधारित समग्र प्रसरण का अनुमान / प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण पर आधारित समग्र प्रसरण का अनुमान

सामान्यतया प्रतिदर्शे के मध्य प्रसरण, प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की तुलना में अधिक होगा। यदि परिस्थिति विपरीत होती है, अर्थात प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण, प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की तुलना में कम हेाता है तो अंश एवं हर की स्थितियों को परिवर्तित करना चाहिए और तद्नुसार निष्कर्ष निकाले जाने चाहिए लेकिन यह बहुत कदाचित होाग। F मान के गणना के पश्चात इसे दिये हुए अंश की स्वतन्त्रता के लिए तालिका मान के साथ तुलना की जाती है। यदि F का परिकल्पित मान तालिका मान के समान या अधिक होता है तब प्रतिदर्श माध्यों के बीच अर्थपूर्ण अंतर न होने की शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। यह याद रखा जाना चाहिए कि ANOVA परीक्षण हमेशा एक पुच्छीय परीक्षण होता है, चूॅकि प्रतिदर्श आंकडों मे से F का छोटा परिकल्पित मान का अर्थ हेागा कि शून्य परिकल्पना के लिए समग्र माध्य बहुत लायक है।

AVOVA परीक्षण का अनुप्रयोग कुछ अवधारणाओं पर आधारित है जो निम्न रूप में है :

- समग्र की प्रसामान्यता
- प्रसरण की समरूपता
- यादृच्छिकरण
- त्रुटि की स्वतन्त्रता

आप देख सकते है। कि ANOVA परीक्षण एवं F परीक्षण की अवधारणाऐं समान होती है। इन अवधारणाओं की पूर्ति प्रत्यक्ष रूप से इस परीक्षण की विश्वसनीयता को बढायेगी लेकिन यदि समग्र एक रूपात्मक हों और प्रतिदर्श आकर लगभग समान हों तब समग्र के प्रसामान्यता की अवधारणा का उल्लंधन परीक्षण की उपयुक्तता को प्रभावित नहीं करेगा।

22.4.3 ANOVA तकनीक

प्रसरण के विश्लेषण के माध्यम से, शोधकर्ता कारकों की किसी संख्या जिसे अनुमानित किया जाता है की छानबीन कर सकते हैं। यदि शोधकर्ता केवल एक कारक को लेता है और इसके विभिन्न वर्गों के मध्य अन्तरों की छानबीन करता है जिसके बहुत संभावित मान है, तब शोधकर्ता एकतरफा ANOVA का प्रयोग करते हैं, और उस स्थिति में जहॉ वह दो कारकों की छानबीन एक साथ करता है, तब उसके द्वारा दो तरफा ANOVA का प्रयोग होता है। अच्छे निर्णय निर्धारण के लिए दो स्वतन्त्र चरों का एक आश्रित चर को प्रभावित करने का अध्ययन किया जाता है। आंकडों के वर्गीकरण के आधार पर या कारकों की सहभागिता ANOVA तकनीक को विभिन्न वर्गों जैसे एक तरफा ANOVA , दो तरफा ANOVA, ANOVA लैटिन वर्ग प्रारूप इत्यादि में विभाजित किया जा सकता है। विभिन्न स्थितियों में विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जा सकता है जिसका सार निम्नलिखित रूप में है :

1- एक तरफा ANOVA
   1. प्रत्यक्ष विधि
   2. सरल मार्ग विधि
   3. सांकेतिक विधि

2- दो तरफा ANOVA
   1. अपुनरावृत्ति मानों के साथ
   2. पुनरावृत्ति मानों के साथ
   3. रेखांचित्रिय विधि

1. एकतरफा ANOVA :–

एकतरफा या एकल कारक ANOVA की स्थिति में, केवल एक कारक सुविचारित होता है और यह अवलोकित किया जाता है कि एकल कारक प्रतिदर्शो के भीतर परिवर्तनशीलता और प्रतिदर्शों के बीच परिवर्तनशीलता का अध्ययन महत्वपूर्ण होता है। यदि कारक के भीतर अन्तर होते है तो हमें निरीक्षण करना पडता हैं एकतरफा वर्गीकरण में, आंकडों को केवल एक मानदण्ड के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है और शून्य परिकल्पना की जाती है जिसका कथन हातो है कि समग्रों के समान्तर माध्यों का जिसमें इसके k प्रतिदर्श यादृच्छिक लिये गये थे वे एक दूसरे के बराबर हैं। इसे निम्नवत वर्णित किया जा सकता है।

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mu_k$

इस शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए हम विभिन्न वैकल्पिक विधियों का प्रयोग कर सकते हैं जिनका नीचे वर्णन किया गया है।

(अ) प्रत्यक्ष विधि :– एकतरफा ANOVA परीक्षण में प्रत्यक्ष विधि के अर्न्तगत निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

- सबसे पहले, प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य परिकल्पित किया जाता है :

$$\bar{X}_1,\ \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{X}_k$$ (जब k प्रतिदर्श हैं)

- तद्पश्चात प्रतिदर्श माध्यों का माध्य निम्नलिखित तरीके से परिकल्पित किया जाता है :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{n1 * \bar{X}_1 + n2 * \bar{X}_2 + n3 * \bar{X}_3 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + nk * \bar{X}_k}{n1 + n2 + n3 + \cdots \ldots\ldots nk}$$

- अगले चरण में, प्रतिदर्श माध्यों के विचलनों को प्रतिदर्श माध्यों के माध्य से परिकल्पित किया जाता है।
- तद्पश्चात इन विचलनों का वर्ग किया जाता है और समरूपी प्रतिदर्श मे इन्हें पदों की संख्या द्वारा गुणा किया जाता है और उनका संकलन प्राप्त किया जाता है इसे प्रतिदर्श के बीच प्रसरण या SS बीच के लिए वर्गों का योग कहा जाता है। इसे निम्नलिखित रूप में वर्णित किया जा सकता है।

$$\text{SS बीच} = n_1\left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + n_2\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n_k\left(\bar{X}_k - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

- तब प्रतिदर्शो के बीच प्रसरण के लिए वर्गों के योगों का प्रतिदर्शो। के बीच स्वतंत्रता के अंश द्वरा विभाजित किया जाता है जो माध्य वर्ग मध्य प्रदान करता है। लाक्षणिक रूप से ,

$$\text{MS मध्य} = \frac{SS\ Between}{(k-1)}$$

जहॉ $(k - 1)$प्रतिदर्शो के मध्य स्वतन्त्रता का अंश ।

- अगले चरण में, SS भीतर परिकल्पित किया जाता है। इसके लिए, सभी प्रतिदर्शों के लिए समरूपी प्रतिदर्श माध्य में से प्रतिदर्श पदो के विचलन का मान परिकल्पित करते हैं, इन विचलनों का वर्ग किया जाता है और उनका संकलन प्राप्त करते हैं। इसे प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग के रूप में जाना जाता है। इसे निम्नलिखित रूप मे व्यक्त किया जा सकता है।

$$\text{SS भीतर} = \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sum(X_{ki} - \bar{X}_k)^2$$

with i =1,2,3……………. के साथ

- तद्पश्चात ''प्रतिदर्श के भीतर माध्य वर्ग'' की गणना प्रतिदर्श के भीतर स्वतन्त्रता के अंश के साथ प्रतिदर्श के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग द्वारा विभाजन से की जाती है।

  MS भीतर = ss भीतर / (n-k)

  जहॉ n सभी प्रतिदर्शों के कुल पदों की संख्या अर्थात $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$

  k = प्रतिदर्शों की कुल संख्या

  इस प्रकार (n-k) प्रतिदर्शों के भीतर स्वतन्त्रता के अंशों को i =1,2,3…………….
  के साथ प्रदर्शित करता है।

- अन्तिम चरण में, F अनुपात की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{F-ratio} = \frac{MS\ Between}{MS\ Within}$$

तद्पश्चात F के परिकल्पित मान की तुलना F के तालिका मान के साथ निर्दिष्ट महत्व के स्तर पर दिये हुए स्वतन्त्रता के अंश के लिए किया जाता है। यदि F अनुपात का परिकल्पित मान तालिका मान से छोटा होता है तब शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तब शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। इस अनुपात का प्रयोग यह निर्णय करने में किया जाता है कि क्या विविध प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर अर्थपूर्ण है या यह केवल एक प्रतिचयन अस्थिरता का विषय है।

ANOVA तकनीक का योगात्मक गुण :– कुल प्रसरण के लिए विचलन के वर्ग का योग प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्ग के योग के जोड और प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण के लिए वर्ग के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

लाक्षणिक रूप से कुल प्रसरण के लिए SS= SS माध्य + SS भीतर कुल प्रसरण के लिए वर्ग के इस योग को एक वैकल्पिक विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है इस प्रक्रिया में विचलनों के वर्गों का योग शामिल होता है जब सभी प्रतिदर्शों में एकल पदो के लिए विचलनों को प्रतिदर्श लाक्षणिक रूप से,

कुल प्रसरण के लिए $SS = \sum \left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$

i = 1,2,3,……………..

j = 1,2,3,………………

कुल प्रसरण के लिए अंश की स्वतन्त्रता = (n – 1) = (k – 1) + (n – k)

इसका अर्थ है कि कुल प्रसरण के लिए अंशों की स्तऩता सभी प्रतिदर्शों में पदों की संख्या ऋण एक के बराबर होगी। इसे प्रतिदर्शों के बीच के लिए अंश की स्वतन्त्रता का योग और प्रतिदर्शो के भीतर अंश की स्वतन्त्रता के योग द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। यही कारण ANOVA तकनीक के योगात्मक गुण का है।

एकतरफा या एकल कारक ANOVA तकनीक में शामिल विभिन्न चरणों के आधार पर, उनकी गणना निम्नलिखित प्रसरण के विश्लेषण तालिका के रूप में संक्षिप्त की जा सकती है।

एकतरफा ANOVA के लिए प्रसरण की विश्लेषण तालिका

विचरण के श्रोत	वर्गों का योग (SS)	अंश की स्वतन्त्रता (d.f.)	माध्य वर्ग (MS)	F-अनुपात
(i)प्रतिदर्शों के बीच	$n_1(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + n_2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + \ldots\ldots + n_k (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})^2$	(k – 1) k = प्रतिदर्शों की संख्या	$\frac{SS\ Between}{k-1}$	$\frac{MS\ Between}{MS\ Within}$

(ii) प्रतिदर्शों के भीतर	$\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots+\sum(X_{ki} - \bar{X}_k)^2$ i =1,2,3……………. के साथ	(n – k) n = कुल पदों की संख्या	$\frac{SS\ Within}{(n-k)}$	
(iii) कुल	$\sum\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$ i = 1,2,3,…………….. j = 1,2,3,………………	(n – 1)		

उदाहरण 3 :– एक शहर के कोनवेन्ट स्कूलों के मध्य किसी परीक्षा में प्रदर्शन के सम्भव विचरण के महत्व के आंकलन में एक सार्वजनिक परीक्षा चार स्कूलों से सम्बन्धित प्रत्येक अपर पांचवीं कक्षा से यादृच्छिक रूप से लिए गये छात्रों को दिलाई गयी थी। परिणाम नीचे दिये गये हैं। आंकडों के प्रसरण के विश्लेषण का सृजन करें।

		स्कूल	
A	*B*	*C*	*D*
8	12	18	13
10	11	12	9
12	9	16	12
8	14	6	16
7	4	8	15

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते है। कि $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य

$$\bar{X}_1 = \frac{8+10+12+8+7}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\bar{X}_2 = \frac{12+11+9+14+4}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{X}_3 = \frac{18+12+16+6+8}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\bar{X}_4 = \frac{13+9+12+16+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

प्रतिदर्श माध्यों का माध्य

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4}{k}$$

$$= \frac{9+10+12+13}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

SS मध्य

$$\text{SS Between} = n_1\left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + n_2\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + n_3\left(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + n_4\left(\bar{X}_4 - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

$$= 5(9-11)^2 + 5(10-11)^2 + 5(12-11)^2 + 5(13-11)^2$$

$$= 20 + 5 + 5 + 20$$

$$= 50$$

MS मध्य

$$\text{MS between} = \frac{SS\ Between}{(k-1)}$$

$= \frac{50}{4-1} = 16.7$ (there are 4 samples)

SS भीतर

SS भीतर $= \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \sum(X_{3i} - \bar{X}_3)^2 + \sum(X_{4i} - \bar{X}_4)^2$

$= \{(8-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2 + (8-9)^2 + (7-9)^2\}$

$+ \{(12-10)^2 + (11-10)^2 + (9-10)^2 + (14-10)^2 + (4-10)^2\}$

$+ \{(18-12)^2 + (12-12)^2 + (16-12)^2 + (6-12)^2 + (8-12)^2\}$

$+ \{(13-13)^2 + (9-13)^2 + (12-13)^2 + (16-13)^2 + (15-13)^2\}$

$= \{1+1+9+1+4\} + \{4+1+1+16+36\} + \{36+0+16+36+16\} + \{0+16+1+9+4\}$

$= 16 + 58 + 104 + 30 = 208$

MS भीतर

MS Within $= \frac{SS\ Within}{(n-k)}$

$= \frac{208}{20-4} = \frac{208}{16} = 13$

***F*-अनुपात**

F- अनुपात $= \frac{MS\ Between}{MS\ Within}$

$= \frac{16.7}{13} = 1.285$

उपरोक्त वर्णित गणनाओं को निम्नलिखित तालिका के रूप में संक्षिप्त किया जा सकता है :–

विचरण के श्रोत	**SS**	**d.f.**	**MS**	**F- अनुपात**	**5% F-सीमा**
मध्य प्रतिदर्श भीतर प्रतिदर्श	50 208	4 – 1= 3 20 – 4 = 16	16.7 13	1.285	F(3,16) 3.24
कुल	258				

F (1.285) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.24) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार हेाती है और हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रतिदर्श समान समग्रों से लिये गये हैं।

(ब) सरल मार्ग विधि :– उपरोक्त वर्णित ANOVA के एकतरफा तकनीक की प्रत्यक्ष विधि बहुत विस्तृत और अधिक समय लेने वाली होती है। प्रत्यक्ष विधि के स्थान पर, सरल मार्ग विधि को एकतरफा ANOVA से सम्बन्धित समस्याओं के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है और हम समान परिणाम प्राप्त करेंगे। वास्तव में, सरल मार्ग विधि प्रत्यक्ष विधि की तुलना में अधिक लोकप्रिय है और सामान्यतया इसे एकतरफा ANOVA के अभ्यास के लए प्रयोग किया जाता है क्योकि यह कम समय लेने वाली, आसान और यह विशेष रूप से संगणनात्मक कार्य को कम करता है। सरल मार्ग विधि में निम्नलिखित चरण शामिल होत हैं :

- सबसे पहले, सभी प्रतिदर्शों में एकल पदों का योग ज्ञात किया जाता है और इसे ‘T’ के रूप में जाना जाता है। लाक्षणिक रूप से,

  $T = \sum X_{ij}$ जहॉं $i = 1,2,3\ldots\ldots$ $j = 1,2,3,\ldots\ldots$

- तद्पश्चात ‘’संशोधन कारक’’ के अर्न्तगत कार्य करते हैं ’ संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n}$
- अगले चरण में, कुल विचरण के वर्गों के योग के लिए हम सभी पद मानों के वर्ग द्वारा और इसका योग लेते हुए और संशोधन कारक को इसमें से घटाते हैं।

योग $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

- तब हम प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण के लिए वर्गों का योग ज्ञात करते हैं। इस मान को प्राप्त करने के लिए, प्रत्येक प्रतिदर्श वर्ग $(T_j)^2$ के वर्ग को प्रतिदर्श में सम्बन्धित पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है, उनका संकलन ज्ञात किया जाता है और संशोधन कारक को इस संकलन से घटाया जाता है।

  SS मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$ जहॉं $j = 1,2,3,\ldots\ldots$

- अगले चरण में, प्रतिदर्शों के बीच के लिए वर्ग के योग को कुल प्रसरण के लिए वर्गों के योग में घटाया जाता है और परिणामित मान प्रतिदर्शों के भीतर के लिए वर्गो के योग को निर्दिष्ट करता है। लाक्षणिक रूप से,

  SS भीतर $= \left\{\sum X_{ij}^2 - \frac{(T)^2}{n}\right\} - \left\{\sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}\right\}$

  $= \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$

तद्पश्चात एक प्रत्यक्ष विधि के प्रयोग के लिए समान तरीके से ANOVA तालिका को निर्मित किया जाता है।

उदाहरण :– 4 तीन प्रजातियों के गेहूॅं 4 भूखंडों में विकास के लिए, प्रसरण के विश्लेषण को स्थापित करें इसके लिए प्रति उत्पादन आंकडा निम्नवत दिया है और कथन की पुष्टि करें कि प्रजातियों में अंतर महत्वपूर्ण है ।

प्रति एकड उत्पादन आंकडा

जमीन का भूखंड		**गेहूॅं की प्रजाति**	
	A	B	C
1	6	5	5
2	7	5	4
3	3	3	3
4	8	7	4

हल :–

हम इस समस्या को सरल मार्ग विधि द्वारा हल करेंगें

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

मान लें कि गेहूॅं की तीन प्रजातियों में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है, शून्य परिकल्पना है।

$T = \sum X_{ij}$

$= 6+7+3+8+5+5+3+7+5+4+3+4 = 60$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(60)^2}{12} = 300$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (7)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (4)^2 - \frac{(60)^2}{12}$

$= 332 - 300 = 32$

SS मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \frac{(24)^2}{4} + \frac{(20)^2}{4} + \frac{(16)^2}{4} - \frac{(60)^2}{12}$

$= 144 + 100 + 64 - 300 = 308 - 300 = 8$

SS भीतर $= \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$

$= 332 - 308 = 24$

ANOVA तालिका निम्नवत है :

प्रसरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F-ratio	5% F-सीमा
प्रतिदर्श के बीच	8	3 – 1= 2	$\frac{8}{2} = 4.00$	$\frac{4.00}{2.67} = 1.5$	F (2,9) = 4.26
प्रतिदर्श के भीतर	24	12 – 3 = 9	$\frac{24}{9} = 2.67$		
योग	32				

F(1.5) का परिकल्पित मान तालिका मान (4.26) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकृत होती है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि गेहूँ की पैदावार में अन्तर प्रजातियों की वजह से अर्थपूर्ण नहीं है और यह केवल घटना के तरीके से हुआ है।

(स) सांकेतिक विधि :– कभी कभी हमें बडे मानों के साथ समझौता करना पडता है। यह गणना की प्रक्रिया को बहुत जटिल बनाता है। इन स्थितियों में, हम सांकेतिक विधि की सहायता ले सकते है। यह एक सरल मार्ग विधि का विस्तार है। इस प्रकार, सांकेतिक विधि का प्रयोग समस्याओं के सरलीकरण के लिये किया जाता है जिसमें बडे मान शामिल होते हैं। बीजांक एक स्थायी द्वारा जोड, घटाना, गुणा या भाग का उल्लेख करता है। यदि सभी n पदों को एक सार्वाजनिक कारक जिसे स्थायी कहा जाता है द्वारा या तो गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है या एक अपरिवर्तनशील को प्रत्येक n पदों में जोडा या घटाया जाता है, तब भी F अनुपात का मान प्रभावित नहीं होता है। इसका अर्थ है कि वास्तविक माप की गणना को परिणामों के अनुगामी सामजस्यों के आवश्यकता बिना सरलीकरण किया जा सकता है। एक बार दिये हुए मान कुछ सार्वजनिक मान के साथ परिवर्तित किये जाते हैं, तब सरल मार्ग विधि के सभी चरणों को F अनुपात को ज्ञात और व्याख्या करने के लिए अंगीकृत किया जा सकता है।

उदाहरण 5:– 5 मोटर कार टायरों के यादृच्छिक प्रतिदर्शों को तीन कम्पनीयों द्वारा निर्मित प्रत्येक के 3 ब्रान्डों से लिया गया है। इन टायरों (मीलवार दौड द्वारा मापने के रूप में) नीचे दिखाया गया है। आंकडों के आधार पर, परीक्षण करें कि 3 ब्रान्ड के टायरों का औसत जीवनकाल समान है या नहीं।

टायरों का जीवनकाल ('000 मील)

ब्रान्ड

A	B	C
35	32	34
34	32	33
34	31	32
33	28	32
34	29	33

हल : $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

शून्य परिकल्पना मानते है कि तीन ब्रान्ड के टायरों के मध्य कोई अन्तर नहीं है।

गणनाओं के सरलीकरण के क्रम में, प्रत्येक अवलोकन को 30 द्वारा कम किया जाता है।

बीजांक आंकडा है :–

A	B	C
5	2	4
4	2	3
4	1	2
3	–2	2
4	–1	3

$T = \sum X_{ij}$

$= 5 + 4 + 4 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 - 2 - 1 + 4 + 3 + 2 + 2 + 3 = 36$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(36)^2}{15} = 86.4$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$=(5)^2+(4)^2+(4)^2+(3)^2+(4)^2+(2)^2+(2)^2+(1)^2+(-2)^2+(-1)^2+(4)^2+(3)^2+(2)^2+(2)^2+(3)^2-86.4$

$= 138 - 86.4 = 51.6$

SS मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \frac{(20)^2}{5} + \frac{(2)^2}{5} + \frac{(14)^2}{5} - 86.4$

$= 80 + 0.8 + 39.2 - 86.4$

$= 120 - 86.4 = 33.6$

SS भीतर $= \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$

$= 138 - 120 = 18$

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

प्रसरण के श्रोत	**SS**	**d.f.**	**MS**	**F-ratio**	**5% F-सीमा**
मध्य प्रतिदर्श	33.6	3 – 1= 2	$\frac{33.6}{2} = 16.8$	$\frac{16.8}{1.5} = 11.2$	F (2,12) = 3.89
भीतर प्रतिदर्श	18.0	15– 3 = 12	$\frac{18}{12} = 1.5$		

योग	51.6				

F(11.2) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.89) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है और हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि टायरों के 3 ब्राण्डों का औसत जीवनकाल एकसमान नहीं है।

2. दो तरफा ANOVA

एकतरफा ANOVA में आपको ध्यान देना चाहिए कि एकल कारक के विभिन्न स्तरों के निरूपण संगठन जो कि प्रयोग में नियंत्रित रहता है। लेकिन वास्तविक जीवन स्थितियों में, एक शोधकर्ता एक ही समय में एक से अधिक कारकों के प्रभाव को जानने में रूचि रख सकते हैं या हम बहुत सी उन स्थितियों का सामना कर सकते हैं जिसमें रूचि का प्रतिक्रिया चर एक से अधिक कारकों द्वारा प्रभावित हो सकता है। उदाहरण के लिए, कृषि सम्बन्धी परिणाम उर्वरक के प्रकार एवं बीज की प्रजाति द्वारा प्रभावित किया जा सकता है, उत्पादन को मशीनों की विभिन्न प्रजातियों एवं मजदूरों के विभिन्न वर्गो द्वारा प्रभावित किया जा सकता है, उत्पाद विक्री को विज्ञापन स्तरें एवं कीमत स्तरों द्वारा प्रभावित किया जा सकता है। इन स्थितियों में, हम दो तरफा ANOVA का प्रयोग करेगें। इस प्रकार, दो तरफा ANOVA तकनीक प्रयोग की जाती है जब आंकडों का वर्गीकरण दो कारकों के आधार पर होता है। हम परीक्षण की रचना इस तरीके से कर सकते है। कि एक ही समय में दो कारकों के प्रभाव का परीक्षण प्रसरण के विश्लेषण से किया जा सके। दो तरफा ANOVA के साथ, एक ही समय, एक से आंकडे के साथ हम परिकल्पना के दो समूहों का परीक्षण कर सकते हैं। इस तकनीक का सबसे बडा लाभ यह है कि यह शोधकर्ता को कारकों के मध्य पारस्परिक प्रभाव के निरीक्षण के लिए समर्थ बनाता है। दो तरफा प्रारूप के प्रत्येक कारक में पुनरावृत्ति मापें हो सकती है या पुनरावृत्ति मापें नहीं हो सकती है।

(अ) अपुनरावृत्ति मानों के साथ :– दो तरफा वर्गीकरण में प्रसरण के विश्लेषण के लिए प्रक्रिया एकतरफा वर्गीकरण की स्थिति से थोडी सी भिन्न होती है। जब हमारे पास पुनरावृत्ति मान नहीं होते हैं, प्रतिदर्शों के भीतर वर्गों के योगों की गणना सीधे नहीं की जा सकती हैं इस अवशेष या विचरण त्रुटि की गणना एक निरूपण के मध्य प्रजातियों के प्रसरण के लिए वर्गों के योग द्वारा एवं दूसरे निरूपण के मध्य प्रजातियों के प्रसरण के लिए वर्गों के योग को कुल प्रसरण के लिए वर्गों के योग में से घटाकर की जाती है। संगणना प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं :–

- जब दोतरफा AVOVA की गणना करते हैं, यदि मान जटिल होते हैं, तब बीजांक प्रारम्भ में किया जा सकता है और तद्पश्चात अगले चरणों का अनुसरण करते हैं।
- सभी प्रतिदर्शो में एकल पदो के मानों या बीजांक मानों का योग किया जाता है और इस संगकलन को T के रूप में जाना जाता है। सांकेतिक रूप में,

  $T = \sum X_{ij}$
- तद्पश्चात निम्नलिखित तरीके से संशोधनकारक ज्ञात किया जाता है

  संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n}$
- अगले चरण में संशोधन कारक को एकल पदो के वर्गों के योग मे से घटाया जाता है और परिणामी मान कुल प्रसरण के लिए वर्गों के विचलनों का कुल योग होता है।

  सांकेतिक रूप में,

  कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

- अब स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए हमें विचलनों के वर्गो का योग ज्ञात करना पडता है। इस मान की गणना के लिए ,विभिन्न स्तम्भों का योग किया जाता है और प्रत्येक स्तम्भ के योग के वर्ग को सम्बन्धित स्तम्भ में पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है और इन मानों को संकलित किया जाता है और तद्ष्चात इस संकलन में से संशोधन कारक को घटाया जाता है, सांकेतिक रूप में,

  स्तम्भों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

- अब स्तरम्भों के मध्य प्रसरण के लिए हमकें विचलनों के वर्गों का योग ज्ञात करना पडता है। इस मान की गणना के लिए, विभिन्न स्तम्भों का योग किया जाता है और प्रत्येक स्तम्भ के योग के वर्ग को सम्बन्धित स्तम्भ में पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है और इन मानों को संकलित किया जाता है और तद्पश्चात इस संकलन में से संशोधन कारक को घटाया जाता है सांकेतिक रूप में,

  स्तम्भों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

- स्तम्भों के मध्य गणना के पश्चात हमें पंक्तियों के मध्य ss की गणना करनी पडती है। पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग की गणना कुल पंक्ति के वर्ग के योग को सम्बन्धित पंक्ति में पदों की संख्या द्वारा विभाजन में से संशोधन कारक को घटाकर की जाती है। सांकेतिक रूप से

  पंक्तियों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

- अगले चरण में, स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों का योग और पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों का योग को कुल प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग मे से घटाकर किया जाता है और परिणामी मान अवशेष या त्रुटि प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग को दर्शाता है। इसे निम्नवत वर्णित किया जा सकता है :–

  अवशेष ss = कुल ss –(स्तम्भों के मध्य ss = पंक्तियों के मध्य ss)

- F अनुपात के मान को प्राप्त करने के लिए, हमें भिन्न वर्गों के योग के लिए अंशों की स्वतन्त्रता ज्ञात होनी चाहिए जिसके लिए निम्न के अन्तर्गत कार्य करना पड सकता है :–

  कुल प्रसरण के लिए $d.f. = (c \cdot r - 1)$

  स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए $d.f. = (c - 1)$

  पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए $d.f. = (r - 1)$

  अवशेष प्रसरण के लिए $d.f. = (c - 1)(r - 1)$

  जहॉ c = स्तम्भों की संख्या r = पंक्तियों की संख्या

- तब एक दो तरफा AVOVA तालिका निम्नलिखित तरीके से निर्मित की जाती है :–

दो तरफा AVOVA के लिए प्रसरण के विश्लेषण की तालिका

विचरण के श्रोत	वर्गों का योग (SS)	स्वतंत्रता का अंश (*d.f.*)	माध्य वर्ग (MS)	F-अनुपात
स्तम्भों के मध्य पंक्तियों के	$\sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$	(c – 1)	$\frac{\text{SS between Columns}}{(c-1)}$	$\frac{\text{MS between columns}}{(\text{MS residual})}$

मध्य	$\sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$	$(r-1)$	$\frac{\text{SS between rows}}{(r-1)}$	$\frac{MS\ between\ rows}{(MS\ residual)}$
अवशेष या त्रुटि	कुल SS – (स्तम्भों के मध्य SS + पंक्तियों के मध्य SS)	$(c-1)(r-1)$	$\frac{\text{SS residual}}{(c-1)(r-1)}$	
कुल	$\sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$	$(c.r-1)$		

आपको यह स्पष्ट होना चाहिए कि अपुनरावृत्ति मानों के साथ दो तरफा ANOVA में अवशेष प्रसरण का आधार F अनुपात होता है। अवशेष प्रसरण के घटित होने के लिए कारण प्रतिचयन की अस्थिरता होती है। महत्व के निर्दिष्ट स्तर पर दिये हुए अंश की स्वतन्त्रता के लिए दोनों F अनुपातों की तुलना उनके समरूपी तालिका मानों के साथ की जाती है। F के आधार पर शून्य परिकल्पनाओं के लिए स्वीकृत एवं अस्वीकृत मानदण्ड समान रहते हैं।

उदाहरण 6:– निम्नलिखित आंकडे इकाईयों की संख्या के प्रतिदिन उत्पादन को प्रदर्शित करते है। जो 3 भिन्न मजदूरों द्वारा 4 भिन्न प्रकार की मशीनों से निकले है। नीचे दिये हुए आंकडों में दो तरफा ANOVA को प्रदर्शित करें।

मजदूर	**मशीन के प्रकार**			
	A	***B***	***C***	***D***
I	38	40	41	39
II	45	42	49	36
III	40	38	42	42

(सांकेतिक विधि का प्रयोग दिये हुए संख्याओं को 40 से घटाकर करें)

हलः हम शून्य परिकल्पना लेते है कि उत्पादकता माध्य में मशीन प्रकार एवं विभिन्न मजदूरों के सन्दर्भ में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है। प्रत्येक मान को 40 में से घटाकर कर, हम प्राप्त करते हैं :–

मजदूर		**मशीन प्रकार**			**कुल**
	A	B	C	D	
I	–2	0	+1	–1	–2
II	+5	+2	+9	–4	+12
III	0	–2	+2	+2	+2
कुल	***+3***	***0***	***+12***	***–3***	***+12***

उपरोक्त तालिका से 'T' स्पष्ट है कि या $\sum X_{ij} = 12$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(12)^2}{12} = 12$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (-2)^2 + (5)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (1)^2 + (9)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + (2)^2 - 12$

$= 4 + 25 + 0 + 0 + 4 + 4 + 1 + 81 + 4 + 1 + 16 + 4 - 12 = 144 - 12 = 132$

मशीनों के मध्य वर्गों का योग $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$$= \frac{(3)^2}{3} + \frac{(0)^2}{3} + \frac{(12)^2}{3} + \frac{(-3)^2}{3} - 12$$

$$= 3 + 0 + 48 + 3 - 12 = 42$$

मजदूरों के मध्य वर्गों का योग $= \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

$$= \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(12)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - 12$$

$$= 1 + 36 + 1 - 12 = 26$$

SS अवशेष = कुल SS – (मशीनों के मध्य SS + मजदूरों के मध्य SS)

= 132 – (42 + 26) = 132 – 68 = 64

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

विचरण के श्रोत	**SS**	**d.f.**	**MS**	**F-**अनुपात	**5% F-**सीमा
मशीनों के मध्य	42	4– 1= 3	$\frac{42}{3} = 14$	$\frac{14}{10.67} = 1.31$	F (3,6) = 4.76
मजदूरों के मध्य	26	3– 1 =2	$\frac{26}{2} = 13$	$\frac{13}{10.67} = 1.22$	F(2,6) = 5.14
अवशेष	64	(4 –1)(3–1) =6	$\frac{64}{6} = 10.67$		
कुल	132	(4×3 – 1) =11			

चूँकि F अनुपातों (1.31,1.22) दोनों परिकल्पित मान उनके तालिका मानों (4.76, 5.14) से कम है इसलिए, दोनों शून्य परिकल्पनाऐं स्वीकार है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उत्पादकता माध्यों मे मशीन प्रकार के साथ साथ मजदूरों के सन्दर्भ में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है।

(ब) पुनरावृत्ति मानों के साथ :– कदाचित हमें दो तरफा प्रारूप की कुछ स्थितियों मे सामना करना पढ सकता है जहॉ सभी वर्गों के लिए पुनरावृत्ति मापें होती है। दो तरफा प्ररूप के अपुनरावृत्ति मानों के साथ और दो तरफा पुनरावृत्ति मानों की संगणना प्रक्रिया मे केवल एक अन्तर होता है । कुल SS स्तम्भों के मध्य SS और पंक्तियों के मध्य SS की गणना समान तरीके से की जाती है। पुनरावृत्ति मानों की स्थिति में, हमें अन्योन्यक्रिया विचरण की गणना करनी पडती है। दो तरफा विश्लेषण में अन्योन्यक्रिया का तात्पर्य यह है कि दो निरूपण तन्त्र नहीं है और एक कारक का विशेष निरूपण का प्रभाव दूसरे कारक के स्तर पर आश्रित रहता है और विपरीत क्रम में प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग की गणना एक तरफा ANOVA की स्थिति के रूप में समान तरीके से की जाती है। अन्योन्य किग्रा विचरण की गणना शेष बचे वर्गो के योग के पर एवं बचे शेष स्वतन्त्रता के अंशों के आधार पर की जाती है।

एक अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया प्रभाव इंगित करता है कि एक कारक के लिए निरूपण का प्रभाव दूसरे कारक द्वारा दृढता से प्रभावित हुआ है।

ANOVA तालिका को सामान्य तरीके से तैयार किया जाता है।

उदाहरण 7 :– क्या अन्योन्यक्रिया विचरण निम्नलिखित सूचना सम्बन्धित मील संख्या आधारित विभिन्न ब्रान्डों की गैसोलीन एवं कारों की स्थिति में अर्थपूर्ण है :–

गैसोलीन के ब्रान्ड

कार	*X*	*Y*	*Z*
A	12	10	9
	12	9	11
B	12	7	10
	11	8	11
C	10	11	8
	11	11	7

हल :– H_0 कारों एवं गैसोलीन ब्रान्डों के मध्य कोई अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया नहीं है।

$T = \sum X_{ij}$

$= (12 + 12 + 10 + 9 + 9 + 11) + (12 + 11 + 7 + 8 + 10 + 11) + (10 + 11 + 11 + 11 + 8 + 7)$

$= 63 + 59 + 58 = 180$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(180)^2}{18} = 1800$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (12)^2 + (12)^2 + (10)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (11)^2 + (12)^2 + (11)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (10)^2 + (11)^2 + (10)^2 + (11)^2 + (11)^2 + (11)^2 + (8)^2 + (7)^2 - 1800$

$= 1846 - 1800 = 46$

SS स्तम्भों के मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \left\{\left(\frac{68 \times 68}{6}\right) + \left(\frac{56 \times 56}{6}\right) + \left(\frac{56 \times 56}{6}\right)\right\} - 1800$

$= 770.67 + 522.67 + 522.67 - 1800 = 1816.01 - 1800 = 16.01$

SS पंक्तियों के मध्य $= \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \left\{\left(\frac{63 \times 63}{6}\right) + \left(\frac{59 \times 59}{6}\right) + \left(\frac{58 \times 58}{6}\right)\right\} - 1800$

$= 661.5 + 580.17 + 560.67 - 1800 = 1802.34 - 1800 = 2.34$

प्रतिदर्शो के भीतर SS की गणना वर्ग के भीतर इसके माध्य के साथ प्रत्येक पद द्वारा घटाकर करते हैं। [उदाहरण के लिए A & X → (12 +12)/2 = 12; A & Y→(10 + 9)/2 = 9.5 और इसी प्रकार]

SS भीतर =

$(12 - 12)^2 + (12 - 12)^2 + (12 - 11.5)^2 + (11 - 11.5)^2 + (10 - 10.5)^2 + (11 - 10.5)^2 + (10 - 9.5)^2 + (9 - 9.5)^2 + (7 - 7.5)^2 + (8 - 7.5)^2 + (11 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (9 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (10 - 10.5)^2 + (11 - 10.5)^2 + (8 - 7.5)^2 + (7 - 7.5)^2$

$= 0 + 0 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = 5$

SS अन्योन्यक्रिया = कुल SS – (SS स्तम्भ + SS पंक्ति + SS भीतर)

$$= 46 – (16.01 + 2.34 + 5) = 46 – 23.35 = 22.65$$

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

विचरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F-अनुपात	5% F-सीमा
स्तम्भों के मध्य	16.01	3– 1= 2	$\frac{16.01}{2} = 8$	$\frac{8}{0.56} = 14.28$	F (2,9) = 4.26
पंक्तियों के मध्य	2.34	3– 1 =2	$\frac{2.34}{2} = 1.17$	$\frac{1.17}{0.56} = 2.09$	F (2,9) = 4.26
प्रतिदर्श के भीतर	5.00	18 – 9 = 9	$\frac{5}{9} = 0.56$		
अन्योन्यक्रिया	22.65	17–(2+2+9) =4	$\frac{22.65}{4} = 5.66$	$\frac{5.66}{0.56} = 10.1$	F(4,9) = 3.63
कुल	46	18-1=17			

अन्योन्यक्रिया (10.1) के लिए F अनुपात का परिकल्पित मान इसके तालिका मान (3.63) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अभिप्राय है कि कारों एवं गैसोलीन के ब्रान्डों के मध्य अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया है, इसलिए स्तम्भ प्रभाव एवं पंक्ति प्रभाव के परिणामों का कोई उपयोग नहीं हैं।

(स) रेखाचित्रीय विधि :– यदि आपको दो तरफा ANOVA के पुनरावृत्ति मानों के साथ आवश्यक समस्याओं के साथ व्यवहार करन पडता है, तब आपके पास रेखाचित्रीय विधि का भी विकल्प होता है। इस प्रकार, दो तरफा प्रारूप में , रेखाचित्रीय विधि विभिन्न कारकों के मध्य अन्योन्यक्रिया का भी अध्ययन किया जा सकता है। रेखाचित्रीय विधि में, एक कारक को x अक्ष में रेखांकित और दूसरे कारक को y अक्ष में रेखांकित किया जाता है। सभी प्रतिदर्शों के लिए माध्यों को बिदुरेख में रेखांकित किया जाता है और पृथक रेखाओं द्वारा तर्कसंगत किया जाता है। यदि प्रत्येक प्रतिदर्श पदों को जोडने वाली रेखाऐं एक दूसरे के विरूद्ध नहीं होती हे, तब इसका सूचक अन्योन्यक्रिया का नहीं हाता है, जबकि रेखाऐं एक दूसरे विपरीत (विरूद्ध) होती है इसका अभिप्राय कारकों के मध्य एक अन्योन्यक्रिया का होना है। प्रत्येक प्रतिदर्श पदों से सम्बन्धित रेखाओं के रेखाचित्रीय निरूपण अन्योन्यक्रिया के प्रकार के बारे में इंगित करता है। उदाहरण के लिए, अन्योन्यक्रिया क्रमवाचक प्रकार की हो सकती है जहॉ एक कारक से सम्बन्धित प्रभाव का श्रेणी क्रम एक समान रहता है। दूसरे कारक के परिवर्तन से सम्बन्धित प्रभावों का श्रेणी क्रम हो तो अन्योन्यक्रिया क्रमवार प्रकार की नहीं होगी। यह गैर क्रमवार अन्योन्यक्रिया गैर विपरीत शेष या विपरीत शेष प्रकार की हो सकती है।

22.5 सारांश

इस इकाई में, आपने F अनुपात और ANOVA के बारे मे अध्ययन किया। F परीक्षण दो प्रसरणों के अनुपात पर आधारित हेाता है। इसका प्रयोग यह निर्धारण करने में किया जाता है कि क्या दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों को समान प्रसरण के सामान्य समग्रों से लिया गया है। F परीक्षण सामान्य स्थिति, समरूपता, यादृच्छिकता, त्रुटि की स्वतन्त्रता की अवधारणा पर आधारित होता है। ANOVA कारणों के वर्ग की वजह से विचरण के पृथककरण में से दूसरे वर्गो की वजह से विचरण की एक सांख्यिकीय तकनीक के लिए हैं विशेष रूप से इसे उस परीक्षण के लिए प्रारूपित किया जाता है जहॉ दो से अधिक मात्रात्मक (परिमाणात्मक) समग्रों के माध्य समान होते हैं। यदि आंकडे को केवल एक कारक के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है तब एक तरफा ANOVA प्रयोग होता है जबकि यदि आंकडे

को दो करकों के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है तब दो तरफा ANOVA प्रयुक्त होता है। एक तरफा ANOVA में, F अनुपात की गणना माध्य वर्ग के माध्य और माध्य वर्ग के भीतर अनुपात के रूप में की जाती है। शून्य परिकल्पना की स्वीकार्यता और अस्वीकारिता के सम्बन्ध मे निर्णय F के परिकल्पित एक तालिका मान की तुलना के आधार पर लिया जाता है। दो तरफा ANOVA में एक साथ एक कारक से अधिक के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। अपुनरावृत्ति मानों की दशा में, दो F अनुपातों की गणना की जाती है। पहली स्तम्भों के मध्य और दूसरी पंक्तियों के मध्य पुनरावृत्ति मानों की दशा में, उपरोक्त वर्णित दो F अनुपातों के अतिरिक्त, दूसरा F अनुपात भी अन्योन्यक्रिया विचरण की गणना के लिए लिया जाता है।

एकतरफा और दो तरफा ANOVA के लिए स्वीकृत और अस्वीकृत मानदण्ड एक समान रहते हैं। जटिल आंकडों की दशा में, आंकडों के सरलीकरण के लिए सांकेति विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

22.6 शब्दावली

- AVOVA : प्रसारण का विश्लेषण ।
- SS : प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गो का योग ।
- MS : औसत (माध्य) वर्ग।
- **अन्योन्यक्रिया प्रभाव** : एक कारक दूसरे कारक के लिए उपचार का प्रभाव ।

22.7 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. ''प्रसरण'' शब्द सबसे पहले सांख्यिकीविद् ————————द्वारा प्रयोग किया गया था।
2. ANOVA तकनीक प्रारम्भ में ———————अनुसंधान में प्रयोग की गई थी।
3. प्रतिदर्श के भीतर माध्य वर्ग गणना के लिए स्वतन्त्रता के अंश में सम्मिलित ——————घटाने पर ———————।
4. ————————विधि ANOVA तकनीक में गणनात्मक कार्य सरलीकरण के लिए प्रयोग होती है।
5. आलेखी विधि के अन्तर्गत ———————कारकों के मध्य रेखाओं को पार करने द्वारा इंगित किया जाता है।

(ब) सत्य या असत्य

1. F- परीक्षण के अनुप्रयोग के लिए वर्गों की समरूपता एक आवश्यक अवधारणा होती है। (सत्य/असत्य)
2. F- परीक्षण दो मानक विचलनों के अनुपात पर आधारित है। (सत्य/असत्य)
3. प्रसरण के विश्लेषण परीक्षण का उद्देश्य दो प्रतिदर्श प्रसरणों के मध्य अन्तर के महत्व का परीक्षण करना होता है। (सत्य/असत्य)
4. द्विमार्गी ANOVA पुनरावृत्ति मानों के साथ न होने पर की स्थिति में अन्योन्यक्रिया चिरण की मणना की जाती है। (सत्य/असत्य)
5. $(n-k)$ अवशेष प्रसारण के लिए स्वतन्त्रता के अंश को इंगित करता है। (सत्य/असत्य)

22.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ)

1. आर0ए0 फिशर 2. भूमि विषयक 3. कुल प्रतिदर्श आकार प्रतिदर्शों की संख्या

4. सांकेतिक शब्दों में बदलना 5. अन्योन्यक्रिया

(ब)

1. सत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. असत्य

22.9 स्वपरख प्रश्न

1. F- परीक्षण का उद्देश्य क्या होता है ?
2. शब्द माध्य वर्ग को परिभाषित करें ?
3. संशोधन कारक का सूत्र लिखें ?
4. F- परीक्षण की अवधारणाऐं एवं तकनीक का वर्णन करें ?
5. प्रसरण के विश्लेषण का अर्थ समझाइयें। द्विमार्गी वर्गीकरण के लिए ANOVA की तकनीक का संक्षेप में वर्णन करें ?
6. दो यादृच्छिक प्रतिदर्शों को दो सामान्य समग्रों में से लिया गया है :

प्रतिदर्श 1	75	68	65	70	84	66	55
प्रतिदर्श 2	42	44	56	52	46		

5 प्रतिशत महत्व के स्तर में प्रसरण अनुपात का प्रयोग करते हुए परीक्षण करें कि दो समग्रों में समान प्रसरण है। $(F = 2.37, H_0$: स्वीकार्य)

7. 8 अवलोकनों के एक प्रतिदर्श में, माध्य में से पदो के विचलनों के वर्गों का 84.4 था। 10 अवलोकनों के एक दूसरे प्रतिदर्श में ये मान 102.6 पाया गया था। 5 प्रतिशत स्तर पर परीक्षण करें कि अन्तर महत्वपूर्ण है। आपको 5 प्रतिशत का स्तर दिया गया है, $v_1 = 7$ एवं $v_2 = 9$ स्वतन्त्रता की श्रेणीयों के लिए F का समीक्षात्मक मान 3.29 है और $v_1 = 8$ एवं $v_2 = 10$ स्वतन्त्रता श्रेणीयों के लिए यह मान 3.07 है। $(F = 1.06, H_0$: स्वीकार्य)
8. सामान्य समग्र में से समान प्रसरणों के साथ नीचे तीन प्रतिदर्श प्राप्त किये गये। परिकल्पना परीक्षण करें कि प्रतिदर्श माध्य एक समान हैः

8	7	12
10	5	9
7	10	13
14	9	12
11	9	14

$v_1 = 2$ एवं $v_2 = 12$ के लिए 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर F का तालिका मान 3.88 है। $(F = 4, H_0$: अस्वीकार्य)

9. एक कम्पनी यह जानने के लिए इच्छुक है कि क्या तीन बिक्रीकर्ता एक समान प्रर्दशन कर रहे हैं। तीन बिक्रीकर्ताओं का साप्ताहिक बिक्री अभिलेख है।

A(Rs)	B (Rs)	C (Rs)
300	600	700
400	300	300
300	300	400
500	400	600
0	..	500

10. तीन प्रयोग शक्ति के प्रतिदर्श के संतुष्टि आर्द्रता का निर्धारण करते हैं, प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक 4 प्रेषणों में से एक प्रतिदर्श लेता है। परिणाम निम्नवत है।

प्रयोग	प्रेषण

	I	II	III	IV
A	9	10	9	10
B	12	11	9	11
C	11	12	10	12

इन आकडों से प्रसरण का विश्लेषण निर्धारित करें और वर्णन करें कि वन्या प्रेषणों के मध्य या प्रयोगों के मध्य कोई महत्वपूर्ण अन्तर है प्रेषणों के मध्य $F = 4.02, H_0$स्वीकृत

