बीएईसी– 301
(BAEC – 301)

आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी
(Mathematical Economic Methods and Elementary Statistics)

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
फोन नं. 05946 – 261122, 261123
टॉल फ्री नं. 18001804025
फैक्स नं. 05946–264232, ई–मेल info@uou.ac.in
http://uou.ac.in

पाठ्यक्रम समिति

प्रो0 गिरिजा प्रसाद पाण्डे,
निदेशक समाज विज्ञान विद्याशाखा,
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

प्रो0 एम0 के0 धडोलिया,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,
कोटा, राजस्थान

प्रो0 एस0 पी0 तिवारी,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
डॉ0 आर0 एम0 एल0 अवध विश्वविद्यालय,
फैजाबाद उ0 प्र0

प्रो0 मधुबाला,
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
इंदिरा गॉधी मुक्त विश्वविद्यालय,
नई दिल्ली

प्रो0 आर0 सी0 मिश्र
निदेशक वाणिज्य एवं प्रबन्ध विद्याशाखा,
विशेष आमंत्रित सदस्य
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

डॉ0 अमितेन्द्र सिंह
अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

पाठ्यक्रम संयोजन एवं संपादन

शालिनी चौधरी
सहायक आचार्य एवम् समन्वयक, अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

इकाई लेखन

इकाई लेखक	इकाई संख्या
प्रो. अंजलि बहुगुणा प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग, हेमवती नन्दन बहुगुणा विश्वविद्यालय (केन्द्रीय विश्वविद्यालय), श्रीनगर, पौड़ी गढ़वाल, उत्तराखण्ड	1
डॉ. प्रशांत कुमार असिस्टेन्ट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, हेमवती नन्दन बहुगुणा विश्वविद्यालय (केन्द्रीय विश्वविद्यालय), एस.आर.टी.कैम्पस, बादशाही थैल, टिहरी गढ़वाल, उत्तराखण्ड	2,3,10,11 12,13,15
डॉ. अनामिका चौधरी एसोसिएट प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग, डॉ. शकुन्तला मिश्रा राष्ट्रीय पनुर्वास विश्वविद्यालय, मोहन रोड़, लखनऊ, उ.प्र.	4,5,16,17
शालिनी चौधरी असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड	6,7,8,9
डॉ. प्रिया भल्ला असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, मोती लाल नेहरू कॉलेज (सायंकालीन), (दिल्ली दक्षिणी परिसर विश्वविद्यालय) वेनिटो जुआ रोड, नई दिल्ली	14,18
डॉ. प्रीति आत्रेय असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग, महिला महाविद्यालय पी. जी. कॉलेज, सतीकुण्ड, कनखल, हरिद्वार उत्तराखण्ड	18,19,20,21

अनुवाद

शालिनी चौधरी **14,18**
असिस्टेंट प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय,
हल्द्वानी, नैनीताल

संस्करणः 2017
आई.एस.बी.एन.ः

प्रकाशकः कुल सचिव, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल – 263139
email: studies@uou.ac.in
मुद्रकः

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी
(Mathematical Economic Methods and Elementary Statistics)

बी.ए.ई.सी. – **301**
(BAEC – 301)

विषय–सूची

इकाई – 1 समुच्चय सम्बन्ध एवं फलन

1.1 प्रस्तावना

अर्थशास्त्र में समुच्चय की अवधारणा एवं समुच्चय सम्बन्धों का महत्वपूर्ण उपयोग होता है। जटिल आर्थिक क्रियाओं को सरलता से समझने के लिए आर्थिक क्रियाओं तथा उससे जुडी वस्तुओं का वर्गीकरण करके विश्लेषण करने से उन्हे समझना सरल हो जाता है। यह वर्गीकरण वस्तुतः प्रायः समुच्चय अवधारणा पर आधारित होता है। जैसेः– उपभोक्ता वस्तुएं, आगतें, पूँजीगत वस्तुएँ, बाजार शक्तियाँ, मौद्रिक संक्रियाएँ, राजकोषीय संक्रियाएँ आदि।

दो परिवर्तनशील राशियों के बीच क्रियाशील कार्य–कारण अथवा कारक–परिणाम सम्बन्ध की सम्पूर्ण (दिशा एवं परिमाणात्मक स्वरूप दोनों ही पक्षों को समाविष्ट करते हुए) व्याख्या करने में गणित की फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध की अवधारणा बहुत उपयोगी सिद्ध हुई है। प्रायः एक ही कार्य का सम्पादन अनेक कारकों का समवेत प्रभाव होता है। मनुष्य एवं समाज के जीवन के सभी नहीं तो अधिकांश विषय या बातें विशेषकर आर्थिक विषय या बातें सतत् परिवर्तनशीलता का परिचय देते आए हैं। आर्थिक जीवन से जुडे अनेक ऐसे विषय है जिनकी परिमाणात्मक माप सम्भव होती है और जो परिवर्तनशील होती हैं, इनको आर्थिक चर के रूप में देखा जाता है। यह आर्थिक सरल/जटिल, चर/कारक परिणाम सम्बन्धों की अनेक श्रृंखलाएँ उत्पन्न कर फलनात्मक सम्बन्धों का एक मकड़जाल तैयार कर देते है।

अर्थशास्त्र आर्थिक चरों के बीच क्रियाशील कारक परिणाम सम्बन्धों से बुने मकडजाल के मनुष्य की निर्णय प्रक्रिया एवं आर्थिक व्यवहार पर पडने वाले समवेत प्रभावों की जटिलता को सरल बना कर एक–एक करके समझने व इस समझ के आधार पर भविष्य में उत्पन्न होने वाली आर्थिक चुनौतियों के प्रति मनुष्य एवं समाज को सचेत करने तथा वर्तमान और भविष्य की आर्थिक चुनौतियों के कल्याणकारी समाधान ढूंढने के चनौतीपूर्ण दायित्व को स्वीकार करता है। अर्थशास्त्र द्वारा इस चुनौतीपूर्ण दायित्व के सफलतापूर्ण निर्वहन में गणित के फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध का एक उपकरण के रूप में महती योगदान रहा है। समुच्चय सम्बन्धों एव फलन की अर्थशास्त्र के अध्ययन में महत्वपूर्ण भूमिका को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत इकाई में आपको इनसे अवगत कराया जा रहा है।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप–

- ✓ समुच्चय सम्बन्धों एवं फलन की अवधारणा से अवगत हो जाएगें।
- ✓ समुच्चय सम्बन्धों एवं फलन के माध्यम से अर्थशास्त्र में विभिन्न गणितीय विश्लेषण को समझने योग्य हो जाएंगे।

1.3 समुच्चय सम्बन्ध

1.3.1 समुच्चय की अवधारणाः– समुच्चय से तात्पर्य वस्तुओं के एक सुपरिभाषित समूह या संग्रह से है। सुपरिभाषित से तात्पर्य उस विशिष्टता के सुपरिभाषित होने से है

जिसके आधार पर इन वस्तुओं को संग्रहीत कर एक समूह में रखा जाता है। उदाहरण के लिए फुटबाल टीम अर्थात् फुटबाल खिलाडियों का समुच्चय, इस समुच्चय का आधार हर खिलाडी द्वारा फुटबाल खेले जाने की विशिष्टता है जो सुपरिभाषित है। जबकि कद, रंग, चेहरा आदि भिन्न– भिन्न हो सकते हैं।

समुच्चय में संग्रहीत प्रत्येक वस्तु को समुच्चय का अवयव कहते हैं। समुच्चय को दो वैकल्पिक पद्धतियों से व्यक्त किया जाता है।

(1) प्रथम पद्धति में समुच्चय के सभी अवयवयों को मँझले कोष्ठक के भीतर सूचीबद्ध कर दिया जाता है जैसे :– $S= \{-3,0,2,7\}$ समुच्चय को व्यक्त करने की इस विधि को सूची विधि (Tabular or Listin Method or Enumeration Methods) कहते हैं।

(2) गुण विधि, समुच्चय निर्माण विधि अथवा वर्णन विधि (Property Methods or Set Builder) - इस विधि में समुच्चय के अवयवों को सूचिबद्ध करने के स्थान पर अवयवों के उस विशिष्ट गुण द्वारा समुच्चय को परिभाषित किया जाता है जो समुच्चय निर्माण का आधार बनता है। सामान्यतया इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब समुच्चय के अवयवों की संख्या बहुत अधिक हो।

उदाहरण के लिए– R= {सभी वास्तविक संख्याएं} इस समुच्चय को

R= { x:x एक वास्तविक संख्या हैं} लिखते है।

1.3.2 समुच्चय के प्रकार

1.3.2.1 परिमित एवं अपरिमित समुच्चय : वे समुच्चय जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है उन्हे परिमित समुच्चय कहते हैं।

जैसेः– $S= \{8,-3,0,2,7\}$

इसके विपरीत अपरिमित समुच्चय वे समुच्चय होते हैं जिनके अवयवों की संख्या अपरिमित होती है। जैसेः– R= { x:x एक वास्तविक संख्या है}

परिमित समुच्चय के अवयवों की एक – एक करके गणना की जा सकती है अर्थात् परिमित अवयवों के समुच्चय गणनीय होते हैं जैसे उपरोक्त समुच्चय S। अपरिमित समुच्चय के एक – एक अवयव की गणना करना सम्भव नहीं होता है अर्थात् अपरिमित समुच्चय के अवयवों की संख्या अगणनीय होती है, जैसे :– उपरोक्त समुच्चय R।

समुच्चय के अवयवों की सदस्यता को ग्रीक अक्षर ϵ (अप्सायलन) की सहायता से इंगित किया जाता है। उदाहरण के लिए -3 उपरोक्त समुच्चय R का एक अवयव है जिसे हम $-3 \in S$ द्वारा इंगित करते हैं, तथा इसमें -3 समुच्चय S एक सदस्य है' पढते हैं। इसी प्रकार $\sqrt{2}$ एक वास्तविक संख्या होने के नाते उपरोक्त समुच्चय R का एक अवयव है जिसे हम $\sqrt{2} \in R$ द्वारा इंगित करते हैं। किन्तु $\sqrt{2}$ समुच्चय S का अवयव नहीं है, इस तथ्य को इंगित करने के लिए हम $\sqrt{2} \in S$ लिखते हैं, जिसका अर्थ है कि $\sqrt{2}$ समुच्चय S का अवयव नहीं है।

इसी प्रकार कथन ' x एक वास्तविक संख्या है' को $x \in R$ लिखते हैं जहाँ R सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का प्रतीक चिन्ह है।

1.3.2.2 रिक्त समुच्चयः– यह एक ऐसा समुच्चय होता है जिसमें कोई भी अवयव नहीं होता है अर्थात् $\emptyset = \{\}$। यदि समुच्चय में एक भी अवयव है तो उसे रिक्त समुच्चय नहीं कहा जाएगा। कोई भी अवयव न होने के कारण रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का उप समुच्चय होता है।

1.3.2.3 एकल समुच्चयः– ऐसे समुच्चय जिनमे केवल एक ही अवयव होता है। जैसेः– $\{0\}, \{a\}$, आदि।

1.3.2.4 समुच्चयों का समुच्चयः– जब किसी समुच्चय के अवयव स्वयं में एक समुच्चय हो तो उसे समुच्चयों का समुच्चय कहते हैं। उदाहरणार्थ– भारत की अर्थव्यवस्था विश्व की सभी अर्थव्यवस्थाओं के समुच्चयों का एक अवयव है। किन्तु भारत की अर्थव्यवस्था स्वयं में विभिन्न प्रान्तों की अर्थव्यवस्थाओं का एक समुच्चय है। इसी प्रकार एक प्रान्त की अर्थव्यवस्था उसके जिलों की अर्थव्यवस्थाओं का समुच्चय है।

1.3.2.5 समष्टीय समुच्चयः– यदि किसी निश्चित सन्दर्भ में सभी समुच्चय किसी निश्चित समुच्चय के उपसमुच्चय हो तो इस निश्चित समुच्चय को समष्टीय समुच्चय कहा जाता है। इसे अंग्रेजी भाषा के अक्षर '$\cup$' द्वारा दिखाया जाता है। उदाहरणार्थ – यदि वास्तविक संख्याओं का अध्ययन कर रहे हो तो सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय समष्टीय समुच्चय कहा जाएगा। इसी प्रकार यदि भारत की आर्थिक गतिविधियों का संदर्भ हो तो भारतीय अर्थव्यवथा समष्टीय समुच्चय होगी।

1.3.3 समुच्चय संक्रियाएंः– समुच्चयों के मध्य कुछ महत्वपूर्ण संक्रियाएं होती है जैसे संघ, प्रतिच्छेद, पूरक तथा अन्तर।

1.3.3.1 समुच्चयों का संघः– दो समुच्चयों A और B का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसके अवयव या तो A या B या A और B के उभयनिष्ठ अवयव होते हैं। इसे $A \cup B$ लिखते है। उदाहरणार्थ– $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,7,8\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,7,8\}$ $A \cup B = \{x : x \epsilon A$ अथवा $x \epsilon B\}$ देखें चित्र–2 जिसका आच्छादित भाग $A \cup B$ को दर्शाता है।

1.3.3.2 समुच्चयों का प्रतिच्छेदः– दो समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय A तथा B का प्रतिच्छेद होता है इसे $A \cap B$ लिखते है।

उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

$A \cap B = \{x : x \epsilon A$ तथा $x \epsilon B\}$ देखें चित्र–3 जिसका आच्छादित भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।

1.3.3.3 पूरक समुच्चयः– समुच्चय A का पूरक समुच्चय $(\bar{A})$ ऐसे अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टिय समुच्चय के अवयव होते हैं किन्तु समुच्चय A के अवयव नहीं होते हैं।

$\bar{A} = \{x : x \epsilon \cup$ और $x /\epsilon A\}$

देखें चित्र–4 जिसका आच्छादित भाग $\bar{A}$ को दर्शाता है।

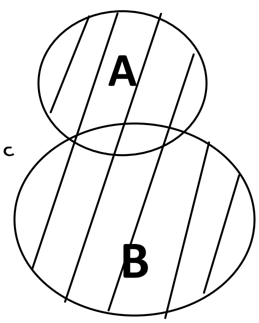
1.3.3.4 समुच्चयों का अन्तर :– दो समुच्चयों A तथा B का अन्तर वह समुच्चय होता है जिसके अवयव A के वे अवयव होते हैं जो B के अवयव न हो। इसे $A - B$ द्वारा दिखाया जाता है। $A - B = \{x : x \in A \text{ तथा } x \in B\}$ देखें चित्र–5 जिसका आच्छादित भाग $A - B$ को दर्शाता है।

उदाहरणार्थः– $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,7,8\}$

$A - B = \{1,4\}$

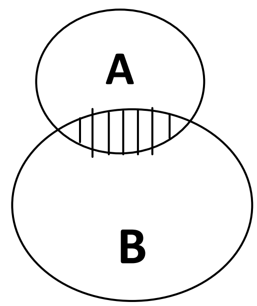
$B - A = \{7,8\}$

1.3.3.5 वेन आरेख से निरूपणः–



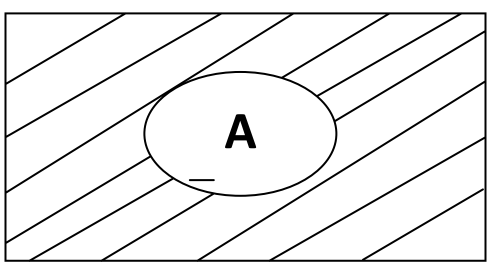
चित्र संख्या–1

$A \cup B$



चित्र संख्या–2

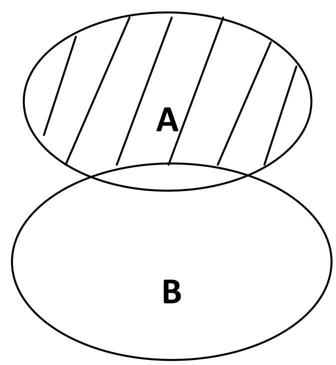
$A \cap B$ संघ प्रतिच्छेद



चित्र संख्या–3

$\overline{A}$

पूरक



चित्र संख्या–4

$A - B$

अन्तर

1.4 क्रमित युग्म एवं सम्बन्ध–

एक समुच्चय $\{a, b\}$ को लिखते समय हम अवयवों a और इ के क्रम को ध्यान में नहीं रखते हैं क्योंकि समुच्चय की परिभाषा के अनुसार समुच्चय $\{a, b\} = \{b, a\}$। किन्तु कभी–कभी वस्तुओं के कुछ ऐसे युग्मों का विचार करना पड़ता है जिनमें क्रम महत्वपूर्ण होता है। उदाहरण के लिए यदि हम देशों और उनकी राजधानियों के युग्म बनायें तो उनको एक

निश्चित क्रम में रखना अनिवार्य होगा जैसे–(भारत, दिल्ली), (पाकिस्तान, इस्लामाबाद), (नेपाल, काठमाण्डू) आदि। यदि इनमें से किन्हीं एक दो जोड़ों में अवयवों का क्रम बदल जाये तो वह युग्म निरर्थक हो जायेंगे। इसी प्रकार निर्देशांक ज्यामिती में यदि किसी बिन्दु को क्रमित युग्म (2,7) से दर्शाया गया हो तो इसका अर्थ है कि उस बिन्दु का X निर्देशांक 2 तथा Y निर्देशांक 7 है। अब यदि इस क्रमित युग्म का क्रम बदलकर (7,2) लिख दें तो यह एक भिन्न बिन्दु को इंगित करेगा जिसका X निर्देशांक 7 तथा Y निर्देशांक 2 होगा। अर्थात् क्रमित युग्म $(a, b) \neq (b, a)$। क्रमित युग्म (a,b) क्रमित युग्म (b,a) के बराबर तभी होगा जब =b हो। इसी प्रकार $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ तथा $b = d$। क्रमित युग्मों की यह अवधारणा दो से अधिक अवयवों वाले समुच्यों पर भी लागू होती है तथा इन्हें क्रमित समुच्च भी कहते हैं।

1.5 चर :–

चर संस्कृत भाषा का शब्द है। चर से आशय उस वस्तु से है जो चरायमान अथवा परिवर्तनशील होती है। गणित में ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनके मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकते हैं, जैसेः– पूर्णांक का मान –578, –189, –5, 0, 23, 94 ....आदि कुछ भी हो सकता है। इसी प्रकार व्यवहारिक जीवन में भी चर के अनेक उदाहरण मिलते है जैसेः– जानवर–चूहा, बिल्ली, हाथी आदि कुछ भी हो सकता है। इस प्रकार 'चर वह वस्तु है जिसका मान या परिमाण परिवर्तनशील हो सकता है'। अर्थात्, चर वह है जो विभिन्न मानों को धारण कर सकता है। वस्तुतः चर के माध्यम से एक पूरे समूह अथवा समुच्चय को इंगित किया जाता है। अपने इसी गुण के कारण अर्थशास्त्र में इसकी उपयोगिता बन जाती है। उदाहरण के लिए मूल्य, लाभ, आगम, उपयोगिता, उपभोग स्तर, राष्ट्रीय आय, निवेश, आयात निर्यात आदि सभी संदर्भ एवं समय के साथ भिन्न–भिन्न मान धारण करते हैं। चूँकि प्रत्येक चर विभिन्न मान धारण कर सकता है इसलिए चर को संख्या के स्थान पर 'प्रतीक' द्वारा व्यक्त किया जाता है, यथा मूल्य को P, लाभ को π, आगम को R, लागत को C, उपयोगिता को U, उपभोग स्तर को C, राष्ट्रीय आय को Y, निवेश को I, आयात को M, निर्यात को X, आदि से दर्शाया जाता है। हालांकि, जब हम $P = 7$, $C = 35$ या $Y = 100$ लिखते हैं तो वस्तुतः हम एक विशेष स्थिति में इन चरों के निर्धारित विशिष्ट मानों का (उपयुक्त रूप से चयनित इकाइयों में) उल्लेख कर रहे होते हैं।

1.5.1 अन्तः चर :– वे चर जिनका मान गणितीय संदर्श की अन्तः शक्तियों द्वारा निर्धारित होता है अर्थात् जिन चरों के मानों या परिमाणों का निर्धारण संदर्श के भीतर होता है उन्हें अन्तः चर कहते हैं। जैसे– बाजार मूल्य P का निर्धारण बाजार की आन्तरिक शक्तियों (माँग एवं पूर्ति) द्वारा होता है। अतः बाजार विश्लेषण में मूल्य एक अन्तः चर है। अर्थात् अन्तः चर वे चर हैं जिनका मान संदर्श को हल करने से प्राप्त होता है।

1.5.2 बाह्य चर :– वे चर जिनका निर्धारण संदर्श की आन्तरिक शक्तियों द्वारा नहीं होता अपितु प्रायः जिनका उपयोग करके संदर्श को हल किया जाता है और अन्तः चर का निर्धारण

होता है। उदाहरणार्थ– एक उपभोक्ता के लिए बाजार मूल्य एक बाह्य चर है क्योकि एक अकेला उपभोक्ता बाजार मूल्य को परिवर्तित नहीं करा सकता। अर्थात् उपभोक्ता व्यवहार में उपभोग स्तर निर्धारण की दृष्टि से बाजार मूल्य दिया हुआ होता है तथा उपभोग स्तर इस दिए हुए बाजार मूल्य द्वारा निर्धारित होता है। इस प्रकार यह भी स्पष्ट हो जाता है कि एक चर जो एक संदर्श के लिए अंतः चर है दूसरे संदर्भ के लिए बाह्य चर हो सकता है अर्थात् संदर्श बदलने पर चर की भूमिका भी बदल सकती है।

1.6 अचर :–

चर के विपरीत अचर वह राशियाँ होती हैं जिनके परिमाण अथवा मान में परिस्थिति अथवा संदर्भ बदलने पर भी परिवर्तन नहीं होता है। जैसेः– गुरूत्वाकर्षण नियंताक $g = 9.8$ मी0 / से^{2}, $\pi = 3 - 14$, इत्यादि।

अर्थशास्त्र में भी अचर राशि के उदाहरण मिलते है, जैसे– स्थिर लागत, स्वायत्त उपभोग, स्वायत्त निवेश आदि।

1.6.1 गुणांक :– प्रायः चर स्थिरांकों अथवा अचरों के साथ संयुक्त रूप से प्रयोग किए जाते हैं जैसे– $0 - 7Y$, $5P$ आदि। ऐसी अचर राशियों को गुणांक कहा जाता है। किन्तु अलग–अलग स्थितियों में गुणांको के मान अलग–अलग हो सकते हैं अतः इन गुणांकों को व्यापकता देने के लिए निश्चित संख्याओं के स्थान पर $a, b, \alpha, \beta,$ आदि प्रतीकों से दर्शाया जाता है। उदाहरणार्थ $5P$ के स्थान पर aP या $0 - 7Y$ के स्थान पर cY लिखा जाता है। ये प्रतीक इस अर्थ में अनोखे होते हैं कि ये एक अचर राशि का प्रतिनिधित्व करते हैं तथापि इनके लिए कोई सर्वथा निश्चित मान प्रदान नहीं किया गया है। यह एक ऐसे अचर या स्थिरांक है जो चर होते हैं। इनके इस विशिष्ट गुण को स्पष्ट पहचान देने के लिए इन्हे 'परिमापक स्थिरांक' अथवा मात्र 'परिमापक' कहते हैं।

1.7 सम्बन्ध :–

चर विश्लेषण के अर्न्तगत हम सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं। यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि चर विश्लेषण के अन्तर्गत किसी एक चर के मान में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन नहीं किया जाता वरन दो या दो से अधिक चरों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। जैसे– $Y = 2X, Y = X2,\ Y = \pm\sqrt{X}$ इत्यादि। गणितीय सम्बन्ध दो प्रकार के होते हैं–

(i) गैर–फलनात्मक **(ii)फलनात्मक**

1.7.1 गैर–फलनात्मक सम्बन्धः– चरों के बीच के ऐसे सम्बन्ध जिनसे अद्वितीय परिणाम मिलना सुनिश्चित न हो तथा जिसके फलस्वरूप चरों के बीच कारण–कार्य सम्बन्ध स्थापित करना सम्भव न हो जैसेः– $Y = \pm\sqrt{X}$; X का मान 4 होने पर Y का मान +2 भी हो सकता है तथा –2 भी हो सकता है अर्थात् परिणाम (Y) अद्वितीय नहीं है। इसी प्रकार लॉटरी का टिकट

खरीदने पर ईनाम मिल भी सकता है और नहीं भी मिल सकता है अर्थात् परिणाम अद्वितीय नहीं है।

1.7.1 फलनात्मक सम्बन्धः– चरों के मध्य ऐसा सम्बन्ध जिसमें एक चर या एक से अधिक चरों के मान द्वारा किसी दिए हुए चर के मान का अद्वितीय निर्धारण होता हो उसे फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं। फलनात्मक सम्बन्धों में एक सुस्पष्ट कारण–कार्य सम्बन्ध निहित होता है। जैसे $Y = 2x$ । इसी प्रकार यह कथन कि कोई व्यक्ति अपने खेत पर जितनी अच्छी किस्म के बीज का प्रयोग करेगा (सिंचाई, खाद एवं खेती की देखभाल आदि समान रहने पर) प्रति एकड़ फसल का उत्पादन उतना ही अच्छा होगा।

उपरोक्त उदाहरणों में Y का मान X पर निर्भर कर रहा है तथा उत्पादन की मात्रा बीज की किस्मों पर निर्भर कर रही है, अर्थात् Y और फसल के उत्पादन का मान क्रमशः X के मान तथा बीज की किस्म पर आश्रित हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में वे चर जिनका परिमाण अथवा मान किसी अन्य चर अथवा चरों के मानों पर निर्भर करता है उनको आश्रित चर कहते हैं। आश्रित चरों के मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्ध को हल करने के परिणामस्वरूप होता है। इसी कारण इन्हे फलन भी कहते हैं। एक फलनात्मक सम्बन्ध में आश्रित चर उस फलनात्मक सम्बन्ध का अन्तः चर होता है। इसके विपरीत फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले वे चर जिनके परिमाण अथवा मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्धों की सीमाओं के बाहर होता है या दूसरे शब्दों में जो अपना मान या परिमाण स्वतन्त्र रूप से धारण करते हैं उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले स्वतन्त्र चर उस फलनात्मक सम्बन्ध के लिए बाह्य चर होते हैं। चहाँ यह ध्यान देने की बात है कि एक फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में जो चर 'स्वतन्त्र चर' होता है दूसरे फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में आश्रित चर हो सकता है।

एक फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक हो सकती है किन्तु आश्रित चर एक ही होता है।

फलनात्मक सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में निम्नवत दर्शाया जाता हैः–

$Y = f(X)$ जहाँ Y= फलन या आश्रित चर

X= स्वतन्त्र चर तथा f फलनात्मक सम्बन्ध को दर्शाता है। जिसे 'Y (चर), X (चर) का फलन है' पढ़ते हैं।

यदि स्वतन्त्र चरों की संख्या n हो तो फलनात्मक सम्बन्ध को निम्नवत लिखते हैं–

$$Y = f(X_1, X_2, - - - - - - - - - - - X_n)$$

हमारे दैनंदिन जीवन में घटित होने वाले आर्थिक व्यवहार के समीकरण सामान्यतया फलनात्मक सम्बन्ध होते हैं जिन्हें आधार बनाकर आर्थिक संदर्शों का निर्माण तथा आर्थिक

सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है। चूँकि अधिकांश आर्थिक चर स्वभावतः गैर ऋणात्मक वास्तविक अंकों की सीमा से बंधे होते हैं फलतः अधिकांश आर्थिक संदर्शो या फलनात्मक सम्बन्धों के डोमेन भी इस सीमा से बंधित होते हैं।

1.7.3 फलनों के प्रकार

प्रत्येक फलन में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्ध की व्याख्या उस सम्बन्ध को व्यक्त करने वाली गणितीय प्रक्रिया पर आधारित एक निश्चित समीकरण के द्वारा की जाती है। उदाहरणार्थ

(i) $Y = f(X): Y = mX + c$

(ii) $Y = f(X) : Y = a_o + a_1 X + a_2 x^2 + - - - - - - a_n x^n$

(iii) $Y = f(X) : Y = a \log X$ आदि।

अतः फलनात्मक सम्बन्ध में अन्तर्निहित गणितीय संक्रिया के आधार पर फलनों को दो प्रमुख वर्गों में बाँटा जाता है।

1) बीजीय फलन 2) अबीजीय फलन

1.7.3.1 बीजीय फलन :– जिन फलनों में स्वतन्त्र चर व आश्रित चर के मध्य फलनात्मक सम्बन्ध को बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा पूर्णतः व्यक्त किया जा सकता है ऐसे फलन बीजीय फलन होते हैं। उदाहरण के लिए –

$$Y = f(X): Y = a_o + a_1 X + a_2 x^2 + - - - - a_n x^n$$

बीजीय फलनों को पुनः उपवर्गों में निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है।

अचर फलन :– ऐसे फलन जिनमें स्वतन्त्र चर के सभी मानों के लिए आश्रित चर या फलन का एक निश्चित मान होता है उन्हें अचर फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थः– $Y = f(X) : Y = 10$

रैखिक फलन :– रैखिक फलन एक घातीय फलन होते हैं जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक एक होता। रैखिक फलनों के प्रत्येक बिन्दु पर फलन की प्रवणता समान रहती है। रैखिक फलनों में स्वतन्त्र चर और आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों का अनुपात स्थिर बना रहता है अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर स्थिर रहती है। रैखिक फलन के ग्राफीय निरूपण से सरल रेखा प्राप्त होती है।

द्विघातीय फलन :– द्विघातीय फलन द्वितीय घात के फलन होते हैं जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक 2 होता। द्विघातीय फलनों में परिवर्तन की दर परिवर्तनशील होती

है, ऐसे फलनों के ग्राफीय निरूपण से शांकव आकृतियाँ **(**Conic Section) प्राप्त होती है। जैसे – परवलय, वृत्त, दीर्घ वृत्त, अति परवलय।

बहुपद फलन :– जैसा कि इसके नाम से स्पष्ट है ऐसे फलनों में अनेक पद होते हैं इसका प्रत्येक पद एक गुणांक के साथ स्वतन्त्र चर का एक ऐसा पद होता है जिसका घातांक गैर ऋणात्मक पूर्णांक हो। जैसेः–

$$Y = f(X): Y = a_o + a_1 X + a_2 x^2 + - - - - a_n x^n$$

1.7.3.2 अबीजीय फलनः– ऐसे फलन जिनको मात्र बीजीय संक्रियाओं द्वारा व्यक्त करना सम्भव न हो तथा जिनको व्यक्त करने के लिए चर–घातांकीय, लघुगणिकीय या त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का सहारा लेना पड़ता है, अबीजीय फलन होते हैं।

चर–घातांकीय फलनः– वे फलन जिनकी व्याख्या ऐसे पदों की सहायता से की जाती है जिनमें घातांक में स्वतन्त्र चर की भूमिका होती है चर – घातांकीय फलन कहलाते है। उदाहरणार्थ–

$$Y = f(X) : Y = a^x$$

$$Y = f(t) : Y = ab^t$$

लघुगुणकीय फलनः– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए स्वतन्त्र चर के लघुगुणकों का प्रयोग किया जाता है अर्थात् जिन फलनों में फलनात्मक सम्बन्ध लघुगुणकीय संक्रियाओं द्वारा व्याख्यायित होते हैं उन्हें लघुगुणकीय फलन कहते हैं। उदाहरणार्थ–

$$Y = f(X) : Y = a \log_b X$$

या, $Y = f(X) : Y = \alpha \log_e X$

त्रिकोणमितीय फलन :– वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है त्रिकोणमितीय फलन कहलाते हैं। उदाहराणार्थ–

$$Y = f(x) : Y = a \sin x$$

या, $Y = f(x) : Y = x \sin \theta$

परिमेय फलनः– वे फलन जिनको दो बहुपदों के अनुपात के द्वारा व्यक्त किया जाता है, उन्हें परिमेय फलन कहते हैं।

जैसेः– $Y = f(X): Y = \frac{a_o + a_1 X}{b_o + b_1 X + b_2 X^2}$ या

$$Y = f(X): Y = \frac{1-X}{1+X+X^2}$$

अपरिमेय फलनः– ऐसे बीजीय फलन जिनको बहुपद के मूल जैसे वर्गमूल के द्वारा व्यक्त किया जाता है, को अपरिमेय फलन कहते हैं।

उदाहरणार्थ– $Y = f(x) : Y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

1.8 फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः–

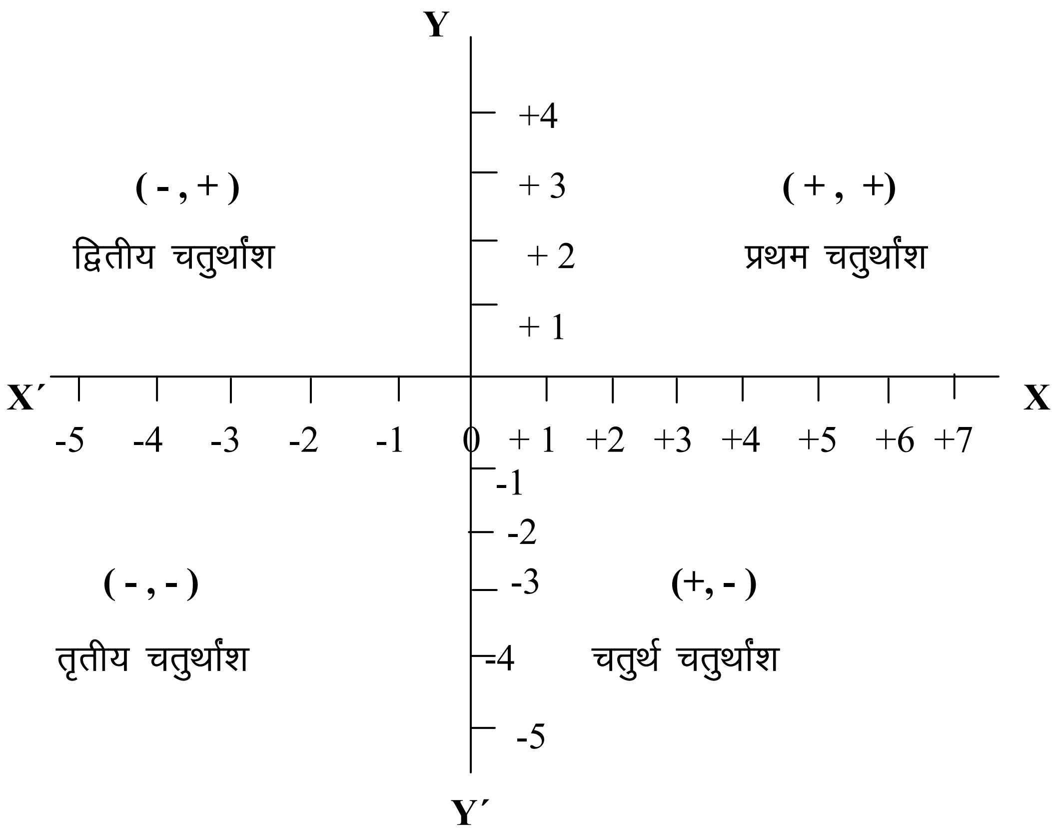
फलनों में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्धों को रेखाचित्र द्वारा सहजता से स्पष्ट किया जा सकता है। एक स्वतन्त्र चर वाले फलन का रेखचित्र आरम्भिक निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से द्विआयामी–समतल या पृष्ठ पर अंकित किया जा सकता है किन्तु दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर वाले फलनों (जब सभी स्वतन्त्र चर एक साथ परिवर्तनशील हो) को अंकित करने के लिए तीन या तीन से अधिक आयामों की आवश्यकता पड़ती है जिसे पुस्तिका पर दर्शाना जटिल तथा तीन से अधिक आयामों का अंकन व्यवहारिक रूप से असम्भव होता है। यही कारण है कि बहु–स्वतन्त्र चरीय आर्थिक फलनों के विश्लेषण को रेखाचित्र द्वारा दर्शाने के लिए प्रायः एक चर को परिवर्तनशील रखते हुए शेष को स्थिर मान लिया जाता है।

उदाहरण के लिए – किसी वस्तु की X मांग (Dx) उस वस्तु के मूल्य Px उपभोक्ताओं की आय (Y) उपभोक्ता की अभिरूचि (T) अन्य वस्तुओं के मूल्य (P_0) आदि पर निर्भर करती है। जिसे $D_x = f(P_x, P_0, Y, T.....)$ लिखा जाता है।

किन्तु विश्लेषण की सरलता और रेखाचित्र द्वारा सहजता से दर्शाने के लिए वस्तु के अपने मूल्य के अतिरिक्त शेष सभी स्वतन्त्र चरों को स्थिर मान कर $D_x = f(P_x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिसका रेखाचित्रीय निरूपण करने पर धनात्मक चतुर्थांश में बायें से दायें गिरती हुई रेखा या वक्र प्राप्त होता है। इसी प्रकार बहुघातीय बीजीय फलन, लघुगणकीय फलन, चर घातंकी फलन एवं त्रिकोणमितीय फलनों का रेखाचित्र हाथ से अंकित करना प्रायः असम्भव जैसा होता है। उपरोक्त तथ्यों को ध्यान रखते हुये सरल निर्देशांक ज्यामिति को प्रयोग करते हुए आप लोगों के अभ्यास की दृष्टि से रैखिक एवं परवलयाकार फलनों के अंकन की विधि का उल्लेख किया जा रहा है।

एक स्वतन्त्र चरीय फलनों के अंकन के लिए द्विआयामी पृष्ठ को दो अक्षों– X अक्ष जो क्षैतिज अक्ष तथा Y अक्ष जो ऊर्ध्व अक्ष होता है, जो परस्पर 90^0 का कोण बनाते हुए एक–दूसरे को मूल बिन्दु 0 पर काटते हैं, और इस प्रकार द्वि–आयामी पृष्ठ को चार अक्षांशों में विभक्त करते हैं। स्वतन्त्र चर की गणना X अक्ष के सहारे तथा स्वतन्त्र आश्रित चर की गणना Y अक्ष के सहारे की जाती है। मूल बिन्दु से दायीं तरफ X के मान धनात्मक तथा मूल बिन्दु से बायीं तरफ X के मान ऋणात्मक होते हैं। इसी प्रकार Y के मान मूल बिन्दु से ऊपर धनात्मक तथा मूल बिन्दु से नीचे ऋणात्मक होते हैं। परिणामस्वरूप प्रथम चतुर्थांश में X

तथा Y दोनों चरों के मान धनात्मक होते हैं इसे धनात्मक चतुर्थांश भी कहते हैं। द्वितीय चतुर्थांश X के मान ऋणात्मक तथा Y के मान धनात्मक होते हैं। तृतीय चतुर्थांश में X तथा Y दोनों के मान ऋणात्मक होते हैं इसे ऋणात्मक चतुर्थांश भी कहते हैं तथा चतुर्थ चतुर्थांश में X के मान धनात्मक तथा Y के मान ऋणात्मक होते हैं। देखें चित्र संख्या– 5



चित्र संख्या – 5

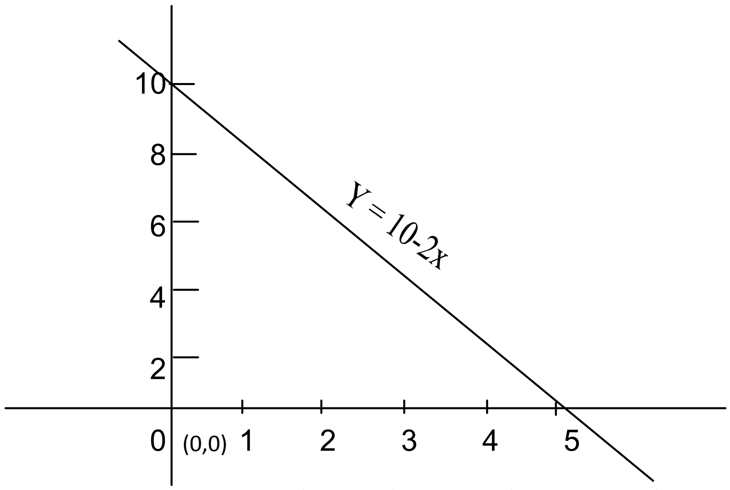
सामान्यतया फलन का हस्तनिर्मित आरेख बनाने के लिए स्वतन्त्र चर के पूर्णांक मानों को स्वेच्छानुसार चुना जाता है तथा इन मानों को फलन के समीकरण में रखकर आश्रित चर या फलन के मान की गणना की जाती है। तत्पश्चात् समतल पर इन चर मानों के आधार पर निश्चित बिन्दुओं को चिन्हित किया जाता है इन बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से फलन का आरेख प्राप्त हो जाता है।

फलनों का रेखाचित्रीय निरूपणः–

उदाहरण 1.:– $Y = 10-2x$ का रेखाचित्रीय निरूपण कीजिए।

हलः–

X	0	1	2	3	4	5
Y	10	8	6	4	2	0

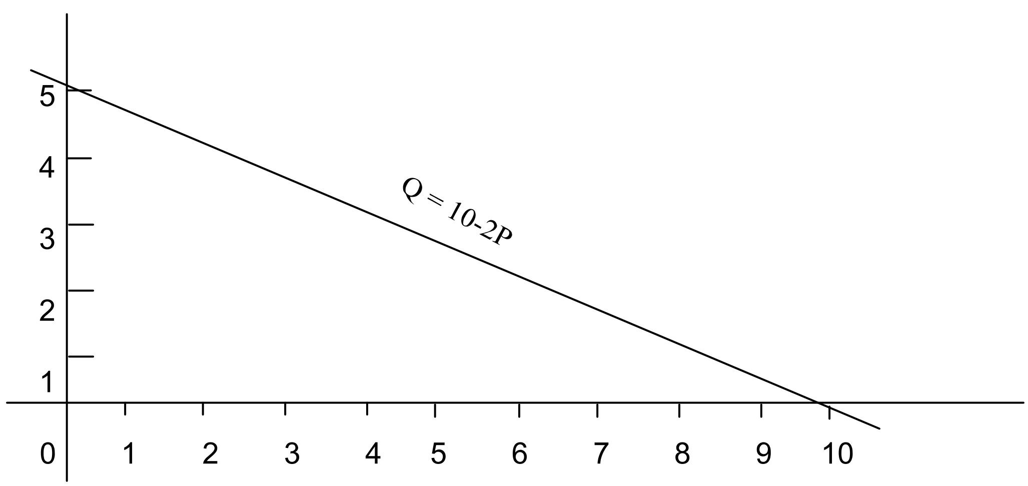


यद्यपि सारणी में X के शून्य से 5 तक के ही मान लिये गये है परन्तु सभी वास्तविक संख्याएं इस फलन के डोमेन अर्थात् X के मान हो सकते हैं।

चूँकि दिया गया फलन एक सरल रेखा को व्युत्पन्न करता है तथा सरल रेखा की ढाल अपरिवर्तित रहती है सारणी से प्राप्त पाँच बिन्दुओं को मिलाते हुए सरल रेखा को ग्राफ के पूरे विस्तार तक खींचा जाता है।

टिप्पणीः 1) यदि उपरोक्त फलन जैसा एक माँग फलन $Q = 10 - 2P$ हो तो P और Q के केवल गैर ऋण मान (शून्य अथवा धनात्मक मान) ही प्रासंगिक होंगे।

2) यद्यपि मूल्य स्वतन्त्र चर व माँग आश्रित चर है तथापि परम्परा के कारण मूल्य को Y अक्ष तथा माँग को X अक्ष पर अंकित किया जायेगा और माँग फलन का ग्राफ निम्नवत् होगा।



1.9 सारांशः–

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समुच्चय सम्बन्धों एवं गणितीय फलनों के विभिन्न पक्षों से सुपरिचित हो गए है। समुच्चय की परिभाषा से हम यह समझ सके है कि किसी

विशिष्ट सुपरिभाषित आधारों पर अनेक वस्तुओं को एक समूह में रखा जा सकता है तथा सुपरिभाषित आधार में परिवर्तन करके उपसमुच्चयों का निर्माण किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न प्रकार के समुच्चयों जैसे घात समुच्चय, विसंघीत समुच्चय, पूरक समुच्चय आदि से परिचित हुए है, समुच्चयों के बीच अनेक संक्रियाएँ जैसे संघ, प्रतिच्छेद, अंतर आदि से भी हम परिचित हुए है।

चर, अन्तः चर, वाह्य चर, अचर गुणांक आदि की अवधारणा से परिचित होने से अपको अर्थशास्त्र के अनेक तथ्यों को समझने में बहुत सुविधा होगी। फलनों के विभिन्न प्रकारों तथा फलनों के स्वरूप का निर्धारण करने में गणितीय संक्रियाओं की भूमिका के बारे में जो जानकारी इस इकाई में आप ने प्राप्त की है वह आर्थिक सिद्धान्तो व आर्थिक प्रणालीयों को समझने में सहायक सिद्ध होगी। फलनों के आर्थिक अनुप्रयोग सम्बन्धित जानकारी से आपको अर्थशास्त्र में फलनात्मक सम्बन्ध, चर व गुणांक आदि का आर्थिक विषयों में किस प्रकार प्रयोग किया जाता है, समझने में सहायता मिलेगी।

1.10 अभ्यास प्रश्नः–

1. रिक्त स्थानों को भरिएः–

i) 1/7 एक .... संख्या है।

ii) शून्य एक .... पूर्णांक है।

iii) सभी .... संख्याएं पूर्णांक होती हैं।

iv) सभी पूर्णांक, परिमेय, तथा अपरिमेय संख्याएं मिलकर ....संख्याओं का समुच्चय बनाती हैं।

v) दो समुच्चयो के प्रतिच्छेद में दोनों समुच्चयों के ....अवयव होते हैं।

vi) दो समुच्चयों का अन्तर प्रथम समुच्चय में से ....अवयवों को हटाकर प्राप्त किया जाता है।

vii) किसी समुच्चय के सभी सम्भव उपसमुच्चयों के समुच्चय को ....कहते हैं।

viii) जिस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता उसे ....कहते हैं तथा इसे ... . द्वारा दिखाते है।

ix) $Y = mx + C$ एक ....फलन है।

x) .... फलन का रेखाचित्र अक्ष के समानान्तर होता है।

xi) द्विघात फलनों में .... आकृतियों प्राप्त होती हैं।

xii) पूर्ण प्रतियोगिता में मूल्य .... चर होता है।

xiii) फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या .... हो सकती है।

xiv) आश्रित चर को .... कहते हैं।

xv) माँग, पूर्ति एवं लागत फलन .... चतुर्थांश में सीमित रहते हैं।

xvi) आवर्ती फलन ....का एक विशेष प्रकार होता है।

2. निम्न कथनों का परीक्षण कीजिएः–

i) फलनात्मक सम्बन्ध कारण–कार्य अथवा कारक–परिमाण सम्बन्ध को व्यक्त करता है। सत्य/असत्य

ii) $Y = a^x$ एक बीजीय फलन है। सत्य/असत्य

iii) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ एक अदिष्ट फलन है। सत्य/असत्य

iv) $Y = b – ax$ एकदिष्ट वर्धमान फलन है। सत्य/असत्य

v) सीमान्त आय फलन धनात्मक चतुर्थांश में सीमित रहता है। सत्य/असत्य

3. निबन्धात्मक प्रश्नः–

1. निम्न को परिभाषित कीजिएः–
- **i)** समष्टीय समुच्चय
- **ii)** उप समुच्चय
- **iii)** पूरक समुच्चय
- **iv)** विसंघीत समुच्चय

2. सम्बन्ध से आप क्या समतझते हैं उदाहरण की सहायता से सम्बन्ध और फलनात्मक सम्बन्ध में भेद कीजिए।

3. फलनात्मक सम्बन्ध किसे कहते हैं। फलनों के विभिन्न भेदों को स्पष्ट कीजिए।

4. निम्न फलनों को रेखांति कीजिए।
- **i)** पूर्ति फलन
- **ii)** लागत फलन

5. चर से आप क्या समझते हैं। अन्तः तथा बाह्य चरों में भेद स्पष्ट कीजिए।

6. निम्नलिखित प्रश्नों का उदाहरण सहित अन्तर स्पष्ट कीजिएः–
- **i)** स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन
- **ii)** परिमेय तथा अपरिमेय फलन
- **iii)** बीजीय एवं अबीजीय फलन
- **iv)** लघुगुणकीय एवं चर घातांकीय फलन
- **v)** अचर एवं रैखिक फलन

1.11 अभ्यास प्रश्नों के उत्तरः–

1. **रिक्त स्थानों को भरिएः–** (i) परिमेय (ii) अद्वितीय (iii) प्राकृतिक (iv) वास्तविक (v) उभयनिष्ठ (vi) उभयनिष्ठ (vii) घात समुच्चय (viii) रिक्त समुच्चय (ix) बीजीय (x) अचर (xi) शांकव (xii) बाह्य (xiii) अनेक (xiv) फलन (xv) प्रथम (xvi) अदिष्ट फलन
2. **निम्न कथनों का परीक्षण कीजिएः–** (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य

1.12 संदर्भ ग्रन्थः–

- Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; McGRAW- Hill

- Allen, R.G.D.; Mathematical Analysis for Economists, The English Language Book Society and Mc-Millan & Co. Ltd. London.
- महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।
- Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematical Treatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.
- Monga, G.S. ; Mathematics and Statistics for Economists.

1.13 सहायक ग्रन्थः–

1- मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्यभवन पब्लिकेशन।

3- अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

3- मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।

4- डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

इकाई–2 अवकलन एवं आर्थिक सिद्धान्त में इसका प्रयोग

2.1 प्रस्तावना :–

पिछली इकाई में आप फलनात्मक सम्बन्ध व फलनों का अध्ययन कर चुके है। जिसमें आपने यह देखा है कि प्रायः फलनात्मक सम्बन्ध सरल व समानुपाती नहीं होते हैं; वरन् इन्हें जटिल गणितीय प्रतिक्रियाओं द्वारा व्यक्त किया जाता है; और जो इस बात को स्पष्ट करते हैं कि प्रायः स्वतन्त्र चर (चरों) व आश्रित चर के मध्य सम्बन्ध सरल व समानुपाती नहीं होते हैं। वस्तुतः स्वतन्त्र चर (चरों) में समान परिमाण में क्रमिक परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों का परिमाण परिवर्तनशील होता है और फलन के परिमाण में परिवर्तन में होने वाले परिवर्तन भी परिवर्तनशील हो सकते हैं अर्थात् स्वतन्त्र चर में एक निश्चित परिमाण में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप फलन में एक निश्चित परिमाण में परिवर्तन होना अनिवार्य नहीं होता है। दूसरे शब्दों में कहे तो फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तित होती रह सकती है। इसी प्रकार फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर भी परिवर्तित होती रह सकती है, और यह श्रृखंला उत्तरोत्तर आगे जा सकती है। कई बार फलन के मान में परिवर्तन की दर में परिवर्तन होते रहने के परिणाम स्वरूप फलन में परिवर्तन की दिशा भी बदल जाती है और किन्हीं फलनों में यह दिशा बार–बार परिवर्तित होती है। जैसा कुछ त्रिकोणमितीय फलनों, आवर्ती फलनों या फिर ऋणात्मक अचर आधार के चर घातांकी फलनों [$-a^x$] में दिखाई पडता है। ऐसी स्थितियों में फलनों में परिवर्तन की दर उनके प्रत्येक बिन्दु पर परिवर्तित होती रहती है। ऐसे फलन जिनके मान में परिवर्तन की दर स्थिर नहीं होती स्वतन्त्र चर एवं आश्रित चर की दो भिन्न– भिन्न स्थितियों के बीच के छोटे अन्तरों [Δ] के माध्यम से परिवर्तन की दर की गणना करना त्रुटिपूर्ण परिणाम देता है। फलतः परिवर्तनशील दरों से परिवर्तित होने वाले फलनों के किसी बिन्दु पर परिवर्तन की दर, परिवर्तन की दर मे हो रहे परिवर्तनों की दर आदि तथा इनकी सहायता से फलन की प्रकृति आदि को समझने के लिए स्वतंत्र चर में शून्यसम या शून्योन्मुख परिवर्तन के द्वारा फलन के परिमाण मे होने वाले अत्य अल्प परिवर्तन के माध्यम से फलन में परिवर्तन की दर तथा अन्य उच्च काटि की दरों की गणना की जाती है। इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया तथा इस प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम को अवकलज और गणित की इस विधा को अवकलन कहते हैं।

अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्वान्तों की विवेचना करने तथा उन्हें स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग किया जाता है। जिसका उल्लेख पिछली इकाई में हुआ है। ऐसे में विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था मे क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनका शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया की प्रविधि व विभिन्न कोटि के अवकलजों के अर्थ से सुपरिचित होना नितांत आवश्यक है।

2.2 उद्देश्य :–

इस इकाई का उद्देश्य आप विद्यार्थियों को एक चरीय फलनों के सरल अवकलन के आशय, अवकलन की अवधारणा, अवकलन करने की विधि तथा अवकलज के अर्थों से न केवल परिचित कराना वरन् विभिन्न फलनों के अवकलजों तथा जटिल फलनों यथा फलनों के योग,

फलनों के अन्तर, फलनों के गुणनफल, फलनों के भाजफल तथा फलनों के फलन के अवकलन तथा उच्चतर कोटि के अवकलज, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ एवं नति परिवर्तन बिन्दु आदि ज्ञात करने के नियमों से परिचित कराते हुये विविध उदाहरणों की सहायता से विविध फलनों का अवकलन करने में कुशलता प्राप्त करने में आपका सहयोग करना है। साथ ही अर्थशास्त्र में सरल अवकलन के अनुप्रयोग के द्वारा अर्थशास्त्र में सरल अवकलन की उपयोगिता रेखांकित करने के साथ–साथ आर्थिक सिद्धान्तों के मर्म को (उदाहरणों की सहायता से) समझने योग्य बनाना है।

2.3 अवकलनः अवधारणा एवं निर्वचन –

पिछली इकाई में फलनात्मक सम्बन्धों का अध्ययन करते हुए हमने देखा है कि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप फलनों के मान में परिवर्तन होता है; एवं विभिन्न प्रकार के फलनों में स्वतंत्र चर के मान और फलन के मान के बीच विभिन्न प्रकार के सम्बन्ध पाये जाते हैं। फलनात्मक सम्बन्ध को $y = f(x)$ जिसमें x कारण एवं y परिणाम है, द्वारा दिखाते हैं। अतः x के मान बदलने पर y अथवा $f(x)$ का मान परिवर्तित होता है। उदाहरण के लिए यदि x के किसी विशेष का मान x_i को लें तो फलन का मान y_i या $f(x_i)$ होगा। और यदि x के विशेष मान x_j को ले तो फलन का मान y_j या $f(x_j)$ होगा। यदि x और y के दोनों मानो के बीच के अन्तर को Δx तथा Δy द्वारा दर्शाया जाये तो–

$\Delta x = x_j - x_i$ तथा $\Delta y = y_j - y_i$ या $f(x_j) - f(x_i)$ होगा।

फलनात्मक सम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता इस बात में निहित है कि स्वतंत्र चर (कारण) में कितना परिवर्तन करने से फलन (परिणाम) में वांछित मान प्राप्त किया जा सकता है।

इस सन्दर्भ में फलन के परिवर्तन की दर जिसे $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, की गणना महत्वपूर्ण है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{\Delta x}$$

यदि फलन फलन सरल रैखिक या अनुपातिक है तो फलन में परिवर्तन की दर सदैव समान बनी रहती है ऐसे में Δx का मान छोटा या बडा होने पर कोई अन्तर नहीं पडता किन्तु यदि फलन अरैखिक है तो Δx का मान बडा होने पर दो भिन्न–भिन्न स्थितियों के बीच घटित होने वाली विभिन्न परिवर्तन की दरों का एक औसत प्राप्त होगा। ऐसे में जबकि प्रत्येक बिन्दु पर फलन की दर परिवर्तन हो रही हो किसी स्थिति विशेष में फलन स्वतंत्र चर के प्रभाव को समझने के लिए स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शून्योन्मुख परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर को समझना महत्वपूर्ण हो जाता है। सांकेतिक रूप में स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शून्योन्मुख परिवर्तन को '$\Delta x \rightarrow 0$' द्वारा तथा स्वतंत्र चर में अत्यल्प परिवर्तन की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर को $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ द्वारा दर्शाया जाता है। जिसे–

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

द्वारा दर्शाया जाता है इसको अवकलन का निर्वचन कहते हैं। अवकलज के सन्दर्भ में निम्न बातें स्मरणीय है–

1. फलन के सतत् भाग पर ही अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।
2. अवकलज स्वयं में एक फलन होता है।

उदाहरण –1. $y = x^n$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज प्राप्त कीजिये।

हल – दिया है

$$y = f(x) = x^n$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

प्रथम सिद्धान्त से x^n का अवकलज

$$= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n\, x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\, x^{n-2}\, (\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n\, x^{n-1}\Delta x + n(n-1)\, x^{n-2}\, (\Delta x)^2 + ----(\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{n\, x^{n-1} + n(n-1)\, (x^{n-2})\, \Delta x + ----(\Delta x)^{n-1}\} = n x^{n-1}$$

स्वतंत्र चर शून्योन्मुख परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तनों की गणना की इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया या अवकलन तथा अवकल प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ या $\frac{d}{dx}(y)$ को अवकलज या अवकल गुणांक कहते हैं।

Δx को धीरे–धीरे शून्योन्मुख अर्थात् शून्य के समान छोटा बनाने की क्रिया प्रक्रिया के परिणाम स्वरूप $\frac{dy}{dx}$ (जो Δx के अत्यल्प न होने की स्थिति में वस्तुतः विभिन्न परिवर्तन की दरों का औसत होता है) का एक निश्चित मान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि अवकलन फलन के मान में परिवर्तन की दर का एक निश्चित मान प्राप्त करने की प्रक्रिया है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि $\frac{dy}{dx}$ में dy तथा dx दो अलग– अलग मान न होकर $\frac{dy}{dx}$, y के x के सापेक्ष अवकलन की प्रक्रिया $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ द्वारा प्राप्त परिणाम को दर्शाता है।

2.4 सीमा की अवधारणा :–

अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को x तथा y में परिवर्तनों के भाजफल की सीमा के रूप में दर्शाया जाता है। सरलता के लिये यदि हम $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को चर q तथा Δx को चर h द्वारा दर्शाये तो $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} q$।

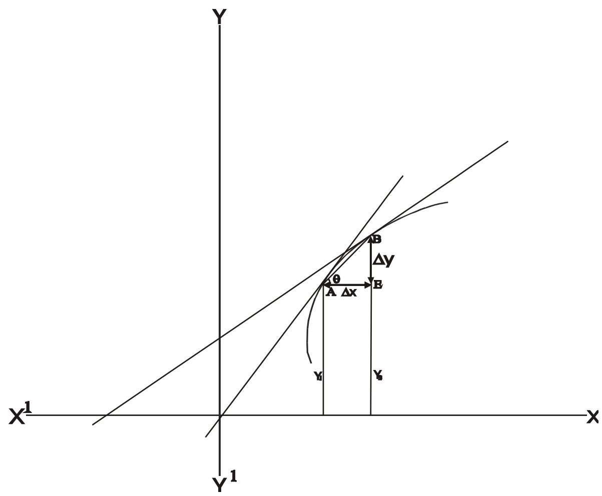
जहाँ q, h का फलन है तथा q का मान h के मान पर निर्भर है।

अतः अवकलन तथा अवकलज को पूर्ण रूप से समझने के लिए सीमा की अवधारणा को समझना आवश्यक है।

$h \to 0$ से तात्पर्य है कि चर x का मान चर x के एक विशिष्ट मान x_0 की ओर अग्रसर है यहा यह ध्यान देने योग्य है कि x के विशिष्ट मान x_0 को दो दिशाओं – बायीं दिशा अर्थात् x के मान क्रमशः बढते हुए x_0 की ओर अथवा दाहिनी दिशा से अर्थात् क्रमशः घटते हुए x_0 की ओर से अग्रसर हो सकते हैं। बायीं दिशा से x_0 की ओर अग्रसर होने की स्थिति में x का मान x_0 से छोटे होते हैं तथा $(x-x_0)$ अथवा $h < 0$ या ऋणात्मक होता है। जो अन्तर घटने के साथ शून्य की ओर अग्रसर होता है अर्थात् h का मान ऋणात्मक से शून्य की ओर अग्रसर होता है। जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^-} q$ तथा इसी प्रकार x के मान जब दाहिनी ओर से x_0 की ओर अग्रसर होते हैं तो h मान धनात्मक से 0 की ओर अग्रसर होता है जिसे हम $\lim_{\Delta x \to 0^+} q$ लिखते हैं।

2.5 अवकलन से आशय :–

1. अवकलज एक दिये हुये बिन्दु पर फलन में परिवर्तन की दर को बताता है।
2. अवकलज को $\frac{dy}{dx}$ के अतिरिक्त y अथवा $f'(x)$ या महज f' अथवा Dy या $Df(x)$ द्वारा भी दर्शाया जाता है।
3. अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाली सीमान्त मानों की अवधारणा दिये गये आर्थिक फलन के अवकलज के समतुल्य होती है अर्थात् किसी आर्थिक फलन का सीमान्त मान ज्ञात करने के लिए उस फलन का अवकलज ज्ञात किया जाता है।
4. अवकलज एवं फलन की ढाल अथवा प्रवणताः फलन के एक दिए हुए बिन्दु पर फलन का अवकलज उस बिन्दु पर फलन की ढ़ाल का मान बताता है। अर्थात् फलन की ढ़ाल फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या के समतुल्य होती है। जिसे हम निम्न रेखाचित्र के ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा समझ सकते हैं।



चित्र में फलन $f(x)$ पर दो बिन्दु $a(x_1, y_1)$ और $B(x_2,y_2)$ को मिलाने वाली रेखा x अक्ष के साथ तथा BE के साथ θ° का कोण बना रही है। रेखा AB की ढाल $\tan\theta = \frac{BE}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

यदि बिन्दु B को खिसका कर A के इतने निकट ले आये कि A और B के बीच का अन्तर शून्य जितना हो जाये अर्थात् $\Delta x \to 0$ तो AB रेखा A बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा बन जायेगी तथा इसकी ढाल $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
द्वारा मापी जायेगी।

2.6 कुछ प्रमुख फलनों के प्रथम अवकलज

1. $\frac{d}{dx} x = \frac{dx}{dx} = 1$

2. $\frac{d}{dx} x^n = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

3. $\frac{d}{dx} a.x^n = a \frac{dx^n}{dx} = a.nx^{n-1}$ (a = अचर पद)

4. $\frac{d}{dx} a = \frac{da}{dx} = 0$ (a = अचर पद)

5. $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d\,e^x}{dx} = e^x$

6. $\frac{d}{dx}\ e^{ax} = \frac{de^{ax}}{dx} = a.e^{ax}$

7. $\frac{d}{dx}\ \log x = \frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$

8. $\frac{d}{dx}\ a.\log x = a.\frac{d\log x}{dx} = \frac{a}{x}$

9. $\frac{d}{dx}\ a^x = \frac{da^x}{dx} = a^x\ \log a$

10. $\frac{d}{dx}\ \sin x = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$

11. $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$

12. $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d\tan x}{dx} = \cot x$

2.7 एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के संयोग से बनने वाले फलनों के अवकलन के नियम :–

कई बार फलन एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के योग अथवा फलनों के अन्तर या फलनों के गुणनफल या भाजफल के रूप में होते हैं। इस भाग में हम ऐसे ही फलनों के अवकलन करने की विधि से परिचित होंगे। सरलता के लिये एक ही चर के दो फलनों के विभिन्न संयोगो का अवकलन करने के नियम नीचे दिये है। दो से अधिक फलनों के संयोगो को इन्हीं नियमों की सहायता से अवकलित किया जा सकता है।

2.7.1 दो फलनों के योग अथवा अन्तर के अवकलन का नियमः

यदि $y = f(x) : y = ax^2 + bx$ यहाँ y x का एक ऐसा फलन है। जो x के दो फलनों (i) ax^2 तथा(ii) bx का योग है। यदि हम ax^2 को $g(x)$ तथा bx को $h(x)$ द्वारा चिन्हित करें तो

$$y = f\ (x) :\ \ f(x) = g\ (x) +\ h\ (x)$$

इसी प्रकार यदि

$$y\ =\ f\ \ (x)\ \ :\ \ y =\ ax^2\ -\ \ b\,x\ \ \text{तो}$$

$$y = f\ \ (x) :\ f\ (x)\ = g(x) -\ h(x)$$

इन दशाओं में y का अवकलज g तथा h के अवकलजों का तदानुसार योग अथवा अन्तर होगा। अर्थात् यदि $f\ (x) =\ g\ (x) \pm\ h\ (x)$ तो

$$\frac{d}{dx}\ \ f(x) = \frac{d}{dx}\ g\ (x) \pm \frac{d}{dx}\ h\ (x)\ \ \text{या}$$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

उपरोक्त उदाहरण में यदि $y = ax^2 + b\,x$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a\,x^2 + bx) = \frac{d}{dx}(a\,x^2) + \frac{d}{dx}(bx)$$

$$= a.\frac{d}{dx}x^2 + b\,\frac{d}{dx}x$$

$$= a.2x + b.$$

$$= 2\,a\,x + b$$

इसी प्रकार $y = ax^2 - bx$ का अवकलज $\frac{dy}{dx} = 2ax - b$ होगा।

2.7.2 दो फलनों के गुणनफल के अवकलन का नियम :–

यदि $y = f(x)$: $y = x^n . e^x$ हो तो $y\,x$ के दो फलनों, x^n {जिसे $g(x)$ मानें} तथा e^x {जिसे $h(x)$ मानें} का गुणनफल है। इस फलन का अवकलन निम्नवत् किया जाता है।

$$y = f(x) = g(x).\ h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{g(x).\ h(x)\}$$

$$= g(x).\frac{d}{dx}h(x) + h(x).\frac{d}{dx}g(x)$$

या $f'(x) = g(x).\ h'(x) + h(x).\ g'(x)$

तदानुसार $y = x^n.e^x$ का अवकलन

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n, e^x) = x^n .\frac{d}{dx}e^x + e^x\frac{d}{dx}x^n$$

$$= x^n.e^x + e^x.n.x^{n-1}$$

$e^x.x^{n-1}(x+n)$ होगा।

2.7.3 दो फलनों के भाजफल के अवकलन का नियमः

यदि $y = f(x) : y = \frac{logx}{x}$ हो तो y x के दो फलनों $\log x$ {जिसे $g(x)$ माने} तथा x {जिसे $h(x)$ माने} तो $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ होगा जिसके अवकलन का नियम निम्नवत् है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{h(x).\ \frac{d}{dx} g(x) - g(x).\frac{d}{dx} h(x)}{\{h(x)\}^2}$$

या

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{h(x).\ \ g'(x) - g(x).\ h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

तदानुसार $y = f(x) : y = \frac{\log x}{x}$ हो तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{x}\right) = \frac{x\ \frac{d}{dx}\log x - \log x\ \ \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\ \frac{1}{x} - \ \log x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ \log\ x}{x^2}$$

$$= (1 - \log \mathrm{x})\, x^{-2}$$

2.7.4 श्रंखला नियम :–

पिछले अनुभाग मे हमने फलनों के योग, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन करने के नियमों का अध्ययन किया है, इस अनुभाग में हम ऐसे जटिल फलनों के अवकलन करने की विधि का अध्ययन करेगे, जिनकों सीधे–सीधें अवकलित करना जटिल तथा कई बार सम्भव नहीं होता है। अपितु जिनको फलनों के फलनों की एक श्रंखला के रूप में समझकर सहजता से अवकलित किया जा सकता है अवकलन के इस नियम को अवकलन का श्रंखला नियम कहते हैं।

यदि $y = (x)$: $y = (3x + 2)^2$ तो $3x + 2$ को यदि हम t मान ले तो $y = t^2$ अर्थात् y t का एक फलन है जिसे $y = g(t)$ मान सकते हैं। तथा t स्वयं x का फलन है। जहाँ $t = h(x)$: $h(x) = (3x + 2)$ है।

इस प्रकार अब $y = f(x) = g\,[h(x)]$ ऐसे फलनों का अवकलन का नियम निम्न प्रकार है – $\frac{dy}{dx} = \frac{d[g\{h(x)\}]}{dh(x)} \ . \ \frac{dh(x)}{d(x)}$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx}$$

तदानुसार –

$$\frac{d}{dx}(3x+2)^2 = \frac{d}{dt} t^2 . \frac{dt}{dx}$$

$$= 2\ t\ . \frac{d(3x+2)}{dx} \quad t = 3x+2$$ रखने पर

$$= 2(3x+2).3$$

$$= 6(3x+2)$$

$$= 18x+12$$

उदाहरणः–2 – यदि $y = a^{[sinx]^2}$ का अवकलन करना हो तो हम मान लेगे $[sinx]^2 = t$ अब $y = a^t$ होगा तथा y, t के फलन के रूप में प्रस्तुत है जिसे हम $y = g(t)$: $y = a^t$ लिखेगे जहाँ t स्वयं $sinx$ का एक फलन है। जिसे $t = h(sinx)$; यदि $sinx = u$ मान लें तो $t = h(u): t = u^2$ जहाँ u स्वयं x का एक फलन है $u = k(x): k(x) = sinx$ होगा।

इस प्रकार

$$y = g(t) = g[h(u)] = g[h\{k(x)\}]$$

तथा $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ g(t)}{dt} . \frac{d\ h(u)}{du} . \frac{d\ k(x)}{dx}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{du} . \frac{du}{dx}$$

तदानुसार $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[a^{(sinx)^2}\right] = \frac{d}{dt} a^t . \frac{du^2}{du} \frac{d\ sinx}{dx}$$

या $$\frac{dy}{dx} = a^t \cdot \log a\ .\ 2u : \cos x = a^{[\sin x]^2} . \log a\ .2 \sin x\ .\ \cos x$$

[t तथा u का मान प्रतिस्थापित करने पर]

$$= a^{[\sin x]^2} . \log a\ .\ \sin 2x$$

2.8 उच्चतर कोटि के अवकलज :–

यदि किसी फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष एक बार अवकलन करते हैं तो इस प्रक्रिया को प्रथम कोटि का अवकलन तथा उससे प्राप्त अवकलज को प्रथम कोटि का अवकलज या प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ कहते हैं। यदि प्रथम कोटि के अवकलज को पुनः

अवकलित किया जाये तो द्वितीय कोटि का अवकलज $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार अवकलन प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते जाने पर उच्चतरकोटि के अवकलज $\left(\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots..\right)$ प्राप्त होते जाते हैं।

उदाहरण :–

$a_o + a_, x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ का

प्रथम अवकलज :– $\frac{dy}{dx} = a_, + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

द्वितीय अवकलज :– $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 2a_3 x + 12a_4 x^2$

तृतीय कोटि का अवकलज :– $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a_3 + 24a_4 x$

चतुर्थ कोटि का अवकलज :– $\frac{d^4y}{dx^4} = 24a_4$

पंचम कोटि का अवकलज :– $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$

दिये हुये फलन के लिये इससे उच्च काटि के अवकलज प्राप्त करना सम्भव नहीं है।

प्रत्येक अवकलज अपने से पूर्व कोटि के अवकलज फलन में परिवर्तन की दर को बताता है। हम जानते है कि प्रथम अवकलज $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ फलन में परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल अथवा फलन के सीमान्त मान को बताता है। अतः द्वितीय कोटि का अवकलज फलन में परिवर्तन की दर में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन के सीमान्त मान में होने वाले परिवर्तन की दर को बताता है। उच्चतर कोटि के अवकलजों का आशय इसी प्रकार समझा जा सकता है।

2.9 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ :–

जब किसी फलन $y = f(x)$ के लिये स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान आरम्भ में बढें किन्तु एक स्तर पर पहुँचने के बाद घटना आरम्भ हो जाये तो उस स्तर पर y का मान अपने ठीक पहले व ठीक बाद के मानों की तुलना में सर्वोच्च होता है। इसी प्रकार यदि स्वतंत्र चर (x) का मान बढने पर फलन (y) का मान एक स्तर तक घटने के बाद बढने लगे तो उस स्तर पर फलन का मान ठीक पहले व ठीक बाद की तुलना में निम्नतम् होता हैं। किन्तु एक फलन में ऐसे सर्वोच्च तथा निम्नतम मान वाले अनेक बिन्दु प्राप्त हो सकते हैं। अतः इन बिन्दुओं को सामूहिक रूप से उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहा जाता है। किसी फलन का मान बढने के बाद घटने लगे तो यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा धनात्मक परिवर्तन घटते घटते

ऋणात्मक हो जाये इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन के मान में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही स्थिति उच्चिष्ठ की होगी।

इसी प्रकार जब फलन का मान घटने के बाद बढनें लगे तब यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा ऋणात्मक परिवर्तन बढते–बढते (अर्थात् परिवर्तन का परिमाण कम हो रहा हो) धनात्मक हो जाये। इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन में परिवर्तन की दर शून्य होगी यही निम्निष्ठ की स्थिति होगी।

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ दोनों ही स्थितियों में फलन में परिवर्तन की दर $\frac{dy}{dx} = 0$ – आवश्यक शर्त।

उच्चिष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर धनात्मक से लगातार घटकर ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार ऋणात्मक प्राप्त होता है अतः उच्चिष्ठ की स्थिति में $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ – पर्याप्त शर्त।

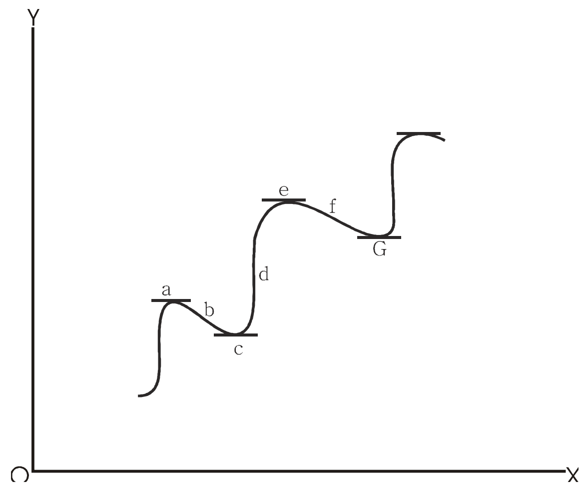
इसी प्रकार निम्निष्ठ की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर ऋणात्मक से बढते–बढते धनात्मक हो जाती है अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार धनात्मक प्राप्त होती है। अतः निम्निष्ठ की स्थिति में –

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ – पर्याप्त शर्त

<u>उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त :–</u>

	आवश्यक शर्त	पर्याप्त शर्त
उच्चिष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
निम्निष्ठ	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ को उभयनिष्ठ रूप से चरममान या अति मान भी कहते हैं।



चित्र 2.2 में बिन्दु a तथा e उच्चिष्ठ एवं c तथा g निम्निष्ठ बिन्दु है जिन पर स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष के समानान्तर है अर्थात् जिनकी ढाल शून्य $(\frac{dy}{dx}=0)$ है।

उदाहरण :– फलन में $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$ में चरम मान ज्ञात कीजिए एवं उनकी पहचान कीजिए।

हल – दिया है $y = f(x)$: $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$

चरम मान ज्ञात करने हेतु दिये हुये फलन को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20$

चरममान की आवश्यक शर्तानुसार $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$=> x^2 - 10x - 2x + 20 = 0$$

$$=> x(x-10) - 2(x-10) = 0$$

$$=> (x-2)(x-10) = 0$$

=> या $x - 2 = 0$ या $x - 10 = 0$

=> या $x = 2$ => या $x = 10$

अब चरममान हेतु पर्याप्त शर्त के लिये $\frac{dy}{dx}$ को x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 12$$

अब $x = 2$ रखने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(2) - 12 = 4 - 12 = -8 < 0$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x = 2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है।

पुनः $x = 10$ रखने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(10) - 12 = 20 - 12 = 8 > 0$

अतः पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x = 10$ पर फलन का मान निम्निष्ठ है

2.10 नति परिवर्तन बिन्दु :–

नति परिवर्तन बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर फलन की नति या वक्रीयता परिवर्तित हो रही हो। अर्थात् ऐसा बिन्दु जिस पर फलन की x – अक्ष के प्रति उत्तलता अवतलता में परिवर्तित हो रही हो अथवा फलन की अब x – अक्ष के प्रति अवतलता उत्तलता में परिवर्तित हो रही हो।

पिछले अनुभाग में हमने देखा है कि जब 'फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब ऋणात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} < 0$) तो फलन x – अक्ष के प्रति अवतल होता है। इसके विपरीत जब 'फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब धनात्मक होती है ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$) तो फलन x – अक्ष के प्रति उत्तल होता है।

अतः स्पष्ट है कि फलन की नति परिवर्तित होने के लिये यह आवश्यक है कि $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य हो ($\frac{d^2y}{dx^2}$ को धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक होने के लिये शून्य से होकर गुजरना पडेगा) उसे नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त कहते हैं अर्थात् जिस बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ वह नति परिवर्तन बिन्दु हो सकता है क्योंकि नति के परिवर्तित होने के लिए यह आवश्यक है कि अगले ही बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान शून्य न हो ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ हो जाये या $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ से बदलकर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ हो

जाये) अर्थात् नति परिवर्तन बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ में परिवर्तन की दर $(\frac{d^3y}{dx^3})$ शून्य नहीं होगी; यह धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकती है।

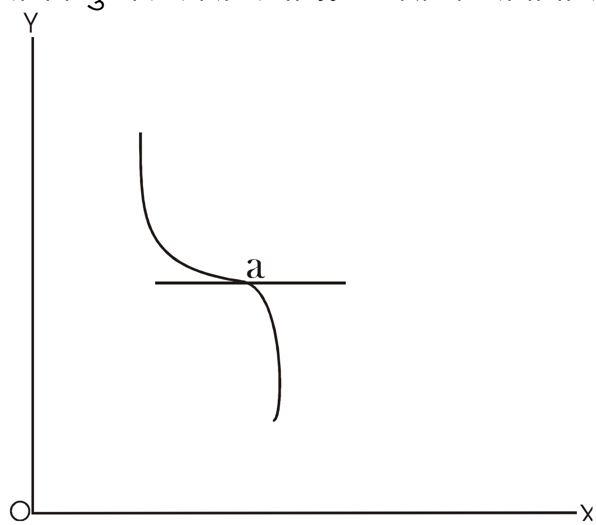
अतः नति परिवर्तन बिन्दु की पर्याप्त शर्त $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ होगी।

नति परिवर्तन बिन्दु के लिये –

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; आवश्यक शर्त
2. $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$; पर्याप्त शर्त

चित्र 2.2 में बिन्दु $b, d,$ तथा f नति परिवर्तन बिन्दु है। नति परिवर्तन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखायें स्पर्श को काटती है।

यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य नहीं होता है। तो वह बिन्दु अस्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र 2.2 के बिन्दु b, d, f किन्तु यदि किसी नति परिवर्तन बिन्दु पर प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य हो तो वह बिन्दु स्थिर नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है। देखें चित्र
2.3। इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष के समानान्तर होती है।



नति परिवर्तन बिन्दु

अस्थिर : $\frac{dy}{dx} \neq 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

स्थिर : $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

उदाहरणः–

फलन $y = f(x) : y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 40x + 120$ के लिए नति परिवर्तन बिन्दुओं को प्राप्त कीजिए।

y को x के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 40$

$\frac{dy}{dx}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x - 36$$

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त के अनुसार $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$=> \quad 12x^2 - 24x - 36 = 0$$
$$=> \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$=> \quad x^2 - 3x + x - 3 = 0$$
$$=> \quad x(x-3) + 1(x-3) = 0$$
$$=> \quad (x-3) \quad (x+1) = 0$$

=> या $x - 3 = 0$ या $x + 1 = 0$

=> $x = 3$ => $x = -1$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x - 24$$

$x = -1$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(-1) - 24 = -48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार बिन्दु $x = -1$ एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

पुनः $x = 3$ रखने पर $\frac{d^3y}{dx^3} = 24(3) - 24 = 48 \neq 0$

अतः नति परिवर्तन की पर्याप्त शर्तानुसार $x = 3$ की एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

अतः दिये गये फलन में दो बिन्दुओं, $x = -1$ तथा $x = 3$ पर नति परिवर्तन हो रहा है अतः उक्त फलन में दो नति परिवर्तन बिन्दु प्राप्त हुए है।

2.11 आर्थिक अनुप्रयोग :–

2.11.1 प्रथम अवकलज के आर्थिक अनुप्रयोग :–

सीमान्त मान :– विभिन्न आर्थिक फलनों जैसे आय फलन, लागत फलन, उपयोग फलन, उत्पादन फलन आदि का प्रथम अवकलज उनके सीमान्त मानों को बताता है। जिसे विभिन्न उदाहरणों द्वारा नीचे स्पष्ट किया गया है।

उदाहरणः– किसी फर्म का लागत फलन $c = \frac{1}{3}\, q^3 - 2.5\, q^2 + 6q + 25$ दिया हो तो 5 वीं इकाई की उत्पादन की लागत ज्ञात कीजिए। जहाँ c कुल लागत तथा q उत्पादन स्तर है।

हल– दिया $c = \frac{1}{3}\, q^3 - 2.5q^2 + 6q + 25$

5 वीं इकाई की उत्पादन लागत वस्तुतः उत्पादन स्तर 5 वीं इकाई पर फर्म की सीमान्त लागत होगी अतः सीमान्त लागत $M\,C$ के लिये लागत फलन c को q के सापेक्ष अवकलित करने पर –

$$M\,C = \frac{dc}{dq} = q^2 - 5q + 6$$

$q = 5$ रखने पर $M\,C = (5)^2 - 5(5) + 6 = 6$

अतः 5 वीं इकाई की उत्पादन लागत $= 6$ होगी।

उदाहरणः– एक उत्पादक के लिये माँग फलन $P = 7 - 0.5x$ है तो उत्पादक को तीसरी इकाई के विक्रय से कितनी आय प्राप्त होगी।

हल– तीसरी इकाई से प्राप्त आय तीसरी इकाई के विक्रय से सीमान्त आय होगी। कुल आय $R =$ विक्रय मात्रा $(x) \times$ मूल्य (p)

अब कुल आय $R = x.p$

$= x \times (7 - 0.5x)$

$= 7x - 0.5\ x^2$

सीमान्त आय $M\,R = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (7x - 0.5\ x^2) = 7 - x$

$x = 3$ रखने पर $M\,R = 7 - 3 = 4$

अतः तीसरीं इकाई से प्राप्त सीमान्त आय $= 4$ है।

उदाहरणः–3 माँग फलन $x = 15 - p - 0.2\ \ p^2$ के बिन्दु $p = 5$ पर माँग की लोच ज्ञात कीजिये।

हल– दिया है $p = 5$ इस मूल्य पर मात्रा

$$x = 15 - 5 - 0.2\ \ (5)^2$$
$$= 15 - 5 - 5 = 5$$

अब माँग की लोच

$$e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{p}{x} \quad \text{निकालने के लिये}$$

x को p के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dx}{dp} = 0 - 1 - 0.4p$$

$p = 5$ रखने पर $\frac{dx}{dp} = -1 - 0.4\,(5) = -1 - 2 = -3$

अतः $e = -\{-3 \times \frac{5}{5}\} = 3$

उदाहरणः–4 औसत आय सीमान्त आय तथा माँग की लोच के बीच सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

हल– $R = p.\ x$ जहाँ R कुल आय, $p.$ कुल मूल्य स्तर तथा x माँग स्तर है।

सीमान्त आय $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\ (p.x)$

$$= p.\ \frac{dx}{dx} + x.\ \frac{dp}{dx}$$

{चूँकि p x का एक फलन है।}

$$= p + x\ \frac{dp}{dx}$$

$$= p\ \{1 + \frac{x}{p} . \frac{dp}{dx}\}$$

$$= p\ \{1 - \frac{1}{e}\}$$

{ चूँकि $e = -\frac{dx}{dp}\ .\ \frac{x}{p}$ }

या $MR = AR\ \{1 - \frac{1}{e}\}$ चूँकि $p = AR$

2.11.2 द्वितीय एवं उच्चतर कोटि के अवकलनों के आर्थिक अनुप्रयोग– उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के आर्थिक अनुप्रयोगः–

उदाहरण–5 एक उत्पादक के लिए माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$ दिया है; अधिकतम आय प्राप्त करने के लिये उत्पादक कितनी इकाइयों का विक्रय करेगा।

हल– दिया है माँग फलन $q = 120 - 0.5p - 0.3p^2$

अब कुल आय $(R) = p.q$

$= (120 - 0.5p - 0.3p^2)\ x\ p$

$= 120p - 0.5p^2 - 0.3p^3$

आय के अधिकतमकरण हेतु आवश्यक शर्त $\frac{dR}{dp} = 0$

$=> \frac{d}{dp} \quad (120p - 0.5p^2 - 0.3p^3) = 0$

या $\quad 120 - p - 0.9p^2 = 0$

या $\quad -0.9p^2 - p + 120 = 0$

या $\quad p = \frac{+1 \pm \sqrt{.1 - 4(120 \times -0.9)}}{2 \times -0.9}$

$\quad = \frac{+1 \pm \sqrt{1+432}}{-1.8} \qquad = \frac{+1 \pm 20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{+1+20.8}{-1.8}$ या $p = \frac{1-20.8}{-1.8}$

$=> \quad p = \frac{21.8}{1.8}$ जो स्वीकार्य नहीं है क्योंकि मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः $\quad p = \frac{19.\cancel{8}}{1.\cancel{8}} = 11$

$\frac{dR}{dp}$ का पुनः p के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8p$$

$p = 11$ रखने पर $\frac{d^2p}{dp^2} = -1 - 1.8(11) = -1 - 19.8$

$= -20.8 < 0$ जो कि R के अधिकतम होने की पर्याप्त शर्त है।

अतः हम कहेगे कि $p = 11$ पर आय अधिकतम है।

उदाहरण6:– दर्शाइये कि सीमान्त लागत वक्र औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु पर उसको नीचे से काटता है।

हल– माना लागत फलन $c = f(Q)$ है।

औसत लागत फलन $(AC) = \frac{C}{Q}$

औसत लागत फलन के न्यूनतम बिन्दु होने के लिये आवश्यक शर्त $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$

$$=> \frac{d}{dQ} \quad \left(\frac{C}{Q}\right) = 0$$

$$=> \frac{Q.\ \frac{dc}{dQ} - c.\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = 0$$

$$=> Q.\frac{dc}{dQ} - c = 0\ (\because Q \neq> 0)$$

$$=> \frac{dc}{dQ} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Q}} \quad => \quad MC = AC$$

अर्थात् AC के न्यूनतम बिन्दु पर MC वक्र AC वक्र को काटता है।

औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु के लिए पयाप्त शर्त

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q.MC-C}{Q^2}\right) > 0$$

$$=> \frac{Q^2.\{\frac{d}{dQ}\ Q.MC-\frac{dc}{dQ}\} - \{(QMC-C)\times\frac{d\ Q^2}{dQ}\}}{Q^4} > 0$$

$$=> Q^2[\{Q.\frac{d}{dQ}MC + MC.\frac{dQ}{dQ}\} - MC] - \{(QMC - C)2Q\} > 0 \quad \because Q > 0$$

$$=> Q^3.\frac{d}{dQ}\ MC + \cancel{MC}Q^2 - \cancel{MC}Q^2 - 2MCQ^2 + 2QC > 0$$

$$=> Q^3\ \frac{d}{dQ}\ MC - 2Q^2\left(MC - \frac{2\cancel{Q}C}{Q^{\cancel{2}}}\right) > 0$$

$$[\because MC = AC\ and\ Q > 0]$$

$$=> \frac{d}{dQ}\ MC > 0$$

अर्थात् जब MC वक्र MR वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है तो उस समय MC वक्र का ढाल धनात्मक होता है अर्थात् MC वक्र बायें से दायें ऊपर की ओर उठ रहा होता है; अतः यह सिद्ध हुआ की MC वक्र AC वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है।

उदाहरण7:– फर्म के सन्तुलन की शर्त समझाइये।

हल – फर्म का उद्देश्य लाभ अधिकतम करना होता है।

फर्म का लाभ = आगम – कुल लागत

या $\pi = R - C$ जहाँ $\pi, R, C,$ सभी उत्पादक स्तर (Q) के फलन है। फर्म के लाभ अधिकतम करने की आवश्यक शर्त $\frac{d\pi}{dQ} = 0$

$$=> \frac{d}{dQ}(R - C) = 0$$

$$=> \frac{dR}{dQ} - \frac{d}{Q} C = 0$$

$$=> \frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ}$$

या $MR = MC$

फर्म का लाभ अधिकतम करने की पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}\left(\frac{d}{dQ}R - \frac{d}{dQ}C\right) < 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}(MR - MC) < 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}MR - \frac{d}{dQ}MC < 0$$

$$=> \frac{d}{dQ}MR < \frac{d}{dQ}MC$$

अर्थात् जब लाभ अधिकतम होता है तो सीमान्त आगम (MR) तथा सीमान्त लागत(MC) बराबर होते हैं तथा सीमान्त आगम को सीमान्त लागत वक्र नीचे से काटता है।

इसी प्रकार उपभोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त उपभोग प्रवृत्ति (MPC), बचत फलन का अवकलन करने पर सीमान्त बचत प्रवृत्ति(MPS), विनियोग फलन का अवकलन करने पर सीमान्त विनियोग प्रवृत्ति(MPI) आदि प्राप्त होते हैं।

2.11.3 उत्पादक / फर्म पर करारोपण :

फर्म पर कई प्रकार से करारोपण किया जा सकता है। इस भाग में हम उदाहरणों की सहायता से करारोपण की विभिन्न विधियों को उत्पादन, मूल्य, लाभ आदि पर पडने वाले प्रभावों का अध्ययन करेंगे।

(1) जब फर्म पर एकमुश्तकर लगा दिया जाए (अनुज्ञाशुल्क/लेवी)

यदि फर्म का माँग फलन $P = 21 - 0.6x$ तथा लागत फलन $C = x^2 + 5x + 5$ हो और सरकार फर्म पर एक मुश्त कर 10रू0 लगा दे तो संतुलन मूल्य, उत्पादन स्तर का फर्म के ऊपर क्या प्रभाव पडेगा।

करारोपण से पूर्व

फर्म का लाभ $\pi = R - C$

$$= (21 - 0.6x)x - (x^2 + 5x + 5)$$

या $\pi = -1.6x^2 + 16x - 5$

लाभ अधिकतम की आवश्यक शर्त

$\frac{d\pi}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या $x = 5$

पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = (-3.2x + 16) = -3.2 < 0$$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times 5 = 18;$ तथा

लाभ $\pi = 1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 5$

$$= -40 + 80 - 5 = 35$$

करारोपण के बाद लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + 10$

तथा $\pi = -1.6x^2 + 16x + 15$

$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 = 0$ या

$x = 5,\ P = 21 - 0.6 \times 5 = 18$

तथा लाभ $\pi = -1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 15 = 25$

अतः एकमुश्त कर लगाने पर उत्पादन स्तर तथा बाजार मूल्य अपरिवर्तित रहता है किन्तु लाभ कर की मात्रा से कम हो जाता है अर्थात् इस स्थिति में उत्पादक को पूरा कर स्वयं वहन करना पडता है।

(2) प्रति इकाई कर– माना प्रति इकाई रू01 कर लगा दिया जाये तो लागत फलन $c_t = x^2 + 5x + 5 + x \times 1 = x^2 + 6x + 5$

करोपरान्त लाभ फलन $\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - 6x - 5$

या $\pi_t = -1.6x^2 + 15x - 5$

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 15 = 0$$

या $x = \frac{150}{32} = 4.6875,$

मूल्य $P = 21 - 0.6 \times \frac{150}{32} = \frac{291}{16} = 18.19,$

लाभ $\pi = -1.6 \times (\frac{75}{16})^2 + 15 \times \left(\frac{75}{16}\right) - 5 = 30.1562$

अर्थात् उत्पादन घटेगा, मूल्य बढेगा तथा लाभ घटेगा।

ध्यान दें फर्म कर का पूरा भार उपभोक्ता पर डालने में सफल नहीं होती है कर का कितना भार उपभोक्ता पर डाला जा सकता है या माँग की लोच पर निर्भर करता है।

करारोपण से प्राप्त कर आय को अधिकतम करने वाली 'प्रति इकाई कर दर':–

माना कर अधिकतम करने वाली प्रति इकाई कर दर $= t/$इकाई

$$c_t = x^2 + 5x + 5 + tx$$

$$\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - (5 + t)x - 5$$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 => -3.2x + 16 - t =$$

$$=> x = \frac{16 - t}{3.2}$$

कर आय

$$T = t.x = \frac{16t - t^2}{3.2}$$

कर आय अधिकतम की आवश्यक शर्त

$$\frac{dT}{dt} = 0 => \frac{1}{3.2} \frac{d}{dt} [16t - t^2] = \frac{16 - 2t}{3.2} = 0$$

$$=> t = \frac{16}{2} = 8$$

2.11.4 नति परिवर्तन बिन्दु :

उदाहरण 8:– एक उत्पादक केवल एक ही आगत का प्रयोग करता है और उसका उत्पादन फलन $Q = -8 + 5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ है; जहाँ xआगत की इकाई तथा Q उत्पादन

स्तर है। आगत का वह इकाई स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर उत्पादन का प्रथम चरण अर्थात् उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा है।

हल– उत्पत्ति वृद्धि का नियम लागू होने पर सीमान्त उत्पत्ति बढती है जिसके कारण उत्पादन फलन x अक्ष के प्रति उत्तल होता है। उत्पत्ति नियम समाप्त होने पर उत्पादन फलन अपनी नति परिवर्तित करके x के प्रति अवतल हो जाता है। अतः उत्पत्ति वृद्धि का नियम नति परिवर्तन बिन्दु तक लागू रहता है। अतः दिये गये उत्पादन फलन का नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात करेगें।

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त –

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

पहले Q का एक बार x के सापेक्ष अवकलन $\frac{dQ}{dx}$ ज्ञात करेगें।

$$\frac{dQ}{dx} = 5 + 4x - x^2$$

$\frac{dQ}{dx}$ का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{d}{dx}\ \{\frac{dQ}{dx}\} = 4 - 2x$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \qquad => \ 4 - 2x = 0$$

$$=> x = 2$$

नति परिवर्तन बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त के लिये

$$\frac{d^3Q}{dx^3} \neq 0$$

अब

$$\frac{d^3Q}{dx^3} = 2 \neq 0$$

अतः आगत इकाई स्तर $x = 2$ पर उत्पादन का प्रथम चरण– उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा हैं।

2.12 सांराश–

इस अध्याय के अध्ययन के पश्चात् आप अवकलन एवं इससे जुडे तमाम नियमों यथा दो फलनों के योग, अन्तर, गुणनफल तथा भाजफल के अवकलन के नियम, श्रंखला नियम इत्यादि तथा उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ नति परिवर्तन बिन्दु आदि की अवधारणाओं से सुपरिचित हो गये है। अवकलन की समझ आपको विभिन्न आंशिक अवधारणाओं जैसे– सीमान्त मान (सीमान्त उपयोगिता, सीमान्त उत्पादकता, सीमान्त लागत, सीमान्त आय आदि), माँग की लोच,

पूर्ति की लोच आदि को समझने में सहायक होगी। फर्म के सन्तुलन का विश्लेषण उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की सहायता से किया जाता है।

2.13 शब्दावली

प्रथम अवकलज– जब किसी दिये हुये फलन को सिर्फ एक बार अवकलित किया जाये तो प्राप्त परिणाम।

सीमान्त– किसी चर की एक अकेली इकाई के द्वारा सकल परिणाम में लाया जाने वाला अन्तर।

चरममान– फलन के ऐसे बिन्दु जो अपने आस–पास के समीपवर्ती बिन्दुओं से उच्चतम तथा निम्नतम हो; इन्हें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहते हैं। एक ही फलन में एक से अधिक चरममान हो सकते हैं।

पूर्ण प्रतियोगिता– बाजार की वह दशा जिसमें एक ही वस्तु के असंख्य क्रेता एवं विक्रेता हों जिनका व्यक्तिगत रूप से बाजार की माँग पर कोई प्रभाव न पडता हो तथा जिनका बाजार में प्रवेश या निष्कासन निर्बाध हो।

2.14 अभ्यास प्रश्नः

(1) रिक्त स्थान को भरिये।

(क) प्रथम अवकलज फलन के .... को व्यक्त करता है। (उभार / ढाल)

(ख) अवकलज फलन के .... मान को दर्शाता है। (सीमान्त / औसत)

(ग) अवकलज फलन में .... को दर्शाता है। (परिवर्तन की मात्रा / परिवर्तन की दर)

(घ) बार–बार अवकलन करने से अवकलज की .... बढ़ती है। (कोटि / घात)

(ङ) उच्चिष्ठ बिन्दु फलन के .... बिन्दुओं में सर्वोच्च होता है।
(सभी / आस– पास के)

(च) नति परिवर्तन बिन्दु पर स्पर्श रेखा फलन को .... हैं।
(स्पर्श करती है / दो भागों में बाटती है)

(2) निम्न कथनों में सत्य एवं असत्य को चिह्नित कीजिये।

(क) किसी एक घातीय फलन का प्रथम कोटि का अवकलज एक अचर राशि होती है। (सत्य / असत्य)

(ख) फलन के केवल सतत् भाग पर अवकलन सम्भव हैं। (सत्य / असत्य)

(ग) नति परिवर्तन बिन्दु पर फलन की ढाल स्थिर रहती है। (सत्य / असत्य)

(घ) चरम बिन्दुओं पर फलन की स्पर्श रेखा की ढाल शून्य होती है।(सत्य / असत्य)

(ङ) किसी दिये हुये फलन में एक से अधिक चरम मान प्राप्त हो सकते हैं।
(सत्य / असत्य)

(च) दो फलनों के योगफल का अवकलज इन फलनों के अलग–2 अवकलजों के गुणनफल के बराबर होता है। (सत्य / असत्य)

2.15 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर–

(1) (क) ढाल, (ख) सीमान्त (ग) परिवर्तन की दर (घ) कोटि (ङ) आस पास के (च) दो भागों में बॉटती।

(2) (क) सत्य (ख) सत्य (ग) असत्य (घ) सत्य (ङ) सत्य
(च) असत्य।

2.16 सन्दर्भ ग्रन्थ–

1. महेश चन्द्र; मेहरोत्रा, प्रकाश नारायण; अर्थशास्त्रीय गणित; उत्तर प्रदेश हिन्दी ग्रंथ अकादमी, लखनऊ।

1. *Archibald, G.C. and Lipsey R.G.; A Mathematical treatment of Economics; Third Edition; AITBS Publishers & Distributors.*

2. *Monga, G.S.; Mathematics and Statistics for Economists.*

3. *Allen, R.G.D.: Mathematical Analysis for Economics, Macmillan & CO., Ltd.* 1938.

5. *Chiang; Alpha .Co.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW – HILL Book Company* 1984.

2.17 सहायक ग्रन्थ–

1. मिश्र, जे.पी., गणितीय अर्थशास्त्र, सहित्य भवन पब्लिकेशन।

2. *Agarwal, D.R.; Quantitative Methods: Mathematics and Statistics, Vrinda Pub.*

3. अग्रवाल, डी.आर.; गणितीय अर्थशास्त्र, वृन्दा पब्लिकेशन्स।

4. मेहता, बी.सी. एवं मदनानी, जी.एम.के; अर्थशास्त्र में प्रारम्भिक गणित; लक्ष्मीनारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।

5. *Mehta, B.C. and Madnani G.M.K; Mathematics for Economists Kitab Mahal Publication.*

6. डा0 एस.एन. लाल, डा0 एस.के. चतुर्वेदी एवं डा0 एस. के. लाल; आर्थिक विश्लेषण की तकनीकि; शिव पब्लिकेशन्स।

2.18 निबन्धात्मक प्रश्न

(1) निम्न फलनों के प्रथम कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिये।

(क) x^7 (ख) $x^{-7/2}$ (ग) $\frac{1}{x^{-\frac{5}{2}}}$ (घ) $4x^2 + \frac{2}{x}$ (ङ) $\frac{1}{x}(2x + 5x)^{3/2}$

(च) $(x^2 + 1)(x + 3x^2)$ (छ) $\frac{\sqrt{X}}{X-1}$

(2) निम्न फलनों के लिये x के वे मान ज्ञात करें जिन पर फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान प्राप्त होगे। फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान भी ज्ञात करें।

(क) $y = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x + 6$

(ख) $y = \sqrt{x(x^2 - 1)}$

(ग) $y = 4x - \frac{1}{x}$

(3) दिये हुये फलन की वक्रीयता की जाँच कीजिए एवं नति परिवर्तन बिन्दु भी ज्ञात करें। (यदि हो तो)

(क) $y = x^3 2x^2 + 30$

(ख) $y = -\frac{x^2}{5} + 24x$

(ग) $y = \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{x^2} + 24x - 12$

(4) किसी एकाधिकारी फर्म का माँग फलन $P = 20 - 0.5q$ तथा लागत फलन $c = 0.4q^3 - 1094q^2 + 32.95q$ है तो फर्म का लाभ अधिकतम करने वाला मूल्य तथा उत्पादन स्तर एवं अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

(5) यदि किसी फर्म का माँग फलन $Q = 80 - \sqrt{P}$ हो तो दर्शाइये कि सीमान्त आगम फलन औसत आगम फलन को इसके उच्चतम बिन्दु पर काटता है।

इकाई – 3 समाकलन एवं आर्थिक सिद्धान्त में इसका प्रयोग

3.1 प्रस्तावना
3.2 उद्देश्य
3.3 समाकलन अवधारणा
3.4 अनिश्चित समाकल
3.5 समाकलन के कुछ नियम
3.6 कुछ फलनों के समाकल
3.7 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन
3.8 खण्डशः समाकलन
3.9 भाग देकर सकाकलन
3.10 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन
3.11 अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग
3.12 अभ्यास के लिए प्रश्न
3.13 सारांश
3.14 शब्दावली
3.15 अभ्यास प्रश्न
3.16 अभ्यास पश्नों के उत्तर
3.17 सन्दर्भ ग्रन्थ
3.18 सहायक ग्रन्थ
3.19 निबन्धात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना

आर्थिक तथ्यों के विश्लेषण में हमें अनेंकों बार सूक्ष्म से व्यापक और व्यापक से सूक्ष्म की ओर आना पड़ता है। अत्यन्त सरल रूप में कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम ज्ञात करते हैं। अवकलन का अध्ययन करते समय हमने देखा कि कुल लागत / आगम दिये होने पर सीमान्त लागत / आगम का मान ज्ञात किया जा सकता है। समाकलन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है जिसमें यदि सीमान्त लागत/आगम दिया हो तो कुल लागत/आगम ज्ञात किया जा सकता है।

3.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन द्वारा पाठक –

- ✓ समाकलन क्या है?
- ✓ अवधारण, निर्वचन तथा मूल नियम
- ✓ विभिन्न समाकलन ज्ञात करने की विधि की जानकारी प्राप्त करेंगे।

3.3 समाकलन अवधारणा

समाकलन की अवधारणा वास्तव में इसके दो भिन्न लक्षणों और दो भिन्न प्रयोगों में निहित है। एक दृष्टि में समाकल एक निश्चित भौतिक अभिव्यक्ति का सीमांकित मूल्य है, जो गणितीय विश्लेषण में दृष्टिगोचर होता है, आरेखीय शब्दावली में एक वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। इस दृष्टिकोण से समाकल को निश्चित समाकल कहते हैं। दूसरे दृष्टिकोण से समाकलन अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है। किसी चर के फलन का अवकलज उसी चर का फलन होता है। यदि इसका व्युत्क्रम प्रात किया जाए तो दूसरा फलन ऐसा प्राप्त होता है जिनका पहला फलन अवकलज था। यदि अवकलज का अस्तित्व है तो दूसरा फलन ही समाकल होता है और इस दृष्टिकोण से समाकल को अनिश्चित समाकल कहते हैं। समाकल प्राप्त करने की प्रक्रिया को समाकलन कहते हैं। इस प्रकार समाकल की अवधारणा निश्चित तथा अनिश्चित समाकल में निहित है।

3.4 अनिश्चित समाकल

हम पहले अनिश्चित समाकल को ही लें। यदि $F(x)$, x का ऐसो फलन हो कि

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

तो $F(x)$ को x के सापेक्ष प्रति अवकलज (antiderivative) या $f(x)$ का समाकल कहते हैं और सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखते हैं।

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad (1)$$

समी0 (1) से प्रयुक्त संकेतों का अर्थ इस प्रकार है –

(i) $f(x)$ समाकलन किए जाने वाले फलन को व्यक्त करता है इसे समाकल्य (Integrand) भी कहते हैं।

(ii) dx यह व्यक्त करता है कि समाकलन x के सापेक्ष किया जा रहा है।

(iii) f समाकलन के चिन्ह को व्यक्त करता है जो अवकलन प्रक्रिया का विपरीत है।

(iv) dx, x का अवकल है अतः f(x) dx को मूल फलन F(x) का अवकल भी कहा जा सकता है। इस प्रकार –

$$dF(x)=f(x)dx$$

या $$F(x)=\int f(x)dx$$

$F(x), f(x)$ का x के सापेक्ष अनिश्चित समाकल है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि –

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$$

चूँकि अनिश्चित समाकल का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता (इसका कारण यह है कि फलन x के साथ परिवर्तित होता है) इसलिए समाकल के साथ एक स्थिरांक (Constant) C जोड़ देते हैं अर्थात् –

$$\left[\int f(x)dx\right]=F(x)+C$$

C को रखने का कारण इस प्रकार भी समझा जा सकता है।

फलन x^2, x^2+3 और x^2+6 पर विचार करें तो तीनों का अवकलज 2x ही है। इस प्रकार अवकलज समान रहते हुए भी फलन में स्थिरांक (Constant) की भिन्नता स्वाभिक है, इसलिए हम समाकल के साथ स्थिर पद जोड़ देते हैं। स्थिर पद के जोड़ने की बात को आरेखीय पद्धति से भी समझा जा सकता है लेकिन हम यहाँ उसकी जरूरत महसूस नहीं कर रहे हैं।

3.5 समाकलन के कुछ नियम

जिस प्रकार हम अवकलन को कुछ नियमों की सहायता से सुविधापूर्वक समझ लेते हैं उसी प्रकार समाकलन के भी अपने कुछ नियम होते हैं। ये नियम बहुत कुछ अवकलन के नियमों पर निर्भर करते हैं।

(1) घातांक नियम (Power Rules)

हमने देखा कि यदि

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \text{ तो}$$

$$\int f(x).dx=F(x)+C$$

मान लेते हैं $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

अतः $\frac{d}{dx}=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$ यदि $n\neq -1$

इसलिए $x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\ (n\neq -1)$

इस नियम के आधार पर

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{-x^{-2}}{2} + c$$ इत्यादि

इस आधार पर समाकलन करते समय x के घातांक में एक जोड़कर नये घातांक से भाग देते हैं और एक स्थिर पद जोड़ देते हैं।

जैसे $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

टिप्पणी

यदि फलन के साथ कोई स्थिर पद का गुणा हो तो समाकलन करने समय स्थिर पद को बाहर ले लेते हैं जैसे –

$$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx = \frac{5x^2}{2} + c$$

(b) यदि केवल स्थिरांक का समाकलन करना हो तो उसके साथ $\int 1.dx$ आ जाता है जिसका समाकल x होगा।

$$\int 1.dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^1}{1} + c$$

$$= x + c$$

इस प्रकार $16\,dx = 16.1\,dx = 16x + c$

(2) चरधातांकीय नियम (The Exponential Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

इसलिए $\int e^x dx = e^x + c,\ dx$

(ii) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$

$$\int a^x \log_e a = a^x + c$$

अथवा $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

(3) लघुगणकीय नियम (The Logarithmic Rule)

हम जानते हैं कि –

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

अतः $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$

(4) दो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकल (The Integral of a Sum or difference of two function's)

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

इस प्रकार दो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकल उन फलनों के अलग–अलग समाकल का योग अथवा अन्तर होता है।

उदाहरणः –

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिए।

(i) $x^7, x^{-6}, 16x^3, 5x^{-2}$

(ii) $x^3 + 3x^2 + 7$

(iii) $(5-2x)$

(iv) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

(v) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{17}$

(vi) $5e^x + x^{\frac{3}{2}}$

(vii) $x^3 + 5x - \frac{6}{x^2}$

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x5} + \frac{1}{3\sqrt{x^9}}$

(ix) $5^x + bx^2 + 5e^x$

(x) $ax^2 + bx + \frac{c}{\sqrt{x}}$

हल –

(i) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$ क्योंकि हम जानते हैं कि $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int x^6 dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + c = \frac{-x^5}{5} + c$$

$$\int 16x^3 dx = 16\int x^3 dx = \frac{16x^4}{4} + c = 4x^4 + c$$

$$\int 5x^{-2} dx = 5\int x^{-2} dx = \frac{5x^{-1}}{-1} + c = -5x^{-1} + c$$

$$= \frac{-5}{x} + c$$

(ii) $\int (x^3 + 3x^2 + 7) dx = \int x^3 dx + \int 7dx$

$$=\int x^3dx+3\int x^2dx+7\int 1dx$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+7x+c=\frac{x^4}{4}+x^3+7x+c$$

(iii) $\int(5-2x)\,dx=\int 5dx-2\int xdx$

$$=5x-\frac{2x^2}{2}+c=5x-x^2+c$$

(iv) $\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\int x^{\frac{-3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+c$

$$=\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c=-2x^{\frac{-1}{2}}+c$$

(v) $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{17}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{17}\int 1dx$

$$=\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{17}1dx$$

$$=-x^{-1}+\log x-\frac{1}{17}x+c$$

$$=-\frac{1}{x}+\log x-\frac{1}{17}x+c$$

(vi) $\int\left(5e^x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=5\int e^xdx+\int x^{\frac{3}{e}}dx$

$$=5e^x+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=5e^x+\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}+c$$

(vii) $\int\left(x^3+5x-6\right)\frac{dx}{x^2}$

$$=\int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{6}{x^2}\right)dx$$

$$=\int xdx+5\int\frac{1}{x}dx-6\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+5\log x+6x^{-1}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}+5\log x+\frac{6}{x}+c$$

(viii) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x^5}+\frac{1}{3\sqrt{x^9}}\right)dx$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{2}}dx+\int x^{-\frac{9}{3}}dx$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{2}x^{-2}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-\frac{1}{2x^2}+c$$

(ix) $\int(5x^x+bx^2+5e^x)\,dx$

$$=\int 5x^x dx+b\int x^2dx+5\int e^x dx$$

$$=\frac{5^x}{\log_e^5}+\frac{bx^3}{3}+5e^x+c$$

(x) $\int\left(\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=\int ax^2.x^{\frac{-1}{2}}dx+\int bx.x^{\frac{-1}{2}}dx+\int cx^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$=a\int x^{\frac{3}{2}}dx+b\int x^{\frac{1}{2}}dx+c\int cx^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}bx^{\frac{3}{2}}+2cx^{\frac{1}{2}}+c$$

3.6 कुछ फलनों के समाकल (Integral of Some Function)

(i) $\int(a+sb)^n\,dx=\frac{1}{b}(n+1)(a+bx)^{n+1}+c$

(ii) $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$

(iii) $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

(iv) $\int\tan x\,dx=-\log\cos x+c$

(v) $\int\sec x.\tan x\,dx=\sec x+c$

(vi) $\int\operatorname{cosec} x.\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$

(vii) $\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$

(viii) $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+c$

3.7 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

साधारणतया $\int f(x)dx$ को हम एक दूसरे फलन $f(u)du$ में बदल सकते हैं यदि ग को उचित रूप में u द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सके। यह विधि विशेषकर दो फलनों के गुणनफल का समाकल ज्ञात करने में उपयोगी होती है। उहाहरण द्वारा हम इसे आसानी से समझ सकते हैं।

यदि हमें $3x^2(x^3+7)dx$ का मान ज्ञात करना हो तो मान लेते हैं –

$t=x^3+7$

या $dt=3x^2dx$ (अवकल (differential) का प्रयोग करने पर) इसे हम इस रूप में भी देखें $t=x^3+7,x$ के सापेक्ष t का अवकलज

$$\frac{dt}{dx}=3x^2 \quad \text{या} \quad dt=3x^2.dx$$

t का मान मूल फलन में रखनें पर (ध्यान रहे dx को भी dt के सन्दर्भ में बदलना पड़ता है)

$\int tdt$ क्योंकि $3x^2dx=dt$

$$=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(x^2+7)^2}{2}$$

इसी प्रकार यदि $\int(2+3x)^7dx$ का मान ज्ञात करना हो तो

$2+3x=t$ मान लेते हैं।

या $3dx=dt$ या $dx=\frac{dt}{3}$

पुनः $\int t^7.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^7dt$ ए

$$\frac{1}{3}\frac{t^8}{8}+c=\frac{1}{24}t^8+c=\frac{1}{24}(2+3x)8+c$$

यदि $\int e^{ax}dx$ ज्ञात करना हो तो –

$t=ax$

$dt=adx$ या $dx=\frac{1}{adt}$

$$\int e^{ax}dx=e^t.\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int e^tdt=\frac{1}{a}e^t+c$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}+c$$

उदाहरण –

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिए –

(i) $4xe^{x^2+5}.8xe^{x^2+3}.e^{5x}$

(ii) $(3x^2+1)(x^3+x)$

(iii) $3x^5+\frac{1}{x^6}+2x$

(iv) $4x^2\sqrt{2}(x^3+3)$

हल –

(i) $\int 4xe^{x^2+5}dx$

मान लिया कि –

$t=x^2+5$

$dt=2x\,dx$

या $4xdx=2dt$ (2 से दोनों तरफ गुणा करने पर)

अतः $\int 4xe^{x^2+5}dx=\int e^t.2dt=2\int e^t dt$

$=2e^t+c=2e^{x^2+5}+c$

$\int 8xe^{x^2+3}dx$

मान लिया कि $t=x^2+3$

$dt=2xdx$

या $8xdx=4dt$

$\int 8xe^{x^2+3}dx=\int e^t 4dt=4\int e^t dt=4e^t+c$

$=4e^{x^2+3}+c$

$\int e^{5x}dx$

मान लिया कि $t=5x$

$dt=5dx$ या $dx=\frac{dt}{5}$

$\int e^{5x}dx=\int e^t.\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int e^t dt=\frac{1}{5}e^t+c$

$=\frac{1}{5}e^{5x}+c$

(ii) $\int(3x^2+1)(x^3+x)dx$

मान लिया कि $t=x^3+x$

$dt=(3x^2+1)\,dx$

$\int(3x^2+1)(x^3+x)dx$

$=\int tdt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(x^3+x)^2}{2}+c$

इस प्रश्न को एक अन्य तरीके से भी हल किया जा सकता है।

$$\int (3x^2+1)(x^3+x)\ dx$$

$$=\int (3x^5+3x^3+x^3+x)\,dx$$ आपस में गुणा करने पर –

$$=\int 3x^5dx+\int 3x^3dx+\int x^3dx+\int xdx$$

$$=\frac{3x^6}{6}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{x^6}{2}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{x^6}{2}+\frac{4x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{x^6}{2}+x^4+\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{(x^3+x)^2}{2}+c$$

(iii) $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx$

मान लिया कि –

$t=x^6+2x$

या $dt=(6x^5+2)\,dx$

$\frac{dt}{2}=(3x^5+1)\,dx$

अतः $\int \frac{3x^5+1}{x^6+2x}dx=\int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}.dt=\frac{1}{2}\log r+c$

$=\frac{1}{2}\log(x^6-2x)+c$

(iv) $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}$

मान लिया कि –

$t=x^3+3$

$dt=3x^2\ dx$

या $x^2dx=\frac{dt}{3}$

या $4x^2dx=\frac{4}{3}dt$

अतः $\int 4x^2\sqrt{(x^3+3)}\,dx$

$$=\int t^{\frac{1}{2}}.\frac{4}{3}dt=\frac{4}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{4}{3}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{4}{3}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{8}{9}.(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

निम्न को हल कीजिए –

(i) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

(ii) $\int\sqrt{e^x}\,dx$

(iii) $\int\frac{3^{3x}}{e^{3x}+6}\,dx$

(iv) $\int\frac{1}{x}\log x dx$

हल –

(i) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

मान लिया कि $t=1+x^2$

$dt = 2xdx$

या $xdx=\frac{dt}{2}$

अतः $\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$

$$\int\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}.2t^{\frac{1}{2}}+c=t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\sqrt{(1+x^2)}+c$$

(ii) $\int\sqrt{e^x dx}$

मान लिया कि –

$$=\int e^{\frac{x}{2}}dx \qquad t=\frac{x}{2}$$

$$dt = \frac{1}{2}dx \quad \text{या} \quad dx = 2dt$$

अतः $\int x^x dx = \int e^{\frac{x}{2}} dx$

$$= \int e^t.2dt = 2e^t dt$$

$$= 2e^t + c = 2e^{\frac{x}{2}} + c = 2\sqrt{e^x + c}$$

(iii) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6} dx$

मान लिया कि $t = e^{3x} + 6$

$$dt = 3e^{3x}dx \quad \text{या} \quad e^{3x}dx = \frac{dt}{3}$$

अतः $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+6} dx = \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt$

$$= \frac{1}{3}\log t + c = \frac{1}{3}\log(e^{3x}+6) + c$$

(iv) $\int \frac{1}{x}\log x dx$

$$= \int t dt \quad \text{क्योंकि} \quad t = \log x$$

$$= \frac{t^2}{2} + c \qquad dt \quad \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$$

3.8 खण्डशः समाकलन (Integration by Parts)

यह विधि काफी प्रचलित है। इसका प्रयोग दो फलनों के गुणनफल का समाकल ज्ञात करने में किया जाता है। यदि x के दो फलन u और v हों तो हम जानते हैं कि –

d(uv) = udv + vdv (differential के नियम के अनुसार)

अब udv = d (uv) - vdu

समाकलन करने पर –

$$\int udv = uv - \int vdu$$

इसी खण्ड को खण्डशः समाकलन कहते हैं।

खण्डशः समाकलन को सुविधापूर्वक निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left[\frac{du}{dx}.vdx\right]dx \qquad (i)$$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समकल

= पहला फलन × दूसरे फलन का समाकल – पहले फलन का अवकलज और दूसरे फलन के समाकल के गुणनफल का समाकल।

यहाँ समी0 (1) में u और v दोनों x के फलन हैं। यहाँ पर एक बात ध्यान देने योग्य है कि हम दोनों फलनों में से किसी को पहला और किसी को दूसरा फलन मान सकते हैं लेकिन दूसरा फलन उसे ही मानना चाहिए जिसका समाकल सुविधापूर्वक ज्ञात किया जा सके।

उदाहरणः –

(1) निम्न का मान ज्ञात कीजिए –

(i) $\int x^3 ex\, dx$ (ii) $\int \log x\, dx$ (iii) $\int \log x^3 dx$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ (v) $\int x \log x^2 dx$

हल

(i) $\int x^3 ex\, dx$

यहाँ पर अगर हमने x^3 को दूसरा फलन माना तो दूसरे हिस्से के समाकल में x की घात बढ़ती जाएगी। x^3 को पहला फलन मान लें तो खण्डशः समाकलन की विधि द्वारा –

$$\int x^3 e^x dx = x^3 \int e^x dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^3 \int e^x dx \right] dx$$

$$= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3\left[x^2 \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x^2 \int e^x dx \right\} dx \right]$$

$$= x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - \int 2x e^x dx \right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x \int e^x dx \right\} dx \right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[x e^x - \int e^x dx \right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$

$$= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

(ii) $\int \log x\, dx = \int 1.\log x\, dx$

यहाँ पर $\log x$ को पहला फलन मानना पड़ेगा। अतः

$$\int \log x\, dx = \log x \int 1.dx - \int \left[\frac{d}{dx} \log x \int \log x \int 1.dx \right] dx$$

$$= \log x.x - \int \frac{1}{x}.x.dx$$

$$= x\log x - \int 1.dx = x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

(iii) $\int \log x^3 dx = \int 1.\log x^3 dx$

$$= \log x^3 \int 1.dx - \int \left[\frac{d}{dx} \log x^3 1.dx \right] dx$$

$$= \log x^3 .x - \int \frac{3x^2}{x^3} .xdx$$

$$= x\log x^3 - 3\int 1.dx = x\log x^3 - 3x + c$$

$$= x(\log x^3 - 3) + c$$

(iv) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= (x+3)\int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx \right] dx$$

$$= (x+3).\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int 1\times\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{-2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}} .dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}(x+3)(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x+13) + c$$

(v) $\int x\log x^2 dx = \log x^2 \int xdx - \int \left[\frac{d}{dx} \log x^2 \int xdx \right] dx$

$$= \frac{x^2}{2}\log x^2 - \int \frac{1}{x^2} 2x \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x^2 - xdx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x^2 - \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\log x^2 - 1) + c$$

3.9 भाग देकर समाकलन

किसी उचित भिन्नात्मक रूप वाले फलन में यदि अंश की उच्चतम घात, हर की उच्चतम घात से अधिक हो तो अंश में हर का भाग देकर समाकल प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर $\int \frac{x+1}{x-1}$ विचार करें। यहाँ अंश और हर दोनों में x की घात समान है अतः (x+1) में (x-1) से भाग किया जा सकता है अर्थात् –

$$\frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{2}{x\text{-}1} \text{ अतः}$$

$$\int \frac{x+1}{x-1}dx = \int \left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$= \int 1dx + 2\int \frac{1}{x\text{-}1}\, dx$$

$$= x + 2\log(x\text{-}1) + c$$

3.10 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन की रीति काफी उपयोगी है। यदि उचित भिन्न में हर की घात दो या दो से अधिक हो, तथा हर का गुणनखण्ड किया जा सके तो उस उचित भिन्न में परिवर्तित करके उनका समाकलन किया जा सकता है।

आंशिक भिन्नों के बारे में वैसे तो पर्याप्त विवेचन बीजगणित में मिलेगा लेकिन संक्षेप में हमें भी समझ लेना आवश्यक है।

$$\frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots\ldots\alpha_n}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\beta_n}$$

इस तरह के भिन्न को, जिसमें m तथा n धन पूर्ण संख्याएँ हो और $\alpha_0, \alpha_1, \ldots.\beta_0, \beta_1 \ldots.$ अचर हों, परिमेय बीजीय भिन्न (rational algebraic fraction) कहते हैं। ऐसे भिन्नात्मक व्यंजक का समाकलन उसे भिन्नहींन भाग अर्थात् पहुपद (Polynomial) और आंशिक भिन्नों में तोड़कर किया जा सकता है। बीजगणित हमें बताता है कि हरेक बहुपद के एकघात (linear) और द्विघात (quadratic) गुणनखण्ड किए जा सकते हैं। यह भी हो सकता है कि कुछ गुणनखण्ड कई बार आए अतः आंशिक भिन्नों के बारे में कुछ तथ्य निम्न हैं –

(i) यदि हर में अपुनरावृत्त (non-repeated) एक घात गुणनखण्ड (x-a) के संगत आंशिक भिन्न $\frac{A}{x-\alpha}$ रूप में होता है जैसे –

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{5x}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

(ii) हर के r बार पुनरावृत्त (repeated) गुणनखण्ड (x-b) r के संगत r आंशिक भिन्न का रूप इस प्रकार होता है –

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\frac{A_3}{(x-b)^3}+ .... \frac{A_r}{(x-b)^r}$$ जैसे

$$\frac{2x}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{(x-5)^2}$$

(iii) हर के अपुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड $(ax^2 + bx + c)$ के संगत आंशिक भिन्न का रूप –

$$\frac{Ar+B}{ax^2+bx+c}$$ होता है जैसे –

$$\frac{x}{x^2+5}=\frac{Ar+B}{x^2+5}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+c}{x^2+3}$$

(iv) हर के बार पुनरावृत्त द्विघात गुणनखण्ड के संगत आंशिक भिन्न का रूप निम्न होता है –

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+ .... \frac{A_sx+B_s}{(ax^2+bx+c)^s}$$

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+ .... \frac{A_2x+B_5}{(ax^2+bx+c)^5}$$

जैसे –

$$\frac{x}{(x^2+3)^2}=\frac{Ar+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+5)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+c}{(x^2+5)}+\frac{Dx+E}{(x^2+5)^2}$$

उपर्युक्त नियमों के प्रमाण की यहाँ आवश्यकता नहीं है। हमें इसे ज्यों का त्यों मान लेना चाहिए। आंशिक भिन्नों को हल करके A, B, C, D ;k A_1, A_2, A_3 .... इत्यादि का मान ज्ञात करते हैं जिसके लिए हम दोनों पक्षों में x के समान घातों के गुणांकों को बराबर करते हैं। कुछ उदाहरण लेकर हम इसे आसानी से स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण –

(1) $\int \frac{x+5}{x^2+5x+6}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए –

हल –

हम भिन्न $\frac{x+5}{x^2+5x+6}$ पर विचार करें। हर का गुणनखण्ड करने पर

$$\frac{x+5}{x^2+5x+6}=\frac{x+5}{(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$ (नियम i पर ध्यान दें)

$$= \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

चूँकि समीकरण के दाएं पक्ष (RHS) और बाएं पक्ष (LHS) में हर बराबर है अतः –

$$x+5 = Ax+Bx+3A+2B$$

या $(X+5) = x(A+B)+(BA+2B)$

दोनों तरफ ग के गुणक को बराबर करने पर

$1 = A + B$ (i)

पुनः दोनों तरफ स्थिर पदों को बराबर करने पर

$5 = 3A + 2B$ (ii)

समी0 (i) और (ii) को यदि हल करें जिसके लिए समी0 (1) में 3 से गुणा करके इसे समी0 (ii) में से घटाया जाय तो

$5 = 3A + 2B$ (i)

$\underline{3} = 3\underline{A} \pm 3B$ (ii)

$2 = -B$ or $B = -2$

B का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$1 = A - 2$ or $A = 1 + 2 = 3$

अतः $$=\frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+3}$$

इसलिए $$\int \frac{x+5}{x^2 5x+6}.dx = 3\int \frac{1}{x+2}dx - 2\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= 3\log(x+2) - 2\log(x+3) + c$$

$$= \log\frac{(x+2)^3}{(x+3)^2} + c$$

(2) $\int \frac{1+x}{(1-x)^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$ [नियम (ii) याद करें,

$$= \frac{A(1-x)+B}{(1-x)^2}$$

अतः $1+x = A - Ax + B$

$= -Ax + A + B$

अब ग के गुणक और स्थिर पद को दोनों तरफ बराबर करने पर

$$-A = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$A + B = 1 \qquad \text{(ii)}$$

समी0 (i) तथा (ii) से

$$A = -1, B = 2$$

अतः $\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\, dx = -\int \frac{1}{1-x} dx + 2\int \frac{1}{(1-x)^2}\, dx$

यदि $t = 1 - x$

$$dt = -dx \text{ or } dx = -dt$$

$$\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\, dx = -\int \frac{1}{t}(-) + 2\int \frac{1}{t^2}\,(-dt)$$

$$= \int \frac{1}{t} dx - 2\int \frac{1}{t^2 - dt}$$

$$= \log t + 2t^{-1} + c$$

$$= \log \frac{t+2}{t+c}$$

$$= \log \frac{(1-x)+2}{1-x+c}$$

3.11 अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग

3.11.1 लागत फलन

अवकलन करते समय हमें कुल के मान द्वारा सीमान्त का मान ज्ञात होता है। चूँकि समाकलन अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है, अतः सीमान्त का समाकलन करके हमें कुल का मान ज्ञात हो सकता है –

$$MC = \frac{dc}{dx}$$

तो $c = \int MC.dx = \int \frac{dc}{dx} \times dx$ ण

नोट – अल्पकाल में कुल लागत कभी भी शून्य नहीं होती क्योंकि स्थित लागत कभी शून्य नहीं होती। दीर्घकाल में उत्पादन शून्य होने की दशा में स्थिर लागत शून्य हो सकती है।

3.11.2 आगम फलन

जिस प्रकार हम कुल लागत के अवकलन से सीमान्त लागत ज्ञात करते हैं उसी प्रकार कुल आगम के अवकलन से सीमान्त आगम ज्ञात कर सकते हैं, तथा समाकलन विधि से सीमान्त आगम के द्वारा कुल आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं। यदि, सीमान्त आगम

$(MR)=\frac{dR}{dx}$ के हैं तो, $TR=\int MR.dx=\int\frac{dR}{dx}\times dx$ तथा $x = 0$ होने की स्थिति में $TR = 0$ होगा।

(i) कुल उपभोग (TC) का मान भी सीमान्त उपभोग (MC) के समाकलन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$c=\int\frac{dc}{dy}\times dy$$

(ii) कुल उपयोगिता (TU) का मान सीमान्त उपयोगिता (MU) के समाकलन द्वारा निकाला जा सकता है

$$Tu=\int\frac{du}{dx}\times dx$$

(iii) कुल उत्पादन (TP) का मान सीमान्त उत्पादन (MP) के समाकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं –

$$TP=\int\frac{dP}{dq}\times dq$$

3.11.3 लाभ

यदि हमें किसी फर्म के अधिकतम लाभ का मान ज्ञात करना है, तबकि हमारे सीमान्त लागत एवं सीमान्त आगम फलन दिये हुए हैं – तो

अधिकतम लाभ = कुल आगम – कुल लागत

वत $\pi=TR-TC$

समाकलन द्वारा $TR=\int\frac{dR}{dx}\times dx$

$$TC=\int\frac{dc}{dx}\times dx$$

$$\pi=\int\frac{dR}{dx}\times dx-TP=\int\frac{dc}{dx}\times dx$$

3.11.4 पूंजी संचयन (Capital Formation)

पूंजी के वास्तविक स्टॉक में होने वाली वृद्धि को पूंजी संचयन कहते हैं। पूंजी संचयन की दर को $\frac{dk}{dt}$ द्वारा लिखते हैं जहाँ k समय का फलन है।

पूंजी संचयन की दर वही है जो निवल निवेष (It) किसी समय बिन्दु पर होता है।

$$\frac{dk}{dt} = I(t)$$

यदि कुल पूंजी स्टॉक का मान निकालना हो तो पूंजी संचयन की दर $\frac{dk}{dt}$ का समाकलन ज्ञात करना होगा –

$$k(t) = \int I(t)(dt) = \int \frac{dk}{dt} \times dt$$

$$k(t) = \int dk$$

3.11.5 पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त

पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त V. Pareto द्वारा निम्न आय वितरण का सिद्धान्त प्रतिपादित किया गया –

एक दिये हुये जनसंख्या के आकार ‘a’ में ‘N’ व्यक्ति जिनकी आय षाष से अधिक है –

$N = ax^{-b}$ जहा ‘b’ (population parameter) जनसंख्या प्राचल है, जिसका मान 1.5 है।

(i) कुल व्यक्ति जो ल$_1$ और ल$_2$ आय के स्तर के अन्तर्गत है –

$$= \int_{y_1}^{y_2} ax^{-b}\,dx = a\left[\frac{x^{-b}+1}{-b+1}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a}{1-b}\left[y_2^{1-b} - y_1^{1-b}\right]$$

(ii) कुल आय जो ल के स्तर से ऊपर है

जब छ त्र ंगइ तो

$$dN = a(-b)^{x-b-1}\,dx = abx^{-b-1}\,dx \text{ ए}$$

मान लें कि, $Ndx = dN = abx^{-b-1}dx$ जहाँ कछ व्यक्ति संख्या में छोटा परिवर्तन है, जबकि आय में वृद्धि हुई हो।

हमें –कछ प्राप्त होता है क्योंकि आय के स्तर में वृद्धि होने पर व्यक्ति संख्या कम होती जाती है, कुल आय का स्तर x –

$$xNdx = abx^{-b}.dx$$

कुल आय ‘y’ के स्तर के ऊपर $= \int_{y}^{\infty} x.Ndx$ होगी

$$= \int_{y}^{\infty} abx^{-b}\,dx = \frac{ab}{y-1} y^{1-b}$$

3.12 अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1. यदि $\frac{d}{dr}[f(x,)] = fx$ है, तो इसका समाकलन क्या होगा?

   (i) f(x) (ii) f(x)+c (iii) f(x)+c (iv) इनमें से कोई नहीं

2. निम्न में से कौन समाकलन का नियम है–

   (i) घातीय नियम (ii) लघुगणकीय नियम (iii) चरघातांकी नियम (iv) उपर्युक्त सभी

3. चूँकि अनिश्चित समाकलन का कोई निश्चित अंकात्मक मान नहीं होता, इसलिए समाकल के साथ एक .... जोड़ देते हैं।

   (i) चर (ii) स्थिरांक (iii) घातांक (iv) लघुगणक

4. (x-1) (x-2) का समाकलन क्या होगा?

   (i) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^3}{2} + 2x + c$ (ii) $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + c$

   (iii) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + 6x + c$ (iv) $x^3 - 3x^2 + 2x + c$

5. $\int_1^4 \sqrt{x dr}$ का समाकलन होगा

   (i) $\frac{3}{14}$ (ii) $\frac{21}{2}$ (iii) $\frac{16}{3}$ (iv) $\frac{14}{3}$

उत्तर : 1. (iii), 2. (iv), 3. (ii), 4. (i), 5. (iv)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित कीजिए–

1. अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया को समाकलन कहते हैं।
2. $\int_a^a f(x)dx$ को निश्चित समाकलन कहते हैं जिसमें a तथा b क्रमशः उच्च एवं निम्न सीमाएँ कहलाती हैं।
3. $\int_a^a f(x)dx = 0,$ सही है।
4. यदि वक्र y = f (x) अन्तराल (a, b) के लिए धनात्मक है और वक्र x अक्ष से ऊपर है तो $\int_a^b f(x)dx$ धनात्मक होगा।
5. अर्थशास्त्र में कुल लागत फलन का समाकलन करने पर सीमान्त लागत फलन ज्ञात किया जाता है।

उत्तर : 1. (T), 2. (F), 3. (T), 4. (T), 5. (F)

(1) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^1 x(x^2+6)\,dx$ (ii) $\int_2^3 (e^{2x}+e^x)\,dx$

(iii) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ (iv) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(v) $\int_2^3 xe^x\ dx$ (vi) $\int_a^b \log\ xdx$

(vii) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (viii) $\int_4^5 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6-\frac{c^4}{2}+e^3-e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right)-a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) $\log 2$ (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

Ans: (i) $\frac{13}{4}$ (ii) $e^6-\frac{c^4}{2}+e^3-e^2$

(iii) $\frac{14}{3}$ (iv) 2

(v) $e^2(2e-1)$ (vi) $b\log\left(\frac{b}{e}\right)-a\log\left(\frac{a}{e}\right)$

(vii) $\log 2$ (viii) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{26}{17}\right)$

(2) निम्न वक्रों के भीतर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(i) $v=x^4,\quad 1\le x\le 4$ $\left[\text{Ans. }\frac{31}{5}\right]$

(ii) $v=x^2+4x+5\quad -2\le x\le 1$ [Ans.12]

(iii) $v=\frac{x^2}{2}+1\quad 0\le x\le 4$ $\left[\text{Ans. }\frac{44}{3}\right]$

(iv) $y=9-x^2\quad 1\le x\le x$ $\left[\text{Ans. }\frac{28}{3}\right]$

(3) **y** का मान बताइए यदि –

(i) $\frac{dy}{dx}=3e^{3x}$ [Ans. $y=e^3x+c$]

(ii) $\frac{dy}{dx}=5x^2+2$ $\left[\text{Ans. } y=\frac{5x^3}{3}+2x+c\right]$

(iii) $\frac{dy}{dx} = x^2$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{x^3}{3} + c\right]$

(iv) $\frac{dy}{dx} = (a+bx)^n$ $\left[\text{Ans. } y = \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1} + c\right]$

3.13 सारांश

- समाकलन, अवकलन की उल्टी प्रक्रिया है।
- कमाकलन द्वारा सीमान्त लागत/आगम दिये होने पर कुल लागत/आगम का मान ज्ञात कर सकते हैं।
- समाकलन की अवधारणा निश्चित एवं अनिश्चित समाकल में समाहित है।
- समाकलन की प्रमुख विधियाँ हैं – (1) प्रतिस्थापन द्वारा समाकल, (2) खण्ड – समाकलन, (3) आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन, (4) भाग देकर समाकलन।
- समाकलन के चार प्रमुख नियम होते हैं – (1) घातांक नियम (2) चरघातांकीय नियम, (3) लघुगणकीय नियम] (4) वो फलनों के योग अथवा अन्तर का समाकलन।

इकाई–4 अनुकूलतम समीकरण एवं आव्यूह (मैट्रिक्स) का परिचय

4.1 प्रस्तावना–

प्रस्तुत इकाई में अनुकूलतम समीकरणों के माध्यम से उस सर्वोतम क्रिया का निर्धारण करने का प्रयास किया जायेगा जिससे वांछित उद्देश्य की प्राप्ति हो सके।अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई अनुकूलतम समस्याओं को हल करने का एक प्रयास किया जायेगा। विभिनन अनुकूलतम तकनीकों का अवलोकन करके ऐसी समस्याओं का हल निकाला जायेगा जिससे उत्पादन एवं उपभोक्ता के उद्देश्य की पूर्ति हो सकें।

प्रस्तुत इकाई में आव्यूह के क्रम एवं उपयोगिता का भी अध्ययन किया गया है। इसके अध्ययन से सारणिक के अध्ययन में सरलता प्राप्त होगी जो कि अगले इकाई में बताई गयी है।

इस इकाई के अध्ययन से आव्यूह के रूप एवं उसके गुणन विधि का समझा जा सकता है। आव्यूह संख्याएँ वर्गाकार अथवा आयताकार कोष्टको [ ] में लिखी जाती है। आव्यूह को बड़े अक्षर A, B, C एवं उसके अवयव को लघु अक्षर a, b, c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

4.2 उद्देश्य–

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद हम यह जान सकेंगे कि–

- ✓ अनुकूलतम समीकरण क्या होते हैं।
- ✓ विभिन्न अनुकूलतम तकनीक जिनके सहायता से आर्थिक समस्याओं को हल किया जा सकता है।
- ✓ अवकलनों का अनुकूलतम समस्याओं में प्रयोग।
- ✓ अधिकतमकरण एवं न्यूनतमीकरण जैसे आर्थिक समस्याओं के लिये अनुकूलतम समीकरण का प्रयोग।
- ✓ आव्यूह का क्रम समझा जा सकेगा।
- ✓ सारणिक एवं आव्यूह में अन्तर को स्पष्ट किया जा सकेगा।
- ✓ आव्यूह के प्रकार एवं आव्यूह बीजगणित की मौलिक जानकारी प्राप्त हो सकेगी।
- ✓ आव्यूह की कोटि को सरलता से समझा जा सकेगा।

4.3 मुख्य भाग

आदर्शवादी आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारिण करता है जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सके। इसका तात्पर्य है कि ऐसी क्रिया जो एक उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिये एक कीमत–उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सकें। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती है।

अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है।

समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिन्हित करना है जिससे, निबाधों को ध्यान में रखते हुये,एक दिये हुये उद्देश्य फलन को प्राप्त किया जा सके और फिर उन साघनों में से उस वैकल्पिक को चयन करना जिससे कि उद्देश्य की प्राप्ति सबसे कुशलतम तरीके से हो सके,

गणितीय रूप में इस समस्या को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है।

अनुकुलतम कीजिये (optimÁe) $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ ---------(A)

Subject to $b_j(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_j \ldots\ldots j = 1, 2, \ldots. M$ ------(B)

समी० (A) उद्देश्य फलन है जबकि समी० (B) निबाधों के सेट को व्यक्त करता है। समस्या की प्रकृति को देखते हुये, अनुकूलतम का तात्पर्य उद्देश्य/फलन को अधिकतम करना या न्यूनतम करने से होता है। समी० (B) में चिन्ह इस बात को इंगित करते हैं कि हर निबाध समिका अथवा असमिका के सम्बन्ध का रू॰ ले सकता है।

4.3.1 अनुकूलतम करने में जटिल घटक –

बहुत सारे ऐसे घटक होते हैं जो अनुकूलतम समस्याओं को जटिल बना देते हैं और हल करने में मुश्किल पैदा करते हैं। ऐसा ही एक जटिल घटक है समस्या में बहु निर्णायक चर का विद्यमान होना। एक उत्पादक फर्म के लिये लाभ अधिकतम उत्पादन का निर्धारिण सरल ढंग से किया जा सकता है। परन्तु एक बड़ी फर्म अक्सर बड़ी तादाद में विभिन्न उत्पादों को उत्पाद करती है। फल स्वरू॰ के लिये ऐसी फर्म का लाभ अधिकतमकरण समस्या हर उत्पादन के लिये असंख्य उत्पादक निर्णयों की जरूरत होती हैं ।

दूसरा घटक जो ऐसी समस्या को हल करने में मुश्किल पैदा करती है वो है – निर्णायक चर एवं सम्बन्धित नतीजों के बीच जटिल प्रकृति का सम्बन्ध। उदाहरण के लिये – लोक नीति निर्णयों में ये निर्धारण करना अत्यन्त कठिन हो जाता है कि एक दिये हुये व्यय और बड़ी हुयी आय, रोजगार और उत्पादकता लाभ के बीच सम्बन्ध कैसे निर्धारण किया जाय। चरों के बीच कोई सरल सम्बन्ध नहीं विद्यमान होता।

तीसरा जटिल घटक है निर्णायक चर में एक या एक से अधिक जटिल निबाधों का विद्यमान होना। उदाहरणता वस्तुता हर संगठन में ऐसे सीमीत साधनो के निबाध होते हैं जो निर्धायक चर पर थोपे जाते हैं जैसे पूँजी, आदि जिन पर उनका वश होता है। इन निबाधों को निर्णायक समस्या में समाहित करना चाहिये नहीं ंतो अनुकूलतम तकनीक ऐसा हल प्रस्तुत करेगा जो व्यावहारिक दृष्टि से अस्वीकृति होगा।

अन्य जटिल घटक है अनिश्चितता का होना। प्रस्तुत अध्ययन में हम निर्णय करने के विश्लेषण को निश्चिता तक ही सीमित करेंगे।

4.3.2 निबाध एवं अबाध अनुकूलतम

अबाध अनुकूलतम तकनीक के अन्तर्गत समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता और अवकलन के माध्यम से उसका विश्लेषण किया जाता है। दूसरा अत्यन्त सरल रूप जिससे कि अनुकूलतम समस्या का निवारण किया जा सकता है, वो है समस्या के प्रतिबन्धों को बराबरी अथवा समिका समबन्ध द्वारा स्पष्ट करना।

निबाध अनुकूलतम समस्या को लेगरेंजियन गुणक (lagrangian Mulliplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अक्सर हालांकि, आर्थिक निर्णय चरों में निबाध एक असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं।

रैखिक प्रायोजन समस्या उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल करने में प्रयुक्त होती है इसके अन्तर्गत, दोनों ही उद्देश्य एवं निबाध सम्बन्धों को निर्णय चेरों के रेखीय सम्बन्ध द्वारा किया जाता है। इसके अलावा द्विघाती प्रायोजन समस्या भी होती है जहाँ उद्देश्य फलन निर्णय चरों का द्विघाती रूप ले लेती है।

4.4 अवकलन

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेखा चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते हैं या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन के महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है।

4.4.1 सीमान्त विश्लेषण एवं अवकलन सम्बन्ध

मान लिजिये कि एक उद्देश्य फलन है, Y को अनुकूलतम करना जिसे बीजगणितीय रूप में निर्णायक चर X के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$Y = f(X)$$

सीमान्त लाभ – उत्पादन की एक अतिरिक्त इकाई में परिवर्तन करने से लाभ में होने वाला परिवर्तन सीमान्त लाभ होता है। सामान्य रूप में किसी चर Y के सीमान्त मान को जो अन्य चर X का फलन है। उसे X इकाई में एक इकाई परिवर्तन करने पर Y में होने वाले परिवर्तन के द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

Y, (M_y) के सीमान्त मान को Y, (Δy) में होने वाले परिवर्तन के द्वारा निकाला जा सकता है। जो X, (Δx) में दिये गये परिवर्तन के फलस्वरूप होता है।

$$M_y = \Delta y / \Delta x$$

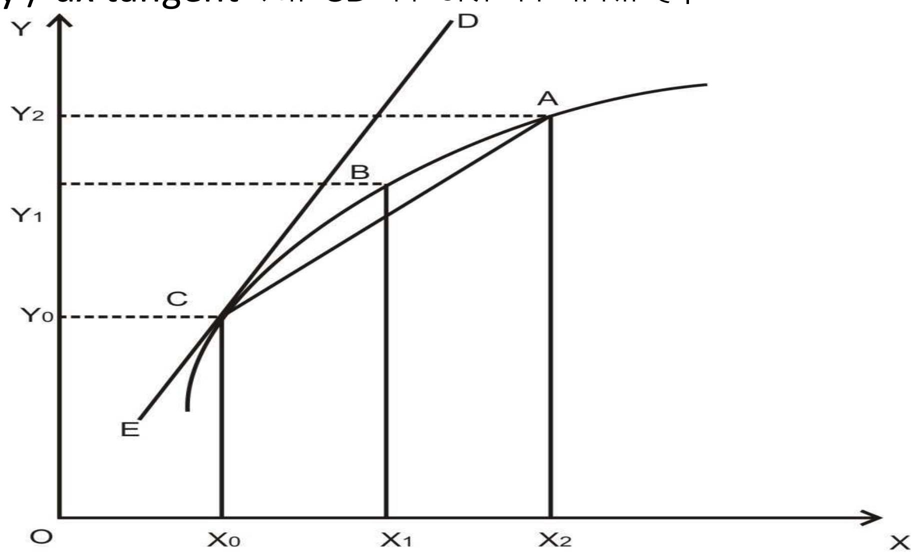
इस दिये गये व्यक्तत्व की गणना करने पर X के परिवर्तन के आकार के परिवर्तन पर निर्भर करते हुए Y के सीमान्त मान के विभिन्न मान प्राप्त होते हैं।

यदि Δx एक सतत चर जो विभिन्न fractional मान ले सकता है, तो M_y की गणना करते समय हम यह मान सकते हैं कि Δx शून्य तक जा सकता है। अवधारणा में इस विचार को अवकलन कहा जाता है।

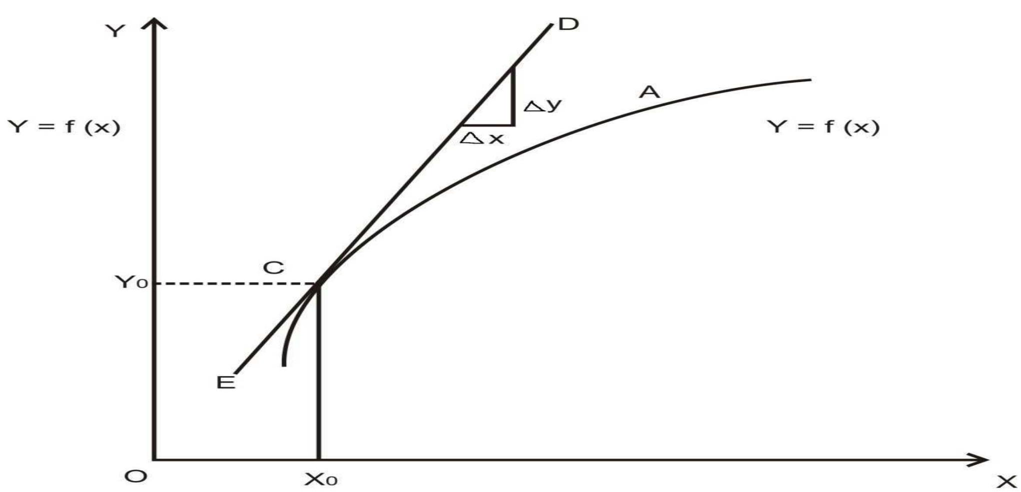
फलन का पहला अवकलज को परिभाषित करते हुये $\Delta y / \Delta x$ के अनुपात को सीमित करना है जैसे Δx शून्य की ओर बढता है।

$$dy / dx = \text{limit } \Delta y / \Delta x$$
$$\Delta x \to 0$$

ग्राफीकीय विधि से किसी भी फलन का पहला अवकलन उस दिये गये वक्र के ढाल के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। मान लीजिये, हम बिन्दु X_o पर $Y = f(x)$ का अवकलन निकालना चाहते है। dy / dx tangent रेखा CD की ढाल को मापती है।



Marginal Charge in Y -f (x) as
∆ x approaches o



Measurement of the slope Y = f (x)
at pt.C

उदाहरण के लिये ,यदि Y की सीमान्त माप की गणना एक सूक्ष्म अंतराल X_o से X_1 से की जाय तो रेखा C से B की ढाल बराबर होगी –

$$M''_y = \Delta y / \Delta x$$

$$= Y_1 - Y_0 / X_1 - X_0$$

यह ECD tangent रेखा की ढाल को व्यक्त करने की एक बेहतर गणना करती है। अतः हम देखते है कि ΔX का मान जितना कम होगा, वक्र की ढाल का अधिक बेहतर

प्रस्तुतीकरण हो सकेगा। जब $\Delta X \to 0$ है तो C बिन्दु पर $Y = f(X)$ वक्र का ढाल पता किया जा सकता है।

4.5 अवकलन की प्रक्रिया

अवकलन की प्रक्रिया – अर्थात् फलन के अवकलन को ज्ञात करना $\Delta Y/\Delta X$ के अनुपात के सीमित मान को निर्धारित करने में निहित है। एक फलन के अवकलन को ज्ञात करने के लिये, बीज गणित प्रक्रिया के माध्यम से इसको प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रक्रिया के विशिष्टि नियमों को नीचे प्रस्तुत किया जा रहा है।

मान लीजिये लाभ को उत्पादन मात्रा के फलन में रूप ही में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\pi = -40 + 140Q - 10Q^2 \qquad \text{------ 1}$$

$d\pi/dQ$ को ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम सीमान्त लाभ $\Delta\pi/\Delta Q$ को ज्ञात करेंगे जैसे $\Delta Q \to 0$

मान लीजिये लाभ का नया स्तर $(\pi + \Delta\pi)$ पर व्यक्त करने पर उत्पादन में वृद्धि $(Q + \Delta Q)$ समी० 1 से यह ज्ञात है कि

$$(\pi + \Delta\pi) = -40 + 140(Q + \Delta Q) - 10(Q + \Delta Q)^2 \qquad \text{----- 2}$$

इस समीकरण को विस्तार करने पर और फिर बीजगणित द्वारा हल करने पर

$$(\pi + \Delta\pi) == -40 + 140Q + 140\Delta Q - 10[Q^2 + 2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2]$$

$$== -40 + 140Q - 10Q^2 + 140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2 \text{-------3}$$

समी० 3 को समी० 1 से हटाने पर

$$\Delta\pi = 140\,\Delta Q - 20Q\,\Delta Q - 10\,(\Delta Q)^2$$

सीमान्त लाभ अनुपात $\Delta\pi/\Delta Q$ बनाने पर –

$$\Delta\pi/\Delta Q = [140\Delta Q - 20Q\Delta Q - 10(\Delta Q)^2]/\Delta Q$$

$$= 140 - 20Q - 10\,\Delta Q \qquad \text{-------- 4}$$

समी० 4 की सीमा लेते हुये जैसे जैसे Q शून्य की ओर अग्रसर होता है, लाभ फलन को अवकलन के रूप ही में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

$$d\pi/dQ = \lim_{\Delta Q \to 0} [140 - 20Q - 10\Delta Q]$$

$$= 140 - 2\,Q \qquad \text{---------5}$$

यदि हमें Q के किसी निश्चित मान पर लाभ फलन का अवकलन निकालना हो तो समी० 5 को इस मान के लिये व्याख्या कर सकते हैं। यदि Q = 3 units पर लाभ फलन की ढाल अर्थात् सीमान्त लाभ कितना होगा तो Q = 3 को समी० 5 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\partial\pi/\partial Q = 140 - 20\,(3) = \text{Rs } 80 \text{ प्रति इकाई}$$

4.5.1 अवकलन के नियम

सामान्य नियमों की एक श्रृंखला, उपर्युक्त प्रक्रिया से व्युत्पन्न विभिन्न प्रकार के फलनों को अवकलन करने के लिए विद्यमान है:

स्थिर फलन – स्थिर फलन को इस रूप ही में व्यक्त कर सकते हैं।

$$Y = a$$

जहाँ a स्थिरांक है (अर्थात् Y, X से स्वतन्त्र है)। स्थिर फलन का अवकलन शून्य के बराबर होता है

$$dy / dy = 0$$

उदाहरण के लिये, स्थिर फलन :

$$Y = 4$$

को ग्राफ A में दिखाया गया है। क्योंकि यह स्थिर फलन अक्ष की सानान्तर रेखा है जिसकी ढाल शून्य है। अतः इसका अवकलन (dy/dx)शून्य के बराबर है।

घात फलन – घात फलन का रूप ही है।

$$Y = aX^b$$

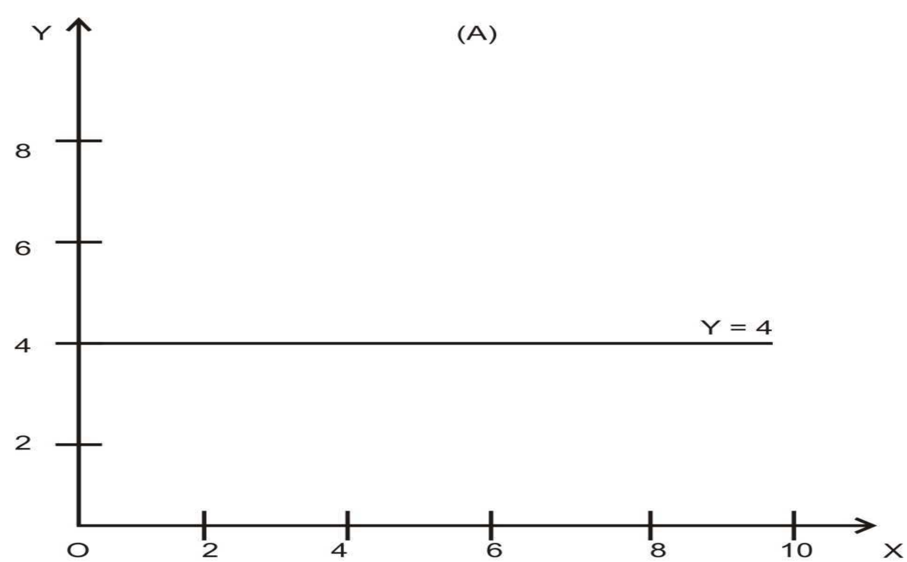
जहाँ a & b स्थिरांक है। घात फलन का अवकलन b गुणा a है गुणा x पर घात (b-1)

$$dy / dy = b.a.x^{b-1}$$

उदाहरण Y = 2x को ग्राफ B में प्रस्तुत किया गया है। फलन की ढाल = 2 और यह x के सभी मान के लिय स्थिर है। Power फलन को लागू करने पर जहाँ a = 2 & b = 1

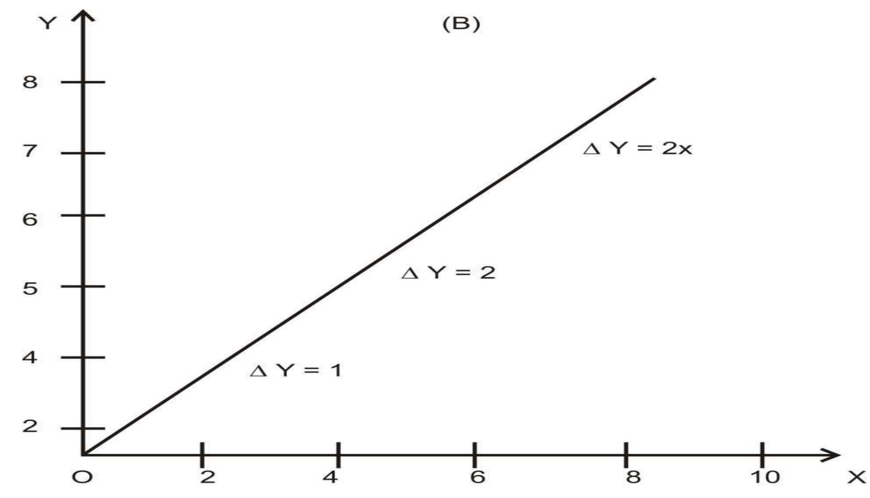
$$= dy / dy = 1.2.x^{1-1} = 2x^0$$

$$= 2$$

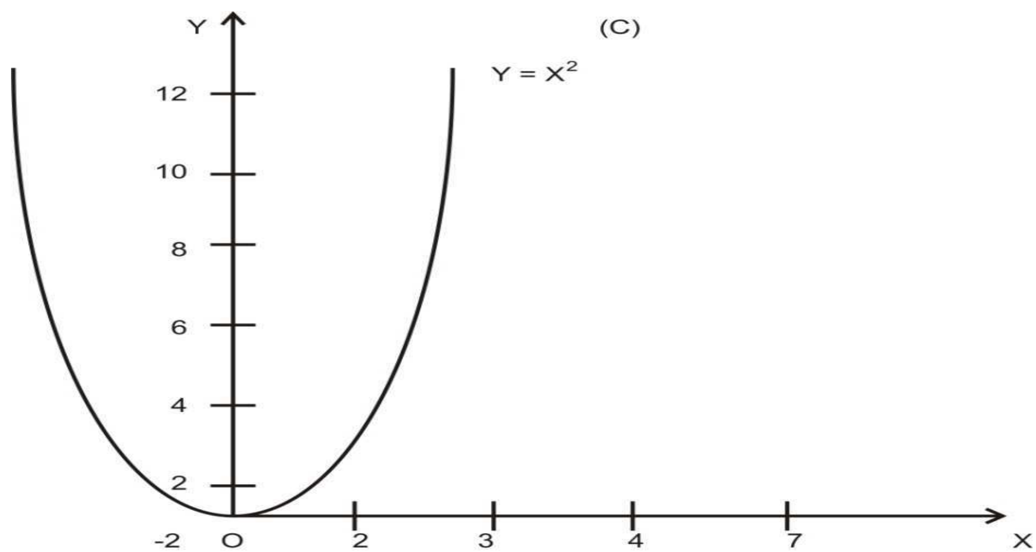


स्थिर फलन

Constant function



Linear Function
(रेखीय फलन)



Quadrate Function
(द्विघाती फलन)

यह ध्यान देने योग्य है कि किसी चर पर शून्य हमेशा 0 के बराबर होती है।

अब मान लीजिए $Y = X^2$ (चित्र C)

Power फलन नियम को लागू करने पर (a = 1, b= 2)

$dy / dx = 2.\ 1.X^{2-1}$

$= 2\ X$

यह देखा जा सकता है कि अवकलन ऋणात्मक होता है जब X<O, O जब X = O और घनात्मक जब X > O

<u>फलनों का योगफल का अवकलन</u>

मान लीजिए Y = f (x) दो यह उससे अधिक भिन्न फलनों के जोड़ को व्यक्त करती है।

$f_1 (x), f_2 (x)$

$Y = f_1 (x) + f_2 (x)$

Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करने के लिये हर फलन को अवकलन करने के पश्चात परिणाम को जोड़ देना है।

$dy / dx = (df_1 (x) / dx) + (df_2 (x)/dx)$

इस परिणाम को कई भिन्न फलनों के जोड़ के अवकलन को ज्ञात करने के प्रयुक्त किया जा सकता है।

<u>दो फलनों का गुणन का अवकलन</u>

मान लीजिये कि चर Y दो अलग अलग फलनों $f_1 (x)$ और $f_2 (x)$ का गुणन है।

दो फलनों के गुणनफल का अवकलन, प्रथम फलन X द्वितीय फलन का अवकलन + द्वितीय फलन X प्रथम फलन का अवकलन के बराबर होता है।

$dy / dx = f_1 (x), df_2 (x) / dx + f_2 (x), df_1 (x) / dx$

उदाहरण –अवकलन कीजिये

$Y = X^2 (2x – 3)$

$dy / dx = x^2. D / dx [(2x – 3)] + (2x – 3). D / dx (x^2)$

$= X^2 (2 – 0) + (2x – 3). (2x)$

$= 2x^2 + 4x^2 – 6x$

$= 6x^2 – 6x$

$= 6x (x – 1)$

<u>फलन के भागफल का अवकलन</u> –

दो फलनों के भागफल का अवकलन निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है –

$Y = f_1 (x) / f_2 (x)$

$dy / dx = [\{f_2 (x). (df_1 (x) / dx)] – [f_1 (x). (df_2 (x) / dx) \}]\ /\ [f_2 (x)]^2$

उदाहरण

$Y = 10x^2 / 5x\text{-}1$

$dy / dx =[(5x – 1). 20x] – [10x^2. 5 / (5x\text{-}1)^2] /(5x\text{-}1)^2$

$=(100x^2 – 20x – 50x^2) /(5x\text{-}1)^2$

$= 50x^2 – 20x / (5x – 1)^2$

$= 10 x (5x – 2) / (5x\text{-}1)^2$

<u>फलन के फलन का अवकलन (श्रृंखला नियम)</u>

मान लीजिये Y, Z चर का फलन है, $Y = f_1 (Z)$ और Z, X चर का फलन है ,$Z = f_2 (X)$ तब Y का अवकलन X के सापेक्ष में निर्धारित करने के लिये सर्वप्रथम $dy / Ø$ और $Ø / dx$ ज्ञात करें और फिर दोनों को गुणन करें।

$$dy / dx = (dy / dx) . (Ø / dx)$$
$$= (df_1 (Z) / Ø) . (df_2 (X) / dx)$$

उदाहरण Y का अवकलन X के सापेक्ष में ज्ञात करें

जब $Y = 10z - 2z^2 - 3$

जहाँ Z का सम्बन्ध X से इस प्रकार से है

$$Z = 2x^2 - 1$$

हल – $dy / Ø = 10 - 4z$

$$dy / dx = 4x$$

तब $dy /dx = (10-4z) . 4x$

X को Z के सीान के प्रतिस्थापित करने पर

$$dy / dx= [10 - 4 (2x^2 - 1)] .4x$$
$$= (10 - 8x^2 + 4) . 4x$$
$$= 40x - 32x^3 + 16x$$
$$= 56x - 32x^3$$
$$= 8x (7 - 4x^2)$$

4.6 अनुकूलतम समस्याओं में अवकलन का प्रयोग

अर्थशास्त्र में अधिकतम अब न्यूनतम समस्याओं के प्रयोग अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिये अवकलनों का प्रायः प्रयोग किया जाता है।

4.6.1 अधिकतमकरण समस्या

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये (उदाहरण के लिये अधिकतम लाभ) एक आवश्यक शर्त (किन्तु पूँजी पर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो, इसी शर्त को अवकलन के माध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $Y = f(x)$ की अधिकतम मान को ज्ञात करने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर dy/dx अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीज गणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

4.6.2 प्रथम क्रम शर्त : लाभ अधिकतमकरण

लाभ फलन को प्रयोग करते हुये

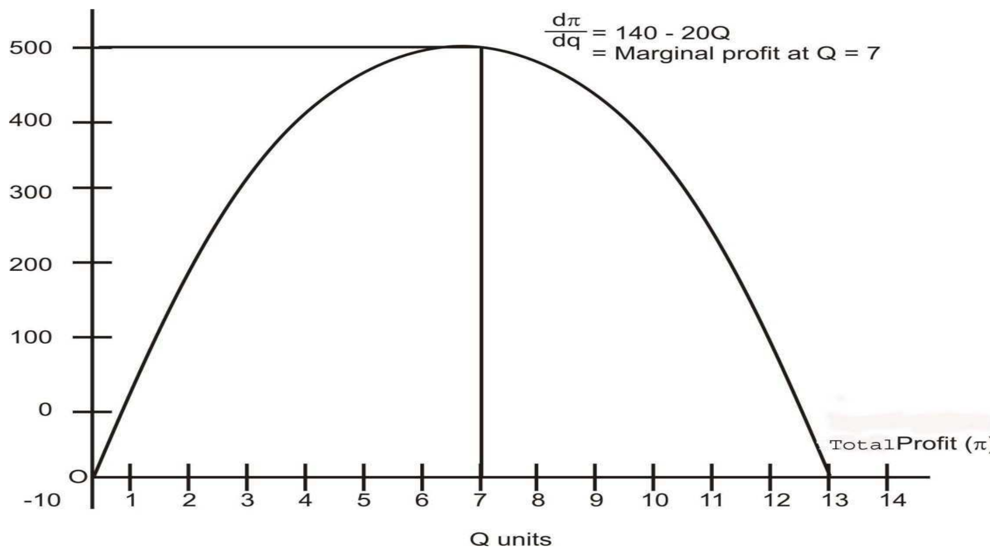
$$\pi = - 40 + 140Q -+ 10Q^2$$

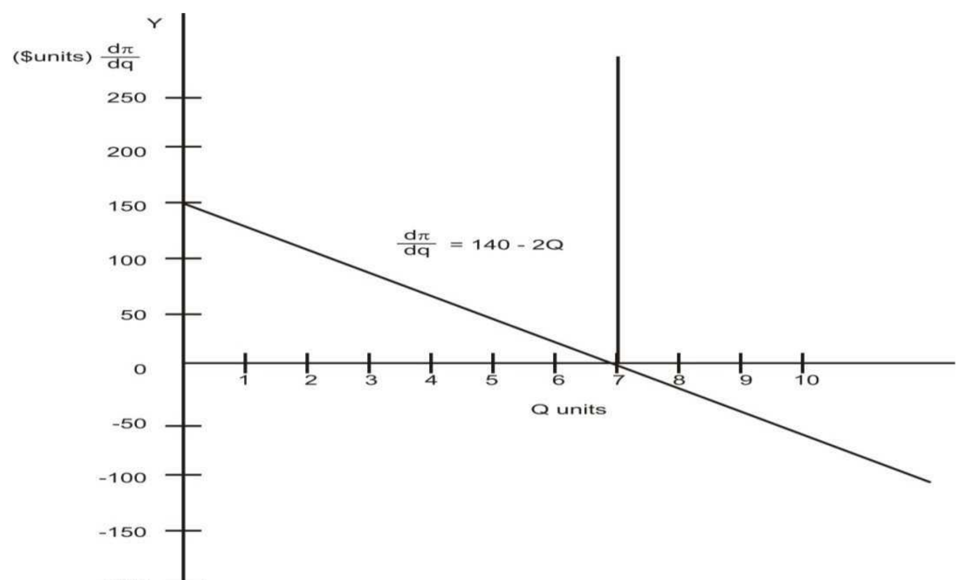
फलन का प्रथम अवकलन शून्य रख कर निकालने पर

$$d\pi/dQ = 140 - 20Q$$
$$O = 140 = 20Q$$

इस समी० को के लिये हल करने पर इकाई प्राप्त होता है जो लाभ अधिकतम उत्पादन स्तर है।

यह लाभ और प्रथम अवकलन फलन अनुकूलतम हल है चित्र 4 में हम देख सकते हैं कि लाभ अधिकतम उस बिन्दु पर होता है जहाँ फलन न बढ़ रहा है न घट रहा है। दूसरे शब्दों में, जहाँ ढाल (या प्रथम अवकलन) शून्य के बराबर होती है।





4.6.3 द्वितीय अवकलन एवं द्वितीय क्रम शर्त

फलन के अवकलन को शून्य के बराबर कर देने से और प्राप्त समी० को निर्णायक चर के मान का हल निकालने से यह साक्ष्य नहीं हो जाता कि वह बिन्दु ही प्राप्त होगा जिस पर

फलन एक अधिकत माने लेता है। एक U आकृति फलन की ढाल निम्नतम बिन्दु पर भी शून्य के बराबर होती है और फलन अपना न्यूनतम मान इस दिये पर बिन्दु पर प्राप्त करता है। दूसरे शब्दों में, अवकलन को शून्य पर तय करना फलन अधिकतम मान निकालने के लिये एक आवश्यक शर्त तो अवश्य है पर पजीर्याप्त नहीं। दूसरी शर्त, जिसे द्वितीय क्रम शर्त कि प्रथम क्रम शर्त से प्राप्त किया गया बिन्दु, बीजगणितीय फलन का अधिकतम बिन्दु है अथवा न्यूनतम बिन्दु।

इस स्थिति को नीचे दिये चित्र के माध्यम से समझाया गया है। चित्र 5 में दोनों बिन्दु A तथा B पर फलन का ढाल (प्रथम अवकलन dy/dx) शून्य के बराकर है। हालांकि सिर्फ बिन्दु B पर ही फलन अपना अधिकतम मान प्राप्त करती है। हम यह देख सकते हैं कि फलन Y = f (x) के अधिकतम मान B के पड़ोस में सीमान्त मान (अथवा ढाल) निरन्तर घटता जा रहा है। पहले dy / dx के बिन्दु तक तो ढाल घनात्मक है और पश्चात ढाल ऋणात्मक हो जाती है अतः हमें यह आवश्यक रूप ही से निर्धारित कर लेना चाहिये कि ढाल की सीमान्त मान (ढाल की ढाल) घटती रही है। यह देखने के लिये कि सीमान्त मान घट रही है एक परीक्षण किया जा सकता है। सीमान्त मान का अवकलन निकालना और फिर यह जांच करना कि फलन के दिये गये बिन्दु पर यह ऋणात्मक है अथवा नहीं। असरदार रूप ही से , हमें अवकलन का अवकलन निकालने को आवश्यकता होगी अर्थात् फलन का द्वितीय अवकलन और फिर परीक्षण कैसा कि शून्य से कम है अथवा नहीं।

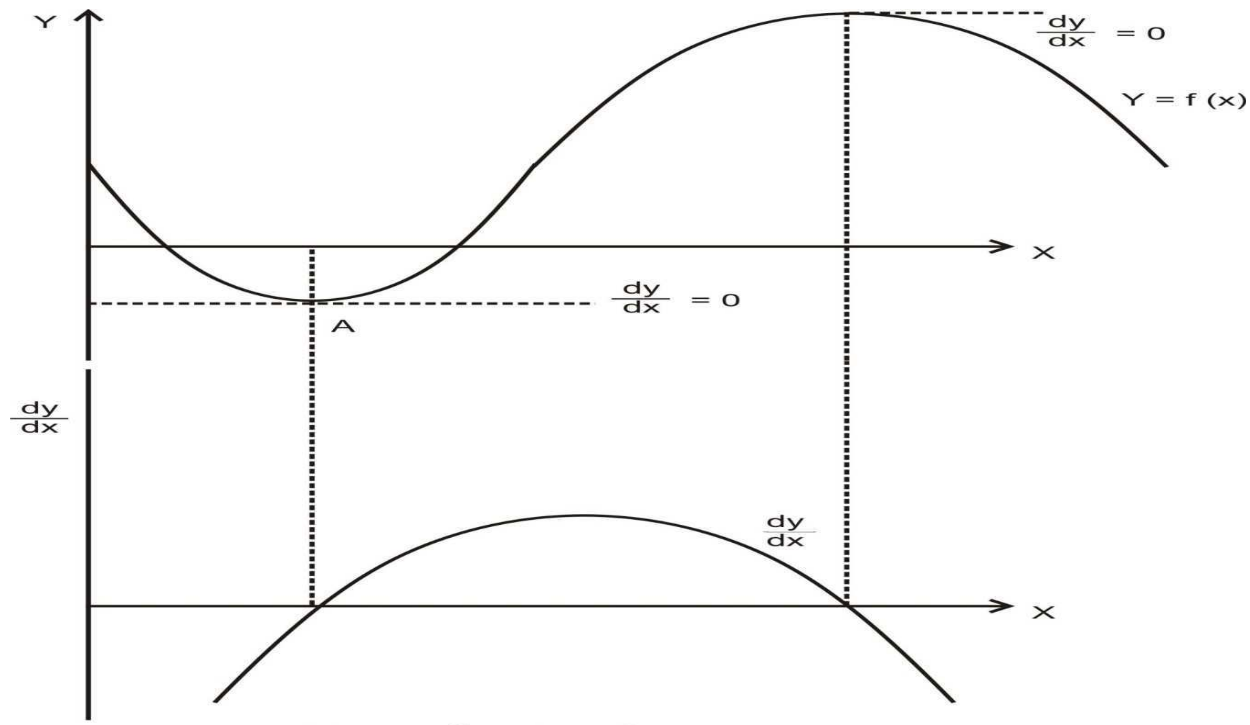
फलन Y = f (x) का द्वितीय अवकलन इस प्रकार लिखा जाता है। d^2y / dx^2 एक अधिकतम बिन्दु तब प्राप्त होता है जब द्वितीय अवकलन ऋणात्मक होता है & $d^2y / dx^2 < O$

उदाहरण – ऊपर दिये गये लाभ अधिकतम करण उदाहरण को ही लेते हुये प्रथम अवकलन से ही द्वितीय अवकलन प्राप्त किया जाता है।

$$d\pi/dQ = 140 – 20Q$$
$$d^2\pi/dQ^2 = 0 + 1. (-20) – Q^{1-1}$$
$$= -20$$

क्योंकि $d^2\pi/dQ^2 = < 0$, हम जानते है कि लाभ अधिकतम बिन्दु प्राप्त हो गया

फलन के न्यूनतम मान को ज्ञात करने के लिये विपरीत शर्त को लिया जाता है चित्र में Y = f(x) फलन के लिये बिन्दु A (न्यूनतम मापन) के पड़ोस में सीमान्त मान (ढाल) निरन्तर बढ़ रहा है। प्रथम तो ढाल उस बिन्दु तक ऋणात्मक है जहाँ dy / dx = 0 और उसके पश्चात ढाल धनात्मक हो जाती है। अतः हम यह परीक्षण करके देखते है कि यदि d^2y / dx^2y किसी बिन्दु पर है तो यह न्यूनतम बिन्दु है।



फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान

4.7 न्यूनतमीकरण समस्या

निर्णय लेने की स्थितियों में, लवण न्यूनतमीकरण भी एक उद्देश्य होता है। लाभ अधिकतमकरण समस्याओं की भांति अवकलन को इस संदर्भ के अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उदाहरण – $C = 15 - 040\ Q + .\ 000080Q^2$

जहाँ C = लागत एवं Q = उत्पादन स्तर

C को Q के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$dc / dQ = -.040 + .000160Q$

इस अवकलन को O के राकर रखने पर और Q हल करने पर

$O = -.040 + .000160Q$

$Q^* = 250$

द्वितीय अवकलन निकालने पर

क्योंकि द्वितीय अवकलन धनात्मक है, Q का उत्पादन स्तर = 250 वह मात्रा है जब औतम कुल लागत न्यूनतम होगी।

सारांश रूप में, हम देखते है कि किसी फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिये उपर्युक्त दो शर्तों की आवश्यकता होती है। प्रथम क्रम शर्त उस बिन्दु को निर्धारित करती है जहाँ अवकलन $dy / dx = 0$। एक से अधिक बिन्दु होने पर द्वितीय क्रम शर्त को प्रयुक्त किया जाता है जिससे फलने के दिये गये बिन्दुओ का अधिकतम या न्यूनतम मान

निर्धारित किया जा सकें। द्वितीय d^2y/dx^2 अवकलन यह इंगित करता है कि दिया गया बिन्दु फलन का अधिकतम माना है। $(d^2y / dx^2 < O)$ अथवा न्यूनतम मान $(d^2y / dx^2 > O)$

4.8 आव्यूह की परिभाषा– (Definition of Matrices)

आव्यूह का अर्थ है समूह में रखना। इसमें क्षैतिज बद्धों को ''पंक्तियां'' तथा खड़े बद्धों को स्तम्भ कहा जाता है। आव्यूह कोई संख्या नहीं है, इसका कोई सांख्यिक मान नहीं है यह एक क्रमिक संख्याओं का समूह है। 1858 में इंग्लैण्ड के गणितीय प्रो0 कैयले (Cayley) ने आव्यूह सिद्धान्त की खोज की। परम्परानुसार आव्यूह को अंग्रेजी के बड़ी वर्णमाला A, B, C द्वारा एवं उसके अवयव को छोटी वर्णमाला a, b, c, …… x, y, z … द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

m x n वास्तविक (real) अथवा समिश्र complex संख्याओं की आयताकार व्यवस्थित व्यूह रचना जिसमें m पंक्तियां (rows) तथा n स्तम्भ (colomn) हों तो m x n आव्यूह m x n क्रम का व्यूह कहते हैं।

m x n आव्यूह को साधारणतया निम्न तरीके से लिखा जा सकता है–

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

अतः आव्यूह वास्तव में क्रमबद्ध अंकों का आयताकार विन्यास है। (rectangular arrangement of ordered numbers)

4.9 आव्यूह का क्रम (order of a matrix)

किसी आव्यूह का क्रम आव्यूह में विद्यमान पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या द्वारा निर्धारित होता है। किसी आव्यूह के क्रम को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

(पंक्तियों की संख्या x स्तम्भों की संख्या)