प्रयोगों के मध्य $F = 6.91, H_0$अस्वीकृत

11. निम्नलिखित तीन ड्रगों के से सम्बन्धित सूचना के आधार पर ANOVA तालिका का निर्माण करें और यह परीक्षण करें कि ड्रगों की प्रभावशीलता तीन विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों रक्तचाप को कम करती है।

व्यक्ति का वर्ग	ड्रग		
	X	Y	Z
A	14	10	11
	15	9	11
B	12	7	10
	11	8	11
C	10	11	8
	11	11	7

1. क्या ड्रग्स भिन्न प्रकार से प्रतिक्रिया करते हैं ?
2. क्या भिन्न वर्ग के व्यक्ति भिन्न प्रकार से प्रभावित हैं ?
3. क्या अन्योन्यक्रिया पद महत्वपूर्ण है ? $(F = 36.9, 19.1, 18.78)$ सभी तीन H_0 अस्वीकार है

22.10 संदर्भ पुस्तकें

1. गुप्ता एस0 पी0 , ‘‘सांख्यिकीय विधियॉ सुल्तान चन्द एवं सन्स, नई दिल्ली
2. दास एन0जी0 सांख्यिकीय विधियॉ टाटा मेग्रो हिल, नई दिल्ली
3. बाजपेई नवल व्यवसाय सांख्यिकीय पियरसन

इकाई 23 कंप्यूटर का परिचय
(Introduction of Computer)

23.1 प्रस्तावना (Introduction)
23.2 उद्देश्य (Objectives)
23.3 कंप्यूटर का इतिहास (History of Computers)
23.4 कंप्यूटर के बुनियादी अवयव (Basic Components)
23.5 कंप्यूटर की कार्यपद्धति (Working Process)
23.6 कंप्यूटर लैंग्वेज (Computer Languages)
23.7 उपसंहार (The Conclusion)
23.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)
23.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theoretical Questions)

23.1 प्रस्तावना (Introduction)

समाजशास्त्र और कंप्यूटर, पहली नजर में ये दोनों शब्द एक-दूसरे से जुड़े हुए प्रतीत नहीं होते हैं। किन्तु वैज्ञानिक प्रगति के दौर में कंप्यूटर जिस तरह मानव जीवन का अभिन्न अंग बनकर रह गया है, उससे सामाजिक अभिरचना को जानने-समझने में भी कई मायनों में मदद मिली है। शिक्षा हो, स्वास्थ्य हो, सुरक्षा हो, बैंकिंग हो या कोई भी अन्य क्षेत्र, मानव जीवन का शायद ही कोई पहलू आज कंप्यूटर से अछूता रह गया हो। वस्तुतः कंप्यूटर आज मानव जीवन के दैनन्दिन कार्यों की सबसे बड़ा सहायक मशीन बन गया है। यही वजह है कि सामाजिक शोध कार्यों में भी कंप्यूटर और कंप्यूटर एप्लीकेशन का इस्तेमाल आज आवश्यक है।

23.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ पाएंगे कि

- मानव जीवन के विकास के साथ किस तरह गणना उपकरण विकसित हुए
- कंप्यूटर क्या है, किस तरह इस बहुउपयोगी मशीन का विकास हुआ
- कंप्यूटर किस तरह काम करता है और इसके प्रमुख अवयव क्या हैं
- कंप्यूटर एप्लीकेशन क्या हैं और इनका महत्व क्या है

23.3 कंप्यूटर का इतिहास (History of Computers)

विकास के लंबे अनुक्रम में मनुष्य ने जीवन के नये पहलुओं की खोज अपने अनुभवों के आधार पर की। इन्हीं खोजों में शामिल थी गणनाएं। यूं तो मानव मस्तिष्क स्वयं में सूचनाओं को सुरक्षित रखने का अथाह भंडार है, किन्तु जब प्रश्न गणनाओं और गणनाओं में भी त्वरित गणनाओं का आता है तो मस्तिष्क कुछ पीछे रह जाता है। शायद यही वह कारण रहा होगा, जिसने प्राचीन काल से ही मनुष्य को ऐसे तरीके ईजाद करने के लिए प्रेरित किया हो, जो गणनाओं को चुटकियों में हल कर सकें। प्राचीन गणना पद्धतियों अबेकस से लेकर कैलकुलेटर और फिर कंप्यूटर तक की यात्रा भी इसी प्रेरणा का परिणाम है।

- कंप्यूटर क्या है (What is a Computer)

कंप्यूटर शब्द की उत्पत्ति अंग्रेजी शब्द कंप्यूट (Compute) से हुई है, जिसका अर्थ गणना करना है। यही वजह है कि हिन्दी में इस उपकरण को गणक या संगणक भी कहा जाता है। अपने विकास की शुरूआत में कंप्यूटर का इस्तेमाल मुख्यतः जटिल गणनाओं में ही किया जाता रहा, लेकिन कालान्तर में ज्यों-ज्यों मानवीय आवश्यकताएं बढ़ती गई, कंप्यूटर का स्वरूप भी बहुआयामी (Multitasking) होता चला गया। आज हम कंप्यूटर पर गाने सुन सकते हैं, वीडियो देख सकते हैं, इसके जरिये इंटरनेट पर दुनियाभर की खबरें एक चुटकी में हासिल कर सकते हैं, चिकित्सकीय सुविधाएं हासिल कर सकते हैं, शिक्षा प्राप्त कर सकते हैं और हर वो काम कर सकते हैं जो हम चाहते हैं। यानी कंप्यूटर वह मशीन है, जो वर्तमान दौर में हमारे जीवन को सरल और अधिक सक्षम बनाती है।

- कंप्यूटर का विकास (Development of Computers)

यद्यपि मानव सभ्यता के विकास के साथ ही गणनाओं के भी प्रमाण मिलते रहे हैं। हजारों वर्ष पहले अंगुलियों की मदद से गणनाओं की जानकारी मध्यपूर्व एशिया, यूरोप की कई सभ्यताओं में मिलती है, लेकिन उपकरणों की मदद से कंप्यूटर के विकास की य़ात्रा को जानने-समझने के लिए हमें करीब तीन हजार साल पीछे लौटना होगा। मानव जीवन में गणनाओं का विशेष महत्व रहा है, लेकिन यह पहले ही स्पष्ट हो चुका है कि मानव मस्तिष्क जटिल गणनाओं का त्वरित हल निकाल पाने में सक्षम नहीं है। ऐसे में गणनाओं

के लिए किसी उपकरण की आवश्यकता महसूस की जाने लगी। ऐतिहासिक साक्ष्यों के अनुसार चीनी वैज्ञानिकों ने करीब तीन हजार साल पूर्व पहला ऐसा उपकरण बनाया, जो गणनाओं को मानव के लिए सुगम और सरल बनाने में सफल रहा। यह उपकरण था अबेकस (Abacus), इसे हम निम्न चित्र के जरिये जान सकेंगे। अबेकस में लकड़ी या लोहे के फ्रेम में कुछ लोहे की छड़ें होती हैं, जिनमें लकड़ी की बनी गोलियां लगाई जाती थीं। इन गोलियों को इसे इस्तेमाल करने वाला व्यक्ति उपर-नीचे करके आसानी से गणनाएं कर सकता था। आज भी नन्हे स्कूली बच्चों को गणनाओं का प्रारंभिक पाठ पढ़ाने में अबेकस की मदद ली जाती है। हालांकि, इसकी मदद से सिर्फ छोटी गणनाएं ही कर पाना संभव है। फिर भी यही वह उपकरण था, जो मौजूदा कंप्यूटर के आविष्कार की बुनियाद बना। इस लिहाज से अबेकस को पहला कंप्यूटर का दर्जा दिया जाता है।

(प्राचीन अबेकस, जिसकी मदद से गणनाएं की जाती थीं)

अबेकस के बाद गणनाओं के लिए एक नया उपकरण ईजाद हुआ सन 1617 में। स्कॉटलैंड के गणितज्ञ नेपियर ने एक गणितीय उपकरण बनाया, जो दिखने में अबेकस की तरह ही था। अंतर सिर्फ यह था कि इसमें गोलियों के बजाय छड़ें ही फ्रेम में लगी होती थीं। खासियत यह थी कि इन छड़ों पर अंक लिखे होते थे, जिनकी मदद से गणनाएं की जा सकती थीं। इसके कुछ ही समय बाद 1642 में एक और नये उपकरण का आविष्कार अपने दौर के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ ब्लेज पास्कल ने किया। इस उपकरण का नाम पास्कल के नाम पर ही पास्कलाइन (Pascaline)रखा गया। यह अबेकस और नेपियर बोन से अधिक तेजी से गणना करने में सक्षम था। हालांकि, अब भी गुणा और भाग की गणनाएं करना संभव नहीं हो सका था। ऐसे में सन 1671 में जर्मन वैज्ञानिक गडॉफ्रिट लेन्ज ने पास्कलाइन को ही परिष्कृत (Modified) किया, जिसका परिणाम लेन्ज कैल्कुलेटर के रूप में सामने आया। इसकी खासियत यह थी कि इसमें जोड़ और घटाने के अलावा गुणा-भाग जैसी जटिल गणनाएं भी आसानी से कर पाना संभव हुआ।

हालांकि, समय के साथ जिस तेजी से मानव सभ्यताएं विकसित होती गईं और हर रोज नई खोजों के लिए जटिलतम गणनाएं सामने आती रहीं, अबेकस की तरह पास्कलाइन भी अनुपयोगी लगने लगा। ऐसे में सन

सर चार्ल्स बैबेज एनालिटिकल इंजन (Analytical Engine) नाम का उपकरण सामने लाए। यह कहीं अधिक तेजी से और त्रुटिरहित गणनाएं करने में सक्षम था।
सबसे बड़ी बात यह थी कि इस मशीन में गणनाओं को सुरक्षित भी रखा जा सकता था। स्टोरेज के लिए इसमें पंचकार्ड का इस्तेमाल किया जाता था। यह 25 हजार छोटे पुर्जों से बना करीब 15 टन वजनी और आठ फीट उंचा उपकरण था। भारीभरकम स्वरूप की वजह से हर किसी के लिए इसका इस्तेमाल करना न तो सरल था, न ही संभव, लेकिन एनालिटिकल इंजन ही वह रास्ता बना, जो आगे चलकर कंप्यूटर पर खत्म हुआ। यही कारण है कि सर चार्ल्स बैबेज को ही कंप्यूटर के जनक के तौर पर जाना जाता है। कालान्तर में सर बैबेज के ही डिजाइन किए उपकरण में निरन्तर सुधार किए जाते रहे और आज का कंप्यूटर विकसित होता गया। अब भी कंप्यूटर की दुनिया में लगातार खोज और सुधार जारी हैं।

- कंप्यूटर की पीढ़ियां (Generations of Computers)

सर चार्ल्स बैबेज ने जो एनालिटिकल इंजन पेश किया था, वह गणनाओं में खासा सहायक साबित हुआ, लेकिन चूंकि समय के साथ परिवर्तन आवश्यक है, निरन्तर गणनाओं का दायरा और सूचनाओं को सुरक्षित रखने की जरूरत महसूस की जाने लगी। सर बैबेज के एनालिटिकल इंजन से आधुनिक कंप्यूटर के विकास का सफर शुरू हुआ। इस लिहाज से सामान्यतः कंप्यूटर के विकास को पीढ़ियों में भी बांटकर देखा जाता है। पहली पीढ़ी से लेकर आज के दौर के कंप्यूटर यानी पांचवीं पीढ़ी तक।

- पहली पीढ़ी (First Generation)

सन 1946 में दुनिया का पहला इलेक्ट्रॉनिक कंप्यूटर अस्तित्व में आया। दो वैज्ञानिकों जेपी एकर्ट और जेडब्ल्यू मॉशी इस कंप्यूटर के आविष्कर्ता थे। दोनों ने अपने इस कंप्यूटर को नाम दिया ENIAC (Electronic Numerical Integrated and Calculator) लेकिन यह कंप्यूटर बहुत अधिक भारी था। उस वक्त इस कंप्यूटर का वनज करीब 30 टन था। दोनों वैज्ञानिकों ने इस कंप्यूटर में आंकड़ों के संग्रहण के लिए वैक्यूम ट्यूबों का इस्तेमाल किया, लेकिन कमी यह थी कि वैक्यूम ट्यूब की कार्यक्षमता बहुत अधिक नहीं थी। इसके अलावा इस कंप्यूटर को ठंडा रखने के लिए काफी बड़े कूलिंग सिस्टम (Cooling System) की भी जरूरत पड़ती थी। पहली पीढ़ी के कंप्यूटर के कालखंड को 1946 से 1959 तक बांटकर देखा जा सकता है।

(पहली पीढ़ी का कंप्यूटर एनिआक)

- दूसरी पीढ़ी (Second Generation)

समय के साथ आते गए बदलावों के फलस्वरूप दूसरी पीढ़ी के कंप्यूटर अस्तित्व में आए। इस पीढ़ी के कंप्यूटरों का कालखंड 1959 से 1964 रहा। इस पीढ़ी के कंप्यूटरों की खासियत यह थी कि इसमें आंकड़ों के संग्रहण के लिए भारीभरकम वैक्यूम ट्यूबों के स्थान पर ट्रांजिस्टर (Transistors) का उपयोग किया गया। ट्रांजिस्टर वैक्यूम ट्यूब के मुकाबले आकार में भी काफी छोटे थे, लिहाजा कंप्यूटर का स्वरूप और वजन पूर्ववर्ती पीढ़ी के सापेक्ष काफी कम हो गया। दूसरी ओर, ट्रांजिस्टर की गणनात्मक कार्यक्षमता और आंकड़ों को सुरक्षित रखने की क्षमता भी एनिआक के मुकाबले काफी बेहतर थी।

- तीसरी पीढ़ी (Third Generations)

सन 1964 में तीसरी पीढ़ी के कंप्यूटरों की खोज हुई। इस पीढ़ी के कंप्यूटरों की विशेषता यह थी कि इसमें इंटीग्रेटेड सर्किट (Integrated Circuit: IC) का इस्तेमाल कंप्यूटर के प्रमुख इलेक्ट्रॉनिक घटक के रूप में किया गया था। आईसी की खोज और कंप्यूटर में इसका इस्तेमाल आगे चलकर माइक्रोइलेक्ट्रॉनिक्स (Micro Electronics) का जरिया बना। वैज्ञानिक टीएस बिल्की की खोज आईसी की सबसे बड़ी खासियत इसका बेहद छोटा आकार, लेकिन संग्रहण की अकूत क्षमता थी। इसके अलावा इसमें पहले के मुकाबले कई गुना अधिक और कहीं ज्यादा तेजी से गणनाएं करने की क्षमता भी थी। तीसरी पीढ़ी के कंप्यूटरों का कालखंड (Time Period) 1965 से 1971 रहा।

- चौथी पीढ़ी (Fourth Generation)

चौथी पीढ़ी के कंप्यूटर वह हैं, जिनका इस्तेमाल हम आज करते हैं। इस पीढ़ी के कंप्यूटरों की खासियत इनमें इस्तेमाल किया जाने वाला माइक्रो प्रोसेसर (Micro Processor) है। 1971 में अमेरिका के वैज्ञानिक टेड हॉफ (Tedd Hoff) को माइक्रो प्रोसेसर की ईजाद का श्रेय जाता है। टेड तब कंप्यूटर निर्माता कंपनी इनटेल

में काम करते थे और उन्होंने अपने माइक्रोप्रोसेसर को इनटेल-4004 नाम दिया। माइक्रोप्रोसेसर दरअसल एक सिंगल चिप है, जिसमें आंकड़ों को सुरक्षित रखा जा सकता है। इसके इस्तेमाल से कंप्यूटरों का न सिर्फ आकार छोटा हुआ, बल्कि इनकी कार्यक्षमता भी बढ़ी। इस पीढ़ी का कालखंड 1971 से 1980 रहा।

पांचवीं पीढ़ी (Fifth Generation)

1980 से आज के दौर तक इस्तेमाल किए जाने वाले कंप्यूटरों को पांचवीं पीढ़ी में शामिल किया जाता रहा है। कुछ विद्वान आज के कंप्यूटरों को भी चैथी पीढ़ी का ही कंप्यूटर मानते हैं तो कुछ ने इन्हें पांचवीं पीढ़ी में रखा है। कंप्यूटरों को चैथी पीढ़ी का ही मानने की बड़ी वजह यह है कि मौजूदा कंप्यूटरों का मूलाधार माइक्रोप्रोसेसर ही है, लेकिन इन्हें पांचवीं पीढ़ी में रखने वाले यह मानते हैं कि माइक्रोप्रोसेसर की क्षमताओं और आकार में भी लगातार बदलाव आते रहे हैं।

इसके अलावा प्रोसेसर अब सिर्फ कंप्यूटर तक ही सीमित नहीं रह गया है, बल्कि मोबाइल स्मार्टफोन के जरिये ये मनुष्य के हाथों में समाहित हो जाने वाला उपकरण बन चुका है। कंप्यूटर की भावी पीढ़ी की बात करें तो वैज्ञानिक इस तरह के कंप्यूटर बनाने की दिशा में प्रयास कर रहे हैं जो कृत्रिम बुद्धि (Artificial Intelligence) से लेस हो। इस दिशा में निरन्तर शोध किए जा रहे हैं। रोबोट को कुछ हद तक इस श्रेणी में रखा जा सकता है, लेकिन वह भी उतने ही काम करता है, जितने का उसे निर्देश दिया जाता है।

वैज्ञानिकों की सोच यह है कि ऐसे कंप्यूटर बनाए जाएं जो आवश्यकता के अनुरूप स्वतः निर्णय ले सके और आंकड़ों-सूचनाओं का इस्तेमाल कर खुद ही अपेक्षित परिणाम दे सके। हालांकि, यह बिन्दु इस लिहाज से विवाद का विषय भी बनता रहा है कि यदि कंप्यूटर स्वतः बुद्धि-विवेक से काम करने लगेगा तो मनुष्य उस पर नियंत्रण कैसे रख सकेगा। और यदि अनहोनीवश कृत्रिम बुद्धि-विवेकयुक्त कंप्यूटर नकारात्मक दिशा में चलने लगा तो यह विनाशकारी साबित हो सकता है।

- कंप्यूटर के प्रकार (Types of Computers)

कंप्यूटर का मुख्य कार्य उन आंकड़ों को सुरक्षित रखना है, जो इसे इस्तेमाल करने वाला व्यक्ति (user) कंप्यूटर को उपलब्ध कराता है। कंप्यूटर उपयोगकर्ता के निर्देशों के आधार पर इन आंकड़ों का उपयोग कर परिणाम देता है। कार्यक्षमता के आधार पर कंप्यूटर को इन श्रेणियों में बांटा गया हैः सुपर कंप्यूटर, मेनफ्रेम कंप्यूटर, मिनी कंप्यूटर और माइक्रो कंप्यूटर (Micro computer)। इन सभी श्रेणियों पर नजर डालें तो सुपर कंप्यूटर सर्वोच्च श्रेणी का माना जाता है, जबकि माइक्रो कंप्यूटर सबसे छोटी। आइए अब हर श्रेणी को कुछ विस्तार से समझते हैं।

- सुपर कंप्यूटर (Super Computers)

सुपर कंप्यूटर, कंप्यूटरों की लंबी श्रृंखला में सबसे तेज गति से काम करने वाले कंप्यूटर हैं। कल्पनातीत डाटा को यह न्यूनतम समय में सूचनाओं में बदलने में सक्षम हैं। इनका इस्तेमाल सामान्यतः बेहद बड़ी गणनाओं में ही किया जाता है। कंप्यूटर का प्रयोग मौसम की भविष्यवाणी, मिसाइलों के डिजाइन जैसे जटिल कार्यों में किया जाता है। सुपर कंप्यूटरों में कई माइक्रो प्रोसेसर (Micro Processor) लगे होते हैं। यह एक प्रकार की बेहद छोटी मशीन है जो कम्प्यूटिंग यानी गणना के कार्य को बेहद कम समय में कर पाने में सक्षम है। भारत में विकसित सुपर कंप्यूटर का नाम परम है। निम्नवत चित्र से समझा जा सकता है कि सुपर कंप्यूटर दरअसल, कई सारे प्रोसेसर का एक सामूहिक स्वरूप है।

यहां यह सवाल उठना लाजिमी है कि प्रोसेसर किस तरह गणना में मदद करते हैं। दरअसल, किसी जटिल गणना को कम समय में पूरा करने के लिये बहुत से प्रोसेसर एक साथ काम करते हैं। इस प्रक्रिया को समान्तर प्रोसेसिंग (Parallal Processing) कहा जाता है। इसके तहत कंप्यूटर को मिलने वाले डाटा अलग-अलग काम के लिए अलग-अलग प्रोसेसर को बांट दिए जाते हैं। हर प्रोसेसर अपने हिस्से की गणना करने के बाद कंप्यूटर को सूचना उपलब्ध कराता है और कंप्यूटर सभी प्रोसेसर से मिलने वाली सूचनाओं को एकत्र कर लेने के बाद सटीक अंतिम परिणाम उपलब्ध करा देता है।

(सुपर कंप्यूटर)

- मेनफ्रेम कंप्यूटर (Mainframe Computers)

  मेनफ्रेम कंप्यूटर कार्यक्षमता के लिहाज से सुपर कंप्यूटर से कुछ कमतर, लेकिन फिर भी काफी अधिक क्षमतावान होते हैं। इसकी कार्यक्षमता का अंदाजा इसी से लगाया जा सकता है कि मेनफ्रेम कंप्यूटरों पर एक ही समय में 250 से अधिक लोग एकसाथ काम कर सकते हैं। इन कंप्यूटरों का इस्तेमाल बल्क डाटा (Bulk Data) की प्रोसेसिंग में किया जाता है। यानी ऐसी जगहों पर ये कंप्यूटर प्रयुक्त होते हैं, जहां एक ही समय में भारी मात्रा में और निरन्तर गणनाओं की जरूरत होती है। मुख्यतः इस तरह के कंप्यूटर बड़ी कंपनियों में उपभोक्ताओं की जानकारी सुरक्षित रखने में, जनगणना और इसी तरह के अन्य ऐसे कार्यों में इस्तेमाल किए जाते हैं, जहां भारी डाटा आता है।

- मिनी और माइक्रो कंप्यूटर (Mini, Micro Computers)

  मिनी कंप्यूटर, मेनफ्रेम कंप्यूटरों से छोटे लेकिन माइक्रो कंप्यूटरों से बड़े होते हैं। माइक्रो कंप्यूटरों को पर्सनल कंप्यूटर (Personal computers, PC) भी कहा जाता है। पर्सनल कंप्यूटर कंप्यूटरों की श्रृंखला में आकार के लिहाज से सबसे छोटे होते हैं। पर्सनल कंप्यूटर का विकास सबसे पहले 1981 में हुआ था। आगे हम इसे विस्तार से समझेंगे। माइक्रो या पर्सनल कंप्यूटर के अन्य प्रकारों को इस तरह समझ सकते हैं।

- डेस्कटॉपः वह कंप्यूटर जिसे मेज पर रखकर काम किया जा सके
- लैपटॉपः ऐसा कंप्यूटर, जिसे उपयोगकर्ता गोद में रखकर काम करे)

- पामटॉपः वह कंप्यूटर जो उपयोगकर्ता की हथेली में समा सके, इस श्रेणी में स्मार्टफोन (smartphones), म्यूजिक प्लेयर, वीडियो प्लेयर, टैबलेट रखे जा सकते हैं
- पर्सनल कंप्यूटर का विकास (Development of PCs)

कंप्यूटर की शुरूआत के साथ ही इनका आकार बेहद बड़ा था, जो कालान्तर में जरूरत के हिसाब से छोटा होता गया। समय के साथ कंप्यूटर में आते गए इन बदलावों ने कंप्यूटर को सिर्फ गणनाएं करने वाली मशीन के बजाय एक समय में एकसाथ कई काम करने वाला उपकरण बना दिया। इससे यह मनुष्य के दैनिक जीवन के लिए लगातार उपयोगी बनता गया, लेकिन सबसे बड़ी समस्या यह थी कि आम आदमी कैसे करोड़ों का सुपर कंप्यूटर इस्तेमाल करे। इस जवाब के तलाश में 1970 में माइक्रो प्रोसेसर का आविष्कार हुआ। यही माइक्रो प्रोसेसर आगे चलकर माइक्रो कंप्यूटरों की खोज का जरिया बने। कंप्यूटर निर्माता कंपनी आईबीएम ने वर्ष 1981 में पहला पर्सनल कंप्यूटर बनाने की घोषणा की, जिसे आईबीएम-पीसी नाम दिया गया। यह कंप्यूटर प्रारंभिक रूप से मुख्यतः शौकिया बनाया गया था, लेकिन यह इस कदर लोकप्रिय हुआ कि बाद में सभी कंप्यूटर निर्माता कंपनियों का ध्यान पीसी की ओर गया।

(पर्सनल कंप्यूटर या माइक्रो कंप्यूटर)

खास बात यह है कि अब दुनियाभर में सैकड़ों कंपनियों के पर्सनल कंप्यूटर बाजार में हैं, लेकिन वे सभी आईबीएम-पीसी कंपेटीबल (IBM-PC Compatible) ही होते हैं। इसका अर्थ यह है कि ये सभी पर्सनल कंप्यूटर आकार, संरचना, हार्डवेयर आदि में आईबीएम-पीसी के समान ही होते हैं। इस तरह आईबीएम-पीसी स्वतः कंप्यूटर निर्माता कंपनियों के लिए एक मानक (Standard) बन गया है। समय के साथ पर्सनल कंप्यूटरों की क्षमताओं में भी लगातार बदलाव होते आए हैं। 1981 में पहले पर्सनल कंप्यूटर के जन्म के बाद

से अब तक पीसी की कई पीढ़ियां सामने आ चुकी हैं। इनमें पीसी-पेंटियम, पीसी-कोर 2, इंटेल आई सीरीज प्रमुख हैं। सभी कंप्यूटर सामान्यतः एकसमान होते हैं, लेकिन हर श्रेणी और पीढ़ी में अंतर सिर्फ इसकी संग्रहण क्षमता (Storage Power) और प्रोसेसर (Processor) का होता है।

कंप्यूटर के गुण-उपयोग(Qualities-Uses of Computers)

कंप्यूटर आज के प्रतिस्पर्धी और वैज्ञानिक युग में सिर्फ गणनाओं को चुटकी में हल कर देने भर का साधन नहीं रह गया है वरन यह आज मनोरंजन, शिक्षा, चिकित्सा, सुरक्षा का भी बड़ा माध्यम बन चुका है। कंप्यूटर के गुणों की बात करें तो यह किसी भी काम को बहुत तेज गति से करने वाला, उपयोगकर्ता की ओर से मिलने वाले निर्देशों का अपेक्षित पालन करने वाला, जितना निर्देश दिया जाए, उतना ही काम करने वाला, हर काम को त्रुटिरहित करने वाला, आंकड़ों के आंकड़ों के असीमित भंडार को कम से कम जगह में संग्रह करके रखने वाला और जरूरत पड़ने पर अभीष्ट आंकड़ों को तुरंत उपलब्ध कराने वाला उपकरण है। इस लिहाज से यह मौजूदा मानव जीवनशैली में मानव का सबसे बड़ा सहायक उपकरण बन जाता है। दूसरी ओर, यदि कंप्यूटर के उपयोगों की बात की जाए तो इस लिहाज से भी यह अपने पूर्ववर्ती उपकरणों से कहीं आगे निकल चुका है। इसके दैनन्दिन के कार्यों में होने वाले उपयोग निम्नवत हैं:

ईमेलः ईमेल इलेक्ट्रॉनिक मेल (Electronic Mail) का संक्षिप्त रूप है। ईमेल का तात्पर्य उस मेल यानी पत्र से है, जिसे हम कंप्यूटर पर लिखकर इंटरनेट के माध्यम से किसी को भेजते हैं। सामान्य डाक प्रक्रिया से इतर यह पूरी प्रक्रिया चंद सेकंडों की होती है। इसके लिए उपयोगकर्ता को एक ईमेल पते की आवश्यकता होती है जो उपयोगकर्ता (user) और मेल सुविधा देने वाली कंपनी के डोमेन नेम (Domain name) का संयुक्त स्वरूप होता है। उदाहरण के लिए- xyzsharma@gmail.com

जानकारी संजोना एवं सहयोगः कंप्यूटर उपयोगकर्ता (user) के लिए सहयोगी की तरह काम करता है। वह उपयोगकर्ता की ओर से मिलने वाले निर्देशों का पालन करने के साथ ही जरूरत के अनुरूप जानकारी, सूचनाएं, आंकड़े उपलब्ध कराता है। इस तरह यह उपयोगकर्ता के लिए एक चुटकी में दुनियाभर की जानकारी देने का जरिया बन जाता है।

शिक्षा एवं संचार सुविधाः शिक्षा के क्षेत्र में कंप्यूटर आज के दौर में अति आवश्यक तत्व बन गया है। स्कूल से लेकर विश्वविद्यालयी शिक्षा तक शायद ही शिक्षा का कोई हिस्सा हो, जहां कंप्यूटर का इस्तेमाल नहीं होता हो। दूरस्थ शिक्षा के क्षेत्र में तो कंप्यूटर के सहयोग से क्रान्ति आई है। दुनिया के किसी भी कोने में बैठा शिक्षक आज इंटरनेट के जरिये छात्रों को पढ़ाने में सक्षम हो सका है। दूसरी ओर, संचार सुविधाएं भी कंप्यूटर की मदद से तेजी से विकसित हुई और बढ़ी हैं। वह चाहे ईमेल हो या स्मार्टफोन, सबका विकास कंप्यूटर सिस्टम के जरिये ही हो पाना संभव हो सका है। इससे कुछ पीछे जाएं तो टेलीफोन के दौर में एसटीडी और आईएसडी कॉल की शुरूआत का श्रेय भी कंप्यूटर क्रान्ति को ही जाता है।

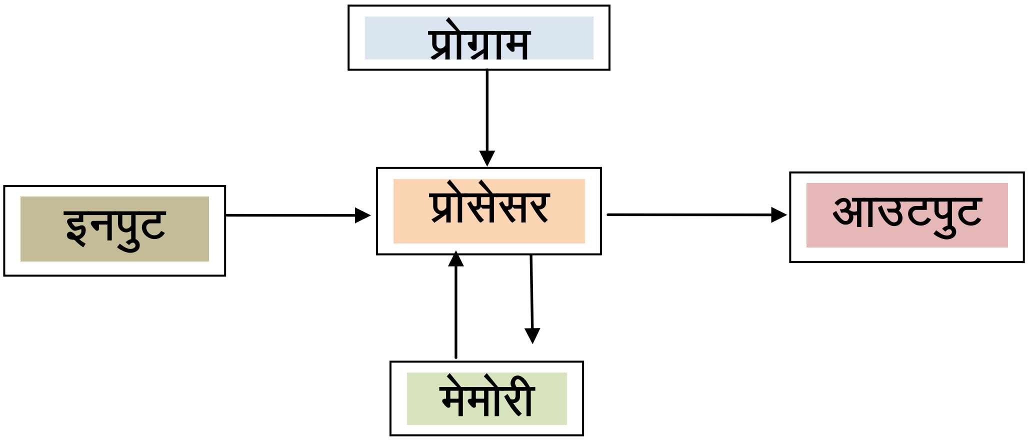
शोध, स्वास्थ्यः कंप्यूटर शोधार्थियों के लिए अहम उपकरण है। वस्तुतः शोध कार्यों में एकत्र होने वाले डाटा, आंकड़ों को संग्रहित कर सूचनाओं का संकलन करने में यह शोधार्थी का सबसे बड़ा सहायक बन जाता है। दूसरी ओर, स्वास्थ्य सुविधाओं के क्षेत्र में भी कंप्यूटर मददगार साबित हुआ है। सीटी स्कैन हो या अल्ट्रासाउंड या एमआरआई चिकित्सा क्षेत्र में निरन्तर नये बदलावों के जरिये कंप्यूटर मानव जीवन को स्वस्थ बनाने में सहायक बना है। और अब तो टेलीमेडिसिन चिकित्सा विधा की समग्र शाखा के तौर पर

सामने आई है। इसके तहत डाॅक्टर दुनिया के किसी भी कोने में रहकर मरीज का इलाज कर पाने में सक्षम हुए हैं।

सुरक्षा एवं अन्य सुविधाएंर: कंप्यूटर मनुष्य जीवन के अहम बिन्दु सुरक्षा के लिहाज से खासे मददगार साबित हुए हैं। आम जनजीवन में क्लोज सर्किट कैमरे (Close Circuit Cameras) हों या सैन्य जीवन में अत्याधुनिक उपकरण, रडार और स्वचालित हथियार, सभी कुछ कंप्यूटरीकृत तकनीक पर आधारित हैं। इसके अलावा सड़कों पर यातायात व्यवस्था को सुगम-सुचारू बनाए रखने वाली ट्रैफिक लाइटें हों या एक कॉल पर घायलों को अस्पताल पहुंचाने वाली 108 एंबुलेंस या फिर आपराधिक वारदातों की त्वरित सूचनाएं पुलिस तक पहुंचाने वाला 100 नंबर, सभी जगह कंप्यूटर ही मूल तकनीकी बुनियाद के तौर पर नजर आता है।

23.4 कंप्यूटर के बुनियादी अवयव (Basic Components)

कंप्यूटर चाहे सुपर हो या माइक्रो यानी पर्सनल, हर कोई पांच प्रमुख भागों से मिलकर तैयार होता है, इन भागों को हम कंप्यूटर के बुनियादी अवयव भी कह सकते हैं। ये पांचों हैं: इनपुट (Input) आउटपुट (Output) प्रोसेसर (Processor) मेमोरी (Memory) और प्रोग्राम (Program) कंप्यूटर की संरचना में इन पांचों का विशेष महत्व है। निम्नवत ग्राफ की मदद से हम इनके कार्य को समझ सकते हैं:



- प्रोसेसर (Processor)

जैसा कि नाम से ही स्पष्ट हो रहा है कि प्रोसेसर कंप्यूटर का वह हिस्सा होगा, जहां प्रोसेसिंग (Processing) यानी पूरी प्रक्रिया चलती होगी। इस लिहाज से प्रोसेसर को कंप्यूटर का सर्वाधिक महत्वपूर्ण भाग माना जा सकता है, या इसे यूं भी कहा जा सकता है कि प्रोसेसर ही दरअसल असल कंप्यूटर है, बाकि के सभी भाग तो प्रोसेसर की ओर से किए जा रहे कार्यों को सफलतापूर्वक पूर्ण करने में सहायक हैं। ग्राफ से भी यह आसानी से समझ में आता है कि कंप्यूटर के सभी भाग सीधे तौर पर प्रोसेसर से ही जुड़े हुए हैं। इसे यूं भी कहा जा सकता है कि प्रोसेसर कंप्यूटर का दिमाग है, जिस तरह मनुष्य का दिमाग उसे सोचने-समझने, तर्क करने या किसी समस्या का हल निकालने की क्षमता प्रदान करता है, ठीक उसी तरह प्रोसेसर भी कंप्यूटर को मिलने वाले निर्देशों का सही हल निकालने का काम करता है। इस लिहाज से यह साफ है कि प्रोसेसर कंप्यूटर का वह हिस्सा है जो उपयोगकर्ता (User) की ओर से दिए जाने वाले आदेशों को ठीक से समझकर उनका ठीक से पालन करने, गणितीय क्रियाएं करने, किसी विशेष लक्ष्य या कार्य की जांच आदि करने का काम करता है।

कंप्यूटर के प्रोसेसर वाले हिस्से को सेंट्रल प्रोसेसिंग यूनिट (Central Processing Unit) कहा जाता है, जिसे आमतौर पर संक्षिप्त रूप में हम सीपीयू भी कह लेते हैं। अब सीपीयू के भी तीन अहम हिस्से होते हैं, जिनके जुड़ने से प्रोसेसिंग यूनिट अपना सही आकार लेती है और ठीक से कार्य कर पाती है। ये तीन भाग हैं: मेमोरी (Memory) अर्थमेटिक लॉजिक यूनिट (Arithmatic Logic Unit) यानी एएलयू और कंट्रोल (Control) प्रोसेसर के इन तीनों हिस्सों के जिम्मे अलग-अलग तरह के निर्देशों का ठीक से पालन करना और परिणामों को बिल्कुल सही प्राप्त करना है। सबसे पहले बात करते हैं अर्थमेटिक लॉजिक यूनिट की। अर्थमेटिक का हिन्दी अर्थ ही अंक गणित है, यानी इस यूनिट के जिम्मे सभी तरह की गणनाएं और तुलनाएं हैं। अब लॉजिक पर आएं तो इसके तहत गणितीय प्रक्रियाओं से इतर मिलने वाले सभी तरह के निर्देश शामिल हैं। कंट्रोल यूनिट का काम कंप्यूटर के सभी भागों की निगरानी करना और उपयोगकर्ता की ओर से मिलने वाले निर्देशों को अभीष्ट यूनिट तक पहुंचाना होता है। तीसरी और सबसे अहम यूनिट है मेमोरी, चूंकि यह वृहद् विषय है, इसे हम आगे विस्तार से जानेंगे।

- मेमोरी (Memory)

मेमोरी, यानी याददाश्त। हम पहले ही जान चुके हैं कि मानव विकास के अनुक्रम में जिस तेजी से गणितीय गणनाएं लगातार बढ़ती गईं, उसी तेजी से यह जरूरत भी बढ़ती चली गई कि हम जो भी गणना कर रहे हैं, उनके परिणाम स्मृति में लंबे समय तक संजोकर रखें। अबेकस से लेकर कंप्यूटर तक के विकास की सैकड़ों सालों की यात्रा का परिणाम है मेमोरी। कंप्यूटर पर उपयोगकर्ता जो भी जानकारी, सूचना, आंकड़ा, परिणाम बाद के इस्तेमाल के लिए सुरक्षित रखना चाहता है, वह मेमोरी में ही जाकर संग्रहीत (Stored) होता है।

मानव मस्तिष्क में जिस तरह चेतन और अवचेतन मस्तिष्क की अवधारणा है और अब तो यह विभिन्न शोधों से पता भी चला है कि मस्तिष्क के अलग-अलग हिस्से अलग-अलग तरह की सूचनाओं को संग्रहीत कर स्मृति में बनाए रखते हैं, ठीक उसी तरह कंप्यूटर की मेमोरी भी काम करती है। कंप्यूटर की मेमोरी भी मानव मस्तिष्क के अलग-अलग हिस्सों की तरह कई छोटे टुकड़ों (Blocks) में बंटी होती है। इन ब्लॉक को सामान्यतः बाइट (Byte) कहा जाता है। कंप्यूटर मेमोरी में हर ब्लॉक की अपनी एक खास लोकेशन (Location) होती है, जो मनुष्य की पहचान के लिए दिए जाने वाले नामों की तरह इन पर दर्ज नंबरों से तय मानी जाती है। इन नंबरों को बाइट या ब्लॉक का पता (Addresss) माना जा सकता है।

हर बाइट अपने से भी छोटी इकाई बिट (Bit) से बनती है। बिट को कंप्यूटर मेमोरी का सबसे छोटा हिस्सा माना जा सकता है और हर आठ बिट की शृंखला (Chain) मिलकर एक बाइट का निर्माण करती है। बिट किस तरह काम करती है, इसे हम 'हां' या 'ना' के उदाहरण से समझते हैं। हमें कुछ काम करना है तो हमारे उसे करने या नहीं करने की दो ही स्थितियां हो सकती हैं, हां या ना। या इसे किसी स्विच के ऑन या ऑफ होने से भी समझ सकते हैं। यानी किसी बाइट में मौजूद बिटों की शृंखला में कुछ बिट हां या ऑन हैं तो कुछ ना या ऑफ। इस आधार पर ऑन बिट को 0 और ऑफ को 1 माना जाता है। कंप्यूटर पर हम जो भी काम करते हैं या सूचनाएं संग्रहीत रखते हैं, वह सब 0 और 1 के रूप में ही दर्ज होता है, इन्हें बाइनरी संख्या कहा जाता है, जिसे हम इसी यूनिट के अगले हिस्से में जानेंगे। किसी भी कंप्यूटर की संग्रहण क्षमता यानी उसकी मेमोरी को बाइट में ही मापा जाता है। जिस कंप्यूटर की बाइट जितनी अधिक होगी, वह आंकड़ों के संग्रहण, गणनाओं और सूचनाओं तथा परिणाम के निष्पादन में उतना ही सक्षम होगा। बाइट से लेकर गीगा बाइट

और इससे भी कहीं आगे एक्साबाइट तक मेमोरी की क्षमता की यह शृंखला जाती है। इस लिहाज से जितनी अधिक बाइट वाला कंप्यूटर होगा, उसकी मेमोरी उतनी ही अधिक होगी। इसे हम निम्न सारिणी से समझ पाएंगेः

8 बिट	1 बाइट
1024 बाइट	1 किलोबाइट
1024 किलोबाइट	1 मेगाबाइट
1024 मेगाबाइट	1 गीगाबाइट

- इनटर्नल मेमोरी (Internal Memory)

कंप्यूटर की मेमोरी दो तरह की होती है, भीतरी और बाहरी। भीतरी यानी इनटर्नल मेमोरी को कंप्यूटर की मुख्य मेमोरी (Main Memory) माना जाता है। कंप्यूटर की इनटर्नल यानी मेन मेमोरी को भी दो भागों में बांटा जा सकता है। पहला है रैम (RAM) और दूसरा रॉम (ROM) ये दोनों मेमोरी सेंट्रल प्रोसेसिंग यूनिट में ही मौजूद होती हैं, लेकिन दोनों के काम करने का तरीका अलग होता है जो कंप्यूटर को आंकड़ों को संग्रहीत करके रखने में मददगार बनता है।

रैम (RAM): पहले बात करते हैं रैम की। रैम का पूरा नाम है रैंडम एक्सेस मेमोरी (Random Access Memory) यानी मेमोरी का वह हिस्सा या वह प्रकार, जिसे उपयोगकर्ता अपनी इच्छा के अनुसार इस्तेमाल कर सकता है। इस मेमोरी में कोई भी जानकारी, आंकड़ा या सूचना कम समय के लिए ही संग्रहीत हो सकती है। कोई नया या दूसरा डाटा आने की स्थिति में पिछला डाटा सुरक्षित नहीं रह पाता है।

रॉम (ROM) : रॉम यानी रीड ओनली मेमोरी (Read Only Memory) जैसा कि नाम से ही स्पष्ट हो रहा है कि इसमें संग्रहीत आंकड़ों को उपयोगकर्ता पढ़ यानी इस्तेमाल तो कर सकता है, लेकिन इसमें बदलाव नहीं किया जा सकता। रॉम कंप्यूटर निर्माता कंपनी की ओर से उपलब्धऐसा डाटा है, जिनकी उपयोगकर्ता को निरन्तर आवश्यकता होती है। इसमें संग्रहीत डाटा कभी मिटता या खत्म नहीं होता है।

कैश मेमोरी (Cache Memory): कैश भी रैंडम एक्सेस मेमोरी के समान है, लेकिन इन दोनों में मुख्य अंतर यह है कि रैम जहां कंप्यूटर सिस्टम में स्टोर रहती है, कैश मेमोरी गतिशील होती है और इसे सर्वर में स्टोर किया जाता है। दोनों का उपयोग और कार्यशैली समान ही होते हैं, लेकिन कंप्यूटर इस मेमोरी का उपयोग अधिकतर हाल में देखे गए वेब पेजों को याद रखने में करता है।

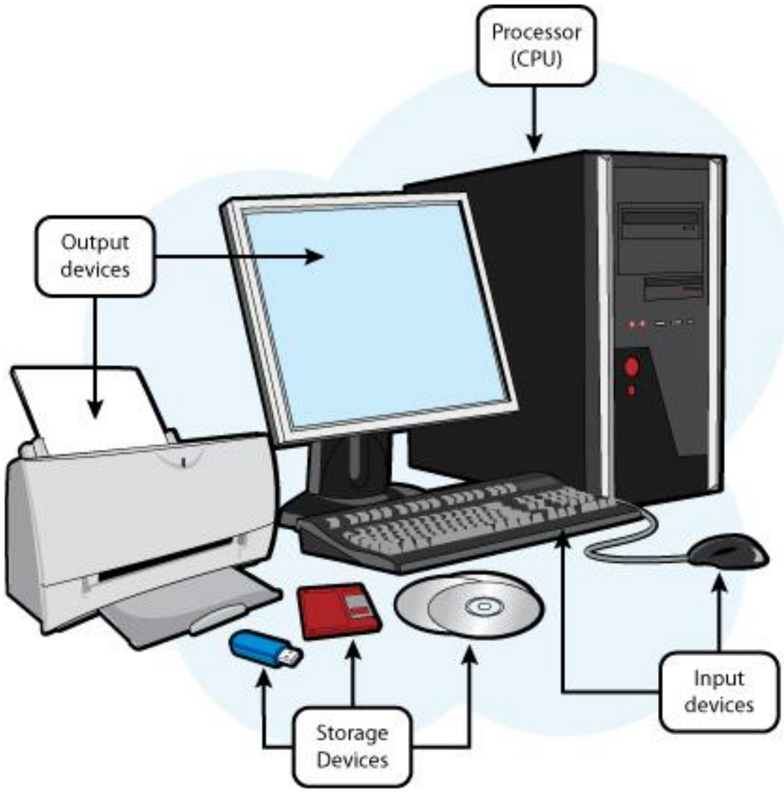
- बाहरी मेमोरी (External Memory)

कंप्यूटर की भीतरी या मुख्य मेमोरी की अपनी कुछ सीमाएं होती हैं। हर कंप्यूटर को अलग मेमोरी क्षमता से डिजाइन किया जाता है। लेकिन अकसर यह होता है कि डाटा या आंकड़े इतने अधिक हो जाते हैं कि उन्हें कंप्यूटर में ही संग्रहीत रख पाना संभव नहीं हो पाता। या कई बार जरूरत यह होती है कि कंप्यूटर में दर्ज परिणामों का इस्तेमाल कहीं और करना होता है। ऐसे में बाहरी मेमोरी (External Memory) मददगार साबित होती है। शायद यही वजह है कि इस मेमोरी को सहायक मेमोरी (Auxilliary Memory) भी कहा जाता है। हम सभी लोग इस तरह की मेमोरी का अकसर दैनन्दिन जीवन में उपयोग करते हैं। फ्लॉपी, पेनड्राइव, सीडी, डीवीडी, हार्ड डिस्क आदि कंप्यूटर की सहायक मेमोरी ही हैं। इनमें सैकड़ों-हजारों गीगाबाइट तक आंकड़े, सूचनाएं, गणनाएं, परिणाम आदि संग्रहीत कर रखे जा सकते हैं।

- इनपुट (Input)