क्रम विन्यास के भीतर स्थित संख्याओं या उनके प्रतीकों को अवयव कहा जाता है।

$$A= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 3 x 3 का आव्यूह है।

A में तीन पंक्तियां एवं तीन स्तम्भ है अतः यह 3 x 3 की आव्यूह है।

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$E = [1 \quad 8 \quad 5] \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

B में 2 पंक्तियां एवं दो स्तम्भ है अतः यह 2 x 2 की आव्यूह है। इसी प्रकार C का क्रम 2 x 1, आव्यूह D का क्रम 3 x 2, आव्यूह E का क्रम 1 x 3 और F का क्रम 2 x 3 का है। यदि किसी आव्यूह में पक्तियों की संख्या केवल 1 है तो ऐसी आव्यूह को हम *''क्षैतिज आव्यूह''* कहते हैं। इसी प्रकार यदि आव्यूह में स्तम्भों की संख्या केवल 1 है तो ऐसी आव्यूह को हम *''स्तम्भ आव्यूह''* कहते हैं। यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर है तो ऐसे आव्यूह को वर्ग आव्यूह कहते हैं। M पंक्ति एवं n स्तम्भ की आव्यूह A का क्रम m x n है। इसको संक्षिप्त रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है–

$A = [a_{ij}] = \; i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m$

$\qquad\qquad J = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$

4.10 आव्यूह का उपयोग (**Utility of Matrix**)

गणितीय विश्लेषण में आव्यूह की अपनी एक उपयोगिता है क्योंकि हमे अनेको बार एक अकेली संख्या नहीं बल्कि संख्याओं के समूह की आवश्यकता होती है। इस समूह को आव्यूह के क्रम में व्यक्त किया जा सकता है। बीजगणित एवं रैखिक समीकरण में आव्यूह के व्यवस्थित प्रयोग से आसानी से हल किया जा सकता है।

यह तीन समी0 निम्न रूप से दिये गये है–

$a_1n_2 + a_2n_2 + a_3n_3 = d_1$

$b_1n_2 + b_2n_2 + b_3n_3 = d_2$

$c_1n_2 + c_2n_2 + c_3n_3 = d_3$

दिये गये समीकरणों को गुणांकों, चरो तथा स्थिर राशियों प्राचलों को तीन क्रम विन्यास में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं–

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad X \quad \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त समी0 का रूप अब इस प्रकार होगा–

$AX = D$

4.11 सारणिक तथा आव्यूह में अंतर

सारणिक और आव्यूह की धारणा एक दूसरे से जुड़ी है परन्तु दोनों में फिर भी कुछ अंतर है–

	आव्यूह	सारणिक
1	विभिन्न संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है।	एक संख्यात्मक मान होता है।
2	आव्यूह में पंक्ति और स्तम्भो की भिन्न	सारणिक में सदैव m = n की स्थिति

	संख्याएं भी हो सकती है।	होती है।
3	किसी अचर राशि से आव्यूह में गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता है।	किसी अवर राशि से सारणिक में गुणा करने पर उसके किसी एक पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवो में गुणा होता है।

4.12 आव्यूह के प्रकार

(1) सदिश आव्यूह (Vector Matrix) = 1 x n क्रम का आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति हो उसे साधारणतः पंक्ति सदिश (Row Vector) कहते हैं। B = [B_1, B_2 …………B_n] इसी प्रकार n x 1 क्रम का आव्यूह जिसमें केवल एक स्तम्भ हो उसे स्तम्भ सदिश (colomn Matrix) कहते हैं।

$$A = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}_{3x1} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2x1}$$

(2) शून्य आव्यूह (Null Matrix) – एक ऐसी आव्यूह जिसके सभी अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाती है। गुणन फल तथा योग की क्रिया में शून्य आव्यूह शून्य की भूमिका निभाती है। अर्थात्

यदि

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\ .\ O \quad = \quad O\ .\ A = O$$
$$A + O \quad = \quad O + A \quad = A$$

(3) कर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)– एक वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य कर्ण के अवयव गैर शून्य (Non-Zero) तथा शेष अवयव शून्य हो, कर्ण आव्यूह कहलाती है–

जैसे $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(4) एकल आव्यूह (Identity Matrix)– एक कर्ण आव्यूह जिसके मुख्य कर्ण के सजी अवयव इकाई के बराबर हो, एकक आव्यूह कहलाती है। यथा

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

तो A. I = I.A = A

(5) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix) यह एक ऐसी वर्ग आव्यूह है जिसके मुख्य कर्ण के ऊपर या नीये के सभी अवयव शून्य हो जैसे–

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) मुख्य विकर्ण के नीचे के अवयव शून्य है। इसे अपर त्रिभुजीय आव्यूह (Upper Triangular Matrix) कहते हैं।

(b) मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य है। इसे लोअर त्रिभुजीय आव्यूह (lower Triangular Matrix) कहते हैं।

(6) सममित एवं विषम सममित आव्यूह (**S**ymmetric & skew symmetric Matrix)–

ऐसे वर्ग आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं जिसमें aij = aji (सभी i एवं j के लिये) ऐसे वर्ग आव्यूह जिसके पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में इस प्रकार बदला जाय कि

प्रथम पंक्ति – प्रथम स्तम्भ

द्वितीय पंक्ति– द्वितीय स्तम्भ

अतः यदि नयी आव्यूह और पुरानी आव्यूह बराबर ही रहे, तो ऐसी आव्यूह को सममित आव्यूह कहते हैं। ऐसे आव्यूह में मुख्य विकर्ण के दोनों तरफ के अवयव एक दूसरे के समान होते हैं। उदाहरण–

नोट :– सममित आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त्त (Transposed) मूल आव्यूह के समान ही होता है। ($A^T = A$)

(7) परिवर्त्त आव्यूह (Transpose Matrix)–

यदि किसी आव्यूह की पंक्ति और स्तम्भ को आपस में बदल दिया जाय तो ऐसी आव्यूह को परिवर्त्त आव्यूह कहते हैं। ऐसी आव्यूह मूल आव्यूह की परिवर्त्त होती है। इस आव्यूह के ऊपर (T) या (ʹ) लगाकर प्रदर्शित किया जाता है।

$$\underset{(3 \times 3)}{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \underset{(3 \times 3)}{A^T} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

अन्य उदाहरण–

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{bmatrix}$$

(8) अव्युतक्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix) – ऐसी वर्ग आव्यूह जिससे सम्बद्ध सारणिक का मान शून्य है तो अव्युतक्रमणीय आव्यूह कहलाती है।

उदाहरण–

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(35-27) - 3\,(10-9) + 5(6-7)$$

$$= 8 - 3 - 5 = 0$$

4.13 आव्यूह बीज गणित के नियम

(Rules of Matrix Alegbera)

आव्यूह के बीज गणित के नियम में मुख्य रूप से दो प्रकार है।

(1) आव्यूह के योग एवं अंतर

(2) आव्यूह का गुणा

1– आव्यूह के योग एवं आव्यूह के अंतर (Sum and Difference of Matrix)– दो आव्यूह के योग एवं अंतर करना उसी स्थिति के संभव होता है जब दोनों आव्यूह के क्रम समान हो, अर्थात् दोनों आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भ समान हो।

उदाहरण–

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

तो $A + B = \begin{bmatrix} 3+9 & 1+0 & 2+2 \\ 6+1 & 0+2 & 1+2 \\ 5+1 & 2+0 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

अतः यह अंकित करने योग्य है कि दो आव्यूह के योग करने पर उसी क्रम का आव्यूह A का क्रम 3 x 3 है और B का भी 3 x 3 अतः योग करने पर आव्यूह का क्रम भी 3 x 3 ही होगा। इसके साथ ही यह भी स्पष्ट है कि आव्यूह को पलटकर योग करने पर भी योगफल समान रहता है।

अतः $A + B = B + A$

अन्य शब्दों में दो आव्यूह का योग क्रम विनिमय नियम (Commutative Law) को प्रदर्शित करता है अर्थात्

समान क्रम की शून्य आव्यूह के साथ यदि किसी आव्यूह को योग किया जाय तो हमे मूल आव्यूह ही प्राप्त होगा।

उदाहरण

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

तो $$A + B = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 & 0+1 \\ 0+3 & 0+2 & 0+1 \\ 0+6 & 0+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

C एक शून्य आव्यूह है जिसका क्रम 3 x 3 है और आव्यूह A का भी क्रम 3 x 3 है अतः दोनों का योग संभव है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि तीन समक्रम आव्यूह (Matrix of same order) के लिये

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

इसी तीन आव्यूह का योग साहचर्य नियम (Associative law) को संतुष्ट करता है।

आव्यूह को घटाना (Subtraction of Matrix)

जिस प्रकार से हम दो आव्यूह को जोड़ते है उसी प्रकार हम दो आव्यूह को घटा भी सकते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - d_1 \\ a_1 - c_1 & b_2 - d_2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 3-2 & 4-3 \\ 5-4 & 1-3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न– हल कीजिये

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) A + B (ii) A- B

$$A-B = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+4 \\ 1+5 & 4+0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 3-2 & 2-4 \\ 1-5 & 4-0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

यहाँ A एवं B दोनों 2 x 2 क्रम के आव्यूह है अतः जोड़ना या घटाना संभव है।

उदाहरण– यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$ है

तो योग का साहचर्य नियम सिद्ध कीजिये।

हल–यदि A, B और C एक ही क्रम (order) की तीन आव्यूह हो तो–

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$

उपरोक्त उदाहरण में A, B तथा C एक समान क्रम (3 x 2) की आव्यूह है, अतः योग का साहचर्य नियम सिद्ध किया जा सकता है।

$$\text{तो}(A + B) = \begin{bmatrix} 3+3 & 4+1 & 1+2 \\ 2+1 & 0+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

बायें पक्ष का योग–

तो$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 6+2 & 5+0 & 1+3 \\ 3+3 & 4+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

दायें पक्ष का योग

$B + C = \begin{bmatrix} 3+2 & 1+0 & 2+1 \\ 1+3 & 0+4 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A+(B + C) = \begin{bmatrix} 3+5 & 4+1 & 1+1 \\ 2+4 & 0+4 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

अतः $A+(B + C) = A + (B + C)$ सिद्ध होता है।

आव्यूह का गुणा (Multiplication of Matrix)

दो आव्यूहों A और B का गुणनफल तभी संभव है जब आव्यूह की स्तम्भ और B आव्यूह के पंक्ति की संख्या बराबर होगी। यदि A का क्रम $m \times n$ हो तथा B का क्रम $P \times r$ हो तो $A \times B$ तभी संभव होगा जब $N = P$ हो।

यदि प्रथम आव्यूह को हम क्षैतिज वेक्टरों के एक समूह के रूप में तथा द्वितीय आव्यूह को स्तम्भ वेक्टरों के समूह के रूप में मानें तो प्रथम एवम् द्वितीय आव्यूह के संगत क्षैतिज वेक्टरों तथा स्तम्भ वेक्टरों के गुणनफल के द्वारा हम परिणामित आव्यूह के अवयवों को प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण–

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

चूंकि A आव्यूह में 3 स्तम्भ है ओर B आव्यूह में 3 पंक्ति, अतः इन दोनों आव्यूहों का गुणा किया जा सकता है।

$$AB = \begin{bmatrix} 6 \times 4 + 3 \times 3 + 1 \times 0 & 6 \times 7 + 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ 2 \times 4 + 0 \times 3 + 2 \times 0 & 2 \times 7 + 0 \times 1 + 2 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 + 9 + 0 & 42 + 3 + 0 \\ 8 + 0 + 0 & 14 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 45 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

इस प्रकार AB का क्रम 2 x 2 है।

उदाहरण यदि A [1 2 3 4] 1 x 4 एवं B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ AB ज्ञात कीजिये–

उदाहरण यदि A= [1 x 2 + 2 x 2 + 3 x 3 + 4 x 4] 1 x 4

= [2 + 4 + 9 16] = $[30]_{1x1}$

नोट : सामान्य बीजगणित में 2 x 3 का वही अर्थ है जो 3 x 2 का है, परन्तु आव्यूह बीजगणित में स्थित इससे भिन्न होती है। यदि AB परिभाषित है तो इसका अर्थ यह नहीं है कि BA भी परिभाषित होगा। साथ ही साथ AB = BA

उदाहरण – यदि

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2x3} \text{ तथा } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3x2}$$

हल = यहाँ AB परिभाषित है क्योंकि A आव्यूह 2 x 3 क्रम का है। 3 स्तम्भ आव्यूह के 3 पंक्ति के बराबर है।

अतः AB किया जा सकता है।

वहीं दूसरी ओर BA भी परिभाषित है क्योंकि B आव्यूह 3 x 2 क्रम का है और A आव्यूह 2 x3 क्रम का है। अतः B आव्यूह के 2 स्तम्भ = A आव्यूह के 2 पंक्ति।

यदि AB = 0 शून्य आव्यूह है तो इससे यह तात्पर्य नहीं निकाला जा सकता कि या तो A=0 अथवा B = 0 है। दिये गये उदाहरण से यह स्पष्ट है–

यदि

$$A = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

यहाँ AB में A को पूर्व गुणक (Pre- Multiplex) तथा B को उत्तर गुणक (Pool-multiplex) कहते हैं। इसी प्रकार AB आव्यूह का B आव्यूह से उत्तर गुणन (Pool multiplying matrix A by method B) अथवा आव्यूह A से पूर्व गुणन (Premulliplying Matrix B by A) कहते हैं।

आव्यूह गुणन के नियम–

1) साहचर्य नियम लागू होता है यदि AB और C का गुणा सम्भव हो तो $(A + B) + C = A + (B+C)$

2) बेटन का नियम (Distributive Law) लागू होता है। यदि AB, AC तथा B + C का अस्तित्व हो – $A (B + C) = AB + AC$

3) किसी अचर राशि के साथ $(AB) = (KA)B = A(KB)$ सत्य सिद्ध होता है।

4) आव्यूह गुणन के संबंध में क्रम विनियम (cumutative) नियम लागू नहीं होता है।

उदाहरण– यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

सिद्ध कीजिये कि $A (B + C) = AB + AC$

हल =

$$B + C = \begin{bmatrix} 3+1 & 2+1 \\ 1+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x4+2x1 & 1x3+2x3 \\ 3x4+4x1 & 3x3+4x3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

अब

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1x3+2x1 & 1x2+2x2 \\ 3x3+4x1 & 3x2+4x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

AC= 1 2 B = 1 1 = 1x1+2x0 1x1+2x1 = 1
3 3 4 0 1 3x1+4x0 3x1+4x1
3 7

$$AB+AC=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 13 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 16 & 21\end{bmatrix}$$

अतः $A(B+C) = AB + AC$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण– यदि

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(a) $A.I = I.A. = A$

(b) $I = I^2 = I^3$

यहाँ A और I दोनों (3 x 3) की वर्ग आव्यूह है अतः AI और IA दोनों परिभाषित हैं।

$$AI=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1x1+2x0+4x0 & 1x0+2x1+4x0 & 1x0+2x0+4x1\\ 3x1+1x0+2x0 & 3x0+1x1+2x0 & 3x0+1x0+2x1\\ 1x1+2x0+3x1 & 1x0+2x1+3x0 & 1x0+2x0+3x1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

अतः $AI = A$ सिद्ध हुआ।

अब

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1x1+0x3+0x1 & 1x2+0x1+0x2 & 1x4+0x2+0x3 \\ 0x1+1x3+0x1 & 0x2+1x1+0x2 & 0x4+1x2+0x3 \\ 0x1+0x3+1x1 & 0x2+0x1+1x2 & 0x4+0x2+1x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

अतः सिद्ध $IA = A$ हुआ।

4.14 आव्यूह की कोटि (Method to find the rank of a matrix)

1) यदि आव्यूह वर्ग आव्यूह है तो उसका सारणिक मान ज्ञात करते हैं यदि यह मान शून्य नहीं है तो आव्यूह की कोटि उस सारणिक के क्रम के बराबर होगी। आव्यूह की कोटि ज्ञात करने के लिये इसे सारणिक बनाकर मान ज्ञात करते हैं।

2) यदि वर्ग आव्यूह मे बनी सारणिक का मान शून्य हो तो हम 1 कम क्रम की उपसारणिक देखते है। इन उपसारणिक में यदि एक भी शून्य न हुयी तो इस उपसारणिक का क्रम ही आव्यूह की कोटि होगी।

4.15 सारांश

निश्चितता के अन्तर्गत निर्णय बनाने के क्षेत्र में समस्याओं के दो विस्तृत क्षेत्र है – अबाध अनुकूलतम समस्या एवं बाधित अनुकूलतम समस्या सीमान्त विश्लेषण किसी भी आर्थिक क्रिया के विस्तार एवं संकुचन की निर्णय संरचना में महत्व रखती है। अवकलन का सीमान्त विश्लेषण से एक निकट सम्बन्ध है जिसे किसी भी बीजगणितीय सम्बन्ध को व्यक्त करने में प्रयुक्त किया जाता है। (निर्णायक चर एवं उद्देश्य चर के मध्य) प्रथम अवकलन दिये गये बिन्दु पर किसी फलन के परिवर्तन की दर अथवा ढाल को मापता है। और यह सीमान्त फलन की सीमित मान के बराबर होता है।

विशिष्ट प्रकार के फलों के अवकलन को ज्ञात करने के लिये विभिन्न नियम दिये गये है।किसी फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये एक आवश्यक किन्तु अपर्याप्त शर्त यह है कि प्रथम अवकलन शून्य के बराबर है। इसे प्रथम क्रय शर्त कहते हैं।द्वितीय क्रम शर्त की आवश्यकता यह निर्धारित करने की होती है कि दिया गया बिन्दु अधिकतम है अथवा न्यूनतम द्वितीय अवकलन यह इंगित करता है कि दिया गया बिन्दु अधिकतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से कम है और न्यूनतम है यदि द्वितीय अवकलन शून्य से अधिक है।

किसी बहुचर फलन का आंशिक अवकलन अन्य चरों को स्थिर रखते हुये फलन के मान पर किसी एक चर में परिवर्तन करने पर होने वाले सीमान्त प्रभाव को मापता है। बाधित अनुकूलतम समस्या में लेगरेन्जज गुणक तकनीक को फलन की अनुकूलतम मान को ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है। अन्य चरों को संलग्न करने पर लेगरेन्जज गुणक तकनीक एक बाधिक समस्या से अबाध समस्या में बदल जाता है। जिसे अवकलन विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

संख्याओं के आयताकार अंकायत अथवा क्रम विन्यास को आव्यूह कहते हैं। आव्यूह की पंक्ति (m) तथा स्तम्भ (n) की संख्याओं को आव्यूह का क्रम कहते हैं, इसे (m x n) पढ़ते है। आव्यूह को हम अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षर से संबोधित करते हैं। आव्यूह की प्रयोग हम समीकरण लिखने की विधि तथा समीकरण से संबंध हल के अस्तित्व की जांच का पता लगने की विधि के लिये करते हैं।

आव्यूह संख्याओं के पूरे समूह को व्यक्त करता है। किसी अचर राशि में आव्यूह को गुणा करने पर उसके सारे अवयवों में गुणा हो जाता है। दो आव्यूह सर्वसम कहे जायेंगे यदि उनके स्तम्भों तथा पंक्तियों की संख्या समान हो, यदि दोनों आव्यूहो की पंक्तियों और स्तम्भो के अवयव एक ही हो ($aij = bij$) आव्यूह गुणन में (AB) का गुणन तभी अस्तित्व मान होगा जब आव्यूह (A) में स्तम्भों (n) की संख्या (B) में पंक्तियों (m) की संख्या के बराबर हो।

4.16 शब्दावली

1. **फलन का अवकलन** – यदि $\Delta x \rightarrow 0$ तो भिन्न $\Delta y / \Delta x$ की सीमा को $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलन का अवकल गुणांक कहते हैं
2. **अवकलन** – किसी फलन $f(x)$ का अवकलन ज्ञात करने की गणितीय क्रिया को अवकलन कहा जाता है।
3. **अनुकूलतम तकनीक** – ऐसे उपकरण जिनसे किसी उद्यमी के सांधनों को कुशलपूर्वक प्रबन्धन किया जा सके जिससे लाभ अधिकतम किया जा सके।
4. **निबाध अनुकूलतम समस्या** – ऐसी अनुकूलतम समस्या जिसे उद्देश्य एवं निबाध फलनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ निर्णायक चारों पर प्रतिबन्ध होना है।
5. **अबाध अनुकूलतम समस्या** – ऐसी अनुकूलतम समस्या जहाँ निर्णय चरो पर कोई प्रतिबन्ध लागू नहीं होता है और अवकलन के माध्यम से इसे हल किया जा सकता है।
6. **लेगरेन्जेज गुणांक** – इस तकनीक का प्रयोग ऐसी समस्याओं के हलों को ज्ञात करने के लिये प्रयुकत किया जाता है। जहाँ समस्याओं के प्रतिबन्धों का समिका सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जा सके।

4.17 अभ्यास प्रश्न

Part-1

1) दो आवयूहो A एवं B का गुणा तभी संभवहै जब पहले आव्यूह की .... और दूसरे की .. .. बराबर हो ....

2) .... आव्यूह की एक दशा है जिसमें केवल एक ही .... पंक्ति अथवा स्तम्भ होते हैं।

3) .... आव्यूह की दशा में आव्यूह का परिवर्त मूल आव्यूह के बराबर होता है।

4) .... आव्यूह के विकर्ण अवयवो को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य होते हैं।

5) .... आव्यूह में पंक्ति एवं स्तम्भ की संख्या बराबर होती है।

उत्तर 1) स्तम्भ, पंक्ति 2) सदिश 3) सममित 4) विकर्ण 5) वर्ग

Part-2 सिद्ध कीजिये–

1) यदि

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ते सिद्ध कीजिये– $(AB) = B\,A$

2) यदि

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ तो AA तथा $A\,A$ ज्ञात कीजिये।

3) यदि $A= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो ज्ञात कीजिये।

4) यदि

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ तो सिद्ध कीजिये कि $AB = BA$

5) अनुकूलतम समस्याओं के किस प्रकार हल किया जा सकता है।

6) अबाधित अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के लिये कौन सी तकनीक प्रयुकत की जाती है।

7) आर्थिक निर्णय सम्बन्धी समस्याओं में प्रतिबन्धों को किस प्रकार के सम्बन्धों द्वारा व्यक्त किया जाता है।

4.18 संदर्भ सहित ग्रन्थ

1) 1.Web chapter : OptimÁation Techniques ; www.shsu.edu/~eco_dgf/web_chapter_a.pdf.
2) Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

3) Agarwal.H.S. (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy", Laxmi Narayan Agrawal, Agra
4) एस0 एम0 शुक्ला एवं सहायः (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

4.19 उपयोगी / सहायक ग्रन्थ

1. Kumar, Anil (2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
2. Singh,. S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House.
3.Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
4. Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

4.20 निबन्धात्मक प्रश्न

1. अनुकूलतम समीकरणों द्वारा आर्थिक समस्याओं का निवर्चन किस प्रकार होता।
2. अवकलन के नियम कौन–कौन से है।
3. अनुकूलतम तकनीक के विभिन्न प्रकार क्या है।
4. आव्यूह के प्रकार क्या है।

इकाई–5 सारणिक एवं आगत निर्गत सारणी विश्लेषण

5.1 प्रस्तावना–

प्रस्तुत इकाई में बीजगणित आर्थिक विश्लेषण के क्षेत्र में युगपत समीकरणों को सरलता से हल करने हेतु सारणिक (determinant) के प्रयोग पर विचार करेंगे। सारणिक एक ऐसा सशक्त एवं महत्वपूर्ण उपकरण है जिसके प्रयोग से समीकरणों के अज्ञात चरों के मूल्य निर्धारण को सरलतापूर्वक हल किया जा सकता है। यही नहीं अनेक प्रकार के आर्थिक समस्याओं को सुगमतापूर्वक हल करने में भी सारणिक द्वारा सहायता मिलती है। इस तकनीक का प्रयोग आगत निर्गत विश्लेषण (Input Output Analysis) समष्टि भावी अर्थशास्त्र इत्यादि के क्षेत्र में वृहद स्तर पर किया जाता है। चरों के मूल्य निर्धारण में सहायक होने के कारण सारिणक को निर्धारक भी कहा जाता है।

आगत निर्गत सारिणी विश्लेषण पिछले तीन दशकों से विकास नियोजन में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रही है। यह तकनीक एक तरफ अर्थव्यवस्था की प्रकृति को समग्र रूप से समझने में तथा दूसरी ओर घरेलू अर्थव्यवस्था की सामाजिक आर्थिक उद्देश्यों बनाम बाहरी अर्थव्यवस्था के आर्थिक उद्देश्यों को चिन्हित करने में, नियोजित करने में तथा उसे लागू करने में अत्यन्त सहायक है।

यह तकनीक अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करती है। तथा इस धारणा पर आधारित है कि समस्त अर्थव्यवस्था में औद्योगिक अंतः सम्बन्ध और अन्तः निर्भरताएं होती हैं।

5.2 उद्देश्य–

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से अध्ययनकर्ता को सारणिक के नियम एवं उसके प्रयोग की विस्तृत जानकारी मिल सकेगी। इसके साथ ही

- ✓ युगपत समीकरण को सरलतापूर्वक हल करने की विधि का अध्ययन किया जायेगा।
- ✓ सारणिक के विस्तार को सामान्य नियम को सरलतापूर्वक समझने का प्रयास किया जायेगा।
- ✓ उपसारणिक निकालना सीख सकेंगे।
- ✓ सहखण्ड ज्ञान करने की विधि सीख सकेंगे।
- ✓ सारणिक को गुणों एवं उसकी मुख्य विशेषताओ से अवगत हो सकेगें।
- ✓ क्रेमर का नियम का अध्ययन करके उसकी सहायता से युगपद समीकरण को हल कर सकेंगे।
- ✓ आगत निर्गत सारणी किस प्रकार निर्मित होती है।
- ✓ आगत निर्गत गुणांक का परिकलन कैसे किया जाता है।
- ✓ लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल क्या है और यह उनके आगत निर्गत बन्द मॉडल से किस रूप में भिन्न है।
- ✓ आगत निर्गत विश्लेषण की क्या सीमाएं है।

- ✓ आगत निर्गत विश्लेषण में सारणिक के प्रयोग से अवगत हो सकेंगे।
- ✓ आगत निर्गत गुणांक निकालना सीख सकेंगे।
- ✓ आगत निर्गत विश्लेषण का महत्व एवं उसकी सीमाएँ

उपर्युक्त सभी उद्देश्यों की पूर्ति हेतु इस इकाई का अध्ययन किया जायेगा।

5.3 सारिणक की परिभाषा–

प्रत्येक ऐसी मैट्रिक्स जिसमें पंक्तियों तथा स्तम्भो की संख्या परस्पर बराबर हो ;वर्ग मैट्रिक्सद्ध को हम सारणिक से सम्बद्ध कर सकते हैं। इस प्रकार सारणिक दो या दो से अधिक गुणनफलों के अंतर की सांकेतिक अभिव्यक्ति है। विभिन्न पदो के दो बड़ी रेखाओं के बीच व्यक्त किया जाता है जैसे

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - a_2 b_2$$

उदाहरण के लिये

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$ यदि तो मैट्रिक्स से सम्बद्ध सारणिक इस प्रकार होगा–

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 4 \times 5 - 2 \times 3$

$= 20 - 14$

$= 14$

या $|A| = 14$

5.3.1 सारणिक के मौलिक अंश एवं अवयव

उपर दिये उदाहरण में a_1, b_1, a_2, b_2 को सारणिक का मौलिक अंश और इनके गुणनफल a_1, b_2, a_2, b_1 को अवयव कहते हैं।

5.3.2 सारणिक का क्रम–किसी सारणिक के अंतर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियां होती है, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है। ऊपर दिये गये उदाहरण में दो पंक्ति एवं दो स्तम्भ है, अतः यह द्वितीय क्रय (second order) की सारणिक है।

अन्य उदाहरण

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसमें तीन पंक्ति (rows) एवं तीन स्तम्भ (colomn) है अतः यह तृतीय क्रम सारणिक है।

किसी भी सारणिक का क्रम अथवा कोटि उसकी पंक्ति और स्तम्भों की संख्याओं से तय होती है।

सारणिक के स्तम्भों ओर पक्तियों के मौलिक अंशो और तत्वो में संबंध होता है, इसे निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

Table-1

सारणिक का क्रम	स्तम्भ	पंक्तियां	मौलिक अंश	तत्व
Order	C	R	(a_1 a_2, b_1 b_2 ....)	(a_1 a_2,...... b_1 b_2 ....)
द्वितीय	2	2	2^2	2L
तृतीय	3	3	3^2	3L

अतः यह स्पष्ट है कि यदि सारणिक द्वितीय क्रम का है तो उसके मौलिक अंशो की संख्या $2^2 = 4$ होंगे।

सारणिक ऐसा क्रम है जिसमें n x n संख्यओं को पंक्तिबद्ध लिखा जाता है। सारणिक में पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या बराबर होती है। सारणिक का एक निश्चित संख्यात्मक मात्र होता है। इसे [A] द्वारा घोषित किया जाता है। (A Determinant is a number associated with a square matrix- It is denoted by [A])

यदि सारणिक कोटि (Order) 4 है, तो उसमें पंक्तियां तथा कालम दोनों ही 4 होंगे। द्वितीय कोटि की सारणिक – दो पंक्तियां एवं दो स्तम्भ [2 x 2]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 2 \times 2$$

5.3.2 सारणिक प्रसार–

किसी सारणिक का मान ज्ञात करने के लिये उस सारणिक को किसी पंक्ति तथा स्तम्भ के अवयवों के रूप में प्रदर्शित करना सारणिक का प्रसार कहलाता है। सारणिक का प्रसार उपसारणिक की सहायता से किया जाता है। किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जाता है। लेकिन पदों में चिन्ह के क्रम को ध्यान रखना आवश्यक है। यह क्रम निम्न है–

अन्य उदाहरण

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

वास्तव में चिन्हों का यह क्रम सहखण्ड (cotaclor) पर आधारित है अतः प्रसार को समझने के लिये उप सारणिक एवं सहखण्ड को समझना आवश्यक है।

5.3.3 उपसारणिक (Minor)– दो अथवा दो से अधिक क्रमों वाले सारणिकों (Determinats) में प्रत्येक अवयव के अनुरूप एक निम्न क्रम का सारणिक होता है। इस सारणिक को हम विशिष्ट अवयव का लघुखण्ड (Minor) कहते हैं। उपसारणिक या लघुपद ज्ञात करने के लिये उस पंक्ति (Rows) और उस स्तम्भ (colomn) के सभी अवयव (elements) समाप्त कर दिये जाते हैं।

उपयुक्त उदाहरण में

$M_{11} = a_{22}$ $\quad M_{12} = a_{21}$ $\quad M_{21=} = a_{12}$ $\quad M_{22} = a_{11}$

अन्य उदाहरण $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

उपसारणिक 3 का 7, 4 का 6, 6 का 4, 7 का 3 यदि सारणिक 3 x 3की है तो

उदाहरण $\quad |A| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

में प्रथम पंक्ति तथा स्तम्भ में स्थित अवयव (element) '9' का उपसारणिक या लघुखण्ड है– $\begin{vmatrix} 8 & 5 \end{vmatrix}$ 0

2

इस सारणिक को प्राप्त करने के लिये हम मूल सारणिक में अवयव 9 वाली पंक्ति तथा कालम को विलुप्त (eliminate) कर देते है। प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ में स्थित अवयव के लघुखण्ड (minor) को हम a_{11} के द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$a_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ में स्थित अवयव 4 का लघुखण्ड (a_{12}) प्राप्त करने के लिये हम मूल सारणिक D में प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ को विलुप्त करते हैं। अर्थात्

$$a_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

तथा इसी प्रकार

$$a_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$6 \qquad 0$$

सामान्य तौर पर पंक्ति तथा स्तम्भ में स्थित अवयव को लघुखण्ड के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

5.3.4 सहखण्ड

किसी भी क्रम के सारणिक का मान वास्तव में किसी पंक्ति के अवयवों तथा संगत लघुखण्डों के गुणनफल के योग के बराबर होता है। गुणनफल का योग करने से पूर्व प्रत्येक गुणनफल में (–) चिन्ह नियम (Alternating sign rule) के अनुसार चिन्ह लगाते है। यह नियम है।

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

वास्तव में चिन्हों का यह क्रम सहखण्ड (cofactor) पर आधारित है। उदाहरण के लिये

$$[A]=\begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

इस सारणिक का मान प्रथम पंक्ति के 9 1 6 के माध्यम से ज्ञात करेगें। इन अवयवों के लघुखण्ड इस प्रकार है–

$$a_{11} \qquad \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad = 8(2) – 0(3) = 16$$

$$a_{12} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \quad = 4(2) – 6(3) = -10$$

$$a_{13} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \quad = 4(0) – 6(8) = -48$$

अब हम विभिन्न अवयवों तथा उनके संगत लघुखण्डों (minors) के गुणनफलों में +, -, + चिन्ह लगाकर उनका योग ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$\begin{aligned} D \quad &= + (9 \text{ x } 16) – (4 \text{ x } -10) + (6 \text{ x } -48) \\ &= 44 + 40 – 288 \\ &= 184 – 288 = -104 \end{aligned}$$

यही सारणिक का मान किसी अन्य पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवो के द्वार भी ज्ञात किया जा सकता है। हर स्थिति में सारणिक का मान (-104) ही प्राप्त होगा। इस प्रकार स्पष्ट है कि यदि क्रम n (order n) के सारणिक के निम्न प्रकार से व्यक्त किया जायेगा।

$$D= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

a_{11} का लघुखण्ड $=\alpha_{11}$

a_{12} का लघुखण्ड $=\alpha_{12}$

a_{1n} का लघुखण्ड $=\alpha_{1n}$

अब (Alternating Sign rule) के अनुसार सारणिक D का मान =

$D= a_{11}\,\alpha_{11} - a_{12}\,\alpha_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}\,\alpha_{1n}$

सारणिक को ज्ञात करने में न सिर्फ लघु खण्डों का बल्कि सहखण्डों (cotactors) का गणन भी किया जाता है।

5.5.1 सहखण्ड (Co-factor)–

सहखण्ड की अवधारणा, उपखण्ड से जुड़ी है। किसी अवयव की उपसारिणक को अगर चिन्ह $[(-1)^{i+j}]$ के साथ लिखी जाय तो वह उस अवयव का सहखण्ड है। अतः अवयव a_{ij} का सहखण्ड

Co-factor of $A_{ij} = (-1)^{i+j}\ \alpha_{ij}$

स्पष्ट है यदि $(i + j)$ का मान सम है तो $(-1)^{i+j} = 1$ होगा और यदि विषम है तो $(-1)^{i+j} = -1$ होगा।

अतः सहखण्ड लघुखण्डों के ऋणात्मक मान के बराबर होगा।

$D= a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_{1n}\,A_{1n}$

5.4 सारणिक की विशेषताएँ (Properties of Determinant)

सारणिक के प्रमुख गुण इस प्रकार से है–

(1) यदि सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भ में अथवा स्तम्भो को पंक्तियो में परिवर्तित कर दिया जाय तो भी सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

If the rows and colomn of a determinat are interchanged the value of the determinant remains unchanged.

उदाहरण– $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -104$

(II)अगर दो पंक्तियो या स्तम्भों का स्थान परिवर्तन किया जाये तो चिन्ह बदल जाता है।
It two rows (or colomns) of a determinant are interchanged, the value of the determinant is multiplied by-1

यदि $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -104 \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ & 104 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad 3 \quad =-104$

(iv) यदि किसी पंक्ति या स्तम्भ को किसी मानक (γ) से गुणा करे तब नये सारणिक का मान पुराने सारणिक के मान का γ गुण होगा।

If the elements of a row (or colomn) of a determinant are multiplied by a scalar, then the value of the new determinant is equal to same scalar times the value of the original determinant.

(II) यदि दो पंक्तियां या स्तम्भो का मान एक जैसा है, तो सारणिक का मान शून्य हो जाता है।
If two rows or two columns of a determinant are identical, then the value of a determinant is zero.

यदि $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

उदाहरण– $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \\ 6 \quad 0 & 2 & \end{vmatrix} =-208 \quad \begin{vmatrix} 2(4) & 1 & 6 \\ 2(1) & 8 & 3 \\ 2(6) & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 12 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= -416$

(v) यदि सारणिक के किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो संख्याओ का येाग हो तो सारणिक को दो सारणिकों में व्यक्त किया जा सकता है जिनकी कोटि समान है।

If each element of any row (or colomn) of a determinat is the sum too numbers, then the determinant expossible as the sum of too determinants of the same orders.

$$\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_2+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. यदि सारणिक की एक पंक्ति या स्तम्भ के तत्व को स्थिर राशि से गुणा करें और उसे दूसरी पंक्ति में जोड़े तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

If the elements of a row (or colomn) of a determinate is multiplied by a constant and added to another row (or colomn) then the value of determinant remain unchanged.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_1+kb_1 & b_2 & c_2 \\ a_1+kb_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. यदि सारणिक का विस्तार किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के गलत लघु पदो के साथ किया जाय तो सारणिक का मान शून्य होगा।

The value of determinant vanishes when we operate it with wrong minors of any rows or any colomn.

$|AB| = |A| + |B|$

उदाहरण– सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

हल $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$

यहां पर सारणिक के तृतीय स्तम्भ में द्वितीय स्तम्भ जोड़ा गया है।

अतः $(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$

1 c 1

(अतः चूँकि इस सारणिक मे दो कालम के अवयव समान है, अतः मान शून्य होगा।)

$(a + b + c) . (0) = 0$

5.5 सारणिक के प्रयोग (Applications of Determinant)

5.5.1 क्रेमर नियम (Cramer's Rule)

सारणिक विधि द्वारा युगपद समीकरणो को हल करने की विधि ही क्रेमर नियम है। दो या तीन अज्ञात राशियाँ (Two Unknown variables) के समीकरणो को हल करना हो जैसे–

$a_1x + b_1y = k_1$ ……….(1)

$a_1x + b_2y = k_2$ ……….(1)

यहां a_1, a_1, b_1, b_2 गुणांक है तथा k_1, k_2 स्थिरांक (अचर राशियां) है।

हल करने की विधि– समी0 (1) को b_2 से एवं समी0 2 को b_1 से गुणा करते हैं। ऐसा इसलिये किया जाता है जिससे y विलुप्त हो जाय और x का मान ज्ञात हो जाये।
इसके बाद समीकरणों का योग करते हैं–

$a_1 b_2 x + b_1b_2 y = b_2k_1$ …………….. (iii)

$a_2 b_1 x + b_1b_2 y = b_1k_1$ …………….. (iv)

(-) (-) (-)

$a_1 b_2 x – a_2b_1 x = b_2k_1 – b_1k_1$

$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = b_2 k_1 - b_1 k_1$

$$x = \frac{b_2 k_1 - b_1 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

इस प्रकार x का मान निकाला जा सकता है। x के मान को किसी एक समी0 में रखने के पश्चात समी0 को y के लिये हल करने पर –

$$x = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

यह ध्यान रखने योग्य बात है कि x एवं y के मान निकालते समय हर (Denominator) का मान–

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

इसी प्रकार अंश (Numerator) में स्थित राशियो को भी हम सारणिक के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं–

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = N_x/D \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = Ny/D$$

यहाँ Nx एवं Ny x तथा y के मानों में अंश राशियों (Numerator values) को प्रदर्शित करते हैं।

Nx का मान प्राप्त करने के लिये गुणांको को सारणिक D में क्रमशः x के गुणांक स्तम्भ को स्थिरांकों के कालम से प्रतिस्थापित करते हैं। इसी प्रकार Ny को प्रापत करने के लिये D में Y के गुणांक स्तम्भ को स्थिरांक स्तम्भ से प्रतिस्थापित करते हैं।

<u>नोट</u> – x एवं y के मानों को हल करना तभी संभव है जब

$$D = a_1b_2 = a_1b_2 = 0$$

उदाहरण : क्रेमर नियम द्वारा दिये गये युगपत समीकरणों का हल कीजिये–

$$4x + y = 11$$
$$3x + 5y = 21$$

हल :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 3(1) = 17$$

$D \neq 0$ अतः x एवं y का मान ज्ञात किया जा सकता है।

X = Nx/D और y= Ny/D

$$Nx = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = 11(5) - 21(1) = 55\text{-}21 = 34$$

$$Ny = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = 4(21) - 3(11) = 84\text{-}33 = 51$$

अतः $x = Nx/D = 34/17 = 2$

$y = Ny/D = 51/17 = 3$

उत्तर $x = 2,\ y = 3$

एक अन्य उदाहरण द्वारा क्रेमर नियम से तीन अज्ञात राशियों के मान को भी हल करते हैं–

उदाहरण –

$$3x + 3y - z = 11$$
$$2x - y + 2z = 9$$
$$4x + 3y + 2z = 25$$

हल : यहाँ D (सारणिक) ज्ञात करने के लिये

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ x, y, z के गुणांको का सारणिक है।

$$D = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 3\ (-2\ -6)\ -3\ (4\ -8)\ -1\ (6+4)$

$= -24 + 12 - 10$

$= -22$

उदाहरण–

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

हल : यहाँ सारणिक ज्ञात करने के लिये

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$ x, y, z के गुणाकों का सारणिक है।

2 1 -1

$$D = 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

= 1 (-5 -7) -1 (-2 -14) +1 (2 - 10)
= -12 + 16 -8
= -4

$$Nx = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 52 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 52 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 52 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

= 1 (-5 -7) -1 (-52 -0) +1 (52 - 0)
= -108 +52 -52
= -4

X = Nx/D = -4/-4 =1

इसी प्रकार

$$Ny = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 52 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 52 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 52 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1\ (-52\ -0)\ -9\ (-2\ -14)\ +1\ (0 - 104)$

$= -52 + 144 - 104$

$= -12$

$Y = Ny/D \;=\; -12/-4 \quad = \quad 3$

इसी प्रकार z का मान निकालने के लिये

$$Ny = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 52 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 5 & 52 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 52 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +9 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1\ (0\ -52)\ -9\ (0\ -104)\ +9\ (2 - 10)$

$= -52 + 104 - 72$

$= -20$

$Z = Nz/D = \; -20/-4 \; = 5$

उत्तर $= x = 1, y = 3, z = 5$

5.6 आगत निर्गत विश्लेषण (Input Output Analysis)

5.6.1 आगत निर्गत विश्लेषण का इतिहास

आगत निर्गत विश्लेषण को सर्वप्रथम फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने **(Quesnay)** ने अपने सिद्धान्त **Tableau Economique** के अर्न्तगत प्रस्तुत किया था। परन्तु इसका विकास *''आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति''* के रूप में हारवर्ड विश्वविद्यालय के प्रो0 वैसिली. डब्लू. लियोनतिफ **(Wassily. W. Leontief)** ने किया। इस आर्थिक विश्लेषण के क्षेत्र में महान योगदान के लिये उन्हे 1973 में नोबेल पुरस्कार भी प्रदान किया गया।

आगत निर्गत विश्लेषण को अन्तः औद्योगिक प्रवाह विश्लेषण या अन्तः औद्योगिक सम्बन्ध विश्लेषण, क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण तथा बहु–क्षेत्रीय प्रवाह विश्लेषण भी कहा जाता है।

आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था की परस्पर निर्भरताओं तथा जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के अध्ययन हेतु किया जाता है। यह विश्लेषण अर्थव्यवस्था के सामान्य सन्तुलन की व्याख्या करते हुये विभिन्न क्षेत्रों में निर्गतों के आबंटन को प्रस्तुत भी करता है। लियोन्तिफ ने अमेरिका के लिये वर्ष 1919, 1929 एवं 1939 के लिये ऐसे ही सारिणियों का प्रस्तुतीकरण दिया था।

इस तकनीक का मूल आधार अर्थव्यवस्था के विभिन्न उद्योगों की परस्पर निर्भरता की मान्यता है जो आगत निर्गत के सम्बन्धों के रूप में उदय होती है। एक उद्योग की आगत दूसरे की निर्गत होती है और विलोमशः भी। अंततः उनके परस्पर सम्बन्धों के फलस्वरूप समस्त अर्थव्यवस्था में पूर्ति और मांग का सन्तुलन स्थापित हो जाता है।

5.6.2 आगत निर्गत विश्लेषण की मान्यताएं

1.) सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था दो क्षेत्रों में विभाजित है। अंतः उद्योग क्षेत्र और अंतिम मांग क्षेत्र सामान्यतः यह मान लेते हैं कि n उद्योग और n वस्तुएं हैं।
2.) प्रत्येक क्षेत्र का उप विभाजन किया जा सकता है।
3.) प्रत्येक उद्योग मात्र एक समांग वस्तु की समांग इकाइयों का उत्पादन करता है। यदि कोई उद्योग दो या अधिक वस्तुओं का एक निश्चित अनुपात में उत्पादन करता है, तो उन्हे एक समांग वस्तु के रूप में लिखा जा सकता है।
4.) किसी एक उद्योग का निर्गत किसी अन्य उद्योग के आगत के रूप में काम में लाया जाता है।
5.) उत्पादन की तकनीक समान रहती हैं
6.) आगत तथा निर्गत मुद्रा मूल्य के रूप में व्यक्त किये जाते हैं।
7.) उत्पादन की बाहय मितव्ययिताएं तथा अमितव्ययिताएं नहीं पायी जाती।
8.) अर्थव्यवस्था पूर्णतः सन्तुलित हैं
9.) सभी आगतों को एक स्थिर अनुपात में प्रयुक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में उत्पादन स्थिर प्रतिफल के नियम के अन्तर्गत होता है।
10.) श्रम एकमात्र प्राथमिक आगत है।

5.6.3 आगत निर्गत विश्लेषण के अध्ययन में तीन महत्वपूर्ण बिन्दु

आगत निर्गत विश्लेषण के अध्ययन में तीन महत्वपूर्ण बिन्दुओं को रेखांकित करना आवश्यक है।

1.) यह विश्लेषण उत्पादन से सम्बन्धित है। मांग फलन का कोई स्थान नहीं है। यहां समस्या तकनीकी है। एक उत्पादक प्रायः यह निर्धारित करने को उत्सुक होता है कि क्या उत्पादित करना है और कितनी मात्रा में आगतों को उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त करना है।

2.) यह विश्लेषण आनुभविक अनुसंधान पर आधारित है। यह विशेषता इसे वालरस के सामान्य संतुलन विश्लेषण से भिन्न करती है। आगत निर्गत मॉडल एक संकुचित मॉडल है क्योंकि यह उत्पादन पक्ष का ही अवलोकन करता है और अर्थव्यवस्था के मांग पक्ष की पूर्णतया अवहेलना करता है।

3.) इस तकनीक से ज्ञात किया गया निर्गत बाजार की संतुलन दशाओं का संतुष्ट नहीं करता है। यहां समान्य संतुलन विश्लेषण का प्रयोग मात्र आगत निर्गत विश्लेषण के अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के परस्पर निर्भरता के ही संदर्भ में लिया गया है।

यह अन्तः सम्बन्ध इसलिये उत्पन्न होता है क्योकि प्रत्येक उद्योग दूसरे उद्योग के निर्गत को आगत के रूप में प्रयुक्त करता है। उदाहरण के लियेः स्टील का प्रयोग रेलवे उद्योग एवं पेट्रोलियम उद्योग के द्वारा होता है। इसी प्रकार रेलवे और पेट्रोल स्टील उद्योग के द्वारा प्रयोग किया जाता है। अतः मूल समस्या इस बात को जानना है कि अंतिम उपभोग के लिये क्या बच सकता है और इस निर्गत की कितनी मात्रा उत्पादन प्रक्रिया के आगतों के रूप में प्रयोग की जाय जिससे कि ये शुद्ध निर्गत प्राप्त हो सके यदि मांग ब्यौरा प्राप्त हो जाय तो इस विश्लेषण का प्रयोग अग्रिम उत्पादन आवश्यकताओं की भविष्यवाणी में किया जा सकता है। आर्थिक नियोजन तथा पिछड़े इलाकों की आर्थिक विकास की समस्या में भी इस विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। इसका अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रयोग राष्ट्रीय आय लेखांकन आव्यूह की रचना में है।

5.7 लियोनतिफ का आगत निर्गत मॉडल

आगत निर्गत विश्लेषण के अध्ययन हेतु लियोनतिफ ने मान्यताओं के आधार पर तीन मुख्य मॉडल को प्रस्तुत किया–

1.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल
2.) लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत बन्द मॉडल
3.) लियोनतिफ का प्रोवैगिक मॉडल

5.7.1 लियोनतिफ का स्थैतिक आगत निर्गत खुला मॉडल

खुले मॉडल के अन्तर्गत **n** उत्पादक क्षेत्रों द्वारा निर्मित **n x n** क्रम के आगत निर्गत व्यूह में खुला क्षेत्र (open sector) ले लिया जाता है। खुले क्षेत्र के अन्तर्गत तथ्यों की सूचना बाहरी रूप द्वारा प्राप्त होती है। तथा इसका सम्बन्ध अन्य उत्पादक क्षेत्रों से नहीं होता। अर्थात् इसका तात्पर्य उस क्षेत्र से है जहां उद्योगों के प्राप्त निर्गतों के एक भाग कर पूर्ण रूप से उपभोग हेतु मांग की जाती है।

उदाहरणः

अर्थव्यवस्था तीन क्षेत्रों में विभाजित है। यहां पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि ***कृषि, उद्योग को अन्तः उद्योग के रूप में तथा घरेलू क्षेत्र को अंतिम क्षेत्र के रूप में प्रदर्शित किया***

गया है। आगत निर्गत सारिणी में तीनों क्षेत्रों के निर्गत को पंक्तियों (rows) द्वारा क्षैतिज रूप में दर्शाया गया है एवं इन क्षेत्रों के आगत को स्तम्भों (column) द्वारा लम्बवत् रूप में दर्शाया गया है।

प्रथम पंक्ति का कुल योग 300 इकाइयां है जो कृषि का कुल निर्गत प्रदर्शित करती है। इसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र में, 200 इकाइयां उद्योग तथा शेष 50 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में आगत के रूप में प्रयोग में लाई जाती हैं।

सारिणी की द्वितीय पंक्ति में उद्योग क्षेत्र के कुल उत्पादन को प्रदर्शित किया गया है। उद्योग क्षेत्र में कुल 150 इकाइयों का उत्पादन होता है। जिसमें से 55 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 70 इकाइयां घरेलू क्षेत्र में प्रयुक्त होती हैं।

इसी प्रकार से स्तम्भों में इन क्षेत्रों के लागत को दर्शाया गया है। प्रथम स्तम्भ इस बात को सूचित करता है कि कृषि क्षेत्र में 300 इकाइयों का कुल उत्पादन करने के लिये 125 इकाइयों की लागत होती है, जिसमें से 50 इकाइयां स्वयं कृषि क्षेत्र से, 55 इकाइयां उद्योग तथा 20 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं। द्वितीय स्तम्भ यह दर्शाता है कि उद्योग की 150 इकाइयों के उत्पादन के लिये 225 इकाइयों के बराबर लागत लगाई जाती है। जिसमें से 200 इकाइयां कृषि, 25 इकाइयां स्वयं उद्योग तथा 30 इकाइयां घरेलू क्षेत्र से आगत के रूप में काम में लाई जाती हैं।

तृतीय स्तम्भ में शून्य यह प्रकट करता है कि घरेलू क्षेत्र उपभोग क्षेत्र है जो कुछ भी विक्रय नहीं करता।

सारिणी –1 : आगत निर्गत सारिणी

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	50	200	50	300
	2. उद्योग	55	25	70	150
	3. घरेलू	20	30	0	50
	कुल लागत	125	255	120	500

इस मॉडल में न सिर्फ विभिन्न उद्योगों के लिये आवश्यक आगतों पर अपितु उपभोक्ताओं द्वारा प्रस्तुत उपभोग मांग (अंतिम भोग) को भी प्रदर्शित किया गया है। अतः यह खुला मॉडल है। **उपर्युक्त सारिणी की सहायता से *सामान्य प्रदेश व्यूह* की रचना की जा सकती है।**

सारिणी –2 : प्रदेश व्यूह

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल निर्गत
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	x_{11}	x_{12}	D_1	x_1
	2. उद्योग	x_{21}	x_{22}	D_2	x_2
	3. घरेलू	x_{31}	x_{23}	O	x_3

स्तम्भों को लेने पर निम्न उत्पादन फलन बनेगा।

$$X_1 = f_1 (x_{11}, x_{21}, x_{31})$$

अथवा $300 = f_1 (50, 55, 20)$ (सारिणी 1 के अनुरूप)

$$X_2 = f_2 (x_{12}, x_{22}, x_{23})$$

अथवा $150 = f_2 (200, 25, 30)$

इसी प्रकार यदि 'n' उत्पादक क्षेत्र हैं तो क्षेत्र n का उतपादन फलन इस प्रकार होगा

$$X_n = f_n (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{nn})$$

सारिणी की पंक्तियां प्रत्येक उत्पाद की मांग एवं पूर्ति के बीच समन्वय को प्रदर्शित करती हैं।

अर्थात् $X_1 = x_{11} + x_{12} + D_1$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + D_2$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32}$$

यदि अब यह मान लिया जाय कि i उद्योग का कुल उत्पादन n उद्योगों द्वारा आगत के रूप में काम में लाया जाता है, तब ऐसी दशा में

$$X_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{in} + D_i$$

चूंकि लियोनतिफ ने स्थिर तकनीकी गुणांक (आगत निर्गत अनुपात) की धारणा को स्वीकार किया है, अतः ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक (Technical Coefficient) होगा –

$$a_{ij} = x_{ij} / x_j$$

यहां x_{ij} = i वां उद्योग का उत्पादन जो कि j वें उद्योग द्वारा काम में लाया जाता है।

x_{ij} = j वें उद्योग का कुल उत्पादन

तकनीकी व्यूह (आगत निर्गत गुणांक)

	क्षेत्र	क्रय क्षेत्र			कुल उत्पादन या कुल आय
		कृषि (1)	उद्योग (2)	अंतिम मांग (3)	
विक्रय क्षेत्र	1. कृषि	0.16	1.33	50	300
	2. उद्योग	0.18	0.16	70	150
	3. घरेलू	0.06	0.20	0	50

5.8 तकनीकी गुणांक

इसको आगत ज्ञात करने के लिये वांक्षित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग दे दिया जाता है। उदाहरणार्थ, कृषि क्षेत्र का कुल उत्पादन 300 इकाइयां हैं तथा कृषि क्षेत्र का आगत 50, 55 तथा 20 इकाइयां हैं, ऐसी दशा में तकनीकी गुणांक

$50/300 = 0.16$, $55/300 = 0.18$ तथा $20/300 = 0.06$

इसी प्रकार से दूसरे क्षेत्रों का तकनीकी गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

5.9 आगत निर्गत विश्लेषण की सीमाएं

1.) **मान्यताओं की अव्यावहारिकता**
गुणंक का स्थिर होना, अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूंजी संरचना समान होना अवास्तविक है। क्योकि अधिक उत्पादन हेतु आगतों में परिवर्तन सम्भव है और प्रत्येक क्षेत्र में पूंजी की मांग भिन्न ही होती है।

2.) **जटिलता–**
अनेक संरचनात्मक समीकरण एवं गणितीय तकनीकों की सहायता लेने के लिये उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है जो अत्यन्त जटिल हैं

3.) **समरूप उत्पाद–**
एक उद्योग में केवल समरूप अथवा समांग वस्तुओं का उत्पादन की मान्यता भी सही नहीं है क्योंकि आज एक ही उद्योग के अन्तर्गत कई प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन किया जाना सम्भव है।

4.) **रेखीय सम्बन्धों का न होना–**

यह माना गया है कि एक उद्योग का आगत दूसरे उद्योग का निर्गत है, अतः उद्योगों में रेखीय सम्बन्ध विद्यमान है जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों कर अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि सदैव आगत में वृद्धि के बराबर नहीं होती।

5.) **भौतिक इकाइयों का प्रयोग–**
भौतिक इकाइयों के रूप में आगत निर्गत विश्लेषण के सन्तुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान लगाना कठिन होता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न वस्तुओं की भौतिक माप भी भिन्न होती है।

6.) **साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा–**
तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता का साधन प्रतिस्थापन की सम्भावनाओं को नकार देती है। परन्तु प्रतिस्थापन की सम्भावनाएं अल्प काल में भी बनी रहती हैं।

7.) **कुछ साधनों की उपेक्षा–**
इस विश्लेषण में उत्पादन क्षेत्रों का निर्माण करते समय केवल उद्योगों को ही सम्मिलित किया जाता है। आगत निर्गत विश्लेषण बैंकिग सेवाओं तथा बीमा व्यवसाय आदि की अवहेलना करता है अथवा इन्हे अन्य क्षेत्रो में समाहित कर लेता है।

5.10 आगत निर्गत विश्लेषण का महत्व

आगत निर्गत विश्लेषण का नियोजन एवं भारत के इस पंचवर्षीय योजनाओं में प्रयोग बहुता के साथ किया गया। एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था उन त्रुटियों को दूर करने का प्रयास करता है जो एक गैर नियोजित अर्थव्यवस्था अन्तः उद्योग सम्बन्धों को मुक्त बाजार के भरोसे छोड़ देता है जो Trial and error के प्रयोग से इसमें सामन्जस्य स्थापित कर पाती है। वहीं दूसरी ओर एक सुनियोजित अर्थव्यवस्था इन जरूरी सम्बन्धों को पूर्ववत ही संचालित करके उद्योगों को उसी तरीके से निर्देशित कर देती है।

सोवियत यूनियन और कुछ दूसरी अर्थव्यवस्था ने (भारत सहित) नियोजन को एक बड़े पैमाने पर लागू किया जिससे कि अर्थव्यवस्था में गतियुक्त विकास हो सके।

लियोनतिफ के इस आगत निर्गत विश्लेषण को अन्तः उद्योगों सम्बन्धों के अतिरिक्त भी प्रयोग में लाया जा सकता है। जैसे कि देश अथवा देशों के प्रशासनिक क्षेत्रों के सन्दर्भ में।

आगत निर्गत विश्लेषण में कुछ तकनीकी सुधार करके देश औद्योगिक एवं कृषि advancement को प्राप्त कर सकता है, यदि अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र के विभिन्न क्षेत्रों के सम्बन्धों को सही प्रकार से जोड़ दिया जाय।

P.P.Pillai ने सर्वप्रथम केरल की अर्थव्यवस्था के लिये आगत निर्गत का ढांचा तैयार किया। इस ढांचे का विश्लेषण करने के लिये उन्होने 24 औद्योगिक क्षेत्रों को चिन्हित किया

और 24 X 24 आगत निर्गत आव्यूह के लिये बड़े पैमाने पर आंकड़े एकत्रित करने की कठिनाई के कारण पिल्लई जी ने अपने अध्ययन को राज्य की अर्थव्यवस्था के औद्योगिक क्षेत्र तक ही सीमित किया और 17 क्षेत्रों को समावेश किया।

उनके अध्ययन का यह निष्कर्ष था कि केरल एक निश्चित रूप से खुली अर्थव्यवस्था है जो शेष भारत एवं दूसरे अन्य देशों के साथ व्यापार करती है।

सम्पूर्ण भारत स्तर पर Indian Statistical Institute द्वारा सन 1950–51 में आगत निर्गत सारिणी की शुरुआत हुयी। जिसमें अर्थव्यवस्था के बड़े क्षेत्रों की सीमित संख्या का अध्ययन किया गया क्योंकि पर्याप्त आंकड़े उपलब्ध नहीं थे। 36X36 का प्रदेश आव्यूह 1951–52 में तैयार किया गया जिसमें बाद में कुछ संशोधन किये गये। 1952 में योजना आयोग ने CSO के माध्यम से आगत निर्गत विश्लेषण पर कार्य करना प्रारम्भ किया। 1960–61 में Long Run Planning Cell द्वारा एक आव्यूह तैयार किया गया।

पांचवी पंचवर्षीय योजना (1975–79) की उत्पादन लक्ष्य की draughat outline 66X66 आव्यूह के आधार पर निर्धारित की गयी। साथ 4X4 आव्यूह को उत्पादन लक्ष्य तय करने के उद्देश्य से प्रयुक्त किया गया। अतः आगत निर्गत विश्लेषण, भारत की आर्थिक नियोजन में एक महत्वपूर्ण स्थान रखती है।

5.11 आगत निर्गत विश्लेषण की सीमाएं

1.) मान्यताओं की अव्यावहारिकता
गुणंक का स्थिर होना, अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूंजी संरचना समान होना अवास्तविक है। क्योकि अधिक उत्पादन हेतु आगतों में परिवर्तन सम्भव है और प्रत्येक क्षेत्र में पूंजी की मांग भिन्न ही होती है।

2.) जटिलता–
अनेक संरचनात्मक समीकरण एवं गणितीय तकनीकों की सहायता लेने के लिये उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है जो अत्यन्त जटिल हैं

3.) समरूप उत्पाद–
एक उद्योग में केवल समरूप अथवा समांग वस्तुओं का उत्पादन की मान्यता भी सही नहीं है क्योंकि आज एक ही उद्योग के अन्तर्गत कई प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन किया जाना सम्भव है।

4.) रेखीय सम्बन्धों का न होना–

यह माना गया है कि एक उद्योग का आगत दूसरे उद्योग का निर्गत है, अतः उद्योगों में रेखीय सम्बन्ध विद्यमान है जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों कर अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि सदैव आगत में वृद्धि के बराबर नहीं होती।

5.) **भौतिक इकाइयों का प्रयोग–**
भौतिक इकाइयों के रूप में आगत निर्गत विश्लेषण के सन्तुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान लगाना कठिन होता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न वस्तुओं की भौतिक माप भी भिन्न होती है।

6.) **साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा–**
तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता का साधन प्रतिस्थापन की सम्भावनाओं को नकार देती है। परन्तु प्रतिस्थापन की सम्भावनाएं अल्प काल में भी बनी रहती हैं।

7.) **कुछ साधनों की उपेक्षा–**
इस विश्लेषण में उत्पादन क्षेत्रों का निर्माण करते समय केवल उद्योगों को ही सम्मिलित किया जाता है। आगत निर्गत विश्लेषण बैंकिग सेवाओं तथा बीमा व्यवसाय आदि की अवहेलना करता है अथवा इन्हे अन्य क्षेत्रो में समाहित कर लेता है।

5.12 सारांश –

सारणिक के अध्ययन से रेखीय युगपत समीकरणो हल करने की प्रक्रिया सहज हो जाती है। वर्ग मैट्रिक्स को हम सारणिक से सम्बद्ध कर सकते हैं। दो अथवा दो से अधिक क्रमों वाले सारणिक में प्रत्येक अवयव के अनुरूप एक निम्न क्रय का सारणिक होता है। जिसे हम लघुखण्ड कहते हैं। अनेक प्रकार के आर्थिक समस्याओं को सुगमतापूर्वक हल करने में भी सारणिक द्वारा सहायता मिलती है। इस तकनीक का प्रयोग आगत निर्गत विश्लेषण (Input Output Analysis) समष्टि भावी अर्थशास्त्र इत्यादि के क्षेत्र में वृहद स्तर पर किया जाता है।

चरों के मूल्य निर्धारण में सहायक होने के कारण सारिणक को निर्धारक भी कहा जाता है। किसी सारणिक के अंतर्गत जितने स्तम्भ व पंक्तियां होती है, वह संख्या ही सारणिक का क्रम कहलाती है। किसी भी सारणिक का क्रम अथवा कोटि उसकी पंक्ति और स्तम्भों की संख्याओं से तय होती है। किसी सारणिक का मान ज्ञात करने के लिये उस सारणिक को किसी पंक्ति तथा स्तम्भ के अवयवों के रूप में प्रदर्शित करना सारणिक का प्रसार कहलाता है। सारणिक का प्रसार उपसारणिक की सहायता से किया जाता है। सहखण्ड की अवधारणा, उपखण्ड से जुड़ी है। किसी अवयव की उपसारिणक को अगर चिन्ह $[(-1)^{i+j}]$ के साथ लिखी जाय तो वह उस अवयव का सहखण्ड है। सारणिक विधि द्वारा युगपद समीकरणो को हल करने की विधि ही क्रेमर नियम है।
फ्रांसीसी अर्थशास्त्री केने द्वारा प्रस्तुत किया गया आगत निर्गत विश्लेषण और तदुपरान्त इसको विकसित करते हुये लियोनतिफ द्वारा आर्थिक विश्लेषण की इस विधि का प्रयोग अर्थव्यवस्था

की परस्पर निर्भरताओं और जटिलताओं को समझने के लिये अन्तः उद्योग के सम्बन्धों के अध्ययन हेतु किया गया। इस विश्लेषण का आधार सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था में औद्योगिक अन्तः सम्बन्ध और अन्र्त निर्भरताएं है। एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिये आगत का स्वरूप ले लेता है।लियोनतिफ ने स्थैतिक आगत निर्गत खुला एवं बन्द मॉडल के साथ गत्यात्मक आगत निर्गत मॉडल भी प्रस्तुत किया। स्थिर तकनीकी गुणांक के माध्यम से आगत निर्गत अनुपात की धारणा को स्वीकार किया। पूंजी का प्रभाव सम्मिलित करके प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल का एक विशिष्ट लक्षण प्रस्तुत किया।

5.13 शब्दावली

1.) **आगत** – उत्पादन क्रिया में प्रयुक्त होने वाली वस्तु।
2.) **निर्गत** – उत्पादन प्रक्रिया से निर्मित होने वाली वस्तु।
3.) **आगत निर्गत सारिणी** – विभिन्न क्षेत्रों के निर्गत को पंक्तियों द्वारा एंव आगतों को स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित करती सारिणी, जिसमें कुल उत्पादन एवं कुल लागत भी दर्शायी जाय।
4.) **प्रदेश व्यूह** – आगत निर्गत सारिणी की सहायता से सामान्य व्यूह जिसमें अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगों को पंक्तियों और स्तम्भों में दर्शाया जाय जहां पंक्ति क्षेत्रों की मौद्रिक प्राप्तियां एवं स्तम्भ क्षेत्रों की कुल लागत को प्रदर्शित करते हैं। भौतिक रूप में पंक्ति निर्गत की पूर्ति या वितरण को प्रदर्शित करती है और स्तम्भ उद्योगों की आगतों को।
5.) **तकनीकी गुणांक** – इसे आगत निर्गत अनुपात भी कहते हैं। इसका परिकलन वांक्षित क्षेत्र के आगत में उस क्षेत्र के कुल उत्पादन का भाग देने पर ज्ञात किया जाता है।
6.) **तकनीकी व्यूह** – ऐसा व्यूह जिसमें विभिन्न क्षेत्रों के उद्योगों के तकनीकी गुणांक को पंक्ति एवं स्तम्भों में दर्शाया जाय।

5.14 अभ्यास के लिये प्रश्न

1.) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते हैं ?
2.) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं हैं ?
3.) लियोनतिफ के आगत निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।
4.) आगत निर्गत विश्लेषण को सर्वप्रथम प्रस्तुत करने वाले अर्थशास्त्री का नाम क्या था ?
5.) लियोनतिफ के आगत निर्गत पूंजी प्रवाह पद्धति का विकास करने के लिये उन्हे क्या सम्मान दिया गया ?
6.) प्रावैगिक आगत निर्गत मॉडल में किस की भूमिका एक विशिष्ट लक्षण का रूप लेती है ?
7.) तकनीकी गुणांक को और किस नाम से जाना जाता है ?

उत्तर

4. केने 5. 1973 का नोबेल पुरस्कार

6. पूंजी निवेश की 7. आगत निर्गत अनुपातं

5.15 वस्तुनिष्ठ प्रश्न

(1) यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भो में और स्तम्भों को पंक्तियो में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान रहता है।

(2) अगर दो पंक्तियों या स्तम्भों का स्थान परिवर्तित किया जाय तो चिन्ह .... हो जाता है।

(3) सारणिक एक .... आव्यूह का मान है।

(4) अगर पंक्ति या स्तम्भ को किसी मानक (γ) से गुणा करें तब नये सारणिक का मान पुराने सारणिक के कितने गुना होगा?

उत्तर (1) अपरिवर्तित (2) परिवर्तित (3) वर्ग (4) γ गुना

निम्न प्रश्नों को क्रेमर नियम द्वारा हल कीजिये–

1) $2x - 3y = 7$
$3x + 5y = 1$

$4x + y + 6z = 7$
$x + 8y + 3z = 8$
$6\,x + 2z = 16$

उत्तर–

1) $x = 2 \quad y = -1$
2) $x = 3, \quad y = 1\ z = -1$

सिद्ध कीजिये

1) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b + c \\ 1 & b & b + c \\ 1 & c & a + b \end{vmatrix} = 0$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)$$

5.16 निबन्धात्मक प्रश्न

1) सारणिक क्या? इसकी मुख्य विशेषताओं का वर्णन कीजिये।

2) सारणिक के विशेषताओं को उदाहरण सहित समझाइये।

3) निम्न सारणिकों का मान निकालिये:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

4) आगत निर्गत विश्लेषण से आप क्या समझते है।

5) आगत निर्गत विश्लेषण की क्या मान्यताएं है।

6) लियोत्तिफ के आगत्र निर्गत खुला निदर्श की गणित द्वारा व्याख्या कीजिये।

7) निम्नलिखित आगत निर्गत सारणी से सम्बन्धित प्रावैधिक गुणांक सारणी बनाइये।

उद्योग	1	2	अंतिम योग	कुल उत्पादन
1	20	20	60	100
2	15	15	20	50
श्रम	10	15		

5.17 सन्दर्भ सहित ग्रन्थ

1) Agarwal.H.S: (1978) "A Mathematical Approval to Economic Theroy", Laxmi Narayan Agrawal, Agra
2) एस0 एम0 शुक्ला एवं सहाय: (2004) परिणात्मक पद्धतियां, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
3) Mehta.P.L: (2007) Managerial Economics, "Analysis, Problems & Cases", Sultan Chand & Sons, New Delhi

5.18 उपयोगी/सहायक ग्रन्थ

1.Kumar, Anil (2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

2.Singh,. S.P. ((2010) Principles of Statistics , S&Chand Publishing House.

3.Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.

4. Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

इकाई 6 – आंकड़ों के संकलन की विधियाँ

6.1 प्रस्तावना

आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी को अन्यन्त ही महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त है। आर्थिक समस्याओं के अध्ययन तथा उसके सम्बन्ध मे नीति निर्धारण आर्थिक नियमों के प्रतिपादन तथा उनके परीक्षण की दिशा में सांख्यिकीय अध्ययन का उपयोगी योगदान है। अतः इस इकाई में आप आँकड़ों के संकलन की विधियां, उनका वर्गीकरण एवं आँकड़ों के सम्पान के विषय में महत्वपूर्ण जानकारी प्राप्त करेंगे।

सांख्यिकीय विश्लेषण का कार्यक्षेत्र मुख्य रूप से मात्रात्मक आँकड़ों (quantitative data) तथा उनमें पायी जाने वाली विविधताओं से सम्बन्धित है। मात्रात्मक आँकड़ों से हमारा अभिप्राय ऐसे आँकड़ों तथा संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सके। आँकड़ों के आधार पर ही माल्थस ने जनसंख्या के महत्वपूर्ण सिद्धान्त का प्रतिपादन किया है। अतः यह इकाई आप सभी के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

6.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप

1. समंकों की परिभाषा एवं उनका उद्देश्य ज्ञात करेंगे।
2. समंकों के विभिन्न प्रकारों की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।
3. समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीकरण का अर्थ जान सकेंगे।
4. समंकों का सम्पादन किस प्रकार किया जाता है इस विषय में पूर्ण जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

आँकड़ों के संकलन का आशय आँकड़ों के एकत्र किये जाने से है। सांख्यिकीय रीतियों या अनुसन्धानों में आंकड़ों का संकलन प्रथम महत्वपूर्ण चरण है। सांख्यिकीय अनुसंधान के विशाल भवन का निर्माण संकलित समंकों की नींव पर होता है, यदि इसमें कोई रोष या त्रुटि रहे तो यह सारे अनुसन्धान को प्रभावित करेगा और निष्कर्ष अशुद्व होगा।

आंकड़ों का संकलन किसी भी प्रकार से क्यों न किया जाये इसमें कमी रह जाना स्वाभाविक है। इसी कमी को दूर करने के लिए जो क्रिया अपनाई जाती है उसे सम्पादन कहते हैं। सम्पादन की प्रक्रिया में समंकों का क्रमबद्ध आयोजन, जाँच तथा संशोधन, शुद्वता का स्तर आदि निश्चित किये जाते हैं। समंकों के संकलन के बाद सम्पादन का कार्य किया जाता है। संकलित समंकों का देर अत्यवस्थित एवं अर्थहीन होता है जिसे व्यवस्थित एवं अर्थपूर्ण करने के लिए अनुसन्धानकर्ता उसका सम्पादन करता है। बिना सम्पादन की क्रिया के संकलित समंकों का कोई उचित उपयोग सम्भव नहीं हो पाता है। सम्पादन के अभाव में, कितना भी महत्वपूर्ण अनुसंधान क्यों न हो व्यर्थ हो जायेगा।

क्रम, पैटन एवं टेबल के शब्दों में, ''सम्पादन की प्रक्रिया किसी भी प्रकार महत्वहीन व नैत्यिक क्रिया नहीं है, बल्कि इस प्रक्रिया के लिए विशिष्ट योग्यता, सतक्रता, सावधानी तथा वैज्ञानिक निष्पक्षता का दृढ़ता से पालन करना आवश्यक होता है।'' यही कारण है कि सांख्यिकीय आंकड़ों के सम्पादन पर अधिक बल दिया जाता है। सम्पादन का कार्य अत्यधिक कठिन कार्य है, इसमें उच्चस्तरीय सम्पादन, तकनीक तथा कुशलता की आवश्यकता होती है।

वर्गीकरण तथा सारणीयन की सुविधा के लिए संकेतों (codes) का प्रयोग भी इस प्रक्रिया के अन्तर्गत आता है।

6.3 आंकड़ों के संकलन का आषय

सांख्यिकीय अनुसंधान का आयोजन समंकों के संकलन की प्रक्रिया की प्राथमिकता की आवश्यकता है। अनुसंधान सम्बन्धी प्रारम्भिक व्यवस्था के बाद उसकी चर्चा हमने ऊपर की है, समंकों के संकलन का कार्य आरम्भ किया जाता है। अनुसंधान से सम्बन्धित इकाइयों से अनुसंधान के उद्देश्य की दृष्टि से जानकारी प्राप्त करना ही 'समंक संकलन' कहलाता है।

संग्रहण के विचार से समंकों के प्रकार (Types of Data with Reference to Collection)

संग्रहण के विचार से समंक दो प्रकार के होते हैं:

(क) **प्राथमिक समंक** (Primary Data) एवं

(ख) **द्वितीयक समंक** (Secondary Data) ।

(क) प्राथमिक समंक (Primary Data) –ये वे समंक हैं जिन्हें अनुसन्धान करने वाला अपने प्रयोग में लाने के लिए पहली बार इकट्ठे करता है। प्रथम बार संकलित होने के कारणइन्हें प्राथमिक समंक कहा जाता है। **होरेस सेक्राइस्ट** के कथनानुसार , ''*प्राथमिक आंकड़ों से यह आशय है कि वे मौलिक हैं अर्थात् जिनका समूहीकरण बहुत ही कम या नहीं हुआ है, घटनाओं का अंकन या गणन उसी प्रकार किया गया है जैसा पाया गया है। मुख्य रूप से वे कच्चे पदार्थ होते हैं।*' जैसे, यदि कोई व्यक्ति ग्रामीण ऋण के विषय में प्रथम बार नये सिरे से आंकड़े एकत्र करता है तो संकलित सामग्री उसके लिए प्राथमिक कहलायेगी।

(ख) **द्वितीयक समंक** (Secondary Data)–ये वे समंक हैं जिनका संकलन पहले से किसी अन्य व्यक्ति या संस्था द्वारा किया जा चुका है और अनुसन्धानकर्ता उनको ही अपने प्रयोग में लाता है। यहां वह संग्रहण नहीं करता वरन् किसी अन्य उद्देश्य के लिए संकलित सामग्री को ही प्रयोग में लाता है। उदाहरण के लिए, यदि कोई व्यक्ति सरकार द्वारा प्रकाशित विदेषी आयात–निर्यात के समंकों का प्रयोग भुगतान–सन्तुलन ज्ञात करने के लिए करता है तो यहां आयात–निर्यात के समंक उसके लिए द्वितीयक समंक होंगे। इस प्रकार की सामग्री अपने मौलिक रूप में नहीं होती है, वरन् सारणी, प्रतिशत, आदि में व्यक्त होती है। **ब्लेयर** के शब्दों में, ''द्वितीयक समंक वे हैं जो पहले से अस्तित्व में हैं और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर में नहीं बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्रित किये गये हैं''

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की रीतियां (Methods of Collecting Primary Data)

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की प्रमुख रीतियां (चाहे संगणना अनुसंधान हो या निदर्शन अनुसंधान हो) निम्नलिखित हैं:

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान
2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान
3. स्थानीय स्रोतों या सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति सूचना देने वालों (अर्थात् सूचकों) द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करना।
4. प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों का भरना।

6.4.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation):–

इस रीति में अनुसन्धानकर्ता सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्ध स्थापित करके समंक एकत्र करता है। यह रीति बहुत सरल है। इसमें अनुसन्धानकर्ता स्वयं उन लोगों के सम्पक्र में आता है जिनके विषय में आंकड़े एकत्र करना चाहता है। यदि अनुसन्धनकर्ता व्यवहारकुशल, धैर्यवान व मेहनती है तो इस रीति द्वारा संकलित आंकड़े बहुत विश्वसनीय होते हैं।
उपयुक्तता:– यह प्रणाली निम्नलिखित परिस्थितियों में उपयुक्त है:

(1) जहां शुद्धता पर अधिक जोर देना हो। (2) जहां अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित तथा स्थानीय प्रकृति का हो। (3) जहां अनुसन्धान की जटिलता के कारण यह आवश्यक समझा जाता हो कि अनुसन्धानकर्ता स्वयं उपस्थित रहे। (4) जहां आंकड़ों की मौलिकता पर जोर देना हो।

गुण (Merits)

(1) उच्च स्तर की शुद्धता–अनुसन्धानकर्ता के स्वयं उपस्थित रहने के कारण परिणाम में उच्च स्तर की शुद्धता मिलती है।

(2) मौलिकता–समंकों में मौलिकता रहती है।

(3) लोचदार–यह प्रणाली लोचदार है क्योंकि अनुसन्धानकर्ता आवश्यकतानुसार प्रश्नों में हेर–फेर कर सकता है।

(4) सजातीयता व तुलनीयता–अनुसन्धानकर्ता द्वारा आंकड़े स्वयं एकत्र किये जाते हैं, अतः उनमें सजातीयता के साथ–साथ तुलनीयता का भी गुण पाया जाता है।

(5) शुद्धता की जांच का अवसर–अनुसन्धानकर्ता अपने निरीक्षण में ही सूचना देने वाले की सत्यता की जांच कर सकता है।

दोष (Demerits)

(1) विस्तृत क्षेत्रों के लिए अनुपयुक्त–विस्तृत क्षेत्रों के अध्ययन के लिए यह रीति उपयुक्त नहीं है, क्योंकि अनुसन्धानकर्ता स्वयं बड़े क्षेत्र में कार्य नहीं कर सकता।

(2) व्यक्तिगत पक्षपात–इस रीति में अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात के आ जाने की पूरी सम्भावना रहती है और इस प्रकार निष्कर्ष के अशुद्ध हो जाने का डर रहता है।

(3) समग्र की विशेषताओं का प्रकट न होना–अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित होने के कारण सम्भव है कि प्राप्त परिणाम निर्धारित क्षेत्र की विशेषता को पूरी तरह से प्रकट न कर सकें और निष्कर्ष भ्रामक निकल आयें।

(4) समय एवं धन का अधिक व्यय–इस रीति के अन्तर्गत समय अधिक लगता है तथा धन भी अधिक खर्च होता है। अनुसन्धान के परिणाम भी विलम्ब से प्राप्त होते हैं।

सावधानियां (Precautions)

(1) अनुसन्धानकर्ता को व्यवहारकुशल, परिश्रमी व धैर्यवान होना चाहिए ताकि यह सूचना देने वालों का विश्वास व सहयोग प्राप्त कर सके। (2) प्रश्न थोड़े, सरल, स्पष्ट और ऐसे होने चाहिए जिससे उत्तर देने वाले को बुरा न लगे। (3) यथासम्भव अनुसन्धानकर्ता को अपनी व्यक्तिगत भावनाओं और पक्षपात भाव को दूर रखना चाहिए, ताकि उनका प्रभाव अनुसन्धान पर न पड़े।

6.4.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation) :–

अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत होने पर अनुसन्धानकर्ता के लिए यह सम्भव नहीं हो पाता कि वह प्रत्यक्ष रूप से अनुसन्धान के क्षेत्र की सभी इकाइयों से प्रत्यक्ष सम्पक्र स्थापित कर समंक एकत्रित कर सके। ऐसी दशा में वह किसी ऐसे व्यक्ति से सूचनाएं प्राप्त करता है जिसे उस विषय की जानकारी है। इस रीति में अनुसन्धानकर्ता अप्रत्यक्ष एवं मौखिक रूप से सम्बन्धित व्यक्तियों के बारे में अन्य जानकार व्यक्ति से जिन्हें साक्षी कहते हैं, सूचना प्राप्त करता है।

उपयुक्तता (Utility) :– आंकड़ों के संग्रहण की इस रीति का प्रयोग निम्न दशाओं में किया जा सकता है।

(1) यदि अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत हो।

(2) सूचना देने वाले व्यक्तियों से व्यक्तिगत सम्पक्र करना सम्भव न हो, वे उसमें रुचि न ले रहे हों, वे जान–बूझकर सूचना देना न चाहते हों या सूचना देने में असमर्थ हों, आदि।

(3) जब व्यक्तियों के किसी समस्या के सम्बन्ध में विरोधी विचार हों।

(4) जब समस्या से सम्बन्धित व्यक्तियों से सम्पक्र करना उचित नहीं समझा जाये।

गुण (Merits)

(1) मितव्ययिता–यह रीति मितव्ययी है क्योंकि इस रीति में समय, धन व परिश्रम कम खर्च होता है।

(2) विस्तृत क्षेत्र–यह रीति वहां के लिए उपयुक्त है जहां अनुसन्धान क्षेत्र विस्तृत क्षेत्र हो या सूचक रुचि न ले रहे हों या और कोई ऐसी ही पेचीदा बात हो।

(3) विषेषज्ञों की सम्मति–विशेषज्ञों की सम्मति तथा सुझावों का लाभ अनायास ही इस रीति में प्राप्त हो जाता है।

(4) पक्षपात का कम प्रभाव–अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात का प्रभाव नहीं पड़ता है।

(5) गुप्त सूचना प्राप्त–इस विधि के अन्तर्गत उन सूचनाओं को भी प्राप्त किया जा सकता है जिनको देने के लिए सूचना देने वाला या तो तैयार नहीं होता अथवा सही सूचना नहीं देता।

दोष (Demerits)

(1) उच्च मात्रा की शुद्धता नहीं–परिणाम में उच्च मात्रा की शुद्धता की आशा नहीं रहती क्योंकि अनुसन्धानकर्ता प्रत्यक्ष रूप से सूचना देने वालों के सम्पक्र में नहीं आता।

(2) सूचना देने वाले की पक्षपात–भावना–जिन व्यक्तियों की सहायता से आंकड़े एकत्र किये जाते हैं उनकी पक्षपात की भवना का प्रभाव अनुसन्धान पर पड़ता है।

(3) सूचना देने वालों की अरुचि–जिन व्यक्तियों से सूचना एकत्र की जाती है वे प्रश्नों के उत्तर देने में लापरवाही बरतते हैं क्योंकि उनका निजी हित या अहित प्रत्यक्ष रूप में इस प्रश्न में नहीं होता है। इस प्रकार अधिकतर टालू काम करते हैं।

(4) एकरूपता की कमी–विभिन्न साक्षियों द्वारा अलग–अलग व्यक्तियों से सूचना एकत्र किये जाने के कारण कभी–कभी समंकों की एकरूपता समाप्त हो जाती है जिससे सही परिणाम पर पहुंचने में बाधा पहुंचती है।

सावधानियां (Precautions)

(1) जिनकी सहायता से आंकड़े एकत्र किये जा रहे हों उनकी बात पर बिना पुष्टि किये हुए पूर्ण विश्वास नहीं कर लेना चाहिए। (2) यह पूर्ण रूप से निश्चित कर लेना चाहिए कि सूचना देने वालों को तथ्यों का पूर्ण ज्ञान है तथा सूचना देने में वे रुचि रखते हैं। (3) इस बात को

ध्यान में रखना आवश्यक है कि जिस व्यक्ति की सहायता से सामग्री एकत्र की जा रही है वह उस विषय के पक्ष व विपक्ष में पक्षपातपूर्ण धारणाएं नहीं रखता है। यदि ऐसा हुआ तो परिणाम भ्रामक होगा।

1.स्थानीय सम्वाददाताओं द्वारा जानकारी प्राप्ति (Information througha Local Correspondents):– इस रीति को स्थानीय स्रोतों द्वारा सूचना–प्राप्ति (information througha local sources) भी कहा जाता है। इस रीति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्ता विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्ति नियुक्त कर देता है जो समय–समय पर अपने अनुभवों के आधार पर अपेक्षित सूचनाएं भेजते रहे हैं। वे व्यक्ति **सम्वाददाता** कहलाते हैं।

सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति के गुण–

(1) **विस्तृत क्षेत्र**–इस रीति द्वारा दूर–दूर तक फैले अनुसन्धान क्षेत्र से सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।

(2) **मितव्ययी**–इस रीति में धन, समय व श्रम की बचत होती है।

(3) **नियमितता**–इस रीति द्वारा सूचनाएं नियमित रूप से प्राप्त की जा सकती हैं।

सम्वाददाताओं द्वारा सूचना–प्राप्ति के दोष

(1) **मौलिकता का अभाव**–यदि सम्वाददाता अपने अनुमान को ही अधिक महत्व देकर सूचनाएं भेजता है तो उनमें मौलिकता की कमी हो जाती है।

(2) **एकरूपता का अभाव**–विभिन्न सम्वाददाताओं द्वारा विभिन्न स्थानों तथा विभिन्न विधियों द्वारा सूचना एकत्र किये जाने के कारण आंकड़ों में एकरूपता का अभाव रहता है। (3) **पक्षपात**–सम्वाददाताओं के पक्षपात व पूर्व–धारणाओं के कारण निष्कर्ष अभिनत हो सकते हैं।

(4) **सूचना–प्राप्ति में विलम्ब**–कभी–कभी सम्वाददाता सूचना भेजने में इतनी देरी कर देते हैं कि उस सूचना का महत्व ही समाप्त हो जाता है।

सावधानियां

(1) निष्पक्ष, कुशल एवं अनुभवी तथा व्यक्तिगत धारणाओं की भावना से दूर रहने वाले व्यक्तियों को सम्वाददाता नियुक्त किया जाना चाहिए।

(2) सम्वाददाता को अनुसन्धान के विषय में परिचित होना चाहिए।

(3) क्षतिपूरक त्रुटियों के सिद्धान्त पर अशुद्धियां समाप्त करने के लिए यथासम्भव कई सम्वाददाता होने चाहिए।

(4) सम्वाददाता ज्यादा आशावादी या निराशावादी नहीं होना चाहिए।

6.4.3 सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करना (Information througha Questionnaire to be filled in by Informants):–

इस रीति के अन्तर्गत अनुसनधानकर्ता समंक एकत्र करने के लिए प्रश्नावली (प्रश्नों की एक सूची जो सूचकों द्वारा स्वयं भरी जाती है) तैयार करता है और उन व्यक्तियों को भरने के लिए दे देता है जिनसे उसे सूचनाएं प्राप्त करनी है यदि सूचकों के पास प्रश्नावली को डाक द्वारा भेजा जाता है तो इस रीति को **डाक प्रश्नावली रीति** (Mailed Questionnaire Method) कहा जाता है।

सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करने की रीति के गुण

(1) **विस्तृत क्षेत्र**–यह रीति विस्तृत क्षेत्र के लिए प्रयोग की जा सकती है। अनुसन्धान का क्षेत्र जितना बड़ा होगा प्रश्नावली भरने की त्रुटियों की सम्भावना उतनी ही कम होगी।

(2) **मितव्ययिता**–यह एक मितव्ययी रीति है क्योंकि इसमें परिश्रम, समय व धन कम खर्च होता है।

(3) **मौलिकता एवं विश्वसनीयता**–इस रीति द्वारा प्राप्त समंक मौलिक एवं विश्वसनीय होते हैं क्योंकि प्रश्नावलियाँ स्वयं सूचकों द्वारा भरी जाती हैं।

सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करने की रीति के दोष

(1) **सीमित उपयोग**–इस रीति का उपयोग केवल शिक्षित व्यक्तियों के बीच में ही किया जा सकता है, क्योंकि अशिक्षित व्यक्ति प्रश्नावली को पढ़ की नहीं सकते हैं।

(2) **अपर्याप्त एवं अपूर्ण सूचना**–सूचकों पर किसी प्रकार का प्रतिबन्ध न होने से अधिकतर सूचक प्रश्नावलियों को भरकर वापस नहीं भेजते हैं तथा जो प्रश्नावलियां आती भी हैं वे अपूर्ण होती हैं।

(3) **सूचकों की अरुचि एवं भय**–सूचकों की उदासीनता, अरुचि, आलस्य, भय, शंका, आदि के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर भरे ही नहीं जाते हैं।

(4) **भ्रमात्मक निष्कर्ष**–अधूरी सूचनाएं अभिनति तथा विभ्रमों को जन्म देती है, अतः अनुसन्धान के निष्कर्ष भ्रमात्मक हो सकते हैं।

(5) **विश्वसनीयता की कमी**–कभी–कभी सूचक सही बात न बताकर गलत सूचना भर देते हैं, फलस्वरूप समंक विश्वसनीय नहीं हो पाते हैं।

(6) **प्रश्नावली पर निर्भरता**–यदि प्रश्नावली में पूछे गये प्रश्न अस्पष्ट व बहु–अर्थी होंगे तो प्रश्नों के उत्तर अस्पष्ट एवं अबोधगम्य हो सकते हैं।

सावधानियां

(1) सूचकों का सहयोग प्राप्त करना आवश्यक है इसके लिए उन्हें अनुसन्धान के उद्देश्य आदि के बारे में स्पष्ट रूप से बता देना चाहिए। अनुरोध पत्र की भाषा नम्र परन्तु प्रभावशाली होनी चाहिए।

(2) प्रश्नावली सरल एवं स्पष्ट होनी चाहिए। पूछे गये प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए जिससे सूचक की मानसिक, धार्मिक, साम्प्रदायिक, सामाजिक, आदि भावनाओं को ठेस न पहुंचती हो।

(3) प्रश्नावलियों की वापसी का प्रबन्ध ऐसा होना चाहिए जिससे कि वे शीघ्र प्राप्त हो सकें।

(4) सूचकों के उत्तरों की प्रति–जांच कराने की व्यवस्था भी होनी चाहिए।

6.4.4 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों का भरना (Schedules to be filled in by Enumerators) :–

इस रीति के अन्तर्गत प्रगणकों को अनुसूचियां (प्रश्नों की एक सूची जिसे प्रगणक स्वयं भरता है) देकर भिन्न–भिन्न क्षेत्रों में भेजा जाता है वहां वह सूचकों से सम्पक्र करके उनके उत्तर अनुसूची में लिखते हैं।

प्रगणकों द्वारा अनुसूचियां भरने की रीति के गुण

(1) **विस्तृत क्षेत्र**–इस रीति के द्वारा एक व्यापक क्षेत्र से सूचना प्राप्त की जा सकती है।
(2) **शुद्धता**–प्रगणक प्रशिक्षित, चतुर, परिश्रमी व व्यवहार–कुशल होता है, अतः उसके द्वारा अनुसूचियों में भरी गयी सूचनाओं में शुद्धता की पूर्ण आशा होती है।
(3) **विश्वसनीयता**–सूचकों से प्रगणकों का व्यक्तिगत सम्पर्क रहता है। फलस्वरूप प्राप्त सूचनाएं अधिक विश्वसनीय होती है क्योंकि प्रगणक सूचकों को समझा–बुझाकर जटिल और सन्देहप्रद प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर सकता है तथा पूरक प्रश्न पूछकर उनके उत्तरों की प्रति–जांच भी कर सकता है।
(4) **निष्पक्षता**–प्रगणक प्रायः दोनों प्रकार की मनोवृत्तियों (अर्थात् पक्ष व विपक्ष) के होते हैं अतः इस रीति में पक्षपात की सम्भावना कम रहती है।
(5) **अशिक्षित सूचकों में भी उपयोगी**–सूचकों के अशिक्षित होने की स्थिति में भी इस रीति का प्रयोग किया जा सकता है।

प्रगणकों द्वारा अनुसूचियां भरने की रीति के दोष

(1) **अधिक खर्च**–इस रीति में प्रगणकों के वेतन व प्रशिक्षिण पर भी खर्च करना पड़ता है। इस रीति में समय भी अधिक लगता है।
(2) **जटिलता**–यह अनुसन्धान की एक जटिल रीति है क्योंकि प्रगणकों का चयन, उनके प्रशिक्षण की व्यवस्था, उनके कार्यों का निरीक्षण, आदि कठिन कार्य हैं। अनुसूचियों का बनाना भी सरल कार्य नहीं है।
(3) **पक्षपात की सम्भावना**–यदि प्रगणकों में पक्षपात की सम्भावना हुई तो उसका प्रभाव निष्कर्ष को अविश्वसनीय बना देता है।
(4) **आंकड़ों में भिन्नता**–प्रगणकों की चतुराई, कुशलता, आदि में भिन्नता होने के कारण प्राप्त आंकड़ों में भी भिन्नता हो सकती है।

सावधानियां–

(1) **अनुसूचियां बनाना**–अनुसूचियों में प्रश्न सरल, कम व स्पष्ट होने चाहिए। प्रश्नों को एक सुव्यवस्थित क्रम में रखा जाना चाहिए। प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए जिससे सूचक की मानसिक, धार्मिक, साम्प्रदायिक, सामाजिक, आदि भावनाओं को ठेस न पहुंचती हो। एक अनुसूची को भरकर प्रगणक को नमूने के रूप में दे दिया जाना चाहिए।
(2) **प्रगणक**–अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत होने के कारण अनुसन्धानकर्ता कुछ व्यक्तियों की सहायता लेता है जो अनुसन्धान के क्षेत्र में सूचकों (जिनसे सूचनाएं प्राप्त करनी हैं) से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करके आंकड़ों का संग्रहण करते हैं।

6.4.5 द्वितीयक समंकों के प्रमुख स्रोत

द्वितीयक समंकों के प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं:
(अ) प्रकाशित स्रोत (Published Sources)
(ब) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources)
(अ) **प्रकाशित स्रोत** –विभिन्न विषयों पर सरकारी व गैर–सरकारी संस्थाएं तथा अन्य अनुसन्धानकर्ता महत्वपूर्ण समंक एकत्र करके उन्हें समय–समय पर प्रकाशित करते रहते हैं। प्रकाशित समंकों के प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं –

1. **सरकारी प्रकाशन** – प्रत्येक देश की सरकारें सम्बन्धित समंक एकत्रित और प्रकाशित करवाती रहती हैं। ये समंक बहुत विश्वसनीय और महत्वपूर्ण होते हैं। आजकल भारत में लगभग सभी मन्त्रालयों द्वारा अनेक प्रकार की सूचनाएं व समंक प्रकाशित कराये जाते हैं। प्रमुख सरकारी प्रकाशन हैं :
   (1) भारतीय रिजर्व बैंक बुलेटिन (Reserve Bank of India Bulletin) –नासिक
   (2) स्टैटिस्टिकल एब्ट्रैक्ट ऑफ इण्डिया (Statistical Abstract of India) –वार्षिक
   (3) आर्थिक सर्वेक्षण (Economic Survey) –वार्षिक

2. **अर्ध–सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन** (Semi-government publications)–नगरपालिकाएं, नगर निगम, जिला बोर्ड, आदि विभिन्न प्रकार के आंकड़े संकलित कराकर प्रकाशित करवाते हैं: जैसे–जन्म–मरण, स्वास्थ्य, शिक्षा से सम्बन्धित आंकड़े।

3. **अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन** (International publications)–अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाएं जैसे, संयुक्त राष्ट्र संघ (U.N.O.), अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संघ (I.L.O.), अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष (I.M.F.), आदि समय–समय पर आंकड़ों का संकलन तथा प्रकाशन करती हैं।

4. **आयोग व समितियों की रिपोर्टे** (Reports of Commission for Asia and Pacific.)–सरकार या किसी अन्य संस्था द्वारा आयोग या समितियां नियुक्त की जाती रहती हैं। देश की विभिन्न समस्याओं के अध्ययन के लिए ये आयोग या समितियां सम्बन्धित आंकड़े संकलित करके अपना प्रतिवेदन प्रस्तुत करती हैं, जैसे,
   (1) वित्त आयोग के प्रतिवेदन (Reports of Finance Commission),
   (2) वेतन आयोग के प्रतिवेदन (Riports of Pay Commission),
   (3) योजना आयोग के प्रतिवेदन (Reports of Planning Commission)।

5. **व्यापारिक व वित्तीय संस्थाओं के प्रकाशन** (Publications of Trade Financial Associations)–व्यापार परिषदें जैस–भारतीय उद्योग व वाणिज्य संघ, जूट मिल्स एसोसिएशन, आदि सस्थाएं, हिन्दुस्तान लिवर लि., बिड़ला ग्रुप, टाटा एण्ड सन्स लि़, स्कन्ध विपणियां (Stock Exchange), उपज विपणियां (Produce Exchanges) भी अनेक प्रकार के समंक एकत्र करके प्रकाशित करवाती हैं।

6. **विश्वविद्यालय एवं शोध संस्थाओं के प्रकाशन** (Publications of Universities and Research Institutes)–विश्वविद्यालय, रिसर्च व्यूरो व शोध संस्थाओं द्वारा अनेक प्रकार के आंकड़े एकत्र किये जाते हैं और प्रकाशित किये जाते हैं,।

7. **समाचार–पत्र एवं पत्रिकाएं** (Papers and Journals)–बहुत से पत्र एवं पत्रिकाएं अनेक प्रकार के आंकड़े एकत्र करके प्रकाशित करती हैं। जैसे:
   (1) इकॉनॉमिक टाइम्स (Economic Times) –दैनिक
   (2) दी फाइनैन्शियल एक्सप्रेस (The Financial Express) –दैनिक

द्वितीयक समंकों के प्रयोग में सावधानियां (Precautions In The Use Jof Secondary Data) :– द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय बहुत सावधानी रखने की आवश्यकता है, क्योंकि द्वितीयक समंक अनेक त्रुटियों से पूर्ण हो सकते हैं। त्रुटियों के अनेक कारण हो सकते हैं,

जैसे, सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा में परिवर्तन, सूचना की अपूर्णता, पक्षपात, क्षेत्र व उद्देश्य की भिन्नता, आदि। अतः यह आवश्यक है कि द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय उनकी आलोचनात्मक जांच तथा विश्वसनीयता की परख कर लेनी चाहिए। **बॉउले** के अनुसार – *''प्रकाशित समंकों को बिना उनका अर्थ व सीमाएं जाने जैसा का तैसा स्वीकार कर लेना खतरे से खाली नहीं और यह सर्वथा आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचना कर ली जाये जो उन पर आधारित किये जा सकते हैं''*।

इसीलिए द्वितीयक सामग्री का प्रयोग करने से पूर्व उनकी विश्वसनीयता, उपयुक्तता तथा पर्याप्तता की जांच करने के लिए निम्न बातों की ओर ध्यान देना आवश्यक है:

(1) पिछले अनुसन्धानकर्ता की योग्यता–जिस अनुसन्धानकर्ता द्वारा समंक एकत्र किये गये थे उसकी योग्यता, कार्यक्षमता, साधन व ईमानदारी पर विचार करना होगा। यदि अनुसन्धानकर्ता योग्य व ईमानदार तथा पक्षपातरहित है तो समंक विश्वसनीय हो सकते हैं।

(2) जांच का अभिप्राय–प्राथमिक जांच का अभिप्राय (उद्देश्य एवं क्षेत्र) क्या था? यदि प्राथमिक जांच का प्रयोजन और बाद का प्रयोजन समान या मिलता–जुलता है तब आप भी उन समंकों का प्रयोग कर सकते हैं, अन्यथा नहीं।

(3) अनुसन्धान का प्रकार एवं संग्रहण करने की रीति–आंकड़ों को एकत्र करने की संगणना (Census) तथा निदर्शन (Sampling) रीतियां प्रयोग में लायी जा सकती हैं।

समंकों का वर्गीकरण तथा सारणीकरण संकलित समंकों जिन्हें उनके मूल रूप से कच्चे आंकड़े (Raw Data) कहा जाता है को समझने के लिए व्यवस्थित करने की प्रक्रिया को समंकों का व्यवस्थितिकरण (organization of data) कहा जाता है। इसके अंतर्गत मुख्य रूप से दो प्रक्रियाएं आती हैं–

(1) समंकों का वर्गीकरण
(2) समंकों का सारणीकरण

6.5 अभ्यास प्रश्न

6.5.1 बहुविकल्पीय प्रश्न

संग्रहण के अनुसार समंक कितने प्रकार के होते हैं –

(A) 3 (C) 2
(B) 4 (D) 10

6.5.2 लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1 – प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों का अर्थ एवं अन्तर बताइये ?
प्रश्न 2 – आंकड़ों के वर्गीकरण की आवश्यकता क्यों है ?