यह तो हम स्पष्ट रूप से जानते हैं कि कंप्यूटर कोई भी कार्य उपयोगकर्ता की ओर से दिए जाने वाले निर्देशों के पालन के अनुक्रम में करता है। ऐसे में इनपुट कंप्यूटर की वह इकाई है, जिसकी मदद से उपयोगकर्ता सेंट्रल प्रोसेसिंग यूनिट यानी सीपीयू तक अभीष्ट निर्देश पहुंचा पाता है। उपयोगकर्ता की ओर से कंप्यूटर को निर्देश देने की इस प्रक्रिया को ही इनपुट कहा जाता है। कंप्यूटर को इनपुट देने के लिए उपयोगकर्ता कुछ उपकरणों (Devices) का इस्तेमाल करता है, जिन्हें इनपुट डिवाइस भी कहा जाता है। मसलन, हम जब कंप्यूटर पर टाइपिंग करते हैं तो हम उसके लिए की-बोर्ड (Key Board) पर टाइप करते हैं। इस तरह की-बोर्ड कंप्यूटर के लिए एक इनपुट डिवाइस है, क्योंकि यह उपयोगकर्ता की ओर से टाइप किए जाने वाले अक्षर-अंक की जानकारी कंप्यूटर के सीपीयू को पहुंचाता है। की-बोर्ड के अलावा माउस, जॉयस्टिक, लाइट पेन, माइक, स्कैनर आदि भी इनपुट डिवाइस हैं।

- आउटपुट (Output)



उपयोगकर्ता जो भी इनपुट कंप्यूटर को देता है वह सीपीयू में जाकर प्रोसेस किया जाता है। जो परिणाम कंप्यूटर उपयोगकर्ता तक पहुंचाता है, उसे आउटपुट कहा जाता है। आउटपुट पाने में कुछ मशीनें या उपकरण कंप्यूटर के सहायक होते हैं। इन मशीनों या उपकरणों पर उपयोगकर्ता अपनी ओर से दिए गए निर्देशों के परिणाम कंप्यूटर के स्तर पर की जाने वाली डाटा प्रोसेसिंग के बाद हासिल कर पाता है। इनमें सबसे अधिक महत्वपूर्ण और सर्वाधिक इस्तेमाल की जाने वाली डिवाइस है मॉनीटर (Monitor) मॉनीटर पर ही हम हर परिणाम देख-सुन सकते हैं। इसके अलावा प्रिंटर, स्पीकर आदि भी आउटपुट डिवाइस हैं। इनपुट-आउटपुट डिवाइस और कंप्यूटर अन्य प्रमुख घटक यानी सिस्टम यूनिट को हम उपरोक्त चित्र की मदद से आसानी से समझ सकते हैं।

- प्रोग्राम (Program)

दैनिक जीवन में हम जो भी काम करते हैं, उनके लिए निश्चित और पूर्वनियत प्रक्रियाओं के एक समूह से गुजरते हैं। मसलन हमें नहाना है तो यह निश्चित है कि हम सबसे पहले बाथरूम तक पहुंचेंगे, नल खोलेंगे,

बाल्टी लगाकर पानी भरेंगे और फिर नहाना शुरू करेंगे। ठीक इसी तरह कंप्यूटर भी उपयोगकर्ता के लिए जो भी काम करता है, वह दरअसल आदेशों का एक ऐसे समूह के जरिये तय हो पाता है, जो पहले से कंप्यूटर के सीपीयू में दर्ज हैं।

कंप्यूटर पर हर कार्य के लिए अलग आदेश समूह व्यवस्थित रहता है। उदाहरण के लिए हम जब भी कंप्यूटर पर कुछ काम करते हैं तो देखने में तो वह माउस के एक क्लिक पर चुटकी में हो जाता है, लेकिन दरअसल, प्रोसेसर तक माउस की वह एक क्लिक अभीष्ट काम से जुड़े आदेशों का समूह पहुंचाती है। ये आदेश चरणबद्ध तरीके से कंप्यूटर की भीतरी मेमोरी में दर्ज रहते हैं और प्रोसेसिंग यूनिट उस पर बेहद तेजी से काम (Execution) करती है, जिससे सेकंड से भी कम समय के भीतर जरूरी परिणाम हमारे सामने आउटपुट डिवाइस यानी मॉनीटर या प्रिंटर पर उपलब्ध हो जाता है। किसी अभीष्ट कार्य को सफलतापूर्वक निष्पादित करने के लिए जरूरी आदेशों के समूह को कंप्यूटर के लिए प्रोग्राम कहा जाता है।

23.5 कंप्यूटर की कार्यपद्धति (Working Process of Computer)

कंप्यूटर के सभी भागों के बारे में जानकारी मिल जाने के बाद यह जानना जरूरी लगता है कि कंप्यूटर इन सबकी मदद से काम करता कैसे है। इससे पहले हम यह जान लेते हैं कि कंप्यूटर की कार्यपद्धति में किन तत्वों की सबसे अधिक आवश्यकता होती है। ये तत्व हैं: डाटा (Data), सूचना (Information), हार्डवेयर (Hardware) और सॉफ्टवेयर (Softwares)

हम जानते हैं कि कंप्यूटर पर उपयोगकर्ता की ओर से कुछ निर्देश दिए जाते हैं, ये निर्देश सूचनात्मक होते हैं, यानी हम कंप्यूटर के सेंट्रल प्रोसेसिंग यूनिट अर्थात् सीपीयू को कुछ डाटा उपलब्ध कराते हैं, जिसके आधार पर वह हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर की मदद से परिणाम हासिल करता है। सामान्यतः दैनिक जीवन में भी हम कई तरह के डाटा का इस्तेमाल कर किसी परिणाम पर पहुंचते हैं, इस प्रक्रिया को डाटा प्रोसेसिंग (Data Processing) कहते हैं। कंप्यूटर पर यही कार्य इलेक्ट्रॉनिक डाटा प्रोसेसिंग (Electronic Data Processing) बन जाता है, क्योंकि कंप्यूटर एक इलेक्ट्रॉनिक मशीन है। आइए अब हम डाटा प्रोसेसिंग के प्रमुख तत्वों को समझते हैं:

- डाटा क्या है (Data)

सामान्य शब्दों में कहा जाए तो डाटा दरअसल जानकारी है। इसे इस उदाहरण से समझते हैं, मान लीजिए कि हम क्रिकेट खेल रहे हैं। अब क्रिकेट में किन खेल उपकरणों का इस्तेमाल होता है, क्रिकेट को खेलने का सही तरीका क्या है, क्रिकेट के मैच कितने तरह के होते हैं, क्रिकेट के एक मैच में कितनी टीमें खेलती हैं, क्रिकेट की एक टीम में कितने खिलाड़ी होते हैं. इस तरह सवालों की एक लंबी शृंखला जो बनेगी, वह क्रिकेट को लेकर अलग-अलग तरह का डाटा बन जाएगा।

अब इसे कंप्यूटर की भाषा में समझें तो डाटा दो तरह का होता है। पहला संख्यात्मक (Numeric) और दूसरा चिह्नात्मक (Alpha Numeric) संख्यात्मक जैसा कि नाम से ही स्पष्ट हो रहा है कि यह डाटा अंकों से संबंधित है, जिनका उपयोग जोड़, घटाना, गुणा-भाग या अन्य तरह की गणनाओं में किया जा सकता है। दूसरी ओर चिह्नात्मक डाटा का मतलब ऐसी जानकारियों से है, जिन्हें अंकीय स्वरूप में दर्ज नहीं किया जा सकता। जैसेः किसी व्यक्ति का नाम, किसी किताब का नाम आदि। इस तरह के डाटा के साथ गणितीय प्रक्रिया संपन्न नहीं की जा सकती है, लेकिन इनके जरिये तुलनात्मक परिणाम (Comparative Results) जरूर हासिल किए जा सकते हैं।

- सूचना (Information)

किसी भी काम के संबंध में हमारे पास जो भी डाटा यानी जानकारी उपलब्ध होती है, वह अव्यवस्थित (Unarranged) होती है। इसकी वजह से कई बार यह डाटा इसलिए उपयोगी साबित नहीं हो पाता, क्योंकि इसके व्यवस्थानुक्रम में नहीं होने के कारण अभीष्ट परिणाम प्राप्त करना असंभव होता है। इसके लिए जरूरी है कि हम डाटा के अकूत भंडार में से सिर्फ उसी डाटा को अपने लिए चुनें, जो समय विशेष पर हमारे लिए उपयोगी है। उदाहरण के लिए, यदि हमें प्यास लगी है तो हम जानते हैं कि प्यास पानी से बुझेगी लेकिन पानी के संबंध में हमारे मस्तिष्क में कई तरह का डाटा उपलब्ध है। पानी नदी से आता है, पानी बारिश से भी आता है, तालाब में भी पानी भरा रहता है और नल में भी पानी आता है. लेकिन इन सब जानकारियों में से महज एक जानकारी हमें इच्छित परिणाम तक पहुंचा सकती है और वह है नल से पानी आना। इसी तरह कंप्यूटर में कोई इच्छित परिणाम प्राप्त करने के लिए उपयोगकर्ता डाटा के भंडार में से जरूरी और उपयोगी डाटा का चयन करता है। इस चयनित डाटा को ही सूचना कहा जाता है।

- हार्डवेयर (Hardware)

कंप्यूटर पर हम जो भी काम करते हैं, वह दो चीजों की मदद के बिना असंभव है। ये चीजें हैं हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर। पहले बात करते हैं हार्डवेयर की। हार्डवेयर कंप्यूटर से जुड़े वे कल-पुर्जे (Spare Parts) या उपकरण हैं, जिन्हें उपयोगकर्ता आंखों से देख सकता है या छूकर महसूस कर सकता है। सीपीयू, मॉनीटर, माउस, की-बोर्ड, प्रिंटर, पैन ड्राइव आदि कंप्यूटर के हार्डवेयर हैं।

- सॉफ्टवेयर (Softwares)

कंप्यूटर के सफल तरीके से कार्य करने (Execution) में सॉफ्टवेयर की अहम भूमिका है। सॉफ्टवेयर दरअसल प्रोग्रामों का समूह है। यानी उपयोगकर्ता जो भी काम कंप्यूटर पर करना चाहता है या निर्देश कंप्यूटर को देना चाहता है, उसके सफल निष्पादन के लिए जिन आदेशों की आवश्यकता कंप्यूटर को पड़ती है, उस प्रोग्राम को सॉफ्टवेयर कहा जाता है। बिना सॉफ्टवेयर के कंप्यूटर पर कोई भी काम कर पाना असंभव सा है, क्योंकि यदि सॉफ्टवेयर नहीं होगा तो इसका सीधा तात्पर्य यह है कि संबंधित कंप्यूटर के पास उपयोगकर्ता के इच्छित आदेशों का पालन करवाने वाले आदेशों का समूह उपलब्ध नहीं है। ऐसी स्थिति में कंप्यूटर के लिए अभीष्ट परिणाम देना संभव नहीं हो सकेगा। कार्यक्षमता के लिहाज से सॉफ्टवेयर को भी दो भागों में बांटा जा सकता है। पहला है सिस्टम सॉफ्टवेयर और दूसरा है एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर।
सिस्टम सॉफ्टवेयर वे प्रोग्राम हैं, जिनका काम सिस्टम यानी कंप्यूटर को चलाते रहना है। ऑपरेटिंग सिस्टम (Operating System), कंपाइलर (Compiler), यूटिलिटी प्रोग्राम (Utility Program) ऐसे ही सॉफ्टवेयर हैं। यह भी कहा जा सकता है कि यही वे प्रोग्राम हैं, जिनकी वजह से कंप्यूटर चलता है, यानी ये कंप्यूटर के प्राण हैं। कंप्यूटर पर जो भी उपयोगकर्ता काम करता है, उसे इन्हीं सॉफ्टवेयर पर काम करना होगा। दूसरी ओर, एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर वे प्रोग्राम हैं, जिन्हें उपयोगकर्ता की जरूरत के हिसाब से डिजाइन किया गया है। उदाहरण के लिए जो उपयोगकर्ता पेंटिंग करना चाहता है, उसके लिए पेंटिंग के प्रोग्राम हैं, किसी को वेतन का रिकॉर्ड दर्ज करना है तो उसके लिए अलग एप्लीकेशन हैं। ये प्रोग्राम कंप्यूटर में पहले से उपलब्ध नहीं होते हैं, इन्हें अलग से इंस्टॉल (Install) करना होता है। सिस्टम और एप्लीकेशन सॉफ्टवेयरों की मदद से ही कंप्यूटर पूरा होता है। इन दोनों के संयुक्त स्वरूप को सॉफ्टवेयर पैकेज भी कहा जाता है।

23.6 कंप्यूटर लैंग्वेज (Computer Languages)

हम यह भली-भांति जानते हैं कि कंप्यूटर मानव जीवन के लिए बहुधा उपयोगी मशीन है जो गणनाओं के जरिये मानव जीवन को सरल-सुगम बना रही है। लेकिन यह भी उतना ही सत्य है कि कंप्यूटर स्वयं कोई परिणाम मनुष्य को नहीं देता, बल्कि यह उपयोगकर्ता के निर्देशों के पालन के अनुक्रम में ही काम करता है। कंप्यूटर पर किस निर्देश के आधार पर डाटा प्रोसेसिंग का क्या परिणाम निकलेगा, यह तय करते हैं प्रोग्राम और ये प्रोग्राम आदेशों का एक समूह होते हैं, यह हम पहले ही जान चुके हैं।

इस लिहाज से कंप्यूटर के लिए हर काम के लिए आदेशों का एक ऐसा समूह यानी प्रोग्राम तैयार किया जाता है, जिसे कंप्यूटर समझ सके।कंप्यूटर के लिए प्रोग्राम जिन भाषाओं में लिखे जाते हैं, उन्हें कंप्यूटर प्रोग्रामिंग लैंग्वेज कहा जाता है। कंप्यूटर बस इतना करता है कि जो भी प्रोग्राम उसके सीपीयू में इंस्टॉल हो जाए, उसके आदेशों के क्रम को वह मेमोरी में सेव कर लेता है। इसके बाद जब भी कभी उपयोगकर्ता को आवश्यकता होती है, कंप्यूटर का प्रोसेसर मेमोरी से अभीष्ट आदेशों के प्रोग्राम का चयन कर लेता है और इसके आधार पर परिणाम उपयोगकर्ता को उपलब्ध करा देता है। कंप्यूटर के लिए प्रोग्राम बनाने वाली भाषाओं में मुख्यतः अंग्रेजी के कुछ शब्द और चिह्न प्रयुक्त किए जाते हैं।

हर प्रोग्रामिंग भाषा का अपना एक अलग व्याकरण (Grammar or Syntax) होता है। ऐसे में यह जरूरी होता है कि जिस भाषा में प्रोग्राम तैयार किया जा रहा हो, उसके व्याकरण का पूरा पालन किया जाए, ऐसा नहीं करने पर कंप्यूटर प्रोग्राम को ठीक से समझ नहीं सकेगा और आदेशों का ठीक पालन नहीं कर पाने से वह परिणाम नहीं दे सकेगा।

कंप्यूटरों के लिए प्रयुक्त होने वाली प्रमुख भाषाएं निम्नवत हैं:

- बेसिक (BASIC)
- सी (C)
- सी$$ (C++)
- जावा (JAVA)
- डॉटनेट (DOTNET)
- बाइनरी संख्या प्रणाली (Binary Number System)

यहां यह उल्लेखनीय है कि कंप्यूटर बाइनरी भाषा ही समझते हैं, यानी कंप्यूटर का सारा काम सिर्फ दो अंकों 0 और 1 पर चलता है। यह हम पहले ही जान चुके हैं कि कंप्यूटर मेमोरी की सबसे छोटी इकाई बिट है जो 0 और 1 से ही मिलकर बनती है। हम सामान्य जीवन में दशमलव संख्या प्रणाली का इस्तेमाल करते हैं, यानी एक से नौ तक के अंक, लेकिन कंप्यूटर सिर्फ 0 और 1 का ही प्रयोग करता है।

मान लीजिए कि हमें 9 लिखना है तो हम सीधे 9 लिखेंगे, लेकिन यदि कंप्यूटर को 9 लिखना है तो प्रोससिंग यूनिट इसे बाइनरी नंबरों में तोड़कर समझेगा। इसे सामान्य शब्दों में इस तरह समझ सकते हैं कि हम कंप्यूटर पर जो भी काम करते हैं, वह हमारे लिए भले ही सीधा समझ में आता हो, लेकिन कंप्यूटर उसे अपनी भाषा में समझता है। हालांकि, आउटपुट पर कंप्यूटर जो परिणाम उपलब्ध कराता है, वह उसी रूप में होता है, जो हमारा अभीष्ट है।

दशमलव संख्या	बाइनरी संख्या	दशमलव संख्या	बाइनरी संख्या
0	0	8	1000
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011

4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111

यहां यह उल्लेखनीय है कि दशमलव संख्या प्रणाली में हम 10 को आधार मानते हैं, क्योंकि इस संख्या प्रणाली में हम 0 से लेकर 9 तक कुल 10 अंकों की मदद से किसी भी बड़ी से बड़ी संख्या को लिख सकते हैं, लेकिन बाइनरी संख्या प्रणाली में 2 ही हर संख्या का आधार है, क्योंकि इस प्रणाली में सिर्फ दो अंकों 0 और 1 का ही इस्तेमाल किया जाता है। विशेष पहलू यह है कि किसी भी दशमलव संख्या को बाइनरी संख्या में बदला जा सकता है और किसी भी बाइनरी संख्या को दशमलव संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है। लेकिन चूंकि यह बिन्दु हमारे विषय के लिए बहुत उपयोगी नहीं है, लिहाजा हमने उपर दिए गए ग्राफ में सिर्फ समझने के लिए हम प्रथम 16 अंकों के बाइनरी नंबर लिए हैं।

यहां यह तथ्य उल्लेखनीय है कि हमें पहले ही मालूम है कि एक बाइट का अर्थ आठ बिट से होता है और हर बिट के दो मान हो सकते हैं, 0 या 1। अब गणितीय सिद्धांतों के अनुसार हर एक बाइट में बिटों की संख्या 2 का आठ गुना यानी दो को आठ बार गुणा करने से मिलने वाला मान अर्थात् 256 हो सकती है। यानी सीधे शब्दों में कहें तो हर एक बाइट में 0 से लेकर 255 तक यानी कुल 256 संख्याएं दिखाई जा सकती हैं। इसी तरह किसी एक बाइट में कुल 256 चिह्न दर्ज किए जा सकते हैं।

- कोडिंग सिस्टम (Coding System)

कंप्यूटर पर बाइनरी भाषा के चलते अक्षरों और चिह्नों को बाइनरी संख्या प्रणाली के हिसाब से ही लिखना जरूरी है। ऐसे में यह स्पष्ट है कि हम जो भी संख्या या चिह्न या डाटा लिखना चाहते हैं उसका कोई बाइनरी कोड होना आवश्यक है। तभी कंप्यूटर समझ सकेगा कि हम क्या लिखना चाहते हैं। इस लिहाज से कोडिंग सिस्टम कंप्यूटर और उपयोगकर्ता के बीच परस्पर बातों को समझाने का जरिया बन जाता है। कोडिंग के जरिये अक्षरों और चिह्नों को बाइटों में सुरक्षित कर लिया जाता है। इसके लिए मुख्यतः दो प्रकार के कोड प्रयोग में लाए जाते हैं, ये हैं आस्की कोड (American Standard Code for Information Interchange)और एब्सडिक (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code) हालांकि, माइक्रो यानी पर्सनल कंप्यूटरों में मुख्यतः आस्की कोड का ही इस्तेमाल किया जाता है। अंग्रेजी अक्षरों को आस्की और एब्सडिक कोड में कैसे लिखा जाता है, यह निम्न सारिणी से समझा जा सकता हैः

अक्षर	आस्की	एब्सडिक
A	01000001	11000001
B	01000010	11000010
C	01000011	11000011
D	01000101	11000101

कम्पाइलर (Compiler)

हमें मालूम है कि कंप्यूटर के प्रोग्राम ऐसी भाषा में होने जरूरी हैं, जिसे कंप्यूटर समझ सके और यह भाषा है बाइनरी संख्या प्रणाली आधारित। कंप्यूटर की इस भाषा को मशीन लैंग्वेज (Machine Language) कहा

जाता है। इसे सामान्य तौर पर निम्न स्तरीय भाषा ; (Low Level Language) भी कहा जाता है। इसलिए यह जरूरी हो जाता है कि कंप्यूटर के लिए जो प्रोग्राम तैयार किए जाएं, वे मशीनी भाषा में ही हों, लेकिन ऐसा करना संभव नहीं हो पाता, क्योंकि हर अंक, चिह्न को बाइनरी संख्या प्रणाली में 0 और 1 के रूप में लिख पाना बेहद लंबा और दुष्कर कार्य है। ऐसे में मददगार साबित होता है कंपाइलर। दरअसल, कंपाइलर एक ऐसा प्रोग्राम है जो उच्चस्तरीय भाषा में लिखे गए किसी भी प्रोग्राम को मशीनी भाषा में बदल देता है, ताकि कंप्यूटर उसे आसानी से समझ सके। इसे निम्न ग्राफ की मदद से समझ सकते हैं:

प्रोग्राम → **कंपाइलर** → **बाइनरी**

कंपाइलर किसी कंप्यूटर के सिस्टम सॉफ्टवेयर का ही हिस्सा होता है। कंपाइलर दो भाग में काम करता है। पहला यह कि कंपाइलर उपयोगकर्ता की ओर से दिए जाने वाले आदेश की अभीष्ट प्रोग्राम के व्याकरण के आधार पर पूरी जांच करता है। पता लगाता है कि आदेश प्रोग्राम के व्याकरण के अनुरूप है कि नहीं। अगर कोई गलती है तो कंपाइलर रूक जाता है, जिसके बाद उपयोगकर्ता को दोबारा ठीक से आदेश देना होता है। कंपाइलर आदेश को प्रोग्राम के व्याकरणसम्मत पाता है तो इसे तत्काल मशीनी भाषा यानी बाइनरी कोड में बदल देता है। उपयोगकर्ता के एक आदेश को पूरा पढ़ने के बाद कंपाइलर उस एक आदेश को बाइनरी कोड के हिसाब से कई छोटे आदेशों में भी बदल सकता है। ये आदेश सीपीयू में जाते हैं, जहां मेमोरी, प्रोसेसर, एएलयू आदेशों के अनुरूप काम करती हैं।

23.7 उपसंहार (The Conclusion)

हम न सिर्फ कंप्यूटर के विकास और इसके इतिहास से रूबरू हुए हैं, बल्कि यह भी समझ पाने में सक्षम रहे हैं कि किस तरह मानवीय सभ्यताओं के विकास के साथ कंप्यूटर भी आगे बढ़ा। प्राचीन काल में सामान्य गणनाओं से लेकर आज के वैज्ञानिक युग में मगल ग्रह तक मनुष्य के सफर को कामयाब बनाने में कंप्यूटर का किसी न किसी रूप में योगदान रहा। इस लिहाज से कह सकते हैं कि कंप्यूटर मानव समाज का अभिन्न अंग बन चुका है।

23.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)

1. गणनाओं के लिए सर्वप्रथम उपयोग किया गया ज्ञात उपकरण है:
    a) पास्कलाइन
    b) एनियाक
    c) अबेकस
    d) सुपर कंप्यूटर
2. कंप्यूटर के विकास की मूल अवधारणा इनमें से क्या थी:
    a) गणनाएं
    b) मनोरंजन
    c) खेल
    d) उपरोक्त में से कोई नहीं
3. इनमें से किसे कंप्यूटर का जनक माना जाता है:
    a. ब्लेज पास्कल
    b. सर चार्ल्स बैबेज
    c. जेपी एकर्ट

d. जेडब्ल्यू मॉशी

4. इंटीग्रेटेड सर्किट यानी आईसी की खोज किसने कीः
   a) सर चार्ल्स बैबेज
   b) जेपी एकर्ट
   c) टीएस बिल्की
   d) बिल गेट्स
5. कम्पाइलर इनमें से क्या हैः
   a) एक प्रोग्राम
   b) एक प्रोग्रामिंग भाषा
   c) इनपुट डिवाइस
   d) आउटपुट डिवाइस
6. एक बाइट का मान होता हैः
   a) बिट
   b) बिट
   c) 1024 बिट
   d) उपरोक्त में से कोई नहीं
7. बाइनरी संख्या प्रणाली में आधार अंक हैंः
   a) 0 से 9 तक
   b) 0 और 1
   c) 2 और 10
   d) कोई आधार अंक नहीं है
8. हर एक बाइट में चिह्नों या अंकों की संख्या हो सकती हैः
   a) 200
   b) 512
   c) 1024
   d) 256
9. पैन ड्राइव इनमें से किस मेमोरी का उदाहरण हैः
   a) बाहरी मेमोरी
   b) रैम
   c) रॉम
   d) कैश मेमोरी
10. अर्थमेटिक लॉजिक यूनिट हिस्सा हैः
   a) सीपीयू का
   b) एक विशेष प्रोग्राम का
   c) कम्पाइलर का
   d) कंप्यूटर उपकरणों का
11. पर्सनल या माइक्रो कंप्यूटर अस्तित्व में आएः
   a) 1970 में

b) 1942 में
c) 1981 में
d) 1990 में

12. अमेरिकी वैज्ञानिक टेड हॉफ ने खोज की थीः
a) माइक्रो प्रोसेसर की
b) बाइनरी संख्या प्रणाली की
c) एनालिटिकल कंप्यूटर की
d) पास्कलाइन की

13. दूसरी पीढ़ी के कंप्यूटरों में इस्तेमाल किया जाता थाः
a) वैक्यूम ट्यूब
b) इंटीग्रेटेड सर्किट
c) माइक्रोप्रोसेसर
d) ट्रांजिस्टर

14. पहले माइक्रो प्रोसेसर का नाम थाः
a. इनटेल-4004
b. एनियाक
c. परम
d. इनमें से कोई नहीं

15. अल्फा न्यूमेरिक डाटा का तात्पर्य हैः
a) अंकों में प्रदर्शित किए जाने वाले डाटा से
b) ऐसे डाटा से, जिसे अंकों में नहीं दिखाया जा सकता
c) उपरोक्त में से दोनों
d) उपरोक्त में से कोई नहीं

16. निम्नलिखित में से कौन आउटपुट डिवाइस नहीं हैः
a) प्रिंटर
b) मॉनीटर
c) स्कैनर
d) सभी आउटपुट डिवाइस हैं

17. ब और ब़ क्या हैं:
a) कंप्यूटर एप्लीकेशन
b) कंप्यूटर प्रोग्राम
c) कंप्यूटर प्रोग्रामिग भाषाएं
d) कंप्यूटर कम्पाइलर

18. कंप्यूटर प्रोग्राम का तात्पर्य हैः
a) खास परिणाम के लिए तय आदेशों का क्रम
b) खास परिणाम पाने के लिए जरूरी आउटपुट
c) कंप्यूटर पर इस्तेमाल किए जाने वाले इनपुट उपकरण
d) उपरोक्त में से कोई नहीं

19. इस मेमोरी में दर्ज सूचनाएं बदली नहीं जा सकतींः
    a. रैम
    b. रॉम
    c. कैश मेमोरी
    d. उपरोक्त सभी
20. भारत में विकसित सुपर कंप्यूटर का नाम हैः
    a) आईबीएम
    b) एनियाक
    c) लेन्ज कैल्कुलेटर
    d) परम

23.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theoretical Questions)

1. कंप्यूटर क्या है, अबेकस से लेकर कंप्यूटर तक की विकास यात्रा का विस्तृत वर्णन के साथ इसकी आवश्यकता भी समझाएं।
2. कंप्यूटर को कितनी पीढ़ियों में बांटा जा सकता है, इनका क्रमवार वर्णन करने के साथ हर पीढ़ी में आए अंतर का विष्लेशणकरें।
3. कंप्यूटर के प्रमुख अवयव क्या हैं, हर अवयव कंप्यूटर प्रणाली के लिए किस तरह महत्वपूर्ण है और ये किस तरह काम करते हैं?
4. कंप्यूटर मेमोरी क्या है, यह कितने प्रकार की होती है?
5. कंप्यूटर किस तरह काम करता है, डाटा-सूचना क्या हैं, इनमें प्रमुख अंतर क्या है, सॉफ्टवेयर और हार्डवेयर में क्या अंतर है?
6. बाइनरी संख्या प्रणाली क्या है, यह मानव जीवन में प्रयुक्त की जाने वाली दशमलव संख्या प्रणाली से किस तरह भिन्न है, कंप्यूटर में इस संख्या प्रणाली का उपयोग क्यों किया जाता है, कोडिंग सिस्टम का भी वर्णन करें।
7. कंप्यूटर के विकास अनुक्रम को संक्षिप्त में समझाते हुए मानव समाज की प्रगति में इसके योगदान का विष्लेशणकरें।

इकाई 24 कंप्यूटर एवं इंटरनेट के अनुप्रयोग
(Applications of Computer and Internet)

24.1 प्रस्तावना (Introduction)
24.2 उद्देश्य (Objectives)
24.3 सिस्टम सॉफ्टवेयर (System Softwares)
24.4 ऑपरेटिंग सिस्टम (Operating Systems)
24.5 ऑपरेटिंग सिस्टम के घटक (Components of Operating System)
24.6 इंटरनेट (Internet)
24.7 उपसंहार (The Conclusion)
24.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)
24.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theoretical Questions)

24.1 प्रस्तावना (Introduction)

हम इस तथ्य से भली-भांति परिचित हैं कि कंप्यूटर आज मानव जीवन की अभिन्न आवश्यकता बन चुका है। जीवन का शायद ही कोई पहलू आज ऐसा बचा रह गया हो, जिसमें छोटे या बड़े रूप में कंप्यूटर का इस्तेमाल नहीं किया जाता हो। अब जिस तरह मानवीय सामाजिक व्यवस्था अलग-अलग घटकों में बंटी हुई है, उसी तरह कंप्यूटर की पूरी कार्य व्यवस्था भी कई अंगों का एक सामूहिक स्वरूप है। पिछली इकाई में हमने कंप्यूटर के इतिहास से लेकर इसके विकास के अनुक्रम को विस्तार से समझा है। अब इस इकाई में हम जानेंगे कि एप्लीकेशन (Application System) और ऑपरेटिंग सिस्टम (Operating Systems) किस तरह कंप्यूटर के सफल कार्य निष्पादन में सहयोगी हैं।

24.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद हम यह समझ सकेंगे कि

- कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम क्या हैं और ये किस तरह कंप्यूटर की कार्यप्रणाली को आसान व मानवोपयोगी बना सकते हैं
- कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम का विकास किस तरह हुआ
- नेटवर्किंग क्या है और कंप्यूटर की कार्य व्यवस्था में इसका क्या महत्व है
- इंटरनेट क्या है, इसका इस्तेमाल क्यों किया जाता है, इसने मानव जीवन को सरल-सुगम बनाने में क्या योगदान किया है
- इंटरनेट का इस्तेमाल करने में सुरक्षा का ध्यान रखना क्यों जरूरी है, इंटरनेट का इस्तेमाल करने के दौरान किस तरह की सावधानियां बरती जानी चाहिए

24.3 सिस्टम सॉफ्टवेयर (System Softwares)

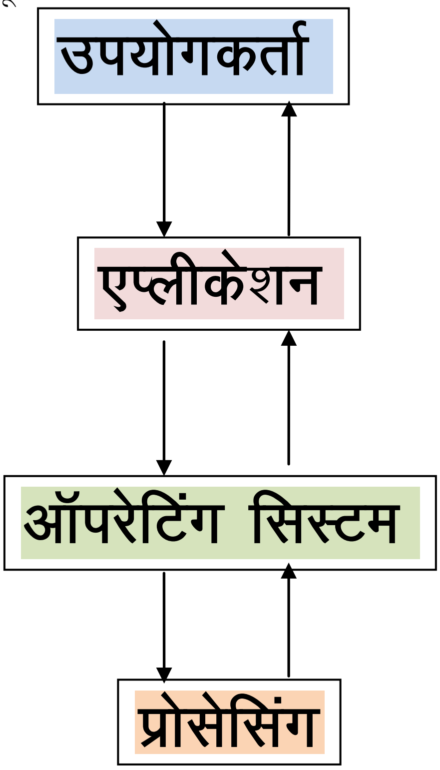
पिछली इकाई में हम जान चुके हैं कि सॉफ्टवेयर क्या होते हैं। सॉफ्टवेयर मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं, सिस्टम सॉफ्टवेयर (System Softwares) और एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर (Application Softwares) सिस्टम सॉफ्टवेयर वे प्रोग्राम हैं, जिनका काम कंप्यूटर को चलाना होता है। हम इस इकाई में जिस ऑपरेटिंग सिस्टम के बारे में जानने वाले हैं, वह भी मूलतः सिस्टम सॉफ्टवेयर ही है। इसके अलावा एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर वे प्रोग्राम हैं, जो किसी खास काम को करने और अभीष्ट परिणाम हासिल करने में उपयोगकर्ता की मदद करते हैं।

24.4 ऑपरेटिंग सिस्टम (Operating System)

हम जान चुके हैं कि ऑपरेटिंग सिस्टम दरअसल सिस्टम सॉफ्टवेयर है, यानी इसकी मदद से ही कोई कंप्यूटर काम कर सकता है। इस लिहाज से कोई भी ऑपरेटिंग सिस्टम वह माध्यम है, जो उपयोगकर्ता और कंप्यूटर के बीच की महत्वपूर्ण कड़ी का काम करता है।

यहां यह बिन्दु अति महत्वपूर्ण है कि ऑपरेटिंग सिस्टम के बिना किसी उपयोगकर्ता के लिए कंप्यूटर से अभीष्ट कार्य करा पाना असंभव तो नहीं है, लेकिन बेहद कठिन जरूर है। ऑपरेटिंग सिस्टम का महत्व इससे समझा जा सकता है कि यह उपयोगकर्ता (User) के आदेशों, एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर पर दर्ज निर्देशों को कंप्यूटर तक पहुंचाने और प्रोसेसिंग के बाद मिलने वाले परिणाम और अन्य सूचनाओं को वापस उपयोगकर्ता तक पहुंचाने का काम करता है। इसके अलावा किसी खास कार्य के निष्पादन या मनचाहे परिणाम प्राप्त करने के लिए उपयोगकर्ता ने जो प्रोग्राम तैयार किए हैं, उन्हें शुरू कराने से लेकर पूरी प्रक्रिया

के बाद खत्म कराने तक की जिम्मेदारी भी ऑपरेटिंग सिस्टम पर होती है। हार्डवेयर के सभी संसाधनों को जरूरत पड़ने पर प्रोग्राम के लिए उपलब्ध कराना और उपयोगकर्ता के लिए उपयोगी डाटा को सुरक्षित रखने का काम भी ऑपरेटिंग सिस्टम की मदद से ही संभव हो पाता है। ऑपरेटिंग सिस्टम, एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर, उपयोगकर्ता और कंप्यूटर के बीच संबंध को निम्न ग्राफ से समझा जा सकता है:



इतिहास और विकास (History and Development)

हम जानते हैं कि कंप्यूटर के विकास की शुरूआत एकल उद्देश्य की पूर्ति के लिए हुई थी, जिसे गणना कहा जाता है। इस तरह के कंप्यूटर मुख्यतः कैल्कुलेटर ही थे, लेकिन जिस तरह गणनाएं और जरूरतें बढ़ती गईं, एक से अधिक कार्य कंप्यूटर की मदद से किए जाने लगे। वर्ष 1950 में अस्तित्व में आए प्रारंभिक कंप्यूटर में कोई ऑपरेटिंग सिस्टम तो नहीं था, लेकिन इनमें रेजीडेंट मॉनीटर (Resident Monitor) नाम का खास फंक्शन मौजूद था, इसकी वजह से कंप्यूटर की कार्यक्षमता, एक्यूरेसी (Accuracy) और गति (Speed) में भी खासी बढ़ोतरी हुई। इसके बाद ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास पर कंप्यूटर अनुसंधानकर्ताओं का ध्यान गया। वर्ष 1960 तक कंप्यूटरों में बैच प्रोसेसिंग, इनपुट-आउटपुट इंटरप्ट, बफरिंग जैसे कार्य करना संभव हो गया था। हालांकि, अब भी यह सिंगल टास्किंग मशीन (Single Tasking Machine) ही थी, यानी कंप्यूटर पर एक समय में एक ही काम कर पाना संभव हो सकता था।

मेनफ्रेम ऑपरेटिंग सिस्टम (Mainframe OS)

हम जानते हैं कि वर्ष 1980 में पर्सनल कंप्यूटर के विकास से पहले सुपर और मेनफ्रेम कंप्यूटर ही अस्तित्व में थे। चूंकि सुपर कंप्यूटर बेहद महंगे थे, लिहाजा मेनफ्रेम कंप्यूटर ही अधिकतर प्रयोग किए जाते थे और ऑपरेटिंग सिस्टम भी मेनफ्रेम कंप्यूटरों के लिए ही विकसित हुए। मेनफ्रेम कंप्यूटरों के लिए कब-कैसे ऑपरेटिंग सिस्टम का विकास हुआ, यह निम्नवत समझा जा सकता है:

- वर्ष 1950: रेजीडेंट मॉनीटर फंक्शन

- वर्ष 1959: आईबीएम ने अपने मेनफ्रेम कंप्यूटर आईबीएम-704 के लिए शेयर (SHARE) ऑपरेटिंग सिस्टम तैयार किया। आईबीएम के आईबीएम-709 और आईबीएम-7090 मेनफ्रेम कंप्यूटरों में भी यही ऑपरेटिंग सिस्टम प्रयोग किया गया, हालांकि जल्द ही कंपनी ने एक और नया ऑपरेटिंग सिस्टम विकसित कर लिया, जिसे आईबीएम-709, 7090 और 7094 मेनफ्रेम कंप्यूटरों पर इस्तेमाल किया गया। इस ऑपरेटिंग सिस्टम का नाम था आईबीसिस या आईबीजॉब (IBSYS/ IBJOB)
- वर्ष 1960: आईबीएम कंपनी ने हर तरह के काम के लिए एक सिंगल ऑपरेटिंग सिस्टम (Single Operating System) तैयार किया, जिसे नाम दिया गया ओएस-360 (OS360) आईबीएम का यह ऑपरेटिंग सिस्टम आज के दौर के सभी ऑपरेटिंग सिस्टम का मूलाधार है। खास बात यह है कि उस वक्त इस ऑपरेटिंग सिस्टम के लिए प्रोग्राम इस तरह लिखे गए थे कि यह सिस्टम आज के दौर के कंप्यूटरों पर भी आसानी से चलाया जा सकता है।

ओएस-360 की खासियत यह थी कि यह पहला ऐसा सिस्टम था जो उपयोगकर्ता की जरूरत के मुताबिक संसाधनों को उपलब्ध कराने के अलावा डाटा को मेन और सहायक मेमोरी में सेव करने में मदद करता था। यह पहला सिस्टम था, जिसके जरिये फाइल लॉकिंग (File Locking) का काम संभव हो सका।

कालान्तर में आईबीएम के दूसरे जितने भी ऑपरेटिंग सिस्टम विकसित हुए, वे सभी दरअस ओएस-360 में ही कुछ सुधार कर तैयार किए जाते रहे। दूसरी ओर 1960 में ही कंट्रोल डाटा ऑपरेशन्स (Control Data Oprations) और मिनोसेटा यूनिवर्सिटी के संयुक्त प्रयासों से बैच प्रोसेसिंग के मकसद से एक ऑपरेटिंग सिस्टम विकसित किया गया। इसका नाम था स्कोप (SCOPE)

- वर्ष 1961: बरॉज कॉरपोरेशन ने बी5000 नाम से नया मेनफ्रेम कंप्यूटर पेशकया जो मास्टर कंट्रोल प्रोग्राम (MCP) नाम के ऑपरेटिंग सिस्टम से सुसज्जित था। यह दुनिया का पहला ऐसा ऑपरेटिंग सिस्टम था, जिसके लिए पहली बार हाई लेवल लैंग्वेज (High Level Language) ESPOL में प्रोग्राम लिखे गए थे। यही नहीं, इस मशीन में पहली बार वर्चुअल मेमोरी का भी इस्तेमाल किया गया था। यह अपने दौर का बेहद क्रान्तिकारी कदम था। शायद यही वजह थी कि उस दौर की सबसे बड़ी कंप्यूटर निर्माता कंपनी ने अपने हार्डवेयर प्रोजेक्ट एएस400 (AS400) के लिए बरॉज कॉरपोरेशन से इस ऑपरेटिंग सिस्टम के इस्तेमाल की इजाजत मांगी, लेकिन कंपनी ने इनकार कर दिया। एमसीपी का इस्तेमाल आज भी यूनिसिस क्लियरपाथ कंप्यूटरों में किया जा रहा है। दूसरी ओर, बाद में आईबीएम ने सीपी-67 नाम से अपने सिस्टम पर काम किया, जो वर्चुअल मेमोरी Virtual Memory) पर फोकस था।
- वर्ष 1970: 1961 से 1970 तक ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास को लेकर लगातार शोध होते रहे। हर पुराने सिस्टम में कुछ संशोधन कर जल्द ही नया सिस्टम तैयार कर लिया जाता था। इस कड़ी में यह साल भी शामिल रहा। इस वर्ष कंट्रोल डाटा कॉरपोरेशन और मिनोसेटा यूनिवर्सिटी ने क्रोनोर और एनओएस सिस्टम पेश किए। इनकी खासियत टाइमशेयरिंग और एक साथ कई काम किया जाना थी। कंट्रोल डाटा ने ही बाद में यूनिवर्सिटी ऑफ इलियोनिस के साथ मिलकर प्लेटो (PLATO) नाम से ऑपरेटिंग सिस्टम तैयार किया, जिसकी मदद से पहली बार रियल टाइम चैटिंग और मल्टी यूजर ग्राफिकल गेम्स जैसे फीचरों का सफल निष्पादन संभव हो सका। प्लेटो अपने दौर का सबसे आधुनिक ऑपरेटिंग सिस्टम बन गया।

इसी साल पहली कॉमर्शियल कंप्यूटर निर्माता कंपनी यूनिवैक (UNIVAC) ने एक्जेक (EXEC) नाम से ऑपरेटिंग सिस्टम की एक सीरीज पेश की जो रियल टाइम बेस्ड (Real Time Based) थी। इसी तरह जनरल इलेक्ट्रिक और एमआईटी ने जनरल कांप्रेहेन्सिव ऑपरेटिंग सिस्टम (GCOS) तैयार किया। वहीं, डिजिटल इक्विपमेंट कॉरपोरेशन ने टॉप्स-10 (TOPS-10)और टॉप्स-20 (TOPS-20) जैसे ऑपरेटिंग सिस्टम तैयार किए जो मुख्यतः विश्वविद्यालयों के लिए खासे उपयोगी साबित हुए। इनके अलावा भी कई अन्य ऑपरेटिंग सिस्टम लगातार विकसित किए जाते रहे।

- माइक्रो कंप्यूटर सिस्टम (Micro Computer OS)

हम जानते हैं कि पहले माइक्रो कंप्यूटर या पर्सनल कंप्यूटर का विकास आईबीएम कंपनी ने 1980 में किया था। उस वक्त यह सिर्फ प्रयोग के तौर पर तैयार किए गए थे। शुरूआती दौर में पर्सनल कंप्यूटरों में अधिक क्षमता भी नहीं थी, लिहाजा इनके लिए अलग से ऑपरेटिंग सिस्टम की जरूरत महसूस नहीं की गई, क्योंकि तब कंप्यूटरों का दैनन्दिन जीवन में कोई विशेष उपयोग नहीं किया जाता था। हालांकि, तब भी इन कंप्यूटरों में रॉम यानी मेमोरी उपलब्ध रहती थी। उस दौर में इन कंप्यूटरों को मॉनीटर (IBM-DOS or PC-DOS) कहा जाता था।

पर्सनल कंप्यूटर के प्रारंभिक दौर में पहला ऑपरेटिंग सिस्टम था सीपी-एम (CP-M)जो डिस्क ऑपरेटिंग सिस्टम (Disk Operating System) था। लेकिन जल्दी ही माइक्रोसॉफ्ट ने अपना ऑपरेटिंग सिस्टम एमएस-डॉस (MS-DOS) पेश किया। लांचिंग के साथ ही यह सिस्टम सबसे अधिक लोकप्रिय हो गया। इसकी एक बड़ी वजह यह भी थी कि आईबीएम कंपनी ने अपने माइक्रो कंप्यूटरों के लिए इसी ऑपरेटिंग सिस्टम का चयन किया, जिसे तब आईबीएम डॉस या पीसी डॉस (IBM-DOS or PC-DOS) भी कहा जाता था।

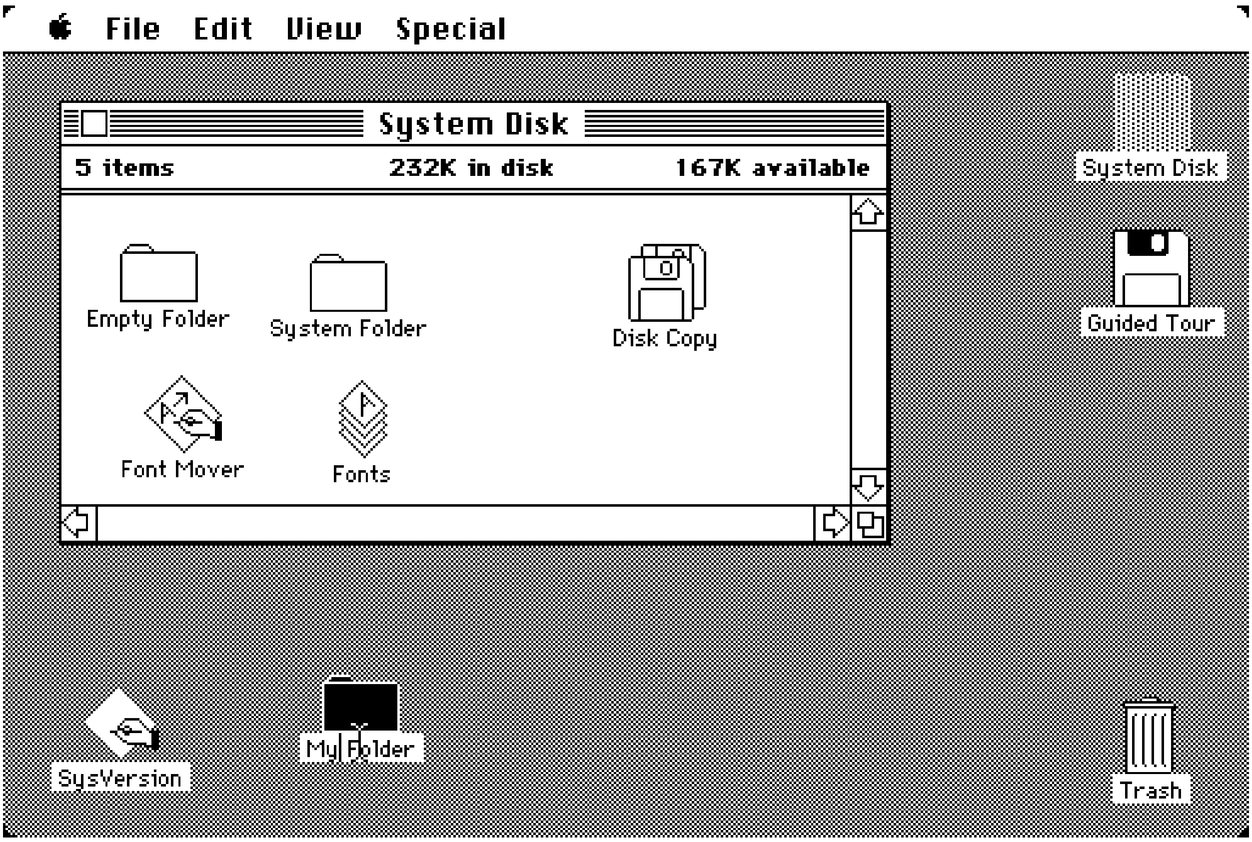
```
Current date is Tue  1-01-1980
Enter new date:
Current time is  7:48:27.13
Enter new time:


The IBM Personal Computer DOS
Version 1.10 (C)Copyright IBM Corp 1981, 1982

A>dir/w
COMMAND  COM    FORMAT   COM    CHKDSK   COM    SYS      COM    DISKCOPY COM
DISKCOMP COM    COMP     COM    EXE2BIN  EXE    MODE     COM    EDLIN    COM
DEBUG    COM    LINK     EXE    BASIC    COM    BASICA   COM    ART      BAS
SAMPLES  BAS    MORTGAGE BAS    COLORBAR BAS    CALENDAR BAS    MUSIC    BAS
DONKEY   BAS    CIRCLE   BAS    PIECHART BAS    SPACE    BAS    BALL     BAS
COMM     BAS
       26 File(s)
A>dir command.com
COMMAND  COM     4959   5-07-82  12:00p
        1 File(s)
A>
```

(आईबीएम कंप्यूटर में इस्तेमाल किया जाने वाला पीसी डॉस)

दूसरी ओर, कंप्यूटर निर्माता दूसरी बड़ी कंपनी एप्पल (Apple Inc) ने भी लगभग आईबीएम के समानांतर एप्पल मेकिनटोश (Apple Macintosh) नाम से अपना माइक्रो कंप्यूटर पेश किया। इस कंप्यूटर की खासियत थी इसका ऑपरेटिंग सिस्टम मैकिन्टोश परेटिंग सिस्टम, जिसे मैक ओएस (MAC OS) भी कहा जाता है। इस ऑपरेटिंग सिस्टम की मदद से एप्पल कंपनी अपने पर्सनल कंप्यूटर में ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (Graphical User Interface- GUI) देने में सफल रही। इस इंटरफेस का तात्पर्य ऐसी व्यवस्था से है, जिसके तहत उपयोगकर्ता मशीन पर चल रहे प्रोग्राम को आइकन (Icons) की मदद से पहचान सके, ताकि उसे काम करने में आसानी हो। सबसे खास बात यह थी कि अपने इस नये प्रोजेक्ट को आगे बढ़ाने के लिए एप्पल कंपनी ने अपने शुरूआती पर्सनल कंप्यूटर प्रोजेक्ट एप्पल 2 (Apple II) को बंद कर दिया था।



(एप्पल मैकिनटोश में इस तरह आइकन बने नजर आते थे)

वर्ष 1985 में 32 बिट आर्किटेक्चर और पेजिंग क्षमता वाली इनटेल 80386 सीपीयू चिप ने पर्सनल कंप्यूटर के विकास में नयी क्रान्ति पैदा की। दरअसल, इस चिप के इस्तेमाल के बाद ही पर्सनल कंप्यूटर मेनफ्रेम और मिनी कंप्यूटरों की तरह मल्टी टास्किंग (Multi Tasking) ऑपरेटिंग सिस्टम को चलाने लायक बन सका। इस बिन्दु को ध्यान में रखते हुए माइक्रोसॉफ्ट कंपनी ने वीएमएस (VMS) ऑपरेटिंग सिस्टम बनाने वाले डेविड कटलर को अपने साथ जोड़ लिया और उन्हें माइक्रोसॉफ्ट के पुराने ऑपरेटिंग सिस्टम (DOS) को आगे बढ़ाते हुए विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम (Windows Operating System) को तैयार करने की कमान सौंप दी गई। दूसरी तरफ एप्पल कंपनी के सह संस्थापक स्टीव जॉब्स का ध्यान भी इनटेल 80386 चिप ने खींचा। स्टीव ने नेक्स्ट कंप्यूटर नाम से अपनी अलग कंपनी बनाई और इसके तहत नेक्स्टस्टेप (NEXTSTEP) ऑपरेटिंग सिस्टम तैयार किया। कालान्तर में एप्पल ने यह सिस्टम

खरीद लिया और मैकिनटोश के साथ इसका उपयोग किया। मौजूदा पर्सनल कंप्यूटरों में अधिकतर इस्तेमाल होने वाले ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज और मैकिनटोश ही हैं। हालांकि, लाइनक्स (LINUX) यूनिक्स (UNIX) भी ऑपरेटिंग सिस्टम हैं, लेकिन पर्सनल कंप्यूटरों में इनका बहुत अधिक इस्तेमाल नहीं किया जाता है।

ऑपरेटिंग सिस्टम के प्रकार (Types of Operating System)

ऑपरेटिंग सिस्टम को इनकी कार्यक्षमता और इनकी कार्यशैली के आधार पर दो अलग तरह से बांटा जा सकता है। यूनिट के इस हिस्से में दोनों तरीकों से ऑपरेटिंग सिस्टमों को आसानी से जान सकेंगे। कर्यक्षमता के आधार पर ऑपरेटिंग सिस्टम को छह प्रमुख भागों में बांटा जा सकता है। ये हैं एकल एवं बहुल कार्य (Single and Multi Tasking) एकल एवं बहुल उपयोगकर्ता (Single and Multi Users), वितरित सिस्टम (Distributed), टेंपलेटेड (Templated), एंबेडेड (Embedded), लाइब्रेरी (Library) और रियल टाइम (Real Time)

- एकल और बहुल कार्य (Single and Multi Tasking): शुरूआत करते हैं एकल एवं बहुल कार्य सिस्टम से। जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है कि सिंगल ऑपरेटिंग सिस्टम वे सिस्टम हैं, जो एक समय में एक ही काम करने में सक्षम हैं, दूसरी ओर मल्टी टास्किंग ऑपरेटिंग सिस्टम उपयोगकर्ता को एक ही वक्त में एक से अधिक काम करने की क्षमता प्रदान करते हैं। मल्टी टास्किंग ऑपरेटिंग सिस्टम टाइम अचीविंग (Time Achieving) के जरिये ऐसा कर पाते हैं। लेकिन इसमें भी ऑपरेटिंग सिस्टम दो तरह से काम करते हैं। पहला है प्रीएंप्टिव और दूसरा को-ऑपरेटिव। प्रीएंप्टिव (Preemptive) ऑपरेटिंग सिस्टम के तहत प्रोसेसर में हर प्रोग्राम के लिए टाइम शेयर (Time Share) कर लिया जाता है, जिससे प्रोसेसर तय समय में एक के बाद एक हर प्रोग्राम पर काम करता है। लेकिन, इसमें परेशानी यह होती है कि एक प्रोग्राम की प्रोसेसिंग पूरी होने के बाद ही दूसरा शुरू हो सकता है। यानी उपयोगकर्ता को दूसरे प्रोग्राम पर जाने के लिए इंतजार करना होता है। इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम हैं लाइनक्स (Liunx) यूनिक्स(Unix), सेालरिस (Soalaris), अमीगा (Amiga) दूसरी ओर, को-ऑपरेटिव ऑपरेटिंग सिस्टम में हर काम को इस तरीके से प्रोसेस किया जाता है कि प्रोसेसर में हर काम के लिए अलग टाइम स्लाॅट तय करने के साथ प्रोसेसिंग को भी बांट दिया जाता है। इससे एक ही समय में एक साथ अलग-अलग काम करना संभव हो पाता है। विंडोज 16-बिट ऐसा ही ऑपरेटिंग सिस्टम है। हालांकि, विंडोज का 32-बिट ऑपरेटिंग सिस्टम और विंडोज 9x ऑपरेटिंग सिस्टम प्रीएंप्टिव सिस्टम थे।
- एकल एवं बहुल उपयोगकर्ता (Single and Multi Users)% एकल यूजर ऑपरेटिंग सिस्टम एकल उपयोगकर्ता के लिए ही उपयोगी होता है। हालांकि, यह भी बहुत अधिक सुविधाएं प्रदान नहीं करता, फिर भी इतनी सहूलियत जरूर होती है कि इसमें एक साथ कुछ प्रोग्राम चलाए जा सकते हैं। दूसरी ओर, मल्टीटास्किंग यूजर ऑपरेटिंग सिस्टम एक से अधिक उपयोगकर्ताओं को डिस्क स्पेस (Disk Space) सुविधा के जरिये कंप्यूटर (Interact) करने की सुविधा प्रदान करता है। इससे इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम पर एक साथ कई उपयोगकर्ता एक ही समय पर काम करने में सक्षम होते हैं। इसी तरह टाइम शेयरिंग ऑपरेटिंग सिस्टम भी खास तरीकों से प्रोसेसर टाइमिंग, प्रिंटर, मास स्टोरेज और अन्य संसाधनों का एलॉकेशन (Allocation) करता है, जिससे एक ही समय पर अलग-अलग उपयोगकर्ता अलग-अलग संसाधन का उपयोग अपने अभीष्ट परिणाम प्राप्त करने में कर सकें।

- वितरित सिस्टम (Distributed): इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम को सिंगल एंड मल्टीटास्किंग-यूजर का वृहद और विस्तृत स्वरूप माना जा सकता है। दरअसल, इस सिस्टम के जरिये ऐसे कई कंप्यूटरों को साथ जोड़ा जा सकता है, जो दरअसल भौतिक रूप से एक-दूसरे से दूर हों। यह काम नेटवर्किंग (Networking) के जरिये किया जाता है, जिसकी प्रक्रिया को हम आगे जानेंगे। वस्तुतः इस तरह के सिस्टम का विकास ही नेटवर्किंग की अवधारणा के बाद हुआ। इसके जरिये एक ही समय में एक साथ कई सारे कंप्यूटरों को ऑपरेट किया जाना संभव हो सका। कंप्यूटरों पर को-ऑपरेशन (Co-operation) के तहत होने वाले काम को ही वितरित सिस्टम कहा जाता है।
- टेंपलेटेड (Templated): टेंपलेट का शाब्दिक अर्थ होता है खास पैटर्न (Pattern) यानी किसी खास मकसद की पूर्ति के लिए तैयार किया जाने वाला ऑपरेटिंग सिस्टम। यह ऑपरेटिंग सिस्टम वितरित सिस्टम का और अधिक परिष्कृत स्वरूप है। मुख्यतः इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम का प्रयोग इंटरनेट बेस्ड (Internet Based) क्लाउड कंप्यूटिंग (Cloud Computing) में किया जाता है। इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम में किसी भी डाटा, सूचना को वर्चुअलाइज (Virtualize) कर लिया जाता है। इसके बाद यह डाटा या सूचना सर्वर (Server) तक पहुंचा दिया जाता है, जहां वह स्टोर रहता है। अब भविष्य में जब भी किसी उपयोगकर्ता को किसी खास डाटा की आवश्यकता होती है तो टेंपलेट ऑपरेटिंग सिस्टम की मदद से वह आसानी से उसे सर्वर से हासिल कर लेता है।
- एंबेडेड सिस्टम (Embeded System): एंबेडेड ऑपरेटिंग सिस्टम एंबेडेड कंप्यूटरों के लिए बनाए जाते हैं। एंबेडेड कंप्यूटरों का अर्थ उन कंप्यूटरों से है, जिनका निर्माण कुछ खास मकसद से किया जाता है, जो कम आकार, कम स्पेस और कम संसाधनों के बावजूद सुरक्षित और विश्वसनीय तरीके से उपयोगकर्ता के निर्देशों का पालन कर सकें।

(पीडीए आधारित एक मोबाइल डिवाइस)

उदाहरण के लिए इसे पीडीए (Personal Digital Assistant) से समझा जा सकता है। पीडीए दरअसल एक मोबाइल डिवाइस है, जो इंटरनेट से जुड़ सकती है, डाटा और सूचनाएं संग्रहीत कर सकती है और उपयोगकर्ता की जरूरत के मुताबिक जानकारी उपलब्ध करा सकती है। यही वजह है कि पीडीए को हैंडहोल्ड पीसी (Handhold PC) भी कहा जाता था। हालांकि वर्ष 2010 के बाद स्मार्टफोन के विकास और आईफोन ऑपरेटिंग सिस्टम (i-OS) और एंड्रॉयड (Android) के विकास के बाद पीडीए का उपयोग काफी कम, लभगग नगण्य, रह गया।

- रियल टाइम सिस्टम (Real Time Operating System): इस तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम यह सुनिश्चित करते हैं कि उपयोगकर्ता जो काम करना चाहता है या जो डाटा इस्तेमाल करना चाहता है, वह निश्चित समयावधि में परिणाम के रूप में उसके सामने उपलब्ध हो। ये ऑपरेटिंग सिस्टम सिंगल टास्किंग भी हो सकते हैं और मल्टी टास्किंग भी। अंतर सिर्फ यह होता है कि मल्टी टास्किंग होने की स्थिति में ये ऑपरेटिंग सिस्टम निर्धारित कलन विधियों (Scheduled Algorithms) की मदद से लक्ष्य हासिल करता है। कलन विधियां, गणितीय शब्द है।

  ये दरअसल किसी एप्लीकेशन प्रोग्राम के वे स्टेप हैं, जिनपर चलकर प्रोसेसर उपयोगकर्ता को अभीष्ट परिणाम उपलब्ध कराता है। एल्गोरिथम में भी ये ऑपरेटिंग सिस्टम दो तरह से काम करते हैं। पहला है इवेंट ड्राइवन सिस्टम (Event Driven System) इसके तहत ऑपरेटिंग सिस्टम उपयोगकर्ता की ओर से मिले आदेशों को प्राथमिकता (Priority) के क्रम में तय करता है और एक के बाद एक तय समय में इन्हें पूरा करता है। वहीं, टाइम शेयरिंग सिस्टम (Time Sharing System) में कार्यों के लिए समय निर्धारण किया जाता है।
- लाइब्रेरी (Library): लाइब्रेरी ऑपरेटिंग सिस्टम भी मुख्यतः कंप्यूटर नेटवर्किंग से जुड़ा हुआ है। यह सिस्टम दरअसल किसी खास तरह की नेटवर्किंग में इस्तेमाल किए जाने वाले सभी ऑपरेटिंग सिस्टमों का एक समूह है, जो लाइब्रेरी के स्वरूप में उपलब्ध रहता है।

- प्रमुख ऑपरेटिंग सिस्टम(Some Operating Systems)

कंप्यूटर के विकास के अनुक्रम में ही ऑपरेटिंग सिस्टमों का भी विकास तेजी से हुआ। जिस हिसाब से जरूरतें बढ़ती गईं, उसी हिसाब से लगातार शोध और अनुसंधानों की मदद से ऑपरेटिंग सिस्टमों की ईजाद कर समस्याओं का हल निकाला जाता रहा। कुछ प्रमुख ऑपरेटिंग सिस्टमों के बारे में हम यहां जानने का प्रयास करेंगेः

- यूनिक्स (Unix): यूनिक्स मल्टीटास्किंग, मल्टीयूजर कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम है, जिसे 1970 में अमेरिका की अमेरिकन टेलीफोन एंड टेलीग्राफ कंपनी (AT&T) की बेल रिसर्च लैब (Bell Lab) में केन थॉमसन, डेनिस रिची की टीम ने तैयार किया था। टीम ने यूनिक्स सिस्टम बनाने का प्रोजेक्ट 1968 में शुरू किया था। शुरूआत में यह ऑपरेटिंग सिस्टम असेंबलिंग लैंग्वेज (Assembling Language) में लिखा गया था, जो उस समय प्रोग्रामिंग की प्रचलित भाषा थी। प्रारंभ में यह ऑपरेटिंग सिस्टम सिर्फ बेल लैब के ही कार्यों के निष्पादन के लिए तैयार किया गया था। बाद में एटीएंडटी ने यह ऑपरेटिंग सिस्टम अन्य संस्थाओं को भी देना शुरू किया। इसके लिए यूनिक्स के एकेडमिक और का ॅमर्शियल दो वर्जन तैयार किए गए। इसके शुरूआती उपयोगकर्ताओं में यूनिवर्सिटी ऑफ कैलीफोर्निया, माइक्रोसा ॅफ्ट, बर्कले, आईबीएम, सन माइक्रोसिस्टम्स जैसी कंपनियां रहीं। यूनिक्स अपनी खास पद्धति पर काम करता है, जिसे अकसर कंप्यूटर विशेषज्ञ यूनिक्स फिलॉसफी (Unix Pholosophy) भी कहते हैं। यह सिस्टम उपयोगकर्ता को ऐसे टूल्स (Tools) का समूह उपलब्ध कराता है, जिनमें से हरेक एक खास फंक्शन (Function) को पूरा करते हैं। इसके अलावा यह इन सभी टूल्स की मदद से संयुक्त यूनिफाइड फाइल सिस्टम और शेल (Shell) कमांड सिस्टम भी विकसित करता है, जिससे वर्कफ्लो (Workflow) में मदद मिलती है। बेहतरीन कार्यक्षमता और उपयोगकर्ता के लिए खासा

मददगार साबित हुआ यूनिक्स पहला पोर्टेबल ऑपरेटिंग सिस्टम (Portable Operating System) माना जाता है। यही वजह है कि इसके बाद विकसित हुए अधिकतर ऑपरेटिंग सिस्टमों का मूल आधार यूनिक्स ही रहा। यही नहीं, समय के साथ जैसे-जैसे प्रोग्रामिक भाषाएं विकसित होती रहीं, वैसे-वैसे हर भाषा में यूनिक्स को हर बार नये स्वरूप में तैयार किया गया।

- यूनिक्स लाइक फैमिली (Unix Like Family): यूनिक्स कंप्यूटर के विकास का बड़ा आविष्कार था। मेनफ्रेम और मिनी कंप्यूटरों के लिहाज से यह बेहद उपयोगी था, जहां बल्क डाटा (Bulk Data) आता था।एटीएंडटी-बेल रिसर्च लैब में विकास के बाद यूनिक्स के टेªडमार्क द ओपन ग्रुप ने हासिल कर लिए, जिसने एचपी, आईबीएम, एप्पल और सन माइक्रोसिस्टम्स को यूनिक्स ऑपरेटिंग सिस्टम को अपने कंप्यूटरों में प्रयोग करने को ही अधिकृत किया है। ऐसे में यूनिक्स से मिलते-जुलते ऑपरेटिंग सिस्टम तैयार करने शुरू किए गए। यूनिक्स के समकक्ष कई नये ऑपरेटिंग सिस्टम उभरकर सामने आए, जिन्हें यूनिक्स लाइक फैमिली कहा जाता है। इनमें लाइनक्स (Linux), वी सिस्टम (V System), बीएसडी (BSD) शामिल हैं। इनमें से अधिकतर का उपयोग एकेडमिक संस्थाओं, इंजीनियरिंग कंपनियों के सर्वर में किया जाता है।
- लाइनक्स (Linux): यह ऑपरेटिंग सिस्टम फिनलैंड के एक इंजीनियरिंग छात्र लाइनस टोर्वेल्ड्स ने तैयार किया। पढ़ाई के दौरान एक प्रोजेक्ट पर काम करते हुए लाइनस ने अपने इस ऑपरेटिंग सिस्टम के बारे में एक अखबार में जानकारी प्रकाशित की। हालांकि, तब तक यह पूरी तरह तैयार नहीं हुआ था, लेकिन अखबार में प्रकाशन के बाद कई विशेषज्ञ, इंजीनियरिंग छात्रों ने लाइनस को इस प्रोजेक्ट में मदद की, अपेक्षित सुधार किए, जिसके बाद लाइनक्स सिस्टम वजूद में आया।

(मौजूदा दौर में सबसे अधिक इस्तेमाल किए जाने वाले एंड्रॉयड सिस्टम वाले मोबाइल फोन का ऑपरेटिंग सिस्टम लाइनक्स ही है)

लाइनक्स को यूनिक्स लाइक ऑपरेटिंग सिस्टम माना जाता है, लेकिन अपनी तरह के दूसरे सिस्टम से लाइनक्स इस लिहाज में अलग है कि इसे बनाने में यूनिक्स कोड का इस्तेमाल नहीं किया गया है। ओपन लाइसेंस मोड होने के कारण लाइनक्स कोड अध्ययन और सुधारीकरण के लिए भी खुला है। अपनी इसी खूबी के कारण लाइनक्स सुपर कंप्यूटरों से लेकर स्मार्टवॉच तक का ऑपरेटिंग सिस्टम बन गया। मल्टीटास्किंग, मल्टीयूजर सर्वर से लेकर मोबाइल फोन जैसे एंबेडेड कंप्यूटरों में भी लाइनक्स का पूरा इस्तेमाल किया जाता है। गूगल क्रोम और क्रोम ब्राउजर भी लाइनक्स आधारित हैं।

- मैक ओएस (Mac-OS): मैकिन्टोश ऑपरेटिंग सिस्टम (Macintosh Operating System) एप्पल कंपनी की ओर से तैयार किया गया ऑपरेटिंग सिस्टम है। ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (GUI) आधारित यह पहला ऑपरेटिंग सिस्टम नहीं था, लेकिन जीयूआई का पहला सबसे अधिक लोकप्रिय सिस्टम बना।

मैक से पहले 1980 में जेरॉक्स कॉरपोरेशन (Xerox Corporation) ने सबसे पहले जीयूआई पर शोध किया। इस शोध से सिद्ध हुआ कि हाथ में पकड़े जा सकने वाले किसी साधन (Tool) की मदद से कंप्यूटर को निर्देश समझाना अधिक आसान और सुगम है। कंपनी ने अपने इस शोध के आधार पर अपना खुद का कंप्यूटर जेरॉक्स स्टार (Xerox Star) भी लांच किया, लेकिन इसमें जीयूआई सिस्टम यानी ग्राफिकल यूजर इंटरफेस की परिकल्पना पूरी तरह सफल नहीं हो सकी थी। दूसरी ओर, एप्पल भी इसी विषय पर शोध कर रहा था और उसने संपूर्ण जीयूआई आधारित ऑपरेटिंग सिस्टम यानी मैक तैयार कर बाजी मार ली। एप्पल ने वर्ष 1984 में अपना पहला मैक ऑपरेटिंग सिस्टम पेश किया था, जिसे बाद में परिष्कृत किया जाता रहा।

- माइक्रोसॉफ्ट विंडोज (Microsoft Windows): पर्सनल या माइक्रो कंप्यूटर आज डेस्कटॉप (Desktop) या लैपटॉप (laptop) के रूप में लगभग हर घर में इस्तेमाल हो रहा है। और जब भी हम अपना डेस्कटॉप या लैपटॉप खोलते हैं तो उसमें हमें विंडोज 7, 8 या एक्सपी ही बतौर ऑपरेटिंग सिस्टम नजर आती है। इसकी वजह यह है कि दुनियाभर के कुल वेब कनेक्टेड कंप्यूटरों में से 88.9 प्रतिशत में विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम इस्तेमाल किया जाता है। इसके बारे में हम आगे विस्तार से जानेंगे।
- माइक्रोसॉफ्टविंडोज (Microsoft Windows OS)

वर्ष 1985 में माइक्रोसॉफ्टकॉरपोरेशन ने पहली बार विंडोज 1.0 ऑपरेटिंग सिस्टम को लांच किया था। पूरी तरह ग्राफिकल यूजर इंटरफेस आधारित यह सिस्टम जल्द ही बेहद लोकप्रिय हो गया। यही वजह थी कि आईबीएम ने अपने कंप्यूटरों के लिए इस ऑपरेटिंग सिस्टम को आधिकारिक रूप से स्वीकृत और उपयोग किया।

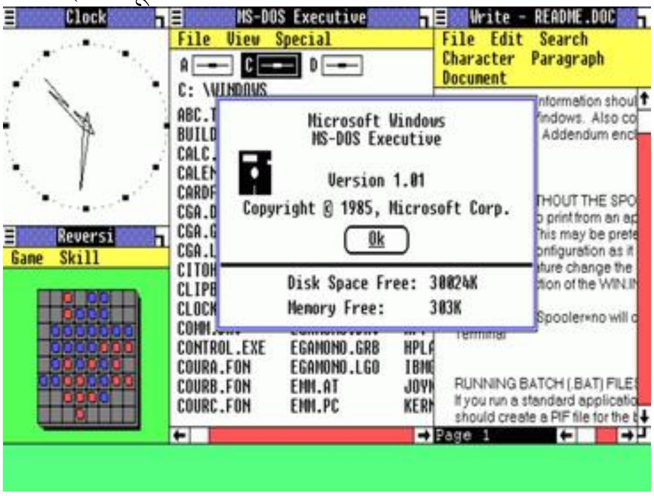
आईबीएम के अलावा भी अन्य कंप्यूटर निर्माता कंपनियों ने अपने पर्सनल कंप्यूटरों में विंडोज का ही इस्तेमाल किया है।

माइक्रोसॉफ्टकॉरपोरेशन 1985 से लेकर 2015 तक अभी तक विंडोज 1.0 से लेकर विंडोज 10 तक ऑपरेटिंग सिस्टम के अलग-अलग वर्जन लांच कर चुका है। विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम का हर नया वर्जन यानी संस्करण पिछले वाले संस्करण में रह गई कमियों को दूर करके बनाया जाता रहा, जिसकी वजह से हर नया विंडोज सिस्टम उपयोगकर्ताओं के लिए और अधिक उपयोगी और लाभकारी बनता चला गया। दुनियाभर के अधिकतर कंप्यूटरों में विंडोज सिस्टम इस्तेमाल किए जाने के पीछे शायद यही वजह है। यहां

यह उल्लेखनीय है कि विंडोज 7.0 सबसे अधिक लोकप्रिय और सर्वाधिक इस्तेमाल किया जाने वाला ऑपरेटिंग सिस्टम है। विंडोज में समय के साथ आए बदलावों को हम निम्नवत समझ सकते हैं:

विंडोज 1.0: माइक्रोसॉफ्टकी ओर से वर्ष 1985 में यह सबसे पहला जीयूआई आधारित ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया गया था, इसकी सबसे बड़ी खासियत उपयोगकर्ता की जरूरत के हिसाब से मल्टीटास्किंग करना भी थी। 32X32 पिक्सल (Pixels) के आइकन और कलर स्कीम इस ऑपरेटिंग सिस्टम की विशेषताएं रहीं।

विंडोज 1.2: विंडोज 1.0 की कामयाबी के दो साल बाद यानी वर्ष 1987 में माइक्रोसॉफ्टने अपने ऑपरेटिंग सिस्टम का यह परिष्कृत स्वरूप पेश किया। इस ऑपरेटिंग सिस्टम की विशेषता यह थी कि इसमें विंडोज की ओवरलैपिंग (Overlapping) की सुविधा उपलब्ध थी। ओवरलैपिंग का मतलब यह है कि एक विंडो के उपर इसमें दूसरी विंडो खोली जा सकती थी।



(विंडोज का पहला जीयूआई ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज 1.0)

विंडोज 2.10: वर्ष 1987 में ही माइक्रोसॉफ्टकंपनी ने अपना अगला ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज 2.10 ऑपरेटिंग सिस्टम के नाम से लांच किया। इस ऑपरेटिंग सिस्टम की खासियत रही आभासी मशीन (Virtual Machines) इस मशीन का तात्पर्य ऐसे सिस्टम से है जो मुख्य कंप्यूटर से जुड़कर एक ऐसी व्यवस्था बनाता है, जो पूरे ऑपरेटिंग सिस्टम पर निगरानी रखते हुए जरूरत के हिसाब से किसी काम को करने के लिए हार्डवेयर को इस तरह नियंत्रित करते हैं कि वे एक ही कंप्यूटर में अवस्थित होने के बावजूद अलग-अलग काम करने में सक्षम हों।

विंडोज 3.0: माइक्रोसॉफ्टने वर्ष 1990 में यह ऑपरेटिंग सिस्टम जारी किया। ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (GUI) इंटरफेस प्लेटफॉर्म पर यह विंडोज का सबसे सफल ऑपरेटिंग सिस्टम रहा। उस दौर के जीयूआई आधारित मैक और अमीगा ऑपरेटिंग सिस्टम के मुकाबले यह सिस्टम उतारा गया था, जो काफी हद तक उपयोगकर्ताओं को लुभाने में कामयाब भी रहा। इस ऑपरेटिंग सिस्टम में पहली बार आइकन आधारित प्रोग्राम मैनेजर (Program Manager) और फाइल मैनेजर (File Manager) की व्यवस्था दी गई।

इससे पहले माइक्रोसॉफ्टकंपनी के सभी पुराने ऑपरेटिंग सिस्टम में डॉ स (DOS) आधारित फाइल और प्रोग्राम मैनेजर दिया जाता था। लेकिन विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम में ऐसी नयी सुविधाएं दी गई, जिनकी मदद से सिस्टम को केंद्रीयकृत (Centralised) करना आसान हो गया। इनके अलावा विंडोज का बेहद लोकप्रिय गेम सालिटेयर पहली बार इसी सिस्टम में लांच हुआ। यही नहीं, आज टाइपिंग के लिए सर्वाधिक

प्रयोग किया जाने वाला नोटपैड, कैल्कुलेट और कलरबार तथा विशेष मेनु के साथ पेंटब्रश भी परिष्कृत स्वरूप में इसी ऑपरेटिंग सिस्टम में लांच किए गए।

विंडोज 3.1: विंडोज का यह नया परिष्कृत ऑपरेटिंग सिस्टम वर्ष 1992 में पेश किया गया। इस सिस्टम की खासियत थी मल्टीमीडिया और नेटवर्किंग की क्षमता। खास बात यह थी कि इस सिस्टम में पहली बार माइक्रोसॉफ्टमेल (Microsoft Mail) की सुविधा उपयोगकर्ताओं को मिली। इस सिस्टम में माइक्रोसॉफ्टने नोटपैड के लिए तीन फाॅन्ट का इस्तेमाल किया, ये थे: Times New Roaman, Arial और Courior New इनके अलावा चिह्नों(Symbols) को भी शामिल किया गया।

विंडोज 3.11: यह ऑपरेटिंग सिस्टम वर्ष 1993 में लांच किया गया था। इसकी खासियत यह थी कि इसमें 32 बिट नेटवर्किंग और 32 बिट फाइल सिस्टम की सुविधा उपलब्ध थी। इसके जरिये यह ऑपरेटिंग सिस्टम मल्टीटास्किंग के साथ मल्टीयूजर भी बन गया। इससे एक ही ऑपरेटिंग सिस्टम से एक साथ 20 से अधिक कंप्यूटरों को जोड़ना संभव हो सका। माइक्रोसॉफ्टकी ओर से यह ऑपरेटिंग सिस्टम इस तरह तैयार किया गया था कि यह पर्सनल कंप्यूटरों के अलावा नेटवर्किंग उपयोगकर्ताओं और ऑफिस में उपयोग के लिए तैयार किया गया था।

विंडोज 95: वर्ष 1995 में माइक्रोसॉफ्टने विंडोज 95 ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया। यह पूर्णतः 32 बिट ऑपरेटिंग सिस्टम था, जिसकी मदद से मल्टीटास्किंग और नेटवर्किंग का काम और अधिक आसान होता गया। सबसे बड़ी खासियत यह थी कि इस सिस्टम में माइक्रोसॉफ्टने अपने शुरूआती सिस्टम डॉस (DOS) और विंडोज 3.1 के फीचर्स को संयुक्त करने में कामयाबी हासिल की। प्लग एंड प्ले फीचर इस विंडोज के सबसे बड़े साधन (Tools) थे। आज भी हम कंप्यूटर पर जो स्टार्ट बटन देखते हैं (जिस पर क्लिक करने के बाद कंप्यूटर पर मौजूद सभी प्रोग्राम, फाइल मैनेजर आदि की सारिणी खुल जाती है) वह सबसे पहले इसी विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम में पेश किया गया था। यही नहीं, जब भी हम कोई प्रोग्राम बंद करना चाहते हैं तो उसके लिए हमें लंबी प्रोसेस के बजाय सीधे क्लोज (Close) बटन पर क्लिक करना होता है। यह क्लोज बटन भी सबसे पहले विंडोज 95 में ही शामिल किया गया था।

(विंडोज 95 ऑपरेटिंग सिस्टम का होमपेज)

विंडोज 98: वर्ष 1998 में माइक्रोसॉफ्टने यह ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया। इस ऑपरेटिंग सिस्टम की सबसे बड़ी खासियत यह थी कि इसकी मदद से इंटरनेट का इस्तेमाल कर पाना संभव और सुगम हो सका।

पहली बार इस ऑपरेटिंग सिस्टम में माइक्रोसॉफ्टने इंटरनेट एक्सप्लोरर (Internet Explorer) 4.01 दिया, इसके अलावा इंटरनेट पर इस्तेमाल की जा सकने वाली अन्य एप्लीकेशन जैसे आउटलुक एक्सप्रेस, विंडोज एक्सप्रेस बुक, फ्रंटपेज एक्सप्रेस, माइक्रोसॉफ्टचैट, पर्सनल वेब सर्वर, वेब पब्लिशिंग विजार्ड, नेट मीटिंग भी इस ऑपरेटिंग सिस्टम में शामिल की गईं।

विंडोज ने वर्ष 1999 में इस ऑपरेटिंग सिस्टम में कुछ और सुधार करते हुए विंडोज 98 सेकंड एडिशन (SE) लांच किया। इस सिस्टम में इंटरनेट एक्सप्लोरर को और अधिक परिष्कृत करते हुए 5.0 वर्जन पेश किया गया। इसके अलावा पिछले सिस्टम में शामिल नेट शो प्लेयर की जगह विंडोज मीडिया प्लेयर भी डाला गया।

विंडोज 2000 एमईः इस ऑपरेटिंग सिस्टम का मूल आधार भी विंडोज 98 ही था। वर्ष 2000 में लांच किया गया यह ऑपरेटिंग सिस्टम इंटरनेट के बढ़ते स्कोप को ध्यान में रखते हुए विकसित किया गया था। इसमें अधिकतर फीचर्स विंडोज 98 वाले ही थे, लेकिन इसमें यह सुविधा दी गई थी कि इसकी मदद से इंटरनेट पर नेटवर्किंग का काम आसान हो सके। यही वजह थी कि इसे विंडोज एनटी भी कहा जाता है। माइक्रोसॉफ्टने इस सिस्टम के चार वर्जन प्रोफेशनल, सर्वर, एडवांस्ड सर्वर और डाटा सर्वर लांच किए। इससे यह सिंगल यूजर से लेकर मल्टी यूजर तक के लिए उपयोगी ऑपरेटिंग सिस्टम बन सका।

- विंडोज XP: विंडोज एनटी फैमिली की अगली कड़ी के तौर पर वर्ष 2004 में यह ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया गया। शुरूआत में यह सिस्टम व्यावसायिक उपयोग के लिए ही तैयार किया जा रहा था, लेकिन पर्सनल कंप्यूटरों की बढ़ती मांग को देखते हुए इसे पर्सनल और व्यावसायिक दोनों उपयोग के लिए बनाया गया। इस सिस्टम की खासियत इसका बेहतर जीयूआई, सुधारीकृत हार्डवेयर सपोर्ट, विस्तृत मल्टीमीडिया शृंखला रहीं। विंडोज एक्सपी इस कदर लोकप्रिय हुआ कि लांचिंग के महज पांच साल के भीतर चार लाख कंप्यूटरों पर यह ऑपरेटिंग सिस्टम इंस्टाॅल कर लिया गया था। वर्ष 2014 में पूरी तरह बंद होने तक यह ऑपरेटिंग सिस्टम प्रयोग करने वाले कंप्यूटर उपयोगकर्ताओं की संख्या दुनियाभर में दस लाख से भी अधिक हो चुकी थी।

विंडोज विस्टाः वर्ष 2007 में विंडोज का यह ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया गया। इसमें नेटवर्किंग की बेहतर सुविधाओं के साथ प्रिंट, ऑडियो प्ले, विंडोज डीवीडी मेकर जैसे नये फीचर्स भी शामिल किए गए। इस सिस्टम में सबसे अहम खासियत थी इसका ऐरो ग्लास लुक (Aero Glass Look) इसके तहत विंडोज के पिछले ऑपरेटिंग सिस्टम में चले आ रहे ग्राफिक यूजर इंटरफेस (Graphical User Interface) को रि-डिजाइन करने के साथ आकर्षक स्वरूप दिया गया। इसके तहत लेआउट में बदलाव के साथ एप्लीकेशन में भी उपयोगकर्ता के लिए उपयोगी परिवर्तन किए गए। संचार (Communication) के स्तर पर यह विंडो प्रोग्राम लिखने वाले विशेषज्ञों के लिए खासी मददगार साबित हुई। इसके अलावा इस विंडोज में नेटवर्किंग पर खासा ध्यान दिया गया था। इसके तहत इस ऑपरेटिंग सिस्टम की मदद से अलग-अलग कंप्यूटरों पर मल्टीमीडिया, फाइलों का आदान-प्रदान कर पाना संभव हो सका। लेकिन परेशानी यह थी कि इस विंडोज को चलाने के लिए सिस्टम में काफी हैवी हार्डवेयर की जरूरत होती थी।

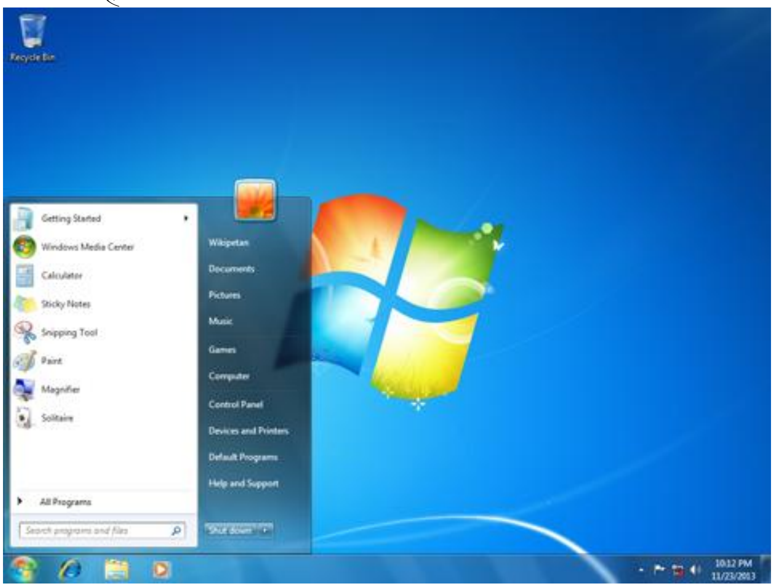
इसके अलावा इसकी लाइसेंसिंग प्रक्रिया भी काफी जटिल थी। सुरक्षा के पहलू पर भी इसकी गुणवत्ता को लेकर सवाल उठते रहे। इसके बावजूद वर्ष 2009 में विंडोज के नये वर्जन विंडोज 7 की लांचिंग तक

दुनियाभर में चार लाख से अधिक इंटरनेट यूजर्स विस्टा का प्रयोग करने लगे थे। हालांकि, यह संख्या विंडोज एक्सपी से काफी कम थी।

(विंडोज विस्टा का ऐरो ग्लास लुक)

विंडोज 7: माइक्रोसॉफ्टने वर्ष 2009 में सिर्फ पर्सनल कंप्यूटर आधारित अपना पहला ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज 7 लांच किया। आलोचकों ने विंडोज विस्टा की जिन कमियों को उजागर (Point Out) किया था, कंपनी ने विंडोज 7 में उन्हें दूर करने पर फोकस किया।

विंडोज ऐरो में लगातार सुधार के साथ इस सिस्टम में कुछ नये फीचर्स जोड़े गए, जिनमें इंटरनेट एक्सप्लोरर 8, विंडोज मीडिया प्लेयर, विंडोज मीडिया सेंटर, सुरक्षात्मक प्रक्रियाओं के लिए एक्शन सेंटर, नया रिडिजाइन्ड टास्कबार और लाइब्रेरी शामिल हैं। इस सिस्टम को इस तरह तैयार किया गया कि यह कंप्यूटर के हार्डवेयर और सॉफ्टवेयरके बीच बेहतर सामंजस्य स्थापित करने का जरिया बन सके। सबसे बड़ी बात यह थी कि जिन आलोचकों ने विंडोज विस्टा पर सवालिया निशान खड़े किए थे, उन्होंने ही विंडोज 7 को अब तक का बेहतरीन ऑपरेटिंग सिस्टम करार दिया।



(विंडोज 7 की होमस्क्रीन)

विंडोज 7 माइक्रोसॉफ्टकंपनी के लिए बेहतरीन वरदान साबित हुआ। विशेष पहलू यह है कि कंपनी ने ऑनलाइन रिटेल कंपनी अमेजन.कॉम पर अपने इस उत्पाद की बिक्री शुरू की थी और महज छह महीने

के भीतर ही एक लाख से अधिक ग्राहकों ने यह ऑपरेटिंग सिस्टम खरीद लिया जो 2012 तक करीब साढ़े साठ लाख हो गए। ताजा आंकड़ों पर नजर डालें तो विंडोज 7 डेस्कटॉप ऑपरेटिंग सिस्टम के मार्केट में 47.77 प्रतिशत हिस्सेदारी रखता है। यह माइक्रोसॉफ्टका सबसे अधिक उपयोग किया जाने वाला ऑपरेटिंग सिस्टम है।

विंडोज 8: माइक्रोसॉफ्टने वर्ष 2012 में विंडोज 8 नाम से नया पर्सनल कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम लांच किया। इसे हम निम्न चित्र से आसानी से समझ सकेंगेः

(विंडोज 8 ऑपरेटिंग सिस्टम की होमस्क्रीन)

यह सिस्टम दरअसल, इस तरीके से डिजाइन किया गया है कि यह टैबलेट का इस्तेमाल करने वाले उपभोक्ताओं के लिए मददगार साबित हो सके। मोबाइल फोन की दुनिया में इस समय तक एंड्रॉयड (Android) आईफोन ऑपरेटिंग सिस्टम (i-OS) विंडोज से काफी आगे निकल चुके थे। मूलतः विंडोज 8 का स्वरूप इस तरह रखा गया है कि इसे मेट्रो डिजाइन (Metro Design) कहा जाता है। इसकी होम स्क्रीन पर प्रोग्राम और एप्लीकेशन पिछली विंडोज की तरह सारिणी में दिखने के बजाय ग्रिड में नजर आते हैं, ठीक वैसे ही जैसे हमें अपने मोबाइल फोन में दिखते हैं। माइक्रोसॉफ्टने इस ऑपरेटिंग सिस्टम को इस तरह तैयार किया है कि यह माउस के साथ अंगुलियों से छूकर भी परफाॅर्म (Perform) करे, यानी यह ऑपरेटिंग सिस्टम टचस्क्रीन (Touchscreen) प्रक्रिया पर काम करता हैै। इसके अलावा सुरक्षा की दृष्टि से इस ऑपरेटिंग सिस्टम में इन-बिल्ट (In Built) एंटीवायरस (Antivirus) उपलब्ध है, साथ ही यह माइक्रोसॉफ्टस्मार्टस्क्रीन फिशिंग फिल्टरिंग (Microsoft Smart Screen Phishing Filtering) सिस्टम से भी ऑनलाइन जुड़ सकता है, जो वायरस से इस सिस्टम की रक्षा करता है। जुलाई 2015 में माइक्रोसॉफ्टने अपना नवीनतम ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज 10 लांच किया है।

ऑपरेटिंग सिस्टम का बाजार (Market Share of OSs)

कंप्यूटर और मोबाइल फोन के बढ़ते इस्तेमाल ने दुनिया को ग्लोबल विलेज (Global Village) की शक्ल दे दी है। टनों वजनी मशीन से प्रारंभ हुई कंप्यूटर की विकास यात्रा आज महज 100-150 ग्राम वजनी मोबाइल फोन तक आ चुकी है। इसके पीछे जहां वैज्ञानिक शोधों-अनुसंधानों का परिणाम है, वहीं इसके पीछे लगातार परिष्कृत होते गए ऑपरेटिंग सिस्टम भी महत्वपूर्ण हैं। इन दिनों दुनियाभर में कंप्यूटरों और मोबाइल फोन में इस्तेमाल किए जा रहे ऑपरेटिंग सिस्टम के कितने उपभोक्ता हैं और बाजार में कौन सा ऑपरेटिंग सिस्टम कितना शेयर रखता है, यह हम निम्न सारिणी से समझ सकते हैंः

ऑपरेटिंग सिस्टम	उपभोक्ता (मिलियन में)
एंड्रॉयड	878
विंडोज	328
मैक और आईफोन	267
ब्लैकबेरी	24
अन्य	803
कुल	2300

(नोटः यह आंकड़े वर्ष 2013 के हैं, स्रोतः गूगल)

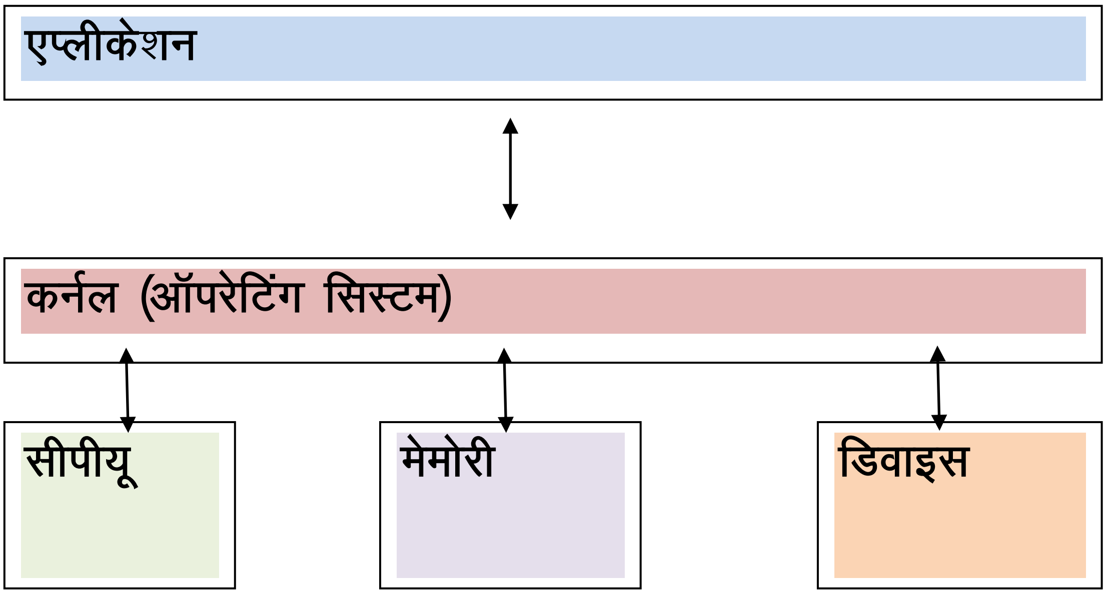
24.5 ओएस के घटक (Components of OS)

विकीपीडिया (Wikipedia) पर नजर डालें तो उसमें ऑपरेटिंग सिस्टम की परिभाषा कुछ यूं दी गई है, 'ऑपरेटिंग सिस्टम किसी कंप्यूटर का मेरूदंड होता है, जो इसके सॉफ्टवेयर और हार्डवेयर को नियंत्रित रखता है। यह हार्डवेयर और सॉफ्टवेयरके बीच सेतु का काम करता है और सॉफ्टवेयरघटक होता है। इसकी मदद से एक से अधिक सीपीयू में भी प्रोग्राम चलाए जा सकते हैं।