6.6 सारांश

इस प्रकार हम कह सकते हैं सर्वेक्षण का अनुसंधान का आयोजन सांख्यिकीय प्रक्रीय की प्रथम अवस्था है। सांख्यिकीय अनुसंधान एक जाँच है जिसमें किसी समस्या के समाधान के लिए परिकल्पना की सत्यता की जाँच की जाती है। इस हेतु समंकों का महत्वपूर्ण स्थान है।

6.7 संदर्भ ग्रन्थ सूची

1. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
2. Bhardwaj, R. S. (2000), Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
3. Singh, S. P. (2010), Principales of Statistic, S & Chand Publishing House.
4. Kumar, Anil (2008), Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

6.8 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण में प्रयुक्त विभिन्न रीतियों को समझाइए। इनमें से आप किसको ठीक समझते हैं।
2. प्राथमिक समंक एकत्र करने की प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान तथा अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान विधियों के गुण–दोष बतलाइए।
3. समंक संकलन (सांख्यिकीय अनुसंधान) की संगणना विधि ओर निदर्शन विधि के गुण–दोषों की तुलना कीजिए।
4. द्वितीयक समंक क्या होते हैं? द्वितीयक समंकों को अगले अनुसंधान में प्रयोग करते समय क्या सावधानियां ली जानी चाहिए?
5. ''समंक संकलन में सामान्य बुद्धि मुख्य आवश्यकता और अनुभव मुख्य शिक्षक है।'' इस कथन का आलोचनात्मक विवेचन कीजिए।
6. द्वितीयक समंक क्या होते हैं? इनके प्रमुख स्रोत बताइए। इनके उपयोग से पहले क्या सावधानियां रखनी चाहिए ?

इकाई 7 – आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण की विधियाँ

7.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप लोगों ने समकों के एकत्रीकरण और उनके मूल्यांकन की विधियों के विषय में ज्ञान प्राप्त किया। इस इकाई में आप लोग समंकों/आंकड़ों को किस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है, की जानकारी प्राप्त करेंगे।

इस इकाई में मुख्य रूप से बिन्दुरेखीय विधि की विवेचना की जायेगी और इसके विभिन्न तरीकों से आपको अवगत कराया जायेगा।

7.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्यनोपरांत आप

- ✓ आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की सबसे मुख्य इकाई बिन्दुरेखीय विधि का अर्थ जान सकेंगें।
- ✓ चित्र तथा बिन्दुरेखीय में अंतर जान सकेंगे।
- ✓ बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता जानेंगे।
- ✓ बिन्दुरेखीय विधि से प्रदर्शन के गुण और दोषों की विवेचना कर सकेंगे।
- ✓ बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता प्राप्त कर सकेंगे।

7.3 बिन्दुरेखीय विधि

इस इकाई के इस खण्ड में मुख्य रूप से बिन्दुरेखीय विधि की विवेचना की जायेगी और इसके विभिन्न तरीकों से आपको अवगत कराया जायेगा।

7.3.1 बिन्दुरेख का अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकीय आंकड़ों का ग्राफ पेपर पर प्रदर्शन ग्राफ या बिन्दुरेख कहलाता है। अधिकांश सांख्यिकीय आंकड़ें इतने विशाल और जटिल होते हैं कि जन–सामान्य के लिए उनका समझना अत्यन्त कठिन है। वर्गीकरण व सारणीयन समंकों को व्यवस्थित व सुन्दर ढंग से प्रस्तुत करते हैं, परन्तु इनके द्वारा आंकड़ों की विशेषताओं को ठीक प्रकार से प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

एम. एम. ब्लेयर के अनुसार *''समझने में व रचना में सरलतम, सर्वाधिक चल और सबसे अधिक प्रयोग में लाया जाने वाला चित्र बिन्दुरेख है।''*

आई. आर. वेसेलो के कथन से स्पष्ट है –*''संख्यात्मक पाठन की सबसे सरल एवं सामान्य विधि बिन्दुरेख है। यह संख्याओं का चित्र इस प्रकार प्रस्तुत करती है कि नेझों को उनके सम्बन्ध तत्काल पता लग जाते हैं। संख्याओं को स्पष्ट बनाने में इसका सर्वाधिक महत्त्व है।''*

7.3.2 चित्र तथा बिन्दुरेख

यद्यपि चित्र तथा बिन्दुरेख (या रेखाचित्र) मुख्य रूप से एक ही उद्देश्य की पूर्ति करते हैं। फिर भी दोनों में अन्तर निम्न प्रकार किया जा सकता है –

आधार	चित्र	रेखाचित्र
1. प्रयोग सम्बन्धी अन्तर	चित्रों का प्रयोग विशेष रूप से स्थानीय श्रेणियों के प्रदर्शन के लिए किया जाता है।	रेखाचित्रों का प्रयोग काल–श्रेणी तथा आवृत्ति वितरणों के प्रदर्शन के लिए किया जाता है।
2. रचना सम्बन्धी अन्तर	चित्रों की रचना सादे कागज पर की जाती है और इनका निरूपण दण्डों, आयतों, वर्गों, वृत्तों आदि द्वारा किया जाता है। इनकी रचना कठिन है।	रेखाचित्र प्रायः बिन्दुरेखीय पत्र पर बनाये जाते हैं तथा इनको बनाने के लिए विभिन्न प्रकार के बिन्दुओं या रेखाओं आदि का प्रयोग किया जाता है। इनकी रचना सरल है। इनमें श्रम तथा समय कम लगता है।
3. कार्य सम्बन्धी अन्तर	चित्रों की कार्य तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है।	बिन्दुरेखों का कार्य तुलनात्मक अध्ययन की सम्भव बनाना है।
4. तुलना सम्बन्धी अन्तर	चित्रों द्वारा एक ही श्रेणी के विभिन्न मूल्यों की तुलना की जाती है।	रेखाचित्र द्वारा एक से अधिक श्रेणियों में आने वाले परिवर्तन की तुलना की जा सकती है।
5. माध्यों का निर्धारण	चित्रों से संख्यिकीय मापों का अनुमान सम्भव नहीं है।	रेखाचित्र से मध्यका, बहुलक आदि के मूल्य ज्ञात किया जा सकते हैं।
6. सार्थकता सम्बन्धी अन्तर	चित्र किसी विषय की केवल सन्निकट सूचना प्रकार करते हैं। ये आंकड़ों के अर्थ में किसी प्रखार की वृद्धि नहीं करते, अतः अनुसन्धान में विवेचन के लिए उपयोगी सिद्ध नहीं होते।	बिन्दुरेख अधिक स्पष्ट, संक्षिप्त तथा शुद्ध होते हैं और अनुपात, ढाल, परिवर्तन दर आदि के अध्यय में काफी सहायक होते हैं।

7.3.3 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के कार्य **(Function of Gaphic Presentation)**

1– बिन्दुरेख विश्लेषक को अनुसन्धान से सम्बन्धित सामान्य विधि, गणना तथा नियोजन में मार्गदर्शन करती है।

2– बिन्दुरेख का प्रयोग गणितीय गणना के स्थान पर समय व श्रम बचाने के लिए किया जाता है।

3– गणितीय वक्र के स्थान पर मुख्त हस्त वक्र समंकों की प्रवृत्ति के अधिक अनुरूप बनायी जा सकती है।

4– बिन्दुरेख जटिल समंकों को चित्रित करके उन्हें सरल व बोधगम्य बनाता है।

5– सम्बन्धित तथ्यों को पास–पास प्रदर्शित करके तुलना को सरल बना देता है।

7.3.3.1 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के गुण या लाभ या उपयोगिता (Merit of Graphic Presentation)

1– **आकर्षक व प्रभावशाली** – बिन्दुरेख बहुत आकर्षक होते हैं। सुन्दर ढंग से बनाकर उन्हें और भी आकर्षक बना लिया जाता है।

2– **समझने में सरल** – समंकों की अव्यवस्थित और विशाल राशि बिन्दुरेख के द्वारा सरल व सुबोध बन जाती है और वह जन–सामान्य के समझने योग्य हो जाती है।

3– **समय व श्रम की बचत** – इस रीति द्वारा आंकड़ों को प्रस्तुत करने में समय व श्रम अपेक्षाकृत कम लगता है। जो आंकड़ों का अध्ययन करते हैं। उनका भी समय व श्रम बचता है।

4– **तुलनात्मक अध्ययन में सरलता** – रेखाओं द्वारा दो प्रकार के समंकों की तुलना में बहुत सुविधा रहती है। दोनों प्रकार से समंकों की दिशा का ठीक–ठीक ज्ञान सरलता से हो जाता है और उनके तुलनात्मक अध्ययन में भी सरलता रहती है।

डिकसन हार्टबेल के अनुसार, *''चार्ट एवं बिन्दुरेखा के उदाहरण सांख्यिकीय सामग्री एवं प्रवृत्तियों की तुलना को सरलता से स्पष्ट करते हैं।''*

5– **स्थायी भाव** – संख्या सम्बन्धी सूचनाओं को प्रायः हम लोग कुछ समय के उपरान्त भूल जाते हैं क्योंकि सभी संख्याओं को याद रखना सरल नहीं। परन्तु बिन्दुरेखों का प्रभाव पर्याप्त अंशों में स्थायी होती है तथा उन्हें हम जल्दी नहीं भूलते हैं।

6– **आन्तरगणन, ब्राह्मगणन व पूर्वानुमान में सुविधा** – बिन्दुरेखों की सहायता से आन्तरगणन, वाह्मगणन व पूर्वानुमान सरलता व शीघ्रता से किया जा सकता है। इनके द्वारा इन क्रियाओं के करने में बहुधा सरलता होती है। न सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है और न संख्या सम्बन्धी अधिक क्रियाएं ही करनी पड़ती हैं।

7– **सहसम्बन्ध का अनुमान** – बिन्दुरेखों की सहायता से सहसम्बन्ध का बहुत अंशों में अनुमान लगाया जा सकरता है। वक्रों की गति इसे स्पष्ट रूप से प्रकट करती है।

8– **भूयिष्ठक, मध्यका एवं चतुर्थकों का ज्ञान** – बिन्दुरेखीय प्रदर्शन द्वारा भूयिष्ठक (Mode) मध्यका (Median) तथा चतुर्थकों (Quartiles) का ज्ञान सरलता से हो जाता है।

9– **ऐतिहासिक तथा कालिक सूचनाएं** – ऐतिहासिक तथा कालिक सूचनाएं, जो कि आंकड़ों के द्वारा प्रकट की जाती हैं, बिन्दुरेखीय प्रदर्शन द्वारा अधिक प्रभावशाली रूप में दिखायी जा सकती हैं।

7.3.3.2 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष/सीमाएं (Demerits/Limitations Graphic Presentation)

सरल रेखा चित्रों से भी उन्हें पूर्णतः समझे बिना गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के प्रमुख दोष निम्नलिखित हैं –

1– शुद्धता की जांच न होना – वक्रों के द्वारा विगत का प्रदर्शन होता है, परन्तु वास्तविक मूल्य का अनुमान नहीं हो पाता है। इसलिए शुद्धता की जांच नहीं हो पाती।
2– तक्रसंगत न होना – बिन्दुरेखों का प्रभाव कभी–कभी आंखों तक ही रहता है।
3– दुरुपयोग सम्भव – मापदण्ड में थोड़ा परिवर्तन कर देने पर वख्र के आकार में बहुत अन्तर पड़ जाता है, इसलिए मापदण्डों को लेकर समंकों को विभिन्न ढंगों से प्रस्तुत किया जा सकता है और इनका दुरुपयोग भी किया जा सकता है।
4– उद्धरण के रूप में प्रस्तुत न किया जाना – किसी तथ्य की पुष्टि के लिए बिन्दरेखों को उद्धरण के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता।
5– अपर्याप्त सूचना देना – बिन्दुरेख के द्वारा सभी सांख्यिकीय सामग्री को प्रस्तुत नहीं किया जा सकता है और न ये सभी प्रकीर की समस्याओं के समाधान में सहायक हो सते हैं इसलिए इनकी सूचनाएं अपर्याप्त होती हैं।

7.3.3.3 बिन्दुरेख की रचना (Construction of Graphic)

बिन्दुरेखों की रचना सामान्यतः बिन्दुरेखीय–पत्र पर अंकित किये जाने वाले बिन्दुओं को आपस में मिला देने से होती है। उदग्र रेखा को उदग्र माप श्रेणी (Y-axis) या **कोटि अक्ष** (Ordinate) और क्षैतिज रेखा को क्षैतिज रेखा पर क्षैतिज माप श्रेणी (X-axis) या **भुजाक्ष** (Abscissa) कहते हैं। भुजाक्ष के लिये **यय** (XX') तथा कोटि अक्ष के लिए **jj** (YY') संकेतों का प्रयोग प्रचलन में है।

इस प्रकार बिन्दुरेखीय–पत्र चार भागों में बंट जाता है जिनमें से प्रत्येक भाग को चरण (Quadrant) कहते हैं। बिन्दुरेखीय–पत्र पर किसी भी बिन्दु को प्रांकित (Plot) करते समय उदग्र एवं क्षैतिज श्रेणियों का अध्ययन करके उसे निश्चित करते हैं।

7.3.3.4 बिन्दुरेख बनाने के सामान्य नियम (General Rules for Ploting Data on a Graph Paper)

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन करते समय निम्न नियमों का पालन करना आवश्यक है :–
1– उपयुक्त व पूर्ण शीर्षक – प्रत्येक रेखाचित्र का उपयुक्त व पूर्ण शीर्षक होना चाहिए ताकि देखते ही यह समझ में आ जाए कि वह किससे सम्बन्धित है।
2– बिन्दुरेखों की गति – बिन्दुरेखों की गति क्षैतिज पैमाने पर सामान्यतः बायें से दायें और उदग्र पैमाने पर नीचे से ऊपर होती है अतः मूलबिन्दु को यथास्थान रखना चाहिए।
3– कृत्रिम आधार रेखा – उदग्र मापदण्ड का चुनाव ऐसा होना चाहिए कि शून्य रेखा–पत्र पर दिखायी दे। यदि किसी कारण ऐसा करना सम्भव न हो तो मूलबिन्दु के पास शून्य रेखा से प्रारम्भ करके कुछ ऊपर जाकर इसे तोड़कर **कृत्रिम आधार रेखा बना लेनी चाहिए और फिर उसके ऊपर अपनी आवश्यकतानुसार निश्चित किये हुए पैमाने के अनुसार अंकित कर लेनी चाहिए।**
4–मापदण्ड का चुनाव – मापदण्ड का चुनाव एक महत्वपूर्ण कार्य है।
5–भुजाक्ष की लम्बाई – सामान्यतः इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि लम्बाई में भुजाक्ष कोटि–अक्ष की डेढ़ गुनी है।

6–मापदण्ड का विवरण – मापदण्ड का विस्तृत विवरण दिया जाना चाहिए ताकि यह सरलता से समझ में आ जाए कि आकार क्या प्रकट करता है।

7–स्पष्ट प्रदर्शन– रेखाचित्रों में बिन्दुओं का प्रदर्शन स्पष्ट होना चाहिए, जो रेखा विभिन्न बिन्दुओं को मिलाये वह भी स्पष्ट था समान रूप में पतली या मोटी होना चाहिए। यदि एक ही चित्र में कई रेखाओं का प्रदर्शन करना हो तो वहां विभिन्न प्रकार की रेखाएं खींची जा सकती हं या अलग–अलग रंग व्यवहार मे प्रयोग किये जाते हैं।

8–क्षैतिज मापदण्ड या उदग्र मापदण्ड– क्षैतिज मापदण्ड व उदग्र मापदण्डड अलग–अलग लिए जा सकते हैं।

9–समंकों का प्राप्ति स्थान व आवश्यक टिप्पणियां–जहां आवश्यकता हो वहां समंकों का प्राप्ति स्थान तथा आवश्यक टिप्पणियां भी दे देनी चाहिए ताकि उनका स्रोत ठीक से पता रहे और उनकी शुद्धता की जांच की जा सके।

10–संकेत–यदि कुछ संकेत हैं तो उन्हें ऊपर की ओर दे देना चाहिए।

11–परिणाम कोट–अक्ष पर– सामान्यतः समय, स्थान, परिस्थिति, आकार आदि की इकाइयों को भुजाओं पर और समंकों के परिणाम, आश्रित चलों व आवृत्ति को कोटि–अक्ष पर प्रदर्शित करना चाहिए।

12–वक्रों के पास समंकों को देना– रेखाचित्र के साथ समंकों को पास ही सारणी में देना चाहिए ताकि यदि कभी चाहे तो विस्तृत अध्ययन कर सके या शुद्धता की जांच कर सके।

13–अनुपात माप–श्रेणी का प्रयोग करना–आनुपाति श्रेणियों को प्रदर्शित करने के लिए अनुपात मापदण्ड का प्रयोग करना चाहिए।

14–धनात्मक संख्याएं–जहां संख्याएं केवल धनात्मक हों वहां भुजाक्ष के नीचे या कोचि–अक्ष की बायीं ओर का भाग बिन्दुरेखीय–पत्र पर दिखाना व्यर्थ है।

7.3.3.5 बिन्दुरेखीय वक्रों का प्रयोग (Use of Graphic Curves)

बिन्दुरेखीय वक्रों का प्रयोग दो प्रकार से किया जाता है :–

1–कालमालाओं (Time Series) के प्रदर्शन के लिए

2–आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution) के प्रदर्शन के लिए **कालमालाओं के रेखाचित्र (Graph of Time Series)** – कालमालाओं को प्रदर्शित करने के लिए जो बिन्दुरेख बनता है, उसे **कालिक चित्र** कहते हैं। कालिक चित्र की रचना में समय (वर्ष, माह इत्यादि) को सदा भुजाक्ष पर तथा मूल्यों को कोटि–अक्ष पर अंकित किया जाता है। काल श्रेणी के रेखाचित्र दो प्रकार के मापदण्ड पर बनाये जा सकते हैं – (i) प्राकृतिक या साधारण मापदण्ड पर या (ii) आनुपातिक मापदण्ड पर।

प्राकृतिक मापदण्ड पर कालमाला चित्र–इस विधि के अन्तर्गत बिन्दुरेखीय–पत्र में मापदण्ड प्राकृतिक होता है। प्राकृतिक मापदण्ड पर भी कालमाला के रेखाचित्र निम्न दो प्रकार के हो सकते हैं :–

(i) **निरपेक्ष कालिक चित्र** – जब कालिक चित्रों के लिए मौलिक समंकों को ही प्रांकित किया जाता है तो उसे निरपेक्ष कालिक चित्र कहते हैं। ये एक चर–मूल्य को या दो या अधिक चर–मूल्यों को प्रदर्शित करने के लिए बनाये जा सकते हैं।

(ii) **निर्देशांक कालिक चित्र** – जब वास्तविक मूल्यों या मौलिक समंकों के स्थान पर उनके निर्देशांकों अर्थात् सापेक्षिक मूल्यों को बिन्दुरेखीय–पत्र पर प्रांकित किया जाता है तो वह निर्देशांक कालिक अक्ष कहलाता है।

7.3.3.6 कृत्रिम आधार रेखा (False Base Line)

बिन्दुरेख बनाते समय इस महत्वपूर्ण नियम का पालन करना आवश्यक है कि उदग्र माप पर शून्य मूलबिन्दु से प्रारम्भ किया जाये। यह नियम क्षैतिज माप के लिए आवश्यक नहीं। इस नियम के अनुसार उदग्र माप पर शून्य से प्रारम्भ करने में कभी–कभी कठिनाइयां आती हैं। जैसे यदि वे मूल्य जो उदग्र पाल पर शून्य से प्रारम्भ करने हों, बहुत बड़े हों और उनमें आपस में अन्तक कम हो तो शून्य से प्रारम्भ करने पर निम्न सुविधाएं सामने आयेंगी।

(1) वक्र आधार रेखा से बहुत दूर बनेगा और आधार रेखा के बीच का बिन्दुरेख–पत्र बेकार रहेगा।

(2) यदि मूल्य बड़े हों परन्तु इनमें होने वाले परिवर्तन बहुत कम हों अर्थात् आपसी अन्तर कम हों तो उसे भी स्पष्ट रूप में प्रदर्शित नहीं किया जा सकेगा।

इन असुविधाओं को दूर करने और बिन्दुरेख को प्रभावशाली बनाने के उद्देश्य से कृत्रिम आधार रेखा का सहारा लिया जाता है। इसमें उदग्र माप–श्रेणी का वह भाग छोड़ दिया जाता है जो मूलबिन्दु से लेकर निम्नतम मूल्य, जिसे प्रांकित करना है, तक है।

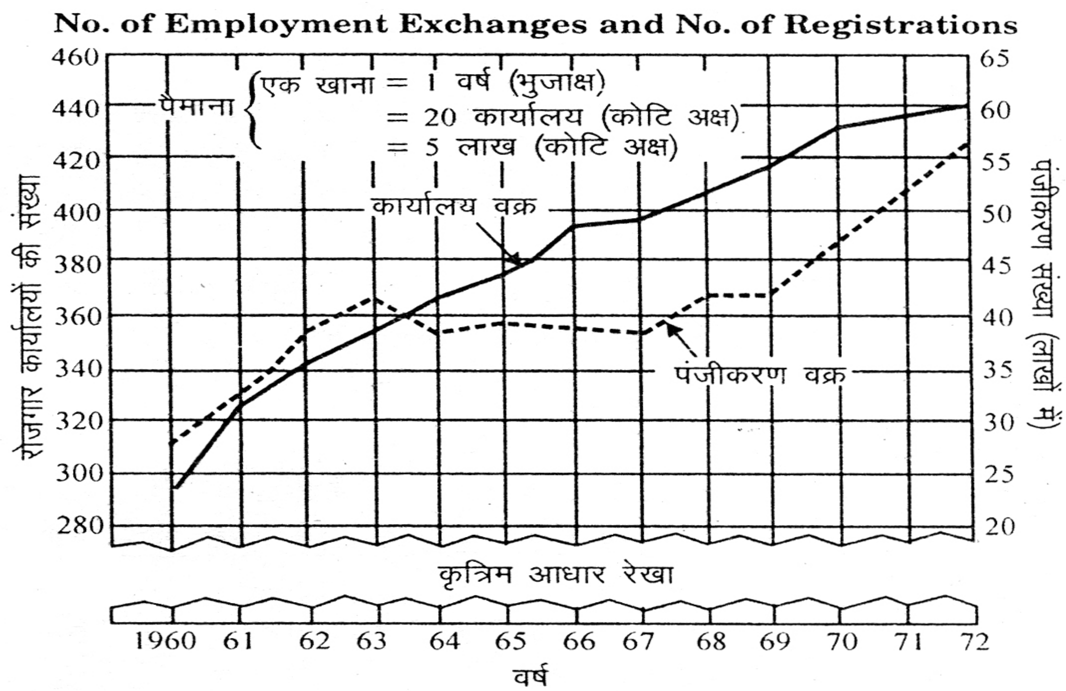
7.3.3.7 दो मापदण्डों के रेखाचित्र (Graphs of Double Scales)

कहीं–कहीं कोटि–अक्ष पर दो मापदण्ड लेकर संख्याओं को प्रांकित करना पड़ता है क्योंकि वे दोनों ही विभिन्न इकाइयों को प्रकट करती हैं। उनकी इकाइयां सजातीय हों, किन्तु उनके विस्ताओं में बहुत अन्तर होता है तो भी वहां दो मापदण्डों का सहारा लेना पड़ता है। ऐसी स्थिति में बायीं ओर के कोटि–अक्ष पर एक चर–मूल्य तथा दाहिनी ओर को कोटि–अक्ष पर दूसरा चल–मूल्य दिखाया जाता है। ऐसा करने के लिए दोनो चर–मूल्यों के समान्तर माध्य एक सीध में रेखा–पत्र के साम्य मे रखकर मापदण्ड निर्धारित किये जाते हैं।

निम्न को रेखाचित्रों द्वारा प्रस्तुत कीजिए –

Employment Exchanges Statistics		
Year (Jan-Dec.)	No. of Exchanges at the end of the Year	No. of Registratoin effected during the Year (in Lakh)
1960	296	27.33
1961	325	32.30
1962	342	38.45
1963	353	41.52
1964	365	38.32
1965	376	39.58
1966	396	38.71
1967	399	39.12
1968	405	40.39

1969	416	42.01
1970	429	45.16
1971	437	51.31
1972	441	57.65

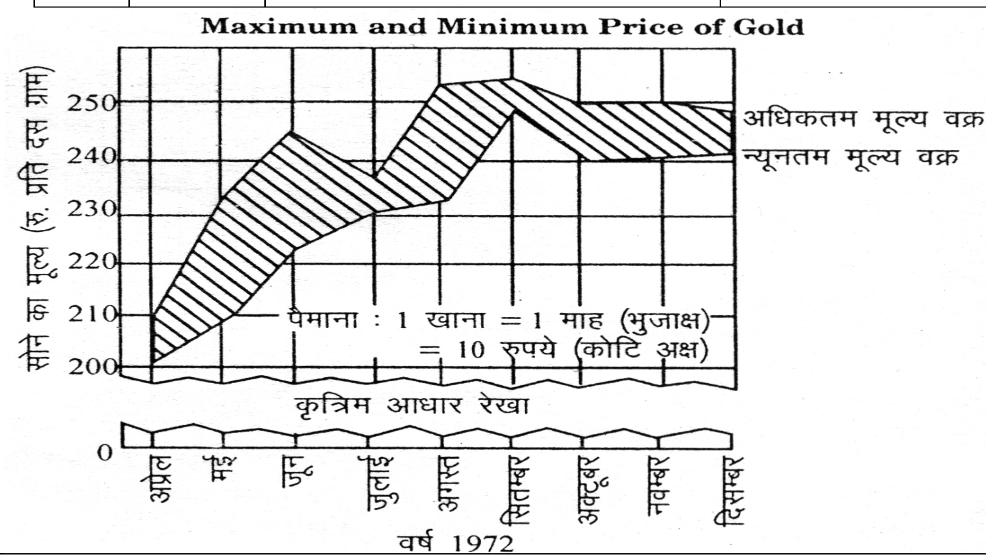


7.3.3.8 अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के रेखाचित्र : कटिबन्ध चित्र तथा वक्र **(Graphs of Maximum and Minimum Values : Zone Chart and Zone Curve)**

कभी–कभी किसी चर के किसी समय के अधिकतम व न्यूनतम उतार–चढ़ाव को अंकित करने की आवश्यकता पड़ती है; जैसे किसी दिन या माह में किसी वस्तु का निम्नतम व अधिकतम भाव या किसी रोगी का आधिकतम व निम्नतम तापमान। ऐसी दशा में अधिकतम मूल्यों का वक्र और न्यूनतम मूल्यों का वक्र अलग–अलग खींचकर फिर उनके बीच के स्थान को किसी रंग या चिह्न से भर देते हैं। इन्हें कटिबन्ध वक्र कहते हैं।

उदाहरण – मुम्बई में सोने की अधिकतम न न्यूनतम कीमत निम्न प्रकार है। इनमें रेखाचित्र बनाओं –

वर्ष	माह	रु. प्रति दर ग्राम	
		अधिकतम	न्यूनतम
1972	अप्रैल	210.50	202.00
	मई	236.50	208.50
	जून	245.00	224.00
	जुलाई	235.50	230.50
	अगस्त	255.50	233.50
	सितम्बर	256.50	250.00
	अक्टूबर	250.00	241.00
	नवम्बर	251.00	241.00
	दिसम्बर	249.50	242.00



7.3.3.9 जी–रेखाचित्र या Z-वक्र (Z or Zee Chrt or Z-Curve)

यह वक्र एक प्रकार रा रेखाचित्र है जो अधिकतम व्यापारिक क्षेत्रों में प्रयोग होता है। यह वक्र अंग्रेजी के अक्षर जेड (Z) के आकार का होता है। इसीलिए इसे जी (Zee) या Z –वक्र कहते हैं। इसमें तीन वक्र तीन बातों को प्रदर्शित करते हुए खींचे जाते हैं। तीनों के लिए अलग–अलग पैमाने लिए जाते हैं। ये तीन वक्र निम्न प्रकार होते हैं :–

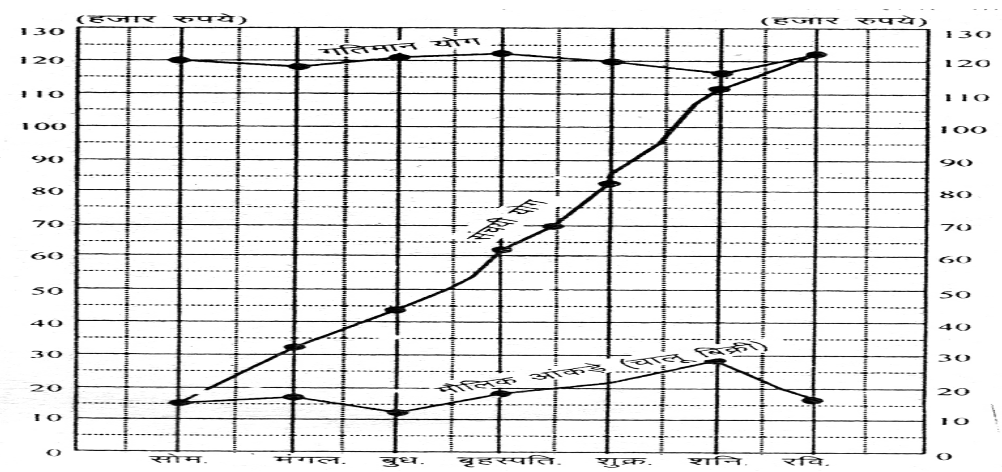
1–मौलिक समंकों का वक्र (The curve or the original data)

2–संचयी समंकों का वक्र (The curve of cumulative data)

3–चल योगों का वक्र (The curve of moving totals)

उदाहरण – निम्न आंकड़ों को Z–वक्र के रूप में प्रस्तुत कीजिए :

दिन	विक्री	संचयी योग		गतिमान योग
सोमवार	15	15	120	गत सप्ताह के 6 दिनों के योग सहित
मंगलवार	17	32	119	गत सप्ताह के 5 दिनों के योग सहित
बुधवार	12	44	121	गत सप्ताह के 4 दिनों के योग सहित
गुरुवार	18	62	123	गत सप्ताह के 3 दिनों के योग सहित
शुक्रवार	21	83	121	गत सप्ताह के 2 दिनों के योग सहित
शनिवार	28	111	117	गत सप्ताह के 1 दिनों के योग सहित
रविवार	11	122	122	गत सप्ताह के 7 दिनों के योग सहित



7.4 चित्रों की तुलना में बिन्दुरेखों के गुण :–

चित्रों की तुलना में बिन्दुरेखों में निम्न गुण हैं –

1–लोकप्रिय – बिन्दुरेखों का प्रयोग चित्रों की अपेक्षा अधिक होता है। यह बहुत लोकप्रिय है और लगभग सभी प्रकार के अध्यनों में प्रयुक्त होता है।

2– गणितीय प्रश्न का हल सम्भव– बिन्दुरेखों की सहायता से कई प्रकार के गणितीय प्रश्न भी हल किये जा सकते हैं, इसलिए गणित की दृष्टि से ये चित्रों की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण हैं।

3–भूयिष्टक, चतुर्थक आदि निकालना सम्भव– बिन्दुरेखों की सहायता से भूयिष्ठक, चतुर्थक, दशमक, शतमक आदि निकाले जा सकते हैं।

4–सबके लिए लाभप्रद– बिन्दुरेख की रचना करने वाला स्वयं अपने लाभ के लिए भी उनकी रचना कर सकता है क्योंकि किसी भी अध्ययन के लिये ये बड़े लाभप्रद होते हैं। परन्तु चित्र सामान्यतः दूसरों के लिए बनाये जाते हैं।

5–समय–श्रेणी का अच्छा प्रदर्शन– समय श्रेणी या काल–माला के प्रदर्शन के लिए बिन्दुरेख बहुत आवश्यक है ताकि परिवर्तन को ठीक प्रकार से देखा जा सके। चित्रों की सहायता से यह उतना सम्भव नहीं है।

7.5 बिन्दुरेख की तुलना में चित्रों के गुण –

बिन्दुरेख की तुलना मे चित्रों में निम्न विशेष गुण होते हैं :

(अ) समझने में सरल – चित्र बिन्दुरेखों की अपेक्षा समझने मे अधिक सरल होते हैं। देखते ही वे समझ में आ जाते हैं।

(ब) प्रभाव स्थायी – चित्रों का प्रभाव मस्तिष्क पर बिन्दुरेखों की अपेक्षा अधिक स्थायी होता है।

(स) आकर्षण तत्व – चित्रों में आकर्षण तत्व अधिक होता है क्योंकि ये कई आकृतियों मे तथा कई रंगों या चिन्हों की सहायता से बनाये जाते हैं।

7.6 आंकड़ों का प्रदर्शन (ग्राफीय)

पिछले खण्ड के अध्ययन के पश्चात् आप इस बात को भली–भाँति समझ चुके होंगे कि 'जैसे–जैसे संख्याओं की किसी भी सूची की लम्बाई बढ़ती जाती है, वैसे–वैसे वह कम ग्राह्य होती जाती है। इसी प्रकार का विचार प्रो0 किंग ने भी दिया।'' संख्याओं के अपने सबसे अच्छे रूप में भी तुलना करने के उद्देश्य से मस्तिष्क के लिए समझना और देर तक भाव रखना सरल बात नहीं है।

अतः यदि हम अपनी बातों को अंकों द्वारा प्रस्तुत करने के बजाय किसी अन्य सरल साधन द्वारा प्रस्तुत करें जहां अंकों का प्रयोग कम से कम किया जेये तो हमारी बात जन–साधारण के लिए सरल, समझने तथा याद करने योग्य हो जाती है।

7.6 चित्र एवं ग्राफ (Graph & Diagram)

''अधिकांश व्यक्यिों के लिए नीरस संख्याएं प्रेरणा शून्य होती हैं। चित्र किसी जटिल स्थिति के स्वरूप को देखने समझने में हमारी सहयता करते हैं। जिस प्रकार एक मानचित्र हमारे सामने किसी विशाल देश का विहंगम दृश्य प्रस्तुत करता है, ठीक उसी प्रकार चित्र एक दृष्टि में संख्यात्मक जटिल तथ्यों का सम्पूर्ण अर्थ समझने में हमारी सहयता करते हैं।'' – **मोरोने**

जटिल आंकड़ों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाये कि वे देखने में सुन्दर तथा समझने में बहुत सुन्दर बन जायें। वर्गीकरण व सारणीयन इसी उद्देश्य को लेकर किये जाते हैं।

सांख्यिकी में समंकों को प्रदर्शित करने की दो विधियों हैं –

(अ) चित्रमय प्रदर्शन (ब) बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

7.6.1 चित्रों की उपयोगिता एवं लाभ –

1– चित्र समंकों को सरल व सुबोध बनाते हैं – चित्रों के द्वारा जटिल, अव्यवस्थित और विशाल समंक राशि सरल हो जाती है और वह जनसाधारण के समझने के योग्य हो जाती है। केवल अंकों को देखकर कोई निष्कर्ष निकालना कठिन होता है।

प्रसिद्ध विद्वान **प्रो. स्टीफेन जुल्क** के शब्दों में, *''एक चित्र अधिक स्पष्ट तथा चित्र को सीधे आकर्षित करने वली तस्वीर प्रदान करता है।''*

2–अधिक समय तक स्मरणीय – अंकों को बहुत समय तक याद करना अत्यन्त कठिन है।

कुछ समय बाद मनुष्य अंको को भूल जाता है, परन्तु चित्रों द्वारा आंकड़ों की एक अमिट छाप मस्तिष्क पर पड़ती है जो बहुत दिनों तक बनी रहती है।

3– चित्रों को समझने के लिए विशेष शिक्षा या ज्ञान की आवश्यकता नहीं – चित्रों की समझना जनसामान्य के लिए बहुत सरल है।

4.समय या श्रम की बचत – चित्रों की सहायता से आंकड़ों के समझने व उनसे निष्कर्ष निकालने में बहुत कम समय तथा परिश्रम की आवश्यकता होती है। बिना किसी परिश्रम के बड़ी सरलता से और एक दृष्टि में आंकड़ों पर्याप्त मात्रा में समझ में आ जाते हैं।

5–आकर्षक एवं प्रभावशाली – चित्र बहुत आकर्षक होते हैं। ये बरबस ध्यान अपनी ओर खींच लेते हैं। **सी. डब्लू लोव** के शब्दों में *''सभी प्रकार के समंकों को अत्यन्त प्रभावशाली रूप में निरूपण करने के लिए चित्रों का प्रयोग किया जा सकता है।''*

6–सूचना के साथ–साथ मनोरंजन होना – सुन्दर चित्र सूचना तो देते ही हैं, परन्तु साथ ही साथ मनोरंजन भी देते हैं। इनकी सहायता से विभिन्न सूचनाओं के अध्ययन में थकावट प्रतीत नहीं होती है।

7–तुलना करने में सहायक – चित्रों की सहायता से विभिन्न सूचनाओं की प्रभावशाली तुलना की जा सकती है।

8– समंको का संक्षिप्त रूप – चित्र समंको को संक्षिप्तता प्रदान करते हैं। इनका निर्माण समस्या पर विचार करने एवं पर्याप्त विश्लेषण करने के उपरान्त होता है।

चित्रों द्वारा प्रदर्शन की परिसीमाएं अथवा हानियां

चित्रमय प्रदर्शन उन व्यक्तियों के लिए भ्रमात्मक होते हैं जो सावधानीपूर्ण अध्ययन के बिना ही उनसे निष्कर्ष निकालते हैं। एम. जे. मोरोने के अनुसार 'किसी चित्र का अध्ययन कनरे के लिए पर्याप्त चौकन्ना रहना आवश्यक होता है। वह इतना सरल, स्पष्ट तथा मनभावी होता है कि असावधान व्यक्ति बड़ी आसानी से मूर्ख बन जाता है।' इस तकनीकि का प्रयोग करते समय तथा निष्कर्ष निकालते समय विशेष सावधानी की आवश्यकता है। इन चित्रों की परिसीमाएं निम्नलिखित हैं –

1–तुलना के लिए गुण व स्वभाव की समान आवश्यकता–चित्रों में तुलना तभी ठीक होगी जब वे समान गुण के आधार पर बनाये जाएं। यदि वे दो विभिन्न गुणों के आधार पर बनाये जायें तो उनमें तुलना करना भ्रामक व अशुद्ध होगा।

2–केवल तुलनात्मक अध्यय सम्भव – चित्रों की सहायता से केवल तुलमात्मक अध्ययन सम्भव हो पाता है।

3–सूक्ष्म अन्तर दिखाना सम्भव नहीं– चित्रों द्वारा बहुत सूक्ष्म अन्तर को प्रदर्शित करना सम्भव नहीं है।

4–बहुमुखी सूचनाओं का प्रदर्शन सम्भव नहीं – चित्रों द्वारा बहुमुखी विशेषताओं को प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

5–संख्यात्मक प्रदर्शन असम्भव – चित्रों द्वारा आंकड़ों का पूर्ण शुद्ध रूप में प्रदर्शन सम्भव नहीं होता है। चित्र अनुमानित रूप से आंकड़ों का प्रदर्शन करते हैं। चित्र वहीं के लिए उपयुक्त होते हैं जहाँ संख्या में मूल्य प्राप्त करना उद्देश्य न हो बल्कि उनके मूल्य का अनुमान चित्रों को देखर लगाया जा सके।

6–सरलतापूर्वक दुरुपयोग–अनुचित और अशुद्ध चित्र बनाकर उनका दुरुपयोग किया जा सकता है।

7–निष्कर्ष निकालने का एक उचित साधन– चित्रों को देखर पूर्ण सत्य निष्कर्ष निकाला जाना सम्भव नहीं है।

8–पर्याप्त ज्ञान के अभाव में भ्रमोत्पादक–यदि चित्र बनाने वाले को विषय का पर्याप्त ज्ञान नहीं है तो चित्र ऐसा बन सकता है जो वस्तुस्थिति का ठीक ज्ञान न करा सके और भ्रम पैदा करे।

9–आंखों का धोखा–यदि आंकड़ों के अनुरूप चित्र न बनाये जायें तो इससे आंखों को भारी धोखा हो सकरता है और देखने वाला गलत परिणाम पर पहुंच सकता है।

10–आगे विश्लेषण असम्भव–चित्रों की एक यह भी सीमा है कि इनका आगे विश्लेषण सम्भव नहीं है।

7.6.2 चित्र बनाने का सामान्य नियम

सांख्यिकीय चित्रों को आकर्षक व प्रभावशाली बनाने के लिए निम्न बातों को ध्यान मे रखना आवश्यक है :

1–शुद्धता – चित्र आकर्षक व कलात्मक हों, शुद्धता उनकी जान है। चाहे कितना भी आकर्षक चित्र क्यों न हो, यदि शुद्धता नहीं तो वह व्यर्थ है।

2–आकर्षक–चित्रों को आकर्षक बनाना सबसे अधिक आवश्यक है।

3–रेखापत्र का प्रयोग –चित्र बनाते समय रेखापत्र का प्रयोग ठीक रहता है। इससे सुन्दरता व शुद्धता दोनों की रक्षा हो जाती है।

4–शीर्षक–यह अत्यन्त आवश्यक है कि चित्र के ऊपर उसकी संख्या व शीर्षक दिया जाए।

5–आकार–चित्र का आकार प्राप्त स्थान के अनुसार होना चाहिए ताकि वह देखने में सुन्दर लगे।

6–मापदण्ड–चित्र बनाने से पहले मापदण्ड निश्चित कर लेना आवश्यक होता है। मापदण्ड निश्चित करते समय प्राप्त स्थन व अंकित करने वाली सूचना दोनों को ध्यान में रखा जाता है। मापदण्ड ऐसा होना चाहिए कि चित्र स्थान को ध्यान में रखते हुए न तो बहुत बड़े बन जायें और न बहुत छोटे रहें।

7– चिह्नों या रंगों का प्रयोग–चित्रों में आवश्यकतानुसार विभिन्न प्रकार की सूचनाओं को प्रदर्शित करने के लिए विभिन्न प्रकार की चिह्नों व रंगों का प्रयोग करना चाहिए और उनके विषय में संकेत चित्र के नीचे बायें कोने पर दे देना चाहिए।

8–चित्रों को घेरना–चित्रों को मीटी या दोहरी रेखाओं से घेर देना चाहिए ताकि वे देकने में अधिक आकर्षक लगें।

9–उपयुक्त चित्र का चुनाव–चित्र कई प्रकार के होते हैं ओर इस प्रकार की चित्र सभी प्रकार के समंकों के लिए उपयुक्त नहीं हो सकते।

10–सरलता–चित्र ऐसा होना चाहिए कि वह सरलता से एक बार देखने से समझ में आ जाय।

11–महत्वपूर्ण बातें गहरे रंग से–चित्र बनाते समय यह भी ध्यान मे रखना आवश्यक है कि आंकड़ों के महत्वपूर्ण अंशों को गहरे रंग से या ऐसे ढंग से प्रदर्शित किया जाए।

12–मितव्ययिता–यह भी ध्यान मे रखना आवश्यक है कि चित्र बनाते समय धन व अन्य साधनों का दुरुपयोग न हो।

7.6.3 चित्रों के प्रकार

सांख्यिकीय में साधारणतः निम्न प्रकार के चित्रों का प्रयोग किया जाता हैः 1–एक–विमा या एक–विस्तार वाले चित्र, 2– द्विविमा या दो–विस्तार वाले चित्र, 3– त्रिविमा या तीन–विस्तार वाले चित्र, 4–मानचित्र, 5–चित्र–लेख

1–एक–विमा या एक–विस्तार वाले चित्र–जब पदमाला विच्छिन्न रहती है और केवल गुण की तुलना करनी होती है तो एक विमा या एक–विस्तार वाले चित्रों का रचना की जाती है। एक विमा चित्र निम्न प्रकार के होते हैं –(क) रेखाचित्र (ख) दण्ड चित्र

(क) रेखाचित्र–इन रखाओं की रचना विभन्न पदों के मूल्यों के अनुसार होती हैं। रेखाचित्रों की रचना तब की जाती है जबकि सम्बन्दित पद–मूल्यों की संख्या अधिक हों तथा न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात कम हो।

(ख) दण्ड चित्र – दण्ड चित्र एवं रेखा चित्र में बहुत साधारण अन्तर होता है और यह कि यहां रेखाओं को मोटा बना देते हैं। मोटा बनाते समय मूल्य का कोई ध्यान नहीं रखा जाता है।

विभिन्न प्रकार के दण्ड चित्र

1. सरल दण्ड चित्र–ये दो प्रकार के होते हैं

(क) उदग्र दण्ड, (ख) क्षैतिज दण्ड

(क) उदग्र दण्ड–जब दण्ड सीधे खड़े बनाये जाते हैं तो उदग्र कहलाते हैं। यथा सम्भव यह प्रयास होना चाहिए कि सबसे ऊंचा दण्ड वायें और ऊँचाई के क्रम में अन्य दण्ड बनाते हुए सबसे छोटा दण्ड दांये बनाना चाहिए। यह क्रम विपरीत भी हो सकता है। परन्तु जब समंक समय या किसी अन्य महत्वपूर्ण क्रम में दिये हों तब छोटे या बड़े का विचार किये बिना दण्ड इसी क्रम में बनाया जाना चाहिए।

7.7 आंकड़ों का विश्लेषण

आंकड़ों का विश्लेषण दो प्रकार से किया जाता है –

1– आरेखों द्वारा

2– सांख्यिकीय गणना के द्वारा

आरेखात्मक विश्लेषण के अन्तर्गतहम आंकड़ों को क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित करने के बाद उन्हें उपयुक्त आरेखों के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। तत्पश्चात आरेखो के आधार पर आंकड़ों से सम्बन्धित निष्कर्ष ज्ञात किये जाते हैं। गणनात्मक विश्लेषण के अन्तर्गत हम सांख्यिकीय गुणांकों के मान ज्ञात करते हैं। तथा गुणांकों के मानों के आधार पर आंकड़ों से संबन्धित निष्कर्ष निकालते हैं। ये सांख्यिकीय गुणांक हैं–माध्य, आंकड़ों का क्षितराव, आवृत्तियों का संकेन्द्रण इत्यादि।

सबसे पहले हम आंकड़ों के आरेखात्मक विश्लेषण की चर्चा करेंगे। परन्तु इससे पूर्व आंकड़ों तथा चरराशिओं से सम्बन्धित कुछ संकल्पनाओं की व्याख्या करना आवश्यक है। आंकड़ों को प्रायः निम्न श्रेणियों में विभक्त किया जाता है–

(i) मात्रात्मक तथा गुणात्मक आंकड़े

(ii) काल श्रृंखला आंकड़े तथा अनुप्रस्थ आंकड़े

मात्रात्मक तथा गुणात्मक आंकड़ें की चर्चा हम पहले भी कर चुके हैं।

काल–श्रृंखला आंकड़ें हम उन आंकड़ों को कहते हैं जिनका प्रत्येक मान अलग–अलग समय बिन्दु से अथवा अलग–अलग माह, वर्ष अथवा समयावधियों से सम्बन्धित हों, जैसे–किसी देश की जनसंख्या के आंकड़े, किसी फैक्ट्री के उत्पादन के वार्षिक आंकड़े, किसी अस्पताल में उपचार के लिये आने वाले रोगियों की साप्ताहिक संख्या, किसी नगर में घण्टेवार तापमान के आंकड़े इत्यादि–इत्यादि।

अनुप्रस्थ आंकड़े – ऐसे आंकड़ों को कहते हैं, जिनका प्रत्येक मान एक ही समय बिन्दु एक ही तिथि, एक ही माह, वर्ष अथवा एक ही समाधावधि से सम्बन्धित हों. अनुप्रस्थ आंकड़ें के उदाहरण हैं– सिविल सेवा प्रारम्भिक परीक्षा में सम्मिलित परीक्षार्थियों के प्राप्तांकों के आंकड़े, सिविल सेवा परीक्षा में सम्मिलित परीक्षार्थियों की आयु के आंकड़े, व्यक्तियों की ऊंचाई, वजन, आय सम्बन्धी आंकड़े।

स्पष्ट है कि सिविल सेवा प्रारम्भिक परीक्षा, 29 सितम्बर 1991 को आयोजित की गई थी, तथा इस परीक्षा में सम्मिलित विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के सभी आंकड़े इसी तिथि से सम्बन्धित होंगे। अतः इन आंकड़ों को हम अनुप्रस्थ आंकड़ें कहेंगे।

इसी प्रकार हम जानते हैं कि सिविल सेवा परीक्षा में सम्मिलित होने वाले परीक्षार्थियों की अधिकतम आयु सीमा 28 वर्ष है, (परीक्षा, वर्ष की तिथि 1 अगस्त को) तथा परीक्षा में बैठने के लिये आवेदन करते समय प्रत्येक परीक्षार्थी प्रवेश फार्म में वर्ष के 1 अगस्त को अपनी आयु का विवरण (वर्ष, माह तथा दिनों से) देता है। अन्य शब्दों में संघ लोक सेवा आयोग के पास परीक्षार्थियों की आयु के सभी आंकड़ों एक ही तिथि (परीक्षा वर्ष के 1 अगस्त) से सम्बन्धित होंगे। अर्थात् आयु के इन आंकड़ों को हम अनुप्रस्थ आंकड़े कहेंगे। इसी प्रकार आयकर विभाग के पास लोगों की आय के आंकड़ें एक वित्तीय वर्ष विशेष (विशिष्ट वित्तीय वर्ष में 1 अप्रैल से परवर्ती 31 मार्च की समयावधि) से सम्बन्धित हैं, इसलिए ये अनुप्रस्थ आंकड़े होंगे। इसी प्रकार लोगों की ऊंचाई तथा वचन के आंकड़े भी अनुप्रस्थ आंकड़ों की श्रेणी मे आते हैं।

काल श्रृंखला तथा आरेखीय प्रदर्शन –

काल श्रृंखला आंकड़ों को तीन प्रकार के आरेखों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है–

(i) बिन्दु रेखीय अथवा रेखाचित्रीय आरेख

(ii) दण्ड चित्र

(iii) प्रतीक चित्र

1 **रेखाचित्रीय आरेख** – उपर्युक्त जनंख्या आंकड़ों का रेखाचित्रीय आरेख बनाने के लिये सर्वप्रथम हम चरराशियों के परिसर को ज्ञात करते हैं। आंकड़ें को देखने से स्पष्ट है कि

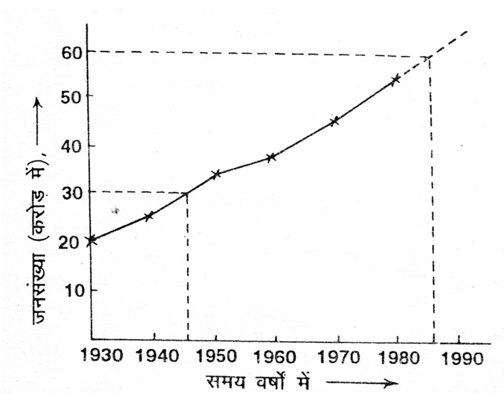
स्वतंत्र चरराशि समय के मान 1930 से 1980 के मध्य तथा आश्रित चरराशि जनसंख्या में मान 20 करोड़ (चरराशि का न्यूनतम मन) तथा 54.96 करोड़ (चरराशि का अधिकतम) मान के मध्य हैं।

अब एक ग्राफ पेपर (सेन्टीमीटर अथवा इंच ग्राफ पेपर) पर हम सबसे पहले अक्षों को अंकित करते हैं। X–अक्ष पर हम स्वतंत्र चरराशि समय (वर्षों में) के मानों को तथा इसी प्रकार Y–अक्ष पर आश्रित चरराशि, जनसंख्या (करोड़ों में) के मानों को इनके दिये हुए परिसरों के अनुसार अंकित करते हैं।

स्पष्ट है कि समय का न्यूनतम मान, 1930 चूंकि शून्य से अत्यधिक दूरी पर है,. अतः समय के न्यूनतम मान को हम मूल बिन्दु पर ही प्रदर्शित करते हैं। इस प्रक्रिया से ग्राफ पेपर का एक बड़ा भाग बर्बाद होने से बच जाता है। जनसंख्या के मानों में न्यूनतम मान (20 करोड़) चूंकि शून्य से अधिक दूरी पर नहीं है, अतः Y–अक्ष पर जनसंख्याके मानों को शून्य से लगभग 60 करोड़ तक अंकित किया गया है।

अब आंकड़ों में दिये हुए वर्षों एवं सम्बन्धित जनसंख्या के आंकड़ों को ग्राफ बिन्दुओं के रूप में अंकित किया जाता है। प्राप्त बिन्दुओं को क्रम से सीधी रेखाओं द्वारा जोड़ने पर टेढ़ी–मेढ़ी रेखाओं का जो आरेख प्रापत होता है उसे रेखाचित्रीय आरेख अथवा बिन्दुरेखीय आरेख कहते हैं।

रेखाचित्रीय आरेख हमें तीन तथ्यों की जानकारी देते हैं – (1) आंकड़ों की सामान्य अथवा दीर्घकालीन प्रवृत्ति, (2) किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य रेखा चित्रीय आरेख के रेखीय खण्ड जनसंख्या के वार्षिक परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करते हैं। (3) रेखीचित्रीय आरेख चरराशि के अनुमान अथवा पूर्वानुमान त्रात करने में भी सहायक होते हैं।



चित्र से स्पष्ट है कि समयोपरि जनसंख्या के मानों का आरेख दाहिनी ओर उठता हुआ है, अतः जनसंख्या की सामान्य (अथवा दीर्घकालीन) प्रवृत्ति बढ़ने की है। आरेख उच्चावचनों अथवा अत्यधिक उतार–चढ़ाव से रहित है, अन्य शब्दों में समयावधि 1930 से 1980 के मध्य देश की जनसंख्या स्थाई दर से बढ़ती रही है। विभिन्न दशकों में जनसंख्या की वार्षिक संवृद्धि दर (अर्थात् जनसंख्या के मानों में प्रतिवर्ष बढ़ोत्तरी) ज्ञात करने के लिये हम रखा चित्रीय आरेख के विभिन्न रेखीय खण्डों (अर्थात् आरेख पर बिन्दुओं को जोड़ने वाली सीधी रेखाओं) के

मध्य जनसंख्या के वार्षिक परिवर्तनों को ज्ञात करते हैं। इनका सूत्र निम्न प्रकार है–

$$\text{समयावधि विशेष में जनसंख्या का वार्षिक परिवर्तन} = \frac{\text{समयावधि में जनसंख्या का परिवर्तन}}{\text{वर्षों की संख्या}}$$

अब हम समयावधि 1930 – 1940 के मध्य जनसंख्या के औसत वार्षिक परिवर्तन को ज्ञात कर सकते हैं। आरेख से –

वर्ष 1930 की जनसंख्या = 20 करोड़

समयावधि में जनसंख्या का परिवर्तन = 4.9 करोड़

समयावधि (1930–1940) के मध्य वर्षों की संख्या= 4.9 / 10 = 0.49 करोड़ प्रतिवर्ष

अर्थात् समाधावधि 1930–1940 मे देश की जनसंख्या औसतन 0.49 करोड़ अथवा 29 लाख प्रतिवर्ष बढ़ती रही है। इसी प्रकार अन्य समयावधियों में हम जनसंख्या के औसत वार्षिक परिवर्तन की दरों को भी ज्ञात कर सकते हैं। इनकी गणना को निम्न सारिणी में प्रदर्शित किया गया है –

वर्ष	जनसंख्या (करोड़ों में)	समयावधि	समयावधि में जनसंख्या परि. (करोड़ों में)	वर्षों की संख्या	औसत वार्षिक परिवर्तन (करोड़ों में)
1930	20				
1940	24.9	1930–40	4.9	10	0.49
1950	35.1	1940–50	10.2	10	1.02
1960	38	1950–60	2.9	10	0.29
1970	45	1960–70	7.0	10	0.70
1980	54.9	1970–80	9.9	10	0.99

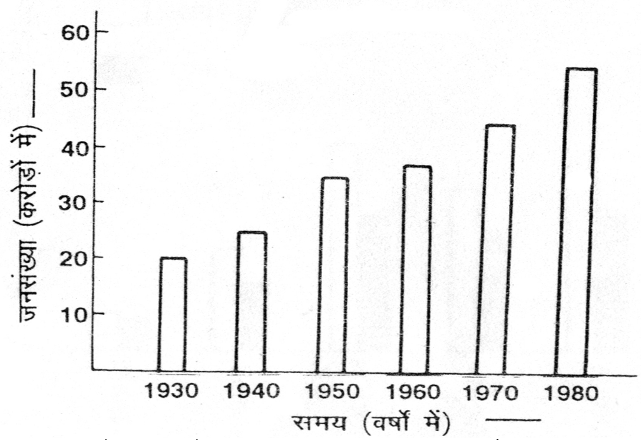
गणितीय अवधारणाओं के परिचित विद्यार्थी समझ गए होंगे कि विभिन्न समयावधियों में जनसंख्या की निरपेक्ष दर वास्तव में रेखाचित्रीय आरेख के संगत रखीय खण्डों के ढाल के बराबर है तथा अधिक तिरछी रेखाओं का ढाल अधिक तथा कम तिरछी रेखाओं का ढाल कम होता है। आरेख मं समयावधि 1930–40 से सम्बन्धित रेखीय खण्ड, 1940–50 समयावधि से सम्बन्धित रेखीय खण्ड की तुलना में कम तिरछा है (अथवा अपेक्षाकृत समानान्तर है) तथा जनसंख्या परिवर्तन की निम्न वार्षिक वृद्धि (49 लाख प्रतिवर्ष) को प्रदर्शित करता है। समयावधि 1940–50 मं जनसंख्या की वार्षिक वृद्धि 1.02 करोड़ प्रतिवर्ष है।

2 दण्ड चित्र – दण्ड चित्र का तात्पर्य है – आंकड़ों का दण्डों के द्वारा प्रदर्शन। आंकड़ों को प्रदर्शित करने की यह सर्वाधिक प्रचलित विधि है।

वास्तव में सांख्यिकीय आरेखों का रचना का मुख्य उद्देश्य आम व्यति को सांख्यिकीय तथ्यों की जानकारी देना होता है। आरेखों का प्रभाव मस्तिष्क पर अधिक स्थाई तथा प्रभावपूर्ण होता है, तथा ये सांख्यिकीय तथ्यों की सहज व्याख्या करने में सुलभ होते हैं।

रेखाचित्रीय आरेख की भाँति ही यहां भी हम स्वतन्त्र चरराशि के मानों (वर्षों को) X–अक्ष पर

तथा आश्रित चरराशि, जनसंख्या के मानो को Y–अक्ष पर दर्शाते हैं। अब प्रत्येक समय बिन्दु (वर्ष) पर हम सम्बन्धित जनसंख्या के बराबर ऊंचाई के दण्ड निर्मित करते हैं। सभी दण्डों की चौड़ाइयां परस्पर समान होती हैं तथा विभिन्न दण्डों के बीच लगभग दण्डों की चौड़ी के बराबर दूरी छोड़ी जाती है। जनसंख्या आंकड़ों से सम्बन्धित दण्ड चित्र को चित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है। दण्ड चित्र आंकड़ों की आवृत्ति के अतिरिक्त और कोई महत्वपूर्ण जानकारी नहीं देता है – न तो यह विभिन्न समयावधि में चरराशि के परिवर्तन की दर को दर्शाता है, तथा नहीं दण्ड चित्र का प्रयोग आंकड़ों के अनुमान अथवा पूर्वानुमान ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है। दण्ड चित्र का महत्व दृष्टिगत अधिक है, विश्लेषण के दृष्टिकोण से इस आरेख की उपयोगिता सीमित है।

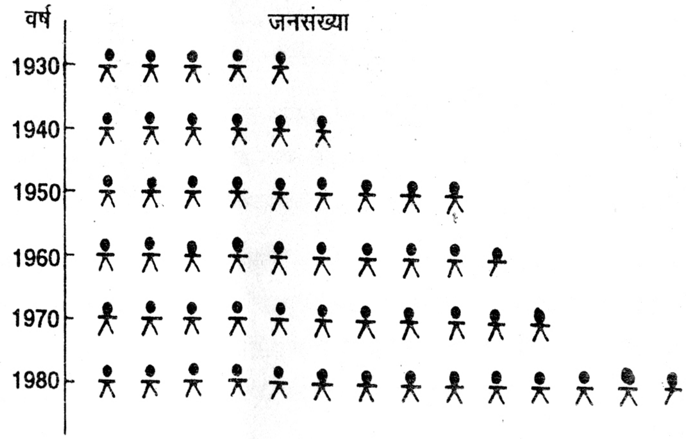


यहां इस तथ्य की ओर संकेत करना आवश्यक है कि यहां सारिणी में आंकड़ों के वास्तविक मानों को ही दर्शाया जाता है, वहाँ चित्रों अथवा आरेखों में केवल उनके सन्निकट मानों को ही दर्शाया जा सकता है।

3 प्रतीक चित्र – प्रतीक चित्र का अर्थ है, आंकड़ों की प्रतीकों अथवा चिह्नों के द्वारा प्रदर्शित करना है। इस विधि के अन्तर्गत विभिन्न समय बिन्दुओं पर चरराशि के परिमाण को प्रतीकों अथवा आकृतियों का संख्या के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

इस प्रस्तुतीकरण का उद्देश्य सांख्यिकीय आंकड़ों के मुख्य तथ्यों को सहज तथा सरलतम रूप में व्यक्त करना होता है। आरेख बनाने के लिये सर्वप्रथम हम आंकड़ों से सम्बन्धित एक उपयुक्त प्रतीक का चुनाव करते हैं, तत्पश्चात् आंकड़ों के मानं को प्रतीकों की संख्या के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। जैसे–मानव जनसंख्या को प्रदर्शित करने के लिये सर्वाधित उपयुक्त प्रतीक है–मनुष्य की आकृति।

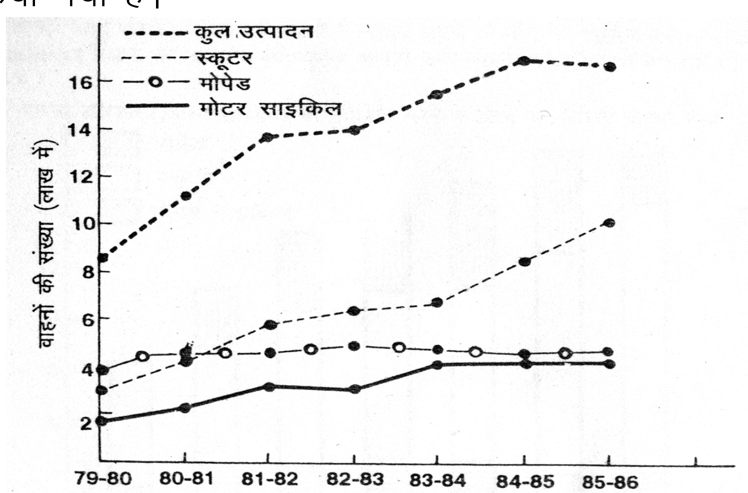
इस प्रकार के आरेखों का प्रयोग समाचार–पत्र पत्रिकाओं तथा टी.वी. परिचर्चाओं में प्रचुर रूप से किया जाता है। इस आरेख में बहुधा तकनीकों का प्रयोग भी किया जाता है, जैसे चरराशि के मानों को गड्डियों की लम्बाई अथवा संख्या के द्वारा भी प्रदर्शित किया जाता है।



यदि समय अन्तराल के आंकड़ों में एक चरराशि के मानों को दर्शाया गया हो तो इस प्रकार के आंकड़ों को एक चरीय कालश्रृंखला आंकड़े कहा जाता है। यदि समयोपरि दो चरराशियों के मानों से सम्बन्धित आंकड़ो दिये हुए हों तो आंकड़ों को द्विचरीय काल श्रृंखला आंकड़े कहते हैं। द्विचरीय काल–श्रृंखला आंकड़ों को मुख्यतः निम्न आरेखों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है –

(i) रेखाचित्रीय आरेख
(ii) बहुदण्ड चित्र
(iii) संघटक–भाग दण्ड चित्र
(iv) प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र

(i) रेखाचित्रीय आरेख – आंकड़ों से सम्बन्धित रेखाचित्रीय आरेख निम्न प्रकार है– आरेख में X-अक्ष पर स्वतंत्र चरराशि समय (वर्षों में) को तथा Y–अक्ष पर सभी प्रकार के वाहनों की संख्या (लाखो में) दर्शाया गया है। चारों चरराशियों के आरेखों को अलग–अलग प्रकार की रेखाओं के द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा इनके सूचक को ग्राफ पर दाहिनी ओर ऊपर की दिशा में अंकित किया गया है।

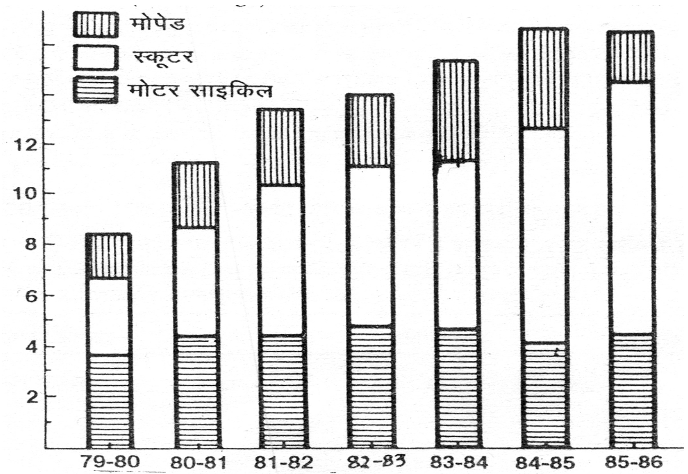


आरेख में स्कूटर एवं वाहनों के कुल उत्पादन की दीर्घकालीन प्रवृत्ति बढ़ने की है, जबकि अन्य वाहनों का उत्पादन समयोपरि लगभग स्थिर बना हुआ है। स्कूटर तथा मोपेड के

आरेख निरन्तर मोटर साइकिल के आरेख के ऊपर हैं, जो इस तथ्य को प्रदर्शित करते हैं। कि मोटर साइकिल की तुलना में इन वाहनों का उत्पादन सदैव अधिक रहा है, जो कि जनसाधारण में इन वाहनों की लोकप्रियता को प्रदर्शित करता है। लोकप्रियता की दृष्टि से स्कूटर का स्थान श्रेष्ठ है तथा वर्ष 81–82 से स्कूटर का आरेख ऊपर की दिशा में तिरछा होता गया है जो इस बात का द्योतक है कि वर्ष 83–84 से स्कूटर का वार्षिक दर में तीव्र वृद्धि हुई है।

इसी प्रकार के और भी बहुत सारे तथ्य रेखाचित्रीय आरेख के आधार पर ज्ञात किये जा सकते हैं, इसके अतिरिक्त इस आरेख की चरराशियों के मानों के अनुसार मान पूर्वानुमान ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

(ii) बहुदण्ड चित्र – त्रिचरीय काल–श्रृंखला आंकड़ों को दण्ड आरेख के द्वारा प्रदर्शित करने के लिये हम प्रत्येक समय बिन्दु तक तीन दण्ड (प्रत्येक चरराशि के मान के लिये एक दण्ड) खींचते हैं। दण्डों की ऊंचाइयाँ सम्बन्धित चरराशियों के मानों को प्रदर्शित करती हैं।

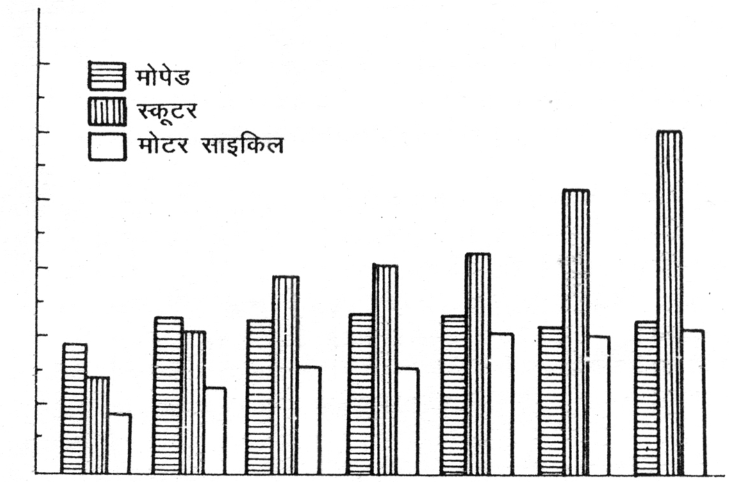


चूँकि प्रत्येक समयबिन्दु पर आंकड़ों को एक से अधिक दण्ड के द्वारा प्रदर्शित किया गया है, इसलिये इस आरेख को बहुदण्ड चित्र कहा जाता है।

बहुदण्ड चित्र चरराशियों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अलावा अन्य कोई जानकारी नहीं हेता, अतः विश्लेषण की दृष्टि से रेखाचित्रीय आरेख बहुदण्ड से श्रेष्ठ है। बहुदण्ड आरेख का महत्व केवल दृष्टिगत है तथा इसे मुख्यतः जनसाधारण को सांख्यिकीय जानकारी देने के उद्देश्य से ही निर्मित किया जाता है।

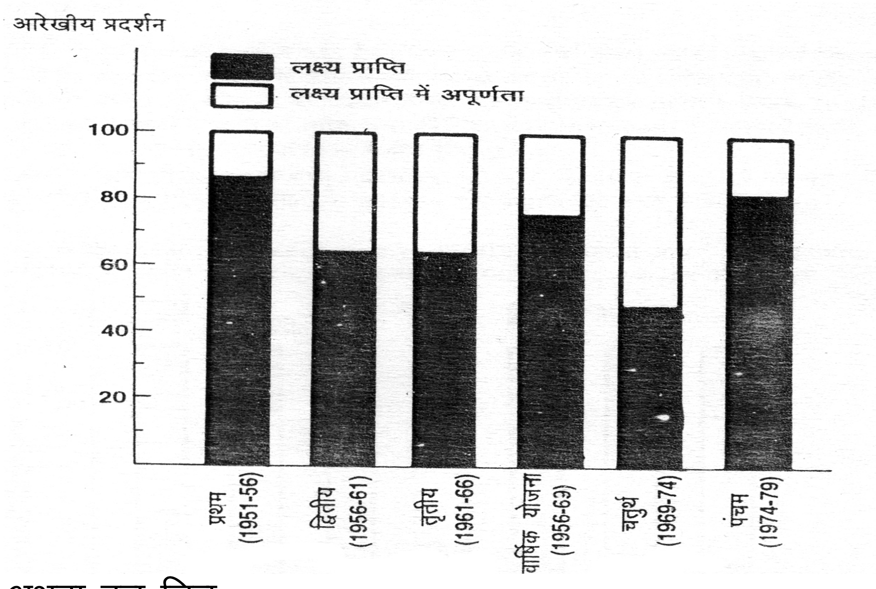
(iii) संघटक–भाग दण्ड चित्र – संघटक भाग दण्ड चित्र से सभी तथ्यों की जानकारी हमें एक ही आरेख से प्राप्त हो जाती है। वास्तव में संघटक भाग दण्ड चित्र यह प्रदर्शित करता है कि समय राशि, समयोपरि अपने संघटकों में किस प्रकार विभाजित हो रही है।

आरेख खींचने के लिये सबसे पहले हम विभिन्न समयों में समग्र राशि अथवा वस्तु का कुल उत्पादन (यदि यह पहले से न दिया हो) ज्ञात करते हैं। तत्पश्चात् समग्र राशि को प्रदर्शित करने वाला एक सरल दण्ड चित्र बनाते हैं, इसके उपरान्त प्रत्येक दण्ड को (कुल अथवा समग्र राशि को) तीन भागों अथवा संघटकों में विभाजित करते हैं। दण्डों के ये संघटक विभिन्न चरराशियों के समयोपरि मानों को प्रदर्शित करते हैं। चित्र निम्न प्रकार है।



(iv) प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र – संघटक भाग चित्र हमें निरपेक्ष मानों के बारे में इनकी मूल प्रवृत्तियों के बारे में तो जानकारी देता है परन्तु कुल लक्ष्य में संघटक राशियों के अनुपातों के विषय में कोई जानकारी नहीं देता। अनुपातों से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करने के लिये निर्मित किये जाने वाले आरेख को हम प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र कहते हैं।

प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र तथा संघटक भाग दण्ड चित्र में केवल इतना अन्तर है कि संघटक भाग दण्ड चित्र जहां निरपेक्ष मानों के परिवर्तन की व्याख्या करता है, वहीं प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र संगत प्रतिशतों की व्याख्या करता है। प्रतिशतों को ज्ञात करने के पश्चात्, इन्हें एक संघटक भाग दण्ड चित्र के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह आरेख चूंकि प्रतिशतों की व्याख्या करता है, अतः इसे हम प्रतिशत संघटक भाग दण्ड चित्र कहते हैं।



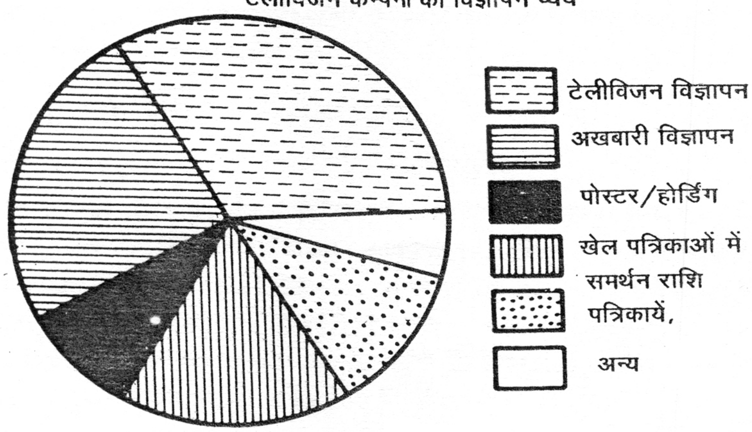
4 पाई आरेख अथवा वृत्त चित्र

पाई आरेख अथवा वृत्त चित्र वास्तव में यह दर्शाता है कि एक समग्र राशि अथवा कुल राशि (जिसे 100 प्रतिशत के बराबर माल लिया जाता है) विभिन्न संघटक राशियों में किस प्रकार वर्गीकृत अथवा विभाजित है। अन्य शब्दों में यह समग्र राशि (100 प्रतिशत) के संघटक

राशियों में सापेक्षिक अथवा प्रतिशत वितरण की व्याख्या करता है।

इस आरेख के अन्तर्गत समग्र अथवा कुल राशि को एक वृत्त के क्षेत्रफल के द्वारा तथा संघटक राशियों को वृत्तांओं के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। आरेख में बड़े वृत्तांश, बड़े प्रतिशतों (अनुपातों को) तथा छोटे वृत्तांश छोटे प्रतिशतों को प्रदर्शित करते हैं। वृत्तांशों का आकार अथवा क्षेत्रफल वृत्तांश कोण के ऊपर निर्भर करता है – यदि आरेख में किसी संघटक राशि से सम्बन्धित वृत्तांश का वृत्तांश कोण 90^0 है, तो वृत्तांश क्षेत्रफल वृत्त क्षेत्रफल के 1/4 के बराबर होगा इसका अर्थ यह होगा कि संघटक राशि का मान, समग्र राशि के 1/4 अथवा 25 प्रतिशत के बराबर है। इसी भांति 60^0 वृत्तांश कोण वृत्त के 1/6 क्षेत्रफल को अर्थात् इस तथ्य को प्रदर्शित करता हो कि समग्र राशि में संघटक राशि का अनुपात 1/6 है।

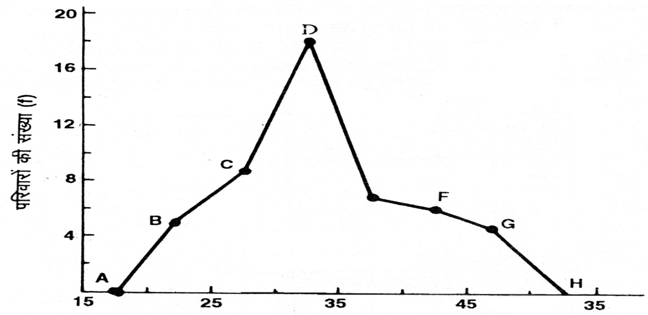
टेलीविजन कम्पनी का विज्ञापन व्यय



आरेख में सबसे बड़ा वृत्तांश व्यय की सर्वाधिक महत्वपूर्ण मद को तथा क्रम से घटते हुए वृत्तांश क्रमशः मदों के घटते हुए महत्त्व को प्रदर्शित करते हैं। अन्य शब्दों में आरेख में टेलीविजन विज्ञापन से सम्बन्धित वृत्तांश सबसे बड़ा है, अर्थात् व्यापारिक प्रतिष्ठान टेलीविजन विज्ञापन को अन्य विज्ञापन माध्यमों की तुलना में श्रेष्ठतम मानता है। महत्व के अनुसार क्रम में दूसरा स्थान अखबारी विज्ञापनों का है, तत्पश्चात् खेल प्रतिस्पर्धाओं में समर्थन राशि का तथा सबसे कम महत्व 'अन्य' विज्ञापन माध्यमों का है।

5 **आवृत्ति बहुभुज** – बहुभुज से हमारा आशय एक ऐसी ज्यामितीय आकृति से है, जिसमें अनेक भुजायें होती हैं, तता आकृति बन्द होती है। स्पष्ट है कि आवृत्ति बहुभुज भी एक अनेकों भुजाओं वाली बन्द आकृति होगी।

आवृत्ति बहुभुज निर्मित करने के लिये हगम वर्गान्तरों के मध्य मानों को X-अक्ष पर तथा आवृत्तियों को Y-अक्ष पर अंकित करते हैं। वर्गान्तर के मध्य मान से तात्पर्य वर्गान्तर सीमाओं के माध्य से है।



चित्र (16)

मध्यमानों एवं आवृत्तियों के संगत मानों को ग्राफ पर बिन्दुओं के रूप में अंकित करने के बाद उन्हें क्रम से सीधी रेखाओं के द्वारा जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार जो प्रकृति प्राप्त होती है, वह अनेकों भुजाओं वाली आकृति तो है, परन्तु बन्द नहीं है, वरन् यह बायों तथा दाहिनी ओर खुली है।

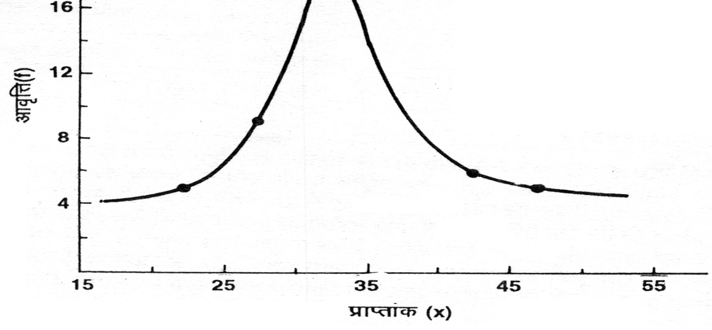
आकृति को बन्द करने के लिये हम प्रथम वर्गान्तर से पहले एक और वर्गान्तर लेते हैं। वर्गान्तर के मध्यमान तथा आवृत्ति शून्य को ग्राफ में अंकित करने पर हमें X-अक्ष पर बिन्दु प्राप्त हो जाता है, जिसे सीधी रेखा में जोड़ने पर आकृति बायीं ओर बन्द हो जाती है। आकृति को दाहिनी ओर बन्द कनरे के लिये भी इसी प्रक्रिया को अपनाया जाता है।

आवृत्ति बहुभुज तथा X-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल आंकड़ों की कुल संख्या को प्रदर्शित करता है।

6 आवृत्ति वक्र –

आवृत्ति वक्र तथा आवृत्ति बहुभुज बनाने की समस्त प्रक्रिया पूर्णतया समान है। यहां भी X-अक्ष पर वर्गान्तरों के मध्यमानों को तथा Y-अक्ष पर आवृत्तियों को अंकित करते हैं। प्राप्त बिन्दुओं को एक सतत वक्र से जोड़ देने पर आवृत्ति वक्र प्राप्त हो जाता है।

आवृत्ति वक्र वास्तव में आवृत्ति बिन्दुओं अर्थात् ग्राफ पर अंकित बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ है – अन्य शब्दों में यह आवश्यक नहीं है कि आरेख का प्रत्येक बिन्दु आवृत्ति वक्र पर स्थित हो। आवृत्ति वक्र, आंकड़ों से सम्बन्धित बहुत सारी जानकारी देने में सहायक होते हैं। आवृत्ति वक्र को देखने मात्र से हमें चर राशि के परिसर, अधिकतम आवृत्ति वाला चरराशि का मान, आवृत्तियों के संकेन्द्रण की स्थिति आंकड़ों का अनुमानित औसत इत्यादि जानकरियां प्राप्त हो जाती हैं।



आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज की भाँति है, आवृत्ति वक्र तथा X-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल आंकड़ों की कुल संख्या को प्रदर्शित करता है। आवृत्ति वक्र को विभिन्न चरराशियों के मानों की आवृत्तियों को अनुमानित करने के लिये प्रयुक्त किया जा सकता है।

7 संचयी आवृत्ति वक्र –

संचयी आवृत्ति का अर्थ है–आवृत्तियों का योग। आवृत्तियों का योग दो प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है (i) ऊपर से (ii) नीचे से। आवृत्तियों का योग ऊपर से लेने पर प्राप्त संचयी आवृत्तियों का क्रम वर्द्धमान होता है, अतः इन्हें वर्द्धमान अथवा आरोही संचयी आवृत्ति कहते हैं। इसकी प्रकार आवृत्तियों का योग सारिणी में नीचे से लेने पर, जो संचयी आवृत्तियों प्राप्त होती हैं, इनका क्रम ह्रासमान होता है तथा इन्हें ह्रासमान अथवा अवरोही संचयी आवृत्तियां कहते हैं।

7.8 अभ्यास प्रश्न

1 सत्य / असत्य

रेखा चित्र द्वारा एक से अधिक श्रेणियों में आने वाले परिवर्तन की तुलना की जा सकती है –

(A) सत्य (B) असत्य **Ans- A**

2 बहुविकल्पीय प्रश्न

1 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन में आवश्यक है –

(A) शीर्षक (B) लम्बाई

(C) मापदण्ड का चुनाव (D) इनमें से सभी **Ans- C**

2 ग्राफीय विधि से आंकड़ें –

(A) सुबोध बनते हैं (B) स्मरणीय बनते हैं

(C) आकर्षक बनते हैं (D) उपर्युक्त सभी **Ans. – (C)**

3 लघु उत्तरीय प्रश्न

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. चित्रों द्वारा प्रस्तुतीकरण या बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता स्पष्ट कीजिए?
2. बिन्दुरेखीय प्रदर्शन क्या है?
3. बिन्दुरेखीय प्रदर्शन से कौन–कौन से लाभ हैं?
4. निम्न आंकड़ों को कालिक चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए –

वर्ष	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
बिक्री ('000 रु.)	24	39	29	49	54	68	80

5. निम्न पर टिप्पणी लिखिये –

1– दण्ड एवं वृत्त चित्र 2– पाई ग्राफ

3– प्रतीक ग्राफ

6. आंकड़ों को किस विधियों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है ?