इस यूनिट के अध्ययन के जरिये अब तक हम ऑपरेटिंग सिस्टम के कार्य, उसके प्रकार, ऑपरेटिंग सिस्टम के महत्व आदि से अच्छी तरह वाकिफ हो चुके हैं। लेकिन यह जानना भी हमारे लिए बहुत आवश्यक है कि ऑपरेटिंग सिस्टम के मुख्य घटक (Components) क्या हैं। यूनिट के इस हिस्से में हम इन्हीं घटकों के बारे में विस्तार से जानेंगे। ये घटक ऑपरेटिंग सिस्टम के वे हिस्से हैं, जिनकी बदौलत ऑपरेटिंग सिस्टम कंप्यूटर के सॉफ्टवेयरयानी एप्लीकेशन प्रोग्राम और हार्डवेयर यानी सीपीयू के बीच बेहतर सामंजस्य स्थापित करने में सफल हो पाता है।

कर्नल (Kernel)

कर्नल किसी ऑपरेटिंग सिस्टम का सबसे अहम और केंद्रीय (Central) भाग है। यानी ऑपरेटिंग सिस्टम की जो भी गतिविधियां होती हैं, वे सब कर्नल के ही इर्द-गिर्द होती हैं या यूं भी कह सकते हैं कि कर्नल की वजह से ही ऑपरेटिंग सिस्टम ठीक से काम कर पाता है। हालांकि, इस सबके बावजूद कंप्यूटर उपयोगकर्ता (User) कभी भी न तो कर्नल को देख पाता है, न ही इसे महसूस कर सकता है, क्योंकि यह नेपथ्य (Behind The Scene) रहकर काम करता है। किसी ऑपरेटिंग सिस्टम में कर्नल किस तरह काम करता है, यह हम निम्नवत ग्राफ से समझ सकते हैं:



सामान्य शब्दों में यह भी कहा जा सकता है कि कर्नल ही किसी ऑपरेटिंग सिस्टम की बुनियाद है। इसकी मदद से ही ऑपरेटिंग सिस्टम यह तय कर पाता है कि किसी एप्लीकेशन सॉफ्टवेयरके लिए कब-किस वक्त पर कौन सा हार्डवेयर समुचित परिणाम प्राप्त करने के लिए इस्तेमाल करने की जरूरत होगी। हम जब भी कंप्यूटर ऑन करते हैं, वह कर्नल ही है जो सिस्टम को रिबूट (Reboot) करता है, मेमोरी को चेक करता है, किसी प्रोग्राम के लिए मेमोरी लोकेट (Locate) करना या नहीं करना यह सब कर्नल की मदद से ही संभव हो पाता है। अब कर्नल (ऑपरेटिंग सिस्टम) किसी एप्लीकेशन सॉफ्टवेयरकी मदद में किस तरह पूरी प्रक्रिया करता है, इसे हम निम्न बिंदुओं में समझ सकेंगेः

- प्रोग्राम एक्जीक्यूशन(Program Execution): एक्जीक्यूशन का हिन्दी अर्थ होता है निष्पादन या प्रक्रिया यानी किसी काम को संपन्न करना या करने का तरीका। अब हम यह भली-भांति जानते हैं कि ऑपरेटिंग सिस्टम का मुख्य काम एप्लीकेशन प्रोग्राम और कंप्यूटर हार्डवेयर के बीच सामंजस्य बनाना है। इसमें कर्नल सबसे अधिक मददगार साबित होता है। दरअसल, कर्नल ही ऑपरेटिंग सिस्टम का वह हिस्सा है जो प्रोग्राम के लिए मेमोरी स्पेस तय करता है, इसके लिए जरूरी हार्डवेयर उपलब्ध करवाता है, मल्टीटास्किंग सिस्टम में एक से अधिक एप्लीकेशन के लिए टाइम शेयरिग (Time Sharing) करता है, उपयोगकर्ता की ओर से मिलने वाले निर्देशों को बाइनरी कोड में तब्दील कर हार्डवेयर, सीपीयू तक पहुंचाता है और फिर परिणाम हासिल कर उन्हें दोबारा हाई लेवल लैंग्वेज में बदलकर उपयोगकर्ता के समझने लायक बनाता है।
- व्यवधान (Interrupt)% प्रोग्राम एक्जीक्यूशन के दौरान कई बार हार्डवेयर और एप्लीकेशन प्रोग्राम के बीच बाधाएं या व्यवधान उत्पन्न होते हैं। दरअसल, ये व्यवधान सिग्नल (Signal) के रूप में होते हैं, जो हार्डवेयर से ऑपरेटिंग सिस्टम को या एप्लीकेशन प्रोग्राम से ऑपरेटिंग सिस्टम को मिलते हैं। ये सिग्नल असल में तब आते हैं, जब किसी प्रोग्राम को चलाने के लिए किसी खास हार्डवेयर की जरूरत होती है या एक्जीक्यूशन के दौरान हार्डवेयर प्रोग्राम एप्लीकेशन के किसी खास हिस्से को और बेहतर समझना चाहता है। ऐसी स्थिति में यह कर्नल की जिम्मेदारी है कि वह तुरंत प्रक्रिया जहां तक पहुंची है, वहीं रोक दे, लेकिन जितनी प्रोसेसिंग हो चुकी है, उसे सुरक्षित (Save) भी रखे। इसके बाद कर्नल हार्डवेयर

के लिए जरूरी प्रोग्राम या प्रोग्राम के लिए जरूरी हार्डवेयर को तलाशकर प्रक्रिया को दोबारा वहीं से शुरू करवाता है, जहां वह रुकी थी।

मोड (Modes)% आधुनिक सीपीयू (Central Processing Unit) कई मोड पर काम करती हैं। इनमें यूजर मोड (User Mode) और सुपरवाइजर मोड (Supervisor Mode) प्रमुख हैं। सुपरवाइजर मोड में कर्नल खुद ही सभी प्रोग्राम के एक्जीक्यूशन के लिए जरूरी निर्णय लेता है और हार्डवेयर को निर्देश प्रदान करता है। दूसरी ओर कुछ प्रोग्राम एप्लीकेशन ऐसे होते हैं, जो कर्नल की मदद के बिना खुद ही सीधे ऑपरेटिंग सिस्टम की लाइब्रेरी और अन्य संसाधनों का उपयोग करते हैं। अब ऐसे किसी प्रोग्राम के संचालन की स्थिति में कंप्यूटर सिस्टम भ्रमित न हो और वह क्रैश (Crash) न हो जाए, यह सुनिश्चित करता है कर्नल। कर्नल यूजर मोड और सुपरवाइजर मोड के बीच एक लक्ष्मणरेखा सी खींच देता है, जिससे किसी एप्लीकेशन के स्वतंत्र रूप से काम करने के दौरान कर्नल के स्तर पर कोई बाधा उत्पन्न न हो।

- मेमोरी प्रबंधन (Memory Management)% हम जानते हैं कि मल्टीटास्किंग सिस्टम का तात्पर्य एक ऐसे सिस्टम है, जिस पर एक ही समय में एकसाथ एक से अधिक प्रोग्राम संचालित किए जा सकें। अब यदि इसे मानवीय उदाहरण के जरिये समझने की कोशिश करें तो हम जानेंगे कि जब कभी हम एक ही समय में एक साथ दो या दो से अधिक काम करने लगते हैं तो आशंका इस बात की अधिक रहती है कि हमारा कोई काम या तो अधूरा रह जाएगा या पूरा ध्यान नहीं दे पाने के कारण प्रारंभ ही नहीं होगा। कंप्यूटर सिस्टम में ऐसी स्थिति से ऑपरेटिंग सिस्टम को बचाता है कर्नल। कर्नल एक से अधिक प्रोग्राम चलने पर यह सुनिश्चित करता है कि सिस्टम की पूरी मेमोरी का सही उपयोग हो। इसके लिए वह हर प्रोग्राम को जरूरत के हिसाब से मेमोरी उपलब्ध कराता है। यही नहीं, यह भी तय करता है कि जिस वक्त किसी खास मेमोरी लोकेशन पर कोई एक प्रोग्राम एक्जीक्यूट (Execute) हो रहा है, उसी मेमोरी लोकेशन पर दूसरा प्रोग्राम न जा सके।
- मल्टीटास्किंग (Multitasking)% हम जब भी किसी कंप्यूटर पर एक साथ एक से अधिक प्रोग्राम चलाते हैं, तो हमें भले ही यह अनुभूति (Experience) होती है कि दोनों प्रोग्राम एकसाथ एक ही समय पर चल रहे हैं, लेकिन दरअसल दोनों अलग-अलग समय पर चलते हैं। होता यह है कि यह सब एक्जीक्यूशन इतनी तेजी से और इतने व्यवस्थित ढंग से होता है कि समय का यह अंतर बेहद नगण्य होता है। प्रोग्राम संचालन की यह समय व्यवस्था भी कर्नल की बदौलत संभव हो पाती है। कर्नल ही तय करता है कि किस प्रोग्राम के एक्जीक्यूशन के लिए कितना समय लगने वाला है। वह एक से अधिक प्रोग्राम के संचालन के लिए समय निर्धारण (Time Scheduling) करता है, जिससे मल्टीटास्किंग संभव होती है। एक प्रोग्राम पहले से चल रहे दूसरे प्रोग्राम के संपन्न होने तक कतार (Queue) में रहता है।
- डिस्क एक्सेस-फाइल सिस्टम (Disk Access-File System)% हम जब भी कंप्यूटर खोलते हैं तो उसमें सी, डी, ई, एफ, सीडी के आइकन नजर आते हैं। इनमें से सी, डी, ई, एफ.... आदि उस हार्डडिस्क ड्राइव के भाग हैं, जो कंप्यूटर की मेमोरी और सीपीयू का हिस्सा है। सीडी या डीवीडी ड्राइव कंप्यूटर की एक्सटर्नल मेमोरी का हिस्सा है। अब ऑपरेटिंग सिस्टम का यह काम है कि किसी डाटा को फाइल की शक्ल में इन मेमोरी में सुरक्षित रखे।

इस पूरी प्रक्रिया को फाइल सिस्टम (File System) कहा जाता है, जिसमें उपयोगकर्ता को यह सहूलियत मिलती है कि वह किसी डाटा, सूचना, परिणाम को फाइल की शक्ल में सुरक्षित रखे और इसे नाम या चिह्नों की मदद से पहचान दे। अब जब भी कोई प्रोग्राम कंप्यूटर पर चलता है तो कर्नल तय करता

है कि प्रोग्राम के लिए कौन सा डाटा उपयुक्त है और यह फाइल सिस्टम में कहां उपलब्ध है। इसके बाद हार्डवेयर और एप्लीकेशन आसानी से संबंधित जानकारी तक पहुंच सकते हैं।

- डिवाइस ड्राइवर्स (Device Drivers)% डिवाइस ड्राइवर ऑपरेटिंग सिस्टम का अहम हिस्सा हैं। ये भी दरअसल कुछ खास तरह के प्रोग्राम हैं, जो किसी खास एप्लीकेशन की मदद में हार्डवेयर के लिए तैयार किए जाते हैं। किसी प्रोग्राम को चलाने के दौरान कौन सा हार्डवेयर किस तरह काम करेगा, यह इन ड्राइवर के जरिये तय किया जाता है। यही वजह है कि अकसर एप्लीकेशन प्रोग्राम के लिए अलग डिवाइस ड्राइवर कंप्यूटर में इंस्टॉल करने की जरूरत पड़ती है। कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम के पुराने वर्जनों में अकसर यह होता था कि डिवाइस ड्राइवर किसी प्रोग्राम के चलने पर खुद ही एक्जीक्यूशन शुरू कर देते थे। लेकिन विंडोज के विस्टा वर्जन की लांचिंग के बाद से ऑपरेटिंग सिस्टम में बदलाव किया गया है। इसके तहत अब डिवाइस ड्राइवर प्रोग्राम के चलने पर कर्नल की मदद लेते हैं। कर्नल एक बार एक्जीक्यूशन शुरू हो जाने के बाद खुद को प्रक्रिया से अलग कर लेता है और प्रक्रिया पूरी हो जाने या प्रक्रिया के बीच कोई अगला निर्देश नहीं मिलने तक डिवाइस ड्राइवर को अपने स्तर पर ही काम करने की स्वतंत्रता प्रदान करता है।

नेटवर्किंग (Networking)

हम जानते हैं कि विकास के अनुक्रम में कंप्यूटर मल्टीयूजर, मल्टीटास्किंग मशीन बन चुका है। इसीका एक स्वरूप है नेटवर्किंग। नेटवर्किंग का तात्पर्य उस व्यवस्था से है जो एक से अधिक कंप्यूटरों को एक-दूसरे के बीच डाटा एक्सचेंज (Data Exchange) की सुविधा प्रदान कर सके। ये कंप्यूटर या तो तारों के जाल के जरिये एक-दूसरे से जुड़े हो सकते हैं या फिर वायरलेस (Wireless) नेटवर्क की मदद से, जिसे नेटवर्क नोड (Network Nodes) कहा जाता है। इस प्रक्रिया में पर्सनल कंप्यूटर, सर्वर, फोन आदि कुछ भी जोड़ा जा सकता है। आज के दौर में नेटवर्क का सर्वाधिक प्रचलित स्वरूप है इंटरनेट, जिसके बारे में हम आगे विस्तार से जानेंगे।

- सुरक्षा (Security)

कंप्यूटर की बढ़ती जरूरतों और दैनन्दिन मानव जीवन में उपयोग की वजह से आधुनिक दौर के ऑपरेटिंग सिस्टम ऐसे असंख्य संसाधनों (Resources) को कंप्यूटर पर मौजूद एप्लीकेशन को चलाने की आजादी प्रदान करते हैं। लेकिन इस पूरी प्रक्रिया के बीच ऑपरेटिंग सिस्टम यह भी तय करते हैं कि प्रोग्राम संचालन के लिए उन्हें नेटवर्क के जरिये जो भी निर्देश मिलते हैं, वे अनुमतियोग्य हैं भी या नहीं। यही वजह है कि आज के दौर के अधिकतर ऑपरेटिंग सिस्टम ऐसे सुरक्षा फीचर्स से लेस हैं, जो कंप्यूटर सिस्टम पर किसी भी तरह के अनधिकृत गतिविधियों को रोक सकती हैं। कंप्यूटर पर यूजर एकाउंट, मोबाइल फोन पर फिंगरप्रिंट एक्सेस, ईमेल पर ईमेल-पासवर्ड आदि ऐसे ही फीचर्स हैं, जिनसे गुजरने के बाद ही कोई उपयोगकर्ता कंप्यूटर एप्लीकेशन और हार्डवेयर का इस्तेमाल कर पाता है।

विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम की बात करें तो इनमें एन्टी फिशिंग फिल्टर (Anti Phishing Filter)इंटरनेट एक्सप्लोरर में पहले से मौजूद होता है। फिशिंग वह प्रक्रिया है, जिसके जरिये उपयोगकर्ता की व्यक्तिगत (Personal) जानकारी, जैसे- डेबिट कार्ड का पिनकोड, ई-मेल के पासवर्ड आदि, निकालने का प्रयास किया जाता है। एन्टी फिशिंग फिल्टर की मदद से इंटरनेट एक्सप्लोरर इस तरह की गतिविधियों को पहचान कर उन्हें नुकसान पहुंचाने से पहले ही रोक देता है। इसके अलावा विंडोज सिस्टम फायरवॉल (Firewall) से सुसज्जित होता है, जिसकी मदद से वायरस से बचा जा सकता है। हालांकि,

फायरवॉल कंप्यूटर में पहले से स्थापित और इंटरनेट तक सूचनाएं पहुंचाने में सक्षम प्रोग्रामों को नियंत्रित नहीं करता है। ऐसे में अधिकतर उपयोगकर्ता बाह्य फायरवा ॅल को कंप्यूटर इंस्टा ॅल करते हैं। विंडोज डिफेंडर भी विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम का हिस्सा है। यह स्वयं काम करता है और किसी भी तरह की अनधिकृत प्रक्रिया की सूचना उपयोगकर्ता तक पहुंचा देता है। इसके अलावा एक्शन सेटिंग (Action Settings) के जरिये उपयोगकर्ता को यह सुविधा मिलती है कि वह ऑपरेटिंग सिस्टम में प्रदत्त सुरक्षा व्यवस्था को अपनी सहूलियत के अनुरूप शुरू या बंद कर सके।

- यूजर इंटरफेस (User Interface)

हम जानते हैं कि कंप्यूटर हमारी यानी मानवों की भाषा नहीं समझ सकता, न ही हम कंप्यूटर की बाइनरी भाषा को समझ सकते हैं। ऐसे में यह जरूरी हो जाता है कि कंप्यूटर और इसे उपयोग करने वाले के बीच कुछ ऐसा अंतराफलक (Interface) हो, जो एक-दूसरे को समझ नहीं पाने के बावजूद दोनों के बीच बेहतर समझदारी विकसित कर सके। यही प्रक्रिया यूजर इंटरफेस कहलाती है और कंप्यूटर-मानव संबंध में यही ऑपरेटिंग सिस्टम की बड़ी जिम्मेदारी है।

कंप्यूटर के विकास के क्रम में इसकी शुरुआत चिह्नों, संकेतकों, अक्षरों से हुई थी और मौजूदा दौर के अधिकतर ऑपरेटिंग सिस्टम ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (Graphical User Interface) का इस्तेमाल करते हैं, जिसमें आइकन के जरिये प्रोग्राम एप्लीकेशन और उपयोगकर्ता के बीच बेहतर संबंध बन पाता है। यूजर मा ॅनीटर पर नजर आने वाले आइकन के जरिये किसी फाइल, प्रोग्राम या डाटा को आसानी से पहचान सकता है और उस पर क्लिक कर अभीष्ट परिणाम हासिल करता है।

24.6 इंटरनेट (Internet)

कंप्यूटर के मानव जीवन का अभिन्न अंग बन जाने के बाद आज के दौर में शायद ही ऐसा कोई व्यक्ति होगा जो इंटरनेट (Internet) से परिचित न हो या जिसने इस सुविधा का कभी इस्तेमाल नहीं किया हो। हम जानते हैं कि नेटवर्किंग वह व्यवस्था है, जिसमें एक से अधिक कई कंप्यूटरों को डाटा एक्सचेंज के लिए आपस में जोड़ा जा सकता है, लेकिन इस तरह की नेटवर्किंग की सीमाएं तय हैं। इस तरह का नेटवर्क किसी एक संस्थान में, ऑफिस में, शिक्षण संस्थान में संभव है, जहां सभी कंप्यूटर एक-दूसरे से जुड़े हुए हों। अब इंटरनेट शब्द भी नेटवर्किंग से ही जुड़ा हुआ है, लेकिन इसका तात्पर्य किसी निश्चित या सीमित दायरे में कंप्यूटरों का एक-दूसरे से जुड़ना ही नहीं है। बल्कि यह नेटवर्कों का एक ऐसा नेटवर्क (Network of Networks) है, जो असीमित है। इसमें आम आदमी से लेकर निजी संस्थाओं, शैक्षणिक संस्थानों, कंपनियों, व्यापार, स्वास्थ्य, खेल-मनोरंजन समेत जीवन के हर आयाम की जानकारियों का स्थानीय से लेकर वैश्विक (Global) पहुंच का जाल है जो इंटरनेट प्रोटोकॉल (Internet Protocol)] वर्ल्ड वाइड वेब (World Wide Web) इलेक्ट्रॉनिक मेल (E-mail), टेलीफोन के जरिये दुनियाभर के कंप्यूटरों से जुड़ा हुआ है। कंप्यूटरों के बीच यह जुड़ाव वायरलेस, इलेक्ट्रिक और ऑप्टिकल तकनीक के माध्यम से संपन्न होता है।

- इंटरनेट का संक्षिप्त इतिहास (Internet's Brief History)

इंटरनेट की शुरुआत कब, कैसे हुई यह हम निम्न बिन्दुओं से समझेंगेः

- वर्ष 1969 में अमेरिकी रक्षा विभाग ने एडवांस रिसर्च प्रोजेक्ट एजेंसी (Advanced Research Project Agency- ARPA) नाम से एक नेटवर्क लांच किया, यह नेटवर्क युद्धकाल में गोपनीय सूचनाओं के त्वरित आदान-प्रदान के उद्देश्य से तैयार किया गया था

- एआरपीए की कामयाबी के बाद इसे रक्षा मामलों से इतर सामान्य जनजीवन के लिए उपयोग करने लायक बनाने का प्रोजेक्ट प्रारंभ किया गया। तब इसे नाम दिया गया एडवांस रिसर्च प्रोजेक्ट एजेंसी नेटवर्क (ARPANET) अमेरिकी वैज्ञानिक लियोनॉर्ड क्लिनरॉक और पा ॅल बैरन तथा ब्रिटिश वैज्ञानिक डोनाल्ड डेविस और लॉरेंस रॉबट्र्स ने इस सिस्टम का कांसेप्ट डिजाइन किया था
- ARPANET में कार्यरत अमेरिकी वैज्ञानिक रेमंड सैमुअल टॉम्लिनसन या रे टॉम्लिनसन ने नेटवर्क के लिए पहला फाइल ट्रांसफर प्रोग्राम (FTP) सीपीवाईनेट (CPYNET) तैयार किया। इसके जरिये ARPANET से जुड़े कंप्यूटरों पर सूचनाओं का आदान-प्रदान संभव हो सका। टॉम्लिनसन ने ही सबसे पहले 1972 में ई-मेल की शुरुआत की। हालांकि, प्रारंभ में इस तरह की ई-मेल उसी उपयोगकर्ता को भेजी जा सकती थी, जो उसी कंप्यूटर को प्रयोग करता हो, जिससे ई-मेल भेजी गई है। यानी ई-मेल भेजने के बाद उसे खोलने के लिए उसी कंप्यूटर काम करना जरूरी था। इस दिक्कत से निजात के लिए टॉम्लिनसन ने @ की ईजाद की। इसके बाद ई-मेल को एक से दूसरे कंप्यूटर और बाद में एक से दूसरे देश तक भेजना सरल हो गया।
- 1979 में ब्रिटिश डाकघर इंटरनेट तकनीक का इस्तेमाल करने वाला पहला संस्थान बना
- 1984 तक 1000 से अधिक कंप्यूटर इंटरनेट तकनीक से जोड़े जा चुके थे, धीरे-धीरे यह तकनीक तेजी से बढ़ने लगी और लोग इससे जुड़ने लगे
- 1985 में अमेरिका ने नेशनल साइंस फाउंडेशन नेटवर्क ¼NSFNET) प्रोजेक्ट शुरु किया। इसके बाद इंटरनेट तकनीक का तेजी से विकास हुआ और यह दुनियाभर में फैलती चली गई।
- हमारे देश भारत में वर्ष 1980 में इंटरनेट की शुरुआत हुई, जब एजुकेशन एंड रिसर्च नेटवर्क ¼ERNET) प्रोजेक्ट प्रारंभ हुआ। इस प्रोजेक्ट को भारत सरकार और संयुक्त राष्ट्र के विकास कार्यक्रम ¼UNDP) की मदद से प्रारंभ किया गया।
- 15 अगस्त 1995 को विदेश संचार निगम लिमिटेड ¼VSNL) ने गेटवे सिस्टम शुरू कर इंटरनेट सुविधा भारत में आम उपयोग के लिए उपलब्ध कराई। इसके बाद से देश में इंटरनेट सुविधा लगातार बढ़ती गई। आज भारत संचार निगम लिमिटेड समेत कई मोबाइल कंपनियां, ब्रा ॅडबैंड कंपनियां इंटरनेट सुविधा दे रही हैं, जिनसे 13 करोड़ से अधिक लोग जुड़ चुके हैं। उल्लेखनीय पहलू यह है कि दुनिाभर के देशों में इंटरनेट इस्तेमाल करने वाले लोगों की संख्या के मामले में भारत का हिस्सा 13.5 प्रतिशत है। आम आदमी तक इंटरनेट की पहुंच के हिसाब से अमेरिका दुनिया का सबसे बड़ा देश है। वहां की कुल आबादी 31 करोड़ से कुछ अधिक है, जबकि इंटरनेट सुविधा से 24 करोड़ से अधिक लोग जुड़े हुए हैं।

- इंटरनेट कनेक्शन के प्रकार (Types of Internet Connection)

इंटरनेट की मदद से हम घर बैठे अपने कंप्यूटर पर दुनियाभर की सूचनाएं पलक झपकते ही हासिल कर सकते हैं। लेकिन कंप्यूटर पर इंटरनेट सुविधा प्राप्त करने के लिए हमें इंटरनेट कनेक्शन की आवश्यकता होती है। आधुनिक दौर में डेस्कटॉप से लेकर लैपटॉप, गेमिंग कन्सोल, टैबलेट्स, मोबाइल फोन तक में इंटरनेट कनेक्शन का इस्तेमाल किया जाता है। यह उपयोगकर्ता पर निर्भर करता है कि वह किस तरह के इंटरनेट कनेक्शन से जुड़ना चाहता है। कुछ प्रमुख कनेक्शन निम्नवत हैं:

- डायलअप कनेक्शन (Dial Up Connection)% इस प्रक्रिया में उपभोक्ता का कंप्यूटर फोन लाइन के जरिये जोड़ा जाता है। इस तरह के कनेक्शन को एनालॉग (Analog) कनेक्शन कहा जाता है। इस

कनेक्शन के जोड़ने के बाद फोन का इस्तेमाल करना संभव नहीं होता। हालांकि, गति धीमी होने के कारण अब इस कनेक्शन का प्रचलन लगभग खत्म हो चुका है।

- ब्रा ॅडबैंड कनेक्शन (Broadband Connection)% ब्रॉडबैंड कनेक्शन सबसे ज्यादा तीव्र गति वाला इंटरनेट कनेक्शन है। इसमें भारी मात्रा में सूचनाएं भेजने के लिए एक से अधिक डाटा चैनलों का इस्तेमाल किया जाता है। ब्रॉडबैंड ब्रॉड बैंडविथ (Broad Bandwidth) का संक्षिप्त रूप है। केबल और टेलीफोन कंपनियां ब्रॉडबैंड सेवाएं उपलब्ध कराती हैं।
- डीएसएल कनेक्शन (DSL Connection)% डीएसएल कनेक्शन की फुलफॉर्म है, डिजिटल सब्सक्राइबर लाइन (Digital Subscriber Line) इस कनेक्शन में उपभोक्ता के घर में उपलब्ध दो तारों वाली टेलीफोन लाइन का इस्तेमाल किया जाता है। इससे यह सुविधा लैंडलाइन कनेक्शन के साथ ही उपलब्ध हो जाती है। डायल अप कनेक्शन से इतर इस व्यवस्था में इंटरनेट के इस्तेमाल के दौरान उपभोक्ता लैंडलाइन फोन का भी प्रयोग कर सकता है।
- वायरलेस कनेक्शन (Wireless Connection)% जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है कि इस तरह के कनेक्शन में तारों की मदद नहीं ली जाती है। इसमें केबल या टेलीफोन नेटवर्क के बजाय रेडियो तरंगों (Radio Frequency) का प्रयोग किया जाता है। इस कनेक्शन की सबसे बड़ी सुविधा यह है कि इसमें कनेक्शन हमेशा ऑन रहता है।
- मोबाइल कनेक्शन (Mobile Connection)% संचार क्रांति के दौर में अब इंटरनेट हर उपयोगकर्ता के हाथों तक आसान पहुंच बना चुका है। इसका जरिया बना है मोबाइल फोन। जीएसएम (GSM) 3जी, 4-जी जैसी नयी तकनीकों की मदद से अब हम मोबाइल, टैबलेट पर आसानी से इंटरनेट सुविधा हासिल कर सकते हैं।

- इंटरनेट के साधन (Tools of Internet)

इकाई के इस हिस्से हम उन साधनों को जानने का प्रयास करेंगे जो इंटरनेट सुविधा को सफल बनाने का काम करते हैं। इनमें किसी कंप्यूटर को इंटरनेट से जोड़ने वाले उपकरण भी शामिल हैं तो कंप्यूटर पर इंटरनेट और संचार सुविधा संचालित करने वाले एप्लीकेशन प्रोग्राम भी। आइए, इनका संक्षिप्त परिचय लेते हैंः:

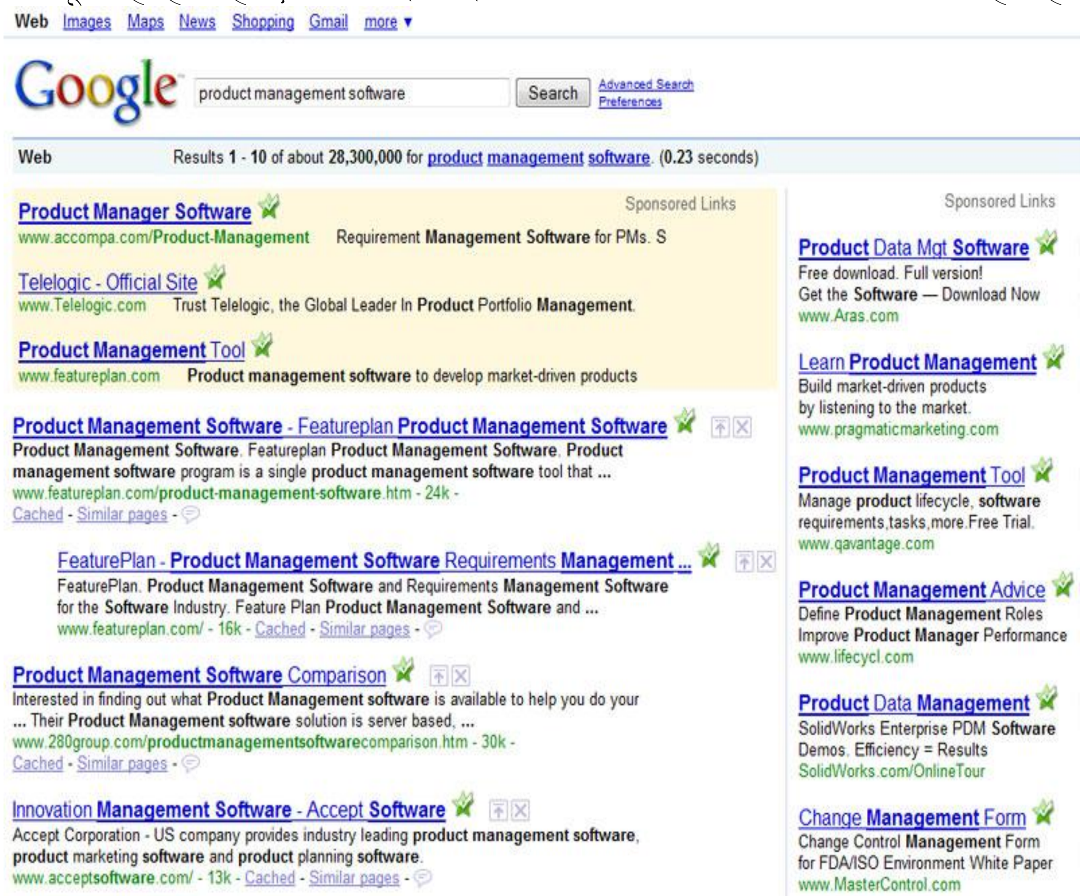
- मोडेम (Modem)% मोडेम का विस्तारित शब्द है मॉडुलेटर डि मॉडुलेटर (Modulator-De-Modulator) यह एक ऐसा उपकरण है जो कंप्यूटर में मौजूद डिजिटल डाटा (Digital Data) को एनालॉग सिग्नलों (Analog Signal) में बदलता है। एनालॉग सिग्नल वे सिग्नल होते हैं, जो टेलीफोन लाइन या अन्य संचार माध्यम के जरिये एक से दूसरे स्थान तक भेजे जा सकते हैं। इसी तरह वह एनालॉग सिग्नल को डिजिटल डाटा में बदल देता है, ताकि कंप्यूटर सिग्नल को समझ सके।
- वेब ब्राउजर (Web Browser)% वेब ब्राउजर दरअसल एक तरह के सॉफ्टवेयरप्रोग्राम हैं, जो कंप्यूटर में ही स्थापित रहते हैं। इनकी मदद से उपभोक्ता इंटरनेट का इस्तेमाल सूचनाएं, डाटा की तलाश करने में कर पाता है। उदाहरणः इंटरनेट एक्स्प्लोरर, गूगल का गूगल क्रोम ब्राउजर,, मोजिला फायर फॉक्स, एप्पल सफारी आदि।
- वल्ड वाइड वेब (World Wide Web)% हम जानते हैं कि वेब का अर्थ जाले से होता है। वल्ड वाइड वेब का अर्थ सूचनाओं या डाटा के एक ऐसे जाल से है जो पूरी दुनिया में विस्तृत हो और कोई

भी इंटरनेट उपयोगकर्ता इस डाटाबेस से अपनी जरूरत के मुताबिक सूचना हासिल कर सकता है। यह मूलतः डाटाबेस के अलग-अलग पेजों का एक समूह है जो शीर्षकों (Titles) में बंटे रहते हैं और जिन्हें वेबसाइट कहा जाता है।

- वेबसाइट (Website)% इंटरनेट पर कोई भी जानकारी डाटाबेस संबंधित पेजों के रूप में उपलब्ध रहती है, जिन्हें वेबसाइट कहा जाता है। ब्राउजर के जरिये उपयोगकर्ता इन वेबसाइट तक पहुंच सकता है। वेबसाइट जीवन के हर आयाम, पहलू पर आधारित होती हैं। खेल, मनोरंजन, विज्ञान अलग-अलग विषय की हजारों-लाखों वेबसाइट यानी पेज इंटरनेट पर उपलब्ध रहते हैं। शोधकार्यों के लिए ये वेबसाइट शोधार्थियों (Research Fellows) की खासी मददगार साबित होती हैं।
- वेब पेज और एचटीएमएल (Webpage and HTML)% एचटीएमएल एक उच्चस्तरीय प्रोग्रामिंग लैंग्वेज है, जो वेबपेज तैयार करने में काम आती है। वेबपेज क्या है, यह हम पहले ही जान चुके हैं। कोई भी वेबसाइट कई वेबपेजों का एक समूह हो सकता है। एचटीएमएल का विस्तृत शब्दरूप है हाइपर टेक्स्ट मार्कअप लैंग्वेज (Hypertext Markup Language)
- एचटीटीपी (HTTP/ http)% एचटीटीपी का विस्तृत शब्दरूप है हाइपर टेक्स्ट ट्रांसफर प्रोटोकॉल (Hypertext Transfer Protocol) यह प्रोटोकॉल दरअसल वल्र्ड वाइड वेब में मौजूद डाटाबेस की बुनियाद है, हम जब भी ब्राउजर पर किसी वेबसाइट को सर्च करने के लिए किसी वेबसाइट का नाम लिखते हैं तो उसके आगे http:// लिखा जाता है। इसका तात्पर्य यह है कि उपयोगकर्ता वेब पर वह फाइल तलाशना चाहता है, जो एचटीएमएल भाषा में उपलब्ध हो। एचटीटीपी को वल्र्ड वाइड वेब की आचार संहिता भी माना जाता है।
- डोमेन नेम (Domain Name)% इंटरनेट पर एक ही विषय से जुड़ी हजारों-लाखों वेबसाइट उपलब्ध होती हैं, ऐसे में इनमें से उपयोगकर्ता के वास्तविक उपयोग वाली वेबसाइट तलाशना लंबा समय और उर्जा खाने वाला काम बन जाता है। ऐसे में हर वेबसाइट को जो नाम दिया जाता है वह डोमेन नेम कहलाता है। वास्तव में डोमेन नेम इंटरनेट पर किसी वेबसाइट का पता होता है। ब्राउजर पर जब भी उपयोगकर्ता किसी वेबसाइट का नाम लिखता है तो ब्राउजर तुरंत लाखों वेबपेज में से संबंधित वेबपेज को आसानी से तलाश लेता है।
- अब जब भी हम ब्राउजर पर किसी वेबसाइट को तलाश करते हैं तो उसे इस तरह पूरा लिखा जाता है- & www.facebook.com इसमें शुरूआती तीन अक्षर www बताते हैं कि हम जिस पेज की तलाश कर रहे हैं, वह वल्र्ड वाइड वेब पर उपलब्ध है, जबकि बाकी के दो शब्द यानी facebook.com इस वेबपेज का डोमेन नेम है। किन्हीं भी दो वेबसाइट का डोमेन नेम कभी भी एकसमान नहीं हो सकता है। यही वजह है कि ब्राउजर पर वेबसाइट का पूरा नाम लिखते ही अभीष्ट वेबपेज तुरंत खुल जाता है।
- यूआरएल (URL)% यूआरएल यानी यूनिफॉर्म रिसोर्स लोकेटर (Uniform Resource Locator) किसी वेबसाइट का पूरा नाम यानी वल्र्ड वाइड वेब पर उस वेबसाइट या वेबपेज का पूरा पता है। इसे हम इस उदाहरण से समझ सकते हैं। यदि हमें अपने विश्वविद्यालय यानी उत्तराखंड मुक्त विवि (Uttarakhand Open University)की वेबसाइट खोलनी है तो हम वेब ब्राउजर पर इस तरह लिखते हैं: http://www.uou.ac.in अब हम जानते हैं कि इस नाम के आखिरी तीन शब्द डोमेन

नेम, पहले शब्द और चिह्न हाइपर टेक्स्ट प्रोटोकॉल और www वर्ल्ड वाइड वेब के परिचायक हैं। इन सभी से मिलकर वेबसाइट का जो पूरा पता बना है, वह यूआरएल कहलाता है।

- सर्च इंजन (Search Engines)% कई बार होता यह है कि उपयोगकर्ता को उस विषय की तो जानकारी रहती है, जिसके लिए उसे डाटा या सूचनाओं की आवश्यकता है, लेकिन उसे यह मालूम नहीं होता कि कौन सी वेबसाइट उसके लिए उपयोगी होगी। कई बार उसे अभीष्ट वेबसाइट का नाम भी मालूम नहीं होता है। ऐसे में सर्च इंजन इंटरनेट उपयोगकर्ता के खासे मददगार साबित होते हैं।



(गूगल सर्च इंजन पर इस तरह की वर्ड की मदद से साइट ढूंढी जाती हैं)

- दरअसल, सर्च इंजन पर उपयोगकर्ता को वेबसाइट का पूरा नाम लिखने के बजाय सिर्फ कुछ कीवर्ड (Keywords) ही लिखने की जरूरत होती है। उदाहरण के लिए अगर उपयोगकर्ता समाज में बढ़ते अपराधों के विषय पर डाटा-सूचनाएं और जानकारी जुटाना चाहता है, लेकिन उसे नहीं मालूम है कि वह किस वेबसाइट पर जाए तो वह ब्राउजर पर क्राइम (Crime) या समाज (Society) या समाज में अपराध ;ब्तपउम पद (Crime in Society) जैसे शब्द ही लिख सकता है। सर्च इंजन तुरंत इन शब्दों के आधार पर एक साथ कई वेबपेज की सूची उपलब्ध करा देता है, जिन पर क्लिक कर उपयोगकर्ता अभीष्ट जानकारी हासिल कर पाता है। गूगल, याहू, बिंग आदि ऐसे ही सर्च इंजन हैं।
- ईमेल bZesy (E-mail)% ई-मेल, जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है कि यह एक ऐसी चिट्ठी या संदेश है जिसका स्वरूप इलेक्ट्रा ॅनिक यानी डिजिटल है। वास्तव में ई-मेल भी एक तरह का सॉफ्टवेयरहै, जो उपयोगकर्ता को कोई संदेश दूसरे उपयोगकर्ता तक पहुंचाने की सुविधा देता है। ई-मेल दो प्रकार

की होती हैं। पहली ब्राउजर आधारित, इस तरह की मेल में उपयोगकर्ता को इंटरनेट पर मौजूद ई-मेल सुविधा देने वाली कंपनी से जुड़ना होता है। इसके लिए उपयोगकर्ता को संबंधित कंपनी में अपना विशेष खाता बनाना होता है। जीमेल, याहूमेल, रेडिफमेल, हॉटमेल ऐसी ही कंपनियां हैं जो ई-मेल सुविधा देती हैं। यह प्रक्रिया निःशुल्क होती है। इनसे जुड़ा उपयोगकर्ता इस तरह अपना ई-मेल खाता या ई-मेल आईडी बनाता हैः xyz@gmail.com दूसरी ई-मेल होती हैं उपभोक्ता आधारित। इस तरह की मेल कंप्यूटर में इंस्टाॅल सॉफ्टवेयरपर ही उपलब्ध होती हैं। मसलन माइक्रोसॉफ्टऑफिस सॉफ्टवेयरपर आउटलुक, आउटलुक एक्सप्रेस आदि।

- इंटरनेट का सामाजिक प्रभाव (Socio Impact of Internet)

किसी भी सुविधा के दो पहलू होते हैं। हर काम, हर संसाधन के साथ सकारात्मक और नकारात्मक परिणाम जुड़े होते हैं, यह हम पर निर्भर करता है कि हम किस पहलू को अधिक तवज्जो देते हैं। इंटरनेट सुविधा भी इस सार्वभौमिक सत्य का अपवाद नहीं है।

पहले चर्चा करते हैं इंटरनेट के सकारात्मक पहलू की। इंटरनेट मानव समुदाय को संचार क्रांति का सबसे बड़ा उपहार है। आज आधुनिक दौर में यह एक ऐसा हथियार बन गया है जो दुनियाभर के मानव समुदाय में समभाव (Equalty) का जरिया है, चाहे वह जाति-धर्म के आधार पर हो या फिर अमीरी-गरीबी के आधार पर। इंटरनेट न तो छुआछूत देखता है न सामाजिक स्थिति के हिसाब से किसी व्यक्ति का आकलन करता है। उपयोगकर्ता के स्टेटस (Status) का ध्यान रखे बगैर यह हर उस व्यक्ति को दुनिया-जहान की हर जानकारी लैपटॉप, डेस्कटॉप या मोबाइल फोन पर उपलब्ध कराता है, जो इसका उपयोग कर पाने में सक्षम है या उपयोग करना चाहता है।

इंटरनेट आज न सिर्फ आम से आम आदमी तक दुनियाभर की जानकारियों के अकूत भंडार के तौर पर सहज-सुलभ है, बल्कि फेसबुक, ट्वीटर, इंस्टाग्राम और इन जैसी तमाम सोशल साइट्स के जरिये यह उस व्यक्ति को भी अपनी बात पूरी दुनिया के सामने रखने की छूट और आजादी प्रदान कर रहा है, जो कभी जाति तो कभी स्टेटस के भेद के कारण खुलकर कहने-सुनने में खुद को सक्षम नहीं पाता था। इस लिहाज से यदि यह कहें कि इंटरनेट सामाजिक, वैचारिक परिवर्तन का भी एक माध्यम है तो शायद यह अतिश्योक्ति नहीं होगी।

अब बात नकारात्मक पहलू की। इंटरनेट पर बीते कुछ वर्षों में सोशल साइट्स का प्रचलन बहुत तेजी से बढ़ा है। फेसबुक आज हर उस शख्स के जीवन का अभिन्न अंग बन गया है जो कंप्यूटर चलाता है तो व्हाट्सएप हर उस व्यक्ति की जरूरत जो स्मार्टफोन इस्तेमाल कर रहा है। लेकिन यहीं इंटरनेट पर सवाल खड़े होने लगते हैं। दरअसल, पिछले कुछ समय में जिस तेजी से संचार क्रांति बढ़ी है, उसके साथ ही यह चिंता भी बढ़ती चली गई हैै कि यह सुविधा मानव समुदाय की सामाजिक संरचना को नुकसान पहुंचाने की वजह बनती जा रही है। दरअसल, हुआ यह है कि आधुनिक दौर में लोग सदियों से चली आ रही सामाजिक संरचनाओं से विमुख होते जा रहे है। कई शोध रिपोर्ट ये बताती हैं कि आज का मनुष्य परिवार, समाज से कहीं अधिक वक्त लैपटाॅप, टैबलेट या स्मार्टफोन पर ही बिता रहा है। परिजन, रिश्तेदार या समाज क्या कह, कर रहा है, इससे कहीं अधिक अहम उसके लिए सोशल साइट्स होती जा रही हैं। इसकी वजह से सामाजिक ढांचा सामूहिक से एकल की ओर बढ़ने लगा है। इंटरनेट सूचनाओं के आदान-प्रदान का सबसे तेज जरिया बन गया है। कोई घटना हो, दुर्घटना हो या सांस्कृतिक इवेंट हो, इसकी जानकारी सैकड़ों-हजारों मील दूर बैठे दूसरे शख्स तक चंद सेकंडों में पहुंच जाती है। शायद यही वजह है कि इंटरनेट और

सोशल साइट्स ने राजनेताओं और राजनीतिक दलों का भी ध्यान तेजी से खींचा है। राजनीतिक परिदृश्य में भी अब यह माना जाने लगा है कि मतदाताओं तक कम समय में पैठ बनाने और अपना संदेश पहुंचाने के लिए सोशल साइट्स ही सबसे उपयुक्त माध्यम हैं। भारत समेत दुनिया के कई देशों में इंटरनेट और सोशल साइट्स चुनाव प्रचार का बड़ा हथियार बन गई हैं। दूसरी तरफ, टेलीमेडिसिन, ऑनलाइन एजुकेशन, रोजगार जैसी कई ऐसी सुविधाएं भी हैं, जिनके जरिये इंटरनेट ने आज मानव समुदाय के जीवन को और अधिक सरलीकृत किया है। शिक्षा, स्वास्थ्य की पहुंच इसके जरिये उन क्षेत्रों और लोगों तक भी बढ़ी है जो वर्षों तक इन बुनियादी सुविधाओं से वंचित रहे।

- सुरक्षा (Security)

इंटरनेट का जिस तेजी से इस्तेमाल बढ़ा है, उसी तेजी से इसके नकारात्मक पहलू भी लगातार सामने आए हैं। दरअसल, इंटरनेट पर जहां उपयोगकर्ता की मदद के लिए कई तरह के वेबपेज, प्रोग्राम उपलब्ध हैं, वहीं कई ऐसे प्रोग्राम और सॉफ्टवेयरभी इस पर मौजूद रहते हैं जो उपयोगकर्ता को नुकसान पहुंचा सकते हैं। यूनिट के इस हिस्से में हम ऐसे ही कुछ प्रोग्राम को जानेंगे, जो हानिकारक हैंः

- वायरस (Virus)% वायरस एक प्रोग्राम या कंप्यूटर कोड होता है जो इंटरनेट पर कंप्यूटर के जुड़ते ही कंप्यूटर में प्रवेश कर जाता है। जिस तरह मानव शरीर में वायरस घुसता है तो संक्रमण फैलाता है। उसी तरह वायरस कंप्यूटर में घुसकर इसके सिस्टम को नुकसान पहुंचाता है। कंप्यूटर से महत्वपूर्ण फाइलें डिलीट करने के साथ यह हार्डडिस्क को भी करप्ट कर देता है। वायरस के कंप्यूटर पर आने की बड़ी वजह उपयोगकर्ता के संक्रमित फाइलें या ई-मेल अटैचमेंट खोलना होती हैं। इंटरनेट पर संदिग्ध वेबपेज खोलने पर भी अकसर वायरस आ जाते हैं।
- वर्म (Worm)% वर्म वह कंप्यूटर प्रोग्राम है, जो कंप्यूटर में प्रवेश करने के बाद ऑटोमेटिक तरीके से अपनी ही कई प्रतियां बना लेता है। इसके बाद यह कंप्यूटर की प्रक्रियाओं को बाधित कर देता है। वायरस से इतर यह खुद को कंप्यूटर की फाइलों या प्रोग्रामों से नहीं जोड़ता, बल्कि खुद ही प्रोग्राम बनकर प्रक्रिया रोकने लगता है। अगर कंप्यूटर नेटवर्किंग से जुड़े हुए हों तो यह संक्रमित कंप्यूटर से जुड़े दूसरे कंप्यूटरों में भी पहुंच जाता है। यह रैंडम एक्सेस मेमोरी को प्रभावित कर कंप्यूटर की प्रोसेसिंग को बेहद धीमा कर देता है।
- ट्रोजन हॉर्स (Trojan Horse)% ट्रोजन हाॅर्स वे प्रोग्राम हैं जो उपयोगकर्ता के सामने लाभदायक प्रोग्राम के रूप में आते हैं, लेकिन प्रयोग की कोशिश करते ही ये कंप्यूटर में घुसकर उसमें वायरस डाल देते हैं। वायरस और वर्म की तरह ट्रोजन हॉर्स अपनी कई प्रतियां नहीं बनाते, बल्कि यह कंप्यूटर मेमोरी में मौजूद संवेदनशील डाटा, जानकारी, फाइलें और व्यक्तिगत जानकारियां तलाशते हैं। मूलतः आपराधिक किस्म के लोग इसका इस्तेमाल करते हैं, जिससे वे किसी व्यक्ति की गोपनीय जानकारी हासिल कर सकें। ऑनलाइन ठगी के अधिकतर मामलों को इस श्रेणी में रखा जा सकता है।

- बचाव के तरीके (Prevention)

1. कंप्यूटर पर एंटी वायरस (Anti Virus) प्रोग्राम स्थापित किया जाना चाहिए, एंटी वायरस प्रोग्राम इंटरनेट पर जुड़ने के दौरान हर प्रोग्राम, फाइल, वेबपेज को स्कैन करते हैं और इनमें किसी भी तरह का संदेह होने की स्थिति में उपयोगकर्ता को संबंधित फाइल या वेबपेज से नहीं जुड़ने का संदेश देते हैं, इसके अलावा ये अनधिकृत प्रोग्रामों को कंप्यूटर में प्रवेश करने से भी रोकते हैं

2. उपयोगकर्ता को कंप्यूटर पर फायरवाॅल का इस्तेमाल करना चाहिए, यह एक खास तरह का प्रोग्राम है, जो विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम में पहले से उपलब्ध रहता है, उपयोगकर्ता को करना सिर्फ यह होता है कि सेटिंग में जाकर इसे ऑन करना होता है। इसके बाद यह किसी भी बाहरी साधन को उपयोगकर्ता के कंप्यूटर तक पहुंचने से रोकने का काम करता है।
3. इंटरनेट पर कोई भी संदिग्ध फाइल, वेबपेज और ई-मेल पर कोई भी ऐसा संदेश कभी नहीं खोलें, जिसे भेजने वाला संदिग्ध हो, ई-मेल पर आने वाले अटैचमेंट को खोलने से पहले स्कैन जरूर करें
4. ई-मेल अटैचमेंट के फाइल एक्सटेंशन को ध्यान से जरूर देखें, यदि फाइल का एक्सटेंशन exe, pif, bat, bas, cmd, com, cml, inf, js, lnk, msi, scr, vbs हो तो इन्हें खोलने से पहले एंटीवायरस प्रोग्राम की मदद से स्कैन जरूर करें
5. ई-मेल और सोशल साइट्स पर कई बार ऐसे लिंक आते हैं, जो उपयोगकर्ता को लालच देकर फांसते हैं। इस तरह के लिंक में कई बार उपयोगकर्ता की लाॅटरी लगने की जानकारी दी जाती है तो कभी कोई दूसरा ऐसा संदेश भेजा जाता है, जिसे पढ़ते ही उपयोगकर्ता उस पर क्लिक करे, लेकिन इससे हमेशा बचना चाहिए
6. इंटरनेट उपयोगकर्ताओं को वायरस से बचाने के लिए माइक्रोफ्ट पैच ट्यूजडे सेवा चलाता है। इसके जरिये माइक्रोसॉफ्टहर महीने के दूसरे मंगलवार को उन सभी प्रोग्रामों की सूची तैयार करता है जो कंप्यूटर को नुकसान पहुंचा सकते हैं। इसमें इस तरह के प्रोग्रामों से बचने के तरीके भी सुझाए जाते हैं, जिन्हें पैच कहा जाता है। इन पैचों का प्रयोग कर उपयोगकर्ता इंटरनेट का सुरक्षित उपयोग कर सकते हैं।
7. सोशल साइट्स पर फोन नंबर, बैंक खाते, पासवर्ड, एटीएम पिन कोड जैसी गोपनीय जानकारी कभी भी दर्ज नहीं करें। फेसबुक, ट्विटर जैसी सोशल साइटों पर उपयोगकर्ता सेटिंग के जरिये अपनी जानकारियों को छिपा भी सकते हैं या यह तय कर सकते हैं कि कौन लोग इन जानकारियों को देख सकते हैं।
8. ऑनलाइन नेटबैंकिंग के इस्तेमाल के दौरान हमेशा बैंक या कंपनी के अधिकृत वेबसाइट का ही इस्तेमाल करें। कई बार अधिकृत वेबसाइट के बजाय होस्ट वेबसाइट पर कंपनी का लिंक दिया जाता है, इस तरह की होस्ट साइट पर क्लिक करने से उपयोगकर्ता का गोपनीय डाटा चोरी होने की आशंका रहती है।

24.7 उपसंहार (The Conclusion)

यूनिट के अध्ययन के बाद हम इस परिभाषा के तात्पर्य को समझने के साथ यह जान चुके हैं कि कंप्यूटर के संचालन में ऑपरेटिंग सिस्टम की कितनी बड़ी भूमिका है। इसके अलावा हम यह भी जाने हैं कि इंटरनेट किस तरह आज मानव के सामाजिक जीवन का अभिन्न अंग बन गया है और किस तरह इंटरनेट के सकारात्मक और नकारात्मक पहलू मानव के दैनन्दिन जीवन पर असर डाल रहे हैं। हालांकि, इस सबके बीच यह जरूर माना जा सकता है कि ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास और इसके जरिये इंटरनेट के अविर्भाव ने मानव जीवन को सरल जरूर बनाया है।

24.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)

1. हाईलेवल लैंग्वेज में तैयार पहला ऑपरेटिंग सिस्टम थाः
   a) बी5000

b) ओएस360
c) आईबीएम709
d) विंडोज 1.0

2. ऑपरेटिंग सिस्टम का बुनियादी घटक हैः
a) सेंट्रल प्रोसेसिंग यूनिट
b) की-बोर्ड
c) प्रोग्राम
d) कर्नल

3. माइक्रोसॉफ्टका पहला सिर्फ पर्सनल कंप्यूटर आधारित ऑपरेटिंग सिस्टम थाः
a) विंडोज 2.0
b) विंडोज 10
c) विंडोज 7
d) विंडोज विस्टा

4. वर्तमान दौर में सर्वाधिक प्रचलित ऑपरेटिंग सिस्टम हैः
a) एंड्रॉयड
b) आईफोन
c) ब्लैकबेरी
d) विंडोज

5. इनमें से कौन सा ऑपरेटिंग सिस्टम टचस्क्रीन सपोर्ट करता हैः
a) मैक
b) विंडोज 8
c) विंडोज विस्टा
d) विंडोज 1.0

6. विंडोज से पहले आईबीएम में प्रयुक्त ऑपरेटिंग सिस्टम थाः
a) डॉस
b) मैक
c) एंड्रॉयड
d) उपरोक्त में से कोई नहीं

7. स्टार्ट और क्लोज बटन सबसे पहले इस सिस्टम में लाए गएः
a) विंडोज 8
b) विंडोज 3.1
c) विंडोज 95
d) विंडोज 7

8. विंडोज का पहला ग्राफिकल यूजर इंटरफेस ऑपरेटिंग सिस्टम थाः
a) विंडोज 1.0
b) विंडोज 8
c) विंडोज 3.1
d) इनमें से कोई नहीं

9. विंडोज 98 में पहली बार यह लांच किया गयाः
   a) पेंट ब्रश
   b) ग्राफिकल यूजर इंटरफेस
   c) एरो ग्लास लुक
   d) इंटरनेट एक्सप्लोरर 4.0
10. मोबाइल फोन पर इस्तेमाल होने वाले एंड्रॉयड का मूल आधार यह ऑपरेटिंग सिस्टम हैः
   a) लाइनक्स
   b) यूनिक्स
   c) ब्लैकबेरी
   d) विंडोज
11. पहली पीढ़ी के कंप्यूटरों में ऑपरेटिंग सिस्टम की तरह काम करते थेः
   a) लाइनक्स
   b) एंड्रॉयड
   c) रेजीडेंट मॉनीटर
   d) इनमें से कोई नहीं
12. इनमें से कौन ऑपरेटिंग सिस्टम ओपन लाइसेंस मोड हैः
   a) यूनिक्स फैमिली
   b) मैक ओएस
   c) विंडोज
   d) लाइनक्स
13. मैक ओएस की निर्माता कंपनी हैः
   a) माइक्रोसॉफ्ट
   b) डाटा कॉरपोरेशन
   c) एप्पल
   d) जेरॉक्स कॉरपोरेशन
14. गूगल और गूगल क्रोम का मूलाधार ऑपरेटिंग सिस्टम हैः
   a) विंडोज 1.0
   b) लाइनक्स
   c) यूनिक्स
   d) विंडोज 7
15. पर्सनल डिजिटल असिस्टेंट (पीडीए) में इस्तेमाल ऑपरेटिंग सिस्टम हैः
   a) एंबेडेड
   b) मल्टी यूजर
   c) मल्टी टास्किंग
   d) इनमें से कोई नही
16. इनमें से किसे इंटरनेट की आचार संहिता माना जाता हैः

(a)http://

(b) html

(c)www

(d) इनमें से कोई नही

17. एनालॉग सिग्नल को डिजिटल में और डिजिटल को एनालॉग में बदलने वाला उपकरण हैः

a) गूगल
b) वल्ड वाइड वेब
c) मोडेम
d) उपरोक्त में से सभी

18. इनमें से कौन सर्च इंजन हैः

a) गूगल
b) मोडेम
c) आउटलुक
d) इनमें से कोई नहीं

19. वेबपेज इस भाषा में तैयार किए जाते हैंः

a) http

b) html

c) c++

d) java

20. वेब ब्राउजर इनमें से क्या हैः

a) सॉफ्टवेयरप्रोग्राम
b) हार्डवेयर
c) प्रोग्रामिंग लैंग्वेज
d) उपरोक्त में से सभी

24.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theoretical Questions)

1. ऑपरेटिंग सिस्टम क्या है, कंप्यूटर के सफल संचालन में महत्व को समझाते हुए ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास की यात्रा का वर्णन करें।
2. ऑपरेटिंग सिस्टम कितने प्रकार का होता है? उदाहरण समेत विस्तार से बताएं, अलग-अलग तरह के ऑपरेटिंग सिस्टम की जरूरत क्यों महसूस हुई, इसकी जानकारी भी दें।
3. कुछ प्रमुख ऑपरेटिंग सिस्टम, इनकी विशेषताओं का उल्लेख करें।
4. विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास और हर वर्जन में आने वाले बदलाव की विशेषता, इसकी जरूरत आदि का विष्लेशणकरें।
5. ऑपरेटिंग सिस्टम के प्रमुख घटक क्या हैं? इनके कार्यों और जरूरतों का उल्लेख करें।
6. किसी ऑपरेटिंग सिस्टम में कर्नल क्या होता है? यह किस तरह एप्लीकेशन प्रोग्राम और हार्डवेयर के बीच संतुलन बनाता है?
7. नेटवर्किंग और इंटरनेट क्या हैं? इंटरनेट पर काम जितना सुविधाजनक है, उतना ही असुरक्षित भी, इस कथन का विष्लेशणकरते हुए जरूरी सावधानियों का भी जिक्र करें।

इकाई 25 एमएस-ऑफिस का अनुप्रयोग
(Application of MS-Office)

25.1 प्रस्तावना (Introduction)

25.2 उद्देश्य(Objectives)

25.3 कंप्यूटर के प्रमुख साधन (Tools of Computers)

25.4 एमएस ऑफिस (MS-Office)

25.5 एमएस वर्ड (MS-Word)

25.6 एमएस एक्सेल (MS-Excel)

25.7 उपसंहार (The Conclusion)

25.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)

25.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theoretical Questions)

25.1 प्रस्तावना (Introduction)

हम इस तथ्य से भली-भांति परिचित हैं कि कंप्यूटर आज मानव समाज का अभिन्न अंग और दैनन्दिन उपयोग का सबसे बड़ा उपकरण बन गया है। हम यह भी जानते हैं कि कंप्यूटर का विकास जटिल गणनाओं (Calculations) के समाधान के तौर पर होता चला गया। लेकिन समय के साथ हुए विकास में कंप्यूटर महज गणनाओं तक सीमित नहीं रह गया है। यह जीवन के हर आयाम को छूता है और मानव के लिए सर्वाधिक उपयोगी मशीन बना है। टाइपिंग हो या ऑडियो विजुअल फीचर मानव जीवन का हर काम अब कंप्यूटर पर संभव है। इस यूनिट में कंप्यूटर के ऐसे ही फीचर या साधनों (Tools) का अध्ययन करेंगे, जिनकी मदद से हम अपने दैनिक उपयोग के कार्य आसानी से निष्पादित कर पाते हैं।

25.2 उद्देश्य (Objective)

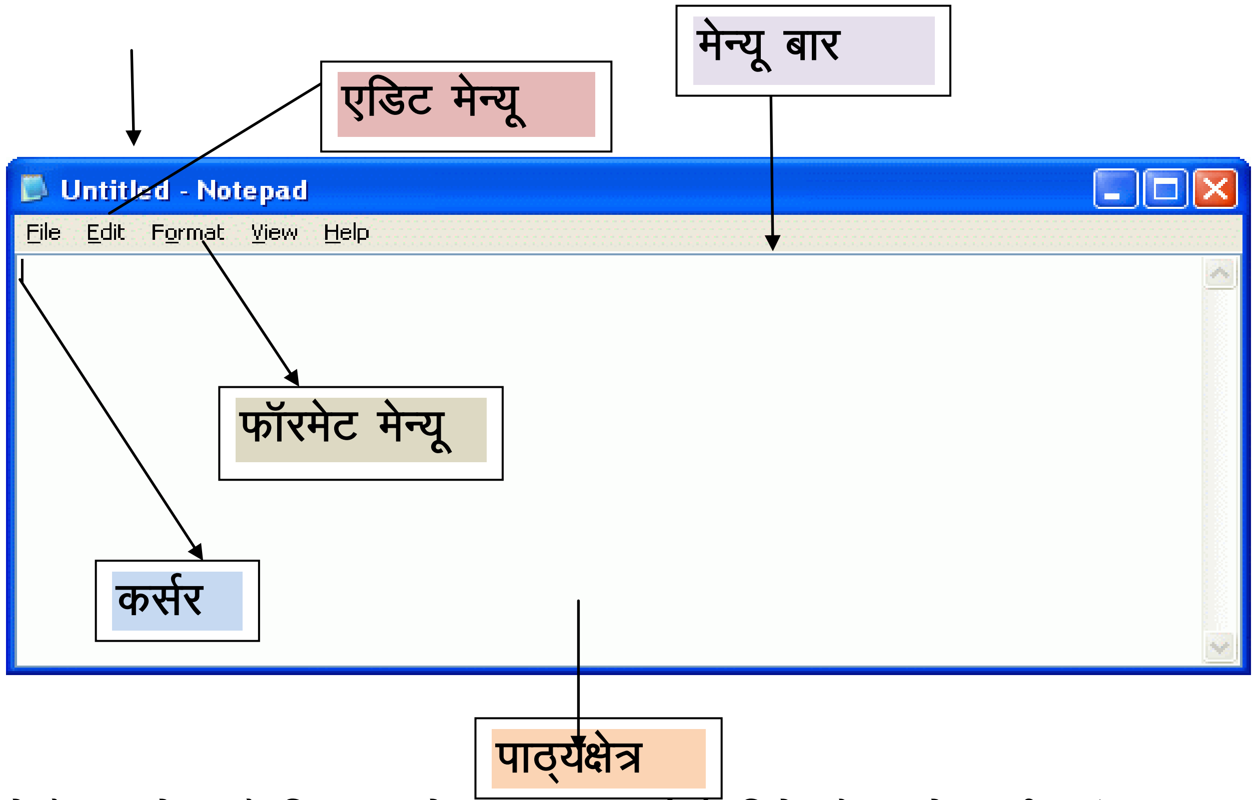
इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ पाएंगे कि

- कंप्यूटर किस तरह अपने कुछ विशेष साधनों के माध्यम से मानव जीवन के लिए उपयोगी मशीन है
- माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस क्या है, इसका उपयोग कहां-कैसे किया जाता है और इसका विकास किस तरह हुआ
- कंप्यूटर ऑपरेटिंग सिस्टम के विकास के साथ किस तरह एमएस ऑफिस में भी लगातार सुधार के बाद नये स्वरूप सामने आए
- एमएस-वर्ड, एक्सेल, पॉवरप्वाइंट क्या हैं, इनका उपयोग किस तरह हमारे लिए मददगार हो सकता है
- एमएस-वर्ड, एक्सेल और पॉवर प्वाइंट जैसे प्रोग्राम किस तरह काम करते हैं

25.3 कंप्यूटर के प्रमुख साधन (Tools of Computer)

कंप्यूटर का विकास ही इस उद्देश्य के साथ हुआ कि जिन गणनाओं को हल करने में मानव को लंबा समय लगता था, उनका समाधान चुटकियों में प्राप्त किया जा सके। कालांतर में गणनाओं से इतर कई अन्य कार्य भी इस श्रेणी में जुड़ते चले गए। इसी अनुक्रम में ऑपरेटिंग सिस्टम का विकास हुआ और सिस्टम में ही कुछ ऐसे उपयोगी प्रोग्राम जोड़े जाते गए, जो मानवोपयोगी थे। इनकी मदद से उपयोगकर्ता (User) को ऐसे काम मिनटों में कर पाने की सहूलियत मिली, जिन्हें किसी अन्य साधन या विधि से करने में लंबा समय लगता। ऐसे ही कुछ साधनों के बारे में हम यहां जानने वाले हैं।

नोटपैड (Notepad)



नोटपैड वह प्रोग्राम है, जिसका उपयोग हम अकसर करते हैं। विंडोज में यह प्रोग्राम प्री-इंस्टॉल (Pre Installed) रहता है। नोटपैड एक टेक्स्ट एडिटर (Text Editor) प्रोग्राम है। टेक्स्ट एडिटर प्रोग्राम का तात्पर्य उन प्रोग्राम से है, जिनमें उपयोगकर्ता अपनी जरूरत की टेक्स्ट फाइल (Text Files) तैयार कर सकता है। आम जीवन में हम डायरी, कॉपी, कागज पर सूचनाएं दर्ज करते रहते हैं। कंप्यूटर पर यही काम नोटपैड पर किया जाता है। यह भी कहा जा सकता है कि नोटपैड वह प्रोग्राम है जो उपयोगकर्ता को सूचनाओं या डाटा के डॉक्यूमेंटेशन (Documentation) में मदद करता है। हालांकि, नोटपैड में हम किसी फाइल को आकर्षक स्वरूप नहीं दे सकते हैं। इस प्रोग्राम में सारा पाठ्य (Text) एक ही फॉन्ट में दिखाया जा सकता है। नोटपैड के संक्षिप्त इतिहास की चर्चा करें तो वर्ष 1983 में रिचर्ड ब्रा◌ॅडी ने माइक्रोसॉफ्ट के लिए डिस्क ऑपरेटिंग सिस्टम (DOS) के लिए पहला नोटपैड तैयार किया था, जिसे माउस की मदद से भी ऑपरेट किया जा सकता था। कालान्तर में माइक्रोसॉफ्ट विंडोज के हर वर्जन में नोटपैड में अपेक्षित सुधार किए जाते रहे। मौजूदा दौर में विंडोज के सभी प्रचलित ऑपरेटिंग सिस्टम का यह अभिन्न अंग है।

नोटपैड के घटक (Components of Notepad)

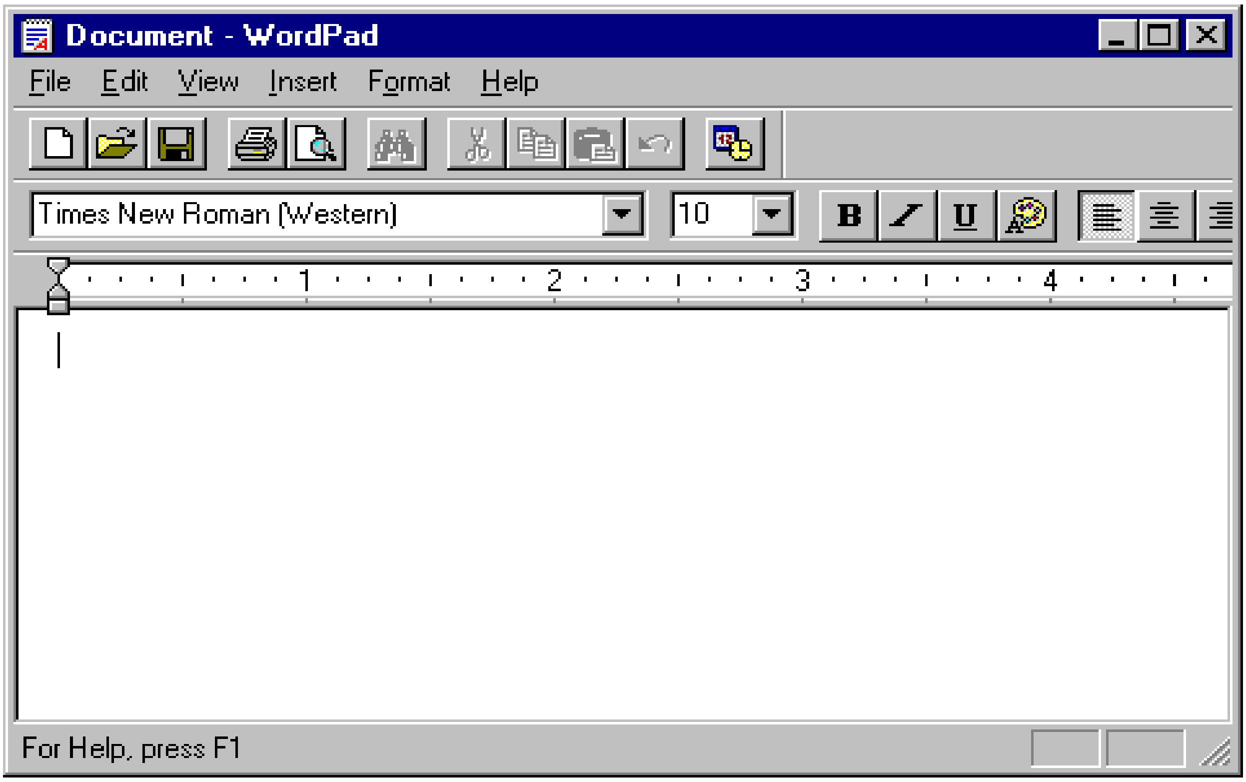
सामान्यतः डेस्कटॉप या लैपटॉप की होमस्क्रीन के टूलबार में नोटपैड का शॉर्टकट की ;टूलबार में नोटपैड का आइकनद्ध रहती है। इस पर क्लिक करने से नोटपैड प्रोग्राम खुल जाता है। यदि यह शॉर्टकट न हो तो कंप्यूटर के स्टार्ट बटन पर क्लिक करने के बाद ऑल प्रोग्राम्स (All Programs) पर क्लिक करना होता है। यहां खुलने वाली सूची में एसेसरीज (Accessories) पर क्लिक करते ही नोटपैड का ऑप्शन सामने आता

है। इस पर क्लिक करके नोटपैड प्रारंभ हो जाएगा। नोटपैड की विंडो में टाइटल बार (Title Bar)] पाठ्यक्षेत्र (Text Area), मेन्यू बार (Menu Bar) और कर्सर (Cursor) होते हैं। नोटपैड की सबसे उपर की पंक्ति टाइटल बार है। इसमें उस दस्तावेज या फाइल का नाम नजर आता है, जो उपयोगकर्ता लिख रहा हो और उसे सेव कर कुछ नाम दिया हो। अगर फाइल सेव नहीं है तो यहां अनटाइटल्ड (Untitled) लिखा दिखता है। टाइटल बार के ठीक नीचे मेन्यू बार होता है। इसमें एडिट, फाइल, फॉरमेट, व्यू, हेल्प जैसे ऑप्शन होते हैं। हर मेन्यू में कई विकल्प होते हैं, जिनका प्रयोग उपयोगकर्ता अपनी जरूरत के हिसाब से कर सकता है।

पाठ्यक्षेत्र नोटपैड विंडो का वह हिस्सा है, जहां उपयोगकर्ता टाइपिंग की मदद से अपनी फाइल, सूचना, दस्तावेज तैयार करता है। नोटपैड खोलने पर यह हिस्सा खाली नजर आता है और टाइप करते जाने पर यह भरता जाता है। पाठ्यक्षेत्र में एक खड़ी लकीर ( ) नजर आती है, जिसे कर्सर कहा जाता है। कर्सर जिस जगह पर हो, वहां से टाइपिंग प्रारंभ की जा सकती है। अगर किसी शब्द में सुधार (Correction) करना हो तो उपयोगकर्ता माउस की मदद से कर्सर को संबंधित शब्द पर ले जाकर टाइप कर सकता है।

वर्डपैड (Wordpad)

वर्डपैड भी नोटपैड की तरह टेक्स्ट एडिटर (Text Editor) है, लेकिन यह इस तरह का सॉफ्टवेयर या प्रोग्राम है, जिसकी मदद से फाइल के निर्माण के अलावा उसका संपादन और छपाई (Printing) भी की जा सकती है। सामान्यतः इस तरह के प्रोग्रामों को वर्ड प्रोसेसर (Word Processor) कहा जाता है। विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम में नोटपैड की तरह ही वर्डपैड प्रोग्राम भी प्री-इंस्टॉल रहता है। नोटपैड से इतर इस प्रोग्राम में उपयोगकर्ता को टाइपिंग के जरिये टेक्स्ट फाइल तैयार करने के अलावा ग्राफिक (Graphics) यानी चित्र और संकेत या चिह्न भी शामिल करने की सहूलियत मिलती है। इसके लिए इसमें टाइटल बार और मेन्यू बार के अलावा टूल बार भी शामिल किया गया है। इसे हम निम्न चित्र से समझ सकते हैं।



(माइक्रोसॉफ्ट वर्डपैड की विंडो)

वर्डपैड में बाकी सभी चीजें मूलतः नोटपैड जैसी ही हैं, लेकिन इसमें जोड़े गए टूल की मदद से उपयोगकर्ता के लिए टेक्स्ट फाइल को आकर्षक बनाने में मदद मिलती है। इसमें बोल्ड, इटेलिक, अंडरलाइन जैसे ऑप्शन के अलावा पेज (Page) को जूम या अनजूम करने की भी सुविधा उपलब्ध है। साथ ही इन्सर्ट (Insert) विकल्प के जरिये वर्डपैड में टेक्स्ट फाइल के साथ फोटो भी जोड़ी जा सकती है। फॉन्ट की विस्तृत शृंखला से उपयोगकर्ता मनचाहा फॉन्ट चुन सकता है, जबकि फॉन्ट का साइज भी वह अपने हिसाब से तय कर सकता है। माइक्रोसॉफ्ट ने सबसे पहले वर्ष 1995 में अपने ऑपरेटिंग सिस्टम विंडोज 95 में वर्डपैड को लांच किया था। इसके जरिये वर्ड फाइल को रिच टेक्स्ट फॉरमेट (Rich Text Format- RTF) में सुरक्षित कर पाना संभव हो सका।

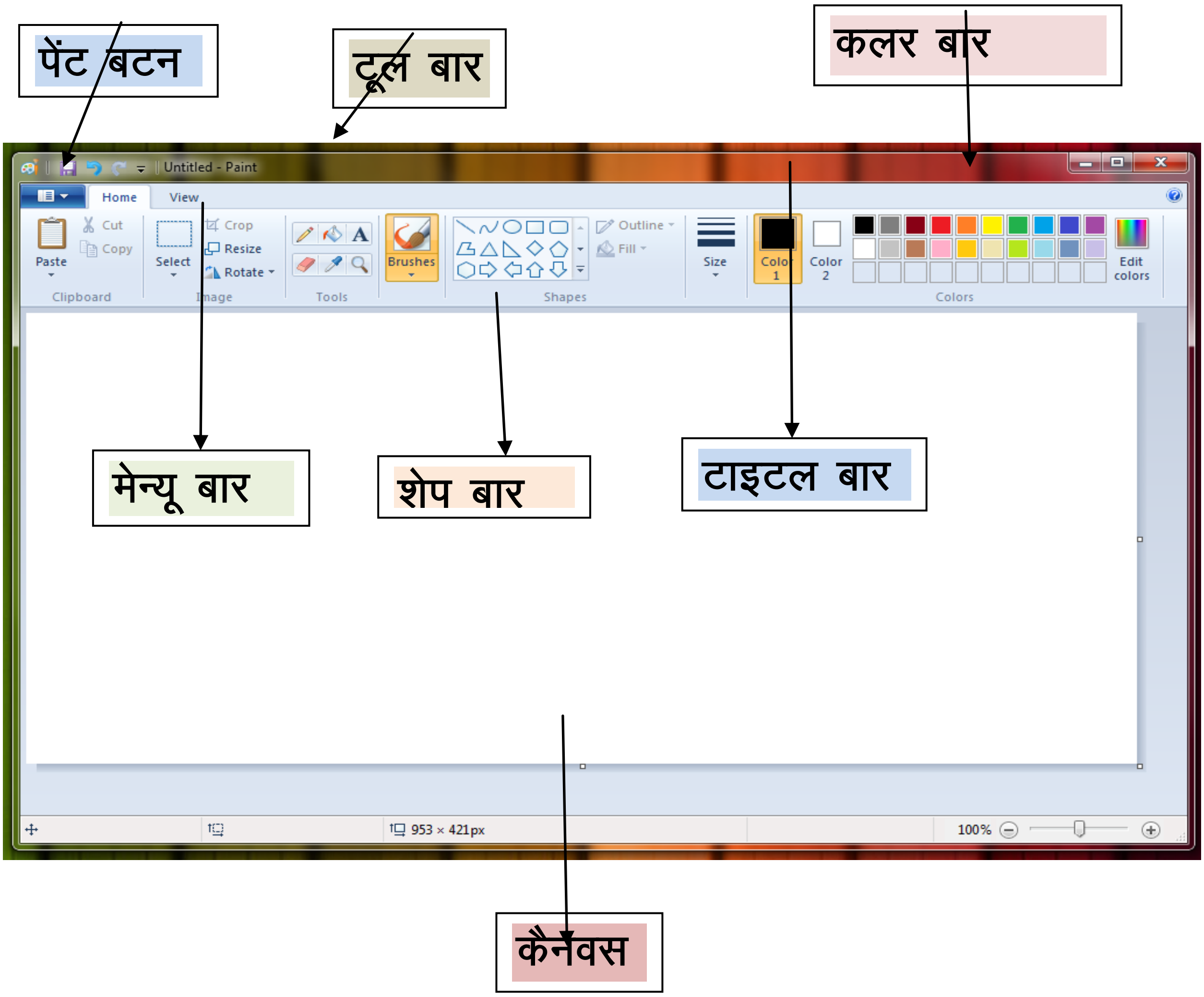
आरटीएफ दरअसल, माइक्रोसॉफ्ट फाइल सिस्टम का खास अधिकृत स्वरूप है, जिसमें किसी दस्तावेज, डाटा को वर्ड फाइल में इस तरह सुरक्षित किया जाता है कि माइक्रोसॉफ्ट के सभी प्रोग्राम इस फाइल को आसानी से पढ़-समझ सकें। माइक्रोसॉफ्ट के लिए नोटपैड प्रोग्राम तैयार करने वाले रिचर्ड ब्रॉडी ने अपने साथियों चार्ल्स सिमोनी और डेविड ल्यूबर्ट के साथ मिलकर आरटीएफ फॉरमेट का तरीका तैयार किया था। इसकी मदद से ही वर्डपैड को और अधिक परिष्कृत कर पाना संभव हुआ। माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 2008 में आरटीएफ फॉरमेट की मेंटेनेंस का काम बंद कर दिया है, लेकिन अब भी यह विंडोज ऑपरेटिंग सिस्टम में उपयोग किया जाता है।

पेंट (Paint)

विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के सभी संस्करणों की एसेसरीज में यह प्रोग्राम भी उपलब्ध रहता है। पेंट दरअसल, ग्राफिकल प्रोग्राम है यानी इसकी मदद से उपयोगकर्ता रंग-बिरंगे चित्र बना सकता है। इसमें कई ऐसे साधन (Tools) मौजूद हैं, जिनकी मदद से उपयोगकर्ता अभीष्ट आकार, रंग, रेखाएं आदि के जरिये

मनचाहा चित्र बना सकता है। इस प्रोग्राम की सबसे बड़ी खासियत यह है कि यह विंडोज के प्रारंभिक प्रोग्रामों में से एक है। वर्ष 1985 में विंडोज ने अपना पहला ऑपरेटिंगसिस्टम विंडोज 1.0 लांच किया था तो उसमें भी पेंट प्रोग्राम शामिल था।

हालांकि, उस वक्त इसे माइक्रोसॉफ्ट पेंट की जगह पेंटब्रश (Paintbrush) कहा जाता था। तब इसे जेडसॉफ्ट कॉरपोरेशन ने पीसी पेंटब्रश के नाम से तैयार किया था। इस लिहाज से इस प्रोग्राम का अधिकृत लाइसेंस इसी कंपनी के पास था। शुरुआती दौर में यह प्रोग्राम सिर्फ एक बिट मोनोक्रोम ग्राफिक्स को ही सपोर्ट करता था। माइक्रोसॉफ्ट ने जब अपना ऑपरेटिंगसिस्टम विंडोज 3.0 वर्ष 1990 में लांच किया तो पेंटब्रश को नये ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (Graphical User Interface) के हिसाब से दोबारा तैयार किया गया। इससे यह कई तरह की फाइल को सपोर्ट करने लगा।



अक्टूबर 2016 में सोशल नेटर्विकंग साइट ट्विटर पर किसी व्यक्ति ने विंडोज पेंट का नया वर्जन विंडोज पेंट 3डी (Paint 3-D) का एक ट्यूटोरियल वीडियो डाला। उस समय तक माइक्रोसॉफ्ट ने ऐसा कोई आधिकारिक प्रोग्राम लांच नहीं किया था। लेकिन, यह वीडियो लीक होने के बाद 28 अक्टूबर 2016 को माइक्रोसॉफ्ट ने अपना डमी एप न्यूकैसल (Newcastle) जारी किया, ताकि उपयोगकर्ता लीकेज वीडियो से लिंक के बजाय कंपनी का अधिकृत साॅफ्टवेयर ही इस्तेमाल करें।

माइक्रोसॉफ्ट की ओर से यह भी जानकारी दी गई कि यह प्रोग्राम जुलाई 2015 में लांच हुए विंडोज के नवीनतम ऑपरेटिंगसिस्टम विंडोज 10 के लिए तैयार किया गया है। माइक्रोसॉफ्ट ने विंडोज 10 उपयोगकर्ताओं के लिए विशेष वेबसाइट भी बनाई है, जिसमें इस प्रोग्राम के संचालन के तरीके बताए गए हैं । इस प्रोग्राम की खासियत इस पर 3-डी पेंटिंग करना है। इसके अलावा इस प्रोग्राम में पारदर्शी 2-डी पेंटिंग भी संभव है।

कैल्कुलेटर (Calculator)

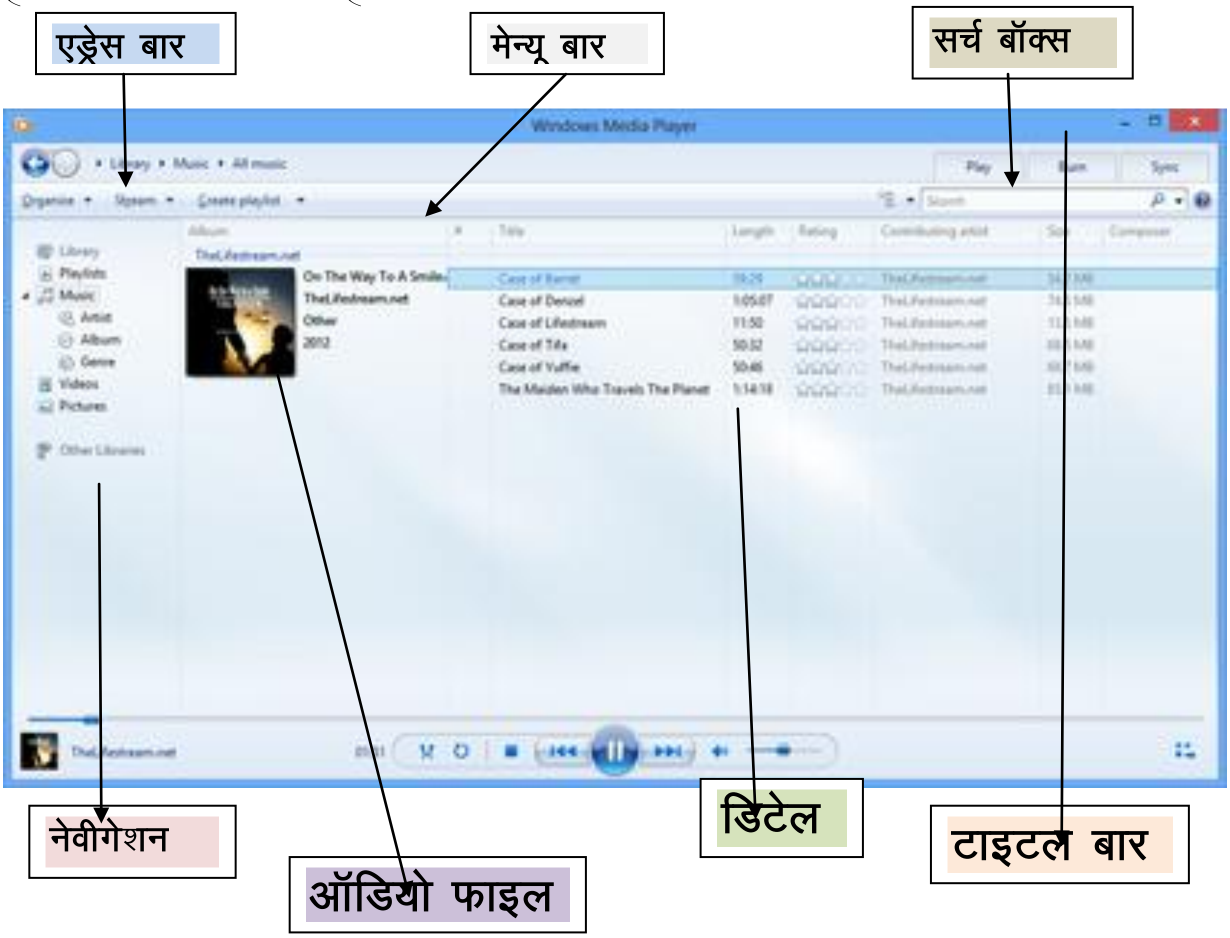
हम जानते हैं कि कंप्यूटर की खोज और विकास का मूल आधार गणनाएं (Calculations) थीं। समय के साथ कंप्यूटर पर अन्य आयाम जुड़ते चले गए, लेकिन गणनाएं आज भी कंप्यूटर का मूल उद्देश्य है। यही वजह है कि विंडोज के हर ऑपरेटिंगसिस्टम पर कैल्कुलेटर (Calculator) प्रोग्राम अनिवार्य रूप से उपलब्ध रहता है। कंप्यूटर पर काम करते वक्त किसी भी तरह की गणना करने में यह उपयोगकर्ता की मदद करता है। कैल्कुलेटर प्रोग्राम भी दो तरह का होता है, पहला सामान्य (Standard) और दूसरा वैज्ञानिक (Scientific) सामान्य कैल्कुलेटर में गुणा-भाग, जोडना-घटाना, प्रतिशत मान निकालना जैसी समान्य गणितीय प्रक्रियाओं को संपन्न करने की सुविधा उपलब्ध होती है। कैल्कुलेटर प्रोग्राम पर लिखे अंकों और गुणा-भाग, जोड़-घटाव के चिह्नों की मदद से उपयोगकर्ता आसानी से अभीष्ट परिणाम हासिल कर सकता है, लेकिन यदि उपयोगकर्ता को और जटिल गणनाएं करनी हों तो वह साइंटिफिक कैल्कुलेटर का इस्तेमाल कर सकता है। इस कैल्कुलेटर में सामान्य गणितीय प्रक्रियाओं के अलावा वर्ग (Square) घन (Cube) त्रिकोणमितीय मान (Trigonometrical Values) समेत सांख्यिकीय (Statistical) गणनाएं करने की भी सुविधा उपलब्ध रहती है।

विंडोज मीडिया प्लेयर (Windows Media Player)

विंडोज मीडिया प्लेयर (WMP) भी माइक्रोसॉफ्ट द्वारा निर्मित एक ऐसा प्रोग्राम है, जो पर्सनल कंप्यूटरों पर इंस्टॉल विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के साथ उपलब्ध रहता है। हम लगातार इस बात को दोहरा रहे हैं कि कंप्यूटर के विकास के अनुक्रम में समय के साथ गणनाएं ही एकमात्र उद्देश्य नहीं रह गया था। कंप्यूटर मनोरंजन का भी बड़ा साधन बनते चले गए और विंडोज मीडिया प्लेयर ऐसा ही एक साधन है, जो कंप्यूटर के जरिये उपयोगकर्ता को ऑडियो सुनने तथा वीडियो और फोटो देखने की सुविधा प्रदान करता है। पर्सनल कंप्यूटर के अलावा विंडोज मीडिया प्लेयर उन पॉकेट पीसी, टैबलेट और मोबाइल फोन पर भी उपलब्ध रहता है, जो विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम पर चलते हैं।

विंडोज ने सबसे पहले वर्ष 1991 में मीडिया प्लेयर लांच किया था, जब विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम का वर्जन विंडोज 3.0 जारी किया गया था। उस वक्त मीडिया प्लेयर एनीमेशन फाइलों को ही देखने में उपयोग किया जा सकता था, लेकिन जैसे-जैसे विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के नये वर्जन लांच होते गए, मीडिया प्लेयर में भी सुधार आता गया। विंडोज के लगभग हर वर्जन के साथ मीडिया प्लेयर का भी सुधारीकृत वर्जन लांच किया जाता रहा। विंडोज 3.1 के साथ पहली बार मीडिया प्लेयर में वीडियो चलाने की भी सुविधा उपलब्ध कराई गई। विंडोज 95 में मीडिया प्लेयर की वीडियो चलाने की क्षमताओं में और अधिक सुधार किया गया। विंडोज मीडिया प्लेयर का आखिरी वर्जन विंडोज मीडिया प्लेयर 12 वर्ष 2009 में विंडोज 7 ऑपरेटिंगसिस्टम के साथ लांच किया था। मीडिया प्लेयर का यह वर्जन विंडोज 7 और इसके बाद अब तक

जारी हुए विंडोज के सभी ऑपरेटिंगसिस्टमों में संचालित किया जाता है। विंडोज मीडिया प्लेयर 12 को हम निम्न चित्र से समझ सकते हैं:



विंडोज मीडिया प्लेयर उपयोगकर्ता को सिर्फ गाने सुनने, वीडियो देखने की ही सुविधा प्रदान नहीं करता, बल्कि इसकी मदद से उपयोगकर्ता ऑडियो सीडी, एमपी3 सीडी तैयार करने या सीडी से ऑडियो-वीडियो को कंप्यूटर पर सुरक्षित रखने का काम भी कर सकता है।

यही नहीं, विंडोज मीडिया प्लेयर इंटरनेट के जरिये उपयोगकर्ता को ऑनलाइन म्यूजिक स्टोर (Online Music Store) या विंडोज की ऑनलाइन मीडिया लाइब्रेरी (Windows Media Library) से भी जोड़ देता है। यहां यह भी उल्लेखनीय है कि विंडोज मीडिया प्लेयर को विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के अलावा मैक ऑपरेटिंगसिस्टम पर भी उपयोग किया जाता था।

25.4 एमएस-ऑफिस (MS-Office)

माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस (Microsoft Office or MS-Office) एप्लीकेशन प्रोग्रामों, सर्वर और सुविधाओं का एक ऐसा ऑफिस सुइट (Office Suite) है, जिसकी मदद से किसी कार्यालय (Office) के दैनिक कार्यों को कम समय में और प्रामाणिकता (Authenticity) और शुद्धता (Accuracy) के साथ संपन्न किया जा सके।

ऑफिस सुइट का तात्पर्य उन सुविधाओं से है, जो ऑफिशियल कार्यों में मददगार हों। इनमें दस्तावेजों का संरक्षण, निर्माण, बिल, प्रजेंटेशन, हिसाब-किताब आदि गतिविधियां शामिल हैं।

बिल गेट्स ने माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट तैयार करने की घोषणा सबसे पहले 1 अगस्त 1988 को अमेरिका के लास वेगास में आयोजित कॉमडेक्स (COMDEX) में की थी। कॉमडेक्स का अर्थ है कंप्यूटर डीलर्स एक्जीबिशन (Computer Dealers' Exhibition) यह प्रदर्शनी जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, नवीनतम कंप्यूटर, कंप्यूटर तकनीक और कंप्यूटर उत्पादों की जानकारी लोगों को देने के मकसद से आयोजित होती थी। वर्ष 1979 से 2003 तक हर साल आयोजित होती रही इस प्रदर्शनी में दुनियाभर से कंप्यूटर निर्माता कंपनियों के प्रतिनिधि, कंप्यूटर उपकरण बेचने वाले डीलर और कंप्यूटर विशेषज्ञ-वैज्ञानिक शामिल होते थे। वर्ष 1990 में लांच हुए विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम विंडोज 3.0 में माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट लांच की गई, जिसमें ऑफिस के तीन प्रमुख प्रोग्राम माइक्रोसॉफ्ट वर्ड, माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल और माइक्रोसॉफ्ट पॉवर प्वाइंट शामिल थे। माइक्रोसॉफ्ट ने समय के साथ ऑफिस सुइट में कुछ और नये फीचर्स भी जोड़े, हालांकि, ये तीनों प्रोग्राम हमेशा सुइट के मूल आधार बने रहे। खास बात यह है कि एमएस-ऑफिस के तीनों प्रोग्रामों के ग्राफिकल यूजर इंटरफेस में भी उसी तरह समान बदलाव किए गए, जैसे संबंधित ऑपरेटिंगसिस्टम के ग्राफिकल यूजर इंटरफेस में किए जाते थे। इससे विंडोज के हर संस्करण के साथ एमएस-ऑफिस भी लगातार अपडेट होते रहे।

दुनियाभर में प्रचलित ऑपरेटिंगसिस्टम, प्रोग्राम, ऑनलाइन गेम्स और कंप्यूटर से जुड़े अन्य उत्पादों की बिक्री, डिमांड जैसे पहलुओं पर नजर रखने वाली वेबसाइट सॉफ्टपीडिया (Softpedia) के अनुसार वर्ष 2012 तक विश्वभर में माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस इस्तेमाल करने वाले उपयोगकर्ताओं की संख्या एक अरब से भी अधिक है।