7.9 सारांश

इस प्रकार इस इकाई में हमने बिन्दुरेख से सम्बन्धित उन तमाम बातों की जानकारी प्राप्त की जो कि एक अच्छे आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण के लिये आवश्यक है। चूंकि बिन्दुरेखीय विधि सरल एवं आकर्षक है इसीलिए आज लगभग हर क्षेत्र में आंकड़ों के प्रदर्शन हेतु इस विधि का प्रयोग किया जा रहा है। अन्त में यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकीय आंकड़ों को चित्र द्वारा ग्राफीय निरूपण करने से यह अधिक सरल और सुग्राह्य बन जाते हैं। चित्रों द्वारा प्रदर्शित आंकड़ें कठिन प्रकिया से सरल प्रक्रिया में परिवर्तित हो जाते हैं। अतः यह इकाई आप सभी के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

7.10 संदर्भ ग्रन्थ

1. Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.
2. Bhardwaj, R. S. (2000), Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
3. Singh, S. P. (2010), Principales of Statistic, S & Chand Publishing House.
4. Kumar, Anil (2008), Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.

7.11 निबंधात्मक प्रश्न

1. निम्नलिखित आंकड़ों को बिन्दुरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए –

वर्ष	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
चावल का उत्पादन (मिलियन टन)	10	15	18	20	22	30	32	35	38
गेहूँ का उत्पादन (मिलियन टन)	15	18	20	25	28	32	34	36	40

2. ध्यान आकर्षित करने की दृष्टि से रेखाचित्र आंकड़ों के प्रदर्शन की अन्य रीतियों की अपेक्षा अधिक प्रभावशाली होते हैं।' इस तथ्य की उदाहरण साहित व्याख्या कीजिए।

इकाई 8 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

8.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाइ मे पाठकों को केन्द्रीय प्रवृत्ति की प्रमापें की जानकारी दी जाएगी। इसके अन्तगत समंको को सांख्यिकीय माध्य द्वारा प्रकट करने की विभिन्न विधियों की व्याख्या की जाएगी। सांख्यिकीय विश्लेषण के अन्तर्गत वर्गीकरण और सारणीयन द्वारा समकों के समूह को आवृत्ति बंटन के रूप में प्रस्तुत करके सरल और समझने योग्य बनाया जाता है। परन्तु इससे समंको की महत्वपूर्ण विशेषताओं का पता नहीं चलता। सारांश रूप में समंको को सांख्यिकीय माध्य द्वारा प्रकट किया जा सकता है। यह एक ऐसा मूल्य है जिसके आस–पास अन्य आकड़ों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पायी जाती है तथा जो समंक लगभग श्रेणी के मध्य में होता है तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है। माध्य सांख्यिकीय विश्लेषण की महत्वपूर्ण माप है। यह मूल्य चिड़िया की आँख जैसी दृष्टि प्रदान करता है। माध्यों को स्थान सम्बन्धित मूल्य कहते हैं। इसमें निम्न बिन्दु प्रमूख हैं –

सांख्यिकीय माध्यों के उद्देश्य व कार्य, आदर्श माध्य के आवश्यक तत्व, सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार, गणितीय माध्य, समान्तर माध्य,समान्तर माध्य की गणना दो प्रमुख विधिया, अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य, पद विचलन रीति, चार्लियर की शुद्धता परीक्षा, समान्तर माध्य के गणितीय गुण, समान्तर माध्य की सीमाएँ, अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य, भारित समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य यदि खण्डित अविच्छिन्न श्रेणी हो तो गुणोत्तर माध्य, सामूहिक गुणोत्तर माध्य, भारित गुणोत्तर माध्य, हरात्म्क माध्य,समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के संबंध में कुछ स्मरणीय बातें, द्विघातीय माध्य स्थिति – संबंधी माध्य मध्यका खण्डित श्रेणी में मध्यका, अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका, मध्यका की विशेषताएँ – दोष, बहुलक– परिभाषा , खण्डित श्रेणी में बहुलक, अविच्छिन्न श्रेणी में बहुलक, बहुलक की गणना में महत्वपूर्ण तथ्य, समान्तर माध्य और मध्यका द्वारा बहुलक की गणना , बहुलक विशेषताएँ , सांख्यिकीय माध्य कुछ विद्वानों का मत , सारांश, अभ्यास के लिये प्रश्न, स्मरणीय बिन्दु।

सारांश रूप में समंकों को प्रस्तुत करने के लिये एक संख्यात्मक माप की आवश्यकता होती है। एक उदाहरण में एक बाग में 360 पेड़ हैं, जिनकी ऊँचाई का आवृत्ति बंटन निम्न हैः

ऊँचाई (फीट में)	0.7	7.14	14.21	21.28	28.35	35.42
आवृत्ति	26	31	35	49	82	71

8.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त पाठक

- ✓ माध्यों के प्रकार
- ✓ गणना की विधियाँ एवम् सूत्र
- ✓ इन माध्यों की विभिन्न उपयोगों की जानकारी प्राप्त करेंगे।

8.3 सांख्यिकीय माध्यों के उद्देश्य व कार्य

माध्य आसानी से व्यक्त न होने वाले जटिल

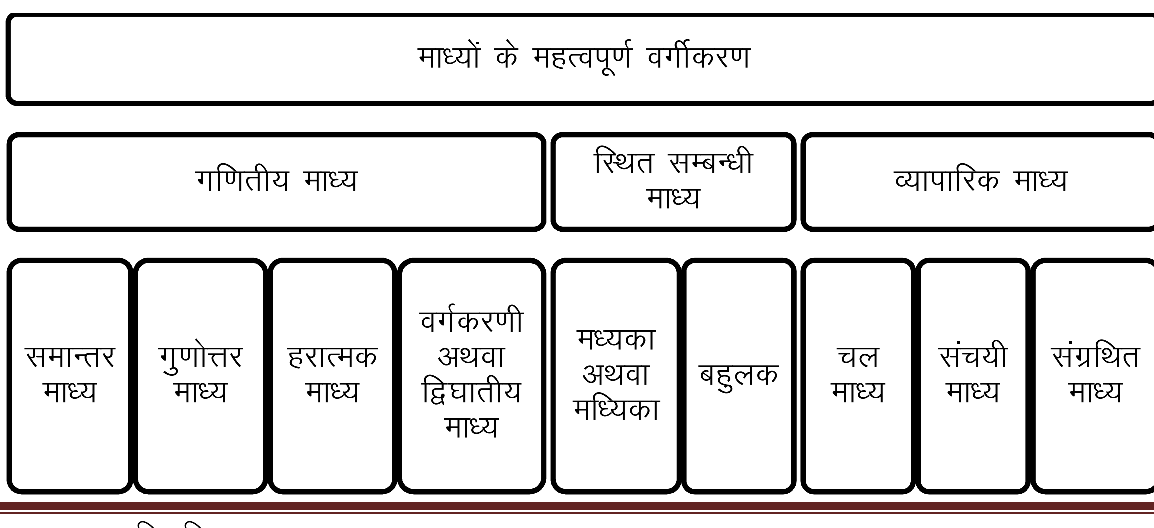
(i) समंकों का संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करता है।
(ii) माध्यों की एक महत्वपूर्ण उपयोगिता विभिन्न समंक समूहों के बीच तुलना की सुविधा है।
(iii) अन्य सांख्यिकीय विवेचन जैसे, उपकिरण, विषमता और प्रथुषीर्षत्व की गणना में माध्यों का उपयोग होता है।
(iv) माध्य पथ प्रदर्षन का कार्य करते हैं।

8.4 आदर्श माध्य के आवश्यक तत्व

प्रो0 यूल (Prof. Yule) के द्वारा आदर्श माध्य के आवश्यक तत्वों का वर्गीकरण निम्न प्रकार किया गया है।

(i) इन्हें सांख्यिक (Statistician) के अनुमान पर आधारित नहीं होना चाहिये।
(ii) इन्हें सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए। (Based on all observations)
(iii) यह आसानीं से समझ मं आने और रेखांकित होने योग्य होना चाहिये। (Simple to understand and locate)
(iv) इनमें निर्धारण की सरलता होनी चाहिये।
(v) इनमें अधिकतम अथवा न्यूनतम चरों के मूल्य का अधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिये।
(vi) इनकी कुछ सरल और स्पष्ट गुण होने चाहिये। (It should not be highly mathematical).
(vii) माध्यों पर प्रतिचयन के परिवर्तन (effect of sampling) का न्यूनतम प्रभाव हो। एक ही समग्र के विभिन्न प्रतिचयन/प्रतिदर्श के विभिन्न माध्य नहीं होने चाहिये।
(viii) इनका अग्रिम गणितीय विश्लेषण में उपयोग होना चाहिये।

8.5 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार **(Kinds of Statistical Average)**



उपर्युक्त विभिन्न माध्यों में समान्तर माध्य, मध्यका और बहुलक महत्वपूर्ण हैं।

8.5.1 गणितीय माध्य (Mathematical Averages)

समान्तर माध्य – यह सबसे लोकप्रिय माध्य है। समान्तर माध्य वह मूल्य है जो किसी समंकमाला के सभी पदों के मूल्यों के योग में उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। समान्तर माध्य को सामान्य रूप में ग लिखते हैं। यदि पद $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n$ हों तो उनका समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_\eta}{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} x_i}{\eta}$$

यहाँ $(\sum\ )$ सिग्मा योग की अभिव्यक्ति है और i उपसंकेत के लिये प्रयुक्त है यदि पद X_1, X_2 और X_3 हों तो इनका योग $\sum_{i=1}^{3} X_i$ के रूप में व्यक्त होगा और

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

सामान्तर माध्य की उपर्युक्त गणना व्यक्तिगत श्रेणी में होती है। यदि पदों की आवृतियाँ दी गई हों अर्थात् यदि खण्डित श्रेणी (discrete series) में सामान्तर माध्य ज्ञात करना हो तो–

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} fX_i}{\sum_{i=1}^{\eta} f_i = N}$$

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + \ldots\ldots f_nX_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots f_n}$$

अविछिन्न श्रेणी (continuous series) में समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए वर्गों के मध्य–मूल्य (mid value) ज्ञात कर लेते हैं फिर खण्डित श्रेणी की भांति ही समान्तर माध्य की गणना करते हैं।

समान्तर माध्य की गणना दो प्रमुख विधियों द्वारा की जाती है–

(i) प्रत्यक्ष रीति (direct method)

(ii) अप्रत्यक्ष रीति (indirect method)

दोनों रीतियों से निकाला गया समान्तर माध्य बराबर ही आता है। अप्रत्यक्ष रीति अथवा लघु रीति का प्रयोग गणना की क्रिया को समरल बनाने के लिए किया जाता है। इसके अन्तर्गत इम मूल पदों (x) को, एक ऐच्छिका मूल्य जिसे कल्पित माध्य (assured mean) कहा जाता है तथा जिसे A से लिखते हैं, द्वारा एक नये पद (dx तथा dx) में परिवर्तित करते हैं। और फिर उचित सूत्र द्वारा समानान्तर माध्य की गणना कर लेते हैं।

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)

हमने देखा कि व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य हैं।

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \;....\, X_{\sim}}{\sim}$$

यह प्रत्यक्ष रीति है।

लघुरीति (short-cut method)

इससे नया पद कग इस प्रकार का होता है कि $dx = X\text{-}A$ अर्थात् मूल पदों में से एक स्थिर पद घटाते हैं। A का मान श्रेणी मे से ही मध्य का रखा जाता है।

अब प्रत्येक (X-A) का जोड़कर $\sum dx$ प्राप्त करते हैं। तथा मूल श्रेणी का समान्तर माध्य

$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$ का मान ज्ञात करते हैं–

इसे निम्न सूत्र की उत्पत्ति द्वारा भी समझा जा सकता है–

या $dx = X - A$

$$X = A + dx$$

दोनों तरफ योग करने पर –

$$\sum X = \sum A + \sum dx$$

या

$$\frac{\sum x}{\sim} = \frac{A_{\sim}}{\sim} + \frac{\sum dx}{\sim}$$ (दोनों तरफ द से भाग देने पर)

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$$

इसी को इस रूप में भी लिख सकते हैं–

$\bar{X} = A + \bar{d}x$ क्योंकि $\bar{d}x = \frac{\sum dx}{\sim}$

उदाहरण : 1ण निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
लम्बाई (cm)	158	150	165	163	162	166	164	180	155	167

हलः प्रत्यक्ष तथा लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य

$\bar{X} = \frac{\sum X}{\sim}$; $\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{\sim}$

fo|kFkhZ	yEckbZ	dx = X-A tc A = 160
A	158	(158-160) – 2
B	150	(150-160) – 10
C	165	(165-160) + 5
D	163	(163-160) + 3
E	162	(162-160) + 2
F	166	(166-160) + 6
G	164	(164-160) + 4
H	180	(180-160) + 20
I	155	(155-160) – 5
J	167	(167-160) + 7
	$\sum X = 1630$	$\sum dx = +37$

(a) प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य $\bar{X} = \frac{1630}{10} = 163$

(b) लघु रीति द्वारा माध्य $= 160 + \frac{37}{10} = 163.7$

जो लगभग एक समान है।

खण्डित श्रेणी में माध्य की गणना

उदाहरण : 2 एक कपड़ा मिल में कार्य करने वाले श्रमिकों की दैनिक मजदूरी (रु0) निम्न है, इनकी औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी – (X)	100	120	140	160	180	200	220
श्रमिकों की संख्या (f_i)	3	6	10	15	24	42	75

	X	f_i	X-A=d_i	$f_i d_i$
			A = 160	
	100	3	-60	-180
	120	6	-40	-240
	140	10	-20	-200
A →	(160)	15	0	0
	180	24	+20	480
	200	42	+40	1680
	220	75	+60	4500
		$\sum X = 175$	$\sum d_i = 0$	$\sum d_i f_i = 6040$

नोट → यहाँ $\sum d = 0$ अवष्य जाँच लें इससे ज्ञात होता है कि मानक माध्य (Assumed mean) का मान सही है।

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sim} = 160 + \frac{6040}{175} = \text{Rs } 194.5$$

नोट → यह गणना लघु रीति द्वारा की गयी है, पाठक स्वयं प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य की गणना कर जाँच करें।

उदाहरण : 3 निम्न समंको से माध्य (Arithmetic Average) की गणना कीजिए

	X	f_i	$d_i = X_i - A$	$f_i d_i$
	5	3	-5	-15
	6	4	-4	-16
	7	2	-3	-6
	9	4	-1	-4
A →	10	2	0	0
	12	5	2	10
	13	3	3	9
	15	2	5	10
		$\sum f_i = 25 = \sim$		$\sum f_i d_i = -12$

यहाँ $\bar{X} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 10 - \frac{12}{25} = 9.52\text{(hrs)}$

उदाहरण : 4 निम्न समंको द्वारा माध्य की गणना कीजिए

	X	$\mathbf{f_i}$	$X_i - A = d_i$	$\mathbf{f_i d_i}$
	1	5	-3	-15
	2	9	-2	-18
	3	12	-1	-12
A $\rightarrow$	4	17	0	0
	5	14	+1	14
	6	10	+2	20
	7	6	+3	18
	73			-7

$$\bar{X} = 4 + \frac{(-7)}{73} = 4 - \frac{7}{73}$$

अविच्छिन्न श्रेणी के लिये माध्य $\rightarrow$

Mean for Continuous Series $\rightarrow$

अविछिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना करने के लिये वर्ग अन्तराल (class Interval) के मध्य बिन्दु ज्ञात कर लिये जाते हैं। अविच्छिन्न श्रेणी में यह मान लिया जाता है कि आवृत्तियाँ मध्य बिन्दुओं पर केन्द्रित हैं।

माध्य निकालने की रीति

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य की गणना –

प्रत्यक्ष रीति

अप्रत्यक्ष रीति तथा पद विचलन रीति द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण 5 निम्न समंको से माध्य की गणना प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रीति द्वारा कीजिए ।

वर्ग अन्तराल	**मध्य बिन्दु**	**बारम्बारता**		**(X-A)**	
X	X	(f_i)	f_x	d_i	$f_i d_i$
0.10	5	10	50	.20	.200
10.20	15	12	180	.10	.120
20.30	25	25	625	0	0
30.40	35	18	630	10	180
40.50	45	15	675	20	300
		$\sum f = 80$	$\sum fx = 2160$		$\sum fdx = 160$

यहाँ X मध्य बिन्दु की गणना $\frac{L_1 + L_2}{2}$ द्वारा करते हैं।

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2160}{80} = 27 \text{ (प्रत्यक्ष रीति द्वारा)}$$

अप्रत्यक्ष रीति द्वारा

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{\sum f} = 25 + \frac{160}{80} = 27$$

दोनों रीति उत्तर समान है।

पद विचलन रीति–यदि अविच्छिन्न श्रेणी में वर्ग–विस्तार $(L_2 - L_1)$ समान हो अर्थात् प्रत्येक वर्गों में वर्ग अन्तराल एक निश्चित संख्या 'h' के बराबर हो तो हम समानान्तर मध्य की गणना करने के लिये एक ऐसा पद dx' बनाते है जो $\frac{X - A}{\sim}$ के बराबर होता है।

इसमें दो बातें ध्यान देने योग्य हैं–

1.) मूल का परिवर्तन (Change of Origin) –लघु रीति में प्रत्येक पद (X) में से स्थिर राशि मानक माध्य (A) को घटाते हैं।

2.) पैमाने का परिवर्तन (Change of Origin) – इसे dx^1 लिखते हैं तथा $dx^1 = \frac{X - A}{\sim}$

जहाँ ~ वर्ग अन्तराल का मान है।

इस रीति द्वारा माध्य की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती हैं–

$$\bar{X} = A + \sim \frac{\sum fdx'}{\sum f}$$

उदाहरण (6)

वर्ग अन्तराल	मध्य बिन्दु	बारम्बारता	$dx' = (X - A) \sim$	fdx'
	X	f	(X-A)/~	
0.10	5	10	.2	.20
10.20	15	12	.1	.12
20.30	25	25	0	0
30.40	35	18	.1	.18
40.50	45	15	.2	.30
		$\sum F = 80$		$\sum fdx' = +16$

यहाँ सभी वर्गों का अन्तराल 10 है अतः समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A + \frac{\sim \sum fdx'}{}$$

$$= 25+10 \times \frac{16}{80} = 25 + 2 = 27.$$

स्मरणीय तथ्य

(A) इसमें कुछ बाते स्मरणीय है जैसे यदि वर्गान्तरों को इस रूप में दिया जाए की आवृतियाँ संचयीं हों (वर्ग अन्तराल कम अथवा अधिक रुप में दिये हों) तो वितरण को सामान्य वितरण में बला जा सकता है। तथा समान्तर माध्य की गणना की जा सकती है।

जैसे –

वर्ग अन्तराल		आवृत्ति
10	से कम	10
20	से कम	18
30	से कम	30
40	से कम	37

सामान्य वितरण

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति
0.10	10
10.20	8
20.30	12
30.40	7
40.50	5

(B) असमान वर्ग वितरण पर भी समान्तर माध्य की गणना उसी रुप में की जा सकती हैं।

(C) खुले हुए वर्ग अन्तराल (open end classes) में माध्य की गणना करने के लिये खुले वर्ग को बन्द कर लेना आवश्यक होता है।

समान्तर माध्य के गणितीय गुण –

विशेषता 1 – विभिन्न मूल्यों (X) के विचलनों (dx) का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

विशेषता – 2 → यदि $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ में $\sum X, N, \bar{X}$ में से कोई दो की माप ज्ञात हो तो तीसरे की गणना की जा सकती है। इसी विशेषता के आधार पर हम अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण तथा गलत माध्य को सही माध्य में परिवर्तित कर सकते हैं।

उदाहरण – 8 विश्व कप फुटबाल मैचों में एक सप्ताह में सोमवार से शरिवार तक औसत रुप में प्रति मैच 3 गोल हुए। रविवार को एक संघर्षपूर्ण मैच में अत्यधिक गोल होने पर पूरे सप्ताह में गोल का औसत 4 हो गया। बताइये रविवार को कुल कितने गोल हुए ?

हल – साम0 से शनि0 तक औसत गोल त्र 3

6 दिनों में कुल गोल $= 3 \times 6 = 18$

सो0 से रवि0 तक गोल का औसत = 4

अतः सात दिनों में कुल गोल $= 7 \times 4 = 28$

सातवें दिन (रवि0) को कुल गोल $= 28 - 18 = 10$ (अ0)

उहारण 9 यदि बारम्बारता ज्ञात न हो – यदि

$$205 + fi = \sum f$$

$$722 + 5fi = \sum fx$$

$$\bar{X} = 3.763$$

दी हुई हो तो f_1 ज्ञात कीजिए

$$3.763 = \frac{722 + 5f_1}{205 + f_1}$$

$$= 771.415 + 3.763 f_1 = 5f_1$$

$$49.415 = 1.123f_1$$

$$f_1 = \frac{49415}{1123} = 44.0$$

अतः अज्ञात वृत्ति है $f_1 = 44.$

विशेषता दृ– 4 सही माध्य का निर्धारण

यदि ~ पदों के समान्तर माध्य $\bar{X}$ ज्ञात किया और बाद में यह पता चला कि उसमें एक या दो से अधिक मूल्य गलत जोड़े गये, तो सही मूल्य ज्ञात होने की स्थिति में हम निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं–

(1) पहले हम गलत योग $\sum X = \bar{X}X(N)$ ज्ञात करते हैं।

(2) इस गलत योग $\sum X$ में से गलत पदों को घटाकर सही पदों को जोड़ देते हैं।

(3) यही योग $\sum X$ में ~ का भाग कर सही $\bar{X}$ माध्य प्राप्त होता है।

विशेषता – 5 सामूहिक माध्य (Combined Mean)

यदि किसी समूह के दो या दो से अधिक उपसमूहों के समान्तर माध्य और पदों की संख्या ज्ञात होतो सामूहिक माध्य की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जा सकती है–

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 \sim_1 + \bar{X}_2 \sim_2}{N_1 + N_2}$$

समान्य रुप में

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3 + \ldots\ldots \bar{X}_K N_k}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots N_k}$$

विशेषता – 6 यदि किसी श्रेणी के सभी मूल्यों में निश्चित अचर राशि जोड़ दी जाए घटा दी जाए, गुणा कर दी जाए तो उस श्रेणी के समान्तर माध्य में वह अचर राशि क्रमषः जुड़ जाती है गुणा हो जाती है।

विशेषता – 7 दो श्रेणियों के तत्संवादी मूल्यों (corresponding values) के जोड़ों और अन्तरों का समान्तर माध्य उन दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के योग या अन्तर के बराबर होता है।

समान्तर माध्य के गुण :

एक आदर्श माध्य के रुप में समान्तर माध्य की निम्न विशेषताएँ पायी जाती हैं – यह

(1) सदैव निश्चयात्मक होता है
(2) गणना करने में सरल तथा सामान्य होता है
(3) यह सभी मूल्यों पर आधारित होता है
(4) दूसरे माध्यों की तुलना में प्रतिचयन के प्रभावों से कम प्रभावित होता है।

समान्तर माध्य की सीमाएँ (Limitations)

समान्तर माध्य दोषमुक्त नहीं है इसकी निम्न सीमाएँ हैं–

(1) यह चरम मूल्यों से प्रभावित होता है

(2) इसका निरीक्षण अथवा बिन्दुरेखीय निर्धारण सम्भव नहीं है।
(3) अनुपात, दर, प्रतिशत की गणना में उपयुक्त नहीं है
(4) असमित वितरण की दशा में समान्तर माध्य वितरण का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता।

8.5.2 भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

व्यवहारिक जीवन में अनेकों ऐसी स्थितियाँ होती हैं जिनमें सभी पद समान महत्व के नहीं होते। ऐसी स्थिति में समान्तर माध्य निकालते समय मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखना आवश्यक होता है, इस प्रकार निकाले जाने वाले माध्य को समानान्तर माध्य कहते हैं।

यदि मूल्य $\rightarrow X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots\ldots, X_{\sim}$

सम्बद्ध भार $\rightarrow W_1, W_2, W_3, \ldots\ldots, W_{\sim}$ हैं तो –

$$\bar{X}_W = \frac{W_1X_1 + W_2x_2 + W_3X_2 + \ldots\ldots + W_{\sim}X_{\sim}}{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ldots + W_{\sim}} = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

आवृत्ति वितरण में –

$$\bar{X}_W = \frac{W_1(f_1X_1) + W_2(f_2X_2) + \ldots\ldots + W_n(f_nX_n)}{W_1 + W_2 + \ldots . W_{\sim}} = \frac{\sum W(fX)}{\sum W}$$

भारित माध्य (Weighted Mean) की गणना प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष रीति दोनों प्रकार से की जा सकती है।

उदाहरण – 10 लेकिन इसे प्रत्यक्ष रीति द्वारा ही निकालते है। दो विद्यालयों का परीक्षाफल दिया गया है, कौन सा विद्यालय बेहतर है ?

प्रतिशत परीक्षाफल

	विद्यालय A	विद्यालय B
हाईस्कूल	70: (200 विधार्थी)	80: (150 विधार्थी)
बी0ए0	60: (150 विधार्थी)	80: (50 विधार्थी)

हल : विद्यालय A का भरित माध्य –

$$\bar{X}W_1 = \frac{200 \times 70 + 150 \times 60 + 100 \times 80}{200 + 150 + 100} = \frac{31000}{450} = 68.9$$

स्पष्ट है कि यहाँ विद्यार्थियों की संख्या को भार (W) तथा प्रतिशत परीक्षाफल को पद मूल्य (X) माना गया है ।

विद्यालय B का भारित समानान्तर माध्य

$$\bar{X}W_2 = \frac{150 \times 80 + 100 \times 60 + 50 \times 80}{150 + 100 + 50} = \frac{22000}{300} = 73.3$$

अतः विद्यालय B का परीक्षाफल बेहतर है।

स्वपरीक्षण

निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए –

(a) समान्तर माध्य के गुण
(b) चार्लियर की शुद्धता परीक्षा
(c) भारित समान्तर माध्य
(d) पद विचलन रीति
(e) समान्तर माध्य की सीमाएँ
(f) माध्य के सामान्य जीवन में उपयोग

8.5.3 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

परिभाषा किसी श्रेणी के ~ पदों के~ पदों के गुणनफल को ~ वाँ मूल (root $\sqrt{\ }$) ही उसका गुणोत्तर माध्य है। पदों की संख्या से ही मूल का मान ज्ञात होता है। अतः 2,3 संख्याओं में गुणोत्तर माध्य की गणना आसानी से की जा सकती है जैसे –

पद $\rightarrow$ X, Y

G.M $\rightarrow \sqrt[2]{X.Y}$

पद $\rightarrow$ X, Y, Z

G.M $\rightarrow \sqrt[2]{X.Y.Z}$

जब दो या तीने से अधिक पद होते हैं तो गुणोत्तर माध्य =

$$G.M. = \text{Anti}\log \left[\frac{\log X_1 + \log X_2 + \ldots\ldots + \log X_{\sim}}{\sim}\right]$$

$$= \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log X}{\sim}\right]$$

यदि खण्डित अविच्छिन्न श्रेणी हो तो गुणोत्तर माध्य

$$G.M = \text{Antilog}\left[1/N\sum f\log X\right] \text{ जहाँ } N = \sum f$$

उपयोग $\rightarrow$ गुणोत्तर माध्य का प्रयोग प्रतिशत वृद्धि–दरों जैसे जनसंख्या वृद्धि दर, चक्रवृद्धि ब्याज, मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तन आदि की औसत दरें ज्ञात करने के लिये होता है। इसका संबंधित सूत्र निम्न है–

(i) $$P_{\sim} = P_0(1+r)^{\sim}$$

(ii) $$r = \left[\sqrt[n]{\frac{P_{\sim}}{P_0}} - 1\right] \text{ जहाँ}$$

$P_{\sim}$ = निश्चित अवधि के उपरान्त पर मूल्य की राशि

P_0 = अवधि के आरम्भ में चर मूल्य की राशि

$\sim$ = वर्षों की संख्या

r = प्रति इकाई परिवर्तन की दर

इसे चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र (Compound Interest Formula) कहते हैं।

उदाहरण – 11

दशक	वृद्धि दर	जनसंख्या दशक के अन्त में जब पूर्व दशक में 100 मान लें	$\log_{10} x$
1	5	105	2.0212
2	8	108	2.0334
3	12	112	2.0492

$$G.M. = \text{Antilog}\left\{\frac{1}{\sim}\sum \log x\right\} = \text{Antilog}\left\{\frac{1}{3}(6.1038\right\}$$

$$= \text{Antilog}\,(2.0346) = 108.2$$

सामूहिक गुणोत्तर माध्य

इसी प्रकार सामूहिक गुणोत्तर माध्य की गणना की जा सकती हैं

$$\text{सामूहिक गुणोत्तर माध्य} = \text{Antilog}\left[\frac{N_1\log G_1 + N_2\log G_2}{N_1 + N_2}\right]$$

जहाँ $G_1 \rightarrow$ एक भाग का गुणोत्तर माध्य

$N_1 \rightarrow$ एक भाग के पदों की संख्या

$G_2 \rightarrow$ दूसरे भाग का गुणोत्तर माध्य

$N_2 \rightarrow$ दूसरे भाग के पदों की संख्या

8.5.4 भारित गुणोत्तर माध्य

यदि विभिन्न मूल्यों का सापेक्षिक महत्व अलग–अलग हो तो भारित समान्तर माध्य की ही तर भारित गुणोत्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

भारित गुणोत्तर माध्य $W.G.M = \text{Antilog}\left[\frac{\sum(\log X.W)}{\sum W}\right]$

8.5.5 हरात्मक माध्य [Harmonic Mean]

परिभाषा –

किसी समंक श्रेणी के पदों की संख्या को पदों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के योग से भाग देने पर जो मूल्य प्राप्त होता है उसे उस श्रेणी का हरात्मक माध्य कहतें हैं –

$$H.M. = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_{\sim}}}$$

$$= \frac{N}{\sum \frac{1}{x}}$$

हरात्मक माध्य का व्यावहारिक उपयोग सीमित है। औसत गति, चलन वेग तथा प्रति रुपये वस्तु की मात्रा का प्रयोग किया जाता है। कभी–कभी भारित हरात्मक माध्य की गणना भी करनी पड़ती है। भारित हरात्मक माध्य का सूत्र निम्न है।

भारित हरात्मक माध्य $(W.H.M.) = \frac{N}{\sum \frac{W_i}{X_i}}$

या

$$\frac{1}{\frac{w_1}{x_1}+\frac{w_2}{x_2}+\frac{w_3}{x_3}+\ldots+\frac{w_{\sim}}{x_{\sim}}}$$

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के संबंध में कुछ स्मरणी बातें –

(i) किसी श्रेणी के गैर ऋणात्मक मूल्यों के लिए

$$A.M. \geq G.M. \geq H.M$$

यदि गैर ऋणात्मक मूल्य बराबर नहीं हैं–

$$A.M. > G.M. > H.M$$

यदि सभी मूल्य बराबर हैं –

$$A.M. \geq G.M. \geq H.M$$

पाठकों से अनुरोध है कि उक्त तथ्यों का परीक्षण स्वयं करें–

(ii) यदि केवल दो संख्याएँ होत तो –

$$(G.M.)^2 = A.M. \times H.M.$$

यदि दो संख्याएँ $a>0$ तथा $b>0$ हों तो हम जानते हैं कि इनका

$$A.M. = \frac{a+b}{2},$$

$$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$G.M. = \sqrt{ab}$$

तथा

$$A.M. \times H.M. = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b}$$

$$= ab$$

$$= \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

अतः $(A.M) \times (H.M) = (G.M)^2$

8.5.6 स्थिति – संबंधी माध्य (Positional Averages)

मध्यका (Median)

किसी समंक श्रेणी में मध्यका वह मूल्य होता है जो पुरे श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें श्रेणी को घटते से बढ़ते क्रम में व्यवास्थित करते हैं। तो उसका मध्य मूल्य मध्यका होता है, जिसे M या Md से व्यक्त करतें हैं।

नोटः यहाँ श्रेणी को घटते से बढ़ते अथवा बढ़ते से घटते क्रम में व्यवास्थित करना आवश्यक हैं।

मध्यका $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ पद का मान

यदि पदों की संख्या सम (even) हो तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ पद दशमलव में आता है अतः

4.5 वाँ पद का मान $=$चौथा पद का मान $+$ पाँचवे पद का मान $/2$

उदाहरण $X \rightarrow 7,\ 11,\ 12,\ 15.$ का मध्यका $\left(\frac{4+1}{2}\right)$ वाँ पद $=2.5$

अतः मध्यका $=\frac{11+12}{2}=11.5$

उदाहरण – निम्न श्रेणी का मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए।

25, 13, 23, 40, 27, 25, 23, 24, 22, 30

हल –

क्रम सं0 $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पद मूल्य $\rightarrow$	13	22	23	23	24	25	25	27	30	40

मध्यका $=\frac{10+1}{2}=5.5$ वाँ पद

अतः = 5 वाँ पद मान $+$ 6 वाँ पद मान $/2$ $=$ $\frac{24+25}{2}=24.5$

खण्डित श्रेणी में मध्यका

निम्न विधि द्वारा ज्ञात की जाती हैं

(1) पहले संचयी आवृत्ती ज्ञात करते हैं।
(2) $(N+1/2)$ वहाँ पद निकालते हैं।
(3) संचयी आवृति के जिस पद में $(N+1/2)$ वाँ पद शामिल हो उसी के सामने वाले मूल्य को मध्यका मान कहते हैं।

उदाहरण निम्न श्रेणी में मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

x	→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	→	1	9	26	59	72	52	29	7	1

हल

x	→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	→	1	9	26	59	72	52	29	7	1
c.f	→	1	10	36	95	167	219	248	255	256

$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ item $= \frac{256+1}{2} = 128.5^{th}$ item यहाँ 128॰5 वाँ संचयी आवृत्ति 167 में पहली बार आ रहा है, अतः मध्यका का मान 4 हैं।

अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका

अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका का पद मान ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$Md = \frac{N}{2}$ वाँ पद

तथा मध्यका की गणना निम्न सूत्र द्वारा करते हैं।

$$M = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times i$$

जहाँ M = मध्यका
L_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा
c = मध्यका वर्ग के ठीक पहले वाली संचयी आवृत्ति
f = मध्यका वर्ग की आवृत्ति
i = मध्यका वर्ग का विस्तार $(L_2 - L_1)$

पहले खण्डित, श्रेणी के समान ही संचयी आवृत्ति ज्ञात करते हैं–

$\frac{N}{2}$ द्वारा मध्यका वर्ग ज्ञात करतें हैं–

जिस संचयी आवृत्ति में प्रथम बार $\frac{N}{2}$ शामिल हो उसी के सामने वाला वर्ग मध्यका वर्ग होगा।

उदाहरण निम्न वितरण से मध्यका मान ज्ञात कीजिए

मजदूरी (रु0)	→	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
श्रमिकों की संख्या	→	3	5	20	10	5

हल	→	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	संचयी आवृत्ति
			f	c.f
		20-30	3	3
		30-40	5	8
Md	→	40-50	20	28
		50-60	10	38
		60-70	5	43 = N

यहाँ $N/2 = 21.5$ तथा संबंधित संचयी बारम्बारता 28 अतः 40.50 मध्यका वर्ग अन्तराल सूत्र का प्रयोग करते हुए:

मध्यका $= 40 + \frac{10}{20}(21.5-8) = 40+6.75=46.75$

अतः मजदूरी की मध्यका त्र46.5

स्मरणीय बिन्दुः

1. यदि श्रेणी को संचयी आवृत्ति वितरण के रुप में प्रस्तुत किया गया है तो इसे पहले सामान्य श्रेणी बना लेना चाहिए।
2. यदि वर्ग अवरोधी क्रम में है तो मध्यका का सूत्र होगा–

$$M = L_2 - \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times i$$

यहाँ L = मध्यका वर्ग की ऊपरी सीमा

C = संचयी आवृत्ति मध्यका वर्ग से पहले वाले वर्ग की होती है।

उदाहरण – निम्न वितरण का मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

	प्राप्तांक	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
		(f)	(c.f)
	70-80	10	100
	60-70	10	90
Md →	50-60	20	80
C.I.	30-40	15	30 = c
	20-30	15	15

यहाँ संचयी आवृत्ति नीचे से बनाई गई है, क्योंकि अवरोही वर्गान्तर घटते क्रम में है अतः मूल सूत्र का प्रयोग करते हुए $-N/2 = 50$ स0 जो, $40-50$ पर्ग अन्तराल में स्थित है।

$$M = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) i$$

$$= \frac{40 + \frac{100}{2} - 30}{30} \times 10$$

$$= 40 + \frac{50\text{-}30}{30}$$

$$= 40 + 6.67 = 46.67$$

यदि वर्ग अन्तराल बढ़ते क्रम का होता जैसे 70 से अधिक तो संशोधित सूत्र का प्रयोग किया जाएगा।

(3) आसमान वर्गान्तरों की स्थिति में मध्यका ज्ञात करने के लिये उन्हें यथा सम्भव समान वर्गान्तरों में बदल लेना चाहिए, श्रेणी के अधिकतम वर्ग विस्तार के आधार पर पुर्नगठन करना चाहिए।

(4) प्रथम वर्ग ही मध्यका वर्ग हो तो ब का मान शून्य होगा, शेष क्रियाएँ यथावत होगी।

(5) खुले वर्ग अन्तराल से मध्यका प्रभावित नहीं होती

मध्यका की विशेशताएँ–

गुण

(1) इसकी गणना सरल होती है।
(2) चरम मूल्यों से यह प्रभावित नहीं होती।

(3) नए पदों से मध्यका पर प्रभाव न्यूनतम होता है।
(4) इसका बिन्दुरेखीय निरुपण भी सम्भव है–
संचयी आवृत्ति वक्र (ogive Curve) द्वारा मध्यका का निर्धारण कर सकते हैं।

(5) मध्यका वर्ग की जानकारी से ही मध्यका की गणना की जा सकती है।

दोष–

(1) यह बीजगणितीय विवेचन के लिये अनुपयुक्त है–

(2) सीमान्त मूल्यों को भार देने में यह अनुपयुक्त है

(3) अविच्छिन्न श्रेणी में मध्यका का सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि प्रत्येक वर्ष में आवृत्तियाँ समान रुप से वितरित हैं। लेकिन यह अव्यवहारिक है।

विभाजन मूल्य –

मध्यका पूरे वितरण को दो समान भागों में विभाजित करती है, परन्तु मध्यका के सिद्धान्त पर पूरे वितरण चार, दस या सौ भागों में बाँटा जा सकता है यह निम्न है–

	खण्डित श्रेणी	अविच्छिन्न श्रेणी
(a) चतुर्थक	– $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वाँ पद	$\frac{N}{4}$ वाँ पद
(चार हिस्से)	– $Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ वाँ पद	$\frac{3N}{4}$ वाँ पद
(b) दशमक	– $D_1 \rightarrow \frac{N+1}{10}$;	$\frac{N}{10}$ वाँ पद का मान
(10 हिस्से)	– $D_2 \rightarrow \frac{2(N+1)}{10}$;	$\frac{2N}{10}$ वाँ पद का मान
(c) शतमक	$\rightarrow P_1 \rightarrow \frac{N+1}{100}$;	$\frac{N}{100}$ वाँ पद का मान
(100 हिस्से)	$P_{80} \rightarrow \frac{80(N+1)}{100}$;	$\frac{80N}{100}$ वाँ पद का मान

शेष गणना क्रिया एवं सूत्र मध्यका का ही होता है।

बहुलक $\rightarrow$ (Mode)

परिभाषा : वह मूल्य है जो श्रेणी में सबसे अधिक बार आता हो या जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो। यह मूल्यों के अधिकतम संकेद्रण का बिन्दु कहलाता है।

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक

उदाहरण

x	→	46	47	48	49	50	51	52
f	→	2	4	11	23	10	3	2

हल → यहाँ आवृत्तियाँ नियमित है अतः अधिकतम आवृत्ति (23) के समान वाला मूल्य अर्थात् 49 बहुलक है

खण्डित श्रेणी में बहुलक –

समूहन रीति द्वारा – निरीक्षण द्वारा हम बहुलक का निर्धारण करते हैं। जब आवृत्तियाँ नियमित हों, परन्तु जब आवृत्तियाँ अनियमित हों तथा अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में न होकर अन्त/आरम्भ में हो तो समूहन रीति अपनायी जाती है।

इसमें 6 स्तम्भ बनाये जाते हैं जिनमें

प्रथम स्तम्भ → आवृत्तियाँ होती हैं।
द्वितीय स्तम्भ → आरम्भ से दो–दो आवृत्तियों को जोड़ लिया जाता है।
तृतीय स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर दो–दो आवृत्तियों का जोड़ होता है।
चतुर्थ स्तम्भ → स्तम्भ 1 की तीन तीन आवृत्तियों को जोड़ होता है।
पंचम स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों को जोड़ होता है।
षष्ठम स्तम्भ → स्तम्भ 1 की पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन का जोड़ होता है।

अविच्छिन्न श्रेणी में बहुलक –

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

जहाँ

Z = बहुलक

L_1 = बहुलक वर्ग की न्यूनतम वर्ग

f_0 = बहुलक वर्ग से पहले की आवृत्ति

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद की आवृत्ति

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

i = वर्ग विस्तार

इस सूत्र की यह मान्यता है, कि बहुलक का मूल्य बहुलक वर्ग के समीप के वर्गों की आवृत्तियों से प्रभावित होता है। इसे निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है–

उदाहरण

निम्न विवरण का बहुलक ज्ञात कीजिए–

x	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	-	3	8	15	23	35	40	32	28	20	45	14	6

X	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
1	3	11				
2	8		23	26		
3	15	38			46	
4	23		58			73
5	35	75		98		
6	40		72			
7	32	60				
8	28		48	80		
9	20	65			93	
10	45		59			79
11	14	20		65		
12	6					

स्तम्भ – संख्या	अधिकतम आवृत्ति	**x** का मान
(i)	45	10
(ii)	75	5,6
(iii)	72	6,7
(iv)	98	4,5,6
(v)	107	5,6,7
(vi)	100	6,7,8

यहाँ x के 6 वाँ का मान सर्वाधिक बार आया है अतः बहुलक का मान 6 होगा ।

बहुलक की गणना में महत्वपूर्ण तथ्य–

1. यदि वर्गान्तर समावेषी है, तो इसे अपवर्जी में बदल देना चाहिए
2. यदि वर्गान्तर अवरोही क्रम में हो तो बहुलक की गणना ऊपरी सीमा से करनी चाहिए।

$$Z = \left(L_2 - \frac{f_1 - f_2}{2f - f_0 - f_2}\right)i$$

समान्तर माध्य और मध्यका द्वारा बहुलक की गणना

बहुलक = 3 मध्यका – 2 माध्य

बहुलक विशेशताएँ –

गुण

(1) यह सरल एवं लोकप्रिय है
(2) निरीक्षण मात्र से निर्धारण सम्भव
(3) चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव
(4) विवरण का प्रतिरुपी मूल्य होता है
(5) सर्वोत्तम प्रतिनिधि

दोष

(1) यह बहुत अनिश्चित एवं अस्पष्ट है

(2) चरम मूल्यों का महत्व नहीं

(3) पदों की संख्या कम हो तो सार्थक नहीं

(4) वर्ग विस्तार में परिवर्तन से मूल्य परिवर्तन

माध्य के चुनाव

(1) उद्देश्य जिसके लिये माध्य का उपयोग करना है

(2) समको की प्रकृति एवं विशेषताएँ तथा माध्य का कार्य

उपयोग –

समान्तर माध्य

→ इसका प्रयोग सार्वभौमिक होता है

→ आदर्श माध्य

गुणोत्तर माध्य

→ सापेक्ष परिवर्तन जैसे जनसंख्या वृद्धि, अनुपात, चक्रवात दरों के अध्ययन में सहायक

हरात्मक माध्य –

→ काल श्रेणी के अध्ययन में विषेष महत्व है

→ गति, मात्रा के रुप में प्रदत्त भाव में उपयोगी

मध्यका

→ गुणात्मक समंको का अध्ययन में सहायक

बहुलक

→ अपूर्ण समंको में गणना संभव। प्रति व्यक्ति उत्पादन, जूतों के माडल साइज मेंयह उपयोगी है।

माध्य की सीमाएँ–

विभिन्न माध्य केवल केन्द्रीय प्रवतृत्ति को मापते हैं, समंको की प्रवृत्तिके घटते बढ़ने की जानकारी संभव नहीं होती। माध्य विषमता की माप नहीं कर सकते अतः विषमता का अध्ययन विवरण में आवश्यक होता है।

सांख्यिकीय माध्य कुछ विद्वानों का मत–

⇒ Croxton and Cowden ''माध्य, समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थिर ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिये किया जाता है। समंकमाला के विस्तार के मध्य मे स्थित होने के कारण माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है। ''

⇒ A.L. Bowley '' माध्य वे सांख्यिकीय अचर हैं जो हमें सम्पूर्ण की सार्थकता का एक ही प्रयास में समझने की योग्यता प्रदान करते हैं।''

8.6 सारांश

⇒ विभिन्न माध्य–

यहाँ हम विभिन्न माध्यों के सूत्र एक स्थान पर प्रस्तुत करेंगें, तथा विभिन्न माध्यों के विशेषताओं तथा उपयोगिता के लिये पाठक इकाई से अवलोकन करें –

	व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित श्रेणी	अविच्छिन्न श्रेणी
समान्तर माध्य	$\bar{X} = \frac{\sum x}{\sim}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$
		$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$	$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$
	$\bar{X} = \frac{\sum x}{\sim}$	$d\sim\ = X\text{-}A$	$\bar{X} = A + \frac{\sim \sum fdx'}{N}$
			$dx' = \frac{x\text{-}A}{\sim}$

मध्यका

$$M = \text{Size of} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{item}$$ द्वारा मध्यका वर्ग ।

$$M = L_1 + \frac{\left(\frac{N}{2} - C\right)}{f} \times i$$

बहुलक

सबसे अधिक बार आने वाला मूल्य	निरीक्षण अथवा समूहज द्वारा अधिकतम आवृत्ति का मूल्य	बहुलक वर्ग का निर्धारण

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 3M - 2\bar{X}$$

गुणोत्तर माध्य

$$G.M. = \text{Antilog}\left(\frac{\sum \log x}{N}\right) \quad G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\in(\log x.f)}{\sum f}\right]$$

$$G.M. = \text{Antilog}\left[\frac{\in(\log x.f)}{\sum f}\right]$$

हरात्मक माध्य

$$\text{H.M.} = \text{Rec.}\left(\frac{\sum \text{hec. x}}{\sim}\right) \quad \text{H.M.} = \text{Rec.}\left[\frac{\in(\text{Rec. x.f})}{\sum \text{f}}\right]$$

$$\text{H.M.} = \text{Rec.}\left[\frac{\in(\text{Rec. x.f})}{\sum \text{f}}\right]$$

भारित समान्तर माध्य

$$\bar{X}_w = \frac{\sum XW}{\sum W}$$

भारित गुणोत्तर माध्य

$$\text{W.G.M} = \text{Antilog}\left[\frac{\sum(\log X.W)}{\sum W}\right]$$

भारित हरात्मक माध्य

$$\text{W.H.M.} = \text{Rec}\left[\frac{\in(\text{Rec.X.W})}{\sum W}\right]$$

सामूहिक माध्य

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र

$$P_N = P_0(1+r)^N$$

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0} - 1}$$

8.7 अभ्यास के लिये प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(1) निम्नलिखित में से कौन स्थिति सम्बन्धी माध्य हैं?

(i) मध्यका (ii) समान्तर माध्य

(iii) गुणोत्तर माध्य (iv) कोई भी नहीं

(2) निम्न में से कौन से सम्बन्ध सही हैं?

(i) A.M. = $\sqrt{G.M.\times H.M.}$

(ii) H. M. = $\sqrt{A.M.\times H.M.}$

(iii) G.M. = $\sqrt{A.M.\times H.M.}$

(iv) G.M. = $\frac{A.M.+H.M.}{2}$

(3) बहुलक ज्ञात करने की विधियों में से एक है –

(i) $Z = 3M + \overline{2X}$ (ii) $Z = 2M - \overline{3X}$

(iii) Z = 3M दृ $\overline{2X}$ (iv) $Z = 3M - \overline{3X}$

(4) निम्न से कौन सबसे अनिश्चित माध्य है?

(i) बहुलक (ii) मध्यका

(iii) गुणोत्तर माध्य (iv) हरात्मक माध्य

(5) निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सही है?

(i) $(\overline{X} - Z) = 2/3\ (\overline{X} - Z)$

(ii) $(\overline{X} - Z) = 1/3\ (\overline{X} - Z)$

(iii) $(\overline{X} - Z) = 2/3\ (\overline{X} - M)$

(iv) $(\overline{X} - M) = 1/3\ (\overline{X} - z)$

उत्तर : **1-**(i) **2-**(iii) **3-**(iii) **4-**(i) **5-**(iv)

सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें :

(1) समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

(2) बहुलक का बीजगणितीय विवेचन सम्भव है।

(3) एक आदर्श माध्य पर प्रतिचयन के परिवर्तनों का प्रभाव अधिकतम होना चाहिए।

(4) मध्यका चरम मूल्यों द्वारा प्रभावित होती है।

(5) बहुलक का बिन्दुरेखिय निर्धारण सम्भव है।

(6) एक आवृत्ति बंटन के मुख्य विशेषताओं को स्पष्ट करने में माध्य अकेले ही सक्षम है।

उत्तर : **1-**(T)**2-**(F) **3-**(F) **4-**(F) **5-**(T) **6-**(F)

प्र0 1 केन्द्रीय प्रवृत्तिकी माप से आप क्या समझते हैं? एक अच्छे माध्य की विशेषताएँ क्या हैं? किस माध्य को आप आदर्श माध्य मानेंगे और क्यों ?

प्र0 2 विभिन्न प्रकार के माध्यों का वर्णन कीजिए और उनकी सापेक्षिक विशेषताओं की व्याख्या कीजिए।

प्र0 3 विभिन्न माध्यों के उपयोगों की चर्चा कीजिए।

प्र0 4 निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ कीजिए –

(a) समान्तर माध्य के बीजगणितीय गुण
(b) सामूहिक समान्तर माध्य
(c) भारित समान्तर माध्य
(d) चार्लियर शुद्धता परीक्षा
(e) चल माध्य एवं प्रगामी माध्य
(f) विभाजन मूल्य
(g) पद–विचलन रीति
(h) माध्यों की सीमाएँ

प्र0 5 यदि किसी समंक श्रेणी के सभी पदों का मूल बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि –

$$\bar{X} = G.M. = H.M$$

प्र0 6 निम्न श्रेणी में समान्तर माध्य मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए –

(i) 36, 64, 70, 66, 30, 42, 82, 64, 22, 36, 40, 44, 22, 30, 70, 46, 76, 24.
30-(i)- $\bar{X}$ = 47.88, M = 43.0, Z = 33.24

(ii) 10, 8, 16, 6, 14, 4, 18

30- (ii)- $\bar{X}$ = 10.86, M = 10, Z = 8.28.

प्र0 7 → निम्न सारणी से माध्य, माध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए ।

X →	20.30	20.40	20.50	20.60	20.70	20.80	20.90	20.100
f →	4	16	56	97	124	137	146	150

(Hint f → सचयी आवृत्ति)

उत्तर $\bar{X}$ = 56.33, M = 54.63, Z = 50.67

प्र0 8 50 पदों का औसत 169 है। बाद में ज्ञात हुआ कि एक पद 143 को 134 पढ़ किया गया था, सही माध्य ज्ञात कीजिए।

उ0 – 8. [169.08]]

प्र0 9 दोनों कम्पनियों के मजदूरों की औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए।

		Factory A	Factory B
मजदूर	-	250	200
औसत मजदूरी	-	Rs 2.0	Rs 2.50

प्र0 10 निम्नलिखित समंकों से माध्य, मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

Marks	No. of Students
Less than 5	14
Less than 10	40
5-15	76
15 से अधिक	110
20-25	40
25 से अधिक	10
30 से अधिक	2

उत्तर $\rightarrow$ [$\bar{X}$ = 15.45, M = 15.83, Z = 16.60]

प्र0 11 निम्नलिखित समंको से भारित समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

Article	Quantity Cousemed	Price per Kg
A	100	2
B	20	10
C	40	5
D	50	1
F	30	8

उत्तर $\rightarrow$ [3.56]

प्र0ण 12 20 कुन्टल गेंहू 300 रु0 प्रति कुन्टल है और 25 कुन्टल 350 रु0 प्रति कुन्टल की दर से खरीदा गया। गेहूँ की प्रति कुन्टल औसत कीमत क्या है।

प्र0 12 निम्न का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

70ए 100ए 500ए 75ए 8ए 250ए 8ए 42ण

उ0ण 12 $\rightarrow$ [G.M. = 45.27]

प्र0 13 निम्न समंको से मध्यका और चतुर्थक ज्ञात कीजिए।

12, 18, 20, 24, 36, 38, 46, 46, 48, 56, 74, 96, 98, 106, 120.

उ0ए 13 $\rightarrow$ $[M = 46,\ Q_1 = 24,\ Q_3 = 96]$

प्र0ए 14 निम्न समंकों से मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए।

$x \rightarrow$ 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75

$f \rightarrow$ 2, 18, 30, 45, 35, 20, 6, 3.

उ0ए 14 $\rightarrow$ [M = 36.56, 8 = 36]

प्र0ए15 वे दो मूल्य बताइये जिनका समान्तर माध्य 10 और गुणोत्तर माध्य हरात्मक माध्य क्या होगा? उ0ए 15 $\rightarrow$ [16, 4 H.M. = 6.8]

8.9 संदर्भ ग्रन्थ

- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह ;2002द्ध – अर्थषास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेषन्स, नई दिल्ली।
- J.K. Sharma (2008) – Business Statistics, Dorling Kinderseley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी ;2010द्ध – परिमाणात्मक विष्लेषण, षिव पब्लिषिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई –9 अपकिरण की माप

9.1 प्रस्तावना

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप, किसी श्रेणी के लक्षणों को सारांश–रूप में एक संख्या में व्यक्त करता है, परन्तु विभिन्न पदों के आपसी अन्तर या विभिन्न पदों के केन्द्रीय मूल्य से अन्तर को केन्द्रीय प्रवृत्तिकी माप व्यक्त नहीं कर सकती समंकमाला की बनावट का पता माध्य द्वारा नहीं चल पाता।

माध्य की शक्तिशाली माप बनाने के लिये हम समर्थक माप ज्ञात करतें हैं, जो श्रेणी में विचरण की माप करता है, इसे श्रेणी में विचरण की माप करता है, इसे अपकिरण (Dispersion) कहतें हैं।

→ केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप को प्रथम क्रम का माध्य (Averages of first Order) कहतें हैं।

→ अपकिरण की माप को द्वितीय क्रम का माध्य कहते हैं।

अपकिरण की माप वास्तव में उस श्रेणी में संगतता या समरूपता के अभाव की सीमाओं को या परिमाण को मापता है। यदि पदों में अन्तर अधिक होगा तो अपकिरण का मान भी अधिक होगा। अपकिरण की माप की वही विशेषताएँ है जो आदर्श माध्य की होती हैं।

9.2 उद्देश्य –

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पश्चात पाठक, निम्न पर जानकारी प्राप्त कर सकेंगें–

- अपकिरण की विभिन्न माप
- अपकिरण की विभिन्न मापों की विशेषताएँ
- आकलन की रीति एवं उपयोग

पाठकों से अनुरोध है कि हल उदाहरणों द्वारा अभ्यास प्रश्न स्वयं हल कर ज्ञान का स्परीक्षण करें।

निरपेक्ष एवं सापेक्ष अपकिरण –

निरपेक्ष अपकिरण – जब अपकिरण की माप को मूल इकाइयों में ही व्यक्त किया जाए।

सापेक्ष अपकिरण – जब उपकिरण माप को अनुपात या प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है। यह विभिन्न प्रवृत्ति के समंकों की तुलना करने में अधिक उपयोगी है।

दो श्रेणियों की तुलना में निरपेक्ष अपकिरण नहीं प्रयुक्त किया जाता, तुलना के लिये सदैव सापेक्ष अपकिरण का प्रयोग किया जाता है।

9.3 अपकिरण की माप एवं रीति

(1)	विस्तार	Range	
(2)	अन्तर – चतुर्थक विस्तार	(Interquartile Range	सीमा रीति
(3)	शतमक विस्तार	(Percentile Range)	
(4)	चतुर्थक विचलन	(Quartile deviation)	

(5)	माध्य विचलन	(Mean deviation)	विचलन माध्य रीति
(6)	प्रमाप विचलन	(Standard deviation)	
(7)	लारेंज वक्र	(Lorenz Curve	बिन्दु रेखीय रीति

हम एक–एक कर सभी मापों की गणना रीति की चर्चा उदाहरणों सहित करेंगें।

9.3.1 विस्तार

किसी श्रेणी के अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के अन्तर को विस्तार (Range) कहते हैं। यह उस सीमा को व्यक्त करता है। जिनके, मध्य मूल्यों का अस्तित्व होता है। विस्तार को R से व्यक्त करते हैं। तथा इसका सूत्र निम्न है –

$R = X_{max} - X_{min}$ या $R = L - S$

वर्गीकृत श्रेणी में विस्तार की मान

R = उच्चवर्ग की ऊपरी सीमा – निम्न वर्गी की निचली सीमा

यह अपकिरण का निरपेक्ष माप है, सापेक्ष विस्तार या विस्तार गुणंक के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करना होता है

विस्तार गुणंक (Coefficient of Range) $= \frac{L-S}{L+S}$

उदाहरण 1 निम्न श्रेणी की सापेक्ष एवं निरपेक्ष माप ज्ञात कीजिए

वर्गान्तर	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृत्ति	2	5	12	8	3

हल .1 यहाँ उच्चतम वर्गान्तर = 25.30 जिसकी उच्चतम सीमा 30 है

न्यूनतम वर्गान्तर = 5 – 10 जिसकी न्यूनतम सीमा 5 है

निरपेक्ष विस्तार = $L - S = 30 - 5 = 25$ (Ans)

सापेक्ष विस्तार/विस्तार गुणंक $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{30-5}{30+5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ (Ans)

नोटः यदि वर्गान्तर का स्वरूप समावेशी हो तो विस्तार की गणना करते समय उसे उपवर्जी (exclusive) में बदल लेना चाहिए।

विस्तार के गुण एवं उपयोग

गुण . यह

(i) सरलता से मापित किया जा सकता है।

(ii) समय की बचत

(iii) उद्योगों में गुण नियंत्रण, विनिमय दरों में परिवर्तन शीतलता की माप या मौसम भविष्यवाणी में प्रयुक्त।

दोष (Demerits)

(i) विस्तार केवल चरम मूल्यों पर आधारित होता है। यह चरम मूल्यों के बीच के मूल्य की जानकारी नहीं देता है।

(ii) इसमें स्थिरता नहीं होती, चरम मूल्य के एक पद में अन्तर होने से विस्तार प्रभावित हो जाता है।

(iii) आवृत्ति बंटनों के लिये विस्तार उपयुक्त नहीं है।

(iv) बीजगणितीय विवेचना के दृष्टिकोण से विस्तार अनुपयुक्त है।

अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range)

विस्तार (Range) आंकड़ों में विचरणशीलता की एक महत्वपूर्ण माप प्रस्तुत करता है, परन्तु इस माप का प्रमुख दोष यह है कि यह चरम मानों के द्वारा अत्यधिक प्रभावित होता है। चरम मानों के प्रभाव को निरस्त करने के लिये हम एक अन्य विधि अपनाते हैं, जिससे हम अर्द्ध अन्तर–चतुर्थक विस्तार कहते हैं। इस विधि के अन्तर्गत हम तृतीय एवं प्रथम चतुर्थकों के आधे अन्तर को आँकड़ों की विचरणशीलता की माप के रूप में स्वीकार करते हैं। – इस माप को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है –

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

यद्यपि इस विधि के अन्तर्गत चरम मानों का प्रभाव निरस्त हो जाता है, परन्तु विस्तार की भाँति यह भी आँकड़ों के सभी मानों पर आधारित नहीं है। पूर्णतया समान आँकड़ों (Perfectly Symmetric data) में मध्यिका का मान तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के ठीक बीच में स्थित होता है। अतः ऐसी स्थिति में

$$Q_3 = Md + Q$$
$$Q_1 = Md + Q$$

अन्य शब्दों में पूर्णतय सममित वितरण में Q_3 तथा Q_1 माध्यिका से चतुर्थक विचलन की दूरी पर स्थित होंगे। परन्तु असममित वितरणों (Nonsymmetrical distributionद्ध में Q_3 तथा Q_1 माध्यिका से चतुर्थक विचलन, दूरी पर स्थित नहीं होते। यह स्थिति बहुत सारे आर्थिक आँकड़ों में दृष्टिगोचर होती है – जो कि मूलतः असमामित होते हैं – जैसे आय का वितरण, भू–जलों का वितरण अथवा परिसम्पत्तियों का वितरण।

शतमक विस्तार (Percentile range)

कभी–कभी अपकिरण ज्ञात करने के लिए शततमक विस्तार का भी प्रयोग किया जाता है। शतमक विस्तार P_{90} तथा P_{10} के अन्तर को व्यक्त करता है।

अपकिरण की यह रीति विस्तार (Range) तथा I.R. (Inter – Quartile Range) से अपक्षाकृत बेहतर है। क्योंकि एक तरफ तो यह चरम मूल्यों (extreme values) से प्रभावित नहीं होती और दूसरी तरफ श्रेणी के मध्य के 80 प्रतिशत मूल्यों पर आधारित है। इस रीति के दोष भी विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार के दोषों जैसे ही हैं।

चतुर्थक विचलन ;फनंतजपसम क्मअपंजपवदद्ध

यह विचलन एक प्रकार का विस्तार है जो चतुर्थकों पर आधारित है। हमने देखा है कि अन्तर चतुर्थक विस्तार उच्च चतुर्थक ;फ$_3$द्ध और निम्न चतुर्थक(Q_1)पर निर्भर होता है।

$$I.R. = Q_3 - Q_1$$

यदि हम I.R. को दो से भाग दे दें तो हमें चतुर्थक विचलन (Q.D.) प्राप्त होता है।

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

9.3.2 चतुर्थक विचलन

यह अपकिरण का निरपेक्ष माप है। विभिन्न श्रेणियों में चतुर्थक विचलन की तुलना करने के लिए हम सापेक्ष माप ज्ञात करते हैं। और इसे चतुर्थक विचलन गुणांक कहते हैं।

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

नोटः हम जानते हैं कि मध्यका पूरी श्रेणि को दो बराबर भागों में बांटती है। एक समभित विवरण में–

$$Q_3 - M = M - Q_1$$

या $2M = Q_1 + Q_3$

$$M = \frac{Q_1 + Q_3}{2}$$

इस प्रकार

$$Q.D + Q_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{2} + Q_1 = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = M$$

और

$$Q_3 - Q.D = Q_3 - \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = M$$

अत : $Q_1 = M - Q.D.$

और $Q_3 = M + Q.D$

इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक समभित वितरण में $M \pm Q.D$ समंक श्रेणी के 50ः मूल्यों को व्यक्त करता है।

कुछ विद्वानों का मत है कि चतुर्थक विचलन वास्तव में एक स्थिति माध्य (Positional average) है और यह माध्य से पदों के विखराव को नहीं मापता। इसे अपकिरण की माप के बजाय विभाजन – माप (Measure of partition) कहना श्रेष्ठ है।

चतुर्थक विचलन को अर्ध्र अनतर – चतुर्थक विस्तार (Semi inter quartile range) भी कहते हैं।

चतुर्थक विचलन के गुण (Merits of Q.D.)

चतुर्थक विचलन विस्तार के कुछ दोषों के दूर करता है। इसके मुख्य गुण निम्न हैं–

(1) इसकी गणना तथा इसे समझना दोनों सरल है।

(2) यह श्रेणी के महत्वपूर्ण भाग (मध्य के 50%) पर विचार करता है।

(3) यह चरम मूल्यों (extreme values) से प्रभावित नहीं होता ।

(4) यह खुले सिरे वाले वर्गान्तरों में भी अपकिरण की माप कर सकता है।

चतुर्थक विचलन के दोष (Demerits of Q.D.)

✓ यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है।

✓ यह प्रतिचयन के परितर्वनों से बहुत प्रभावित होता है।

✓ हसमें बीजगणितीय विवेचन का अभाव है।

✓ यह अपकिरण का ठीक–ठाक माप नहीं करता केवल सन्निकट माप (approximate measure) करता है। वास्तव में यह सीमा रीति (method of limit) द्वारा अपकिरण – माप के दोषों से मुक्त हो भी नहीं सकता।

विच्छिन्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन :

उदाहरण 1 – दिये गये समंक में चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए ।

चर मूल्य	(x)	:	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	(f)	:	3	6	9	13	8	5	4

हल–

(1) प्रस्तुत उदाहरण में एक विच्छिन्न आवृत्ति विवरण प्रदर्शित है। विच्छिन्न आवृत्ति विवरण के चतुर्थक ज्ञात करने के पूर्व, संचयी, आवृत्तियों को ज्ञात किये जाता है। यह प्रक्रिया निम्न सारणि में प्रदर्शित है।

x	**f**	**cf**
6	3	3
7	6	9
8	9	18
9	13	31
10	8	39
11	5	44
12	4	48

Q_1 = वितरण के $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{48+1}{4}\right)$ वें पद का मान

= वितरण के $\left(\frac{49}{4}\right)$ वें पद का मान

= 12ण्25 वें पद का मान = 8

Q_3 = वितरण के $\left(\frac{3N+1}{4}\right)$ वें पद का मान

$= \text{ वितरण के } \left(\frac{3(48+1)}{4}\right) \text{ वें पद का मान}$

$= \text{ वितरण के } \frac{3 \times 49}{4} \text{ वे पद का मान}$

$= \frac{147}{4} \text{ वाँ मान } = 36.75 \text{ वाँ मान } = 10$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q.D = \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{10 - 8}{10 + 8} = \frac{2}{18} = 0.11$$

अविच्छिन्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन :

उदाहरण 2 – नीचे दिये गये समंक में चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए?

वर्गान्तर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	5	10	10	25	25	15	10
संचयी	5	15	25	50	75	90	100
आवृत्ति	5	15	25	50	75	90	100

$Q_1 = \text{ वितरण के } \left(\frac{N}{4}\right) \text{ वें पद का मान}$

$= \text{ वितरण के } \left(\frac{100}{4}\right) \text{ वें पद का मान}$

= 25 वाँ पद

25 वाँ पद वर्गान्तर (30-40) में निहित है।

अतः

$$Q_1 = L_1 \, x \, \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right)$$

$$Q_1 = 30 + \frac{10}{10}(25 - 15)$$

$$Q_1 = 30 + 1(10)$$

$$Q_1 = 40$$

$Q_3 = \frac{3N}{4} \text{ वें पद का मान}$

$= $ वितरण के $\frac{3(100)}{4}$ वें पद का मान

$=$ 75 वाँ पद

75 वाँ पद वर्गान्तर ;50.60द्ध में निहित है –

अतः $Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$

$$Q_3 = 50 + \frac{10}{25}(75 - 50)$$

$$Q_3 = 50 + \frac{10}{25} \times 25$$

$$Q_3 = 50 + 10$$

$$Q_3 = 60$$

चतुर्थक विचलन $(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{60 - 40}{2} = \frac{20}{2} = 10$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{60 - 40}{60 + 40} = \frac{20}{100}$

9.3.3 माध्य विचलन (Mean Deviation)

विचरणशीलता की अब तक चर्चित मापों – विस्तार तथा चतुर्थक विचलन, अथवा इन पर आधारित गुणांकों का प्रमुख दोष यह था कि समंक के केवल दो मूल्यों पर ही आधारित थे। यह समंक के अन्य मूल्यों की उपेक्षा करते हैं। विचरणशीलता की आदर्श माप समंक के सभी मूल्यों पर आधारित होनी चाहिये। इस प्रकार की एक माप है माध्य विचलन। 'माध्य विचलन', विचलनों के औसत को व्यक्त करता है। इन विचलनों की गणना समंक के किसी केन्द्रीय मान (माध्य, मध्यिका अथवा बहुलक) से की जाती है। सामान्य तौर पर माध्य विचलन की गणना के लिये प्रयुक्त विचलनों की गणना हम समंकों के माध्य से ही व्यक्त करते हैं।

माध्य विचलन की गणना की प्रक्रिया में इस प्रकार सर्वप्रथम हम समंकों के मूल्यों का माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं – अर्थात् प्रत्येक समंक मूल्य में से माध्य के मान को घटाते हैं। तत्पश्चात् विचलनों के चिन्हों की उपेक्षा करते हुए हम विचलनों का औसत ज्ञात करते हैं। विचलनों के बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा करने का कारण यह हैं कि माध्य से विचलनों का योग सदैव शुन्य के बारबर होता है – क्योंकि विचलनों के योग की प्रक्रिया में धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलन एक दूसरे को पूर्णतया निरस्त कर देते हैं।

चरराशि के मूल्यों का माध्य $= X - \overline{X}$ से विचलन

अब हम विचलनों के बीजगणितिय चिन्हों की उपेक्षा कररते हुए, इनके निरपेक्ष मानों (Absolute values) अथवा परिमाणों को ज्ञात करते हैं। विचलनों के निरपेक्ष मानों को दो खड़ी लकीरों '||' के बीच रखकर व्यक्त किया जाता है, अर्थात्

विचलनों के निरपेक्ष मान $= |X - \overline{X}|$ अब $|X - \overline{X}|$ किसी राशि के परिमान अथवा निरपेक्ष मान को व्यक्त करता है तथा इसे हम Mod. of $|X - \overline{X}|$ पढ़ते हैं।

माध्य विचलन त्र विचलनों का योग / विचलनों की संख्या $= \frac{\Sigma|X - \overline{X}|}{N}$

जहाँ $\Sigma|X - \overline{X}|$ = निरपेक्ष विचलनों का योग

N = आँकड़ों की संख्या।

यदि विचलनों को "$\overline{X}$" के द्वारा प्रदर्शित किया जाये जहाँ $dX = X - \overline{X}$ हो तो

$$MD = \frac{\Sigma|dX|}{N}$$

वर्गीकृत आँकड़ों के आकृति वितरण के लिये माध्य विचलन का सूत्र निम्न प्रकार होगा –

$$MD = \frac{\Sigma f.|d - \overline{X}|}{N}$$

जहाँ, $N = \Sigma f$

माध्य विचलन गुणांक (Cofficient of Mean Deviation)

माध्य विचलन अपकिरण का निरपेक्ष माप है जो विभिन्न श्रेणियों के लिये तुलना योग्य नहीं होता। इसके लिये हमें सापेक्ष माध्य विचलन या माध्य विचलन गुणांक का परिकलन करना पड़ता है। माध्य विचलन में जब हम संबंधित माध्य से भाग देते हैं तो हमें माध्य विचलन गुणांक प्राप्त होता है

$= \frac{\delta\overline{X}}{X}$ या $\frac{\delta M}{M}$ या $\frac{\delta Z}{Z}$

सामान्तर माध्य मध्यका बहुलक से लिये गये विचलन गुणांक है

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन

उदाहरण: श्रेणी 10, 14, 20, 24, 12 का समान्तर माध्य से माध्य विचलन तथा माध्य विचलन का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल – माध्य विचलन $\delta\overline{x} = \frac{\Sigma|x - \overline{x}|}{n} = \frac{\Sigma|d\overline{x}|}{n}$

X	$\|x - \overline{x}\| = \|d\text{-}\overline{x}\|$
10	6
14	2
20	4
24	8
12	4
80	24

$\overline{x} = \sum x/\sim = 80/5 = 16$

$$\delta\, \bar{x} = |d - \bar{x}| /\sim = 24/5 = 4.8$$

माध्य विचलन गुणांक

$$\delta\, \bar{x}/\bar{x} = 4.8/16 = 0.3$$

खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन

खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन $|d\bar{x}|$ या $|d_x|$ या $|d_z|$ ज्ञात करने के लिये पहले वह माध्य ज्ञात करते हैं जिससे विचलन लेना है फिर $d|\bar{x}|$ या $|dm|$ या $|d_z|$ ज्ञात करते हैं। । आवृत्ति f से इसमें गुणा करके इसका योग कर लेते हैं। इस योग में आवृत्ति के योग से भाग देने पर माध्य विचलन प्राप्त होता है।

$$\delta\, \bar{x} = \frac{\sum f|d\bar{x}|}{N = \sum f},\quad \delta_M = \frac{\sum f\,|dM|}{N},\quad \delta_z = \frac{\sum f(dz)}{N}$$

मध्यका से माध्य विचलन की गणना –

X	→	5	6	7	8	9	10	11
1	→	2	1	3	6	14	3	1

x	f	c.f	मध्यिका 8 से विचलन	f|dMd|
5	2	2	3	6
6	1	3	2	2
7	3	6	1	3
8	6	12	0	0
9	4	16	1	4
10	3	19	2	6
11	1	20	3	3
	$N = 20$			$\sum f\,\|dMd\| = 24$

$Md = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वे पद का मान $= \frac{20+1}{2}$ वे पद का मान $= \left(\frac{21}{2}\right)$ वें पद का मान $= 10.5$ वे पद का मान संचयी अवृत्ति 10.5 संचयी आवृत्ति 12 में सम्मिलित अर्थात् मध्यिका $Md = 8$ माध्य विचलन,

$$\delta\, Md = \frac{\sum f\,|Md|}{N}$$

$$= \frac{24}{20} = 1.2$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta Md}{Md} = \frac{1.2}{8} = 0.15$

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन अविच्छिन्न श्रेणी में माध्य विचलन का खण्डित श्रेणी वाला सूत्र ही प्रयोग में लाया जाता है यहाँ x वर्ग अन्तराल का मध्य बिन्दु ज्ञात करतें हैं।

उदाहरण – निम्न समंको में समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं उनके गुणांक ज्ञात कीजिए –

वर्गान्तर	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
आवृत्ति	9	12	15	20	25	10	9

हल

वर्गान्तर	माध्य बिन्दु x	आवृत्ति f	A – 65 से विचलन (dx)	dx'	fdx'	माध्य 55.6 से निपेक्ष विचलन |dx'|	f|d x̄|
20-30	25	9	-40	-4	-36	30.6	275.4
30-40	35	12	-30	-3	-36	20.6	247.2
40-50	45	15	-20	-2	-30	10.6	159.0
50-60	55	20	-10	-1	-20	0.6	12.0
60-70	65	25	0	0	0	9.4	235.0
70-80	75	10	+10	1	10	19.4	194.0
80-90	85	9	+20	2	18	29.4	264.6
		N = 100			fdx' = 94		$\sum f\,\|d\bar{x}\| = 1387.2$

पहले हम समान्तर माध्य की गणना लघु रीति से करेंगे

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} \times i$$

$$= 65 + \frac{(-94)}{100} \times 10$$

$$= 65 - \frac{94}{10} = 65 - 94 = 55.6.$$

अब समान्तर माध्य 55.6 द्वारा हम माध्य विचलन ज्ञात करेंगे–

$$\delta\bar{X} = \frac{f\,|d\bar{x}|}{N} = \frac{1387.2}{100}$$

$$= 13.872 \cong 13.87$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta\bar{X}}{X} = \frac{13.87}{55.6} = 0.25$ (उत्तर)

मध्यिका से माध्य विचलन –

यहाँ हम उपरोक्त समंको को सूचना का प्रयोग करेंगे

$\sum$ (संचयी) आवृत्ति = 100

$\sum$ मध्यिका '57' से = 1404

विचलन $|dMd|$
का (f) में गुणा
$f(d\,Md)$

अब, $Md = \left(\frac{N}{2}\right)$वें पद का मान $= \frac{100}{2} = 50$ वें पद का मान 50 वाँ पद $(50 - 60)$ वर्गान्तर में पड़ता है अतः

$$Md = \ell + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$= 50 + \frac{10}{20}(59 - 36)$$

$$Md = 50 + 7$$

$$Md = 57$$

माध्य विचलन मध्यिका से

$$\delta\, Md = \frac{\sum f\,|dMd|}{N}$$

$$\delta Md = \frac{1404}{100}$$

$$= 14.04$$

माध्य विचलन गुणांक

$$\frac{\delta Md}{Md} = \frac{14.04}{57} = 0.25$$

बहुलक से माध्य विचलन

समंकमाला में बहुलक 60-70 वर्गान्तर में होगा क्योंकि इसकी आवृत्ति (25) सबसे अधिक है –

बहुलक

$$M_0 = 1 + i \times \frac{D_1}{D_1 + D_2} \qquad \text{जहाँ } D_1 = f_1 - f_0$$

$$= 60 + 10\,\frac{5}{5 + 15} \qquad D_2 = 25 - 10$$

$$= 62.5$$

माध्यविचलन $- \delta\, M_0 = \frac{\sum f\,|dM_0|}{N}$

$$= \frac{1470.0}{100} = 14.70$$

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta M_0}{M_0} = \frac{14.7}{62.5} = 0.24$ (उत्तर)

नोट → पाठकों से अनुरोध है कि वे स्वयं मध्यिका से विचलन एवं बहुलक से विचलन की सारणी ज्ञात करें।

उदाहरण – निम्न सारणी की दो श्रेणियों में विचरण की तुलना माध्य विचलन गुणांक द्वारा कीजिए ।

A	70	100	50	130	140	150	90	60	110	600
B	1250	1350	1600	1450	1550	1700	1750	1800	1400	1650
A	176	124								
B	-	-								

हल →(1) सर्वप्रथम हम दोनों श्रेणियों के माध्य ज्ञात करते हैं।

(2) यदि माध्य समान हो तो माध्य विचलन की गणना करते हैं।

(3) यदि माध्य भिन्न हों तो माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करेंगें।

	श्रेणी A	
क्र स0	आय (x)	|dx|
1	70	80
2	100	50
3	50	100
4	130	20
5	140	10
6	150	0
7	90	60
8	60	90
9	110	40
10	600	450
11	176	26
12	124	26
	1800	952

$$d = \frac{1800}{12} = 150$$

माध्य विचलन गुणांक

(माध्य विचलन) $\delta \bar{x} = \dfrac{\sum |d\bar{x}|}{N}$

$$= \frac{952}{12} = 79.33$$

माध्य विचलन गुणांक $\dfrac{\delta \bar{x}}{\bar{x}}$

$$= \frac{79.33}{150} = 0.53$$

	श्रेणी B	
क्र स0	आय (x)	$\lvert d\bar{x}\rvert$
1	1250	300
2	1350	200
3	1600	50
4	1450	100
5	1550	0
6	1700	150
7	1750	200
8	1800	250
9	1400	150
10	1650	100
	15500	1500

$$d = \frac{15500}{10} = 1550$$

माध्य विचलन $= \delta\bar{x} = \dfrac{\sum\lvert d\bar{x}\rvert}{N}$

$$= \frac{1500}{10} = 150$$

माध्य विचलन गुणांक $= \dfrac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$

$$= \frac{150}{1550} = 0.10$$

उत्तर → श्रेणी B में माध्य विचलन का गुणांक मान श्रेणी A से कम है अतः श्रेणी B में विवरण श्रेणी A की तुलना में अधिक समान है।

माध्य विचलन के गुण – माध्य विचलन की

→ परिभाषा स्पष्ट है

→ गणना सरल है

→ सभी मूल्यों पर आधारित प्रवृत्ति हैं

→ यह चरम मानों से अपेक्षाकृत कम प्रभावित हैं

→ यह केन्द्रीय मान से आंकड़ो की औसत दूरी प्रदर्शित करता है।

माध्य विचलन के दोष – यह

→ विचलनों के गणितीय चिन्हों की उपेक्षा करता है

→ आंकड़ों में किसी अज्ञात पद के होने से इसकी गणना संभव नहीं है।

→ आंकड़ों की संख्या अधिक होने से इसकी गणना में कठिनाई होती है।

माध्य विचलन का महत्व सैद्धान्तिक है तथा व्यावहारिक सांख्यिकीय में विचरणशीलता की माप के लिए मानक विचलन का प्रयोग किया जाता है।

9.3.4 प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) मानक विचलन के अंतर्गत, सर्वप्रथम हम समंक मूल्यों के माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं। कुछ विचलन धनात्मक एवं कुछ ऋणात्मक होते हैं अतः हम विचलनों के वर्ग ज्ञात करते हैं। इस प्रकार विचलनों के चिन्हों की समस्या समाप्त हो जाती है। इसे सिग्मा (σ) द्वारा व्यक्त करते हैं। मानक विचलन की गणना निम्न प्रकार होती है –

- माध्य से विचलन $dx = x - \bar{x}$
- विचलनों का वर्ग $dx^2 = (x - \bar{x})^2$
- विचलनों वर्गों का योग $= \sum dx^2 = \sum (x-\bar{x})^2$
- विचलन वर्गों का औसत अथवा प्रसरण $= \dfrac{\sum (x-\bar{x})^2}{N}$
- मानक विचलन $= +\sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$

मानक विचलन सदैव धनात्मक होता है। यदि मानक विचलन दिया हो तो प्रसरण का मान निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमाप विचलन किसी समंक के मूल्यों का माध्य के दोनों ओर बिखराव का माप है

प्रमाप विचलन को भिन्न नामों से जाना जाता है जैसे –

- 'विभ्रम' (Mean Error)
- माध्य विचलन वर्ग मूल्य (Mean Square Error)
- माध्य विचलन वर्ग मूल (Root Mean Square Deviation)

प्रमाप विचलन का प्रत्यक्ष सूत्र इस प्रकार है –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$$

यदि माध्य का मान दशमलव बिन्दुओं में हो तो –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} = \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

9.3.5 वितरण गुणांक (Coefficient of Variation) $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

अर्थात् सापेक्षित विचरणशीलता ज्ञात करने के लिये निरपेक्ष (मानक विचलन) माप को केन्द्रीय मान (माध्य) से भाग देते हैं, यह प्रतिशत के रूप मे व्यक्त होता है, अतः इसे 100 से गुणा कर देते हैं। विचरणशीलता गुणांक का प्रयोग उस स्थिति में भी किया जाता है, जब दोनों श्रेणियों की माप की इकाइयाँ भिन्न भिन्न हों।

मानक माप ज्ञात करने की विधि (Methods 06 Standard Deviation) सामान्य श्रेणी में प्रत्यक्ष रीति

$$\sigma\sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$$

विचरण गुणांक $- \frac{\sigma}{\bar{x}}$

प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक की गणना कीजिए

श्रमिक	.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मजदूरी (रू0)	.	80	85	95	90	100	75	65	105	70	85

हल $\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$

विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक की गणना को निम्न सारणी द्वारा दिखाया गया है।

श्रमिक	मजदूरी (रू0)	X^2	माध्य 85 से $dx = (x-\bar{x})$	dx^2
1	80	6400	.5	25
2	85	7225	0	0
3	95	9025	10	100
4	90	8100	5	25
5	100	10000	15	225
6	75	5625	.10	100
7	65	4225	.20	400
8	105	11025	20	400
9	70	4900	.15	225
10	85	7225	0	0
$N = 10$	$\sum x = 850$	$\sum x^2 = 73750$		$\sum dx^2 = 1500$

$$\sigma = \sqrt{\frac{13750}{10} - \left(\frac{850}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7375 - (85)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{7375 - 7225} = \sqrt{150} = 12.25$$ (उत्तर)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{850}{10} = 85$$

$$C.V. = \frac{12.25}{85} = 0.144 \text{ (उत्तर)}$$

2 अप्रत्यक्ष विधि $- \sigma = \sqrt{\frac{\sum d\,x^2}{N}}$

$$\sum dx^2 = 1500, \quad N = 10$$

तो $\sigma = \sqrt{\frac{1500}{10}} = 12.25$ (उत्तर)

विचलन गुणांक $= \frac{12.25}{85} = 0.144$ (उत्तर)

दोनों रीति से उत्तर समान है ।

विच्छिन्न श्रेणी का प्रमाप विचलन

(Standard Deviation of Discrete Series)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$\sum fdx^2$ = माध्य से विचलनों के वर्गों तथा संगत आवृत्तियों का गुणनफल

विचलन रीति (Deviation Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

dX = कल्पित माध्य से विचलन

A = सर्वाधिक आवृत्ति वाला चर को कल्पित माध्य मान लेते हैं।

पद विचलन रीति (Step deviation Method)

$$dX = X - A$$

$$dX' = \frac{dX}{i} = \frac{X - A}{i}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f.dX'^2}{N} - \left(\frac{\sum f.dx'}{N}\right)^2} \times i$$

$\sum f.dx^2$ = पद विचलनों के वर्गों तथा संगत आवृत्तियों के गुणनफल का योग

= पद विचलनों तथा संगत आवृत्तियों के गुणनफल का योग

अविच्छिन्न श्रेणी में प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

जहाँ $\sum fdx^2$ = माध्य बिन्दु के वर्ग एवं संगत आवृत्तियाँ के गुणनफल का योग

$\left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2$ = मध्य बिन्दु की संगत आवृत्ति से गुणफल के याग का छ से भाग करने पर प्राप्त मान का वर्ग

उदाहरण →निम्नलिखित समंक का प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विचलन गुणांक कीजिए

चर मूल्य	(x)	:	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्तियाँ	(f)	:	3	6	9	13	8	5	4

x	f	fx	dx	dx^2	$f\,dx^2$
6	3	18	.3	9	27
7	6	42	.2	4	24
8	9	72	.1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	N = 48	432			124

$$\bar{X} = \frac{432}{48} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58} = 1.60$$

विचलन गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1.6}{9} = 0.18$

निम्नलिखित समंको का पद विचलन रीति से मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

वर्गान्तर	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	काल्पित माध्य से विचलन		fdx'	$f(dx'^2)$
	(X)	(f)	dx	dx'		
10-20	15	5	-30	-3	-15	45
20-30	25	10	-20	-2	-20	40
30-40	35	10	-10	-1	-10	10
40-50	45	25	0	0	0	0
50-60	55	25	10	1	25	25
60-70	65	15	20	2	30	60

70-80	75	10	30	3	30	90
		N = 100			$\sum fdx' = 40$	$\sum fdx'^2 = 270$

$$\sigma = \sqrt{\sum fdx'^2 - \left(\frac{\sum fdx'}{N}\right)^2} \times i = \sqrt{\frac{270}{100} - \frac{40}{100}} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{2.7 - (0.4)^2} \times 10 = \sqrt{2.7 - 0.16} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{2.54} \times 10 = 1.593 \times 10 = 15.93$$

प्रमाप विचलन गुणांक $= \frac{\sigma}{\overline{X}}$

जहाँ $\overline{X} = A + \frac{\sum dx'}{N} \times i$

$$= 45 + \frac{40}{100} \times 10$$

$$\overline{X} = 45 + 4 = 49$$

तो

$$\frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{15.93}{49} = 0.33 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण $\rightarrow$ दो कारखानों A, B, में, जो एक ही अद्योग से सम्बन्धित हैं, औसत साप्ताहिक मजदूरी तथा प्रमाप विचलन इस प्रकार दिये हैं–

कारखाना	माध्य (रू0)	प्रमाप विचलन
A	40	12.5
B	36.4	9.1

दोनों कारखानों की मजदूरी में किसमें संगतता ;भ्वउवहमदपजलद्ध अधिक है।

हल – हम दोनों कारखानों के विचलन गुणांक ज्ञात करेंगें।

$$A = C.V = \frac{\sigma_1}{X_1} \times 100$$

$\sigma_1 = 12.5$

$x_1 = 40$

अत :

$$C.V. = \frac{12.5}{40} \times 100 = 31.25\%$$

$$B \rightarrow C.V = \frac{\sigma_2}{x_2} \times 100$$

$\sigma_2 = 9.1$

$x_2 = 36.4$

अतः

$$= \frac{9.1}{36.4} \times 100$$

C.V. $= 25\%$

जहाँ B कारखाने का विचलन गुणांक कम है, अतः अधिक मजदूरी संगतता B में हैं।

सामूहिक प्रमाप विचलन–

जिस प्रकार हम एक से अधिक विवरणों के माध्यों के आधार पर सामूहिक माध्य ज्ञात करते हैं उसी प्रकार हम एक से अधिक विवरणों के माध्यों एवं प्रमाप विचलन के आधार पर सम्मिलित विवरण का प्रमाप विचलन ज्ञात करते हैं – इसकी विधि निम्न है–

(i) विवरणों का सामूहिक माध्य ज्ञात करते हैं।

(ii) प्रत्येक विवरण माध्य का सामूहिक माध्य से विचलन ज्ञात किया जाता है।

जैसे $D_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}$, $D_2 = \bar{X}_2 - \bar{X}$, $D_n = \bar{X}_n - \bar{X}$.