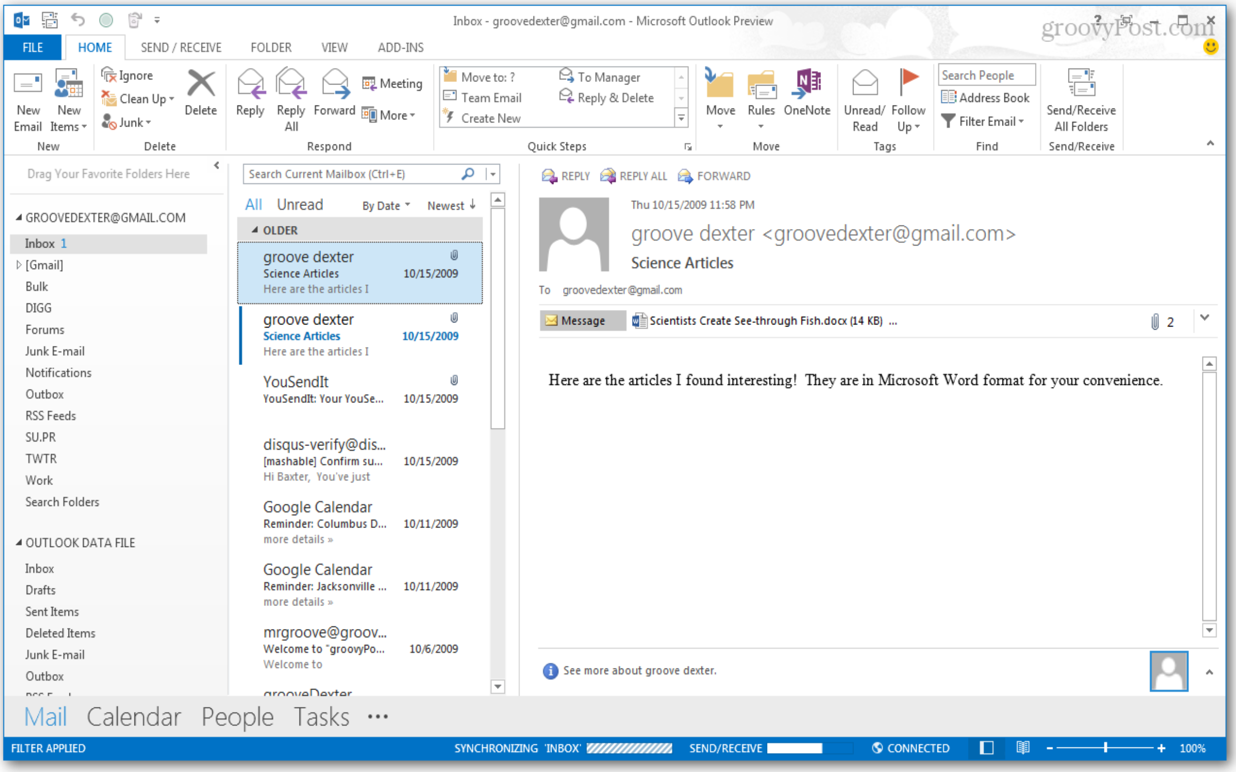
एमएस-ऑफिस के घटक (Components of MS-Office)

माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस को समय की मांग के अनुरूप लगातार सुधारा और परिष्कृत किया जाता रहा है। ऐसे में एमएस-ऑफिस में तीनों बुनियादी प्रोग्रामों के अलावा कई नये प्रोग्राम भी लगातार जुड़ते गए हैं। इकाई के इस हिस्से में हम एमएस-ऑफिस के ऐसे ही कुछ प्रोग्राम के बारे में जानकारी हासिल करेंगेः

- एमएस-वर्ड (MS-Word)% माइक्रोसॉफ्ट वर्ड एक वर्ड प्रोसेसर है, यानी एक ऐसा प्रोग्राम, जिसमें उपयोगकर्ता टेक्स्ट फाइल तैयार करने के साथ उसमें ग्राफिकल सुधार भी कर सकता है। यह विंडोज और मैक ऑपरेटिंगसिस्टम पर समान रूप से काम करता है। एमएस-वर्ड के बारे में हम यूनिट के अगले हिस्से में विस्तार से जानेंगे।
- एमएस-एक्सेल (MS-Excel)% माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल मूलतः स्प्रेडशीट (Spreadsheet) आधारित प्रोग्राम है। यहां दिलचस्प पहलू यह है कि एमएस-एक्सेल को सबसे पहले वर्ष 1985 में मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए तैयार किया गया था, दो साल बाद वर्ष 1987 में यह प्रोग्राम विंडोज के साथ कुछ सुधारीकरण के बाद शामिल किया गया। एमएस-एक्सेल के बारे में भी हम यूनिट के अगले हिस्से में विस्तार से जानेंगे।
- एमएस-पॉवरप्वाइंट ; (MS-Powerpoint)% माइक्रोसॉफ्ट पॉवरप्वाइंट विंडोज और मैक ऑपरेटिंगसिस्टम का प्रजेंटेशन प्रोग्राम (Presentation Program) है। इसकी मदद से उपयोगकर्ता टेक्स्ट, ग्राफिक्स आदि की मदद से स्लाइड शो (Slide Show) तैयार कर सकता है, जिन्हें प्रिंट किया जा सकता है या प्रोजेक्टर की मदद से प्रजेंट करना संभव हो पाता है।

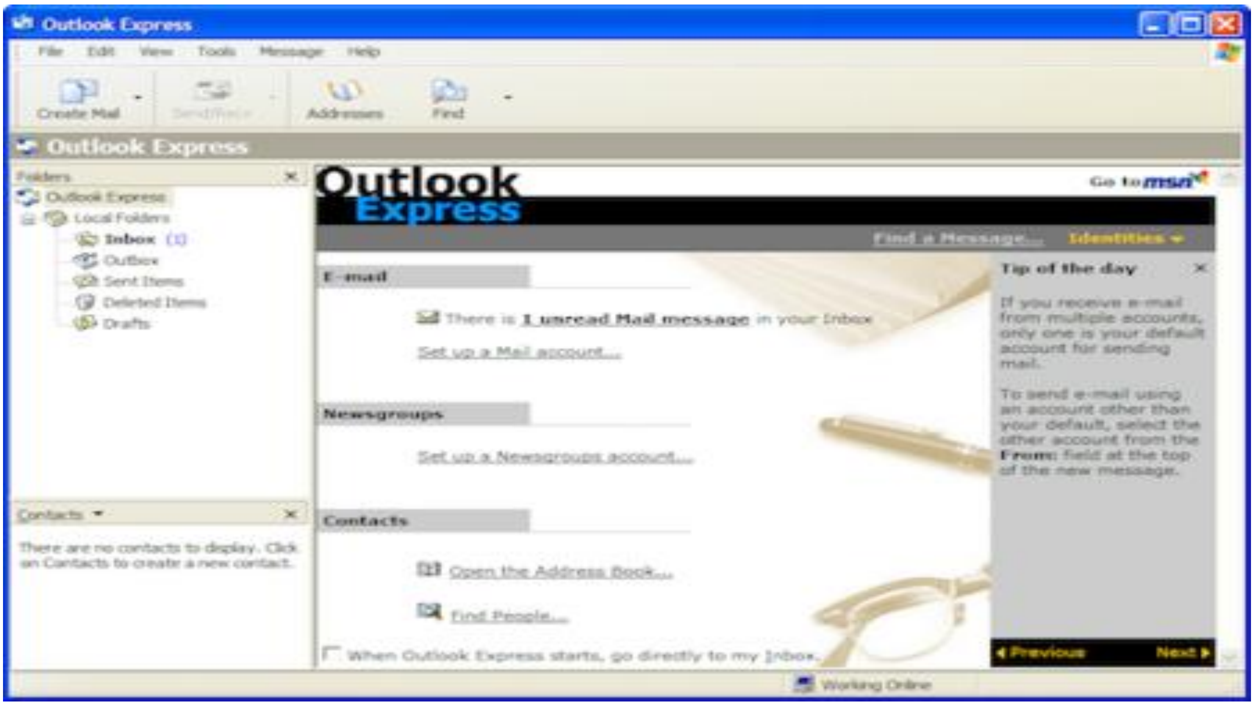
- एमएस-एक्सेस (MS-Access) माइक्रोसॉफ्ट एक्सेस मूलतः डाटाबेस मैनेजमेंट सिस्टम (Database Management System) है, जो एमएस-ऑफिस सुइट का हिस्सा है। हालांकि, पर्सनल कंप्यूटरों से इतर इसका उपयोग प्रोफेशनल (Proffessional) कंप्यूटरों पर ही किया जाता है। डाटाबेस का अर्थ प्रोग्राम स्कीम, क्वेरी (Queries), टेबल, रिपोर्ट और उन अन्य जरूरी डाटा का सामूहिक स्वरूप है जो किसी प्रोग्राम या ऑपरेटिंगसिस्टम के सफल संचालन के लिए जरूरी होता है। डाटाबेस मैनेजमेंट सिस्टम दरअसल एक तरह का सॉफ्टवेयर प्रोग्राम होता है जो उपयोगकर्ता, कंप्यूटर पर मौजूद दूसरी एप्लीकेशनों और अपने ही भीतर मौजूद डाटा का परीक्षण (Analyzation) करता है, जिससे प्रोग्राम की कार्यशैली में सुधार आता है। किसी तरह की दिक्कत आने पर यह ऑनलाइन जुड़ने पर जेट डाटाबेस इंजन (Jet Databse Engine) से संपर्क करता है। जेट डाटाबेस इंजन, उन सभी प्रोग्रामों, एप्लीकेशनों के डाटाबेसों का विस्तृत खजाना है, जो माइक्रोसॉफ्ट ने तैयार किए हैं।
- माइक्रोसॉफ्ट आउटलुक (MS-Outlook)% माइक्रोसॉफ्ट आउटलुक मूलतः पर्सनल इंफॉर्मेशन मैनेजर (Personal Information Manager) है। विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के साथ यह प्रोग्राम इसलिए शमिल किया गया था कि उपयोगकर्ता इसकी मदद से अपनी व्यक्तिगत जानकारियां, फोटो, डाटा, वीडियो और कोई भी अपेक्षित सूचना इस प्रोग्राम में सुरक्षित कर सकता था।

विंडोज ने वर्ष 1997 में लांच विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम 97 के साथ पहली बार आउटलुक को शामिल किया था। आउटलुक की खासियत यह है कि इसे ऑपरेटिंगसिस्टम के सहयोगी प्रोग्राम के तौर पर भी इस्तेमाल किया जा सकता है और एक स्वतंत्र एप्लीकेशन या प्रोग्राम के तौर पर भी। हालांकि, यह विशेष तौर पर स्वतंत्र प्रोग्राम के तौर पर ही उपयोग किया जाता है। इसकी वजह इसमें ई-मेल, कैलेंडर, टास्क मैनेजर (Task Manager) फंक्शन की उपलब्धता है। अपने फीचर की वजह से यह कार्यालयी (Official) कार्यों के लिए उपयुक्त प्रोग्राम बन गया। माइक्रोसॉफ्ट एक्सचेंज सर्वर (Microsoft Exchange Server) और माइक्रोसॉफ्ट शेयरप्वाइंट सर्वर (Microsoft Sharepoint Server) से जुड़कर एमएस-आउटलुक साझा मेल बॉक्स (Mailbox)] एक्सचेंज पब्लिक फोल्डर, शेयर प्वाइंट सूची और उपयोगकर्ता के अन्य ई-मेल कंपनियों पर बने ई-मेल खातों (E-mail Accounts) पर मिलने वाली ई-मेल को आयात करने जैसे कार्यालयी उपयोगी कार्यों में खासा मददगार होता हैै। यही वजह है कि आज अधिकतर कंपनियों में आउटलुक को ही कर्मचारियों की अधिकृत ई-मेल आईडी के तौर पर प्रयोग किया जाता है। जनवरी 2015 में माइक्रोसॉफ्ट ने एंड्रॉयड और आईफोन ऑपरेटिंगसिस्टम पर चलने वाले स्मार्टफोन (Smartphones) और टैबलेट (Tablets) के लिए ऑफिस 365 के साथ ई-मेल, कैलेंडर और कांटेक्ट फीचर वाला आउटलुक वर्जन जारी किया।



(माइक्रोसॉफ्ट आउटलुक एप्लीकेशन)

- आउटलुक एक्सप्रेस (Outlook Express) माइक्रोसॉफ्ट के इस एप्लीकेशन का नाम भी पिछले एप्लीकेशन या प्रोग्राम के समान है, लेकिन यह आउटलुक से भिन्न है। दरअसल यह प्रोग्राम मूलतः ई-मेल और माइक्रोसॉफ्ट इंटरनेट एक्सप्लोरर से जुड़ा हुआ था। वर्ष 1996 में माइक्रोसॉफ्ट ने माइक्रोसॉफ्ट इंटरनेट मेल एंड न्यूज (MS-Internet Mail and News) नाम से नया फीचर विंडोज 95 में शामिल किया। इसके साथ ही इंटरनेट एक्सप्लोरर 3 वर्जन भी लांच किया गया था। हालांकि, तब यह मेल तब सिर्फ प्लेन टेक्स्ट (Plain Text) या रिच टेक्स्ट फॉरमेट (RTF) को ही सपोर्ट करती थी, हाइपर टेक्स्ट मार्कअप लैंग्वेज (HTML) को नहीं। वर्ष 1997 में माइक्रोसॉफ्ट इंटरनेट मेल एंड न्यूज को परिष्कृत कर इंटरनेट एक्सप्लोरर 4.0 के साथ आउटलुक एक्स्प्रेस लांच किया गया।



(आउटलुक एक्सप्रेस)

आउटलुक एक्सप्रेस की बड़ी खामी यह थी कि इसमें सुरक्षा उपकरणों का अभाव था। हालांकि, माइक्रोसॉफ्ट ने इसमें कुछ फीचर जोड़ने का प्रयास तो किया, लेकिन वे नाकाफी साबित हुए। आखिर वर्ष 2005 में विंडोज मेल (Windows Mail) की लांचिंग के साथ आउटलुक एक्सप्रेस को रिप्लेस (Replace) कर दिया गया।

- एमएस-वन नोट (MS-One Note) माइक्रोसॉफ्ट वन नोट भी एमएस-ऑफिस सुइट का की (Key) कंपोनेंट है। यह प्रोग्राम मूलतः नेटवर्किंग पर आधारित है। वर्ष 2003 में रिलीज हुआ यह प्रोग्राम एमएस-ऑफिस के ऑनलाइन संस्करण के जरिये यह किसी वन नोट उपयोगकर्ता को दूसरे वन नोट उपयोगकर्ता तक सूचनाएं भेजने की सुविधा प्रदान करता है। इसके अलावा यह उपयोगकर्ता के हर तरह के डाटा को संग्रहीत (Collect) करने की भी सहूलियत देता है, चाहे वे हस्तलिखित (Handwritten) हों, ड्राइंग (Drawing) के रूप में हों या ऑडियो (Audio) के रूप में। विंडोज 10 समेत यह फीचर इस तरह के ऑपरेटिंगसिस्टमों में ज्यादा कारगर है, जो टचस्क्रीन हैं या जिनमें कीबोर्ड के बजाय पेन (Digital Pen) का इस्तेमाल किया जाता है। यही वजह है कि माइक्रोसॉफ्ट ने इस प्रोग्राम का स्टैंडअलोन (Standalone) संस्करण (Version) विंडोज फोन, आईफोन और एंड्रॉयड के लिए लांच किया है।
- एमएस-स्वे (MS-Sway) माइक्रोसॉफ्ट स्वे एमएस-ऑफिस का नवीनतम प्रोग्राम है, जो विंडोज 10 के साथ रिलीज किया गया है। 39 भाषाओं में उपलब्ध स्वे मूलतः पॉवरप्वाइंट की तरह प्रजेंटेशन पर आधारित है, लेकिन यह प्रोग्राम उपयोगकर्ता को यह सुविधा प्रदान करता है कि वह टेक्स्ट, फोटो, ऑडियो आदि को जोड़कर प्रजेंटेशन लायक वेबसाइट (Website) बना सके। हालांकि, इसके लिए उपयोगकर्ता का माइक्रोसॉफ्ट एकाउंट होना जरूरी है। एकाउंट बनने के बाद उपयोगकर्ता अपने डेस्कटॉप, लैपटॉप पर संग्रहीत डाटा को स्वे के जरिये माइक्रोसॉफ्ट सर्वर पर सुरक्षित रख सकता है। यही नहीं, स्वे उपयोगकर्ता को यह भी सहूलियत प्रदान करता है कि वह फेसबुक जैसी सोशल नेटवर्किंग

साइट, यू-ट्यूब आदि से सीधे कोई फोटो, ऑडियो, लिंक या कोई अन्य डाटा-जानकारी भी स्वे के जरिये अपनी वेबसाइट में सीधे जोड़ सकता है। इन वेबसाइट को किसी भी ऐसी वेब एप (Web Applications) की मदद से देखा या संपादित ;म्कपजद्ध किया जा सकता है, जो एमएस-ऑफिस ऑनलाइन एप पर संचालित होने में सक्षम हों। विंडोज 10 के अलावा आईफोन भी ऐसे ऑपरेटिंगसिस्टम हैं, जिन पर स्वे को चलाया जा सकता है। एंड्रॉयड और विंडोज फोन पर यह सुविधा फिलहाल उपलब्ध नहीं है, लेकिन माइक्रोसॉफ्ट की ओर से इस दिशा में काम किया जा रहा है।

- एमएस-डेस्कटॉप पब्लिशिंग (Desktop Publishing) डेस्कटॉप पब्लिशिंग एमएस-ऑफिस सुइट में शामिल वह प्रोग्राम है, जो उपयोगकर्ता को पर्सनल कंप्यूटर पर ऐसी सामग्री तैयार करने की सहूलियत प्रदान करता है, जो छापी (Print) जानी हो। इस प्रोग्राम में पेज लेआउट (Page Layout) टेक्स्ट, इमेज आदि की लंबी शृंखला रहती है। इनकी मदद से ग्रीटिंग कार्ड, कैलेंडर, पत्रिकाएं, ब्रोशर (Brouchures) लेबल, स्टिकर, बिजनेस कार्ड, पोस्टकार्ड, वेबसाइट आदि डिजाइन किए जाते हैं। इस एप्लीकेशन का इस्तेमाल मूलतः पब्लिशिंग कारोबारी ही करते हैं।
- एमएस-सर्वर और वेब सर्विस (MS-Server & Web Services) माइक्रोसॉफ्ट अपने सभी ऑपरेटिंगसिस्टम, प्रोग्राम और एएस-ऑफिस सुइट को साझा सर्वर के जरिये संयुक्त रखता है। माइक्रोसॉफ्ट शेयर प्वाइंट (MS-Sharepoint) ऐसा ही सर्वर है। इसकी वजह से माइक्रोसॉफ्ट के सभी एप्लीकेशन का इस्तेमाल ऑनलाइन करना भी संभव हो पाता है। एक्सेल सर्वर, एमएस-प्रोजेक्ट सर्वर, एमएस-सर्च सर्वर, इंफोपाथ फार्म सर्विस और माइक्रोसॉफ्ट लिंक सर्वर ऐसे ही कुछ सर्वर हैं।

माइक्रोसॉफ्ट वेब सर्विसेज की बात करें तो कंपनी अपने लगभग सभी उत्पादों की ऑनलाइन सेवा भी उपलब्ध कराती है। वर्ड ऑनलाइन, एक्सेल ऑनलाइन, पॉवरप्वाइंट ऑनलाइन, वननोट ऑनलाइन, आउटलुक.कॉम, पीपुल (आउटलुक.कॉम से संबद्ध एड्रेस बुक), कैलेंडर, डॉक्स.कॉम Docs.com. एमएस-ऑफिस उपयोगकर्ता इसकी मदद से अपने प्रोफाइल में अपनी वर्डफाइल, पीडीएफ, पॉवरप्वाइंट प्रजेंटेशन आदि सुरक्षित रख सकता हैद्ध, वन ड्राइव, स्वे, प्लानर, वीडियो आदि एमएस-ऑनलाइन सर्विस हैं।

- एमएस-ऑफिस के वर्जन (Versions of MS-Office)

एमएस-ऑफिस के कई वर्जन व्यावसायिक उपयोग और पर्सनल कंप्यूटरों के लिए उपलब्ध हैं, लेकिन इनमें सबसे अधिक प्रचलन वाला वर्जन एमएस-ऑफिस डेस्कटॉप वर्जन (Desktop Version) है। यह वर्जन मूलतः पर्सनल कंप्यूटरों के लिए डिजाइन किया गया था, जिन पर विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम या मैक ऑपरेटिंगसिस्टम चलाए जाते हैं। हम जान चुके हैं कि एमएस-ऑफिस का पहला वर्जन वर्ष 1990 में लांच हुआ था। एमएस-ऑफिस का नवीनतम संस्करण (Version) ऑफिस 2016 (Office 2016) है, जो विंडोज और मैक दोनों के लिए क्रमशः 22 सितंबर 2015 और 9 जुलाई 2015 को लांच किया गया था। विंडोज और मैक के लिए एमएस-ऑफिस सुइट के वर्जन, उनमें उपलब्ध सुविधाएं और लांचिंग का वर्ष निम्नवत हैं:

- विंडोज (Windows) विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए माइक्रोसॉफ्ट ने पहला एमएस-ऑफिस सुइट वर्ष 1990 में लांच किया था। इसका नाम एमएस-ऑफिस 4.0 था। इसके दो साल बाद एमएस-ऑफिस 3 या 92 वर्ष 1992 में रिलीज हुआ। वर्ष 1993 में एमएस-ऑफिस 4.X, वर्ष 1995 में एमएस-ऑफिस

95 और वर्ष 1997 में एमएस-ऑफिस 8.0 या 97 लांच किए गए। विंडोज के लिए एमएस-ऑफिस सुइट की शृंखला यहीं नहीं थमी। वर्ष 2000 में माइक्रोसॉफ्ट ने एमएस-ऑफिस 9.0 या 2000 लांच किया। इसके दो साल बाद यानी वर्ष 2002 में एमएस-ऑफिस XP रिलीज किया गया। वर्ष 2003 में एमएस-ऑफिस 11.0, 2007 में एमएस-ऑफिस 12.0 और वर्ष 2010 में एमएस-ऑफिस 14.0 माइक्रोसॉफ्ट ने लांच किए। वर्ष 2013 में एमएस-ऑफिस 15 या 2013 के बाद माइक्रोसॉफ्ट का अब तक का अंतिम एमएस-ऑफिस सुइट 2016 वर्ष 2016 में लांच हुआ।

मैक (Mac) मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 1984 में पहली बार एमएस-वर्ड इंट्रोड्यूस (Introduce) किया था। इसका वर्जन एमएस-वर्ड 1.0 था। एक साल बाद 1985 में मैक के साथ एक्सेल 1.0 और इसके दो साल बाद यानी वर्ष 1987 में पॉवरप्वाइंट 1.0 भी मैक (Macintosh) ऑपरेटिंगसिस्टम में शामिल किए गए। वर्ष 1989 में माइक्रोसॉफ्ट ने पहली बार एमएस-ऑफिस सुइट के तीनों बुनियादी प्रोग्रामों वर्ड, एक्सेल और पॉवरप्वाइंट को संयुक्त कर ऑफिस मैक नाम से मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए लांच किया। वर्ष 1991 में ऑफिस मैक 1.5, 1992 में ऑफिस 3.0 और 1994 में ऑफिस 4.2 जारी किया गया। वर्ष 1998 में माइक्रोसॉफ्ट ने मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए अपना ऑफिस सुइट 98 लांच किया। वर्ष 2000 में ऑफिस मैक 2001, वर्ष 2001 में ऑफिस V.X और वर्ष 2004 में ऑफिस 2004 जारी हुए। इसके बाद 2008 में ऑफिस 2008, 2010 में ऑफिस 2011 जारी किए गए। मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के साथ वन नोट और आउटलुक की सुविधाएं माइक्रोसॉफ्ट की ओर से वर्ष 2014 में जोड़ी गईं। वर्ष 2015 में माइक्रोसॉफ्ट ने मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए अपना अब तक का अंतिम ऑफिस सुइट ऑफिस मैक 2016 लांच किया।

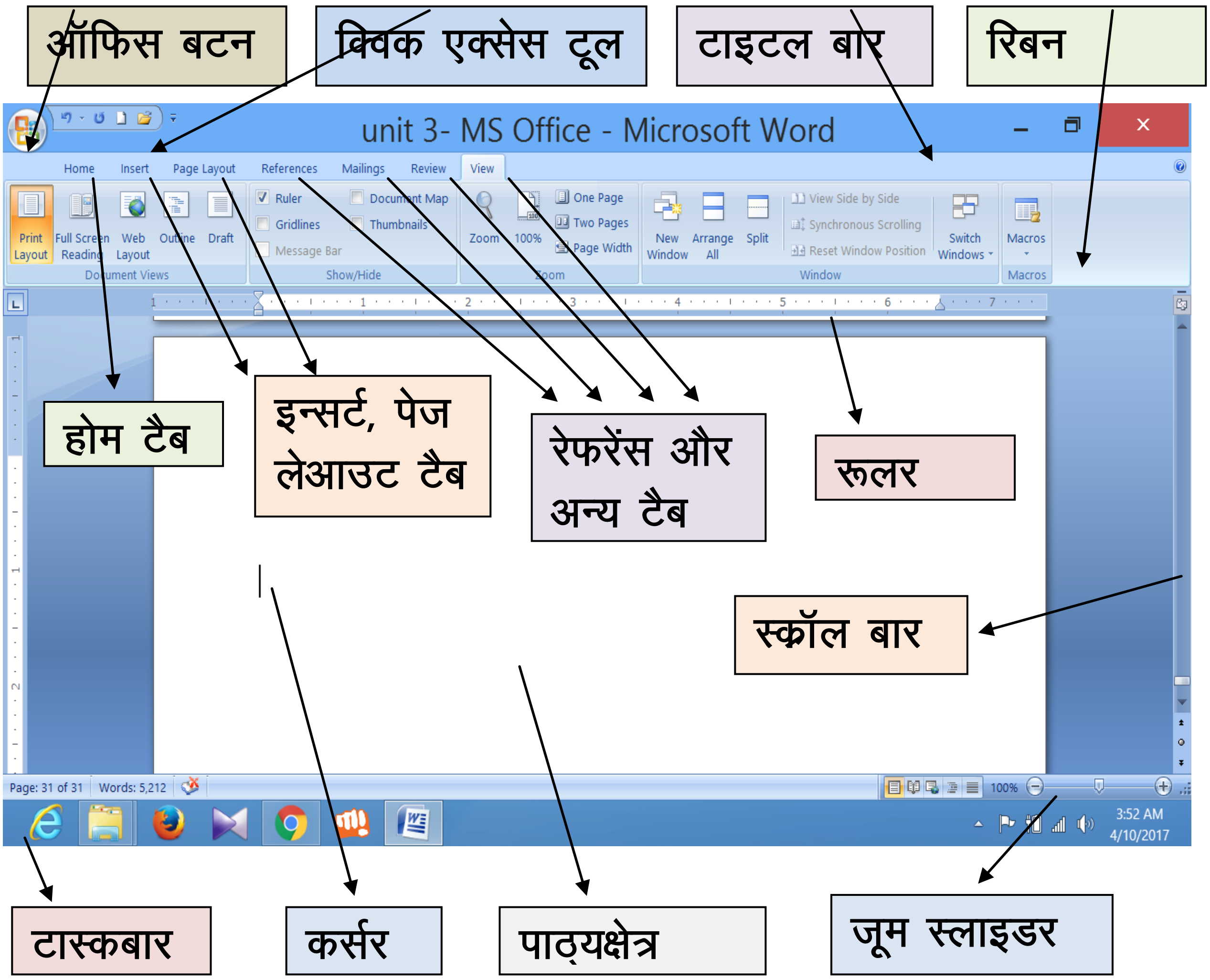
25.5 एमएस-वर्ड (MS-Word)

माइक्रोसॉफ्ट वर्ड मूलतः एक वर्ड प्रोसेसर (Word Processor) है। माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 1983 में यूनिक्स (Unix) आधारित जेनिक्स (Xenix) ऑपरेटिंगसिस्टम पर चलने वाले माइक्रोकंप्यूटर के लिए अपना पहला वर्ड प्रोसेसिंग प्रोग्राम लांच किया था, तब इसका नाम मल्टी टूल वर्ड (Multi Tool Word) था। इसी वर्ष इसे आईबीएम के डिस्क ऑपरेटिंगसिस्टम (DOS) आधारित कंप्यूटरों में भी शामिल किया गया। कालान्तर में वर्ड के वर्जन लांच होते गए। वर्ष 1989 में एमएस-वर्ड को विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम में शामिल किया गया और वर्ष 1990 में यह एमएस-ऑफिस सुइट का अभिन्न अंग बन गया।

वर्ष 2010 में एमएस-वर्ड का नवीनतम संस्करण (Version) लांच किया गया है। हालांकि, एमएस-वर्ड 2007 सर्वाधिक प्रचलित एमएस-वर्ड संस्करण है। अधिकतर पर्सनल कंप्यूटरों पर एमएस-ऑफिस सुइट में वर्ड के इसी संस्करण का उपयोग किया जाता है। इकाई के इस भाग में हम भी एमएस-वर्ड के बारे में ही विस्तार से अध्ययन करेंगे। यहां यह उल्लेखनीय है कि माइक्रोसॉफ्ट विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम में वर्डपैड (Wordpad) नाम से एक स्वतंत्र वर्ड प्रोसेसर भी उपलब्ध रहता है, लेकिन वर्डपैड में उपयोगकर्ता को मिलने वाली सुविधाएं काफी सीमित रहती हैं। एमएस-वर्ड में वर्डपैड के मुकाबले कहीं अधिक साधन (Tools) उपलब्ध रहते हैं, जिससे उपयोगकर्ता के लिए अपने दस्तावेजों को तैयार करने और इन्हें बेहतर साज-सज्जा के साथ आकर्षक स्वरूप देना अधिक सरलीकृत और सुगम हो जाता है। इस लिहाज से हम यह

भी मान सकते हैं कि एमएस-वर्ड वर्ड प्रोसेसिंग प्रोग्रामों के लिहाज से वर्डपैड की अगली और परिष्कृत कड़ी है।

एमएस-वर्ड के साधन (Tools of MS-Word)



उपरोक्त चित्र में एमएस-वर्ड प्रोग्राम के प्रमुख हिस्से दर्शाए गए हैं, जिन्हें हम इस प्रोग्राम के साधन (Tools) मान सकते हैं। यहां साधन का तात्पर्य प्रोग्राम में मौजूद उन सुविधाओं से है, जो एमएस-वर्ड को उपयोगकर्ता के प्रयोग के लिए सरल बनाते हैं और अभीष्ट परिणाम उपलब्ध कराने में मददगार होते हैं। इन सभी साधनों को हम निम्नवत क्रमवार विस्तार से जान लेते हैं:

- टाइटल बार (Title Bar): जैसा कि नाम से ही स्पष्ट हो रहा है, प्रोग्राम के इस हिस्से में शीर्षक यानी टाइटल नजर आता है। उपयोगकर्ता जो भी फाइल, दस्तावेज बना रहा है यदि उसने इसे कुछ नाम दिया है तो वह नाम टाइटल बार में नजर आता है। यदि कोई नाम नहीं दिया है तो टाइटल बार में अनटाइटल्ड डॉक्यूमेंट (Untitled Document) लिखा दिखता है।
- ऑफिस बटन (Office Button): एमएस-वर्ड के पुराने वर्जनों में इसके स्थान पर फाइल मेन्यू रहता था। लेकिन वर्ड 2007 में इसे बदलकर ऑफिस बटन कर दिया गया है। टाइटल बार के सबसे उपरी हिस्से में बायीं ओर विंडोज के लोगो वाला गोल बटन नजर आता है, वही ऑफिस बटन है। इस बटन

पर क्लिक करते ही कई विकल्प (Option) सामने खुल जाते हैं। इनमें न्यू (New) बटन पर क्लिक करते ही नयी फाइल खुल जाती है, जिस पर उपयोगकर्ता अपना नया दस्तावेज तैयार कर सकता है। ओपन (Open) पर क्लिक करने से कंप्यूटर पर पहले से सुरक्षित दस्तावेज या फाइल खोली जा सकती है। सेव (Save) पर क्लिक करने से उपयोगकर्ता अपनी फाइल को सुरक्षित कर सकता है। सेव एज (Save As) उपयोगकर्ता को यह सुविधा प्रदान करता है कि वह अपने दस्तावेज को वर्ड डाॅक्यूमेंट फाइल या अन्य किसी फॉरमेट में सुरक्षित कर सके। प्रिंट (Print) बटन पर क्लिक करने से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज का प्रिंट हासिल कर सकता है। इसका अगला बटन है प्रीपेयर (Prepare) की मदद से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज में कई ऐसे फीचर जोड़ सकता है, जो दस्तावेज को किसी अन्य उपयोगकर्ता के प्रयोग करने की स्थिति में इसे सुरक्षित रखें और अपरिवर्तनीय बना सकें। सेंड (Send) बटन दस्तावेज को ई-मेल के जरिये किसी दूसरे कंप्यूटर या उपयोगकर्ता तक भेजने की सुविधा देता है। पब्लिश (Publish) की मदद से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज को ब्लॉग बना सकता है या माइक्रोसॉफ्ट के डाटा मैनेजमेंट सर्वर में सुरक्षित रख सकता है। आखिरी बटन क्लोज (Close) है, जिसका अर्थ है बंद करना, यानी इसकी मदद से उपयोगकर्ता अपनी फाइल बंद कर सकता है।

- क्विक एक्सेस टूलबार (Quick Access Toolbar): ऑफिस बटन के ठीक उपर दायीं ओर क्विक एक्सेस टूलबार होता है। इसमें वे कमांड (Commands) शामिल हैं, जिनका इस्तेमाल उपयोगकर्ता एमएस-वर्ड पर काम करते वक्त बार-बार करता है। ऐसे में उसे लंबी प्रक्रिया से गुजरने के बजाय सीधे इन पर क्लिक कर काम करने की सुविधा मिलती है। इनमें सेव (save), अनडू (Undo), रिपीट (Repeat), ओपन (Open) जैसी कमांड शामिल हैं। उपयोगकर्ता अपनी जरूरत के हिसाब से टूलबार में कमांड जोड़ या हटा सकता है।
- रिबन (Ribbon): एमएस-वर्ड में अलग-अलग सात टैब (Tab) हैं। हर टैब एक खास तरह के कमांड का समूह है और ये सातों टैब जहां अवस्थित रहती हैं, उस हिस्से को रिबन कहा जाता है। यह टाइटल बार से नीचे अगली लंबी पट्टी होती है। ये सात टैब हैं होम, इन्सर्ट, पेज लेआउट, रेफरेंसेज, मेलिंग्स, रिव्यू और व्यू। आइए हम संक्षेप में इन सातों टैब के बारे में जानते हैं:

1. होम टैब (Home Tab): होम टैब की मदद से मुख्यतः पांच कार्य किए जा सकते हैं। यह भी मान सकते हैं कि किसी उपयोगकर्ता के लिए अपनी डॉक्यूमेंट फाइल तैयार करते वक्त सबसे अधिक जिन कमांड की जरूरत होती है। इनमें क्लिपबोर्ड, फॉन्ट, पैराग्राफ, स्टाइल और एडिटिंग शामिल हैं। इन सभी कमांडों की मदद से उपयोगकर्ता इच्छानुसार काम कर सकता है।
2. इन्सर्ट टैब (Insert Tab): इन्सर्ट का हिन्दी अर्थ है जोड़ना या घुसाना। उपयोगकर्ता अपनी फाइल में जब भी कोई ग्राफिक, चित्र, कोई खास चिह्न, टेबल आदि जोड़ना चाहता है तो इन्सर्ट टैब मददगार साबित होती है। इस टैब के भी सात हिस्से हैं, पेजेस (Pages), टेबल्स (Tables), इलस्ट्रेशन (Illustrations), लिंक्स (Links), हेडर एंड फुटर (Header and Footer), टेक्स्ट (Text) और सिंबल्स (Symbols). पेजेस की मदद से उपयोगकर्ता मनचाहा पेज इस्तेमाल कर सकता है, जिस पर वह अपनी फाइल तैयार करना चाहता है। टेबल की मदद से उपयोगकर्ता सारिणी तैयार कर सकता है, जो कई दस्तावेजों में चीजों को समझाने में खासी उपयोगी होती हैं। इलस्ट्रेशन टैब उपयोगकर्ता को पिक्चर यानी फोटो, क्लिपआर्ट यानी चित्र, लोगो लगाने की सुविधा देती हैं। शेप्स की मदद से

उपयोगकर्ता कई तरह की आकृतियों का इस्तेमाल कर सकता है। स्मार्टआर्ट में कई खास तरह के ग्राफिक्स का समूह पहले से उपलब्ध रहता है, जिनमें से उपयोगकर्ता मनचाहा चुन सकता है। चार्ट की मदद से दस्तावेज में ग्राफ (Graph) बनाए जा सकते हैं जो तुलनात्मक अध्ययन में मददगार होते हैं। लिंक्स की मदद से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज (Document) को वेबपेज की तरह तैयार कर सकता है, बुकमार्क बना सकता है। हेडर एंड फुटर किसी दस्तावेज का हेडर, यानी शीर्षक या परिचय और फुटर यानी निष्कर्ष को विशेष तरह से लिखने की सुविधा देता है। इसी टैब में पेज नंबर का भी विकल्प मौजूद होता है, इसकी मदद से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज में पन्नों के नंबर तय कर सकता है। टेक्स्ट टैब से उपयोगकर्ता को अपने पाठ्य को आकर्षक बनाने में मदद मिलती है। सिंबल्स की मदद से कुछ ऐसे संकेत, चिह्न पाठ्य में जोड़े जा सकते हैं, जिन्हें सामान्य तौर पर लिखना या टाइप कर पाना संभव नहीं हो पाता। इसमें कई गणितीय संकेत भी शामिल हैं।

3. पेज लेआउट (Page Layout): इस टैब में पांच कार्यसमूह होते हैं। थीम्स (Themes), पेज सेटअप (Page Setup), पेज बैकग्राउंड (Page Background), पैराग्राफ (Paragraph), अरेंज (Arrange). इन सभी की मदद से उपयोगकर्ता यह तय कर पाता है कि उसे अपना दस्तावेज किस तरह तैयार करना है। उसका स्वरूप कैसा होगा, पन्ने पर हाशिये (Margins) कितनी चैड़ाई के होंगे, पन्ने का आकार (Size) कितना होगा, कॉलम कैसे होंगे, पैराग्राफ के बीच दूरी कितनी रहेगी आदि।
4. रेफरेंसेज (References): उपयोगकर्ता जब कोई दस्तावेज तैयार करता है तो कई बार पाठ्य के साथ कुछ अन्य टिप्पणियां जोड़ने की भी जरूरत महसूस होती है। उदाहरण के तौर पर विषयसूची, शीर्षक, संदर्भ, फुटनोट, एंडनोट आदि। इस टैब में उपलब्ध कमांड टेबल ऑफ कंटेन्ट्स (Table of Contents), फुटनोट्स, साइटेशन एंड बिबिलोग्राफी (Citations and Bibilography), कैप्शन (Capyions), इन्डेक्स (Index) और टेबल ऑफ अथॉरिटीज (Table of Authorities) से यह सब कर पाना संभव होता है।
5. मेलिंग्स (Mailings): इस टैब के पांच भाग हैं, क्रिएट (Create), स्टार्ट मेल मर्ज (Start Mail Merge), राइट एंड इन्सर्ट फील्ड्स (Write & Insert Fields), प्रीव्यू रिजल्ट्स (Preview Results) और फिनिश (Finish). यह टैब मुख्यतः तब इस्तेमाल में लाया जाता है, जब उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज को ई-मेल के जरिये किसी दूसरे उपयोगकर्ता तक भेजना चाहता हो या वेब संदेश तैयार करना चाहता हो। हालांकि, इसके लिए वर्ड ऑनलाइन (Word Online) से जुड़ा होना आवश्यक है।
6. रिव्यू (Review): जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, यह टैब उपयोगकर्ता को सुधार का अवसर देता है। इसकी छह सहायक टैब हैं, प्रूफिंग (Proofing), कमेंट्स (Comments), ट्रैकिंग (Tracking), चेंजेस (Changes), कंपेयर (Compare) और प्रोटेक्ट (Protect). इनकी मदद से उपयोगकर्ता अपने दस्तावेज में वर्तनी, व्याकरण की अशुद्धियां दूर कर सकता है, टिप्पणी जोड़ सकता है, दस्तावेज में एक ही बात बार-बार गलती से रिपीट हो रही हो या कॉपी-पेस्ट हो गई हो तो इसे चिह्नित किया जा सकता है। दस्तावेज में कोई सुधारात्मक परिवर्तन करना संभव होता है। यही नहीं, दस्तावेज को इस तरह सुरक्षित किया जा सकता है कि कोई अन्य उपयोगकर्ता इसमें बदलाव नहीं कर सके।
7. व्यू टैब (View): इस टैब के पांच सहायक टैब हैं, डॉक्यूमेंट व्यूज (Document Views), शो-हाइड (Show/ Hide), जूम (Zoom), विंडो (Window) और मैक्रो (Macro). इनकी मदद से उपयोगकर्ता

अपने दस्तावेज का प्रिंट लेआउट (Print Layout) तय कर सकता है। पन्ने को जूम करके बड़ा या छोटा कर सकता है, ताकि पाठ्यक्षेत्र पर टाइप करने में आसानी हो। दस्तावेज की विंडो को दो टुकड़ों में बांट सकता है, ताकि पाठ्य के दो अलग-अलग भागों को एक ही समय पर पढ़ सके। मैक्रो की मदद से उन कमांड को एक समूह के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है जो दस्तावेज तैयार करने के दौरान उपयोगकर्ता कई बार इस्तेमाल करता है। इन कमांड को सामूहिक रूप देने के बाद एक बार मैक्रो पर क्लिक करने से सभी कमांड काम करती हैं।

8. अन्य टैब (Other Tabs): रिबन में कुछ टैब नजर नहीं आती हैं। जैसे डेवलपर टैब (Developer Tab) यह टैब मूलतः तकनीकी उपयोग में काम आती है। वे ही लोग इसे अधिक प्रयोग करते हैं, जो वर्ड के लिए एप्लीकेशन (Applications) तैयार करते हैं। सामान्य दैनिक जीवन में इस टैब का अधिक उपयोग नहीं होता है। इसके अलावा रिलीवेंट टैब (Relevant Tabs) भी वर्ड का हिस्सा हैं। ये टैब वे हैं, जो वर्ड में कोई खास काम करने के दौरान रिबन पर स्वतः उभर आती हैं। मसलन, जब हम दस्तावेज में कोई चित्र जोड़ते हैं तो पिक्चर टूल्स (Picture Tools) खुदबखुद सामने आ जाते हैं।

- रूलर (Ruler): वर्ड में काम करते वक्त हमें दो रूलर नजर आते हैं। दरअसल, यह वर्ड का मापक साधन है। इसकी मदद से उपयोगकर्ता यह तय कर पाता है कि दस्तावेज के पन्नों पर हाशिये किस तरह व्यवस्थित होंगे। व्यू टैब में जाकर शो या हाइड से रूरल को हटाया भी जा सकता है।
- पाठ्यक्षेत्र (Text Area): हम जानते हैं कि पाठ्यक्षेत्र वर्ड का वह हिस्सा है, जहां उपयोगकर्ता टाइपिंग करता है। सामान्य शब्दों में इसे वर्ड दस्तावेज का एक पन्ना भी मान सकते हैं।
- कर्सर (Cursor): कर्सर पाठ्यक्षेत्र में एक खड़ी लकीर ( ) की तरह दिखता है। उपयोगकर्ता पाठ्यक्षेत्र में जो भी लिखता यानी टाइप करता है, वह इस कर्सर से ही प्रारंभ होता है। पाठ्यसामग्री के किसी भाग में यदि उपयोगकर्ता को कोई शब्द बदलना हो तो उसके लिए कर्सर को संबंधित शब्द पर ले जाना अनिवार्य होता है, तभी टाइपिंग संभव हो पाती है। इसी तरह पाठ्यक्षेत्र में एक माउस प्वाइंटर (Mouse Pointer) भी नजर आता है जो दिखने में अंग्रेजी अक्षर कैपिटल आई प् की तरह होता है। इसे स्क्रीन पर माउस की मदद से कहीं भी ले जाया जा सकता है। जहां पर भी इसे माउस के क्लिक से छोड़ा जाता है, कर्सर वहीं आ जाता है।
- स्टेटस बार (Status Bar): यह एमएस-वर्ड के सबसे नीचे की पट्टी है। इसमें जूम स्लाइड (Zoom Slide) के अलावा कुछ अन्य क्विक कमांड मौजूद होती हैं। इसके अलावा बार के बायें हिस्से में दस्तावेज के पन्नों और इसमें टाइप किए गए कुल शब्दों की संख्या दर्शाई जाती है।

25.6 एमएस-एक्सेल (MS-Excel)