(iii) अब निम्न सूत्र के द्वारा हम सामूहिक विवरण का प्रमाप विचलन (σ) ज्ञात करते हैं।

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1\left(\sigma_1^2 + D_1^2\right) + N_2\left(\sigma_2^2 + D_2^2\right) + \ldots\ldots + N_2\left(\sigma_n^2 + D_n^2\right)}{N_1 + N_2 + \ldots\ldots + N_n}}$$

उदाहरण $\rightarrow$

दो आवृत्ति वितरणों की कुल आवृत्ति, माध्य एवं प्रमाप विचलनों का वितरण इस प्रकार है –

$N_1 = 200$ $\quad \bar{X}_1 = 25$ $\quad \sigma_1 = 3$

$N_2 = 300$ $\quad \bar{X}_2 = 10$ $\quad \sigma_2 = 4$

हलः वितरणों का सामूहिक माध्य $\bar{X}$ त्र

$$\bar{X} = \frac{N_1 - \bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2}{N_1 + N_2} = \frac{200(25) + 300(10)}{200 + 300}$$

$$= \frac{8000}{500} = 16$$

सामूहिक प्रमाप विचलन

$$(\sigma) = \frac{\sqrt{N_2\left(\sigma_1^2 + D_1^2 + N_2\left(\sigma_2^2 + D_2^2\right)\right)}}{N_1 + N_2}$$

प्रश्न द्वारा प्रदत्त सूचना के अनुसार –

$N_1 = 200$ $\quad \sigma_1 = 3$ $\quad D_1 = \bar{X}_1 - \bar{X} = 9$

$N_2 = 300$ $\quad \sigma_2 = 4$ $\quad D_2 = \bar{X}_2 - \bar{X} = -6$

सूत्र में मान रखने पर

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(3^2+9^2)+300(4^2+(-6)^2}{200+300}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(9+81)+300(16+36)}{500}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(90)+300(52)}{500}}$$

$$= \sqrt{\frac{18000+15,600}{500}} = \sqrt{\frac{336}{5}} = \sqrt{67.2} = 8.2$$

सामूहिक विचलन प्रमाप = 8.2.

प्रमाप विचलन के गुण एवं दोष

गुण

(i)	इसका मान निश्चित है, तथा यह परिभाषित है।
(ii)	इसका मान समंकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित है।
(iii)	गणितीय क्रियाओं के लिये सर्वथा उपयुक्त है।
(iv)	यह विचलन के वर्गों पर आधारित होता है।
(v)	प्रमाप विचलन का मान न्यादर्ष परिवर्तन के फलस्वरूप अधिक परिवर्तित नहीं होता।
(vi)	इसकी संकल्पना सहसम्बन्ध तथा समा यण में भी अत्यन्त उपयोगी है।

दोष

(i)	यह गणना करने में कठिन है।
(ii)	यह बड़े विचलनों को छोटे विचलनों से अधिक महत्व देता है।

9.4 बिन्दु रेखीय विधि लारेंज वक्र

बिन्दु रेखीय विधि से अपकिरण मापने का सर्वप्रथम प्रयोग डॉ0 मैक्य ओ लारेंज ने किया था। यह समान वितरण रेखा से समंक माला के असमानताओं का अध्ययन करने में सहायक है। इसका प्रयोग भू जोतों, आय एवं सम्पत्ति तथा परिसम्पत्तियों की असमानता का अध्ययन करने में सहायक होता है। लारेंज वक्र समान वितरण रेखा से वास्तविक विवरण के विचलन का माप है। यह वक्र समान विवरण से जितना दूर होगा असमानताओं उतनी अधिक होंगी।

यहाँ A ग्रुप में वितरण आय की असमानाएँ अधिक हैं।

आये की असमानताओं को परिमाणात्मक रूप में मापने के लिये हम एक गुणांक का प्रयोग करते हैं जिसे 'संकेन्द्रण अनुपात' अथवा 'Gini Coefficient' कहते हैं।

गिनी गुणांक = समान विवरण रेखा लानेंज वक्र के मध्य क्षेत्रफल / समान विवरण रेखा व अक्षों के बीच क्षेत्रफल

इस गुणांक का मान जितना कम होगा आय की असमानताएँ भी उतनी कम होंगी तथा अधिक होने पर असमानताएँ अधिक होंगी।

9.5 सारांश

→ श्रेणी में विचरण की माप ज्ञात करने वाले माध्य को अपकिरण कहतें हैं।

→ अपकिरण को द्वितीय क्रम का माध्य भी कहते हैं।

→ अपकिरण के माप की वहीं विशेषताएँ होती हैं, जो आदर्श माध्य की होती हैं।

→ जब अपकिरण की माप को मूल इकाइयों में ही व्यक्त किया जाता है तो उसे निरपेक्ष अपकिरण कहतें हैं, तथा जब इसे अनुपात या प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तो इसे सापेक्ष अपकिरण कहते हैं।

→ दो श्रेणियों की तुलना करने के लिये सापेक्ष अपकिरण का उपयोग किया जाता है।

→ अपकिरण को तीन रीति से मापा जा सकता है–

’ सीमा रीति – विस्तार, अन्तर–चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार

’ विचलन माध्य रीति – चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, माध्य विचलन

’ बिन्दुरेखीय रीति – लारेंज वक्र

→ विस्तार, अपकिरण की निरपेक्ष माप है जो श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्यों के अन्तर से प्राप्त होता है।

→ विस्तार गुणंक द्वारा हमें अपकिरण की सापेक्ष माप प्राप्त होती है।

→ विस्तार का प्रमुख उपयोग गुण नियंत्रण, विनिमय दरों में परिवर्तन, मौसम भविष्यवाणी में प्रयुक्त।

→ चरम मानों से अत्यधिक प्रभावित होने के कारण विस्तार विचलन की सही माप नहीं दे पाता, अतः चरम मानों के प्रभाव निरस्त करने के लिए हम अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार का प्रयोग करते हैं।

→ पूर्णतया सभावित आँकड़ों में मध्यिका का मान तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के ठीक बीच में स्थित होता है।

→ भूजोत, आय तथा सम्पत्ति विवरण में असमभित विवरण की माप में अन्तर चतुर्थक विचलन उपयोगी होता है ।

→ श्रेणी के चरम मूल्यों से प्रभावित न होकर 8ः मूल्यों पर आधारित अपकिरण की बेहतर माप शतमक विस्तार है।

→ चतुर्थक विचलन अन्तर चतुर्थक विचलन को 2 में से भाग देने पर प्राप्त होता है।

→ चतुर्थक विचलन गुणांक का प्रयोग हम विभिन्न श्रेणियों में विचलन ज्ञात करने के लिए करते हैं चतुर्थक विचलन को स्थिति माध्य कहना ज्यादा उचित है।

→ माध्य विचलन विचलनों के औसत व्यक्त करता है इसकी गणना समंक के सिकी केन्द्रीय माध्य (समान्तर माध्य, माधिका बहुलक) द्वारा की जाती है। सापेक्ष अपकिरण के लिए माध्य विचलन गुणांक की गणना की जाती है।

→ प्रमाप विचलन था मानक विचलन, समकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है।

→ मानक विचलन का माप सदैव धनात्मक होता है, इसकी सापेक्ष माप को विचरण गुणांक कहते हैं।

→ समान विवरण रेखा से समंकमालाओं की असमानता का बिन्दुरेखीय विधि से अध्ययन लारेंज वक्र द्वारा किया जाता है।

→ आय की असमानताओं के परिमाणात्मक माप के लिये संक्रेन्द्रण अनुपात का प्रयोग किया जाता है।

9.6 अभ्यास के लिये प्रश्न

प्रश्नः 1 A तथा B दो कम्पनियों के अंशपत्रों (Shares) के मूल्य सम्बन्धी आँकड़ो नीचे दिये गये हैं।

X	55	51	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

उत्तर → c.v.(x) = 4.99% c.v(y) = 1.9%, अतः ल अधिक स्थिर ।

प्रश्नः 2 एक कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न है –

32, 15, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 35, 33, 28, 30, 29, आंकड़ो के आधार पर ;पद्ध चतुर्थक विचलन ;पपद्ध चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

उत्तरः (Q. D. = 4.5; Coeff of Q. D. = 0.18)

प्रश्नः 3 निम्न आंकड़ों के आधार पर मध्यिका विचलन गुणांक, माध्य गुणांक की गणना कीजिए –

वस्तु का आकार	(x)	→	4	6	8	10	12	14	16
आवृत्ति	(f)	→	2	4	5	3	2	1	4

उत्तर (i) .405 (ii) 0.33

प्रश्नः 4 निम्न आवृत्ति विवरण के (i) माध्य (ii) प्रमाप विचलन की गणना कीजिए ।

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	15	30	53	75	100	110	115	125

उत्तरः (i) $\bar{X} = 35$ (ii) $\sigma = 19.76$

प्रश्नः 5 निम्न समंको का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए –

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	60	101	152	205	155	79	40	1

उत्तरः $\sigma = 1.61$

प्रश्नः 6 100 मदों से सम्बद्ध एक विवरण का माध्य '50' तथा प्रमाप विचलन '4' है, इन मदों के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए

उत्तरः $\sum x^2 = 2, 51, 600$

प्रश्नः 7 → निम्न समंकों द्वारा माध्य और माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

x	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
y	3	7	22	60	85	32	8

उत्तरः 0.915

प्रश्नः निम्न आंकड़ों के माध्य और प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए –

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	15	30	53	75	100	110	115	125

उत्तरः $\bar{X} = 35.16$, $\sigma = 19.76$

प्रश्नः 9 निम्न आंकड़ों से लारेंज वक्र खीजिए –

आय का विस्तार	परिवार संख्या	कुल आय
51-50	1744	268
251-450	557	186
451-650	302	166
51-850	186	139
851-1050	123	117
1051-1250	90	104

प्रश्नः 10 एक विवरण की निम्न सूचना उपलब्ध है–

$N = 100 \quad \bar{X} = 40 \quad \sigma = 0.51$

परन्तु बाद में पता चलात है कि एक मूल्य को '40'के स्थान पर '50' ले लिया था अब इस विवरण की सही माध्य एवं प्रभाव विचलन ज्ञात कीजिए

उत्तर → $\bar{X} = 39.90; \quad \sigma = 5$

इकाई : 10 विषमता और पृथुशीर्षत्व

10.1 प्रस्तावना
10.2 उद्देश्य
10.3 विषमता का माप (Measures of Skewness)
 10.3.1 बाउले का विषमता माप
 10.3.2 केली का विषमता माप (Kelly's Measure of Skewness)
 10.3.3 विषमता गुणांक
10.4 पृथुशीर्षत्व (Kurtosis)
10.5 कार्ल पियर्सन का β_2 और γ_2 गुणांक
10.6 परिघात (Moments)
10.7 सारांश (Summary)
10.8 अभ्यास के लिए प्रश्न
10.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
10.10 संदर्भ ग्रन्थ

10. 1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाइ मे पाठकों को **विषमता (Skewness) पृथुशीर्षत्व (Kurtosis)** की जानकारी दी जाएगी। प्रस्तुत इकाइ में बाउले का विषमता माप, केली का विषमता माप, विषमता गुणांक की विभिन्न विधियों **पृथुशीर्षत्व (Kurtosis)** की व्याख्या की जाएगी। अन्त में सारांश एवं अभ्यास के लिए प्रश्न जिससे पाठकों को ईकाई का अध्ययन करने में सुविधा होगी।

यदि कोई आवृत्ति विवरण केन्द्रीय मान के दोनों ओर सममित है, तथा केन्द्रीय मान के दोनों ओर आवृत्ति वक्र का आकार एक सा है, तो हम आवृत्ति वक्र को पूर्णतया सममित कहेंगे। यदि आवृत्ति वक्र केन्द्रीय मान के दोनों ओर सममित नहीं है अर्थात् वक्र की पुच्छ केन्द्रीय मान के दोनों ओर सममित नहीं है अर्थात् वक्र की पुच्छ केन्द्रीय मान के एक ओर अपेक्षाकृत दीर्घ तथा एक ओर अपेक्षाकृत लघु है तो हम ऐसे आवृत्ति वितरण को विषम कहते हैं। विषमता का अर्थ सममिति का अभाव है। यदि किसी विवरण में सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति है तो उस वितरण में विषमता होती है।

सममित बंटन (Symmetrical distribution) में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम में बढ़ती हैं, तथा फिर उसी क्रम में घटती हैं। इस तरह के वक्र को प्रसामान्य वक्र कहतें हैं, समभित बंटन में समान्तर माध्य, मध्यिका और बहुलक बराबर होते हैं तथा वक्र का आकार केन्द्रीय मान के दोनों ओर एक सा होता है।

→ जब वक्र का झुकाव दाहिनी ओर अधिक होता है तो बंटन (distribution) में धनात्मक विषमता पायी जाती है – जिसमें

(i) $\bar{X} > M > Z$

(ii) $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

→ जब असमित वक्र का झुकाव बायीं ओर अधिक होता है तो इसमें ऋणात्मक विषमता पायी जाती है। जिसमें –

(i) $\bar{X} < M < Z$

(ii) $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$

किसी बंटन में विषमता की जाँच आवश्यक होती है – यदि

(1) आवृत्ति बंटन का वक्र सममित न हो अर्थात् उसका स्वरूप घंटी के आकर का न हो।

(2) यदि बंटन में समान्तर माध्य, मध्यिका और बहुलक के बीच जितनी ही अधिक दूरी होगी आवृत्ति बंटन में विषमता उतनी अधिक होगी।

(3) मध्यिका से चतुर्थक मूल्यों की दूरी असमान हो।
(4) मध्यिका तथा बहुलक से निकाले गये विचलनों का योग शून्य न हो।

विषमता की माप के द्वारा हमें किसी बंटन विषमता या असमिति की मात्रा (अंकात्मक मान) तथा दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) का ज्ञान होता है।

10.2 उद्देश्य –

→ प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के पश्चात विषमता क्या है ?

→ विषमता की प्रमुख माप कौन सी हैं ?

→ विषमता की निरपेक्ष एवं सापेक्ष मापों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगें।

10.3 विषमता का माप (Measures of Skewness)

आवृत्ति बंटन की विषमता माप निरपेक्ष या सापेक्ष हो सकती है, निरपेक्ष माप तुलना योग्य होता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों में विषमता की तुलना करने के लिए विषमता की सापेक्ष ज्ञात करते हैं। इसे विषमता गुणांक (Coefficient Skewness) भी कहते हैं। यह गुणांक इकाई विहीन होते हैं तथा इन्हें प्रमाप विचलन से भाग देते है प्रमुख विषमताओं की मापों का विवरण निम्न असममित बंटन में $\bar{X} \neq M \neq Z$ समान्तर माध्य से बहुलक की दूरी जितनी अधिक होगी श्रेणी में विषमता उतनी ही अधिक होगी।

- **विषमता माप**

  $S_k = \bar{X} - Z$

यह निरपेक्ष माप है, यदि इस निरपेक्ष–माप में हम अपकिरण की माप से भाग दे दें तो हमें सापेक्ष माप या विषमता गुणांक प्राप्त होगा।

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक – $J = \dfrac{\bar{X} - Z}{\sigma}$

10.3.1. कार्ल पियर्सन का विषमता – माप

कभी–कभी बहुलक का निर्धारण कठिन हो जाता है ऐसी स्थिति में हम विषमता माप के वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करते हैं।

कार्ल पियर्सन का विषमता – माप

$$S_k = 3\left(\bar{X} - M\right)$$

$$\bar{X} - Z = 3\left(\bar{X} - M\right)$$

कार्ल पियर्सन का विषमता – गुणांक

$$J = \frac{(\bar{X} - M)}{\sigma}$$

उपर्युक्त सूत्रों के आधार पर विषमता – माप ज्ञात करने की रीति को विषमता का 'प्रथम माप' कहते हैं।

विषमता का 'द्वितीय माप' मध्यका से चतुर्थक मूल्यों के अन्तर पर आधारित है इसे बाउले (Bowley) का विषमता माप भी कहतें हैं, इसका प्रथम प्रयोग बाउले ने किया था।

10.3.2 बाउले का विषमता माप

$$S_{KB} = (Q_3 - M) - (M - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M$$

बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_1 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

यह रीति बहुत व्यावहारिक नहीं है क्योंकि इसमें श्रेणी के केवल आधे भाग की विषमता का ही माप से पाता है। यह कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक से भिन्न होता है। इसमें दोनों की रीति भिन्न होने से विषमता तुलनात्मक नहीं होती है।

10.3.3 केली का विषमता माप (Kelly's Measure of Skewness)

बाउले के विषमता माप की त्रुटि केली के विषमता माप द्वारा की जाती है, इसमें शतमक या दशमक मूल्यों का प्रयोग किया जाता है।

केली का विषमता माप –

$$KS_K (P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10}) = P_{90} + P_{10} - 2P_{50}$$

केली का विषमता गुणांक :

$$J_K = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{(P_{90} - P_{50}) + (P_{50} - P_{10})} = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$$

कुछ उदाहरणों द्वारा हम ऊपर दी गयी विषमता की मापों का स्पष्ट उल्लेख करेंगें।

- **स्मरणीय बिन्दु–**

पूर्णतया सममित विवरणों के लिये तृतीय चतुर्थक तथा मध्यिका का अन्तर $(Q_3 - Md)$ एवम् मध्यिका एवं प्रथम चतुर्थक का अन्तर $(Md - Q_1)$ समान होंगें। धनात्मक विषमता वाले आवृत्ति वक्रों में (Q_3) का मान $(Md - Q_1)$ से अधिक होगा तथा ऋणात्मक विषमता वाले आवृत्ति वक्रो में $(Q_3 - Md)$ का मान $(Md - Q_1)$ से कम होगा।

अन्य षब्दों में उपर्युक्त परिभाषित चतुर्थक विषमता गुणांक **(Quartile Coefficient of Skewness)** का मान धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक होने पर आवृत्ति वक्र क्रमष : धनात्मक, विषमता वाला, पूर्णतया सममित अथवा ऋणात्मक विषमता वाला कहलायेगा।

उदाहरण – 1 निम्न आंकड़ों से कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

x	रू	2	4	6	8	10	12	14
f	रू	10	18	30	25	12	3	2

हलः इस प्रश्न को बहुलक या मध्यका, दोनों के आधार पर ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ स्पष्ट है, अतः हम इसी का प्रयोग करेंगें।

x	f	fx	fx^2
2	10	20	40
4	10	72	288
6	30	180	1080
8	25	200	1600
10	12	120	1200
12	3	36	432
14	2	28	392
	100	656	5032

समान्तर माध्य – $\bar{x} = \frac{656}{100} = 656$

प्रमाप विचलन –

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum fx^2 - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5032}{100} - \left(\frac{656}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{50.32 - 43.0336} = \sqrt{7.2864} = 2.6994$$

चूँकि अधिकतम आवृत्ति 30 हैं, अतः इससे सम्बद्ध मूल्य अर्थात् 6 बहुलक होगा।

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$J = \frac{\bar{X} - Z}{\sigma} = \frac{6.56 - 6}{2.6994} = 0.2075.$$

अतः वितरण में धनात्मक विषमता है।

उदाहरण 2 रू निम्न श्रेणी में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी सं0	5	20	10	0	5	20	8	7

यहाँ बहुलक स्पष्ट नहीं हो रहा है अतः वैकल्पिक सूत्र द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात करेंगें।

प्राप्तांक	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	dx^1=X-A/n A=4,5, n=10	fdx^1	fdx^2	संचयी आवृत्ति
0-10	5	5	-4	-20	80	5
10-20	15	20	-3	-60	180	25
20-30	25	10	-2	-20	40	35
30-40	35	0	-1	0	0	35
40-50	45	5	0	0	0	40
50-60	55	20	1	20	20	60
60-70	65	8	2	16	32	68
70-80	75	7	3	21	63	75
Total		75		-43	415	

सामान्तर माध्य –

$$\overline{X} = \frac{A + n\Sigma fdx'}{N}$$

$$= 45 + \frac{10 \times (-43)}{75} = 45 - \frac{86}{15} = 45 - 5.7$$

$$= 39.3$$

$$\frac{N}{2} = \frac{75}{2} = 37.5$$

अतः 40.50 वाले वर्ग में मध्यका होगी।

मध्यका

$$M = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$= 40 + \frac{37.5 - 35}{5} \times 10 = 40 + \frac{2.5}{5} \times 10 = 45 .$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = h \times \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma fdx'^2 - \frac{(\Sigma fdx')^2}{N}}$$

$$\sigma = h \times \sqrt{\frac{415}{75} - \left(\frac{-43}{75}\right)^2} = 10 \times \sqrt{5.53 - 0.33}$$

$$= h \times \sqrt{\frac{415}{75} - \left(\frac{-43}{75}\right)^2} = 10 \times \sqrt{5.53 - 0.33}$$

$$= 10 \times 2,28 = 22.8$$

अतः कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक –

$$J = \frac{3\left(\overline{X} - M\right)}{S} = 3\frac{(39.3 - 45.0)}{22.8} = -\frac{17.1}{22.8}$$

$$= -0.75 .$$

उदाहरण 3. बंटन A और बंटन B के संबंध में निम्न सूचनाएँ प्राप्त हैं

	बंटन A	बंटन B
समान्तर माध्य	50	45
मध्यका	45	40
प्रमाप विचलन	5	5

निम्न की जाँच कीजिए।

(i) बंटन A और बंटन B में समान विचरण है।
(ii) दोनों बंटनों में विषमता समान है।

हल – विचरण की तीव्रता के लिये हम विचरण गुणांक ज्ञात करते हैं।

(i) बंटन A में $C.V = \sigma/\overline{X} \times 100 = 5/50 \times 100 = 10$

बंटन B में $C.V = \sigma/\overline{X} \times 100 = 5/45 \times 100 = 11.11$

स्पष्ट रूप से बंटन ठ में विचलन अधिक है अतः (i) कथन असत्य है।

(ii) कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

बंटन A में $= \dfrac{3(\overline{X}-M)}{\sigma} = \dfrac{3(50-45)}{5} = \dfrac{3\times5}{5} = 3$

बंटन B में $= \dfrac{3(\overline{X}-M)}{\sigma} = \dfrac{3(45-40)}{5} = \dfrac{3\times5}{5} = 3$

दोनों बंटनों में विषमता समान है तथा दिया गया कथन (ii) सत्य है।

उदाहरण 4रू निम्न वितरण से कर्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक और बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

	श्रेणी A	श्रेणी B
समान्तर माध्य	150	140

मध्यका	142	155
प्रमाप विचलन	30	55
तृतीय चतुर्थक	195	260
प्रथम चतुर्थक	62	80

हल –

श्रेणी A में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} = \frac{3(150 - 142)}{30} = \frac{3 \times 8}{30} = 0.8$$

बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{195 + 62 - 2 \times 142}{195 - 62} = \frac{157 - 284}{133}$$

$$= -\frac{27}{133} = -0.203$$

श्रेणी B में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{6} = \frac{3(140 - 155)}{55} = \frac{3 \times (-15)}{55} = -\frac{9}{11} = -0.82$$

तथा बाउले का विषमता गुणांक –

$$J_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{260 + 80 - 2 \times 155}{260 - 80} = \frac{340 - 310}{180}$$

$$= \frac{1}{6} = 0.167$$

यहाँ एक ही श्रेणी में कार्ल पियर्सन की रीति से निकाला गया विषमता गुणांक और बाउले की रीति से निकाला गया विषमता गुणांक भिन्न हो सकता है।

अपकिरण एवं विषमता

किसी बंटन में अपकिरण एवं विषमता विश्लेषण के प्रमुख अंग है इस दृष्टि से ये माप एक दूसरे के पूरक हैं। इनमें प्रमुख अन्तर निम्न हैं–

	अपकिरण	विषमता
1.	यह पद मूल्यों के बिखराव या श्रेणी की बनावट बताता है	यह बंटन की सममिति अथवा असमिति बताता हैं
2.	यह पूरी श्रेणी के बिखराव को मापता है	यह माध्य के दोनों तरफ के बिखराव की तुलना करता है।
3.	यह प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय परिघातों से संबंधित हैं	यह केवल तृतीय परिघात से संबंधित हैं।

10.4 पृथुशीर्षत्व (Kurtosis)

हमने पूर्व में ही स्पष्ट किया है कि किसी आवृत्ति बंटन की संपूर्ण विशेषताओं की जानकारी करने के लिए चार प्रकार के माप आवश्यक हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप, अपकिरण की माप और विषमता की माप, अत्यन्त महत्वपूर्ण होते हुए भी किसी बंटन की सम्पूर्ण कहानी को नहीं कह पाते। इसके लिए हमें चौथी माप अर्थात् पृथुषीर्ष्त्व की माप की जानकारी आवश्यक है। पृथुशीर्षत्व को कार्ल पियर्सन वक्र की उत्तलता (Convexity of the curve) कहते हैं। विषमता से हमें यह जानकारी प्राप्त होती है कि बंटन सममित है अथवा असममित है। दूसरे शब्दों में विषमता आवृत्ति वक्र की दायीं अथवा बाँयी पूंछ (right or left tails) की स्थिति की जानकारी प्रस्तुत करती है। पृथुशीर्षत्व हमें वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन (peakedness) या चपटेपन (flatness) की जानकारी प्रदान करता है।

किसी आवृत्ति बंटन का वक्र नुकीला अथवा चपटा हो सकता है। यदि हम प्रसामान्य वक्र (normal curve) को आधार माने तो पृथुशीर्षत्व हमें प्रसामान्यता से अलगाव (departure from normality) की जानकारी देते हे। इसकी माप से हमें श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों के जमाव का ज्ञात प्राप्त होता है। यदि मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव सामान्य है तो वह आवृत्ति वक्र मध्यम शीर्ष वाला (mesokurtic) या प्रसामान्य (normal) कहलाता है। यदि मध्य भाग में आवृत्तियों का जमाव अत्यधिक सघन है तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला (lepto-kurtic) होता है। इसके विपरीत यदि केन्द्र में आवृत्तियों का जमाव कम है तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) कहलाता है। चित्र में वक्र C चपटे शीर्ष वाला वक्र है। पृथुशीर्षत्व आकृति (नुकीलेपन अथवा चपटेपन) को मापता है।

10.5 कार्ल पियर्सन का β_2 और γ_2 गुणांक

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \text{ and } \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

यदि $\beta_2 = 3$ या $\gamma_2 = 0$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला (meso-kurtic) है।

यदि $\beta_2 > 3$ या $\gamma_2 > 0$ तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला (lepto-kurtic) है।

यदि $\beta_2 > 3$ या $\gamma_2 < 0$ तो वक्र चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

उदाहरण – 1. यदि किसी बंटन में समान्तर माध्य $(\overline{X}) = 1$ हो और μ_2, μ_3 तथा μ_4 का मान क्रमषः 3, 0 और 27 हो तो इनकी सहायता से विषमता तथा पृथुशीर्षत्व की जाँच कीजिए।

हल – कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0 \text{ or } \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$$

अतः बंटन सममित है या $\overline{X} = M = Z$

कार्ल पियर्सन का पृथुशीर्षत्व माप –

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{27}{(3)^2} = \frac{27}{9} = 3$$

या $$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$$

चूँकि $\mu_2 = 0$ अतः दिया हुआ बंटन मध्यम शीर्ष वाला (meso-kurtic) या प्रसामान्य है।

चूँकि $\mu_3 = 0$ और $\mu_2 = 3$ अतः बंटन समान्तर माध्य। और प्रमाप विचलन $\sqrt{3} = 1.732$ के साथ प्रसामान्य है।

उदाहरण. 2. यदि $\mu_2 = 120$ और $\mu_4 = 36000$ तो बंटन का स्वरूप ज्ञात कीजिए।

हल – बंटन के स्वरूप के लिए हमें पृथुशीर्षत्व की माप करनी होगी।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{36000}{120 \times 120} = 2.5 \text{ or } \gamma_2 = \beta_2 - 3 = -0.5$$

चूँकि $\beta_2 < 3 \text{ or } \gamma_2 < 0$

अतः वटन चपटे शीर्ष वाला (platy-kurtic) है।

उदाहरण – 3. यदि एक सममित बंटन में प्रमाप विचलन हो तो चतुर्थ केन्द्रीय परिघात का क्या मूल्य हो ताकि बंटन

(i) नुकीले शीर्ष वाला हों।

(ii) मध्यम शीर्ष वाला हो

(iii) चपटे शीर्ष वाला हो।

हल –

$\sigma = 4$ अतः $\sigma^2 = \mu^2 = (4)^2 = 16$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

(i) नुकीले शीर्ष वाले बंटन के लिए $\beta_2 > 3$ होना चाहिए।

या $\frac{\mu_4}{\mu_2^2} > 3$ या $\mu_4 > 3\mu_2^2$

या $\mu_4 > 3 \times (16)^2$

$> 3 \times 256 > 768$

(ii) मध्यम शीर्ष वाले बंटन में –

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3$$

या $$\mu_4 = 3\mu_2^2$$

$$= 3 \times (16)^2$$

$$= 3 \times 256 = 768$$

(iii) चपटे शीर्ष वाले बंटन में –

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} < 3$$

या $$\mu_4 < 3\mu_2^2$$

$$\mu_4 < 3 \times 256$$

$$< 768$$

उदाहरण – 4. निम्न वितरण की कुकुदता गुणांक ज्ञात कीजिए।

वर्गान्तर	0.4	4.8	8.12	12.16	16.20
आवृत्ति	1	3	12	8	6

वर्गान्तर	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	$(x-\overline{x})^4$	$f(x-\overline{x})^4$
0.4	2	1	.10	100	10000	10000
4.8	6	3	.6	36	1296	3888
8.12	10	12	.2	4	16	192
12.16	14	8	2	4	16	128
16.20	18	6	6	36	1296	7776

$$M_4 = \frac{\Sigma f(x-\overline{x})^4}{N} = \frac{21984}{30} = 732.80$$

σ का मान = 4.06

इसे कुकुदता के सूत्र में रखने पर

कुकुदता गुणांक $= \frac{M_4}{\sigma^4} = \frac{732.80}{(4.06)^4} = \frac{732.80}{271.71} = 2.70$

कुकुदता का मान चूँकि 3 से कम है अतः दिये हुए वितरण का आवृत्ति वक्र चपटे शीर्ष (platy kurtic) होगा।

10.6 परिघात (Moments)

सांख्यिकी में परिघात का प्रयोग किसी आवृत्ति बंटन के विभिन्न मापों, जैसे – केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण, विषमता प्रथुषीर्षत्व आदि के विश्लेषण में होता है। किसी श्रेणी में परिघातों का परिकलन समान्तर माध्य अथवा किसी कल्पित माध्य से परिघात (moments about the arithmetic mean) कहते हैं। परिघातों की संख्या कई होती है। परिघात या अपूर्ण शब्द का भौतिक विज्ञान या यन्त्रिका विज्ञान (mechanics) में प्रायः प्रयोग होता है, जहाँ यह किसी बिन्दु के सापेक्ष घुमाव पैदा करने वाले बल को मापता है।

परिघातों की संख्या, कल्पित मूल बिन्दु से परिघात, केन्द्रीय परिघातों के परिकलन, व्यक्तिगत श्रेणी–आवृत्ति श्रेणी, शेपर्ड के संषोधन, चार्लियर की शुद्धता जाँच, परिघातों पर आधारित कार्ल पिर्यसन के गुणांक, परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक, पृथुशीर्षत्व, पृथुशीर्षत्व की माप के रूप में कार्ल पियर्सन ने β_2 और γ_2 गुणांकों का प्रयोग किया है।

10.6.1 उद्देश्य –

परिघात क्या है?

परिघात के उपयोग क्या हैं ?

परिघात को मापने की विधि क्या है?

प्रथुषीर्षत्व क्या है तथा इसकी उपयोगिताएँ क्या हैं?

10.6.2 परिघातों की संख्या

परिघातों की संख्या कई होती हैं, सामान्य रूप से किसी आवृत्ति विवरण में त वाँ केन्द्रीय परिघात –

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum f\left(X - \bar{X}\right)^r ; r = 0, 1, 2 \; \ldots\ldots (1)$$

$$= \frac{1}{N}\left[f_1\left(X - \bar{X}\right)^r + f_2\left(X_2 - \bar{X}\right)^r + \ldots\ldots\ldots f_n\left(X_n - \bar{X}\right)^r \right]$$

समीकरण (1) में $r = 0$ रखने पर

$$M_0 = \frac{1}{N} \sum f \left(X - X\right)^0 = \frac{1}{N}\sum f = 1$$

क्योंकि $\sum f = N$ और $\left(X - \bar{X}\right)^0 = 1$

अतः $\mu_0 = 1.$

पुनः समीकरण (1) में $r = 1$ रखने पर

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum f \left(X - \bar{X}\right) = 0 \text{ क्योंकि } \sum\left(X - \bar{X}\right) = 0$$

याद करें, समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों का योग शून्य होता है।

पुनः $r = 2$ रखने पर समीकरण (1) द्वारा

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f \left(X - \bar{X}\right)^2 = \sigma^2 = \text{variance}$$

इस प्रकार द्वितीय केन्द्रीय परिघात प्रसरण को व्यक्त करता है

पुनः $\mu_3 = \frac{1}{N} \sum f\left(X - \bar{X}\right)^3$

और

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum f\left(X - \bar{X}\right)^4$$

कल्पित मूल बिन्दु से परिघात **(Moments about arbitrary origin)**

समान्तर माध्य $\bar{X}$ के बजाय हम किसी कल्पित बिन्दु (कल्पित माध्य) A से परिघातों का परिकलन कर सकते हैं। सामान्य रूप से कल्पित मूल बिन्दु A से r वाँ परिघात

$$\mu_r^1 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^r,\ r = 0, 1, 2, \ \ldots \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{N}\left[f_1(X_1 - A)^r + f_2(X_2 - A)^r + \ldots\ f_n(X_n - A)^r\right]$$

समीकरण (2) में $r = 0$ रखने पर –

$$\mu_0^1 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^0$$

$$= \frac{1}{N}\sum f = 1$$

इसी समीकरण में $r = 1$ रखने पर –

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum fX - \sum fA\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum fX - \frac{A\sum f}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum fX - A$$

$$= \bar{X} - A$$

अतः $= \bar{X} = \mu_1 + A$ (3)

समीकरण (3) बहुत ही महत्वपूर्ण समीकरण है। हम यह देख सकते हैं कि यदि $A = O$ तो $\bar{X} = \mu_1$ अर्थात् शून्य मूल बिन्दु से लिया गया परिघात μ_1 समान्तर माध्य को व्यक्त करता है।

समीकरण (2) में $r = 2, 3, 4, \ldots\ldots$ इत्यादि रखने पर

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^3$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum f(X - A)^4$$

पाठक अब यह समझ चुके हैं कि समान्तर माध्य से लिए गये परिघात अथवा केन्द्रीय परिघात को μ (म्यू) तथा कल्पित बिन्दु A से लिए गए परिघात को μ^1 से लिखते हैं।

हम जानत हैं कि

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f(X - \bar{X})^r$$

इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\,(X - A + A - \bar{X})^r \qquad (4)$$

समीकरण (3) से

$$\bar{X} = \mu_1 + A \text{ या } A - \bar{X} = u_1^{'}$$

अतः समीकरण (4) से

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\,\left[(X - A) - \mu_i\right] \qquad (5)$$

समीकरण (5) का द्विपद प्रमेय से विस्तार करने पर μ और μ' में संबंध निकल जाता है। हम यहाँ पर इस विस्तार को पूर्णरूपेण प्रस्तुत करने की कोई आवश्यकता महसूस नहीं कर रहे हैं। इस विस्तार का अन्ततः सामान्य रूप निम्न होगा–

$$\mu_r = \mu_r - {}^rC_1\mu_{r-1}\,\mu_1 + {}^rC_2\,\mu_{r-1}\,\mu_1^2 \qquad (6)$$

इसी समीकरण (6) में $r = 2,3$ और 4 रखने पर

$$\mu_2 = \mu_2^{'} - \mu_1^{'2} \qquad (7)$$

$$\mu_3 = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'}\,\mu_1^{'} + 2\mu_1^{'3} \qquad (8)$$

$$\mu_4 = \mu_4^{'} - 4\mu_3^{'}\,\mu_1^{'} + 6\mu_2^{'}\,\mu_1^{'2} - 3\mu_1^{'4} \qquad (9)$$

समीकरण (7) (8) (9) बहुत महत्वपूर्ण हैं तथा सदैव याद रखने योग्य है। हम केन्द्रीय परिघातों से कल्पित मूल बिन्दु पर आधारित परिघातों की भी गणना कर सकते हैं। इसके लिए

हमें सर्वप्रथम समान्तर माध्य की गणना करनी पड़ती है तथा कल्पित मूल बिन्दु की जानकारी रखनी पड़ती हैं। समीकरण (3) में हम जानते हैं कि $\bar{X} = \mu_1^{'} + A$ या $\mu_1^{'} = \bar{X} - A$ समीकरण (7) (8) (9) से

$$\mu_2^{'} = \mu_2 + \mu_1^{'2} \qquad (10)$$

$$\mu_3^{'} = \mu_3 + 3\,\mu_2 u_1^{'} + \mu_1^{'3} \qquad (11)$$

$$\mu_4^{1} = \mu_4 + 4\,\mu_3\mu_1^{1} + 6\,\mu_2\mu_1^{'2} + \mu_1^{'4} \qquad (12)$$

परिघात ज्ञात करने संबंधी प्रश्नों का हल करते समय कुछ बाते ध्यान देने योग्य हैं–

10.6.3 केन्द्रीय परिघातों के परिकलन

केन्द्रीय परिघातों के परिकलन करते समय यदि समान्तर माध्य पूर्ण संख्या है तब तो सीधे सूत्र

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\left(X - \bar{X}\right)^r$$

का प्रयोग करना चाहिए। हमें केन्द्रीय परिघातों के सूत्र को यहाँ फिर देख लें।

व्यक्तिगत श्रेणी

$$\mu_1 = \frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)}{N} = 0 = \frac{\sum d}{N}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{N} = \frac{\sum d^2}{N} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^3}{N} = \frac{\sum d^3}{N}$$

$$\mu_4 = \frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^4}{N} = \frac{\sum d^4}{N}$$

आवृत्ति श्रेणी

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\Sigma f(X - \overline{X}) = \frac{\Sigma fd}{N} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma f(X-\overline{X})^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\Sigma f(X-\overline{X})^3 = \frac{\Sigma fd^3}{N}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\Sigma f(X-\overline{X})^4 = \frac{\Sigma fd^4}{N}$$

यदि समान्तर माध्य दशमलव में आता है तो सीधे सूत्र का प्रयोग करके केन्द्रीय परिघातों का परिकलन बहुत कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में हम पहले किसी कल्पित माध्य (A) से परिघात $\mu_r^{'}$ ज्ञात करते हैं और फिर इनके आधार पर केन्द्रीय परिघातों की गणना कर ली जाती है। हम जानते हैं कि किसी कल्पित मूल बिन्दु A से परिघात

$$\mu r' = \frac{1}{N}\Sigma f(X-A)^r$$

यदि

$$dx = X - A \quad \text{तो} \quad \mu r' = \frac{1}{N}\Sigma f(dx)^r$$

परिघातों के संबंध में निम्न बातें महत्वपूर्ण हैं.

परिघातों के संबंध में निम्न बातें भी काफी महत्वपूर्ण हैं –

(1) $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$ तथा समान्तर माध्य $\overline{X} = A + \mu_1^1$

(2) यदि सममित वितरण है तो हम जानते हैं कि ऐसे वितरण में आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती हैं उसी क्रम में घटती हैं। सममित वितरण में समान्तर माध्य से विचलन लिया जाए और इस विचलन का विषम घात (1, 3, 5, 7 ..... इत्यादि) किया जाए तो धनात्मक विचलन और ऋणात्मक विचलन एक दूसरे के बराबर होते हैं। इस कारण μ_1, μ_3, μ_5 इत्यादि का मान शून्य होता है अर्थात् –

$$\Sigma f(X-\overline{X}) = \Sigma f(X-\overline{X})^3 = \Sigma f(X-\overline{X})^5 = \ldots\ldots = 0$$

या

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 \ldots\ldots\ldots = 0$$

या

$H_{2r+1} = 0$ जहाँ $r = 0, 1, 2, 3 .....$

(3) यदि आवृत्ति वचरण (वर्गीकृत) में हम पैमाने का परिवर्तन (change of scale) करें अर्थात् यदि

$dx' = X - A / h$

या $X = A + hdX'$

और $\overline{X} = A + hd\overline{X}'$

इस प्रकार

$$\mu_r = \frac{1}{N} \Sigma f \left(X - \overline{X} \right)^r$$

$$= h^r \frac{1}{N} \Sigma f \left(dX' - d\overline{X}' \right)$$

(4) हम जानते हैं कि $\mu_2 = \sigma^2 =$ प्रसरण तथा

$$\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma f (X - A)^2 = \text{विचलन वर्ग माध्य}$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

चूँकि μ_1' एक वास्तविक संख्या है, अतः इसका वर्ग एक गैर ऋणात्मक राशि होगी। इस प्रकार

$\mu_2 = \mu_2'$ – एक गैर ऋणात्मक राशि

अतः $\mu_2 < \mu_2'$

या प्रसरण $\leq$ विचलन–वर्ग माध्य

या Variance $\leq$ Mean square deviation

या S.D. $\leq$ Root mean square deviation

उदाहरण – 1. किसी चर के 10 पदों पर आधारित प्रथम चार परिघात क्रमषः 5, 30, 40 और 50 हैं। समान्तर माध्य, प्रसरण μ_3 तथा μ_4 का परिकलन कीजिए।

हल –

$$A=10, \mu_1^{'}=5, \mu_2^{'}=30, \mu_3^{'}=40, \mu_4=50$$

समान्तर माध्य $\overline{X}=A+\mu_1^{'}=10+5=15$

प्रसरण $\mu_2=\mu_2^{'}-\mu_1^{'2}=30-5^2=30-25=5$

$$\mu_3=\mu_3^1-3\mu_2^1\mu_1^1+2\mu_1^{1^3}$$

$$=40-3\times30\times5+2(5)^3$$

$$=40-450+2\times125=290-450=160$$

$$\mu_4=\mu_4^1-4\mu_3^1\mu_1^1+6\mu_2^1+6\mu_2^1\mu_1^2-3\mu_1^{1^4}$$

$$=50-4\times40\times5+6\times30\times25-3\times625$$

$$=50-800+4500-1875$$

$$=4550-2675$$

$$=1875$$

उदाहरण – 2. यदि किसी श्रेणी का समान्तर माध्य 7 और प्रथम चार केन्द्रीय परिघात क्रमषः 0, -16, 64 और 162 हो तो – (1) कल्पित मूल बिन्दु 5 पर आधारित और (2) शून्य पर आधारित परिघातों की गणना कीजिए।

हल –

(1) $\overline{X}=A+\mu_1^{'}$

या $\mu_1^{'}=\overline{X}-A=7-5=2$

$$\mu_2^{'}=\mu_2+\mu_1^{'2}=16+4=20$$

$$\mu_3^{'}=\mu_3+3\mu_2\mu_1^{'}+\mu_1^{'3}$$

$$= -64 + 3 \times 16 \times 2 + (2)^3$$

$$= -64 + 96 + 8 = 40$$

$$\mu_4' = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1' + 6\mu_2\mu_1'^2 - \mu_1'^4$$

$$= 162 + 4 \times (-64) \times (2) + 6 \times 16 (2)^2 + (2)^4$$

$$= 162 - 512 + 384 + 16$$

$$= 562 - 512 = 50$$

इस प्रकार मूल बिन्दु 5 पर आधारित प्रथम चार परिघात 2, 20, 40 और 50 है।

(ii) $\overline{X} = 7, A = 0$

अतः $\mu_1' = \overline{X} - A = 7 - 0 = 7$

$$\mu_2' = \mu_2 + \mu_1'^2$$

$$= 16 + (7)^2 = 16 + 49 = 65$$

$$\mu_3' = \mu_3 + 3\mu_2\mu_1' + \mu_1'^3$$

$$= -64 + 3 \times 16 \times 7 + (7)^3$$

$$= -64 + 336 + 343 = 615$$

$$\mu_4' = \mu_4 + 4\mu_3\mu_1' + 6\mu_2\mu_1'^2 - \mu_1'^4$$

$$= 162 + 4(-64) \times 7 + 6 \times 16 \times (7)^2 + (7)^4$$

$$= 162 - 1792 + 3136 + 2401$$

$$= 5699 - 1792$$

$$= 3907$$

10.6.4 शेपर्ड के संषोधन (Sheppard's correction for moments) वर्गीकृत श्रेणी में परिघातों की गणना करते समय वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु को ही चर (X) मानते हैं। यह मान लिया जाता है कि आवृत्तियों का जमाव वर्ग के मध्य बिन्दु पर ही होता है। यह मान्यता

सममित वितरण में लगभग सही होता है लेकिन सामान्यतः या असममित वितरण में ऐसा मानना उचित नहीं होता और परिणामस्वरूप कुछ त्रुटि जिसे समूहन त्रूटि **(grouping error)** कहते हैं, परिघातों की गणना में विद्यमान हो जाती है। इस विभ्रम या त्रुटि को दूर करने के लिए शेपर्ड **(W.F. Sheppard)** ने निम्न सूत्रों का प्रयोग किया और इसे ही शेपर्ड के संषोधन कहते हैं –

$$\mu_2 \ (\text{संषोधित}) = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$$

$$\mu_3 \ (\text{संषोधित}) = \mu_3$$

$$\mu_4 \ (\text{संषोधित}) = \mu_4 - \frac{1}{2}h^2\mu_2 + \frac{7}{240}h^4$$

हम जानते हैं कि μ_1 सदैव शून्य होता है। μ_1 और μ_3 का संषोधन इसलिए भी आवश्यक नहीं है कि इनमें विचलनों के धनात्मक और ऋणात्मक चिन्ह बने रहते हैं। अतः अषुद्धि क्षतिपूरक प्रकृति के कारण लगभग स्वतः समाप्त हो जाती है।

शेपर्ड का संषोधन सममित या साधारण सममित आवृत्ति बंटन में ही उपयुक्त होता है। J या $\cup$आकृति वाले आवृत्ति बंटन में यह उपयुक्त नहीं होता। साथ ही यदि आवृत्तियों की संख्या बहुत बड़ी हो (1000 से अधिक) तभी यह संषोधन उपयुक्त होता है।

10.6.5 चार्लियर की शुद्धता जाँच (Charlier's check)

चार्लिर्यर की शुद्धता जाँच की चर्चा हमने पूर्व के अध्यायों में की है। हमें यह भी ज्ञात है कि 'चार्लियर–जाँच' के द्वारा गणना क्रिया के शुद्धता की परीक्षा होती है। परिघातों के संबंध में अगर निम्न शर्त पूरी होती है तो गणना–क्रिया में कोई अषुद्धि नहीं है –

परिघात	जाँच–सूत्र
प्रथम	$\Sigma f(dx+1) = \Sigma fdx + N$
द्वितीय	$\Sigma f(dx+1)^2 = \Sigma fdx^2 + 2\Sigma fdx + N$
तृतीय	$\Sigma f(dx+1)^3 + \Sigma fdx^3 + 3\Sigma fdx^2 + 3\Sigma fdx + N$
चतुर्थ	$\Sigma f(dx+1)^4 = \Sigma fdx^4 + 4\Sigma fdx^3 + 6\Sigma fdx^2 + 4\Sigma fdx + N$

उपर्युक्त जाँच–सूत्र, परिघात ज्ञात करने की अप्रत्यक्ष या लघुरीति पर आधारित है। यदि प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग कर रहे हैं तो $dx\,(X - A)$ की जगह रखा जाएगा।

10.6.5 परिघातों पर आधारित कार्ल पिर्यसन के गुणांक (Karl Pearson's Coefficients based on moments)

प्रथम चार केन्द्रीय परिघातों पर आधारित चार गुणांकों की चर्चा कार्ल पियर्सन ने किया है। इन गुणांकों का प्रयोग तुलनात्मक अध्ययन में सुविधापूर्वक किया जाता है। व्यवहार में विषमता एवं पृथुशीर्षत्व के माप में ये गुणांक बहुत उपयोगी है। ये बीटा और गामा गुणांक निम्न हैं – $\beta = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$Y_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{क्योंकि} \quad \mu_2 = \sigma^2$$

$$Y_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

कभी–कभी अल्फा (alfa) गुणांक की भी चर्चा की जाती है। अल्फा गुणांक निम्न हैं –

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = 0, \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1} = \gamma_1, \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \beta_2$$

10.6.6 परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक (Coefficient of skewness based on moments)

परिघातों पर आधारित कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक –

$$S_k = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

पाठक यहाँ धान दें, पूर्व में हमने कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक के लिए हमने J का प्रयोग किया है। यहाँ पर S_k का प्रयोग इसलिए कर रहे हैं कि दोनों सूत्रों में अन्तर आसानी से हो सके।

यहाँ β_1 और β_2 कार्ल पियर्सन के गुणांक है। इस सूत्र द्वारा धनात्मक विषमता होगी। यदि तथा ऋणात्मक विषमता होगी यदि $\overline{X}>Z$ तथा ऋणात्मक विषमता होगी यदि $\overline{X}<Z$ । यदि $S_k=0$ तो या तो $\beta_1=0$ या $\beta_2+3=0$ या $\beta_2=-3$

लेकिन $\beta_2=\mu^4/\mu_2^2$ जहाँ $\mu_4=\frac{1}{N}\Sigma f(x-\overline{x})^4>0$

और μ_2 प्रसारण है जिसका वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता अतः –

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}>0$$

इस प्रकार यदि $S_k=0$ तो $\beta_1=0$ या $\mu_3=0$। इस प्रकार सममित वितरण में $\beta_1=0$। अतः β_1 को विषमता के माप के रूप में प्रयोग किया जाता है। लेकिन इसकी एक गम्भीर सीमा (limitation) है। चूँकि $\beta_1=\mu_3^2/\mu_2^3$ जहाँ तो धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है लेकिन μ_3^2 सदैव धनात्मक होगा। इसी प्रकार μ_2^3 भी धनात्मक होगा। इस प्रकार β_1, विषमता की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) को बताने में असमर्थ होता है। इस दोष को दूर करने के लिए कार्ल पियर्सन के गामा गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

$$\gamma_1=+\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

इस प्रकार विषमता का चिन्ह μ_3 पर निर्भर हो जाता है। यदि μ_3 ऋणात्मक होगा तो विषमता भी ऋणात्मक होगी और यदि μ_3 धनात्मक होगा तो विषमता भी धनात्मक होगी।

10.7 सारांश (Summary)

$\Rightarrow$ विषमता का अर्थ सममिति का अभाव है

$\Rightarrow$ यदि किसी वितरण में सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति है तो उसे विषय कहते हैं।

$\Rightarrow$ जब वक्र का झुकाव दाहिनी ओर अधिक होता है तो बंटन में धनात्मक विषमता पायी जाती है।

जिसमें – $\overline{X}>M>Z$

– $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

$\Rightarrow$ जब असममित वक्र का झुकाव बायीं ओर अधिक होता हैं तो इसमें ऋणात्मक विषमता पायी जाती है

जिसमें – $\overline{X}<M<Z$

– $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

⇒ विषमता की माप द्वारा हमें बंटन में असममिति की मात्रा दिशा का ज्ञान होता है।

⇒ दो या दो से अधिक श्रेणियों में तुलना करने के लिये विषमता गुणांक का प्रयोग करते हैं।

⇒ यह गुणांक इकाई विहीन होते हैं।

⇒ प्रमुख विषमता की माप –

कार्ल पियर्सन का निरपेक्ष माप $= J = \overline{X} - Z = 3(\overline{X} - M)$

विषमता गुणांक $= J = \dfrac{\overline{X} - Z}{\sigma} = \dfrac{3(\overline{X} - M)}{\sigma}$

बाउले का विषमता माप –

$$S_{KB} = Q_3 + Q_1 - 2M$$

विषमता गुणांक $= \dfrac{Q_3 - Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

केली का विषमता माप $= K_{SK}(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10}) = P_{90} + P_{10} - 2P_{50}$

विषमता गुणांक $= \dfrac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$

⇒ प्रथुषीर्षत्व की माप द्वारा हमें वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन या चपटेपन की जानकारी प्राप्त होती है।

⇒ इसे कार्ल पियर्सन द्वारा वक्र की उत्तलता (convexity of the curve) भी कहते हैं।

⇒ इसकी माप से हमें श्रेणी के मध्य भाग में आवृत्तियों के जमाव का ज्ञात प्राप्त होता है। इसे β_2, γ_2 गुणांकों द्वारा चिन्हित करते हैं।

$\beta_2 = 3$ या $\gamma_2 = 0$ तो वक्र मध्यम शीर्ष वाला है।

$\beta_2 > 3$ या $\gamma_2 > 0$ तो वक्र नुकीले शीर्ष वाला है।

$\beta_2 < 3$ या $\gamma_2 < 0$ तो वक्र चपटे शीर्ष वाला है।

10.8 अभ्यास के लिए प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

(1) विषमता किसी आवृत्ति बंटन के किस विशेषता को प्रकट करती है–

(i) आवृत्तियों के केन्द्रिकरण को

(ii) आवृत्तियों के अपकिरण को

(iii) किसी आवृत्ति बंटन के आकार को

(iv) इन सभी को

(2) निम्न से किसने विषमता के माप को विकसित नहीं किया –

(i) क्राक्सटन (ii) कार्ल पियर्सन

(iii) बाउले (iv) केली

(3) बाउले के विषमता गुणांक की क्या सीमा है–

(i) 0 से 1 (ii) –1 से +1

(iii) 0 से 3 (iv) –3 से +3

(4) कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक का सूत्र है–

(i) $\frac{\overline{X} - Z}{S.D.}$

(ii) $\frac{\overline{X} - M}{S.D.}$

(iii) $\frac{3\ (\overline{X} - Z)}{S.D.}$

(iv) $\frac{2\ (\overline{X} + M)}{S.D.}$

(5) एक सममित वितरण में विषमता गुणांक होती है–

(i) शून्य (ii) धनात्मक

(iii) ऋणात्मक (iv) इनमें से कोई नहीं

(6) वक्र के माध्य अथवा शीर्ष के नुकीलेपन या चपटेपन की जानकारी देता है–

(i) पृथुशीर्षत्व (ii) परिघात

(iii) विषमता (iv) समान्तर माध्य

(7) यदि β_2 झ 3 है तो वक्र कैसा होगा

(i) नुकीले शीर्ष वाला (ii) चपटै शीर्ष वाला

(iii) मध्यम शीर्ष वाला (iv) इनमें से कोई नहीं

(8) पृथुशीर्वत्व को वक्र की उत्तलता किसने कहा–

(i) केली (ii) बाउले

(iii) कार्ल पियर्सन (iv) इनमें से कोई नहीं

II- सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें –

(1) विषमता धनात्मक होती है, यदि $X < M < Z$

(2) बाउले का विषमता गुणांक चुतर्थकों और मध्यिका पर आधारित होता है।

(3) खुले सिरे वाले श्रेणियों के सन्दर्भ में बाउले का विषमता गुणांक कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक से बेहतर होता है।

(4) एक सममित वितरण में $Q_3 - M = M - Q_1$ होता है।

(5) सभी वितरणों को धनात्मक अथवा ऋणात्मक विषमता के रूप में विभाजित किया जा सकता है।

(6) मध्यम शीर्ष वाला वक्र प्रसामान्य वक्र कहलाता है।

(7) मध्यम शीर्ष वाले वक्र के सन्दर्भ में $\beta_2 < 3$ होता है।

(8) द्वितीय केन्द्रिय परिघात प्रसरण को कहते हैं।

(9) एक सममित वितरण के सभी विषम परिघातों का मूल्य हमेशा शुन्य से अधिक होता है।

(10) चतुर्थ केन्द्रित परिघात पृथुशीर्षत्व की माप करता है।

III- निम्न के उत्तर दीजिए –

प्र0 1: विषमता से क्या अभिप्राय है? इसकी जाँच किस प्रकार से करते हैं?

प्र0 2: निम्न सकंकों के आधार पर कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

x	58	59	60	61	62	63	64	65
f	10	18	30	42	35	28	16	8

प्र0 3: निम्न संकों के आधार पर कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
f	150	140	100	80	80	70	30	14	0

प्र0 4: किसी बंटन में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक 0ण्40 है इसका प्रमाप विचलन 8 और माध्य 30 है। बंटन के बहुलक एवं मध्यका की गणना कीजिए।

प्र0 5: किसी बंटन में निम्न परिणाम प्राप्त हुए –

समान्तर माध्य = 45

मध्यका = 48

विषमता गुणांक = -0.4

बंटन के प्रमाप विचलन की गणना कीजिए

प्र0 6: निम्न समंकों से बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

Class Interval	40.36	36.32	32.28	28.24	24.20	20.16	16.12	12.8	8.4
Frequency	2	6	10	12	15	30	18	10	6

प्र0 7: निम्न समूहों में किसका वितरण अधिक सममित हैं ?

(i) माध्य = 22, मध्यिका = 24, मान विचलन = 10,

(ii) माध्य = 22, मध्यिका = 21, मान विचलन = 12

प्र0 8: यदि मध्यिका का मान 24 तथा माध्य का मान 26 हो तो समूह की विषमता धनात्मक होगी अथवा ऋणात्मक ?

प्र0 9: निम्नलिखित आंकड़ों की सहायता से विचरण – गुणांक तथा विषमता – गुणांक की गणना कीजिए ।

वर्ष	1910	'11	'12	'13	'14	'15	'16	'17	'18	'19
गेहूँ का मूल्य सूचकांक	83	87	93	109	124	126	130	118	105	104

प्र0 10: प्रथुशीर्षत्व की व्याख्या कीजिए। विषमता तथा प्रथुशीर्षत्व में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

प्र0 11: कार्ल पियर्सन के बीटा तथा गामा गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

प्र0 12: निम्न आवत्ति वितरण किस प्रकार का है –

(i) चपटे शीर्ष

(ii) नुकीले शीर्ष

X	0.10	10.20	20.30	30.40
f	1	3	4	2

10.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर :

I- वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1-(iii) 2-(i) 3-(ii) 4-(i) 5-(i) 6-(i) 7-(i) 8-(iii)

II- सही (T) अथवा गलत (F) चिन्हित करें –

1- (F) 2-(T) 3-(T) 4-(T) 5-(F) 6-(T)
7- (F) 8-(T) 9-(F) 10-(T)

III- निम्न के उत्तर दीजिए –

2- $[J = 0.228]$ 3- $[J = -0.6622]$ 4- $[M_0 = 26.8,\ M_e = 28.93]$ 5- $[\sigma = 22.5]$ 6- $[J_B = 0.188]$ 9- ($c.v = 4.4\,\%$ विषमता गणांक $= 0.953$) 12- (ii)

संदर्भ ग्रन्थ

- सुदामा सिंह, ओ0पी0 सिंह, वाई0 के0 सिंह ;2002 – अर्थषास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी – राधा पब्लिकेषन्स, नई दिल्ली।
- J.K. Sharma (2008) – Business Statistics, Dorling Kinderseley (India) Pvt. Ltd. (Pearson Education), Delhi.
- एस0एन0 लाल, एल0के0 चतुर्वेदी ;2010 – परिमाणात्मक विष्लेषण, षिव पब्लिषिंग हाउस, इलाहाबाद।

इकाई – 11 द्विचर आकड़ों का विश्लेषण

11.1 प्रस्तावना

किसी भी देश के आर्थिक, सामाजिक और वैज्ञानिक क्षेत्रो का अध्ययन करते वक्त हमें कई ऐसी श्रेणियां भी प्राप्त होती हैं, जिसमें की श्रेणी के प्रत्येक चर के दो या दो से अधिक मूल्य होते हैं। कभी–कभी इन दो या दो से अधिक संमक श्रेणियों में परस्पर सम्बन्ध भी पाया जाता है अर्थात्् एक श्रेणी के चर मूल्यों में परिवर्तन होने के परिणाम स्वरूप दूसरी श्रेणी के चर मूल्यों में भी परिवर्तन हो जाता है। जैसे की, किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन होने से उस वस्तु की माँगी गयी मात्रा में परिवर्तन हो जाता हैं।

अतः अब आपकों यह स्पष्ट हो गया होगा कि कुछ समंक श्रेणियां ऐसी भी होती है, जो एक दूसरे पर आश्रित होती है। एक श्रेणी के चर मूल्यों में परिवर्तन के परिणामस्वरूप दूसरी श्रेणी के चर मूल्यों में होने वाला परिवर्तन यह दर्शाता है कि दोनों चर परस्पर आश्रित है। दो समंक श्रेणियों के मध्य पायी जाने वाली, इस परस्पर आश्रितता के, इस सांख्यिकीय अध्ययन को ही द्विचर आकड़ों का विश्लेषण करना कहा जाता है। अतः अब आपकों यह समझ आ ही गया होगा कि सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन का विश्लेषण, द्विचर आकड़ों के अध्ययन के अन्तर्गत ही किया जाता है। सांख्यिकीय विश्लेषण की इन विधियों का उपयोग करके हम दो चरों के सम्बन्ध में उपलब्ध आकड़ों का विश्लेषण करके उन चरों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध की प्रकृति और सुदृढ़ता का संख्यात्मक माप कर सकते हैं। प्रतीपगमन के विश्लेषण से हमें दो चरों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध की प्रकृति का ज्ञान होता है।

सहसम्बन्ध के विश्लेषण से दो चरों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध की सुदृढ़ता का ज्ञान होता है। प्रतीपगमन विधि द्वारा एक चर के किसी ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का सम्भाव्य मूल्य का अनुमान लगाया जा सकता है। दो चर मूल्यों के सम्बन्ध का अध्ययन सरल सहसम्बन्ध या द्विचर सहसम्बन्ध विश्लेषण कहलाता है। दो या दो से अधिक स्वतंत्र चर मूल्यों के एक आश्रित चर पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन बहुगुणी सहसम्बन्ध विश्लेषण कहलाता है। इस इकाई में हम द्विचर आकड़ों के विश्लेषण की विधियो का ज्ञान प्राप्त करेगें। दो या अधिक स्वतंत्र चर मूल्यों और एक आश्रित चर मूल्य की स्थिति में सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए प्रयोग की जाने वाली विधियों का ज्ञान प्राप्त करने के उपरान्त् आप बहुगुणी–प्रतीपगमन का विश्लेषण आसानी से कर सकेगें।

11.2 उद्देश्य

अब तक आपने सांख्यिकीय विश्लेषण के अर्न्तगत जिन विधियों का अध्ययन किया है वे सभी विधियाँ एक चर तक ही सीमित थी। प्रस्तुत इकाई के अर्न्तगत हम द्विचर श्रेणियों का अध्ययन करेगें। जिसमें श्रेणी की प्रत्येक इकाई दो या अधिक चर मूल्य ग्रहण करती हैं। इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त् आप द्विचर आकड़ों का विश्लेषण कर सकेगें और प्राप्त ज्ञान का उपयोग करके आप :–

- ✓ द्विचर आकड़ों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध की जांच कर सकेगें।

- ✓ द्विचर आकड़ों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को गणितीय रूप में प्रस्तुत कर सकेगें।
- ✓ दो चरों में से एक चर का मूल्य व प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात होने पर दूसरे चर के सर्वोत्तम समभाव्य मूल्य का अनुमान लगा सकेगें।
- ✓ दो चरों के बीच सह विचरण की दिशा व मात्रा का संख्यात्मक माप कर सकेगें।
- ✓ आश्रित चर के अनुमानित मूल्यों के वास्तविक मूल्यों से विचलन को माप सकेगें।

11.3 द्विचर आकड़ें

आर्थिक, सामाजिक और वैज्ञानिक क्षेत्रो का अध्ययन करते समय जब अध्ययन की प्रत्येक इकाई के सम्बन्ध में दो चर–मूल्य एकत्र किये जाते हैं तो ऐसे आकड़ें द्विचर आकड़ें कहलाते हैं। इन आकड़ों के आधार पर तैयार की गयी श्रेणीं में प्रत्येक इकाई के दो चर मूल्य होते हैं। यदि हम कुछ वस्तुओं की कीमत और उसकी माँगी गयी मात्रा के आकड़ों को इकट्ठा करते हैं तो हमें ऐसी श्रेणी प्राप्त होती हैं। जिसमें प्रत्येक पद के दो मूल्य होते हैं– एक तो वस्तुओं की कीमत से सम्बन्धित और दूसरा उसकी माँगी गयी मात्रा से सम्बन्धित। इस प्रकार का बंटन, जिसमें श्रेणी की प्रत्येक इकाई दो चर मूल्य ग्रहण करती हैं जिसे द्विचर बंटन कहा जाता हैं। द्विचर श्रेणी की इकाई किसी भी प्रकृति की हो सकती है जैसे – बी.ए. कक्षा के छात्रों की परीक्षा में व्यष्टि अर्थशास्त्र और समष्टि अर्थशास्त्र के प्राप्तांको की सारणी या फिर किसी उत्पादक के विभिन्न वर्षों की उत्पादन मात्रा और औसत लागत की सारणी।

इस प्रकार द्विचर बंटन में हमें अवलोकनों के जोड़े प्राप्त होते हैं। इन आकड़ों को वर्गीकृत और अवर्गीकृत, दो प्रकार की सारणियो के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। जब दो चर मूल्य व्यक्तिगत सारणी के रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं तो उन्हें अवर्गीकृत आकड़ें कहा जाता है। अवलोकनों की संख्या अधिक होने पर एकत्रित आकड़ों से द्विचर आवृति सारणी भी बनाई जा सकती है। इसमें दो परस्पर सम्बन्धित खण्डित अथवा सतत् श्रेणियों की कोष्ठ आवृत्तियां व कुल आवृत्तियां इस प्रकार प्रस्तुत की जाती है कि दोनों का अर्न्तसम्बन्ध स्पष्ट हो जावे।

11.4 सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन

सांख्यिकी में 'सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त' अति महत्वपूर्ण है। सहसम्बन्ध के अन्तर्गत हम दो चर मूल्यों (variables) के बीच परस्पर आश्रितता का अध्ययन करते हैं। सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह ज्ञात होता है कि दो सम्बन्धित चर मूल्यों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो अथवा दो से अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है। नित्य के अनुभव से ऐसे कई उदाहरण हमारे सामने आते हैं जहाँ विभिन्न चर मूल्यों के बीच एक सम्बन्ध स्थापित होता है। उदाहरण के लिए, जैसे–जैसे बच्चों की ऊँचाई बढ़ती जाती है उनका भार भी बढ़ता है। एक समंक श्रेणी में परिवर्तित होने से दूसरी सम्बन्धित समंक–श्रेणी में भी परिवर्तन आता है। सामान्य अनुभव के

आधार पर हम जानते हैं कि हमारे देश में कृषि उत्पादन का स्तर मानसून वर्षा के ऊपर निर्भर करता है। अच्छी वर्षा वाले वर्षों में कृषि उत्पादन का स्तर अधिक होता है, परन्तु मानसून प्रतिकूल हो जाने पर कृषि उत्पादन का स्तर कम हो जाता है। इसी प्रकार हम जानते हैं कि जिन कृषि जोतों (agricultural holdings) में सिंचाई की व्यवस्था अच्छी होती है उनमें कृषि उत्पादन की प्रति हैक्टेयर उपज अधिक होती है, परन्तु असिंचित जोतों में प्रति हैक्टेयर उत्पादकता का स्तर निम्न होता है। इसी प्रकार चर–राशियों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों के बहुत से उदाहरण दिये जा सकते हैं।

सहसम्बन्ध में हमें दो चर मूल्यों के बीच आश्रितता का संख्यामक ज्ञान होता है। मोटे तौर पर हम यह कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध गुणांक दो श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध की मात्रा को तो बताता है परन्तु एक श्रेणी के निश्चित चर–मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के सम्बन्धित चर मूल्य का अनुमान नहीं बताता। प्रतीपगमन विश्लेषण द्वारा हम एक निश्चित चर मूल्य के सापेक्ष आश्रित श्रेणी के चर मूल्य का अनुमान लगा सकते हैं। यदि एक चर मूल्य का पता हो तो दूसरे चर मूल्य का पता जिस सांख्यिकीय रीति से हम लगाते हैं उसे प्रतीपगमन (Regression) कहते हैं।

यह सभी दो चर सम्बन्धों (Two variable relationship) के उदाहरण है। दो चर–मूल्यों के बीच कारण–परिणाम सम्बन्ध का सहसम्बन्ध की अपेक्षा प्रतीपगमन विश्लेषण से अधिक स्पष्टीकरण होता है। मुद्रा पूर्ति और सामान्य कीमत–स्तर में सहसम्बन्ध है। परन्तु हम सहसम्बन्ध के आधार पर यह नहीं कह सकते हैं कि एक निश्चित अवधि में मुद्रा पूर्ति कारण है और कीमत स्तर परिणाम। हो सकता है कि सामान्य कीमत स्तर कारण हो और मुद्रा पूर्ति परिणाम। प्रतीपगमन विश्लेषण में जो चर मूल्य दिया होता है उसे सदैव *X* (Independent variable) मानते हैं तथा जो चर मूल्य ज्ञात करना हो उसे *Y* (Dependent variable) मानते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि प्रतीपगमन विश्लेषण से 'कारण और परिणाम सम्बन्ध' स्पष्ट रूप से पता लगता है। इस प्रकार के सम्बन्ध दो से अधिक चरों के मध्य भी हो सकते हैं, जैसे – प्रति हैक्टेयर कृषि उपज की मात्रा सिँचाई की मात्रा पर निर्भर करती है, साथ ही यह उर्वरकों की मात्रा कीटनाशकों के प्रयोग, बीजों के किस्म इत्यादि पर भी निर्भर करती है। इसी प्रकार किसी वस्तु की माँग वस्तु के मूल्य, व्यक्तियों की आय, अभिरुचियों तथा अन्य वस्तुओं के मूल्यों पर निर्भर करती है। एक परिवार का उपभोग व्यय, परिवार की आय के अतिरिक्त परिवार के आकार, परिवार के सदस्यों की अभिरुचियाँ, परिवार का सामाजिक स्तर आदि पर निर्भर करता है।

11.5 सहसम्बन्ध विश्लेषण

अर्थशास्त्र के विद्यार्थी भली–भाँति जानते हैं कि उपभोग व्यय व्यक्ति की आय के ऊपर निर्भर करता है, उत्पादन की कुल लागत उत्पादन स्तर के ऊपर निर्भर करती है, वस्तु की पूर्ति बढ़ने से उसकी कीमत गिर जाती है लेकिन वस्तु की माँग बढ़ने पर उसकी कीमत बढ़ जाती है तथा देश में मुद्रा की पूर्ति की मात्रा बढ़ने से सामान्य कीमत स्तर में वृद्धि होगी। गाल्टन

ने अध्ययन किया कि लम्बे पिताओं के पुत्र भी सामान्य रूप से लम्बे होते हैं। जब दो चर–मूल्यों में कार्य कारण–सम्बन्ध (cause-effect relationship) हो तो वे सहसम्बन्धित कहलाते है।

जब कभी दो चर मूल्यों में ऐसा सम्बन्ध हो कि एक में परिवर्तन होने से दूसरे में भी परिवर्तन हो – एक में वृद्धि होने पर दूसरे में वृद्धि या कमी हो अथवा एक में कमी होने पर दूसरे में कमी या वृद्धि हो तो ये चर–मूल्य सह–सम्बन्धित कहलाते है। इस गुण को सह–सम्बन्ध (correlation) कहते हैं। एक चर मूल्य में अधिक परिवर्तन होने पर यदि दूसरे चर–मूल्य में भी अधिक परिवर्तन हो तो सह–सम्बन्ध की मात्रा अधिक होगी।

उपर्युक्त उदाहरणों में हमने दो चरों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों की चर्चा की। प्रायः सम्बन्ध तीन अथवा उससे अधिक चरों में भी हो सकते हैं – जैसे कृषि उत्पादन के क्षेत्र में किसी फसल की प्रति हैक्टेयर उत्पादकता, सिँचाई सुविधाओं के अतिरिक्त उर्वरकों की मात्रा, श्रम एवं पूँजी की मात्रा, बीजों की किस्म तथा कीटनाशकों के प्रयोग के उपर निर्भर करती है। किसी वस्तु की माँग–मात्रा वस्तु की कीमत के अतिरिक्त उपभोक्ता की आय, अन्य वस्तुओं की कीमतें, अभिरुचियों इत्यादि पर निर्भर करती है। इसी प्रकार किसी परिवार का वार्षिक उपभोग व्यय, वार्षिक आय के अतिरिक्त परिवार के आकार, परिवार के सदस्यों की अभिरुचियाँ, परिवार की सामाजिक प्रतिष्ठा इत्यादि पर निर्भर करेगा। इस प्रकार के सांख्यिकीय विश्लेषण को, जिसमें चरों की संख्या दो होती है द्विचरीय विश्लेषण (bivariate analysis) भी कहा जाता है तथा जिसमें चरों की संख्या तीन अथवा इससे अधिक होती है, उसे बहुचरीय विश्लेषण (multivariate analysis) कहा जाता है।

11.5.1 सहसम्बन्ध विश्लेषण का महत्त्व

सहसम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता भौतिक विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान, दोनों में ही पर्याप्त है, तथापि हम यहाँ केवल सामाजिक विज्ञान में सहसम्बन्ध अध्ययन की उपयोगिता की ही व्याख्या करेंगे।

(1) सहसम्बन्ध का अध्ययन निर्णयन लेने से सम्बन्धित अनिश्चितता के परास को कम करता है। सामाजिक विज्ञान, विशिष्टतया व्यावसायिक जगत में, पूर्वानुमान एक महत्त्वपूर्ण तत्व या परिघटना और सहसम्बन्ध अध्ययन सापेक्षतः अधिक विश्वसनीय पूर्वानुमानों के करने में हमारी मदद करता हैं।

(2) सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में सहायक होता है। यह हमें ऐसे चरों को निर्धारित करने में सहायता करता है जिन पर अन्य चर निर्भर रहते हैं। यह उन घटकों या कारकों के अध्ययन करने में सहायक होता है जिससे आर्थिक घटनाएँ प्रभावित होती है। उदाहरणार्थ, हम मूल्य वृद्धि अथवा निम्न उत्पादकता के उत्तरदायी कारकों को जान सकते हैं।

(3) सहसम्बन्ध अध्ययन हमें ऐसे कारकों की पहचान करने में मदद करता है जो एक बाधाग्रस्त आर्थिक स्थिति का स्थायीकरण कर सकता है।

(4) सहसम्बन्ध अध्ययन एक चर में संभाव्य परिवर्तन का सम्बंद्ध दूसरे चर में परिवर्तन की विशिष्ट राशि के साथ आकलन करने में हमारी मदद करता है। उदाहरणार्थ, सहसम्बन्ध अध्ययन कीमत में एक निश्चित राशि के परिवर्तन से माँग में परिवर्तन जानने में मदद कर सकता है। इस दशा में हम समाश्रयण विश्लेषण (regression analysis) की सहायता लेते हैं।

(5) विभिन्न चरों के बीच अन्तर–सम्बन्ध अध्ययन अनुसंधान संवर्द्धन करने तथा ज्ञान के नये क्षेत्र खोलने में बहुत ही सहायक उपकरण होते हैं।

11.5.2 सहसम्बन्ध गुणांक और उसका विस्तार (Coefficient of Correlation & Its Magnitude)

गैरेट के अनुसार, ''सहसम्बन्ध गुणांक दो चलराशियों में पाये जाने वाला ऐसा अनुपात है जिससे यह ज्ञात होता है कि एक चर में होने वाले परिवर्तन ज्ञात दूसरे चर पर किस मात्रा में प्रभाव डालते हैं अथवा किस मात्रा में उसका अनुसरण करते हैं।'' अतः स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणांक दो या अधिक प्रवृत्तियों के परिमाणात्मक (quantitative) सम्बन्ध को स्पष्ट करता है। वास्तव में यह एक प्रकार का सूचकांक (index) है।

सहसम्बन्ध की व्याख्या (interpretation of correlation) सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले यदि (+) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध धनात्मक (positive) है और यदि सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले (–) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध ऋणात्मक (negative) है। गिलफोर्ड ने सहसम्बन्ध की मात्रा का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया है :

सहसम्बन्ध गुणांक की मात्रा Quantity of Coefficient of Correlation	सम्बन्ध Relationship
$.00 \rightarrow \pm .20$	नगण्य (Negligible)
$\pm .21 \rightarrow \pm .40$	निम्न (Low)
$\pm .41 \rightarrow \pm .60$	साधारण (मध्यम) (Moderate)
$\pm .61 \rightarrow \pm .80$	उच्च (High)
$\pm .81 \rightarrow \pm .99$	अति उच्च (Very High)
± 1	पूर्ण सहसम्बन्ध (Perfect Correlation)

ऊपर दी हुई तालिका के आधार पर सहसम्बन्ध की व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि सहसम्बन्ध की मात्रा +.85 है तो यहा कहा जाएगा कि दी हुई चलराशियों में धनात्मक और बहुत उच्च सहसम्बन्ध है। धनात्मक सहसम्बन्ध में चलराशियाँ किस प्रकार से एक दूसरे से प्रभावित होती है, यह भी एक रोचक तथ्य है।

11.5.3 स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि (Spearman's Ranking Method)

कार्ल पियर्सन ने दो चर मूल्यों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट करने के लिए जो सूत्र दिया, वह हम स्पष्ट कर चुके हैं। बुद्धिमता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि ऐसे तथ्य हैं जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से अंकों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि गुणात्मक तथ्यों के बीच सम्बन्ध जानने के लिए कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र नहीं लगाया जा सकता। इन गुणात्मक तथ्यों के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए प्रसिद्ध सांख्यिक चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन (Charles Edward Spearman) ने एक विधि का प्रतिपादन सन् 1904 में किया। उन्हीं के नाम पर इस विधि को स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि कहते हैं। एक सौन्दर्य प्रतियोगिता में माना 10 प्रतियोगी भाग लेते हैं और तीन निर्णायक हैं। विभिन्न प्रतियोगिताओं को गुण की अधिकता के आधार पर ये तीनों निर्णायक अपने ढंग से पहला, दूसरा, तीसरा . . . इत्यादि क्रम प्रदान करते हैं। इन क्रमों के आधार पर ही हम सहसम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। माना हम यह जानना चाहते हैं कि इन तीन निर्णायकों में से ऐसे कौन से दो निर्णायक हैं जिनका सौन्दर्य–निर्णय लगभग समान है। यह समस्या कार्ल पियर्सन के सूत्र से हल नहीं हो सकती। हम जानते हैं कि विद्यार्थियों की योग्यता के जाँच के लिए परीक्षा पद्धति बनाई गई है, जिसमें विद्यार्थी प्रश्न–पत्र के उत्तर लिखते हैं और इन उत्तर–पुस्तिकाओं को परीक्षकों के पास भेज दिया जाता है। परीक्षक निर्धारित अधिकतम अंकों में से प्रत्येक उत्तर–पुस्तिका पर अंक देते हैं। अंक देने के लिए कोई निश्चित मापदण्ड नहीं होता यद्यपि मोटे तौर पर कुछ निर्देशों का पालन अवश्य करना होता है। इसी कारण हम सुनते है कि 'मैने कुछ नहीं लिखा और बहुत अच्छे अंक मिले' तथा 'मैने बहुत अच्छा लिखा और पता नहीं बहुत कम अंक मिले।' यह पद्धति दोषपूर्ण होने के कारण अब ग्रेड प्रणाली (grade system) को लाने पर बल दिया जा रहा है। योग्यता की जाँच भी कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र से ठीक प्रकार नहीं हो सकती, इसके लिए भी इसी विधि को अपनाना चाहिए। दो परीक्षकों की योग्यता जाँच की समानता देखने के लिए हम इसी कोटि अन्तर विधि द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। यहाँ श्रेणियों के पद–मूल्य ज्ञात न हों और उनका क्रम पता हो तो भी यह सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि में सबसे पहले x तथा y दोनों श्रेणियों के पद–मूल्यों को अलग– अलग कोटि–क्रम (rank) प्रदान किए जाते हैं। इसके बाद कोटि–क्रम अन्तर ज्ञात करके उसका वर्ग निकालते हैं और जोड़ लेते हैं। निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

जहाँ, $\rho(rho)$ = Rank correlation

D = Rank difference

N = Number of pairs

जब किसी श्रेणी में दो या दो से अधिक पद मूल्य बराबर आकार के हों तो उनके मूल्य क्रम निकालकर औसत निकाला जाता है तथा यही औसत क्रम प्रत्येक पद मूल्य के आगे रख दिया जाता हैं। ऐसा करने से गलती की सम्भावना रहती है। इसे समाप्त करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{N^3 - N}$$

जहाँ m उस कोटि अथवा कोटियों की बारम्बारता है जो एक से अधिक बार घटित होती है।

कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान '–1' से '+1' के बीच स्थिर होता है। r का मान ऋणात्मक अथवा धनात्मक होने पर चरों के बीच का सम्बन्ध भी ऋणात्मक अथवा धनात्मक होता है। r का मान जितना ही '+1' अथवा '–1' के निकट होगा उतना ही चरों के बीच का सहसम्बन्ध प्रबल (strong) होगा तथा r का मान यदि शून्य है अथवा शून्य के निकट है, तो चरों का सहसम्बन्ध नगण्य होगा अर्थात् सम्बन्ध चर एक दूसरे से स्वतंत्र (independent) होंगे।

11.6 प्रतीपगमन विश्लेषण

प्रतीपगमन सांख्यिकीय विश्लेषण की वह विधि है जिसके द्वारा एक चर के किसी ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का सम्भाव्य मूल्य प्रतीपगमन समीकरण की सहायता से अनुमानित किया जा सकता है। सांख्यिकी के आंग्ल भाषा के 'रिग्रेसन' (Regression) शब्द के लिए हिन्दी भाषा में 'समाश्रयण' शब्द का प्रयोग किया जाता है, यद्यपि कुछ लेखकों ने 'समाश्रयण' शब्द के स्थान पर 'प्रतीपगमन' शब्द प्रयोग किया है। जीव–विज्ञान और भू–विज्ञान में 'रिग्रेशन' शब्द के लिए 'प्रतिक्रमण' शब्द प्रयोग किया जाता है। प्रतीपगमन (या समाश्रयण) शब्द का अर्थ है, वापस लौटना या पीछे की ओर मुड़ना या घूमना (Stepping back or going back)। सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम सन् 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton) नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने अपने शोध लेख – ''पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन'' (Regression towards Mediocrity in Hereditary

Stature) में किया था। उक्त शोध–लेख में उन्होंने लगभग एक हजार पिताओं और उनके पुत्रों की ऊँचाई या कद में सम्बन्ध का अध्ययन किया और कुछ बहुत ही रोचक निष्कर्ष निकाला। ये निष्कर्ष है :

(i) लम्बे पिताओं के लम्बे और नाटे पिताओं के नाटे पुत्र होते हैं।

(ii) लम्बे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा कम होती है।

(iii) नाटे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा अधिक होती है।

(iv) गाल्टन ने यह पाया कि 'जाति (race) की माध्य लम्बाई से पिताओं की माध्य लम्बाई में विचलन की अपेक्षा जाति की माध्य लम्बाई से पुत्रों की माध्य लम्बाई में विचलन कम होता है। जब पिता माध्य लम्बाई से अधिक या कम लम्बे होते हैं तो पुत्रों की लम्बाई माध्य की ओर समाश्रयित (regress) या पीछे की ओर मुड़ जाती है।

11.6.1 न्यूनतम वर्ग विधि (**Method of Least Squares**)

मुक्तहस्त वक्र विधि से प्रतीपगमन रेखाओं के खींचने से सम्बन्धित कठिनाइयों का निराकरण करने के लिए *X* और *Y* श्रेणियों के संचालनों (movements) के बीच गणितीय सम्बन्ध स्थापित किया जाता है और *X* तथा *Y* श्रेणियों के सापेक्ष संचालनों या परिवर्तनों को निरूपित करने के लिए बीजगणितीय समीकरण प्राप्त किये जाते हैं।

ऐसी एक विधि न्यूनतम वर्ग विधि है। इस विधि में हम एक चर के दिए गए मानों और श्रेष्ठ आसंजन रेखा से उसके आकलित मानों के बीच विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम कर देते हैं। *Y* का *X* पर प्रतीपगमन रेखा वह रेखा है जो *X* के विशिष्ट मान के लिए *Y* के मान के लिए सर्वोपयुक्त आकलन प्रदान करती है और इसी प्रकार *X* का *Y* पर प्रतीपगमन रेखा वह रेखा है जो *Y* के विशिष्ट मान के लिए *X* के मान के लिए सर्वोपयुक्त आकलन प्रदान करती है।

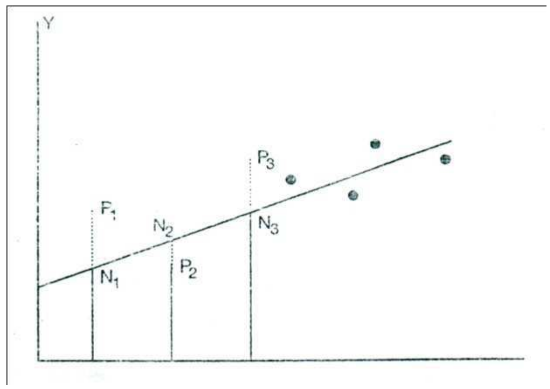
यदि *Y* के मानों को *Y* अक्ष (या उदग्र अक्ष) पर आलेखित किया जाता है तो *Y* का *X* पर प्रतीपगमन रेखा ऐसी होगी जो उदग्र विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करेंगी। इसी प्रकार यदि *X* के मानों को *X* अक्ष (या क्षैतिज अक्ष) पर आलेखित किया जाता है तो *X* का *Y* पर प्रतीपगमन रेखा ऐसी होगी जो क्षैतिजीय विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करेगी।

अर्थात् इस विधि द्वारा विक्षेप चित्र के माध्यम से एक ऐसी सर्वोत्तम प्रवृत्त रेखा खींची जाती है जिसके ऊपर आधे बिन्दु हों तथा नीचे आधे बिन्दु अर्थात् इस रेखा की तुलना सांख्यिकीय माध्य से कर सकते हैं जिसके दोनों ओर आँकड़ों का विचलन समान होता है, इसके लिए दो बाते निश्चित की जाती है।

(i) इस रेखा के प्रत्येक बिन्दु की ऊर्ध्वाधर दूरियों का जोड़ शून्य हो।

(ii) रेखा से प्रत्येक बिन्दु के वर्गांकित विचलन (अर्थात् ऊर्ध्वाधर दूरियों के वर्गों) का जोड़ न्यूनतम हो। इस प्रकार की विशेषताओं वाली रेखा को न्यूनतम वर्ग रेखा या प्रतीपगमन रेखा (regression line) कहते हैं।

निम्नलिखित विक्षेप चित्र द्वारा प्रतीपगमन रेखा को स्पष्टतः समझा जा सकता है –



चित्र से स्पष्ट है कि बिन्दु P_1, P_2, P_3 इत्यादि की, प्रतीपगमन रेखा से ऊर्ध्वाधर दूरिया क्रमशः P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3 इत्यादि है। अब प्रतीपगमन रेखा ऐसी खींची जाय कि

(1) $P_1N_1 + P_2N_2 + P_3N_3 + \ldots = 0$

तथा (2) $(P_1N_1)^2 + (P_2N_2)^2 + (P_3N_3)^2 + \ldots$ न्यूनतम हो।

इन विशेषताओं वाली प्रतीपगमन रेखा को खीचने के लिए निम्नलिखित दो सामान्य समीकरणों को हल किया जाता है।

$\Sigma Y = Na + b\,\Sigma X$ .... (1)

$\Sigma XY = a\,\Sigma X + b\Sigma X^2$ .... (2)

यहाँ Σ : चर *'X'* तथा *'Y'* आदि मानों का जोड़ है।

सूत्र में *'a'* तथा *'b'* अचर राशियाँ है, जिसमें *'a'* अचर अन्तः खण्ड है अर्थात् वह बिन्दु जिसे आसंजन रेखा कोटि अक्ष को स्पर्श करती है यदि *'a'* का मान धनात्मक हो तो आसंजन रेखा मूल बिन्दु से ऊपर उठी होती है तथा *'a'* का मान ऋणात्मक होने पर यह रेखा मूल बिन्दु से नीचे कोटि को स्पर्श करती है।

सूत्र में *'b'* अचर आसंजन रेखा की ढाल है जिसे प्रतीपगमन गुणांक भी कहा जाता है। इससे यह ज्ञात किया जा सकता है कि स्वतंत्र चर में इकाई परिवर्तन होने पर आश्रित चर में परिवर्तन कितना होगा? यदि *'b'* का मूल्य धनात्मक होता है तो आसंजन रेखा बाए से दाएं

ऊपर की ओर बढ़ती है किन्तु *‘b’* का मान ऋणात्मक होने पर यह रेखा बाएं से नीचे गिरती हुई होती है।

सामान्य समीकरणों में *X* तथा *Y* के मान ज्ञात करने के लिए आँकड़ों के आधार पर गणना की जाती है जिसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है –

11.6.2 प्रतीपगमन समीकरण (**Regression Equations**)

प्रतीपगमन समीकरण जिन्हें प्रायः *‘Estimating Equations’* भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखाओं के बीजगणितीय स्वरूप है। प्रतीपगमन रेखाओं की भांति ये समीकरण भी दो होते हैं –

(i) *X* का *Y* पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of *X* upon *Y*)

इसकी सहायता से *Y* (स्वतंत्र चर–मूल्य) के दिए हुए मूल्य के तत्संवादी *X* (आश्रित चर–मूल्य) का सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात किया जाता है तथा रेखाचित्र पर इस समीकरण के मूल्यों को प्रांकित करने से *X* की *Y* पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है।

(ii) *Y* का *X* पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of *Y* upon *X*)

इसके आधार पर *X* (स्वतंत्र चर–मूल्य) के तत्संवादी *Y* (आश्रित मूल्य) के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान लगाया जाता है और *Y* की *X* पर प्रतीपगमन रेखा खीची जाती है।

रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण, सरल रेखा के समीकरण (equation of the straight line) पर आधारित है। मूल रूप में ये निम्न प्रकार है –

(i) *X* का *Y* पर –– $X = a + by$

(ii) *Y* का *X* पर –– $Y = a + bx$

इस समीकरणों में *a* और *b* के मान स्थिरांक (constant) है जो प्रतीपगमन रेखाओं की स्थितियों को निर्धारित करते हैं। प्राचल (parameter) *‘a’* जिसे अन्तः खण्ड (intercepts) भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखा के स्तर (level) को प्रकट करता है अर्थात् मूल–बिन्दु (point of origin) से (कोटि–अक्ष पर) ऊपर या नीचे रेखा की दूरी। दूसरे शब्दों में, लेखाचित्र पर मूल–बिन्दु से कोटि– अक्ष पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श–बिन्दु का अन्तर ही प्राचल *‘a’* का मान होता है। जब *‘a’* का मान धनात्मक (+) होता है तो रेखा *Y* – अक्ष को मूल–बिन्दु ‘0’ से ऊपर की ओर स्पर्श करती है और जब *‘a’* का मान ऋणात्मक (–) होता है तो रेखा *Y* – अक्ष पर स्पर्श ‘0’ से नीचा होता है। यदि *‘a’* मान शून्य हो तो रेखा मूल–बिन्दु से ही आरम्भ होती है।

अन्तः खण्ड का बीजगणितीय माप –

प्रथम समीकरण (*X = a + bY*) में *a* = $\overline{X} - b\overline{Y}$

द्वितीय समीकरण (*Y = a + bX*) में *a* = $\overline{Y} - b\overline{X}$

$\overline{X}$ तथा $\overline{Y}$ समान्तर माध्यों के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं।

प्राचल *'b'* रेखा का ढलान या ढाल (slope of the line) को निर्धारित करता है। प्राचल *'b'* को प्रतीपगमन गुणांक (regression coefficient) भी कहते हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि *X* में इकाई का परिवर्तन (unit change) होने से *Y* में कितना परिवर्तन होगा और इसके विपरीत। यदि *'b'* का मान धनात्मक हो तो रेखा का ढलान बाएँ से दाएँ ऊपर की ओर होगा। *'b'* का मान ऋणात्मक होने पर रेखा का ढलान नीचे की ओर होगा। बीजगणितीय दृष्टि से *'b'* के मान को सहसमबन्ध–गुणांक, मानक विचलन व समान्तर माध्यों के रूप में निम्न प्रकार प्रकट किया जा सकता है :

प्रथम समीकरण *X* का *Y* पर –– $b_{xy} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

द्वितीय समीकरण *Y* का *X* पर –– $b_{yx} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

σ_x व σ_y क्रमशः *X* और *Y* श्रेणियों के प्रमाप विचलन (Standard Deviations) है तथा *r* दोनों श्रेणियों का सहसम्बन्ध गुणांक है। इस विश्लेषण के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है –

(i) *X* का *Y* पर प्रतीपगमन समीकरण

$$X = a + bY$$

$$X = (\overline{X} - b\overline{Y}) + bY$$

$$X - \overline{X} = bY - b\overline{Y}$$

$$\therefore \quad \left(X - \overline{X}\right) = b_{xy}\left(Y - \overline{Y}\right)$$

$$X - \overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(Y - \overline{Y}\right)$$

(ii) *Y* का *X* पर प्रतीपगमन समीकरण

$$Y = a + bX$$

$$Y = (\overline{Y} - b\overline{X}) + bX$$

$$Y - \overline{Y} = bX - b\overline{X}$$

$$\therefore \quad \left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$$

$$Y - \overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(X - \overline{X}\right)$$

11.6.3 प्रतीपगमन गुणांक (**Regression Co-efficients**)

प्रतीपगमन समीकरण में **‘*b*’** प्रतीपगमन गुणांक का प्रतीक है, जो स्वतंत्र चर मूल्य में परिवर्तन के कारण आश्रित चर–मूल्य में होने वाले परिवर्तन की ‘मात्रा’ तथा ‘दिशा’ को बतलाता है। दूसरे शब्दों में, यह इस बात को स्पष्ट करता है कि एक श्रेणी के चर–मूल्यों मं 1 का परिवर्तन (unit change) होने से दूसरी श्रेणी के चर–मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होगा। इस प्रकार, यह प्रतीपगमन रेखा के ढलान (slope of regression line) का बीजगणितीय माप है। प्रतीपगमन रेखाओं ओर समीकरणों की भाँति, प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं –

(I) *X* का *Y* पर प्रतीपगमन गुणांक (II) *Y* का *X* पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad\qquad b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

उपरोक्त गुणांकों के रूप में हम *X* तथा *Y* की दोनों प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं –

$$X - \overline{X} = b_{xy}\ (Y - \overline{Y}) \quad \text{तथा} \quad Y - \overline{Y} = b_{yx}\ (X - \overline{X})$$

11.7 सारांश

इस इकाई में हमने

1. द्विचर आकड़ों के बारे में पढ़ा और दो चरों कं पारस्परिक सम्बन्ध का अध्ययन करने की विधियों को जाना।
2. अवर्गीकृत द्विचर आकडें प्राप्त होने पर उनसे प्रतीपगमन समीकरण के निर्धारण, प्रतीपगमन रेखा निर्धारण, प्रतीपगमन रेखा के निर्माण एवं सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की विधियों को सीखा।
3. न्यूनतम वर्ग विधि के आधारभूत सिद्धान्त को जाना और इस विधि का द्विचर आकड़ों के विश्लेषण में उपयोग करने की पद्धतियों का ज्ञान प्राप्त किया।
4. प्रतीपगमन और सह–सम्बन्ध विश्लेषण के पारस्परिक सम्बन्ध का अध्ययन किया।
5. कोटि–क्रम आकड़ों में सह–सम्बन्ध का परिकलन करने की विधि को सीखा। स्पियरमैन की कोटि–अन्तर सह–सम्बन्ध गुणांक निकालने की विधि, व्यक्तिगत श्रेणियों में सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की सबसे सरल विधि है। इस विधि का प्रयोग गुणांक तथ्यों को ज्ञात करने के लिए किया जाता है। इस विधि में पद के सम्बन्ध में उपलब्ध पूरी सूचना का उपयोग नहीं किया जाता। इसमें पद–मूल्यों के निरपेक्ष मान का उतना महत्व नहीं है जितना उनके सापेक्ष या तुलनात्मक मानो का है। इसके अतिरिक्त समान क्रम होने पर गणना–क्रिया कुछ कठिन भी हो जाती है। अतः इस विधि का उपयोग सीमित क्षेत्र में ही किया जाता है।

11.8 अभ्यासार्थ प्रश्न

11.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

संदर्भ ग्रन्थ सूची

1. बंसल, डॉ0 एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डॉ0 डी0 आर0, (1978) *सांख्यिकी के मूल तत्त्व,* शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
2. सिंह, एस0 पी0, (1997) *सांख्यिकी–सिद्धान्त एवं व्यवहार,* एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
3. अवस्थी, जी0 डी0 एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) *सांख्यिकीय विश्लेषण,* भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
4. नागर, कैलाश नाथ, (2005) *सांख्यिकी के मूल तत्व,* मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
5. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.

इकाई – 12 सहसम्बन्ध विश्लेषण

11.11 प्रस्तावना
11.12 उद्देश्य
11.13 परिभाषा
11.14 उपयोगिता / महत्त्व
11.15 सहसम्बन्ध के प्रकार
11.16 सहसम्बन्ध गुणांक और उसका विस्तार
11.17 सहसम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ
12.7.1 बिन्दु रेखीय रीति (Graphic Method)
12.7.2 विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र (Scatter Diagram or Art Diagram)
12.7.3 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)
12.7.4 स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि (Spearman's Ranking Method)
11.18 सारांश
11.19 अभ्यासार्थ प्रश्न
11.20 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
11.21 संदर्भ ग्रन्थ सूची

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकी में 'सह–सम्बन्ध का सिद्धान्त' अति महत्वपूर्ण है। सहसम्बन्ध के अन्तर्गत हम दो चर मूल्यों (variables) के बीच परस्पर आश्रितता का अध्ययन करते हैं। इसके मूल–तत्वों का प्रतिपादन सर्वप्रथम फ्रांस के खगोल–शास्त्री ब्रावे (Bravais A.) ने सन् 1846 के लगभग किया था, परन्तु इस सिद्धान्त को विकसित करने व आधुनिक रूप देने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणिशास्त्री फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton) तथा कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को प्राप्त है। इन प्रसिद्ध वैज्ञानिकों ने प्राणिशास्त्र (Biology) तथा जनन–विद्या (Genetics) के क्षेत्र में सहसम्बन्ध के सिद्धान्त के आधार पर अनेक समस्याओं का वैज्ञानिक विश्लेषण किया है। सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें यह ज्ञात होता है कि दो सम्बन्धित चर मूल्यों में कितना और किस प्रकार का सम्बन्ध है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही प्रत्येक क्षेत्र में दो अथवा दो से अधिक घटनाओं के परस्पर सम्बन्धों का स्पष्टीकरण होता है।

नित्य के अनुभव से ऐसे कई उदाहरण हमारे सामने आते हैं जहाँ विभिन्न चर मूल्यों के बीच एक सम्बन्ध स्थापित होता है। उदाहरण के लिए, जैसे–जैसे बच्चों की ऊँचाई बढ़ती जाती है उनका भार भी बढ़ता है। एक समंक श्रेणी में परिवर्तित होने से दूसरी सम्बन्धित समंक–श्रेणी में भी परिवर्तन आता है। सामान्य अनुभव के आधार पर हम जानते हैं कि हमारे देश में कृषि उत्पादन का स्तर मानसून वर्षा के ऊपर निर्भर करता है। अच्छी वर्षा वाले वर्षों में कृषि उत्पादन का स्तर अधिक होता है, परन्तु मानसून प्रतिकूल हो जाने पर कृषि उत्पादन का स्तर कम हो जाता है। इसी प्रकार हम जानते हैं कि जिन कृषि जोतों (agricultural holdings) में सिंचाई की व्यवस्था अच्छी होती है उनमें कृषि उत्पादन की प्रति हैक्टेयर उपज अधिक होती है, परन्तु असिंचित जोतों में प्रति हैक्टेयर उत्पादकता का स्तर निम्न होता है। इसी प्रकार चर–राशियों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों के बहुत से उदाहरण दिये जा सकते हैं। अर्थशास्त्र के विद्यार्थी भली–भाँति जानते हैं कि उपभोग व्यय व्यक्ति की आय के ऊपर निर्भर करता है, उत्पादन की कुल लागत उत्पादन स्तर के ऊपर निर्भर करती है, वस्तु की पूर्ति बढ़ने से उसकी कीमत गिर जाती है लेकिन वस्तु की माँग बढ़ने पर उसकी कीमत बढ़ जाती है तथा देश में मुद्रा की पूर्ति की मात्रा बढ़ने से सामान्य कीमत स्तर में वृद्धि होगी। गाल्टन ने अध्ययन किया कि लम्बे पिताओं के पुत्र भी सामान्य रूप से लम्बे होते हैं। जब दो चर–मूल्यों में कार्य कारण–सम्बन्ध (cause-effect relationship) हो तो वे सहसम्बन्धित कहलाते है।

जब कभी दो चर मूल्यों में ऐसा सम्बन्ध हो कि एक में परिवर्तन होने से दूसरे में भी परिवर्तन हो – एक में वृद्धि होने पर दूसरे में वृद्धि या कमी हो अथवा एक में कमी होने पर दूसरे में कमी या वृद्धि हो तो ये चर–मूल्य सह–सम्बन्धित कहलाते है। इस गुण को सह–सम्बन्ध (correlation) कहते हैं। एक चर मूल्य में अधिक परिवर्तन होने पर यदि दूसरे चर–मूल्य में भी अधिक परिवर्तन हो तो सह–सम्बन्ध की मात्रा अधिक होगी।

उपर्युक्त उदाहरणों में हमने दो चरों के मध्य अन्तर्सम्बन्धों की चर्चा की। प्रायः सम्बन्ध तीन अथवा उससे अधिक चरों में भी हो सकते हैं – जैसे कृषि उत्पादन के क्षेत्र में किसी फसल की प्रति हैक्टेयर उत्पादकता, सिँचाई सुविधाओं के अतिरिक्त उर्वरकों की मात्रा, श्रम एवं पूँजी की मात्रा, बीजों की किस्म तथा कीटनाशकों के प्रयोग के उपर निर्भर करती है। किसी वस्तु की माँग–मात्रा वस्तु की कीमत के अतिरिक्त उपभोक्ता की आय, अन्य वस्तुओं की कीमतें, अभिरुचियों इत्यादि पर निर्भर करती है। इसी प्रकार किसी परिवार का वार्षिक उपभोग व्यय, वार्षिक आय के अतिरिक्त परिवार के आकार, परिवार के सदस्यों की अभिरुचियाँ, परिवार की सामाजिक प्रतिष्ठा इत्यादि पर निर्भर करेगा। इस प्रकार के सांख्यिकीय विश्लेषण को, जिसमें चरों की संख्या दो होती है द्विचरीय विश्लेषण (bivariate analysis) भी कहा जाता है तथा जिसमें चरों की संख्या तीन अथवा इससे अधिक होती है, उसे बहुचरीय विश्लेषण (multivariate analysis) कहा जाता है।

12.2 उद्देश्य (Objectives)

– सहसम्बन्ध को परिभाषित करना

– प्रकीर्ण आरेख, रेखाचित्र, कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक, कोटि–अन्तर से सहसम्बन्ध गुणांक, संगामी विचलन गुणांक इत्यादि का विवेचन करना।

12.3 परिभाषा (Definition)

सह–सम्बन्ध विश्लेषण की कुछ परिभाषाएँ :

(1) ''यदि दो या दो से अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती है जिससे एक में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवृत्ति पायी जाती है, तो वे राशियाँ सह–सम्बन्धित कहलाती है।'' – एल0 आर0 कॉनर

(2) ''यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में चर सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में उच्चावचन की प्रवृत्ति रखते है, तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझते हैं कि उनमें एक सम्बन्ध पाया जाता है। यह सम्बन्ध ही सहसम्बन्ध कहलाता है।''
– डब्ल्यू0 आई0 किंग

(3) ''सह–सम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय पृथक विशेषताओं के बीच पाये जाने वाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है जिसके अनुसार वे कुछ अंशों में साथ–साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति रखते है।'' – डेवनपोर्ट

(4) ''जब सम्बन्ध मात्रात्मक प्रकृति का होता है, तो उस सम्बन्ध को खोजने तथा मापन करने और उसे एक संक्षेप सूत्र में अभिव्यक्त करने का उपयुक्त सांख्यिकीय उपकरण सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।'' – क्रॉक्स्टन एवं काउडेन

(5) ''सहसम्बन्ध विश्लेषण चरों के बीच 'सम्बन्ध की मात्रा' को निर्धारित करने का प्रयास करता है।'' – या लुन चाऊ

(6) ''जब कभी आँकड़ों के दो या अधिक समूहों, वर्गों या श्रेणियों में कुछ निश्चित सम्बन्ध पाया जाता है तो वह सहसम्बन्ध कहलाता है।'' – बाडिंगटन

उपर्युक्त परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि पद 'सहसम्बन्ध' दो या दो से अधिक चरों के बीच सम्बन्ध का अध्ययन करने का संकेत करता है।

12.4 उपयोगिता/महत्त्व (**Utility/Importance**)

सहसम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता भौतिक विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान, दोनों में ही पर्याप्त है, तथापि हम यहाँ केवल सामाजिक विज्ञान में सहसम्बन्ध अध्ययन की उपयोगिता की ही व्याख्या करेंगे।

(1) सहसम्बन्ध का अध्ययन निर्णयन लेने से सम्बन्धित अनिश्चितता के परास को कम करता है। सामाजिक विज्ञान, विशिष्टतया व्यावसायिक जगत में, पूर्वानुमान एक महत्त्वपूर्ण तत्व या परिघटना और सहसम्बन्ध अध्ययन सापेक्षतः अधिक विश्वसनीय पूर्वानुमानों के करने में हमारी मदद करता हैं।

(2) सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में सहायक होता है। यह हमें ऐसे चरों को निर्धारित करने में सहायता करता है जिन पर अन्य चर निर्भर रहते हैं। यह उन घटकों या कारकों के अध्ययन करने में सहायक होता है जिससे आर्थिक घटनाएँ प्रभावित होती है। उदाहरणार्थ, हम मूल्य वृद्धि अथवा निम्न उत्पादकता के उत्तरदायी कारकों को जान सकते हैं।

(3) सहसम्बन्ध अध्ययन हमें ऐसे कारकों की पहचान करने में मदद करता है जो एक बाधाग्रस्त आर्थिक स्थिति का स्थायीकरण कर सकता है।

(4) सहसम्बन्ध अध्ययन एक चर में संभाव्य परिवर्तन का सम्बंद्ध दूसरे चर में परिवर्तन की विशिष्ट राशि के साथ आकलन करने में हमारी मदद करता है। उदाहरणार्थ, सहसम्बन्ध अध्ययन कीमत में एक निश्चित राशि के परिवर्तन से माँग में परिवर्तन जानने में मदद कर सकता है। इस दशा में हम समाश्रयण विश्लेषण (regression analysis) की सहायता लेते हैं।

(5) विभिन्न चरों के बीच अन्तर–सम्बन्ध अध्ययन अनुसंधान संवर्द्धन करने तथा ज्ञान के नये क्षेत्र खोलने में बहुत ही सहायक उपकरण होते हैं।

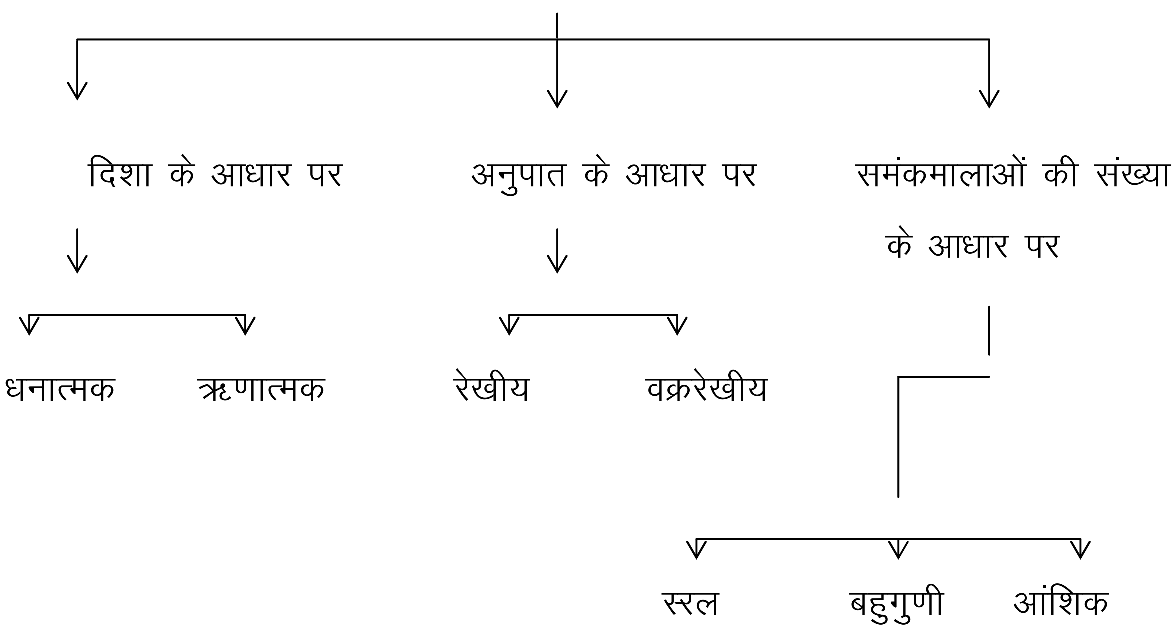
इस प्रकार सहसम्बन्ध अध्ययनों का विभिन्न उद्‌देश्यों के लिए व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है और उन्हें दो या अधिक चरों से सम्बन्धित सांख्यिकीय आँकड़ों के विस्तृत विश्लेषण और निर्वाचन के लिए बुनियादी उपकरण समझा जाता है।

12.5 सहसम्बन्ध के प्रकार (Types of Correlation)

विभिन्न आधारों को लेकर हम सहसम्बन्ध का वर्गीकरण निम्न प्रकार कर सकते हैं :

सहसम्बन्ध के प्रकार

(**KINDS OF CORRELATION**)



- **धनात्मक और ऋणात्मक सहसम्बन्ध** (Positive and Negative Correlation)

सहसम्बन्ध धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकते हैं। जब दो चरों में एक ही दिशा में परिवर्तन होता है अर्थात् एक में वृद्धि (या कमी) होने से दूसरे चर के मूल्यों में भी वृद्धि (या कमी) होती है तो ऐसा सहसम्बन्ध प्रत्यक्ष (direct) अथवा धनात्मक (positive) कहलाता है। इसके विपरीत, जब एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे सम्बद्ध चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन होते हैं तो उनका सहसम्बन्ध ऋणात्मक (negative), अप्रत्यक्ष या विलोम (inverse) कहलाता है। कुछ ऐसे आँकड़े होते हैं जिनमें सहसम्बन्ध सामान्यतः धनात्मक और कुछ ऐसे जिसमें सामान्यतः ऋणात्मक होता है, जैसे अन्य बाते सामान्य रहे तो मूल्य और पूर्ति में साधारण तौर पर धनात्मक सहसम्बन्ध होता है। जब मूल्य बढ़ता है तो पूर्ति भी बढ़ती है और जब मूल्य घटता है तो पूर्ति भी घटती है। मूल्य और माँग

में सहसम्बन्ध साधारणतः ऋणात्मक होता है। मूल्य में वृद्धि के साथ माँग घटती है और मूल्य के घटने के साथ माँग में साधारणतः वृद्धि होती है।

धनात्मक सहसम्बन्ध (**Positive Correlation**)

कीमत (price)	10	15	20	25
पूर्ति (supply)	100	110	115	130

अथवा

मूल्य या कीमत (price)	40	30	20	10
पूर्ति (supply)	150	140	115	100

ऋणात्मक सहसम्बन्ध (**Negative Correlation**)

मूल्य या कीमत (price)	10	15	20	25
माँग (demand)	100	90	80	60

अथवा

मूल्य या कीमत (price)	25	20	15	10
माँग (demand)	60	80	90	100

- **रेखीय तथा वक्ररेखीय सहसम्बन्ध** (Linear and Curvilinear Correlation)

परिवर्तनों के अनुपात के आधार पर सहसम्बन्ध रेखीय अथवा वक्र–रेखीय हो सकता है। यदि दो चर–मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात स्थायी (constant ratio) होता है तो उनका सहसम्बन्ध रेखीय (linear) कहलाता है; अर्थात्, यदि प्रत्येक बार मूल्य में 10 प्रतिशत की वृद्धि हो तो पूर्ति में 20 प्रतिशत वृद्धि, रेखीय सम्बन्ध का प्रमाण देगी। उनमें सम्बन्ध $y = a + bx$ के रूप में होगा। यह एक सीधी रेखा का समीकरण होता है। रेखीय सहसम्बन्ध वाले चर–मूल्यों को बिन्दुरेख पर प्रांकित करने से एक सरल रेखा बन जाती है। इस प्रकार का सह–सम्बन्ध भौतिक व पूर्ण विज्ञानों में पाया जाता है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में अधिकतर वक्ररेखीय सहसम्बन्ध पाया जाता है। जब दो चर–मूल्यों के परिवर्तनों का अनुपात अस्थिर (variable ratio) या परिवर्तनशील होता है तो उनका सहसम्बन्ध वक्र–रेखीय

(curvilinear) होता है। यदि मुद्रा की मात्रा में 10 प्रतिशत वृद्धि होने से कभी सामान्य कीमत स्तर में 5 प्रतिशत वृद्धि हो जाती है, कभी 6 प्रतिशत, कभी 9 प्रतिशत तो मुद्रा की मात्रा और सामान्य कीमत स्तर का सह–सम्बन्ध वक्ररेखीय कहलाएगा। ऐसी स्थिति में रेखाचित्र पर चर–मूल्यों को प्रांकित करने से एक वक्र रेखा बनेगी।

रेखीय या रैखिक सहसम्बन्ध (**Linear Correlation**)

x	2	4	6	8	10
y	5	10	15	20	25

अरेखीय या अरैखिक सहसम्बन्ध (**Non-Linear Correlation**)

x	2	4	6	8	10
y	5	8	12	15	25

- सरल, बहुगुणी एवं आंशिक सह–सम्बन्ध (Simple, Multiple and Partial Correlation)

स्वतंत्र तथा आश्रित चर–मूल्यों (variables) की संख्या के आधार पर सह–सम्बन्ध सरल, बहुगुणी या आंशिक हो सकता है। दो चर–मूल्यों के सह–सम्बन्ध को सरल सहसम्बन्ध (simple correlation) कहते हैं। इन चर–मूल्यों में से अनाश्रित या प्रधान चर–मूल्य (independent variable) को प्रमाप या आधार श्रेणी (subject series) कहा जाता है तथा दूसरा समंक–समूह आश्रित चर–मूल्य (dependent variable) या सम्बद्ध माला (relative series) कहलाता है।

जब तीन या अधिक कारकों, जैसे उत्पादन, वर्षा और खाद के उपयोग के बीच सम्बन्ध का साथ–साथ अध्ययन किया जाता है, तो इसे 'बहु सहसम्बन्ध (multiple correlation) कहते हैं। आंशिक सह–सम्बन्ध (partial correlation) के अन्तर्गत दो से अधिक चर–मूल्यों का अध्ययन किया जाता है परन्तु अन्य चर–मूल्यों के प्रभाव को स्थिर रखकर केवल दो चर–मूल्यों का पारस्परिक सम्बन्ध निकाला जाता है। उदाहरणार्थ, यदि वर्षा की मात्रा और तापक्रम दोनों के गैंहू की उपज पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाए तो वह बहुगुणी सहसम्बन्ध कहलाएगा। इसके विपरीत यदि एक स्थिर तापक्रम में वर्षा की मात्रा और गैंहू की उपज के सम्बन्ध का विवेचन किया जाये तो यह आंशिक सहसम्बन्ध कहलाएगा।

12.6 सहसम्बन्ध गुणांक और उसका विस्तार (Coefficient of Correlation & Its Magnitude)

गैरेट के अनुसार, ''सहसम्बन्ध गुणांक दो चलराशियों में पाये जाने वाला ऐसा अनुपात है जिससे यह ज्ञात होता है कि एक चर में होने वाले परिवर्तन ज्ञात दूसरे चर पर किस मात्रा में प्रभाव डालते हैं अथवा किस मात्रा में उसका अनुसरण करते हैं।'' अतः स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणांक दो या अधिक प्रवृत्तियों के परिमाणात्मक (quantitative) सम्बन्ध को स्पष्ट करता है। वास्तव में यह एक प्रकार का सूचकांक (index) है।

सहसम्बन्ध की मात्रा +1 से –1 तक होती है अर्थात् सहसम्बन्ध कभी भी 1 से अधिक नहीं होता है चाहे यह धनात्मक हो या ऋणात्मक। जब सहसम्बन्ध की मात्रा +1 आती है तो पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (perfect positive correlation) होता है और जब सहसम्बन्ध की मात्रा –1 होती है तो इसे पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (perfect negative correlation) कहते हैं। लेकिन समाज विज्ञानों (social sciences) से सम्बन्धित चल राशियों में पूर्ण ऋणात्मक अथवा धनात्मक सहसम्बन्ध नहीं आता है। सहसम्बन्ध की मात्रा को निम्न प्रकार से भी प्रदर्शित किया जा सकता है :

–1, –.9, –.8, –.7, –.6, –.5, –.4, –.3, –.2, –.1, 0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9

$\xleftarrow{\quad - \quad}$ | $\xrightarrow{\quad + \quad}$

सहसम्बन्ध की व्याख्या (interpretation of correlation) सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले यदि (+) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध धनात्मक (positive) है और यदि सहसम्बन्ध की मात्रा से पहले (–) चिन्ह आता है तो हम कहेंगे कि सहसम्बन्ध ऋणात्मक (negative) है। गिलफोर्ड ने सहसम्बन्ध की मात्रा का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया है :

सहसम्बन्ध गुणांक की मात्रा Quantity of Coefficient of Correlation	सम्बन्ध Relationship
$.00 \rightarrow \pm .20$	नगण्य (Negligible)
$\pm .21 \rightarrow \pm .40$	निम्न (Low)
$\pm .41 \rightarrow \pm .60$	साधारण (मध्यम) (Moderate)

$\pm$ .61 $\rightarrow$ $\pm$ .80	उच्च (High)
$\pm$ .81 $\rightarrow$ $\pm$ .99	अति उच्च (Very High)
$\pm$ 1	पूर्ण सहसम्बन्ध (Perfect Correlation)

ऊपर दी हुई तालिका के आधार पर सहसम्बन्ध की व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि सहसम्बन्ध की मात्रा +.85 है तो यहा कहा जाएगा कि दी हुई चलराशियों में धनात्मक और बहुत उच्च सहसम्बन्ध है। धनात्मक सहसम्बन्ध में चलराशियाँ किस प्रकार से एक दूसरे से प्रभावित होती है, यह भी एक रोचक तथ्य है।

12.7 सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ (**Methods of Studying Correlation**)

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ हैं –

12.7.1 बिन्दु रेखीय रीति (Graphic Method)

12.7.2 विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र (Scatter Diagram or Art Diagram)

12.7.3 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

12.7.4 स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि (Spearman's Ranking Method)

12.7.1 बिन्दु रेखीय रीति (**The Graphic Method**)

इस रीति के अनुसार हम सहसम्बन्ध का अनुमान समय, स्थान, क्रम संख्या आदि को X-axis पर और दोनों आश्रित समंकमालाओं को Y-axis पर अंकित करते हैं। इस विधि से सहसम्बन्ध की मात्रा का ज्ञान नहीं होता बल्कि इसकी दिशा और मात्रा का अनुमान किया जाता है। दोनों श्रेणियों के बिन्दुरेख विपरीत दिशाओं में उतार–चढ़ाव को प्रदर्शित करें तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। यदि दोनों श्रेणियों के परिवर्तनों की प्रवृत्ति उसी दिशा या विपरीत दिशाओं में न दिखाई दे तो कोई सहसम्बन्ध नहीं होगा।

उदाहरण (**Illustration**) : 1

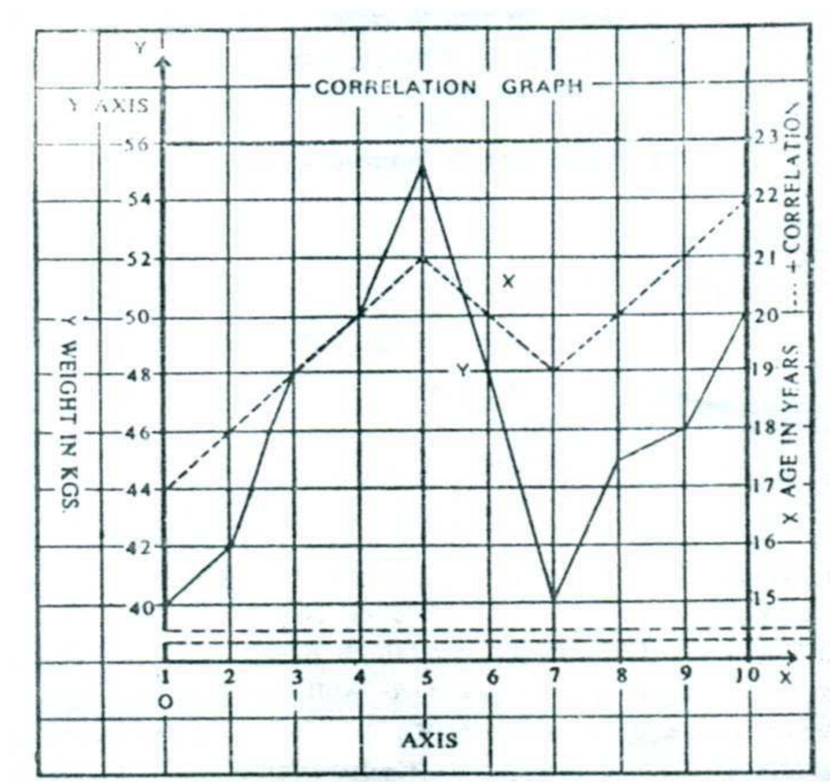
निम्न आँकड़ों से एक सहसम्बन्ध बिन्दु रेखाचित्र बनाइए :

Draw a correlation graph from the following:

उम्र (वर्षों में) Age in Years	17	18	19	20	21	20	19	20	21	22
वनज (कि0 ग्रा0 में) Weight in Kgs.	40	42	48	50	55	48	40	45	46	50

क्या उम्र एवं वनज में कोई सहसम्बन्ध है?

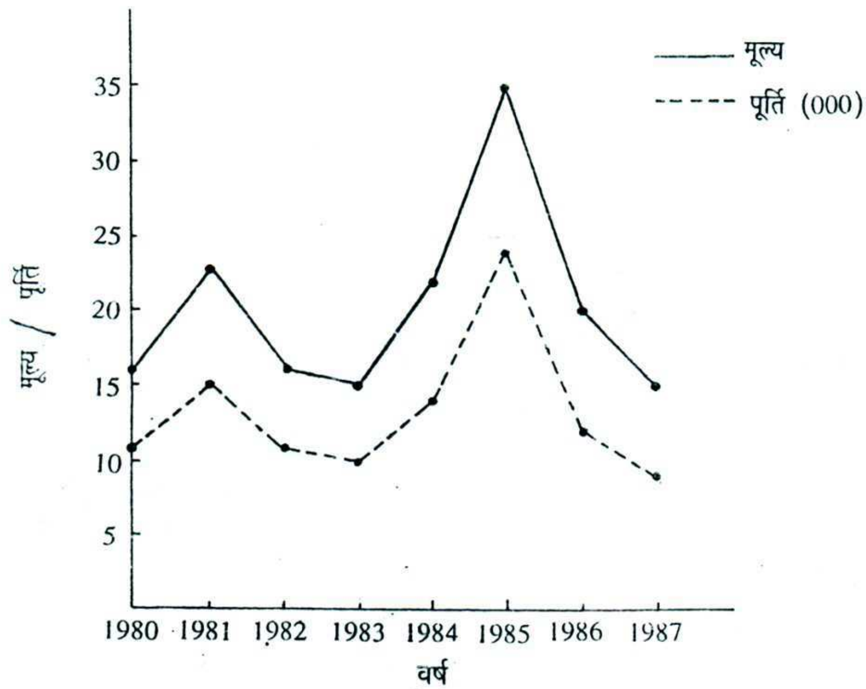
Is there any correlation in age and weight?



उदाहरण (**Illustration**) : 2

मूल्य तथा वस्तु की पूर्ति के सम्बन्ध में नीचे दिये गये आँकड़ों के आधार पर ग्राफिक विधि से मूल्य तथा पूर्ति के बीच सहसम्बन्ध पर प्रकाश डालिए।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
मूल्य प्रति क्विंटल	16	23	16	15	22	35	20	15
पूर्ति क्विंटल	11000	15000	11000	10000	14000	24000	12000	9000

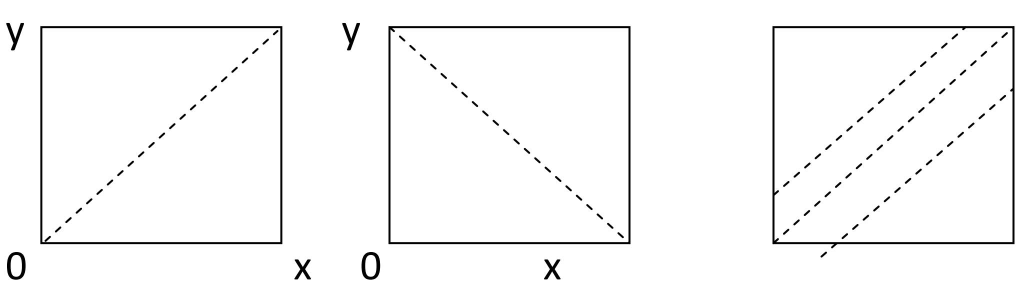


स्पष्ट है कि दोनों समंकमालाओं के बीच सहसम्बन्ध है।

12.7.2 विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र (Scatter Diagram or Art Diagram)

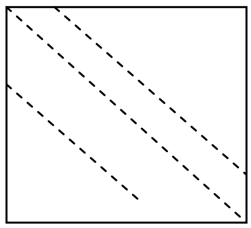
इस विधि से भी सह–सम्बन्ध की मात्रा का ज्ञान नहीं होता, बल्कि इसकी दिशा और मात्रा का अनुमान किया जाता है। इस रीति में स्वतंत्र चर मूल्यों (*x*) को X-axis पर तथा आश्रित चर मूल्यों (*y*) को Y-axis पर अंकित किया जाता है। इस प्रकार *x* तथा *y* दोनों समंकमालाओं के जितने पदयुग्म (pair of values) होते हैं उतने ही बिन्दु रेखाचित्र पर अंकित कर दिए जाते हैं। इस प्रकार के चित्र को ही विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र कहते हैं।

निम्न पाँच चित्रों की सहायता से हम सह–सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान लगा सकते हैं : (i) (ii) (iii)

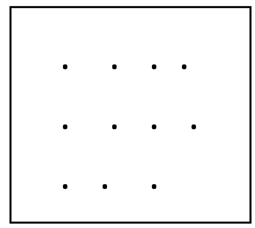


$r = +1$ $r = -1$ Limited Positive

(iv) (v)



Limited Negative



No Correlation

उदाहरण (Illustration) : 3

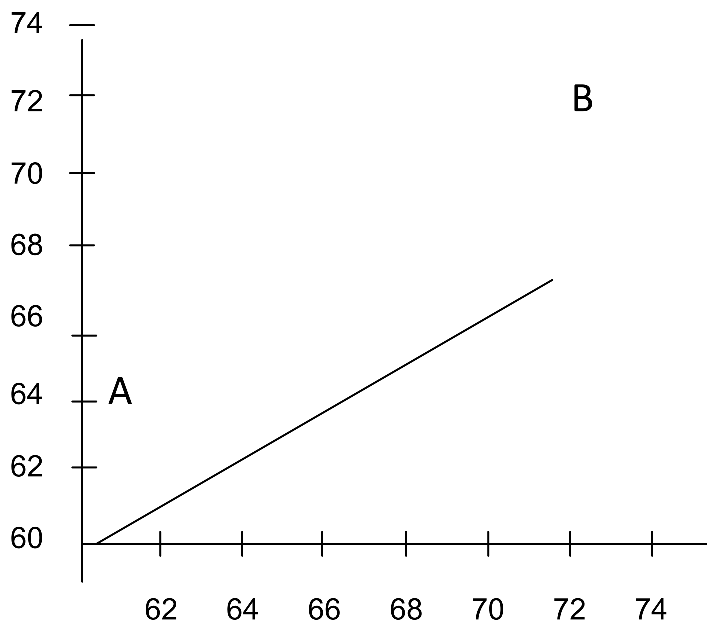
निम्नलिखित सारिणी में 12 पिता तथा उनके अग्रज पुत्रों के भार सम्बन्धी आँकड़े प्रदर्शित हैं –

पिता का भार (Kg)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
पुत्र का भार (Kg)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

आँकड़ों को विक्षेप चित्र के द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

दिए हुए आँकड़ों में प्रथम, पिता तथा पुत्र के भार क्रमशः 65 तथा 68 कि0ग्रा0 है। इन्हें ग्राफ पर बिन्दु के रूप में अंकित किया जाता है। तत्पश्चात् द्वितीय पिता तथा पुत्र के भारों को ग्राफ पर बिन्दु के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। इसी प्रकार अन्य पिता तथा पुत्रों के भारों को ग्राफ पर विभिन्न बिन्दुओं के रूप में अंकित कर लिया जाता है। इन बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ AB (trend path) दोनों चर राशियों के मध्य सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है।

नीचे चित्र में AB अंकित बिन्दुओं का प्रवृत्ति पथ है। अन्य शब्दों में सम्बन्धित चर राशियों के बीच रेखीय सम्बन्ध है।



विक्षेप चित्र की भाषा में सहसम्बन्ध प्रवृत्ति पथ से विक्षेप बिन्दुओं (scatter points) की निकटता की माप करता है। यदि सभी विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ पर स्थित हैं तो ऐसी स्थिति में चरराशियों के मध्य पूर्ण सहसम्बन्ध (perfect correlation) होगा तथा फलनात्मक सम्बन्ध (प्रस्तुत उदाहरण में सरल रेखा AB) दिये हुए समंक को पूर्ण रूप से प्रदर्शित करेगा। परन्तु यदि विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ के दोनों ओर बिखरे हुए हैं तो ऐसी स्थिति में चरराशियों के मध्य अपूर्ण सहसम्बन्ध (imperfect correlation) होगा अर्थात् प्रवृत्ति पथ 'AB' चर राशियों के मध्य सम्बन्ध को पूर्ण रूप से प्रदर्शित नहीं करेगा। विक्षेप बिन्दुओं के प्रवृत्ति पथ के सन्निकट होने पर यह सहसम्बन्ध प्रबल (strong correlation) होगा तथा यदि विक्षेप बिन्दु प्रवृत्ति पथ के दोनों ओर दूर–दूर तक फैले हुए हैं, तो ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध निर्बल (weak correlation) होगा।

12.7.3 कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक (**Karl Pearson's Coefficient of Correlation**)

सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की यह सर्वश्रेष्ठ विधि है क्योंकि इससे सहसम्बन्ध का संख्यात्मक माप भी प्राप्त होता है। समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित इस रीति में गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता है। इस रीति का का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने सन् 1890 में प्राणिशास्त्र की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए किया था। कार्ल पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणक निम्न मात्राओं पर आधारित है :

(i) दोनों श्रेणियों में रेखीय सम्बन्ध है।

(ii) समंकमाला को प्रभावित करने वाले स्वतंत्र कारणों में परस्पर कारण व प्रभाव का सम्बन्ध होता है।

(iii) सह–सम्बन्धित श्रेणियों पर अनेक कारणों से सामानता आ जाती है।

कार्ल पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणांक की प्रमुख विशेषताएँ निम्न है :

(a) यह गुणांक श्रेणी के सभी पदों पर आधारित है।

(b) इससे सह–सम्बन्ध की दिशा ज्ञात हो जाती है।

(c) चूँकि यह गुणांक समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित है, इसलिए अनेक बीजगणितीय गुणयुक्त है।

(d) इसको ज्ञात करने के लिए दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य निकाल कर विचलनों की गणना की जाती है और इसके बाद इनका गुणनफल निकाल कर उसके जोड़ में मूल्यों की संख्या से भाग दिया जाता है। इसे सह–विचलन (Co-variance) कहते हैं। इस विधि में प्रयोग किया जाने वाला सूत्र इस प्रकार है –

$$r = \frac{\sum dx.dy}{N\sigma_x.\sigma\, y}$$

जहाँ – r = सहसम्बन्ध गुणांक

dx = x के मानों का उसके माध्य ($\overline{X}$) से विचलन

dy = y के मानों का उसके माध्य ($\overline{Y}$) से विचलन

σ_x = x समंक माला का प्रमाप विचलन

σ_y = y समंक माला का प्रमाप विचलन

N = पदों की संख्या

सूत्र से स्पष्ट है कि दो समंक मालाओं के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम प्रत्येक समंक माला का माध्य ($\overline{X}$ एवं $\overline{Y}$) ज्ञात करते हैं। इसके बाद प्रत्येक समंक माला के सभी पदों का उनके माध्य से विचलन ज्ञात कर लेते हैं, जिन्हें dx एवं dy द्वारा व्यक्त किया जाता है। फिर प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए विचलनों dx तथा dy का वर्ग (dx^2 एवं dy^2) करके उनका अलग– अलग योग (Σdx^2 एवं Σdy^2) ज्ञात कर लेते हैं। इसके

अतिरिक्त विचलनों *dx* एवं *dy* का गुणनफल करके उनका योग $\Sigma(dx.dy)$ निकाल लिया जाता है। उपरोक्त सूत्र में –

$\frac{\sum(dx.dy)}{N}$ को सह–विचरण (co-variance) कहते हैं।

उदाहरण (**Illustration**) : 4

सन् 2008 की परीक्षा में दस विद्यार्थियों द्वारा अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी में पाये गये प्राप्तांकों का विवरण इस प्रकार है –

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
प्राप्तांक (अर्थशास्त्र)	47	57	58	60	62	67	70	71	76	82
प्राप्तांक (सांख्यिकी)	56	50	47	60	62	64	65	70	74	82

हल : निम्न सारणी में अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों को *'x'* एवं सांख्यिकी के प्राप्तांकों को *'y'* के द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

विद्यार्थी	प्राप्तांक (x)	अर्थ0 के प्राप्तांकों का माध्य (65) से विचलन (dx)	dx^2	प्राप्तांक (y)	सांख्य0 प्राप्तांकों का माध्य (63) से विचलन dy	dy^2	$dx.dy$
A	47	–18	324	56	–7	49	126
B	57	–8	64	50	–13	169	104
C	58	–7	49	47	–16	256	112
D	60	–5	25	60	–3	9	15
E	62	–3	9	62	–1	1	3
F	67	2	4	64	1	1	2
G	70	5	25	65	2	4	10
H	71	6	36	70	7	49	42
I	76	11	121	74	11	121	121
J	82	17	289	82	19	361	323

N=10	650		946	630		1020	858

अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों का औसत –

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{650}{10} = 65$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{946}{10}} = \sqrt{94.6} \cong 9.7$$ (लगभग 9.7)

सांख्यिकी के प्राप्तांकों का औसत –

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{630}{10} = 63$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}} = \sqrt{\frac{1020}{10}} = \sqrt{102} \cong 10.1$$

अब सहसम्बन्ध गुणांक $r = \dfrac{\sum (dx.dy)}{N\sigma_x.\sigma_y}$

$$= \frac{858}{10(9.7)(10.1)}$$

$$= \frac{858}{979.7} = 0.88$$ लगभग

अतः अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के प्राप्तांकों के मध्य उच्च धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

अन्य शब्दों में जिन विद्यार्थियों ने सांख्यिकी में उच्च अंक प्राप्त किए है उनके अर्थशास्त्र में भी उच्च अंक है।

कार्ल पियर्सन के उपरोक्त सूत्र को ध्यानपूर्वक देखने से हम पाते हैं कि यदि इस सूत्र को एक अन्य रूप में लिखा जाय तो प्रत्येक समंक माला का प्रमाप विचलन निकालने की आवश्यकता नहीं पड़ती है एवं सहसम्बन्ध गुणांक की गणना पहले की अपेक्षा सरलता से हो जाती है।

कार्ल पियर्सन के सूत्र का सरलीकृत रूप –

$$r = \frac{\sum (dx.dy)}{N\sigma_x.\sigma_y}$$

$$= \frac{\sum(dx.dy)}{N \times \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} \times \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}}} = \frac{\sum(dx.dy)}{N \times \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} \times \frac{\sum dy^2}{N}}}$$

$$= \frac{\sum(dx.dy)}{\frac{N}{N}\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}} = \frac{\sum(dx.dy)}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$$

अब इस सूत्र में केवल $\sum(dx.dy), \sum dx^2$ एवं $\sum dy^2$ का मान रखकर सहसमबन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। जैसे उदाहरण 5 के लिए –

$$r = \frac{\sum(dx.dy)}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$$

$$= \frac{858}{\sqrt{(946)(1020)}} = \frac{858}{\sqrt{964920}} = \frac{858}{982} = 0.88 \text{ (लगभग)}$$

उपर्युक्त सूत्रों का दोष यह है कि यदि *'x'* तथा *'y'* श्रृंखलाओं के माध्यों के मान दशमलव (Decimals) में आते हैं तो इनके द्वारा सहसम्बन्ध की गणना की क्रिया अत्यंत जटिल हो जाती है।

अतः X तथा Y के मूल्यों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग अधिक व्यावहारिक होता है –

$$r = \frac{N\sum xy - \sum x.\sum y}{\sqrt{\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}\,\{N\sum y^2 - (\sum y)^2\}}}$$

यह सूत्र गणना की दृष्टि से काफी सरल है। इसका कारण यह है कि इस सूत्र के अन्तर्गत सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए न तो हमें ***x*** एवं ***y*** के माध्यों को ज्ञात करना पड़ता है और न ही माध्य से विचलनों (***dx*** एवं ***dy***) अथवा प्रमाप विचलनों (***x*** व ***y***) की गणना करनी पड़ती है।

प्रस्तुत उदाहरण में उपर्युक्त सूत्र के द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न सारिणी के माध्यम से की गयी है।

12.7.4 स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि (**Spearman's Ranking Method**)

कार्ल पियर्सन ने दो चर मूल्यों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट करने के लिए जो सूत्र दिया, वह हम स्पष्ट कर चुके हैं। बुद्धिमता, सुन्दरता, स्वास्थ्य आदि ऐसे तथ्य हैं जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से अंकों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं

कि गुणात्मक तथ्यों के बीच सम्बन्ध जानने के लिए कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र नहीं लगाया जा सकता। इन गुणात्मक तथ्यों के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए प्रसिद्ध सांख्यिक चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन (Charles Edward Spearman) ने एक विधि का प्रतिपादन सन् 1904 में किया। उन्हीं के नाम पर इस विधि को स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि कहते हैं। एक सौन्दर्य प्रतियोगिता में माना 10 प्रतियोगी भाग लेते हैं और तीन निर्णायक हैं। विभिन्न प्रतियोगिताओं को गुण की अधिकता के आधार पर ये तीनों निर्णायक अपने ढंग से पहला, दूसरा, तीसरा . . . इत्यादि क्रम प्रदान करते हैं। इन क्रमों के आधार पर ही हम सहसम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। माना हम यह जानना चाहते हैं कि इन तीन निर्णायकों में से ऐसे कौन से दो निर्णायक हैं जिनका सौन्दर्य–निर्णय लगभग समान है। यह समस्या कार्ल पियर्सन के सूत्र से हल नहीं हो सकती। हम जानते हैं कि विद्यार्थियों की योग्यता के जाँच के लिए परीक्षा पद्धति बनाई गई है, जिसमें विद्यार्थी प्रश्न–पत्र के उत्तर लिखते हैं और इन उत्तर–पुस्तिकाओं को परीक्षकों के पास भेज दिया जाता है। परीक्षक निर्धारित अधिकतम अंकों में से प्रत्येक उत्तर–पुस्तिका पर अंक देते हैं। अंक देने के लिए कोई निश्चित मापदण्ड नहीं होता यद्यपि मोटे तौर पर कुछ निर्देशों का पालन अवश्य करना होता है। इसी कारण हम सुनते है कि 'मैने कुछ नहीं लिखा और बहुत अच्छे अंक मिले' तथा 'मैने बहुत अच्छा लिखा और पता नहीं बहुत कम अंक मिले।' यह पद्धति दोषपूर्ण होने के कारण अब ग्रेड प्रणाली (grade system) को लाने पर बल दिया जा रहा है। योग्यता की जाँच भी कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सूत्र से ठीक प्रकार नहीं हो सकती, इसके लिए भी इसी विधि को अपनाना चाहिए। दो परीक्षकों की योग्यता जाँच की समानता देखने के लिए हम इसी कोटि अन्तर विधि द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक निकालते हैं। यहाँ श्रेणियों के पद–मूल्य ज्ञात न हों और उनका क्रम पता हो तो भी यह सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि में सबसे पहले x तथा y दोनों श्रेणियों के पद–मूल्यों को अलग– अलग कोटि–क्रम (rank) प्रदान किए जाते हैं। इसके बाद कोटि–क्रम अन्तर ज्ञात करके उसका वर्ग निकालते हैं और जोड़ लेते हैं। निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

जहाँ, ρ(*rho*) = Rank correlation

D = Rank difference

N = Number of pairs

जब किसी श्रेणी में दो या दो से अधिक पद मूल्य बराबर आकार के हों तो उनके मूल्य क्रम निकालकर औसत निकाला जाता है तथा यही औसत क्रम प्रत्येक पद मूल्य के आगे रख

दिया जाता हैं। ऐसा करने से गलती की सम्भावना रहती है। इसे समाप्त करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\rho = 1 - \frac{6[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{N^3 - N}$$

जहाँ *m* उस कोटि अथवा कोटियों की बारम्बारता है जो एक से अधिक बार घटित होती है।

रेखीय सहसम्बन्ध गुणांक की भाँति, कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान भी '–1' से '+1' के बीच स्थिर होता है। *r* का मान ऋणात्मक अथवा धनात्मक होने पर चरों के बीच का सम्बन्ध भी ऋणात्मक अथवा धनात्मक होता है। *r* का मान जितना ही '+1' अथवा '–1' के निकट होगा उतना ही चरों के बीच का सहसम्बन्ध प्रबल (strong) होगा तथा *r* का मान यदि शून्य है अथवा शून्य के निकट है, तो चरों का सहसम्बन्ध नगण्य होगा अर्थात् सम्बन्ध चर एक दूसरे से स्वतंत्र (independent) होंगे।

उदाहरण (**Illustration**) : 7

दो अध्यापकों द्वारा 8 विद्यार्थियों का मूल्यांकन नीचे दिया गया है –

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7	8
पहला अध्यापक	8	7	3	6	4	1	5	2
दूसरा अध्यापक	5	8	1	6	4	2	7	3

जहाँ तक 8 विद्यार्थियों के मूल्यांकन का प्रश्न है, दोनों अध्यापक किस हद तक एक दूसरे से सहमत है?

हल – उपर्युक्त प्रश्न में दो अध्यापकों द्वारा निर्धारित '8' विद्यार्थियों की कोटियों (ranks) को प्रदर्शित किया जाता है। दोनों अध्यापकों के मूल्यांकन में समानता का परीक्षण करने के लिए हम कोटि–अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान ज्ञात करेंगे। इसका सूत्र निम्न प्रकार है –

$$r = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

इसकी गणना को निम्न सारिणी की सहायता से दर्शाया गया है –

विद्यार्थी क्रम संख्या	निर्धारित कोटि		कोटि अन्तर	
	पहला अध्यापक	दूसरा अध्यापक	*D*	*D*^{2}
1	8	5	3	9
2	7	8	–1	1
3	3	1	2	4
4	6	6	0	0
5	4	4	0	0
6	1	2	–1	1
7	5	7	–2	4
8	2	3	–1	1
N = 8				20

सारिणी से –

$$N = 8, \quad \sum D^2 = 20$$

सूत्र में रखने पर –

$$r = 1 - \frac{6(20)}{(8^3 - 8)} = 1 - \frac{120}{(512-8)} = 1 - \frac{120}{504}$$

$$= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21} = 0.76$$

उदाहरण (Illustration) : 8

निम्न समंकों से कोटि सहसम्बन्ध गुणांक निकालिए –

X	115	109	112	87	98	98	120	100	98	118
Y	75	73	85	70	76	65	82	73	68	80

हल –

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक का परिगणन					
A		**B**		कोटि अन्तर **D**	कोटि अन्तरों के वर्ग **D**^{2}
X	कोटि X	Y	कोटि Y		
115	3	75	5	–2	4
109	5	73	6.5	–1.5	2.25
112	4	85	1	+3	9
87	10	70	8	+2	4

98	8	76	4	+4	16
98	8	65	10	–2	4
120	1	82	2	–1	1
100	6	73	6.5	–0.5	0.25
98	8	68	9	–1	1
118	2	80	3	–1	1
$N = 10$				$\Sigma D = 0$	$\Sigma D^2 = 42.50$

Series A में 98 तीन बार आया है तथा तीन समान क्रमों के लिए सूत्र में $\frac{1}{12}(3^3-3), \sum D^2$ में जोड़ना होगा। इसी प्रकार Series B में 73 दो बार आया है अतः दोनों समान क्रमों के लिए $\frac{1}{12}(2^3-2)$ के बराबर संख्या $\sum D^2$ में जोड़नी पड़ेगी। सूत्रानुसार –

$$P = 1 - \frac{6[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{N^3 - N}$$

$$= 1 - \frac{6[42.5 + \frac{1}{12}(3^3-3) + \frac{1}{12}(2^3-2)}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6[42.5+2+0.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6\times 45}{990} = 1 - \frac{270}{990} = \frac{990-270}{990} = \frac{720}{990} = +.73$$

X और Y में सामान्य रूप से अधिक मात्रा का धनात्मक कोटि सह–सम्बन्ध (moderately high degree of positive rank correlation) है।

12.8 सारांश (Summary)

जब दो चर–मूल्यों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक में कमी या वृद्धि होने से दूसरे में भी उसी दिशा में या विपरीत दिशा में परिवर्तन होते हों तो वे दोनों सह–सम्बन्धित कहलाते हैं। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि दो सम्बद्ध समंक श्रेणियों में साथ–साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति को ही सहसम्बन्ध या सह–विचरण (co-variation) कहते हैं।

इसे $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

इसे ज्ञात करने के लिए 'गुणन–परिघात सहसम्बन्ध गुणांक' रीति या 'कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक' की रीति को सर्वोत्तम मानी जाती है क्योंकि इससे सहसम्बन्ध की दिशा और मात्रा का संतोषजनक संख्यात्मक माप ज्ञात हो जाता है।

सम्बद्ध समंकमालाओं में चर–मूल्यों के परिवर्तनों की दिशा, अनुपात तथा मालाओं की संख्या के आधार पर सहसम्बन्ध को धनात्मक तथा ऋणात्मक बताया गया है।

अर्थात् हम यह कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध का सामान्य अर्थ है, दो समंक–श्रेणियो में कारण और परिणाम के आधार पर परस्पर सम्बन्ध का पाया जाना। इस दृष्टि से सहसम्बन्ध दो समंकमालाओं के पारस्परिक सम्बन्ध की दिशा व मात्रा (direction and degree) का विश्लेषण तो करता है लेकिन सहसम्बन्ध की उपस्थिति मात्र से यह निष्कर्ष नहीं निकाल लेना चाहिए कि दोनों सम्बद्ध श्रेणियों में आवश्यक रूप से प्रत्यक्ष कार्य–कारण सम्बन्ध भी है।

अतः निष्कर्ष के रूप में यह कहा जा सकता है कि सहसम्बन्ध की वास्तविक जानकारी केवल उसकी उपस्थिति मात्र से नहीं की जा सकती, जब तक कि दोनों सम्बद्ध मात्राओं में प्रत्यक्ष कार्य–कारण सम्बन्ध की जानकारी न प्राप्त कर ली जाय। प्रो0 बाडिंगटन का भी कहना है कि यदि सभी प्रमाण यह संकेत करते हैं कि दोनों सम्बद्व श्रेणियों में सहसम्बन्ध है अथवा हो सकता है तो भी उन प्रमाणों की अत्यन्त सतक्रतापूर्वक जाँच की जानी चाहिए ताकि निष्कर्ष गलत न हो सकें।

12.9 अभ्यास प्रश्न

I. वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

A. निम्नलिखित में से कौन सा सही है :

(1) सहसम्बन्ध गुणांक

(i) सदा धनात्मक होता है। (ii) सदा ऋणात्मक होता है।

(iii) या तो धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

(iv) इनमें से कोई नहीं।

(2) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक का सूत्र है।

(i) $r = \frac{\sum xy}{\sigma_x \sigma_y}$ (ii) $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$

(iii) $r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x}$ (iv) $r = \frac{\sum xy}{\sigma_x{}^2 \sigma_y{}^2}$

(3) कोटि सहसम्बन्ध–गुणांक सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

(i) $r_s = 1 + \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$ (ii) $r_s = 1 - \frac{\sum D^2}{N^3 + N}$

(iii) $r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$ (iv) $r_s = 1 - \frac{6\sum D^3}{N^3 - N}$

(4) सहसम्बन्ध गुणांक का धनात्मक चिन्ह होगा जब :

(i) ***x*** के मान बढ़ रहे हो और ***y*** के मान घट रहे हो।

(ii) ***x*** और ***y*** दोनों के मान बढ़ रहे हों।

(iii) ***x*** के मान घट रहे हो और ***y*** के मान बढ़ रहे हो।

(iv) ***x*** और ***y*** के मान में कोई परिवर्तन न हो।

II. रिक्त स्थानों को भरिए :

(1) जब दो चरों के मान एक ही दिशा में संचलित होते हैं तो सहसम्बन्ध ––––– कहा जाता है।

(2) जहाँ संख्यात्मक मापन कठिन होता है, सहसम्बन्ध गुणांक ––––– से परिकलित किया जाता है।

(3) $\pm$ 1 ––––– सहसम्बन्ध है।

(4) धन चिन्ह संकेतिक करते हैं कि सहसम्बन्ध –––––– है।

III. लघु उत्तरात्मक प्रश्न :

(1) सहसम्बन्ध से आप क्या समझते हैं? उसके मापन करने की प्रमुख विधियों के नाम लिखिए।

(2) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक को समझाइए।

(3) संगामी विचलन गुणांक को समझाइए।

(4) क्या दो चरों के बीच सहसम्बन्ध कारण–प्रभाव का सम्बन्ध प्रकट करता है?

(5) कोटि सहसम्बन्ध को परिभाषित कीजिए। कोटि सहसम्बन्ध गुणांक (r_s) के लिए स्पियरमैन का सूत्र लिखिए।

IV. निबन्धात्मक प्रश्न :

(1) सहसम्बन्ध की अवधारणा का अर्थ एवं महत्व स्पष्ट कीजिए। सहसम्बन्ध गुणांक के मान का निर्वचन आप किस प्रकार करेंगे?

(2) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध–गुणांक की परिभाषा दीजिए। यह किस बात को मापने का आशय करता है? एक सहसम्बन्ध गुणांक चिन्ह और परिमाण का निर्वचन आप किस प्रकार करेंगे?

V. संख्यात्मक प्रश्न :

(1) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रकीर्ण आरेख बनाइए :

X :	8	10	12	11	9	7	13	14	15	17	16
Y :	5	7	9	8	6	4	10	11	12	14	13

x और *y* के बीच सम्बन्ध का वर्णन भी कीजिए।

(2) निम्न आँकड़ों से एक सहसम्बन्ध लेखाचित्र की रचना कीजिए और पूर्ति तथा मूल्य सूचकांकों के बीच सहसम्बन्ध पर टिप्पणी कीजिए।

वर्ष :	1980	1981	1982	1983	1984	1985
पूर्ति सूचकांक :	166	170	186	154	136	154
मूल्य सूचकांक :	216	200	196	208	214	204

(3) निम्नलिखित आँकड़ों से *x* और *y* के बीच कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध परिकलित कीजिए :

$N = 13$, $\Sigma x = 117$, $\Sigma x^2 = 1313$, $\Sigma y = 260$, $\Sigma y^2 = 6580$, $\Sigma xy = 2827$

(4) निम्न आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

X :	6	8	12	15	18	20	24	28	31

Y : 10 12 15 15 18 25 22 26 28

(5) निम्नलिखित आँकड़ों से संगामी विचलन गुणांक की गणना कीजिए :

मूल्य :	368	284	385	361	347	384	395	403	400	385
आयात :	22	21	24	20	22	26	24	29	28	27

12.10 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर :

A) (1) (iii) (2) (ii) (3) (iii) (4) (ii)

2) (1) धनात्मक (2) कोटि–अन्तर (3) पूर्ण (4) धनात्मक

(5) संगामी विचलन

5) (1) पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध (3) $r = 0.81$

(4) $r = +0.96$ (5) $r_c = + 0.333$

संदर्भ ग्रन्थ सूचीः

1. बंसल, डॉ0 एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डॉ0 डी0 आर0, (1978) *सांख्यिकी के मूल तत्त्व*, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
2. सिंह, एस0 पी0, (1997) *सांख्यिकी–सिद्धान्त एवं व्यवहार*, एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
3. अवस्थी, जी0 डी0 एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) *सांख्यिकीय विश्लेषण*, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
4. नागर, कैलाश नाथ, (2005) *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
5. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.

इकाई : 13 प्रतीपगमन विश्लेषण

13.1 प्रस्तावना (**Introduction**)

सहसम्बन्ध में हमें दो चर मूल्यों के बीच आश्रितता का संख्यामक ज्ञान होता है। मोटे तौर पर हम यह कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध गुणांक दो श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध की मात्रा को तो बताता है परन्तु एक श्रेणी के निश्चित चर–मूल्य के आधार पर दूसरी आश्रित श्रेणी के सम्बन्धित चर मूल्य का अनुमान नहीं बताता। प्रतीपगमन विश्लेषण द्वारा हम एक निश्चित चर मूल्य के सापेक्ष आश्रित श्रेणी के चर मूल्य का अनुमान लगा सकते हैं। यदि एक चर मूल्य का पता हो तो दूसरे चर मूल्य का पता जिस सांख्यिकीय रीति से हम लगाते हैं उसे प्रतीपगमन (Regression) कहते हैं।

अपने सामान्य अनुभव के आधार पर हम जानते हैं कि अधिक ऊँचाई वाले व्यक्तियों का वजन सामान्यतया अधिक तथा कम ऊँचाई वाले व्यक्तियों का वजन सामान्यतया कम होता है। अर्थात् व्यक्तियों की ऊँचाई तथा उनके वजनों के बीच सम्बन्ध होता है। इसी प्रकार सामान्यतया यह देखा जाता है कि पति तथा पत्नियों की आयु के मध्य भी सम्बन्ध होता है, अर्थात् अधिक आयु वाले पतियों की पत्नियाँ अधिक आयु वाली होती है तथा कम आयु वाले पतियों की पत्नियाँ कम आयु वाली होती है। इसी प्रकार चरों में सम्बन्धों के अनेक उदाहरण दिए जा सकते हैं। आर्थिक सिद्धान्त हमें बतलाता है कि व्यक्तियों की आय तथा उपभोग के स्तर के मध्य तथा कुल उत्पादन के स्तर और लागत स्तर के मध्य भी सम्बन्ध होता है।

यह सभी दो चर सम्बन्धों (Two variable relationship) के उदाहरण है। दो चर–मूल्यों के बीच कारण–परिणाम सम्बन्ध का सहसम्बन्ध की अपेक्षा प्रतीपगमन विश्लेषण से अधिक स्पष्टीकरण होता है। मुद्रा पूर्ति और सामान्य कीमत–स्तर में सहसम्बन्ध है। परन्तु हम सहसम्बन्ध के आधार पर यह नहीं कह सकते हैं कि एक निश्चित अवधि में मुद्रा पूर्ति कारण है और कीमत स्तर परिणाम। हो सकता है कि सामान्य कीमत स्तर कारण हो और मुद्रा पूर्ति परिणाम। प्रतीपगमन विश्लेषण में जो चर मूल्य दिया होता है उसे सदैव X (Independent variable) मानते हैं तथा जो चर मूल्य ज्ञात करना हो उसे Y (Dependent variable) मानते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि प्रतीपगमन विश्लेषण से 'कारण और परिणाम सम्बन्ध' स्पष्ट रूप से पता लगता है। इस प्रकार के सम्बन्ध दो से अधिक चरों के मध्य भी हो सकते हैं, जैसे – प्रति हैक्टेयर कृषि उपज की मात्रा सिँचाई की मात्रा पर निर्भर करती है, साथ ही यह उर्वरकों की मात्रा कीटनाशकों के प्रयोग, बीजों के किस्म इत्यादि पर भी निर्भर करती है। इसी प्रकार किसी वस्तु की माँग वस्तु के मूल्य, व्यक्तियों की आय, अभिरुचियों तथा अन्य वस्तुओं के मूल्यों पर निर्भर करती है। एक परिवार का उपभोग व्यय, परिवार की आय के अतिरिक्त परिवार के आकार, परिवार के सदस्यों की अभिरुचियाँ, परिवार का सामाजिक स्तर आदि पर निर्भर करता है।

सांख्यिकीय विधियों द्वारा हम इस सम्बन्धों की कोटि (degree) तथा इनके स्वरूप को ज्ञात कर सकते हैं एवं आनुभाविक रूप से इस तथ्य पर भी प्रकाश डाल सकते हैं कि इन चरों में सम्बन्ध कारणात्मक है अथवा नहीं।

प्रतीपगमन सांख्यिकीय विश्लेषण की वह विधि है जिसके द्वारा एक चर के किसी ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का सम्भाव्य मूल्य प्रतीपगमन समीकरण की सहायता से अनुमानित किया जा सकता है। सांख्यिकी के आंग्ल भाषा के 'रिग्रेसन' (Regression) शब्द के लिए हिन्दी भाषा में 'समाश्रयण' शब्द का प्रयोग किया जाता है, यद्यपि कुछ लेखकों ने 'समाश्रयण' शब्द के स्थान पर 'प्रतीपगमन' शब्द प्रयोग किया है। जीव–विज्ञान और भू–विज्ञान में 'रिग्रेशन' शब्द के लिए 'प्रतिक्रमण' शब्द प्रयोग किया जाता है। प्रतीपगमन (या समाश्रयण) शब्द का अर्थ है, वापस लौटना या पीछे की ओर मुड़ना या घूमना (Stepping back or going back)। सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम सन् 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton) नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने अपने शोध लेख – ''पैतृक ऊँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन'' (Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature) में किया था। उक्त शोध–लेख में उन्होंने लगभग एक हजार पिताओं और उनके पुत्रों की ऊँचाई या कद में सम्बन्ध का अध्ययन किया और कुछ बहुत ही रोचक निष्कर्ष निकाला। ये निष्कर्ष है :

(i) लम्बे पिताओं के लम्बे और नाटे पिताओं के नाटे पुत्र होते हैं।

(ii) लम्बे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा कम होती है।

(iii) नाटे पिताओं के पुत्रों की माध्य लम्बाई उनके पिताओं की माध्य लम्बाई की अपेक्षा अधिक होती है।

(iv) गाल्टन ने यह पाया कि 'जाति (race) की माध्य लम्बाई से पिताओं की माध्य लम्बाई में विचलन की अपेक्षा जाति की माध्य लम्बाई से पुत्रों की माध्य लम्बाई में विचलन कम होता है। जब पिता माध्य लम्बाई से अधिक या कम लम्बे होते हैं तो पुत्रों की लम्बाई माध्य की ओर समाश्रयित (regress) या पीछे की ओर मुड़ जाती है।

इस प्रकार पुत्रों की ऊँचाई के सामान्य माध्य के निकट वापस जाने की इस प्रवृत्ति को ही फ्रांसिस गाल्टन ने 'मध्यमता की ओर प्रतीपगमन' कहा था। गाल्टन ने इस प्रवृत्ति का प्रयोग एक ज्ञात चर (पिता की ऊँचाई) के तत्संवादी आश्रित चर (पुत्र की ऊँचाई) का सर्वोत्तम अनुमान लगाने के लिए किया था।

आधुनिक समय में प्रतीपगमन का उपयोग केवल पितृगत विशेषताओं के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है बल्कि इसकी सामाजिक आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में व्यावहारिक उपयोगिता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों के पद मूल्यों में सामान्य माध्य की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति होती है – यही प्रतीपगमन है। प्रतीपगमन की सहायता से हम एक चर मूल्य पर आधारित दूसरा चर मूल्य बड़ी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। दो सम्बन्धित श्रेणियों में प्रतीपगमन का अध्ययन बिन्दु–रेखीय ढंग से किया जाता है। विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) पर सर्वोपयुक्त रेखाएँ (Lines of best fit) खींची जाती हैं। इन्हें प्रतीपगमन रेखाएँ (Regression Lines) कहते हैं।

13.2 प्रतीपगमन के उद्देश्य (**Objectives of Regression**)

(i) प्रतीपगमन को समझना तथा प्रतीपगमन रेखाएँ प्राप्त करना

(ii) प्रतीपगमन गुणांक के अभिलक्षण या विशेषताएँ (properties) एवं उनके उपयोग।

13.3 परिभाषा (**Definitions**)

प्रतीपगमन की कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ निम्न है :

1) ''आँकड़ों की मूल इकाइयों के रूप में, दो या अधिक चरों के बीच माध्य सम्बन्ध का माप समाश्रयण कहलाता है।''

– मारिस मेयर्स ब्लेयर

2) ''प्रायः यह ज्ञान करना अधिक महत्त्वपूर्ण होता है कि (दो या अधिक घटनाओं में) वास्तविक सम्बन्ध क्या है जिससे एक चर–मान (स्वतंत्र चर–मान) के ज्ञान के आधार पर दूसरे चर–मान (आश्रित चर–मान) का आकलन किया जा सके; और इस प्रकार की दशा में प्रयोग की जाने वाली उपयुक्त सांख्यिकीय प्रविधि समाश्रयण–विश्लेषण कहलाती है।''

– वालिस एवं रॉबर्टस

13.4 उपयोगिता/महत्त्व (**Utility/Importance**)

उपर्युक्त परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि प्रतीपगमन विश्लेषण एक चर के अज्ञात मान का दूसरे चर के ज्ञात मान से आकलन (estimate) या पूर्वकथन (predicting) के लिए किया जाता है। यह एक बहुत ही उपयोग सांख्यिकीय उपकरण (statistical tool) है जिसका प्रयोग प्राकृतिक और सामाजिक दोनों विज्ञानों में किया जाता है।

आर्थिक व व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन की अत्यधिक व्यावहारिक उपयोगिता है। प्रबन्ध–अधिकारियों द्वारा व्यवसाय के नियंत्रण–उपकरण (control tool) के रूप में प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है। इस प्रविधि के आधार पर उचित व्यावसायिक निर्णय लेना सरल हो जाता है तथा उस निर्णय को व्यवहारिकता की कसौटी पर परखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, इसके द्वारा यह अनुमान लगाया जा सकता है कि यदि किसी वस्तु के उत्पादन या उसकी पूर्ति में निश्चित मात्रा में वृद्धि या कमी हो जाए तो उसके मूल्य में संभावित परिवर्तन कितनी मात्रा में होगा। इसी प्रकार यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि सामान्य मूल्य–स्तर में निश्चित परिवर्तन कितनी मात्रा में होगा। इसी प्रकार यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि सामान्य मूल्य–स्तर में निश्चित वृद्धि होने पर जीवन–निर्वाह व्यय कितना बढ़ जाएगा। मूल्यों के आधार पर माँग का, वर्षा की मात्रा, बीज, खाद आदि के आधार पर कृषि उपज का तथा पूँजी के आधार पर लाभ आदि का अनुमान लगाने में प्रतीपगमन विश्लेषण बहुत सहायक सिद्ध होता है। व्यवसाय की सफलता के लिए इस प्रकार के अनुमान अनिवार्य होते हैं परन्तु ये अनुमान तभी अधिक यथार्थ होते हैं जब दोनों श्रेणियों में परस्पर घनिष्ठ सहसम्बन्ध हो। प्रतीपगमन विश्लेषण की सहायता से चर–मूल्यों में सह–सम्बन्ध की मात्रा व दिशा का माप भी किया जा सकता है।

समाजशास्त्रीय अध्ययन में तथा आर्थिक आयोजन के क्षेत्र में जनसंख्या पुर्वानुमान (projection of population), जन्म–दरें (birth rates), मृत्यु–दरें (death rates) और इसी प्रकार के अन्य चरों के पुर्वानुमान बड़े उपयोगी होते हैं।

13.5 प्रतीपगमन के प्रकार (**Types of Regression**)

प्रतीपगमन को नापने की विधियाँ मुख्यतः तीन प्रकार की होती हैं –

(i) सरल एवं बहुगुणी प्रतीपगमन

सरल प्रतीपगमन में एक चर स्वतंत्र तथा एक चर आश्रित होता है जैसे मूल्य तथा माँग के मध्य सम्बन्ध में मूल्य स्वतंत्र चर है तथा माँग आश्रित। बहुगुणी प्रतीपगमन में एक से अधिक स्वतंत्र चर के सापेक्ष केवल एक ही आश्रित चर होता है जैसे किसी वस्तु की कीमत, उपभोक्ता की आय तथा उसकी रुचि इन तीनों स्वतंत्र चरों का प्रभाव उस वस्तु की माँग पर पड़ेगा अतः यहाँ वस्तु की माँग एक आश्रित चर है।

(ii) कुल एवं आंशिक प्रतीपगमन

कुल प्रतीपगमन में आश्रित चर पर प्रभाव जानने के लिए सभी स्वतंत्र चरों को विचार में लिया जाता है जबकि आंशिक प्रतीपगमन में एक या दो स्वतंत्र चरों पर ही विचार किया जाता है तथा शेष को छोड़ दिया जाता है।

(iii) रेखीय एवं अरेखीय प्रतीपगमन

जब स्वतंत्र चर तथा आश्रित चर में परस्पर सम्बन्धों को प्रदर्शित करने हेतु सीधी रेखा का प्रयोग किया जाता है तब यह 'रेखीय प्रतीपगमन' कहलाता है तथा जब यह प्रदर्शन वक्रीय रेखा द्वारा किया जाता है तो यह अरेखीय प्रतीपगमन कहलाता है।

सामान्यतः प्रतीपगमन की विधियों में सरल रेखीय प्रतीपगमन सर्वाधिक उपयुक्त मानी जाती है जिसमें प्रतीपगमन रेखाओं द्वारा स्वतंत्र एवं आश्रित चरों का परस्पर सम्बन्ध दर्शाया जाता है।

13.6 रेखीय प्रतीपगमन (**Linear Regression**)

दो परस्पर सम्बन्धित समंक श्रेणियों में प्रतीपगमन–विश्लेषण का कार्य अधिकतर बिन्दु–रेखीय रीति द्वारा ही किया जाता है। दो सम्बन्धित श्रेणियों के चर–मूल्यों को बिन्दुरेखा पर अंकित करने से जो विक्षेप–चित्र (scatter diagram) या बिन्दु चित्र (dot diagram) तैयार होता है तथा इस चित्र पर अंकित बिन्दुओं के मध्य से गुजरने वाली जो दो 'सर्वोपयुक्त रेखाएँ (Line of Best Fit) निर्मित होती है वास्तव में ये रेखाएँ ही प्रतीपगमन रेखाएँ कहलाती है। स्मरण रहे प्रतीपगमन रेखीय हो सकता है अथवा वक्ररेखीय। उपर्युक्त रेखाओं के सरल (straight) होने पर प्रतीपगमन रेखीय (linear) माना जाता है और अगर यह रेखाएँ सरलित वक्र (smooth curve) के रूप में हो तो प्रतीपगमन, वक्र–रेखीय (curvilinear) माना जाएगा। सरल प्रतीपगमन रेखाओं के समीकरण एक–घातीय (equation of the first order) होते हैं अर्थात् x पर y की प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $x = a + by$, और इसी प्रकार y पर x की प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $y = a + bx$ होता है।

13.7 प्रतीपगमन रेखाएँ (**Regression Lines**)

अर्थ (Meaning) – जैसा कि ऊपर स्पष्ट किया जा चुका है कि दो समंक श्रेणियों के पारस्परिक औसत–सम्बन्ध को दर्शाने वाली सर्वोपयुक्त रेखाओं को 'प्रतीपगमन रेखाएँ' कहते हैं। ये रेखाएँ वास्तव में किसी एक श्रेणी के मध्यम–मूल्य से सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के सर्वोत्तम मध्यम–मूल्यों को व्यक्त करती है।

23.8 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य (**Functions of Regression Lines**)