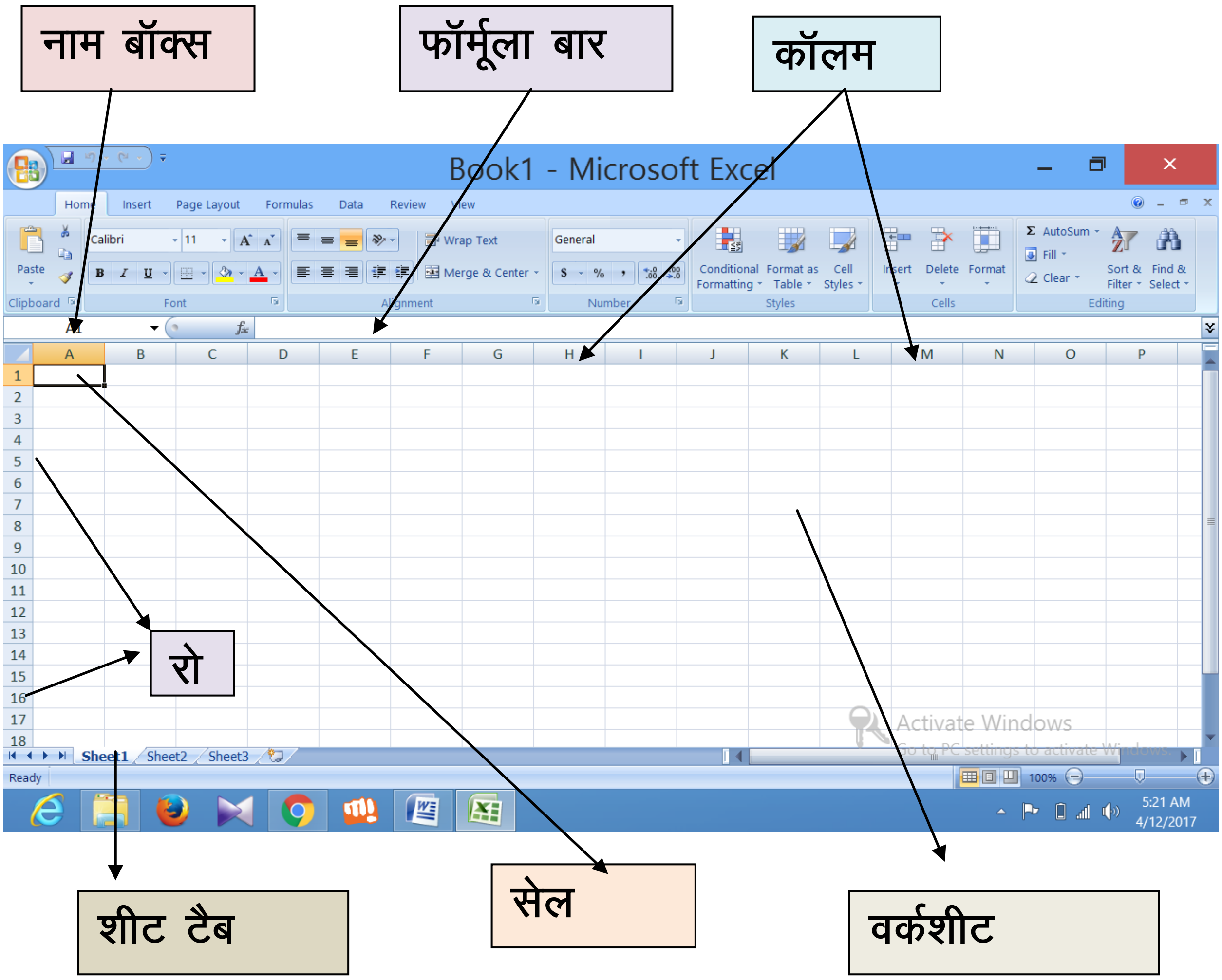
माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल मूलतः एक स्प्रेडशीट (Spreadsheet) प्रोग्राम है। स्प्रेडशीट दरअसल डाटा या सूचनाओं का सारिणी रूप (Tabular Form) प्रस्तुतीकरण है, जिसमें डाटा या आंकड़ों को सारिणी (Tables) के छोटे हिस्सों, जिन्हें सेल (Cells) कहा जाता है, में दर्ज किया जाता है। यह डाटा अंकीय (Numeric) भी हो सकता है और शब्दीय (Text) के रूप में भी। स्प्रेडशीट कुछ विशेष सूत्रों (Formulas) पर काम करती है, जिसके तहत अलग-अलग सेल में दर्ज आंकड़ों या डाटा के आधार पर पूरा परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। ये फॉर्मूला स्वतः (Automatically) काम करते हैं, यानी उपयोगकर्ता को स्प्रेडशीट पर

तय सेल में आंकड़े सिर्फ भरने होते हैं और फाॅर्मूला की मदद से प्रोग्राम खुद ही नतीजा उपलब्ध करा देता है।

माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 1987 में पहली बार विंडोज के लिए एमएस-एक्सेल को रिलीज किया था। 1990 में एमएस-ऑफिस सुइट के लांच होने पर इसे सुइट में शामिल कर लिया गया। विंडोज के अलावा यह प्रोग्राम मैक, आईफोन और अब एंड्रॉयड ऑपरेटिंगसिस्टम पर भी उपलब्ध है। संक्षिप्त इतिहास की चर्चा करें तो माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 1982 में अपना पहला स्प्रेडशीट प्रोग्राम मल्टीप्लान (Multiplan) नाम से लांच किया था। लेकिन आईबीएम के स्प्रेडशीट प्रोग्राम लोटस 1-2-3 (Lotus 1-2-3) के आगे यह टिक नहीं सका। ऐसे में माइक्रोसॉफ्ट ने वर्ष 1985 में मैक ऑपरेटिंगसिस्टम के लिए एमएस-एक्सेल नाम से प्रोग्राम को लांच किया।

- एमएस-एक्सेल के साधन (Tools of MS-Excel)

एमएस-एक्सेल की विंडो काफी हद तक एमएस-वर्ड की तरह ही नजर आती है। टाइटल बार, स्टेटस बार इसमें वर्ड के ही समान होता है, अंतर सिर्फ रिबन में रहता है, जहां पांच टैब होम (Home), इन्सर्ट मल्टीप्लान (Insert), पेज लेआउट (Page Layout), फॉर्मूलाज (Formulas), डाटा (Data), रिव्यू (Review) और व्यू (View) होते हैं। इनमें होम, इन्सर्ट, व्यू, पेज लेआउट और रिव्यू टैब लगभग वही हैं, जिन्हें हम एमएस-वर्ड में जान चुके हैं। इन सभी में फीचर्स का बेहद मामूली अंतर है, जो उपयोग के दौरान समझ में आ जाता है, मसलन एक्सेल में इन्सर्ट टैब की सहायक टैब चार्ट में ग्राफ के कुछ नये फीचर सामने आते हैं। इसी तरह हर टैब में हल्का अंतर है। एक्सेल पर उपयोगकर्ता जब भी काम करता है तो स्क्रीन पर सामने आने वाले पाठ्यक्षेत्र को वर्कशीट (Worksheet) कहा जाता है। वर्कशीट कतारों (Row) और कॉलम (Columns) में बंटा होता है। दिलचस्प पहलू यह है कि एक्सेल में अधिकतम एक लाख 48 हजार 576 रो और 16 हजार 384 कॉलम हो सकते हैं।



हम जानते हैं कि वर्कशीट में क्षैतिज पंक्तियां और ऊध्र्वाकार कॉलम होते हैं। कॉलमों पर ए से लेकर जेड और फिर एए, एबी, एसी, एडी...... दर्ज होता है, पंक्तियों में 1,2,3,4,5...... अंक और संख्याएं लिखी होती हैं। हर कॉलम और पंक्ति का छोटा हिस्सा सेल (Cell) होता है। हर सेल की पहचान इसके कॉलम में दर्ज अक्षर और पंक्ति में दर्ज संख्या से होती है। मसलन उपरोक्त चित्र में जो सेल नजर आ रही है, उसका नाम या उसकी पहचान ए1(A1) है, क्योंकि यह सेल कॉलम ए की पहली पंक्ति पर स्थित है। इसी तरह डी15 (D15) का तात्पर्य यह होगा कि संबंधित सेल डी कॉलम की 15वीं पंक्ति पर स्थित है। इस पहचान को संबंधित सेल का पता (Address) भी कहा जाता है। सेल में भरे जाने वाले टेक्स्ट या शब्दों को लेबल (Label) कहा जाता है। इसी तरह सेल में भरी जाने वाली संख्याओं को वैल्यू (Value) कहा जाता है। एमएस-वर्ड में जिस तरह हमें पाठ्यक्षेत्र में कर्सर मिलता था, एक्सेल की वर्कशीट में जोड़ (+)का एक मोटा निशान नजर आता है, जिसे सेल प्वाइंटर (Cell Pointer) कहते हैं। किसी सेल पर काम करने के लिए इस सेल प्वाइंटर को संबंधित सेल पर ले जाना जरूरी होता है, इससे वह सेल एक्टिव (Active) हो जाती है। इसके बाद हम इसमें लेबल और वैल्यू भर सकते हैं। वैल्यू का अर्थ सिर्फ 0 से 9 तक के अंकों से नहीं है, बल्कि इसमें हम गुणा-भाग, जोड़-घटाने और अन्य निशान भी भर सकते हैं। एक्सेल पर काम करते हुए उपयोगकर्ता को सेलों का एक आयताकार समूह चुनना पड़ता है। इसके बाद इसी समूह में सारी क्रियाएं की जाती हैं। एक्सेल के इस समूह को रेंज (Range) कहा जाता है।

- फॉर्मूलाज (Formulas): एमएस-एक्सेल में फॉर्मूले का विशेष महत्व है। जब हम कोई गणना करना चाहते हैं, मसलन किसी कॉलम की कुछ सेल को जोड़ना, घटाना या गुणा करना चाहते हैं तो इसके लिए हमें फॉर्मूला बार में इसके लिए सूत्र डालना अनिवार्य होता है। उल्लेखनीय है कि एक्सेल में फॉर्मूले हमेशा = से शुरू होते हैं। अब उदाहरण के लिए मान लें कि सेल ई5 (E5) में हमें जो परिणाम चाहिए, वह ए5, बी5, सी5 का योग और इस योग में से डी5 का अंतर हो तो ई5 सेल पर क्लिक करने के बाद हम फाॅर्मूला इस तरह भरेंगे, =a5+b5+c5-d5.
- फॉर्मूला ऑपरेटर (Formula Operator) एक्सेल में हम फॉर्मूला तैयार करने में जिन चिह्नों, टेक्स्ट का इस्तेमाल करते हैं, उन्हें ऑपरेटर कहा जाता है। ये ऑपरेटर निम्नवत हैं:
- अंकगणितीय ऑपरेटर (Arithmatic Operators): +, -, *, /, %, ^ हैं, जिनका अर्थ क्रमशः जोड़, घटाना, गुणा, भाग, प्रतिशत और घात है। अब यदि हमें डी16 (D16) सेल में बी10 का 45 प्रतिशत मान जानना है तो डी16 सेल को क्लिक करने के बाद फॉर्मूला इस तरह लिखा जाएगा, =b10*45%. कोष्ठकों के इस्तेमाल से जटिल गणनाएं करना भी संभव है। इस तरह के फॉर्मूले इस तरह लिख सकते हैं, =d8+(b5*a6)-(c3*25).
- तुलना ऑपरेटर (Comparison Operators): से दो मानों की तुलना करना संभव हो पाता है। ये ऑपरेटर इस प्रकार हैं- =, >>, >>=, <<, <<=, < > इनके अर्थ क्रमशः बराबर, बड़ा, बड़ा या बराबर, छोटा, छोटा या बराबर और बराबर नहीं हैं। इन चिह्नों का प्रयोग सामान्यतः तार्किक फंक्शन (Logical Functions) में किया जाता है।
- टेक्स्ट ऑपरेटर (Text Operator): वह ऑपरेटर है, जो किन्हीं दो सेलों में लिखे शब्दों को जोड़ता है। एक्सेल में प्रयुक्त होने वाला एकमात्र टेक्स्ट ऑपरेटर है &.इसका प्रयोग इस तरह होता है, मान लीजिए कि सेल a3 में books और सेल b6 में pens लिखा है और वर्कशीट के सेल c8में हम books & pens साथ लेना चाहते हैं तो इसका फॉर्मूला =a3&b6 लिखा जाएगा।
- सन्दर्भ ऑपरेटर (Reference Operators): हम जानते हैं कि एक्सेल पर काम करने के लिए हम जितनी रो और कॉलम का इस्तेमाल करने वाले हैं, उन्हें वर्कशीट पर पहले सेलेक्ट (Select) करके रेंज तय करनी होती है। अब इस रेंज को दर्शाने के लिए कोलोन चिह्न (:) का प्रयोग किया जाता है। मसलन यदि उपयोगकर्ता की रेंज a4 से f16 तक है तो इस रेंज को इस तरह प्रदर्शित किया जाएगा, a4:f16.
- फॉर्मूलों का क्रम (Orders of Formulas): जिस तरह सामान्य गणित में किसी जटिल गणना का हल निकालने के लिए हम गणितीय चिह्नों को तय क्रम यानी सबसे पहले कोष्ठक, फिर गुणा, भाग.... करते हैं, उसी तरह एक्सेल में भी फॉर्मूला ऑपरेटर का गणनाक्रम तय है, यह इस प्रकार हैः

क्रम संख्या	चिह्न	आशय
1	%	रेंज संदर्भ
2	-	ऋणात्मक संख्या

3	%	प्रतिशत
4	^	घातांक
5	* या /	गुणा या भाग
6	+ या -	जोड़ या घटाना
7	&	पाठ्य का जोड़
8	=/<>/<=/>=	तुलना

- नंबर फॉरमेट (Number Format)% होम टैब में सहायक टैब है नंबर, इसकी मदद से हम नंबर यानी संख्याओं का फॉरमेट तय कर सकते हैं। उल्लेखनीय है कि एक्सेल में कोई संख्या सेल में किस तरह दिखाई देगी, यह सेल के फॉरमेट पर ही निर्भर करता है। इस सहायक टैब में कई तरह के फॉरमेट हैं, लेकिन सामान्य उपयोग में इनमें से मुख्यतः सात-आठ ही इस्तेमाल में आती हैं। जनरल (General) का अर्थ है कि सेल में संख्या को किसी खास फॉरमेट में नहीं दिखाया जाना है, यानीएक्सेल का जो तय फॉरमेट है, उपयोगकर्ता उसे ही इस्तेमाल करना चाहता है। नंबर (Number) पर क्लिक करने के बाद दशमलव संख्याओं को सेल में टाइप करना संभव हो पाता है। करेंसी (Currency) किसी संख्या के आगे मुद्रा का निशान लगाने के लिए यह कमांड उपयोग की जाती है। डेट (Date) की मदद से संख्या को तारीख के रूप में प्रदर्शित करना संभव हो पाता है। टाइम (Time) कमांड की मदद से संख्याओं को समय के रूप में सेल में दर्शाया जाता है। परसेंटेज (Percentage) यानी संख्या को प्रतिशत रूप में दिखाने के लिए उपयोगी कमांड।
- फंक्शन (Functions): एमएस-एक्से में फंक्शन वे सुविधाएं हैं, जिनकी मदद से जटिलतम गणनाएं करना भी आसान हो जाता है। जटिल गणनाओं के फॉर्मूले बनाने के लिए खास गणितीय व्याकरण (Mathematical Syntax) का इस्तेमाल करना होता है। इसमें ये फंक्शन काम आते हैं। एक्सेल में सैकड़ों फंक्शन उपलब्ध होती हैं, जिन्हें वित्तीय (Financial), तारीख और समय (Date & Time), गणित एवं त्रिकोणमिती (Maths & Trigonometry), सांख्यिकीय (Statistical), संदर्भ (Lookup & References), डाटाबेस (Database), पाठ्य (Text), तार्किक (Logical), सूचना (Information), अभियांत्रिकी (Engineering) और घन (Cube). इन फंक्शन के उपयोग और महत्व के बारे में अधिक जानने के लिए एक्सेल हेल्प (Excel Help) की मदद ली जा सकती है। हालांकि, इनका उपयोग सामान्य गणनाओं में बेहद कम किया जाता है।
- डाटाबेस (Database): हम जानते हैं कि डाटा का व्यवस्थित समूह डाटा बेस कहलाता है। एक्सेल में पंक्तियों (Rows) और कॉलम (Columns) में दर्ज आंकड़ों की सामूहिक वर्कशीट या रेंज को डाटाबेस कहा जा सकता है। एक्सेल में डाटाबेस की हर पंक्ति को रिकॉर्ड (Record) कहा जाता है। मसलन किसी वर्कशीट में यदि किसी कक्षा के 50 छात्रों के सात विषयों में प्राप्तांकों का विवरण दर्ज है तो a कॉलम की 1 से 50 तक पंक्तियों में छात्रों के नाम लिखे जाएंगे, अब मान लीजिए कि हमें

a5 पर दर्ज छात्र के अंक देखने हैं तो पांच नंबर पंक्ति में b5, c5, d5, e5, f5, g5, h5 पर दर्ज विषयवार अंक संबंधित छात्र का रिकॉर्ड होगा।

- फील्ड (Field): एक्सेल में हर कॉलम को फील्ड कहा जाता है। इस लिहाज से हर एकल सेल को भी फील्ड माना जा सकता है। हर फील्ड में पाठ्य, संख्या, तारीखें, फंक्शन और फॉर्मूले भरे जा सकते हैं। जब किसी फील्ड में कोई फंक्शन या फॉर्मूला भरा जाता है, तो यह फील्ड गणनाकृत फील्ड (Computed Field) कहा जाता है।

25.7 उपसंहार (The Conclusion)

इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान पाने में सक्षम रहे हैं कि कंप्यूटर पर मानव जीवन के दैनन्दिन कार्यों को सरल बनाने के लिए कौन-कौन से प्रोग्राम उपलब्ध हैं। एमएस-ऑफिस सुइट किस तरह काम करता है और इसके प्रोग्रामों और उनमें उपलब्ध साधनों की मदद से किस तरह हम डॉक्यूमेंट तैयार करने से लेकर गणितीय हिसाब-किताब भी आसानी से कर सकते हैं। साथ ही ऑफिस सुइट की मदद से हम अपने प्रस्तुतीकरण को बेहतर बना सकते हैं। चूंकि, यह प्रायोगिक विषय है, लिहाजा कंप्यूटर पर इन साधनों के उपयोग से इसे और बेहतर समझा जा सकता है।

कुछ महत्वपूर्ण तथ्य (Important Facts):

हम माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट के बारे में विस्तार से जान चुके हैं। अब यह जानना भी आवश्यक हो जाता है कि उपयोगकर्ता जब जिस प्रोग्राम में काम करता है, उसके अनुरूप जो भी दस्तावेज वह बनाता है, उसे विशेष नाम से सुरक्षित करता है। किसी फाइल या दस्तावेज का नाम दो हिस्सों में बंटा होता है। पहला तो वह नाम, जो उपयोगकर्ता संबंधित दस्तावेज को देता है और दूसरा एक्सटेंशन (Extension). एक्सटेंशन दरअसल, इस बात का परिचायक है कि कोई दस्तावेज माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट के किस प्रोग्राम को इस्तेमाल करके बनाया गया है। निम्न सारिणी से जानेंगे कि किस प्रोग्राम का दस्तावेज किस एक्सटेंशन से सेव किया जाता हैः

फाइल	एक्सटेंशन	प्रकार	प्रोग्राम
xyz.txt	.txt	टेक्स्टफाइल	नोटपैड
abc.rtf	.rtf	टेक्स्टफाइल	वर्डपैड
puneet.jpg	.jpg	फोटो	पेण्ट
uou.doc	.doc	टेक्स्टफाइल	एमएस-वर्ड
123.xls	.xls	स्प्रेडशीट	एमएस-एक्सेल
uou.ppt	.ppt	प्रजेंटेशन	एमएस-पॉवरप्वाइंट

25.8 अभ्यास प्रश्न (Exercise)

1. इनमें से कौन माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट का हिस्सा नहीं हैः

   a) वर्ड
   b) एक्सेल
   c) मीडिया प्लेयर

d) आउटलुक

2. विंडोज ने मीडिया प्लेयर लांच किया थाः

a) 1991 में
b) 2001 में
c) 1985 में
d) इनमें से कोई नहीं

3. उपयोगकर्ता को वेबसाइट बनाने की सुविधा इनमें से कौन सा प्रोग्राम प्रदान करता हैः

a) स्वे
b) एक्सेल
c) डेस्कटॉप पब्लिशिंग
d) उपरोक्त में से सभी

4. माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस 365 लांच किया गयाः

a) 1990 में
b) 2015 में
c) 2016 में
d) 2003 में

5. ऑफिस सुइट से तैयार किसी टेक्स्ट फाइल का एक्सटेंशन निम्न में से कौन सा होता हैः

a) txt
b) .doc
c) ppt
d) इनमें से कोई नहीं

6. माइक्रोसॉफ्ट स्वे प्रोग्राम इनमें से किस विंडोज ऑपरेटिंगसिस्टम के ऑफिस सुइट का हिस्सा हैः

a) विंडोज 3.0
b) विंडोज गच
c) विंडोज 8
d) विंडोज 10

7. मैक ऑपरेटिंगसिस्टम में एमएस-ऑफिस का कौन सा प्रोग्राम सबसे पहले जारी किया गया थाः

a) वर्ड
b) एक्सेल
c) पॉवरप्वाइंट
d) उपरोक्त में से सभी

8. वर्ष 2005 में आउटलुक एक्सप्रेस को इस प्रोग्राम से रिप्लेस कर दिया गयाः

a) विंडोज मेल
b) आउटलुक
c) इंटरनेट एक्सप्लोरर

d) इनमें से कोई नहीं

9. इनमें से कौन मूलतः पर्सनल इंफॉर्मेशन मैनेजर की तरह काम करता हैः

a) आउटलुक
b) आउटलुक एक्सप्रेस
c) उपरोक्त दोनों
d) इन दोनों में से कोई नहीं

10. माइक्रोसॉफ्ट एक्सेल निम्न में से किस पर आधारित प्रोग्राम हैः

a) वर्ड प्रोसेसर
b) प्रजेंटेशन
c) स्प्रेडशीट
d) उपरोक्त सभी

11. बिल गेट्स ने माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस सुइट लांच करने की घोषणा कब की थीः

a) 1988 में
b) 2000 में
c) 1997 में
d) इनमें से कोई नहीं

12. व्यावसायिक प्रिंटिंग में इस्तेमाल किया जाने वाला माइक्रोसॉफ्ट प्रोग्राम हैः

a) स्वे
b) वन नोट
c) डेस्कटॉप पब्लिशिंग
d) पॉवरप्वाइंट

13. एमएस-ऑफिस सुइट का नवीनतम वर्जन हैः

a) एमएस-ऑफिस 5
b) एमएस-ऑफिस 10
c) एमएस-ऑफिस एक्सपी
d) एमएस-ऑफिस 16

14. इनमें से कौन सा प्रोग्राम एंड्रॉयड, आईफोन और विंडोज फोन पर भी इस्तेमाल किया जा सकता हैः

a) वन नोट
b) वर्ड
c) एक्सेल
d) उपरोक्त सभी

15. इस प्रोग्राम के इस्तेमाल के लिए उपयोगकर्ता का माइक्रोसॉफ्ट पर एकाउंट होना आवश्यक हैः

a) वर्ड
b) स्वे
c) एक्सेल
d) इनमें से कोई नही

16. किसी वर्ड दस्तावेज में कितने पन्ने और कितने शब्द हैं, यह कहां देखा जा सकता हैः
    a) टाइटल बार में
    b) इन्सर्ट टैब में
    c) स्टेटस बार में
    d) इनमें से कोई नहीं
17. एक्सले में प्रयोग किया जाने वाला >> किस तरह का ऑपरेटर हैः
    a) तुलना ऑपरेटर
    b) अंकगणितीय ऑपरेटर
    c) पाठ्य ऑपरेटर
    d) उपरोक्त में से सभी
18. एमएस-एक्सेल में कॉलम को यह भी कहा जाता हेः
    a) फंक्शन
    b) रिकॉड्र
    c) फील्ड
    d) इनमें से कोई नहीं
19. एक्सेल में कॉलमों की अधिकतम संख्या हैः
    a) 64
    b) 1,048,576
    c) 256
    d) 16384
20. एमएस-एक्सेल में उपयोगी पाठ्य ऑपरेटर हैः
    a) &
    b) =
    c) *
    d) उपरोक्त में से सभी

25.9 निबंधात्मक प्रश्न (Theroetical Questions)

1. कंप्यूटर पर उपयोगकर्ता की मदद के लिए मौजूद कुरछ प्रमुख साधनों यानी टूल्स के बारे में विस्तार से जानकारी दें
2. माइक्रोसॉफ्ट ऑफिस और इसके घटकों के बारे में बताएं।
3. माइक्रोसॉफ्ट इ़्ा-मेल, स्वे और वन नोट किस तरह के एमएस--ऑफिस टूल हैं। इनका इस्तेमाल एमएस-ऑफिस के सामान्य टूल से किस तरह अलग है। इनके क्या लाभ हैं।
4. एमएस-वर्ड क्या है, यह किस तरह काम करता है। एमएस-वर्ड में कोई नया दस्तावेज बनाने के लिए उपयोगकर्ता किन साधनों (Tools) की मदद लेता है, इनके बारे में विस्तार से बताएं।

5. एमएस-एक्सेल क्या है। यह किस तरह काम करता है, विस्तार से बताएं। एक्सेल का मानव जीवन में क्या उपयोग है।

इकाई 26 एस.पी.एस.एस एवं एस.ए.पी. (S.P.S.S. and S.A.P.)

26.1 प्रस्तावना
26.2 उद्देश्य
26.3 एसपीएसएस में सांख्किीय विधियां
26.4 एसपीएसएस में प्रयुक्त प्रोग्राम
26.5 डाटा एन्ट्री
26.6 सारांश
26.7 शब्दावली
26.8 स्वमूल्यांकन हेतु प्रश्न
26.9 संदर्भ ग्रन्थ सूची
26.10 निबन्धात्मक प्रश्न

26.1 प्रस्तावना

SPSS एक साफ्टवेयर पैकेज है जिसे सामाजिक विज्ञान के शोधों के लिये प्रयुक्त किया जाता है। हालांकि अब यह बाजार अनुसंधानों, स्वास्थ्य शोध, कंपनियों द्वारा किये जाने वाले सर्वेक्षणों, सरकारों, शैक्षिक अनुसंधानों तथा बाजार विष्लेशण के लिये भी किया जाता है।

नील बेट तथा लूंट द्वारा 1990 में (SPSS) का मौलिक मैनुअल जो समाज शास्त्र की सबसे प्रभावशाली पुस्तकों में से एक मानी जाती है के द्वारा साधारण शोधों का भी अच्छी तरह सांख्यिकीय विष्लेशण किया जाता है। इसके द्वारा न केवल सांख्यिकीय विष्लेशण किया जाता है बल्कि इसके द्वारा आंकड़ों का व्यवस्थापन ¼Management½ केस चुनाव, फाइल, रीशंपिंग आदि से किया जाता है तथा आंकड़ो का लेखीकरण ¼Documentation) भी किया जाता है।

SPSS के द्वारा जहं एक तरफ आंकड़ो का साधारण प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं वहीं दूसरी ओर जटिल से जटिल सांख्यिकीय विष्लेशण भी कर सकते हैं।

26.2 उद्देश्य

- एसपीएसएस के सॉफ्टवेयर के बारे में जानकारी
- डाटा इन्ट्री की विधि के बारे में जानकारी
- एसपीएसएस में प्रयुक्त सांख्यिकी विधियों की जानकारी

26.3 एसपीएसएस में प्रयुक्त सांख्यिकी विधियां

SPSS में सभी प्राथमिक सांख्यिकीय परीक्षण तथा Multivariate Analysis सम्मिलित होते है जैसे-

1. t-tests
2. Chi-Square tests
3. ANOVA
4. Correlations and other Associations measures
5. Regression
6. Nonparametric Tests
7. Factor Analysis
8. Cluster Analysis

26.4 एसपीएसएस सॉफ्टवेयर की जानकारी

SPSS साफ्टवेयर खोलने का तरीका: हम किस तरह के कम्प्यूटर पर कार्य कर रहे हैं इसको देखते हुये दो तरह से खोला जा सकता है -

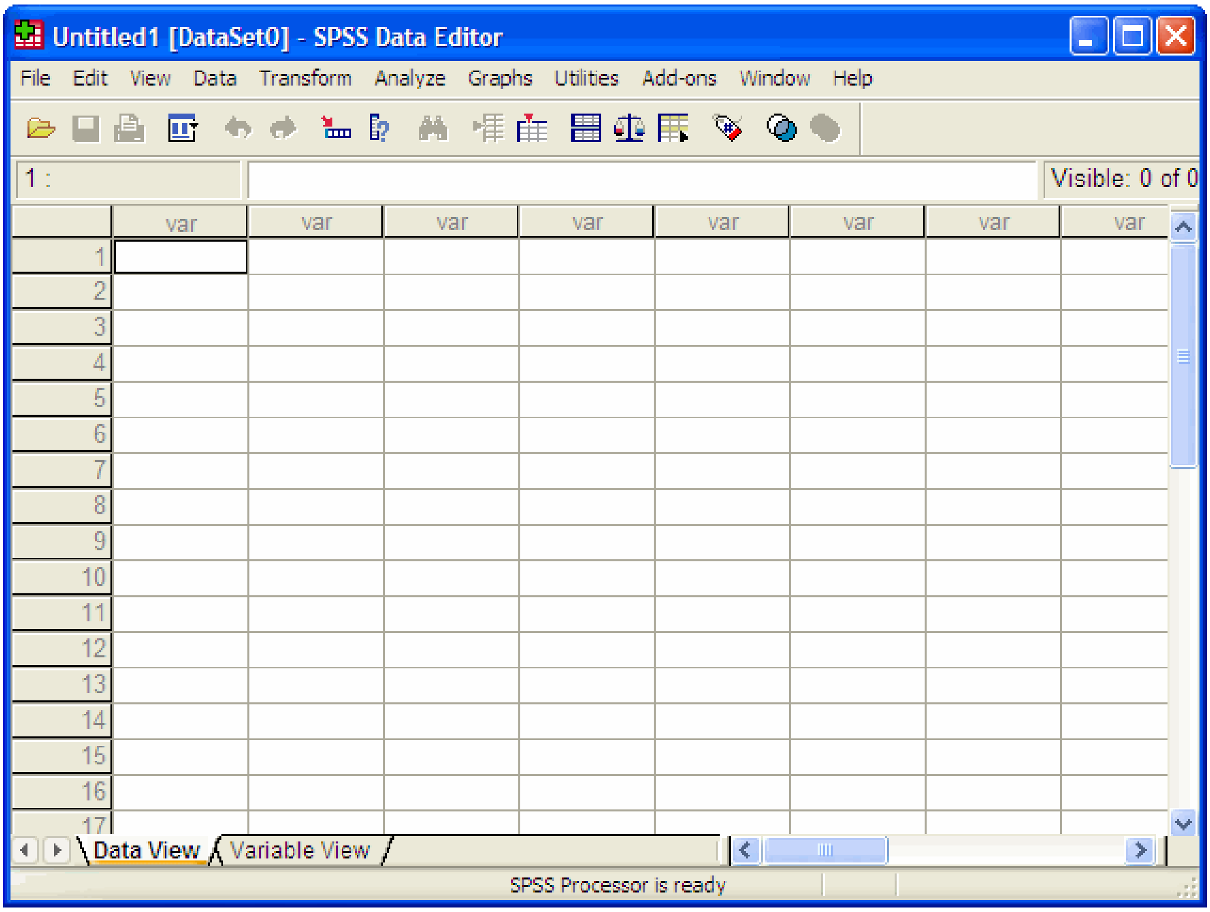
1- अगर डेस्कटॉप पर SPSS का शॉटकट हो तो करसर उसपे रखकर बांयी तरफ माउस पर डबल क्लिक करें।

2- माउस को बांयी तरफ से स्कीन के स्टार्ट बटन पर क्लिक करें, फिर कर्सर को ।सस च्तवहतंउउमे पर ले जायं और माउस पर बायीं ओर क्लिक करें। फिर SPSS 12 की विंडो पर माउस बायीं तरफ से क्लिक करें। SPSS 12 का प्रयोग उदाहरण के लिये है।

इन दोंनो में से किसी भी प्रकार से करने पर SPSS का लेआउट खुलता है व डाटा एडिटर बिंडो में जो नया स्थान होता है जो कि स्कीन की बायी तरफ नीचे से चयनित किया जा सकता है।

SPSS Data Editor Window

SPSS Data Editor Window SPSS का मुख्य विडो है ।यही एक ऐसा विडो है जो SPSS Run कराने पर हमेशा खुलता है यह बाये कोने में लाल आइकॉन से पहचाना जाता है।



फाइल (File) : फाइल में वे सारे विकल्प होते है जो अन्य प्रोग्राम में होते है जैसे ओपन, सेव, एक्जीट इसमें पुरानी फाइल खोली जाती है या कई प्रकार की नयी फाइलों को खोला जाता है।

एडिट (Edit) :में कट, कापी, पेस्ट का कमांड होता है इसके द्वारा आंकड़ा व परिणामों के प्रदर्शन के विभिन्न विकल्प मिलते हैं।

ऑप्शन (Option) : पर क्लिक कीजिये और आपको बायीं तरफ डायलाग बाक्स दिखेगा। इसका उपयोग आंकड़ो को प्रारूपित करने, परिणाम तथा चार्ट आदि के लिये प्रयुक्त किये जाते हैं

व्यू (Views) : के द्वारा फोंटसाइज, ग्रिड लाइन को जोड़ना या घटाना या मूल आंकड़ो को प्रदर्शित करना या न करने या आंकड़ों का लेबल प्रदर्शित किया जाता है।

Data के द्वारा निश्चित केसों को चुनने करने तथा विशिष्ट चरों के आधार पर आंकड़ो को चयनित किया जाता है।

ट्रांसफार्म (Transform) में प्रस्तुत चरों को परिवर्तित करने के लिये कई विकल्प होते हैं। उदाहरण के लिये, सतत चरों को श्रेणीगत चरों में परिवर्तित किया जा सकता है। प्राप्तांकों को श्रेणियों में परिवर्तित किये जा सकते हैं।

एनेलाइज (Analyze) के द्वारा सांख्यिकी विष्लेशण का कमांड होता है तथा इसके द्वारा विश्लेषित सांख्यिकी का प्रयोग होता है।

ग्राफ (Graph) में बाक्स प्लाट, लाईन ग्राफ, बार चार्ट जैसे कमांड होते हैं।

यूटिलिटी (Utilities) में सभी चरों की लिस्ट बतायी जाती है इसके द्वारा लेवल, वैल्यू, डाटा की लोकेशन तथा प्रकार का प्रयोग होता है।

Addons एडआन्स एक प्रोग्राम है जो SPSS पैकेज में जोड़ा जा सकता है।

विंडो (Windows) के द्वारा यह तय किया जाता है कि किस तरह के विंडो को हम देखना चाहते हैं जैसे - डाटा एडिटर, आउटपुट, यूसर या सिनटैक्स

Help में SPSS पैकेज के कई महत्वपूर्ण विकल्प होते हैं।

डाटा एडिटर के बॉये नीचे के कोने में दो टैब होते है - डाटा व्यू व वैरीबल व्यू । डाटा व्यू डाटा एडीटर में दो विंडो होते हैं। डेटा व्यू डिफाल्ट में दिखता है जिससे आंकड़ो को प्रविष्ट किया जाता है। आंकड़ो को डेटा व्यू स्प्रेडशीट में प्रविष्ट किया जाता है। अधिकतम विष्लेशण के लिये SPSS यह मान लेता है कि रो के द्वारा केसों एवं कॉलम के द्वारा चरों का प्रतिनिधित्व होता है।

डाटा व्यू, स्प्रेडशीट ब्यू व टाप डाउन मेन्यू द्वारा नियंत्रित होता है। इसके द्वारा सेल के फोट को बदला जा सकता है पंक्तियों को हटाया जा सकता है तथा वेल्यू लेबल को दर्शनीय बनाया जा सकता है। डाटा व्यू का प्रयोग तब करते है जब हम एसपीएसएस में डाटा की एण्टी करते है ।इसके स्तम्भों को चर कहा जाता है । स्तंभ के शीर्ष पर चर का नाम लिखा जाता है।पंक्तियों को केस कहा जाता है । डाटा सेल में ही वैल्यू निहित होता है जिसमें मूल्य निर्धारण होता है ।

वैरीवल ब्यू वैरीवल व्यू के द्वारा चरों को परिभाषित किया जाता है। जैसे ही आंकड़ो को डेटा व्यू के अन्तर्गत कॉलम में प्रविष्ट किया जाता है। वैसे ही वैरीवल व्यू में चर कालम का डिफाल्ट नाम एक पंक्ति का रूप ले लेते हैं। वैरीवल व्यू में निम्न विशिष्टता पायी जाती है।

नाम (Name) - इसमें चुने हुये चरों का नाम होता है इसमें केवल आठ अल्फावेट तक के नाम आ सकते है। इसमें अंडरस्कोर (_) तो स्वीकार्य है परंतु हाइफन (-) तथा स्पेस स्वीकार्य नहीं है।

टाइप (Type)- इसमें आंकड़ो के प्रकार को रखा जाता है इसका एक डिफाल्ट सेल होता है।

चैड़ाई(Width)- इसके द्वारा वास्तविक आंकड़ो की प्रविष्ट आंकड़ो की प्रविष्ट आंकड़ो का फैलाव दिखाया जाता है इसमें आंकिक चरों की डिफाल्ट प्रविष्टि 8 है। तीसरे का ॅलम में सेल को हाइलाइट करके चैड़ाई को बढ़ाया या घटाया जा सकता है। ऐसा केवल सेल में नये नंबर को टाइप करके भी प्राप्त किया जा सकता है।

दशमलव (Decimels) - प्रविष्ट आंकड़ो में दशमलव के दायी तरफ आंकड़ो का प्रदर्शन होता है लेकिन यह String data में नहीं प्रयुक्त होता है।

आंकड़ो का संग्रहण तथा आंकड़ो की पुर्नप्राप्ति (Storing and retrieving data files) - आंकड़ो का संग्रहण तथा आंकड़ो की पुर्नप्राप्ति मेन्यूबार में फाइल को सेलेक्ट करने के बाद उपलब्ध हुये टॉप डाउन के द्वारा की जा सकती है।

वैल्यू लेबल

वैल्यू के अन्तर्गत वैल्यू लेवल प्राप्त होता है जिसमें हमारे आकडों का मूल्य प्रदर्शित होता है ।वैल्यू लेवल के द्वारा चर के खास मूल्यों को लेवल प्रदान किया जाता है ।वैल्यू लेवल ज्यादातर नामित या वर्गीकृत चरों के लिये प्रयुक्त होता है -

1 हिन्दू, 2 मुसलमान, 3 ईसाइ , 4 नास्तिक , 5 अन्य

वैल्यू लेवल का एक अन्य महत्वपूर्ण उपयोग होता है चरों का समूहीकरण करना । जैसे , मान लीजिये हमें एल्कोहल के विभिन्न मात्रा लेने वाले प्रतिभागियों के प्रतिक्रिया समय में अन्तर देखना है ।हम ग्रुप 1 वैल्यू लेवल का इस्तेमाल उनके लिये कर सकते है जिन्होनें एल्कोहल का सेवन नहीं किया ,ग्रुप 2 वैल्यू लेवल का इस्तेमाल उनके लिये कर सकते है , जिन्होंने 1 यूनिट एल्कोहल का प्रयोग किया था व ग्रुप 3 वैल्यू लेवल वाले समूह ने 2 यूनिट एल्कोहल का प्रयोग किया था । वैल्यू लेवल को एसपीएसएस में अन्तनिहित कर दिया जाता है , जिससे इन वैल्यू के मतलब का पता चल सके ।

मिसिंग वैल्यू -

कभी कभी हमारे पास आकडों का पूरा सेट उपलब्ध नहीं हो पाता । उदाहरण के लिये , कुछ प्रतिभागी अपने धर्म को नहीं बताते है या कुछ प्रतिभागियों से आकडें उपलब्ध नही हो पाते है । आकडों के इस अन्तर को मिसिंग वैल्यू कहतें है ।जब हमारे पास मिसिंग वैल्यू होता है तो यह आवश्यक होता है कि एसपीएसएस को यह बताया जाये कि हमारे पास उस चर पर इस प्रतिभागी का वैध आकडा उपल्बध नहीं है ।इसके लिये हम एक ऐसे वैल्यू को चूनते है जो उस चर के लिये सामान्यतः प्रयूक्त नही होते है । जैसे धर्म के लिये हम कोड 9 को ले सकते है ,जब उत्तरदाता अपने धर्म को नहीं बताता है । इस प्रकार कोड 9 धर्म के लिये मिसिंग वैल्यू है । मिसिंग वैल्यू सभी चरों के लिये अलग अलग हो सकता है

26.5 डाटा इंट्री

जब (SPSS) विंडो को खोलते हैं तो एक डिफाल्टर डायलाग बाक्स खुलता है जिसके द्वारा कई विकल्प प्राप्त होते हैं। जब टाइप इन डाटा का चयन होता है तो एक खाली स्प्रेडशीट खुलती है जिसे डाटा एडीटर कहते हैं। स्कीन के ऊपर एक मेन्यू बार होता है तथा नीचे की ओर एक स्टेटस बार होता है। स्टेटस बार द्वारा यह पता चलता है कि कौन सी सुविधायें अभी सक्रिय हैं। सेशन की शुरूआत में साधारणतः यह कहता है SPSS processories ready SPSS के द्वारा एक टूलबार भी प्राप्त होता है जो सामान्य कार्यो को तेजी से आसानी से कर सकता है। प्रत्येक टूल के बारे में संक्षिप्त जानकारी टूलबार पर कर्सर ले जाकर प्राप्त किया जा सकता है।

जब हम नये डाटा सेट का निर्माण कर रहे होते है तो चरों के नाम व अन्य विशेषताओं से शुरूआत करते है फिर प्रत्येक स्वतन्त्र स्त्रेत के लिये प्रत्येक चर पर विशिष्ट वैल्यू को enter करते है । आकडों के स्वतन्त्र स्त्रेत के लिये एक पंक्ति तथा प्रत्येक विशेषता (वैरीबल) के लिये एक कॉलम होता है ।

यह ध्यान रखना होता है कि एक प्रतिभागी का डेटा एक समय में इन्टर करना चाहिये । उदाहरण के लिये एक प्रतिभागी को लिंग,उम्र व किसी स्वतन्त्र चर पर उसके प्रांप्ताक मदजमत करते है ,फिर इसी रो में दूसरे प्रतिभागी का कंजं इंटर करने के पश्चात एक बार पुनः उनका निरीक्षण किया जाना चाहिये ।

डेटा फाइल को सेव करना - इसके लिये मेन्यू आइटम में फाइल पर क्लिक करते है । Save का Option आता है ।इसके लिये फाइल का नाम लिखते है फिर सेव करते है । इस फाइल का नाम का प्रयोग करते है ।

SPSS Variable Types -

SPSS वैरीबल टाइप का व फारमेट का अध्धयन करने से कार्य और तेजी व विश्वसनीय तरीके से किया जाता है । SPSS में दो वैरीबल टाइप होते है - 1-स्ट्रिग 2- न्यूमेरिक । न्यूमेरिक चरों में केवल अंक आते है । स्ट्रिग वैरीबल में अक्षर , संख्या व अन्य विशेषतायें आती है । न्यूमेरिक वैरीबल के साथ गणना की जा सकती है पर स्ट्रिग वैरीबल के साथ नहीं ।

वैरीबल टाइप का व फारमेट का अध्धयन करने से कार्य और तेजी व विश्वसनीय तरीके से किया जाता है । SPSS में दो वैरीबल टाइप होते है - 1-स्ट्रिग 2- न्यूमेरिक । न्यूमेरिक चरों में केवल अंक आते है । स्ट्रिग वैरीबल में अक्षर , संख्या व अन्य विशेषतायें आती है । न्यूमेरिक वैरीबल के साथ गणना की जा सकती है पर स्ट्रिग वैरीबल के साथ नहीं ।

Syntax SPSS की तीन महत्वपूर्ण विडो में से दूसरा महत्वपूर्ण विडो है । यह वहा पर उपथित होता है जहां पर से हम फाइल को खोलने का कंमाड, एडिटिग का ,रिजल्ट जनरेट का व फाइल सेव करने का कमांड देते है । सिन्टेकस के द्वारा जटिल से जटिल कमान्ड को सेव कर लिया जाता है । सिन्टेकस के द्वारा आकडा विश्लषण (Data Analysis) का रिकार्ड रखा जाता है।

Output विडो वह विडो है जो सभी आउटपुट जिन्हें हमने विष्लेशणके दौरान उत्पन्न किया है को समाहित करता है इसके द्वारा मुख्यतः टेबल एवं चार्ट का प्रयोग किया जाता है । आउटपुट व्यूवर विडो तब अपने आप उत्पन्न हो जाता है जब हम परिणाम उत्पन्न करते है । यह बैगनी आइकॉन से प्रदर्शित किया जाता है । SPSS आउटपुट फाइल का उपयोग रिर्पोटिग के लिये नहीं किया जा सकता ।

डाटा एनालिसिस के लिये एनालिसिस में जाकर के जो सांख्यिकीय विधि प्रयुक्त करनी होती है उस पर क्लिक कर देते है । इसमें आवृति से लेकर कारक विष्लेशणअर्थात साधारण से लेकर जटिलतम सांख्यिकीय विधि आती है ।

अपरिष्कृत आकडों को विष्लेशणकरने से पहले कुछ एडिट करने की आवश्यकता होती है । इसमें नये चरों का निर्माण , आकडो का पुर्ननिर्माण किया जाता है ।

सभी चार्ट व तालिकायें SPSS द्वारा आसानी से प्राप्त की जा सकती है । इसके लिये डाटा एनालिसिस में ही जाना होता है लेकिन SPSS में एक कमी यह है कि इसके द्वारा उत्पन्न किया हुआ चार्ट देखने में अच्छा नहीं लगता है । इससे उबरने के लिये SPSS Graph Editor का प्रयोग करना होता है।

26. 6 सारांष

- SPSS एक बहुत ही महत्वपूर्ण सॉफ्टवेयर है। इसके द्वारा हम बहुत बड़े आंकड़ों का सांख्यिकी विष्लेशणआसानी से कर सकते हैं। इस सॉफ्टवेयर का उपयोग वर्तमान जगत में बहुत तेजी से हो रहा है।
- SPSS में विभिन्न तरह के एप्लीकेशन जिसमें डेटा बेस मैनेजमेन्ट तथा रिर्पोटिग , सांख्यिकी विष्लेशणव ग्राफिक सम्मिलित है ।
- SPSS के द्वारा सभी सा्रेतों से प्राप्त आकडों का संसाधन किया जा सकता है । इसमें डेटा एडीटर विडो , सिन्टेकस व आउटपुट विडो तीन महत्वपूर्ण विडो होती है ।
- डाटा एडीटर विडो में दो टैब होते है - डेटा व्यू ,वैरीबल व्यू। डेटा व्यू व वैरीबल व्यू का प्रयोग डेटा एटीª के लिये किया जाता है ।
- सिन्टेक्स विडो द्वारा सभी कमाडो का रिकार्ड रखा जाता है ।

- आउटपुट विडो द्वारा उत्पन्न परिणामों का संग्रहण किया जाता है ।
- इसके द्वारा आंकड़ों की कोडिंग की जाती है और उनका प्रविष्टन करके विभिन्न सांख्यिकीय विधियों द्वारा परिणाम पाया जा सकता है।
- इसमें साधारण से लेकर जटिल सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जा सकता है।

26.7 शब्दावली

- एसपीएसएस - यह एक ऐसा सॉफ्टवेयर है जिसे सामाजिक विज्ञान के शोधों, बाजार अनुसंधानों, स्वास्थ्य शोधों, कम्पनियों द्वारा किये जाने वाले सर्वेक्षणों, सरकारों व शैक्षिक अनुसंधानों द्वारा किया जाता है व बाजार विष्लेशणके लिए भी इसका उपयोग होता है।
- डाटा इन्ट्री - यह आंकड़ों के विष्लेशणकके पहले की अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रक्रिया है। इसमें आंकड़ों को आंकिक रूप से सॉफ्टवेयर में अंकित किया जाता है।

26.8 स्व मूल्यांकन हेतु प्रश्न

1. एसपीएसएस द्वारा न केवल आंकड़ों का सांख्किीय विष्लेशणबल्कि उसके द्वारा आंकड़ों का .... भी किया जाता है।
2. एडिट मे .... का कमांड होता है।
3. एनेलाइज द्वारा .... का कमांड होता है।
4. वैरीबल व्यू में .... को परिभाषित किया जाता है।

उत्तर - 1. व्यवस्थापन 2. कट, कापी, पेस्ट, 3. सांख्किीय विष्लेशण 4. चरों

26.9 संदर्भ ग्रन्थ सूची

SPSS for Psychologists. Nicola Brace, Richard Remp and Rosemery Shelgen. Palgrave.

26.10 निबन्धात्मक प्रश्न

1. एसपीएसएस में सॉफ्टवेयर का क्या उपयोग है। इसके द्वारा आंकड़ों का विष्लेशणकैसे होता है ?
2. एसपीएसएस द्वारा आंकड़ों की एन्ट्री का क्या तरीका है ?