प्रतीपगमन रेखाओं के दो महत्वपूर्ण कार्य होते हैं –

(1) **सर्वोपयुक्त अनुमान** – जैसा कि स्पष्ट किया जा चुका है इन रेखाओं की सहायता से एक श्रेणी के दिये हुए मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्संवादी सर्वोपयुक्त औसत मूल्य का सांख्यिकीय अनुमान लगाया जा सकता है। X का Y पर (of X on Y) प्रतीपगमन रेखा से

X का तथा *Y* की *X* पर (of *Y* on *X*) प्रतीपगमन रेखा द्वारा *Y* का सर्वोत्तम अनुमान लगाया जाता है।

(2) **सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा का ज्ञान** – प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से निम्नलिखित नियमों के आधार पर यह भी ज्ञात किया जा सकता है कि दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध कितना और कैसा है –

(i) **धनात्मक** – जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ रेखाचित्र पर बाएँ निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की ओर (ऊर्ध्वगामी) बढ़ती है तो *X* और *Y* में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है।

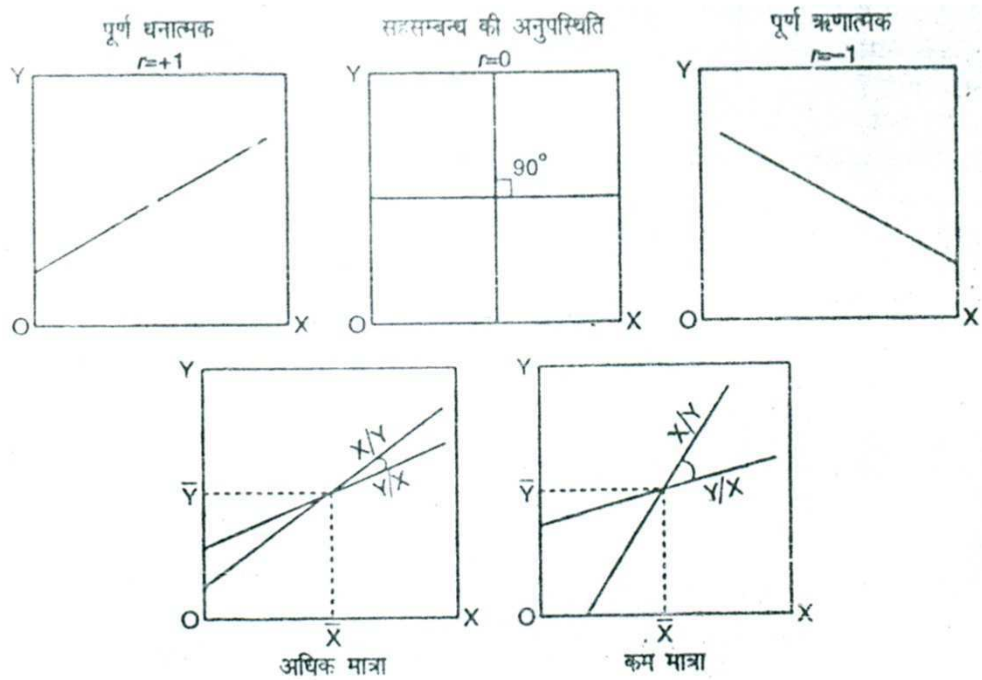
(ii) **ऋणात्मक** – इसके विपरीत जब ये रेखाएँ ऊपर से नीचे की ओर (अधोगामी) जाती हैं तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

(iii) **पूर्ण सहसम्बन्ध एक रेखा** – जब विक्षेप चित्र पर प्रांकित विभिन्न बिन्दु एक ही सीधी रेखा के रूप में हो तो दोनों रेखाएँ एक–दूसरें को पूरी तरह से ढक लेती है। ऐसी स्थिति में श्रेणियों में पूर्ण सहसम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में *X* और *Y* में पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है।

(iv) **सहसम्बन्ध का अभाव** – यदि दोनों रेखाएँ एक दूसरे को समकोण (right angle) अर्थात् 90^0 के कोण पर काटती हों तो *X* और *Y* में बिल्कुल सहसम्बन्ध नहीं पाया जाता। इस स्थिति में विक्षेप–चित्र पर विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं होती।

(v) **सीमित सहसम्बन्ध** – दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक–दूसरे के जितनी निकट होंगी, *X* और *Y* में उतना ही अधिक सहसम्बन्ध होगा। इसके विपरीत ये रेखाएँ एक–दूसरे से जितनी दूर होती जाएंगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होती जाएगी। ये रेखाएँ दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्रांकित बिन्दु पर एक–दूसरे को काटती है। अतः इनके सर्वनिष्ठ बिन्दु (point of intersection) से दोनों अक्षों पर डाले जाने वाले लम्ब (perpendicular) *X* तथा *Y* के समान्तर माध्य–मूल्यों को व्यक्त करते हैं।

निम्न चित्र से प्रतीपगमन रेखाओं से सम्बन्धित उपर्युक्त नियम स्पष्ट हो जाते हैं –



प्रतीपगमन रेखाओं की रचना दो रीतियों द्वारा की जा सकती है –

(क) मुक्त हस्त रीति द्वारा (By freehand method); तथा

(ख) प्रतीपगमन समीकरणों द्वारा (By regression equations)

प्रथम रीति का प्रयोग सामान्यतः नहीं किया जाता, क्योंकि इसके आधार पर विभिन्न व्यक्तियों द्वारा रेखा भिन्न–भिन्न प्रकार से खींची जा सकती है। अतः प्रतीपगमन समीकरण के आधार पर ही इन रेखाओं की रचना की जाती है।

(क) मुक्त–हस्त वक्र विधि – मुक्त हस्त वक्र विधि में हम सर्वप्रथम *X* और *Y* के मानों के युग्मों को प्रकीर्ण आरेख के रूप में आलेखित करते हैं। मानों के एक युग्म के लिए एक बिन्दु आलेखित किया जाता है। इसके बाद हम दो मुक्त हस्त रेखाएँ खींचते हैं। इन रेखाओं से एक रेखा इस रीति से खींची जाती है कि *Y* श्रेणी के उसके माध्य से धनात्मक विचलन ऋणात्मक विचलों से निरस्त हो जाते हैं। इस रेखा के एक ओर के विचलनों का योग उसके दूसरी ओर के विचलनों के योग के बराबर होता है। यह *Y* का *X* पर प्रतीपगमन रेखा (Regression Line of *Y* on *X*) होगी। दूसरी प्रतीपगमन रेखा इस रीति से खींची जाएगी कि *X* श्रेणी के उसके माध्य से धनात्मक विचलन ऋणात्मक विचलों को निरस्त कर देंगे। इस रेखा के ओर के विचलनों का योग भी उसके दूसरी ओर के विचलनों के योग के बराबर होगा। यह प्रतीपगमन रेखा *X* का *Y* पर प्रतीपगमन रेखा (Regression Line of *X* on *Y*) कहलाएगी। दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ दोनों श्रेणियों के माध्यों (Means) के बिन्दु पर एक

दूसरे को काटेगी। यदि दोनों चरों के बीच परिपूर्ण धनात्मक या ऋणात्मक सम्बन्ध है, तो केवल एक प्रतीपगमन रेखा होगी।

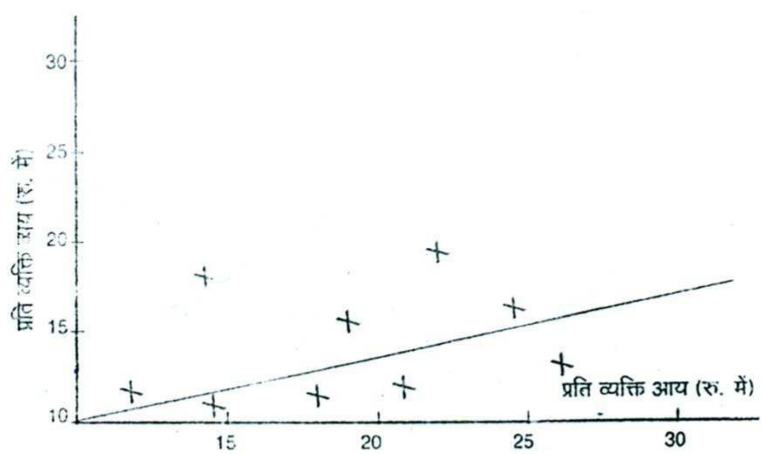
मुक्तहस्त वक्र विधि से प्रतीपगमन रेखाओं का खींचना बहुत कठिन कार्य है। प्रायः प्रकीर्ण आरेख में बार–बार एक धागा इस रीति से समायोजित किया जाता है कि धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलन एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं। एक बार जब ये रेखाएँ खींच ली जाती हैं तो हम *Y* का *X* पर प्रतीपगमन रेखा से *Y* के मानों को पूर्वकथित या आकलित कर सकते हैं और इसी प्रकार *X* का *Y* पर प्रतीपगमन रेखा से *Y* के मानों को पूर्वानुमानित या आकलित कर सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण द्वारा इस विधि की व्याख्या दी जा सकती है –

उदाहरण 1 : नीचे दिये गये आँकड़े 10 व्यक्तियों की प्रतिदिन की आय तथा व्यय से सम्बन्धित है, प्रतीपगमन विश्लेषण द्वारा यह ज्ञात करना है कि आय घटने या बढ़ने से व्यय किस प्रकार बढ़ता या घटता है।

प्रति व्यक्ति आय (रु0 में)	15	22	28	20	25	30	25	30	22	18
प्रति व्यक्ति व्यय (रु0 में)	12	15	20	18	15	18	12	15	15	12

व्यक्तियों की आय को स्वतंत्र मानते हुए *'X'* अक्ष पर लेकर तथा व्यय को आश्रित चर मानते हुए *'Y'* अक्ष पर लेकर निम्नलिखित चित्र बनाते हैं –



प्रस्तुत विक्षेप चित्र में वितरित बिन्दुओं के मध्य एक ऐसी प्रवृत्त रेखा खींची गयी है जिसके ऊपर तथा नीचे बिन्दुओं का वितरण लगभग समान है।

अब प्रत्येक '*X*' चर के मान के लिए '*Y*' के मान को विक्षेप चित्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु इस विधि की सीमा यह है कि भिन्न–भिन्न व्यक्ति इस चित्र में भिन्न–भिन्न प्रवृत्त रेखाएँ खींच सकते हैं तथा इस तरह '*X*' चर के लिए '*Y*' चर के मानों के अनुमान भी भिन्न हो सकते हैं।

13.9 प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equations)

प्रतीपगमन समीकरण जिन्हें प्रायः '*Estimating Equations*' भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखाओं के बीजगणितीय स्वरूप है। प्रतीपगमन रेखाओं की भांति ये समीकरण भी दो होते हैं –

(i) *X* का *Y* पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of *X* upon *Y*)

इसकी सहायता से *Y* (स्वतंत्र चर–मूल्य) के दिए हुए मूल्य के तत्संवादी *X* (आश्रित चर–मूल्य) का सर्वोत्तम माध्य मूल्य ज्ञात किया जाता है तथा रेखाचित्र पर इस समीकरण के मूल्यों को प्रांकित करने से *X* की *Y* पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त हो जाती है।

(ii) *Y* का *X* पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression equation of *Y* upon *X*)

इसके आधार पर *X* (स्वतंत्र चर–मूल्य) के तत्संवादी *Y* (आश्रित मूल्य) के सर्वोपयुक्त मूल्य का अनुमान लगाया जाता है और *Y* की *X* पर प्रतीपगमन रेखा खीची जाती है।

रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण, सरल रेखा के समीकरण (equation of the straight line) पर आधारित है। मूल रूप में ये निम्न प्रकार है –

(i) *X* का *Y* पर –– $X = a + by$

(ii) *Y* का *X* पर –– $Y = a + bx$

इस समीकरणों में a और b के मान स्थिरांक (constant) है जो प्रतीपगमन रेखाओं की स्थितियों को निर्धारित करते हैं। प्राचल (parameter) '*a*' जिसे अन्तः खण्ड (intercepts) भी कहते हैं, प्रतीपगमन रेखा के स्तर (level) को प्रकट करता है अर्थात् मूल–बिन्दु (point of origin) से (कोटि–अक्ष पर) ऊपर या नीचे रेखा की दूरी। दूसरे शब्दों में, लेखाचित्र पर मूल–बिन्दु से कोटि– अक्ष पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श–बिन्दु का अन्तर ही प्राचल '*a*' का मान होता है। जब '*a*' का मान धनात्मक (+) होता है तो रेखा *Y*–अक्ष को मूल–बिन्दु '0' से ऊपर की ओर स्पर्श करती है और जब '*a*' का मान ऋणात्मक (–)

होता है तो रेखा *Y* – अक्ष पर स्पर्श **'0'** से नीचा होता है। यदि ***'a'*** मान शून्य हो तो रेखा मूल–बिन्दु से ही आरम्भ होती है।

अन्तः खण्ड का बीजगणितीय माप –

प्रथम समीकरण (***X = a + bY***) में ***a =*** $\bar{X} - b\bar{Y}$

द्वितीय समीकरण (***Y = a + bX***) में ***a =*** $\bar{Y} - b\bar{X}$

$\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ समान्तर माध्यों के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं।

प्राचल ***'b'*** रेखा का ढलान या ढाल (**slope of the line**) को निर्धारित करता है। प्राचल ***'b'*** को प्रतीपगमन गुणांक (**regression coefficient**) भी कहते हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि ***X*** में इकाई का परिवर्तन (**unit change**) होने से ***Y*** में कितना परिवर्तन होगा और इसके विपरीत। यदि ***'b'*** का मान धनात्मक हो तो रेखा का ढलान बाएँ से दाएँ ऊपर की ओर होगा। ***'b'*** का मान ऋणात्मक होने पर रेखा का ढलान नीचे की ओर होगा। बीजगणितीय दृष्टि से ***'b'*** के मान को सहसमबन्ध–गुणांक, मानक विचलन व समान्तर माध्यों के रूप में निम्न प्रकार प्रकट किया जा सकता है :

प्रथम समीकरण ***X*** का ***Y*** पर –– $b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

द्वितीय समीकरण ***Y*** का ***X*** पर –– $b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

σ_x व σ_y क्रमशः ***X*** और ***Y*** श्रेणियों के प्रमाप विचलन (**Standard Deviations**) है तथा ***r*** दोनों श्रेणियों का सहसम्बन्ध गुणांक है। इस विश्लेषण के आधार पर प्रतीपगमन रेखाओं को निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है –

(i) ***X*** का ***Y*** पर प्रतीपगमन समीकरण (ii) ***Y*** का ***X*** पर प्रतीपगमन समीकरण

$X = a + bY$	$Y = a + bX$
$X = (\bar{X} - b\bar{Y}) + bY$	$Y = (\bar{Y} - b\bar{X}) + bX$
$X - \bar{X} = bY - b\bar{Y}$	$Y - \bar{Y} = bX - b\bar{X}$

$\therefore \quad \left(X - \overline{X}\right) = b_{xy}\left(Y - \overline{Y}\right)$ $\therefore \left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$

$X - \overline{X} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(Y - \overline{Y}\right)$ $Y - \overline{Y} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(X - \overline{X}\right)$

प्रयोग – Y से सम्बद्ध X का सर्वोपयुक्त मूल्य अनुमानित करने के लिए प्रथम समीकरण (of X upon Y) का प्रयोग किया जाता है। और X के तत्संवादी Y का सर्वोत्तम मूल्य ज्ञात करने के लिए द्वितीय समीकरण (of Y upon X) का प्रयोग किया जाता है। उपर्युक्त रूप में समीकरणों का प्रयोग तभी करना चाहिए जब प्रश्न में $\overline{X}$ और $\overline{Y}$, σ_x और σ_y तथा r के मान दिये गये हों।

यहाँ, $\overline{X}$ = X श्रेणी का समान्तर माध्य, σ_x = X श्रेणी का प्रमाप विचलन,

$\overline{Y}$ = Y श्रेणी का समान्तर माध्य, σ_y = Y श्रेणी का प्रमाप विचलन,

r = सहसम्बन्ध गुणांक

उदाहरण 2

निम्नलिखित समंकों से (i) वस्तु की ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत ज्ञात कीजिए यदि इन्दौर में कीमत 70 रु0 हो, और (ii) इन्दौर में सम्भाव्य कीमत ज्ञात कीजिए यदि ग्वालियर में कीमत 90 रु0 हो।

	माध्य	प्रमाप विचलन
इन्दौर	65	2.5
ग्वालियर	67	3.5

सहसम्बन्ध गुणांक = +0.8

हल : इन्दौर में कीमत को X तथा ग्वालियर में कीमत को Y मानने पर ज्ञात मूल्य इस प्रकार है –

$\overline{X}$ = 65, $\overline{Y}$ = 67, $\sigma_x = 2.5$ $\sigma_y = 3.5$, $r = +0.8$

ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत

$$Y - \overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$Y - 67 = 0.8\frac{3.5}{2.5}(70 - 65)$$

$$Y - 67 = 1.12\ (70 - 65)$$

$$Y = (1.12 \times 5) + 67$$

$$\therefore\ Y = 72.60$$

इन्दौर में सम्भाव्य कीमत

$$X - \overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y})$$

$$X - 65 = 0.8\frac{2.5}{3.5}(90 - 67)$$

$$X - 65 = 0.57\,(90 - 67)$$

$$X = (0.57 \times 23) + 65$$

$$\therefore\ X = 78.11$$

अतः इन्दौर में (i) 70 रु0 होने पर उस वस्तु की ग्वालियर में सम्भाव्य कीमत 72.60 है और (ii) 75 रु0 होने पर ग्वालियर में कीमत 78.11 रु0 है।

13.10 प्रतीपगमन गुणांक (**Regression Co-efficients**)

प्रतीपगमन समीकरण में **'*b*'** प्रतीपगमन गुणांक का प्रतीक है, जो स्वतंत्र चर मूल्य में परिवर्तन के कारण आश्रित चर–मूल्य में होने वाले परिवर्तन की 'मात्रा' तथा 'दिशा' को बतलाता है। दूसरे शब्दों में, यह इस बात को स्पष्ट करता है कि एक श्रेणी के चर–मूल्यों मं 1 का परिवर्तन (unit change) होने से दूसरी श्रेणी के चर–मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होगा। इस प्रकार, यह प्रतीपगमन रेखा के ढलान (slope of regression line) का बीजगणितीय माप है। प्रतीपगमन रेखाओं ओर समीकरणों की भाँति, प्रतीपगमन गुणांक भी दो होते हैं –

(I) *X* का *Y* पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

(II) *Y* का *X* पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

महत्वपूर्ण नोट – उपरोक्त गुणांकों के रूप में हम *X* तथा *Y* की दोनों प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं –

$$X - \overline{X} = b_{xy}\ (Y - \overline{Y}) \quad \text{तथा} \quad Y - \overline{Y} = b_{yx}\ (X - \overline{X})$$

उदाहरण 3

(i) यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों (regression coefficients) के मूल्य 0.64 और 0.81 है, तो सहसम्बन्ध गुणांक (coefficient of correlation) का मान बताइए।

(ii) निम्न आँकड़ों से – (अ) Y का प्रमाप विचलन (σ_y) और (ब) X और Y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक (r_{xy}) ज्ञात कीजिए।

(iii) एक विद्यार्थी ने Y के X पर (Y on X) और X के Y पर (X on Y) प्रतीपगमन गुणांकों के मान क्रमशः 1.2 और 0.9 ज्ञात किये। कारण सहित बतलाइए कि क्या उसके द्वारा किया गया परिगणन सही है?

(iv) निम्न प्रदत्त सूचना से 'r' का मूल्य ज्ञात कीजिए –

X का प्रसरण (variance of X) = 2.25 ; $\sigma_y = 4$; तथा X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण $X = -0.3Y + 1.8$ है।

हल : (i) $r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.64 \times 0.81} = \sqrt{0.5184} = +0.72$

(ii) X का Y पर प्रतीपगमन — Y का X पर प्रतीपगमन

$X = 0.85Y$ — $Y = 0.89X$

यदि Y का मूल्य 1 है तो $X = 0.85$ होगा — यदि $X = 1$ तो Y का मूल्य 0.89 होगा

अतः $b_{xy} = 0.85$ — $b_{yx} = 0.89$

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.85 \times 0.89} = 0.87$$

$b_{xy} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ प्रदत्त मूल्यों को आदिष्ट करने पर –

$$0.85 = 0.87 \times \frac{3}{\sigma_y};\ 0.85\,\sigma_y = 2.61$$

$$\therefore\ \sigma_y = \frac{2.61}{0.85} = 3.07 \qquad \therefore\ r = 0.87\ ;\ \sigma_y = 3.07$$

(iii) विद्यार्थी द्वारा प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं –

$b_{yx} = 1.2$, $b_{xy} = 0.9$ इन दोनों गुणांकों की गुणा (r^2) $1.2 \times 0.9 = 1.08$ है जो 1 से अधिक है; इसका वर्गमूल (r) भी 1 से अधिक होगा, परन्तु यह सहसम्बन्ध गुणांक है जो

कि 1 से अधिक नहीं हो सकता। अतः विद्यार्थी ने प्रतीपगमन गुणांकों की गणना में गलती की है।

(iv) *X* का प्रसरण – $\sigma_x^2 = 2.25$

$$\therefore \ \sigma_x = \sqrt{2.25} = 1.5; \ \sigma_y = 4$$

$$X = -0.3Y + 1.8$$

उक्त समीकरण *X* का *Y* पर प्रतीपगमन प्रकट करता है। इसमें अन्तःखण्ड (*a*) 1.8 है और *X* की *Y* पर सर्वोपयुक्त रेखा का ढाल (*b*) –0.3 है;

यदि प्रतीपगमन गुणांक है अर्थात् $b_{xy} = -0.3$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ या } -0.3 = r \times \frac{1.5}{4} \text{ या } -1.2 = 1.5 \times r$$

$$\therefore \ r = \frac{-1.2}{1.5} = -0.8$$

13.11 प्रतीपगमन गुणांकों का परिकलन (**Calculation of Regression Coefficient**)

यदि दो सम्बद्ध श्रेणियों के अलग–अलग चर मूल्य दिये हुए हों तो उनके आधार पर ऊपर बताए गए सूत्रों द्वारा प्रतीपगमन गुणांक की गणना करना एक अत्यंत कठिन समस्या है क्योंकि r, σ_x व σ_y का निर्धारण करने में गणना–क्रिया अनावश्यक रूप से लम्बी हो जाती है। अतः समय व परिश्रम की बचत करने के लिए निम्न दो रीतियों (सूत्रों) का प्रयोग किया जा सकता है –

(अ) प्रत्यक्ष रीति (**Product Moment Method**)

दो प्रसामान्य समीकरणों पर आधारित इस रीति का सूत्र इस प्रकार है –

X का *Y* पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{N(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{N(\sum y^2) - (\sum y)^2}$$

Y का *X* पर प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{N(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{N(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

क्रिया–विधि – ध्यान रहे, इस रीति में 'विचलन' नहीं लिए जाते हैं। सर्वप्रथम, *x* तथा *y* श्रेणी के पदों का योग क्रमशः Σx तथा Σy कर लिया जाता है। फिर, अलग–अलग दोनों श्रेणियों

के पदों के वर्गों का योग क्रमशः Σx^2 तथा Σy^2 निकाला जाता है। इसके बाद x तथा y श्रेणियों के तत्संवादी पदों की परस्पर गुणा करके उनका योग Σxy प्राप्त कर लिया जाता है।

विद्यार्थियों के लिए नोट : जब दोनों श्रेणियों के पदों का आकार अपेक्षाकृत छोटा हो तो इस रीति का प्रयोग काफी सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 4

दिया हुआ है (Given)

$N=12$, $\Sigma x = 120$, $\Sigma y = 432$, $\Sigma xy = 4992$, $\Sigma x^2 = 1392$, $\Sigma y^2 = 18252$

ज्ञात कीजिए – (i) दोनों प्रतीपगमन समीकरण (ii) प्रतीपगमन गुणांक, (iii) x और y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक (r)।

हल : $\overline{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{120}{12} = 10$; $\overline{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{432}{12} = 36$

प्रतीपगमन गुणांक (**Regression Coefficient**)

x का ***y*** पर

$$b_{xy} = \frac{N(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{N\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$= \frac{12\times 4992-(120\times 432)}{12\times 18252-(432)^2}$$

$$= \frac{59904 - 51840}{219024 - 186624}$$

$$= \frac{8064}{32400} = 0.249$$

y का ***x*** पर

$$b_{yx} = \frac{N(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{N\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{12\times 4992-(120\times 432)}{12\times 1392-(120)^2}$$

$$= \frac{8064}{16704-14400}$$

$$= \frac{8064}{2304} = 3.5$$

प्रतीपगमन समीकरण (**Regression Equations**)

$$x - \overline{x} = b_{xy}(y - \overline{y})$$

$$x-10 = 0.249\ (y-36)$$

$$x = 0.249y - 8.964 + 10$$

$$y - \overline{y} = b_{yx}(x - \overline{x})$$

$$y-36 = 3.5(x - 10)$$

$$y = 3.5x - 35 + 36$$

$\therefore x = 0.249y + 1.036$ $\therefore y = 3.5x + 1$

सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient Correlation)

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.249 \times 3.5} = \sqrt{0.8715} = 0.93$$

13.12 सारांश (Summary)

प्रतीपगमन वह सांख्यिकीय तकनीक है जो दो या अधिक चरों के मध्य औसत सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है तथा इसके द्वारा एक चर के ज्ञात मूल्य के आधार पर दूसरे चर के लिए संभावित मूल्य का अनुमान लगाया जा सकता है।

सहसम्बन्ध से दो चरों के मध्य कारणात्मक सम्बन्ध ज्ञात नहीं किया जा सकता है, किन्तु प्रतीपगमन द्वारा यह ज्ञात करना सरल है कि कौन सा चर 'कारण' है तथा कौन सा 'प्रभाव' है। अर्थात् प्रतीपगमन उस कार्यमूलक सम्बन्ध को बताता है जिसके द्वारा एक चर के अनुमान दूसरे चर से निकाले जा सकते हैं।

प्रतीपगमन का विश्लेषण दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध को प्रस्तुत करने वाले विक्षेप चित्र द्वारा किया जाता है जिसकी मुख्यतः दो विधियाँ प्रचलित है – मुक्त हस्त आरेख तथा न्यूनतम वर्ग विधि।

दो श्रेणियों के पारस्परिक माध्य सम्बन्ध को प्रकट करने वाली सर्वोपयुक्त रेखाओं को प्रतीपगमन रेखाएँ कहा जाता है। ये रेखाएँ एक श्रेणी के माध्य मूल्यों से सम्बन्धित दूसरे सर्वोत्तम माध्य मूल्यों को व्यक्त करती हैं। दो सम्बन्धित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएँ होती हैं।

प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह दर्शाता है कि स्वतंत्र चर की श्रेणी में इकाई परिवर्तन होने पर आश्रित चर के मूल्यों में औसत परिवर्तन दर क्या होगी। वस्तुतः प्रतीपगमन गुणांक, प्रतीपगमन रेखा के ढाल द्वारा प्रदर्शित होता है।

13.13 अभ्यासार्थ प्रश्न :

A वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

I. निम्नलिखित में से कौन सा सही है ?

(1) प्रतीपगमन विश्लेषण मापन करता है :

(i) x और y श्रेणियों के बीच सहविचरणता के परिमाण का

(ii) y श्रेणी के विचरण का

(iii) x श्रेणी के विचरण का

(iv) x और y श्रेणियों के बीच फलनिक सम्बन्ध का

(2) प्रतीपगमन रेखाएँ एक दूसरे को :

(i) x और y के माध्य (ii) केवल x के माध्य

(iii) केवल y के माध्य

(iv) x और y की माध्यिका के बिन्दु पर काटता है।

(3) यदि उस बिन्दु से, जहाँ दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक–दूसरे को काटती है X – अक्ष पर लम्ब खींचा जाय तो हमें प्राप्त होगा :

(i) x का समान्तर माध्य (ii) y का समान्तर माध्य

(iii) x का बहुलक मान (iv) x का माध्यिका मान

(4) दो चरों की दशा में केवल एक प्रतीपगमन रेखा होगी यदि –

(i) r या तो +1 हो या –1 (ii) $r = +$ ही हो

(iii) $r = 0$ हो (iv) $r = -1$ ही हो

(5) जब एक प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक होता है तो दूसरा होगा :

(i) ऋणात्मक (ii) शून्य (iii) धनात्मक (iv) इनमें से कोई नहीं

II. निम्नलिखित कथनों में से कौन सा सत्य/असत्य है :

(1) यदि b_{xy} धनात्मक है तो b_{yx} भी धनात्मक होगा। (स / अ)

(2) यदि दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है तो सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक होगा। (स / अ)

(3) दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक दूसरे को ढक लेती हैं जब चरों के मध्य सहसम्बन्ध या तो पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक होता है। (स / अ)

(4) प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच कारण–प्रभाव का सम्बन्ध नहीं प्रकट करता है। (स / अ)

(5) स्थिरांक ***'b'*** प्रतीपगमन रेखा के ढलान को दर्शाता है। (स /अ)

III. निम्नलिखित को पूर्ण कीजिए :

(1) सहसम्बन्ध गुणांक —–––– के गुणनफल का वर्गमूल होता है।

(2) प्रतीपगमन रेखाएँ —–––– की कल्पना पर खींची जाती है।

(3) दोनों —–––– गुणांकों के एक समान चिन्ह होने चाहिए।

(4) यदि x के y पर प्रतीपगमन गुणांक का मान 1.4 है, तो y के x पर प्रतीपगमन गुणांक का मान —–––– नहीं होगा।

(5) प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच —–––– का मापन करता है।

IV लघु–उत्तरात्मक प्रश्न

(1) प्रतीपगमन क्या है? आर्थिक विश्लेषण में इसकी उपयोगिता की व्याख्या कीजिए।

(2) प्रतीपगमन गुणांकों की क्या विशेषताएँ है?

(3) सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(4) प्रतीपगमन समीकरणों में अचरांक ***'b'*** के अर्थ की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

(5) 'विचरण अनुपात की अवधारणा' की सोदाहरण व्याख्या कीजिए।

V निबन्धात्मक प्रश्न

(1) प्रतीपगमन अवधारणा की व्याख्या कीजिए। यह सहसम्बन्ध से किस प्रकार भिन्न है? प्रतीपगमन रेखाएँ दो क्यों होती है? किन परिस्थितियों में केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा हो सकती है।

(2) प्रतीपगमन रेखा किसे कहते हैं? इसे मापने की विधि स्पष्ट कीजिए।

(3) प्रतीपगमन विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? प्रतीपगमन विश्लेषण की व्यावसायिक निर्णयों में उपयोगिता की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

(4) सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन का अर्थ तथा आर्थिक विश्लेषण में इनकी उपयोगिता बताइए। प्रतीपगमन समीकरण किस प्रकार निकाले जा सकते हैं? उदाहरण देकर समझाइए।

(5) यदि r सहसम्बन्ध गुणांक है तो r^2 आश्रित चर में कुल विचरण का अनुपात है जिसका स्पष्टीकरण प्रतीपगमन विश्लेषण से होता है।

VI संख्यात्मक प्रश्न

(1) निम्न समंकों से y का अनुमानित मूल्य निकालिए यदि $x = 70$ और x का अनुमानित मूल्य निकालिए यदि $y = 90$

	x	y
औसत मूल्य	18	100
प्रमाप विचलन	14	20

x और y में सहसम्बन्ध गुणांक = +0.08

(2) दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए तथा y का सम्भावित मूल्य ज्ञात कीजिए जबकि $x = 55$ है।

दिया हुआ है – $\overline{X} = 48,\ \overline{Y} = 55,\ \sigma_x = 4,\ \sigma_y = 5,\ r = +0.8$

(3) निम्न आँकड़ों से दोनों प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए –

X	:	8	6	4	7	5
Y	:	9	8	5	6	2

(4) नीचे पतियों तथा पत्नियों की आयु दी गयी है। ज्ञात कीजिए –

(अ) दो प्रतीपगमन समीकरण, (ब) सहसम्बन्ध गुणांक, तथा

(स) पति की सम्भावित आयु जबकि पत्नी की आयु 25 वर्ष है :

पतियों की आयु :	22	23	23	24	26	27	27	28	30	30
पत्नियों की आयु :	18	20	21	20	21	22	23	24	25	26

(5) निम्नलिखित समंकों से बिक्री और लाभ में विचरण–अनुपात ज्ञात कीजिए।

वर्ष :	1987	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
बिक्री (करोड़ में) :	36	42	33	30	24	21	27	31.5	25.5	28.5	34.5	27
लाभ (करोड़ में) :	21	26	24	23	15	14	18	19	17	21	22	20

13.14 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

A. वस्तुनिष्ठ प्रश्नः

(1) - (iv) (2) - (i) (3) - (i) (4) - (i) (5) - (iii)

II. (1) - (iii) (2) - (i) (3) - (iii) (4) - (i) (5) - (iii)

III. (1) दो प्रतीपगमन गुणांकों (2) - न्यूनतम वर्गों
(3) - प्रतीपगमन (4) - 0.714 से अधिक (5) - फलनिक सम्बन्ध

VI संख्यात्मक प्रश्नों के उत्तर

(1) [$Y_{70} = 105.94$; $X_{90} = 17.44$, $X = 0.056 + 12.4$; $Y = 0.1143 + 97.94$]

(2) [$x = 0.64y + 12.8$; $y = x + 7$; $Y_{55} = 62$]

(3) [$b_{xy} = 0.4$; $b_{yx} = 1.2$]

(4) [$x = 1.107y + 1.646$; $y = 0.816x + 0.784$; $r = +0.95$; $X = 29.32$]

(5) [R.v. = 0.34]

संदर्भ ग्रन्थ सूची

1) बंसल, एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डी0 आर0, (1978), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा – 31;
2) नागर, कैलाश नाथ, (2005), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
3) लाल, एस0 एन0, चतुर्वेदी, एस0, *सांख्यिकी*, प्रकाशन, इलाहाबाद।
4) Gupta, S. P., (2005), *Statistical Methods*, S. Chand, New Delhi.
5) Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Vol. I, The World Press Private Limited.

इकाई : 14 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन

14.1 प्रस्तावना (**Introduction**)

सामान्यतया जो सांख्यिकीय आँकड़े मिलते हैं वे विभिन्न प्रकार के होते हैं समंक श्रेणी पूर्ण नहीं होती है। सांख्यिकीय विश्लेषण करते समय कभी–कभी यह देखने में आता है कि प्रस्तुत समंक श्रेणी पूर्ण न होकर अपूर्ण होती है अर्थात् श्रेणी के कुछ मूल्य किन्हीं कारणों से अज्ञात बने रहते हैं। ऐसा हो सकता है कि उस अवधि के लिए समंक उपलब्ध ही न हों, ऐसा भी हो सकता है कि आँकड़ों का इकट्ठा करना इतना खर्चीला तथा जटिल हो, जैसे जनगणना को ही लीजिए भारतवर्ष में जनगणना (Census) का कार्य 10 वर्षों के अन्तराल पर किया जाता है, इसका कारण यह है कि देशव्यापी स्तर पर जनगणना का कार्य अत्यधिक खर्चीला है – इसके लिए विशाल मात्रा में संगणकों (investigators), विशेषज्ञों, संसाधनों की आवश्यकता होती है। इसके अतिरिक्त जनगणना से हमें इतनी बड़ी संख्या में वृहद् प्रकार के आँकड़े प्राप्त होते हैं कि इनका विश्लेषण करने में (कम्प्यूटरों की सहायता लेने पर भी) प्रचुर समय लगता है। उपर्युक्त व्याख्या से स्पष्ट हो जाता है कि यह कार्य निश्चित ही प्रत्येक वर्ष करना संभव नहीं है। ऐसी स्थिति में विभिन्न दस–वर्षीय समयावधियों के अन्दर किसी वर्ष की जनसंख्या अनुमानित करने की आवश्यकता पड़ने पर हम अन्तरगणन (interpolation) की सहायता लेते हैं।

अर्थात् कुछ सुनिश्चित मान्यताओं एवं सीमाओं के अन्तर्गत ज्ञात समंको के आधार पर समंक–श्रेणी के बीच किसी अज्ञात मूल्य का सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाने की क्रिया को आन्तरगणन कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हमें 1971, 1981, 1991, 2001, 2011 की जनसंख्या दी हो और 2006 की जनसंख्या का अनुमान लगाना हो तो यह समस्या आन्तरगणन की समस्या होगी। इस प्रकार सांख्यिकीय विश्लेषण करते समय बहुत सी समंकमालाएँ पूर्ण नहीं होती और उनके कुछ मूल्य अज्ञात रह जाते हैं। ऐसा भी हो सकता है कि आँकड़े तो इकट्ठे किए गए हों पर किसी कारण से अपठनीय या अनुपलब्ध हो। इन अज्ञात समंकों को जानने की भी कभी–कभी आवश्यकता महसूस होती है। उदाहरण के लिए मान लीजिए हमें 1951, 1961, 1971, 1981 तथा 1991 के भारतीय जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़े उपलब्ध है, पर हमें 1985 में प्रतिव्यक्ति आय ज्ञात करने के लिए जनसंख्या की आवश्यकता है, इतना ही नहीं ऐसा भी हो सकता है कि हमें 1991अब के बाद पाँच वर्षों के लिए जनकल्याण नीति का निर्धारण करना है, इसलिए बाद की अवधि के लिए विभिन्न वर्षों में हमें जनसंख्या के भावी अनुमान की आवश्यकता हो सकती है। उपलब्ध ज्ञात समंकों के आधार पर समंक माला के इन अज्ञात राशियों के सांख्यिकीय अनुमान ज्ञात करने की क्रिया को हम आन्तरगणन तथा बाह्यगणन कहते हैं। जब हम कुछ निश्चित परिकल्पनाओं तथा मान्यताओं के अन्तर्गत समंक माला के ज्ञात समंकों के आधार पर समंक श्रेणी के भीतर के किसी अज्ञात समंक का सम्माक सर्वोत्तम अनुमान करते हैं तो इस क्रिया को बाह्यगणन कहते हैं, वस्तुतः दोनों की क्रियाएं ज्ञात समंकों के आधार पर समंकमाला के अज्ञात समंकों के अनुमान की क्रियाएं हैं और सांख्यिकीय दृष्टिकोण से दोनों क्रियाओं में विशेष अन्तर नहीं होता, जैसा हम आगे देखेंगे,

दोनों के सम्बन्ध में एक ही सांख्यिकीय विधि का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार आन्तरगणन और बाह्यबणन में मौलिक अन्तर यह है कि पहले हम चर–मूल्य की दी हुई सीमाओं के अन्तर्गत अज्ञात मूल्य की गणना करते हैं और बाह्यगणन में इन सीमाओं के बाहर किसी मूल्य की गणना की जाती है। निम्न उदाहरण से इन दोनों क्रियाओं का अन्तर स्पष्ट हो जाएगा –

भारत की जनसंख्या

जनगणना वर्ष	:	1941	1951	1961	1971	1981	1991
जनसंख्या (करोड़ों में)	:	31.9	36.1	43.9	54.8	68.3	84.6

उपर्युक्त सारणी में दिये गए जनसंख्या में समंकों के आधार पर कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत यदि हमें 1941 और 1991 के बीच के किसी वर्ष जैसे 1947, 1975 या 1986 में भारत की जनसंख्या का सर्वोत्तम अनुमान प्राप्त करना हो तो सम्बन्धित क्रिया आन्तरगणन कहलाएगी। इसके विपरीत, उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर 1939 (1941 से पहले) या 1999 या 2011 (1991 के बाद के किसी वर्ष) के लिए जनसंख्या का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने की क्रिया को बाह्यगणन कहा जाएगा। सांख्यिकीय दृष्टिकोण से आन्तरगणन व बाह्यगणन का अन्तर कोइ विशेष महत्त्व नहीं रखता क्योंकि दोनों क्रियाओं के लिए एक सी रीतियों का ही प्रयोग किया जाता है।

यदि हमें दो चर–मूल्य (variable) x और y दिए हो तथा $y = f(x)$, जहाँ x स्वतंत्र चर–मूल्य (independent variable) और y आश्रित चर–मूल्य (dependent variable) है। किसी निश्चित अन्तराल में x के कुछ मूल्यों के सापेक्ष y के मूल्य दिया हों और यदि हम x के किसी मूल्य जो इसी अन्तराल में हो, के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करना चाहें तो यह क्रिया पूर्व निर्धारित मान्यताओं के अन्तर्गत गणितीय सूत्रों की सहायता से की जाएगी। इसी क्रिया को आन्तरगणन कहते हैं। यदि हम x के किसी मूल्य, जो अन्तराल के बाहर हो, के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करें तो यह क्रिया बाह्यगणन कहलाती है। आन्तरगणन एवं बाह्यगणन के द्वारा हम किसी चर का वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं करते बल्कि इसके सन्निकट मान (best estimate) का अनुमान लगाते हैं। यह आकलन (estimation) की प्रक्रिया (process) सांख्यिकीय विश्लेषण में बहुत महत्वपूर्ण है और अग्रलिखित मान्यताओं पर आधारित है।

14.2 उद्देश्य (**Objective**)

कुछ सुनिश्चित परिकल्पनाओं के अन्तर्गत, ज्ञात समंकों के आधार पर समंक–श्रेणी के बीच किसी अज्ञात मूल्य का सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाना या उपलब्ध सांख्यिकीय तथ्यों के आधार पर, विशेष परिकल्पनाओं के अधीन किसी भावी समंक के पूर्वानुमान प्राप्त करना।

14.3 परिभाषा (**Definitions**)

(i) ''एक सांख्यिकीय अनुमान, अच्छा हो या बुरा, ठी हो या गलत, परन्तु प्रायः प्रत्येक दशा में वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुमान से अधिक ठीक होगा।''

– डा0 ए0 एल0 वाउले

(ii) ''किन्हीं निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत मात्राओं के सर्वाधिक सम्भाव्य अनुमान लगाने की तकनीक को आन्तरगणन कहते हैं।''

– प्रो0 डी0 एन0 एल्हांस

(iii) ''दो अन्त बिन्दुओं के बीच के स्थित मूल्यों को ज्ञात करने की क्रिया आन्तरगणन तथा इन दोनों बिन्दुओं के बाहर के मूल्यों को ज्ञात करने की क्रिया को बाह्यगणन कहते हैं।

– डब्ल्यू0 एम0 हाप्रर

14.4 मान्यताएं (**Assumptions**)

ऊपर दी गयी परिभाषा से स्पष्ट है कि इनकी क्रिया कुछ मान्यताओं व परिकल्पनाओं पर निर्भर करती है जिनके अभाव में अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाना सम्भव नहीं हो पाता। यह मान्यताएँ निम्नलिखित है :

(अ) आकस्मिक उतार–चढ़ाव न होना (**No Sudden or Violent Fluctuations**)

आन्तरगणन व बाह्यगणन की पहली मान्यता यह है कि विचारणीय अवधि के विभिन्न समंकों में कोई अप्रत्याशित परिवर्तन अर्थात् अत्यधिक वृद्धि या अत्यधिक कमी नहीं हुई है। सरल शब्दों में, विचाराधीन अवधि एक सामान्य अवधि है और इस अवधि में समंकों की प्रवृत्ति नियमित और निरन्तर है अर्थात् इस अवधि में किसी प्रचण्ड उथल–पुथल या परिवर्तन का अनुभव नहीं होता। उदाहरण के लिए, यदि हमें 1961, 1971, 1981 और 1991 के किसी नगर में दिए हुए जनसंख्या–समंकों के आधार पर उसकी 1988 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो, या 2001 के लिए पूर्वानुमान लगाना हो तो यह मानना पड़ेगा कि उक्त वर्ष प्रसामान्य (normal) थे और बाढ़, युद्ध, अकाल, शरणार्थियों का भारी संख्या में आगमन आदि कारणों से उन वर्षों की जनसंख्या में एकदम कोई बहुत अधिक कमी या वृद्धि नहीं हुइ थी।

(ब) परिवर्तनों में एकरूपता या नियमितता का पाया जाना (**Uniformity or regularity in changes**)

दूसरी मान्यता यह है कि समंकों में होने वाले परिवर्तन प्रत्येक अवधि में नियमित रूप से तथा लगभग समान दर से होते हों अर्थात् इस अवधि में जो परिवर्तन होते हैं वे समान (uniform) है। उपर्युक्त उदाहरण में हमारी यह भी मान्यता रहेगी कि 1988 से पहले के तथा बाद के वर्षों में जनसंख्या लगभग एक ही समान गति से लगातार बढ़ रही है।

(स) पद–श्रेणियों में पारस्परिक सम्बन्ध (Mutual Inter-dependence)

यह भी आवश्यक है कि दोनों पद–श्रेणियाँ परस्पर सम्बन्धित हो जिसमें एक स्वतंत्र श्रेणी हो तो दूसरी उस पर आश्रित हो।

14.5 उपयोगिता / महत्त्व (Utility/Importance)

किसी समंक माला की अज्ञात राशियों के आन्तरगणन व बाह्यगणन या पूर्वानुमान का महत्त्व अनेक विषयों में दिखायी पड़ता है पर अर्थशास्त्र, व्यापार, तथा व्यवसाय तथा जनांकिकी के क्षेत्र में इनका विशेष महत्त्व है। अज्ञात राशियों के आन्तरगणन या बाह्यगणन की आवश्यकता हमें निम्न परिस्थितियों में होती हैं –

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप – जब सांख्यिकीय आँकड़े वर्गान्तर तथा वर्ग आवृत्ति के रूप में उपलब्ध हों तो माध्यिका तथा भूयिष्ठक की गणना के लिए आन्तरगणन की विधि का प्रयोग आवश्यक हो जाता हैं। इस प्रकार की क्रिया कुछ निश्चित परिकल्पनाओं के अन्तर्गत की जाती है।

(ii) मध्यवर्ती वर्षों के लिए अनुमान – आन्तरगणन विधि का प्रयोग मध्यवर्ती वर्षों अर्थात् एकत्रित समंकों के बीच की किसी अवधि से सम्बद्ध समंकों का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ, भारत में जनगणना प्रत्येक दशक (10 वर्षों) में एक बार की जाती है। चूंकि अत्यधिक व्यय के कारण जनगणना का कार्य प्रतिवर्ष नहीं किया जा सकता, अतः जनगणनाओं के उपलब्ध समंकों के आधार पर विभिन्न मध्यवर्ती वर्षों (intercensal year) की जनसंख्या का अनुमान आन्तरगणन द्वारा लगा दिया जाता है।

(iii) समंकों का नष्ट होना या खो जाना – कभी–कभी एकत्रित समंकों में से कुछ आवश्यक समंक खो जाते हैं या नष्ट हो जाते हैं और उनका दुबारा संकलन करना या तो अत्यधिक कठिन होता है या असम्भव। ऐसी दशाओं में, उपलब्ध शेष समंकों के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा की जा सकती है।

(iv) समंकों का अभाव या अपर्याप्तता – कुछ दशाओं में भूतकालीन समंक या तो एकत्र ही नहीं किए जाते या यदि एकत्र भी किये गए हो तो वे सही परिणाम निकालने के लिए सर्वथा अपर्याप्त होते हैं। इस अभाव (gap in coverage) या अपर्याप्तता (inadequacy) की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा सर्वोपयुक्त अनुमान लगाकर की जाती है।

(v) भावी अनुमान – समय–समय पर आर्थिक, व्यावसायिक एवं राजकीय क्षेत्रों में विभिन्न उद्देश्यों के लिए भूतकालीन व वर्तमान उपलब्ध सामग्री के आधार पर बाह्यगणन की रीति द्वारा भविष्यकालीन समकों के पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं। विशेष रूप से आर्थिक नियोजन में बाह्यगणन की रीति का काफी प्रयोग किया जाता है।

(vi) तुलनात्मक अध्ययन हेतु – जब कभी कुछ समस्याओं से सम्बन्धित विभिन्न देशों के समंक अलग–अलग कालों के लिए उपलब्ध हों तो उनका तुलनात्मक अध्ययन करना सम्भव

नहीं हो पाता है। अतः ऐसी स्थिति में समंकों को तुलनायोग्य बनाने के लिए आन्तरगणन व बाह्यगणन का सहारा लेना पड़ता है। उदाहरण के लिए अमेरिका में जनगणना 1980 में और भारत में 1981 में की गयी। चूंकि दोनों देशों के जनगणना समंकों की अवधि अलग–अलग है इसलिए तुलना करने के लिए या तो भारत की 1980 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना होगा अथवा अमेरिका की 1981 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना होगा।

(vii) स्थान सम्बन्धी माध्यों का निर्धारण – एक अविच्छिन्न श्रेणी, भूयिष्ठक, मध्यका आदि स्थानिक माध्यों (averages of position) के मूल्यों का निर्धारण करने के लिए भी आन्तरगणन रीति का प्रयोग किया जाता है।

निम्नांकित परिस्थितियों में भी अज्ञात राशियों को ज्ञात करने के लिए आन्तरगणन तथा बाह्यगणन तकनीक की आवश्यकता पड़ती है –

(अ) हो सकता है कि हम दो देशों की प्रगति का विश्लेषण कर रहे हों पर दोनों के एक समयावधि से समबन्धित आँकड़े न उपलब्ध हों, ऐसी स्थिति में तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि दोनों के सम्बन्ध में आँकड़े एक ही समायावधि से सम्बन्धित प्राप्त किए जाएँ। मान लीजिए हम भारत के औद्योगिक उत्पादन की तुलना जापान के साथ करना चाहते है पर भारत में उपलब्ध आँकड़ा 1985 का है, पर जापान का आँकड़ा 1987 का है। ऐसी स्थिति में तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि हम भारतीय आँकड़ों के आधार पर 1987 के आँकड़े का आन्तरगणन करें।

(ब) देश की 11वीं योजनाओं की रूपरेखा तैयार करने के लिए यह आवश्यक है कि योजना बनाने से सम्बन्धी भावी आँकड़े ज्ञात हों, इन अज्ञात समंकों के ज्ञान के बिना योजनाएं नहीं बनायी जा सकती।

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाओं का सभी क्षेत्रों में अत्यधिक महत्त्व है। इन विधियों द्वारा प्राप्त आकलनों का प्रशासकों, व्यापारियों, समाजशास्त्रियों, अर्थशास्त्री, नियोजन–विशेषज्ञ, राजनीतिज्ञ, शासक, समाज–सुधारक तथा वैज्ञानिकों के लिए बड़ा व्यावहारिक महत्त्व है। उद्योग एवं व्यापार अनुमानों पर आधारित होते हैं। विश्वसनीय अनुमान लगाने के लिए उद्योगपतियों एवं व्यापारियों द्वारा आन्तरगणन वं बाह्यगणन का प्रयोग किया जाता है। एक वित्तमंत्री अपने बजट सुझावों तथा अनुमानों को इन्हीं आकलनों के आधार पर बनाता है। इसी प्रकार बाह्यगणन का भी व्यापारिक पूर्वानुमान (business forecasting) में बहुत अधिक महत्त्व है।

14.6 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिशुद्धता (Accuracy of interpolation and extapolation)

आन्तरगणन व बाह्यगणन की क्रियाएं उपर्युक्त दो महत्त्वपूर्ण मान्यताओं के आधार पर की जाती है। अतः उनके द्वारा ज्ञात अनुमान यथोचित रूप से ही परिशुद्ध होते हैं। परन्तु यह ध्यान रखना चाहिए कि वे अनुमान–मात्र है। अतः वे वास्तविक समंकों की भाँति परिशुद्ध

नहीं हो सकते। यदि आधारभूत मान्यताएँ पूरी नहीं होती तो आन्तरगणन व बाह्यगणन द्वारा प्राप्त सम्भाव्य अनुमान भी भ्रमात्मक और अशुद्ध होते हैं।

डा0 बाउले के अनुसार आन्तरगणन की परिशुद्धता निम्न दो बातों पर निर्भर है –

(i) समंकों के सम्भाव्य उच्चावचनों का ज्ञान – दिए हुए समंकों से होने वाले उतार–चढ़ाव के सम्बन्ध में जितनी अधिक जानकारी होगी, आन्तरगणित मूल्यों में उतना अधिक यथार्थता व विश्वसनीयता का अंश होगा। यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से उच्चावचन होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

(ii) समंकों से सम्बन्धित घटनाओं का ज्ञान – यदि सांख्यिकी को उपलब्ध समंकों पर प्रभाव डालने वाली महत्त्वपूर्ण घटनाओं का भी यथेष्ट ज्ञात है, तो वह सभी तथ्यों को ध्यान में रखते हुए आन्तरगणित मूल्यों में आवश्यक संशोधन करके उन्हें अधिक शुद्ध बना सकता है। उदाहरणार्थ, 1947 में भारत की जनसंख्या का आन्तरगणन करते समय देश के विभाजन के कारण उत्पन्न घटनाओं (जैसे शरणार्थियों का भारी संख्या में आना, साम्प्रदायिक दंगे आदि) के आधार पर अनुमानित संख्या में आवश्यक संशोधन कर देने से उसकी शुद्धता अधिक हो जाएगी।

उपर्युक्त दो बातों के अतिरिक्त आन्तरगणित मूल्यों की यथार्थता बहुत कुछ उपयुक्त रीति के प्रयोग पर भी निर्भर करती है। अतः उपयुक्त रीति का चुनाव बहुत महत्त्वपूर्ण है।

14.7 आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विधियाँ (**Methods of Interpolation and Extrapolation**)

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विधियों को मुख्य रूप से दो भागों में बाँटा जा सकता है –

(i) बिन्दु रेखीय या ग्रैफिक विधि (Graphic Method)

(ii) बीजगणितीय विधियाँ (Algebraic Method)

14.7.1 बिन्दु रेखीय या ग्रैफिक विधि (**Graphic Method**)

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की यह सबसे सरल रीति है और सब प्रकार के समंकों पर लागू होती है। स्वतंत्र चर मूल्य (independent variable x) को X अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है। रेखा चित्र पर बिन्दु (plot) कर लिये जाते हैं अर्थात् x के सापेक्ष दिए हुए y के मूल्यों को प्रांकित कर लिया जाता है और इन बिन्दुओं को मिला दिया जाता है। x के जिस मूल्य के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात करना हो, वहाँ से एक लम्ब उस वक्र पर डाला जाता है जो बिन्दुओं के मिलाने से प्राप्त हुआ है। यह लम्ब वक्र को जिस बिन्दु पर काटे वहाँ एक लम्ब Y अक्ष पर डाला जाता है और इस मूल्य की गणना कर ली जाती है। यही अभीष्ट आकलन है।

बाह्यगणन करते समय वक्र को आगे बढ़ाया जाता है और फिर *x* के जिस मूल्य के सापेक्ष *y* का मूल्य ज्ञात करना हो, वहाँ से इस वक्र पर लम्ब डाला जाता है। इस विधि में बाह्यगणन की अपेक्षा आन्तरगणन अधिक शुद्धता से प्राप्त किया जाता है।

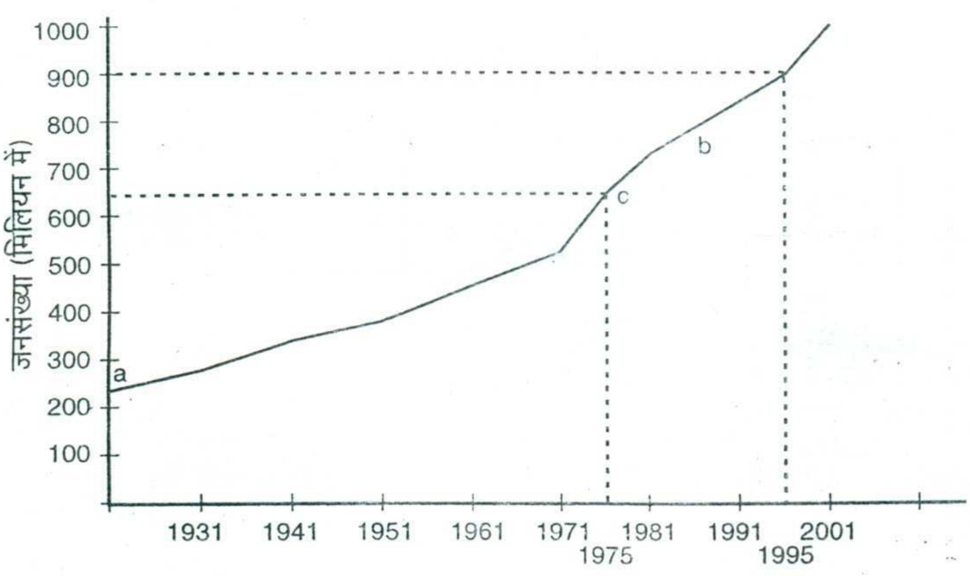
नीचे दिये गये एक उदाहरण के द्वारा इसे और स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण (**Illustration**) : 1

नीचे दी गयी सारिणी में भारत में जनगणना के परिणाम दिए हुए हैं जिसके आधार पर 1975 की जनसंख्या का आन्तरगणन तथा 1995 की जनसंख्या का बाह्यगणन ज्ञात कीजिए।

जनगणना वर्ष	1931	1941	1951	1961	1971	1981	1991
जनसंख्या (मिलियन में)	279	319	361	439	548	863	844

हल – ऊपर दी गयी सारिणी में विभिन्न जनगणना से सम्बन्धित वर्षों से सम्बन्धित जनसंख्या दी गयी है, जिसके आधार पर हमें 1975 वर्ष के लिए जनसंख्या का आन्तरगणन तथा 1995 वर्ष के लिए जनसंख्या का बाह्यगणन करना है। सारिणी में 'वर्ष' स्वतंत्र चर तथा उससे सम्बन्धित जनसंख्या आश्रित चर है। स्वतंत्र चर या वर्षों को *X* अक्ष पर प्रदर्शित किया गया तथा आश्रित चरों को *Y* अक्ष पर प्रदर्शित किया गया है। *X* से सम्बन्धित चरों को ग्राफ पर अंकित करके *ab* वक्र प्राप्त की गयी है जो विभिन्न वर्षों से सम्बन्धित जनसंख्या प्रदर्शित कर रही है, जैसा –



अब प्रश्न के अनुसार हमें 1975 से सम्बन्धित जनसंख्या का आन्तरगणन करना है। सबसे पहले हम *X* अक्ष पर 1975 वर्ष ज्ञात करेंगे, उसके बाद 1975 से सम्बन्धित बिन्दु से ऊपर लम्ब अक्ष के समानान्तरण एक सीधी रेखा खीचेंगे जो *ab* को *c* बिन्दु पर काटती है।

c बिन्दु ही 1975 से सम्बन्धित बिन्दु है जिससे होकर *ab* गुजरती है। अब यदि हम *c* बिन्दु से *Y* अक्ष पर लम्ब डालें तो हमें 1975 से सम्बन्धित ज्ञात हो जाएगी, जो ---- है।

इसी प्रकार यदि हमें 1995 के लिए जनसंख्या बाह्यगणन करना हो तो हम सबसे पहले *X* अक्ष पर 1995 ज्ञात करेंगे जहाँ से एक सीधी रेखा लम्बवत् ऊपर खीचेंगे तथा *ab* को बढ़ाने में जो उस लम्बवत् रेखा को *d* पर काटती है। *d* से *Y* अक्ष पर लम्ब खींचकर 1995 की जनसंख्या ज्ञात कर लेंगे जो ----- है।

यहाँ एक बात और उल्लेखनीय है कि यदि आँकड़े अविच्छिन्न श्रेणी या वर्गान्तर के रूप में हो तो मध्य बिन्दुओं को *X* अक्ष पर तथा आवृत्तियों को *Y* अक्ष पर अंकित करेंगे। शेष प्रक्रिया पहले की ही तरह होगी, और इस स्थिति में भी हम आन्तरगणन तथा बाह्यगणन क्रिया कर लेंगे।

14.7.2 आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की बीजगणितीय विधियाँ (**Algebraic Methods**)

बीजगणितीय विधि के अन्तर्गत आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की अनेक विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है जिन्हें हम मोटे तौर पर दो भागों में विभक्त कर सकते हैं –

जब समंक माला के चर बराबर अन्तर (equal intervals) से बढ़े तथा जब समंक माला के चर असमान अन्तर (unequal intervals) से बढ़े। इस स्थिति में निम्नांकित सूत्र प्रयुक्त होते हैं –

(i) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि (Direct Binomial Expansion Method)

(ii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि (Newton's method of Advancing Differences)

(iii) लाग्रैंज विधि (Lagrange's Method)

(iv) परवलयिक–वक्र विधि (Parabolic Curve Method)

(v) अन्य रीतियाँ (Other Methods)

- (क) न्यूटन–गॉस (अग्रगामी) विधि [Newton Gauss (Forward) Method]
- (ख) न्यूटन–गॉस (पृष्ठगामी) विधि [Newton Gauss (Backward) Method]
- (ग) स्टर्लिंग का सूत्र विधि (Sterling's Formula Method)
- (घ) न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि (Newton's method for divided differences)

(i) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि (Direct Binomial Expansion Method)

प्रयोग – यह विधि द्विपद–प्रमेय (Binomial Theorem) पर आधारित है। इसका प्रयोग तब किया जाता है जब निम्न दो शर्तें पूरी होती है – (क) स्वतंत्र चर (x) के पद बराबर अन्तर से बढ़ते हैं, जैसे 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999 या 1961, 1971, 1981, 1991, 2001... (ख) इन बराबर अन्तर वाले (equidistant) पदों में से ही किसी एक x मूल्य के आश्रित पद y का मूल्य अनुमानित करना होता है। उदाहरणार्थ, यदि 1961, 1971, 1981 और 1991 जनगणना वर्षों में से किसी नगर की 1961, 1971 और 1991 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1981 की जनसंख्या अनुमानित करनी हो तो द्विपद–विस्तार विधि द्वारा आन्तरगणन किया जाएगा क्योंकि 1961, 1971, 1981 और 1991 के अन्तर समान (10) हैं। इस प्रकार यदि 1961, 1971, 1981 और 1991 के भारत की जनसंख्या के आँकड़े ज्ञात हैं और उनकी सहायता से 2001 के लिए जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो भी यही विधि अपनायी जाएगी।

प्रक्रिया – इस विधि की निम्नांकित प्रक्रियाएँ हैं –

(i) स्वतंत्र चर–मूल्य (x) के पदों को क्रमानुसार $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ तथा $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ आदि संकेताक्षरों द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(ii) y के जितने मूल्य ज्ञात होते हैं उनका प्रमुख अन्तर (leading difference) सदैव शून्य माना जाता हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए y श्रेणी के ज्ञात मूल्य 5 है तो पाचवाँ प्रमुख अन्तर (5th leading difference) शून्य होगा $\Delta_0^5 = 0$

सूत्र की दृष्टि से : $\Delta_0^n = 0;\ \ n = y$ श्रेणी के ज्ञात मूल्यों की संख्या $\Delta_0^n = (y-1)^n$

$$= y^n - y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\times 2} y^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} y^{n-3} + \ldots = 0$$

यदि y के ज्ञात मूयों की संख्या (n) 5 हो, तो –

$$\Delta_0^5 = (y-1)^5 = y^5 - \frac{5y^{5-1}}{1} + \frac{5(5-1)}{1\times 2} y^{5-2} - \frac{5(5-1)(5-2)}{1\times 2\times 3} y^{5-3}$$

$$+ \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1\times 2\times 3\times 4} y^{5-4} - \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} y^{5-5} = 0$$

इसको हल करने पर निम्न समीकरण प्राप्त होती है –

$$= y_5 - 5y_4 + 10_{Y3} - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

सूत्र निकालने की एक व्यावहारिक व सरल विधि

द्विपद विस्तार का उपरोक्त ढंग बहुत जटिल है। इसलिए इसकी एक सरल विधि नीचे दी जा रही है –

(क) जिस प्रमुख अन्तर के लिए द्विपद–विस्तार करना हो पहले उसे उस क्रम के y को लिखा जाएगा। फिर अवरोही क्रम में y का घात, अधोलिखित संकेत के रूप में एक–एक कम करते जाएंगे जिससे अन्त में y_0 आ जाए। जैसे यदि 5 मूल्य ज्ञात हों तो पाचवाँ प्रमुखान्तर शून्य होगा और y को निम्न क्रमानुसार लिखा जाएगा –

$$y_5 \quad y_4 \quad y_3 \quad y_2 \quad y_1 \quad y_0$$

(ख) प्रथम y धनात्मक होगा, अगला y ऋणात्मक, फिर उससे अगला y धनात्मक और इसी प्रकार अन्त तक चिन्ह एकान्तर (alternate) रूप में लिखे जाएंगे। जैसे $+y_5 - y_4 + y_3 - y_2 + y_1 - y_0$

(ग) विभिन्न y's के अंकात्मक गुणक (numerical coefficients) निकालने की विधि इस प्रकार होगी। पहले लिखे जाने वाले y का गुणक 1 होगा। इससे आगे के y_s के अंकात्मक गुणक निम्न सूत्रानुसार प्राप्त होंगे –

$$\frac{\text{पिछले } y \text{ का गुणक} \times \text{पिछले } y \text{ का अधोसंकेत}}{\text{पिछले } y \text{ की क्रम–स्थिति}}$$

उक्त उदाहरण में,

$$1y_5 - \frac{1\times5}{1}y_4 + \frac{5\times4}{2}y_3 - \frac{10\times3}{3}y_2 + \frac{10\times2}{4}y_1 - \frac{5\times1}{5}y_0 = 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

द्विपद विस्तार में y के गुणांक पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle) से भी ज्ञात किये जा सकते हैं।

पास्कल त्रिभुज (**Pascal's Triangle**)

n	अंकात्मक गुणांक (Numerical Coefficient)	योग (2^n)
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32

6			1	6	15	20	15	6	1		64
7		1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256

कुछ द्विपद–विस्तार –

ज्ञात मूल्यों की संख्या	मूल सूत्र	द्विपद–विस्तार
2	$(y-1)^2=0$	$y_2-2y_1+y_0=0$
3	$(y-1)^3=0$	$y_3-3y_2+3y_1-y_0=0$
4	$(y-1)^4=0$	$y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0=0$
5	$(y-1)^5=0$	$y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0$
6	$(y-1)^6=0$	$y_6-6y_5+15y_4-20y_3+15y_2-6y_1+y_0=0$

उदाहरण (**Illustration**) : 2

निम्न मूल्यों के आधार पर किसी भी बीजगणितीय विधि का प्रयोग करते हुए y का मूल्य ज्ञात कीजिए जब $x = 3$ हो –

x :	1	2	3	4	5
y :	216000	226981	?	250047	262144

हल – द्विपद विस्तार विधि का प्रयोग किया जाएगा क्योंकि इसकी दोनों शर्तें पूरी हो रही है। प्रथम, x श्रेणी के क्रमिक पदों में समान अन्तर है। दूसरा, आन्तरगणित किया जाने वाला मूल्य x_3, x श्रेणी के समान अन्तर वाले पदों में से ही एक पद है।

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x :	1	2	3	4	5
y :	216000	226981	?	250047	262144
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

y – श्रेणी के 4 पद ज्ञात हैं अतः $\Delta_0^4=0$ मानकर उसका द्विपद विस्तार लिखा जाएगा –

$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

ज्ञात मूल्यों को समीकरण में आदिष्ट करने पर –

$262144 - 4 \times 250047 + 6y_2 - 4 \times 226981 + 216000 = 0$

$262144 - 1000188 + 6y_2 - 907924 + 216000 = 0$

$478144 - 1908112 + 6y_2 = 0$

$6y_2 = 1429968 \quad \therefore y_2 = 238328$

अतः $x = 3$ के लिए y का अनुमानित मूल्य 238328 है।

दो अज्ञात मूल्य (**Two Missing Values**)

जब स्वतंत्र चर–मूल्यों (x's) के अन्तर समान हों और दो अज्ञात मूल्यों (y's) का आन्तरगणन करना हो तो दो समीकरणों की आवश्यकता होती है। प्रथम, ज्ञात मूल्यों की संख्या के बराबर प्रमुख अन्तर को शून्य मानकर द्विपद– विस्तार लिखा जाता है। दूसरे, उक्त द्विपद–विस्तार को फिर से लिखकर प्रत्येक y के अधोलिखित संकेत (subscript) में 1 की वृद्धि कर देते हैं जिससे, अन्त में y_0 के स्थान पर y_1 प्राप्त हो जाता है। तत्पश्चात् ज्ञात मूल्यों को दोनों समीकरणों में आदिष्ट करके, उनके हल द्वारा अज्ञात मूल्य अनुमानित कर लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 7 मूल्य ज्ञात हों और 2 अज्ञात मूल्यों का आन्तरगणन करना हो, तो निम्न दो समीकरण बनाए जाएंगे –

$$\Delta_0^7 = y_7 - 7y_6 + 21y_5 - 35y_4 + 35y_3 - 21y_2 + 7y_1 - y_0 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\Delta_1^7 = y_8 - 7y_7 + 21y_6 - 35y_5 + 35y_4 - 21y_3 + 7y_2 - y_1 = 0 \quad \ldots (2)$$

इन दोनों द्विपद समीकरणों की सहायता से दो अज्ञात मूल्यों के सम्भाव्य अनुमान लगा लिए जाएंगे।

उदाहरण (**Illustration**) : 3

निम्न सारिणी की सहायता से 1980 और 1990 के लिए उत्पादन का अनुमान लगाइए –

वर्ष :	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
उत्पादन (000 टनों में) :	200	220	260	?	350	?	430

हल :

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
वर्ष (x) :	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995

उत्पादन (y) :	200	220	260	?	350	?	430
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_5

x's का अन्तर समान होने के कारण प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार विधि प्रयुक्त की जाएगी। y के 5 मूल्य ज्ञात हैं और 2 अज्ञात। इसलिए पाँचवें प्रमुख–अन्तर से सम्बन्धित द्विपद–विस्तार का प्रयोग दो बार निम्न प्रकार किया जाएगा –

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$y_6 - 5y_5 + 10y_2 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0 \qquad \dots (2)$$

ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर –

$$y_5 - 5 \times 350 + 10y_3 - 10 \times 260 + 5 \times 220 - 200 = 0$$

$$430 - 5y_5 + 10 \times 350 - 10y_3 + 5 \times 260 - 220 = 0$$

$$\therefore\ y_5 + 10y_3 = +\,3450 \qquad \dots (3)$$

$$-5y_5 - 10y_3 = -5010 \qquad \dots (4)$$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर निम्न समीकरण उपलब्ध होता है –

$$-\,4y_5 = -1560 \qquad \therefore\ y_5 = 390$$

y_5 के मूल्य को समीकरण (3) में आदिष्ट करने पर y_3 का मूल्य निम्न प्रकार निकाला जाएगा –

$$390 + 10y_3 = 3450$$

$$\therefore\ y_3 = \frac{3450 - 390}{10} = 306$$

1985 और 1990 में उत्पादन की अनुमानित मात्रा के समंक क्रमशः 306 और 390 हजार टन हैं।

जब मूल्यों में असाधारण उच्चावचन हो

कभी–कभी ऐसा भी देखने में आता है कि दिये गये प्रश्न में एक–आध मूल्य असाधारण रूप से उच्चावचन लिए हुए होता है। ऐसी परिस्थिति में, वांछित मूल्य का आन्तरगणन करने से पूर्व, अनियमित मूल्य को नियमित व सामान्य कर लेना चाहिए अन्यथा अनुमानित किये जाने वाला मूल्य गलत होगा।

उदाहरण (**Illustration**) : 4

एक जिले की विभिन्न वर्षों की जनसंख्या नीचे दी गयी है। वर्ष 1915 की जनसंख्या अनुमानित कीजिए –

वर्ष :	1910	1911	1912	1913	1914
जनसंख्या (मिलियन में) :	7	9	36	14	16

हल : नोट : इस प्रश्न में 1915 के वर्ष के लिए जनसंख्या अनुमानित करने से पहले 1912 के लिए जनसंख्या आ अनुमान लगाना होगा, क्योंकि 1912 पर जनसंख्या में अत्यधिक उतार–चढ़ाव (jump) हुआ है जो कि आन्तरगणन की मान्यताओं की दृष्टि से सही नहीं है।

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
वर्ष (x) :	1910	1911	1912	1913	1914
जनसंख्या (y) :	7	9	36	14	16
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

चूंकि ज्ञात मूल्य 4 है इसलिए $\Delta_0^4 = 0$

$$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$16 - (4\times14) + 6y_2 - (4\times9) + 7 = 0$$

$$16-56+6y_2-36+7 = 0$$

$$6y_2 = -23 + 92$$

$6y_2 = 69$ मि0 $\quad\therefore\ y_2 = 11.5$ मिलियन

अब 1915 के वर्ष के लिए जनसंख्या अनुमानित की जाएगी –

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
वर्ष :	1910	1911	1912	1913	1914	1915
जनसंख्या (मि0) :	7	9	11.5	14	16	?
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

चूंकि ज्ञात मूल्य 5 है अतएव $\Delta_0^5 = 0$

$$\Delta_0^5 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

or $\quad y_5 - (5\times16) + (10\times14) - (10\times 11.5) + (5\times9) - 7 = 0$

$$y_5 - 80+140-115+45-7 = 0$$

$y_5 = 202 - 185 \qquad \therefore \; y_5 = 17$ मिलियन

अतः 1915 वर्ष के लिए जनसंख्या 17 मि0 है।

(ii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि (**Newton's Method of Advancing Differences**)

न्यूटन की प्रगामी अन्तर विधि द्विपद–प्रमेय पर ही आधारित है। इस विधि का प्रयोग उस परिस्थिति में करना चाहिए जिसमें स्वतंत्र श्रेणी (*x*) के दिए हुए पदों के अन्तर समान हों परन्तु जिस पद (*x*) के लिए आश्रित चर के पद (y_x) का आन्तरगणन करना हो वह दिए हुए स्वतंत्र चर मूल्यों से सर्वथा भिन्न हो अर्थात् वह समान अन्तर वाले *x*'s से भिन्न अन्य कोई मूल्य हो। उदाहरणार्थ यदि राष्ट्रीय आय प्रति 5 वर्ष के अन्तर से दी हुई हो – 1920, 1925, 1930, 1935, 1940 तो ऐसी हालत में अगर 1922 या 1938 के वर्ष के लिए राष्ट्रीय आय ज्ञात करनी हो तो इस न्यूटन प्रगामी अन्तर विधि का प्रयोग किया जाएगा। इस विधि का प्रयोग बाह्यगणन के लिए भी किया जा सकता है परन्तु यह समंक माला के पूर्वार्द्ध में किसी **'*x*'** के आश्रित मूल्य (y_x) का आन्तरगणन करने के लिए अधिक उपयुक्त होती है।

प्रयोग करने की दृष्टि से ''प्रगामी अन्तर विधि'' तथा ''द्विपद विस्तर रीति'' में अन्तर –

दोनों, प्रगामी तथा द्विपद विस्तार रीतियों में ***x*** श्रेणी या स्वतंत्र चरों का समान रूप से बढ़ना आवश्यक है, परन्तु ***x*** के जिस मूल्य आ आन्तरगणन करना होता है वह प्रगामी अन्तर रीति में ***x*** श्रेणी का ही एक नियमित मूल्य न होकर उनके बीच का कोई अज्ञात व अनियमित मूल्य हो सकता है जबकि द्विपद विस्तार रीति में आन्तरगणित किये जाने वाला मूल्य ***x*** श्रेणी का स्वतः एक नियमित मूल्य होता है।

उदाहरणार्थ –

प्रगामी अन्तर विधि (1)		द्विपद विस्तार विधि (2)	
x	*y*	*x*	*xy*
10	132	10	132
20	140	20	140
30	155	30	155
40	172	40	?
50	190	50	190

उपर्युक्त उदाहरण (1) में 10, 20, 30, 40, 50 के मूल्यों को छोड़कर अन्य किसी भी बीच में आने वाले मूल्य का अनुमान प्रगामी अन्तर विधि द्वारा किया जाएगा, जैसे – 12, 18,

28, 35, 42 इत्यादि। जबकि उदाहरण (2) के ज्ञात किये जाने वाला मूल्य x श्रेणी में से ही कोई एक होगा जैसे 40 पर y का मूल्य ज्ञात करना।

क्रिया विधि – न्यूटन प्रगामी अन्तर विधि में निम्न क्रियाएँ अपनायी जाती है :

(1) **संकेताक्षर** – (**i**) सबसे पहले x श्रेणी के मूल्यों को क्रमानुसार x_0, x_1, x_2, x_3 .... x_n आदि संकेताक्षरों द्वारा तथा y श्रेणी के मूल्यों को क्रमानुसार $y_0, y_2, \quad y_3$ .... y_n आदि संकेताक्षरों द्वारा दिखाया जाता है। (**ii**) x श्रेणी के जिस पद का मूल्य आन्तरगणन (interpolate) करना होता है उसे 'x' संकेताक्षर द्वारा प्रकट किया जाता है और (**iii**) x पर आश्रित y श्रेणी के जिस मूल्य का आन्तरगणन करना हो उसे "y_x" द्वारा प्रकट किया जाता है।

(2) **अन्तर सारणी की रचना** – y के प्रमुखान्तरों को ज्ञात करने के लिए परिमितान्तरों की सारणी (Table of Finite Differences) बनायी जाती है जिसमें स्वतंत्र व आश्रित चरों के अतिरिक्त y के ज्ञात मूल्यों की संख्या से एक कम संख्या में अन्तरों के खाने (columns) होते हैं। प्रत्येक कॉलम के प्रथम अन्तर को 'प्रमुखान्तर' (leading differences) कहते हैं तथा इसको Δ चिन्ह द्वारा प्रकट किया जाता है – प्रथम, द्वितीय, तृतीय आदि प्रमुखान्तरों के लिए कॉलम के ऊपर Δ^1, Δ^2, Δ^3 आदि चिन्ह रखे जाते हैं। अन्तर निकालनें के लिए y के प्रत्येक मूल्य में से पिछला मूल्य घटाया जाता है, जैसे प्रथम अन्तरों के खाने में $y_1 - y_0 = \Delta_0^1$; $y_2 - y_1 = \Delta_1^1$; $y_3 - y_2 = \Delta_2^1$ आदि। दूसरे खाने के अन्तरों को पहले खाने के अन्तरों की सहायता से इसी प्रकार निकाला जाएगा अर्थात् $\Delta_1^1 - \Delta_0^1 = \Delta_0^2$; $\Delta_2^1 - \Delta_1^1 = \Delta_1^2$; $\Delta_3^1 \ \Delta_2^1 = \Delta_2^2 ...,$ इसी प्रकार अन्त तक अन्तर निकाले जाएंगे। अन्तरों की संख्या कम होती जाएगी और अन्तिम खाने में एक मात्र अन्तर रहेगा।

अन्तर सारणी (**Table of Differences**)

स्वतंत्र चर (***x***)	आश्रित चर (***y***)	अन्तर							
		प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
x_0	y_0								
		$y_1 - y_0$	Δ_0^1						
x_1	y_1			$\Delta_1^1 - \Delta_0^1$	Δ_0^2				
		$y_2 - y_1$	Δ_1^1			$\Delta_1^2 - \Delta_0^2$	Δ_0^3		
x_2	y_2			$\Delta_2^1 - \Delta_1^1$	Δ_1^2			$\Delta_1^3 - \Delta_0^3$	Δ_0^4
		$y_3 - y_2$	Δ_2^1						
x_3	y_3								

x_4	y_4	$y_4 - y_3$	Δ_3^1	$\Delta_3^1 - \Delta_2^1$	Δ_2^2	$\Delta_2^2 - \Delta_1^2$	Δ_1^3		

नोट – अन्तर सारणी में विभिन्न स्तरों पर अन्तर लेते समय बीजगणितीय चिन्हों (+ व –) का विशेष ध्यान रचना चाहिए क्योंकि किसी एक अन्तर के अशुद्ध होने पर अन्तरों की पूरी श्रृंखला अशुद्ध हो जाती है।

सारणी देखने से स्पष्ट हो जाता है कि यदि सभी प्रमुखान्तर ज्ञात हों तो उनकी सहायता से बाकी सभी अन्तर और y के मूल्य आसानी से ज्ञात किये जा सकते हैं –

सूत्रानुसार –

$$y_1 = y_0 + \Delta_0^1$$

$$y_2 = y_1 + \Delta_1^1 = y_0 + \Delta_0^1 + \Delta_0^2 + \Delta_0^1 = y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2$$

$$y_3 = y_2 + \Delta_2^1 = (y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_1^2)$$

$$= y_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2 + (\Delta_0^2 + \Delta_0^1) + (\Delta_0^2 + \Delta_0^3)$$

$$= y_0 + 3\Delta_0^1 + 3\Delta_0^2 + \Delta_0^3$$

प्रमुखान्तर और द्विपद–विस्तार – प्रमुखान्तरों को यदि ज्ञात y's के रूप में व्यक्त किया जाये तो द्विपद–विस्तार प्राप्त हो जाते हैं, उदाहरणार्थ –

$$\Delta_0^1 = y_1 - y_0$$

$$\Delta_0^2 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta_0^3 = \Delta_1^2 - \Delta_0^2 = (\Delta_2^1 - \Delta_1^1) - \Delta_0^2 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta_0^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

(3) **स्वतंत्र चर मूल्यों के अन्तर** – प्रमुखान्तर निकालने के बाद निम्न सूत्र द्वारा x_x और x_0 के अन्तर का x's के समान अन्तरों पर अनुपात निकाला जाता है –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद – मूल पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}}$$

Item of Interpolation – Item of Origin

= ————————————————————

Difference between adjoining item

$x_x - x_0$

= ———

$x_1 - x_0$

(4) **सूत्र** – अन्त में निम्न सूत्र जिसे 'न्यूटन ग्रेगोरी सूत्र' भी कहते हैं, का प्रयोग किया जाता है –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta_0^4 + \dots$$

महत्वपूर्ण संकेत – सूत्र का आकार प्रमुखान्तरों व पदों की संख्या पर निर्भर करता है। सूत्र का उपर्युक्त रूप 4 प्रमुखान्तरों वाले प्रश्न के लिए उदाहरण स्वरूप है। अगर मान लीजिए 5वाँ प्रमुखान्तर (leading difference) भी निकलता, तो सूत्र में निम्न विस्तार और करना पड़ता – $+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\Delta_0^5$

उदाहरण (**Illustration**) : 5

निम्न समंकों के आधार पर 16 वर्ष की आयु पर जीवन प्रत्याशा का अनुमान लगाइए –

आयु (वर्ष) :	15	20	25	30	35
जीवन–प्रत्याशा (वर्ष) :	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

हल : अन्तर सारणी (**Table of Difference**)

आयु (वर्ष) x		जीवन प्रत्याशा (वर्ष) y		अन्तर (Difference)							
				प्रथम (First)		द्वितीय (Second)		तृतीय (Third)		चतुर्थ (Fourth)	
15	x_0	32.2	y_0								
				29.1–32.2	–3.1 Δ_0^1						
20	x_1	29.1	y_1			–3.1–(–3.1)	0 Δ_0^2				
				26.0–29.1	–3.1			0.2–0	0.2 Δ_0^3		
25	x_2	26.0	y_2			–2.9–(3.1)	0.2				
30	x_3	23.1	y_3							0–0.2	–0.2 Δ_0^4

35	x_4	20.4	y_4	23.1–26.0	–2.9	–2.7– (2.9)	0.2	0.2–0.2	0		
22	x_x	?	y_x	20.4–23.1	–2.7						

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन – मूल वर्ष}}{\text{निकटवर्ती वर्षों का अन्तर}} = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{22 - 15}{20 - 15} = 1.4$$

ज्ञात मूल्यों की संख्या 5 है अतएव न्यूटन का सूत्र चौथे प्रमुखान्तर (Δ_0^4) तक लिखा जाएगा –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta_0^*$$

$$y_x = 32.2 + 1.4\times(-3.1) + \frac{1.4\times 0.4}{2}\times 0 + \frac{1.4\times 0.4\times(-0.6)}{2\times 3}\times 0.2$$

$$+ \frac{1.4\times 0.4\times(-0.6)\times(-1.4)}{2\times 3\times 4}\times 0.2$$

$$y_x = 32.2 - 4.34 + 0 - 0.0112 - 0.004 = 32.2 - 4.35 = 27.8$$

अतः 22 वर्ष की आयु के लिए जीवन–प्रत्याशा 27.8 वर्ष है।

आवृत्ति वितरण में आन्तरगणन (**Interpolation in Frequency Series**)

(i) आवृत्ति वितरण में आवृत्तियों को संचयी (cumulative) बनाकर आन्तरगणन किया जाता है। शेष क्रिया पूर्ववत् ही बनी रहती है।

(ii) कभी–कभी अनुमानित मूल्य किसी निश्चित समय या मूल्य के लिए न निकलवा कर दो सीमाओं के बीच के लिए निकलवाया जाता है जिसका एक उपयुक्त उदाहरण हम नीचे दे रहे हैं। ऐसे प्रश्नों के लिए भी न्यूटन की विधि ही उपयुक्त समझी जाती है।

उदाहरण (**Illustration**) : 6

निम्न सारणी से (i) 45 से कम (ii) 55 से कम, तथा (iii) 45–55 के बीच अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक (Marks) :	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
विद्यार्थियों की संख्या : (No. of Students)	31	42	51	35	31

हल : पहले, संचयी आवृत्ति वितरण के रूप बदलकर अन्तर–सारणी बनाई जाएगी –

अन्तर–सारणी (**Table of Differences**)

अंक x		विद्यार्थियों की संख्या y		अन्तर (**Differences**) प्रथम		द्वितीय		तृतीय		चतुर्थ	
40 से कम	x_0	31	y_0	+42	Δ_0^1	+9	Δ_0^2	–25	Δ_0^3	+37	Δ_0^4
50 से कम	x_1	73	y_1	+51		–16		+12			
60 से कम	x_2	124	y_2	+35		–4					
70 से कम	x_3	159	y_3	+31							
80 से कम	x_4	190	y_4								
45 से कम	x_x	?	y_x								

(i) 45 से कम प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

$$x = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{45-40}{50-40} = \frac{5}{10} = 0.5$$

चौथे प्रमुखान्तर तक न्यूटन का प्रगामी–अन्तर सूत्र लिखकर उसमें ज्ञात मूल्यों को रखा जाएगा –

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta_0^4$$

$$y_x = 31 + (0.5\times 42) + \frac{0.5(0.5-1)}{1\times 2}\times 9 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{1\times 2\times 3}\times(-25) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\times 37$$

= 31 + 21 – 1.125 – 1.5625 – 1.4453

= 47.8672 या 48 approx.

अतः 45 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 48 है।

(ii) 55 से कम प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन का पद} - \text{मूल पद}}{\text{आसन्न पदों का अन्तर}} = \frac{55-40}{60-50} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$y_x = 31 + (1.5 \times 42) + \frac{1.5(1.5-1)}{1 \times 2} \times 9 + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{1 \times 2 \times 3} \times (-25)$$

$$+ \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 37$$

$$= 31 + 63 + 3.375 + 1.5625 + 0.8672$$

= 99.8047 or 100 approx.

अतः 55 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 100 है।

(iii) 45 से 55 के बीच प्राप्तांकों के लिए आन्तरगणन –

45 से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या = 48

55 से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या = 100

∴ 45 से 55 के बीच अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या = 100 – 48 = 52

उदाहरण (**Illustration**) : 7

न्यूटन विधि द्वारा अधिकतम 35^0 सेन्टीग्रेड से सम्बद्ध न्यूनतम सम्भावित तापमान ज्ञात कीजिए –

अधिकतम तापमान :	36	34	32	30	28
न्यूनतम तापमान :	21	19	16	12	11

हल : $$x = \frac{x_x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{35-36}{34-36} = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

अन्तर–सारणी (**Table of Differences**)

तापमान x		तापमान y		प्रमुखान्तर							
				प्रथम Δ^1		द्वितीय Δ^2		तृतीय Δ^3		चतुर्थ Δ^4	
36	x_0	21	y_0								

34	x_1	19	y_1	−2	Δ_0^1	−1	Δ_0^2	0	Δ_0^3		
32	x_2	16	y_2	−3		−1				+4	Δ_0^4
30	x_3	12	y_3	−4		+3		+4			
28	x_4	11	y_4	−1							

$$y_x = 21 + (0.5 \times -2) + \frac{0.5(0.5-1)}{1 \times 2} \times (-1) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{1 \times 2 \times 3} \times 0 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 4$$

$$= 21 - 1 + 0.125 + 0 - 0.156$$

$$= 21.125 - 1.156 = 19.97 \qquad \therefore y_x = 20$$

टिप्पणी – यदि इस प्रश्न को 'अवरोही क्रम' के स्थान पर आरोही क्रम में रखकर हल किया जाये तो ऐसी दशा में प्रमुखान्तर क्रमशः +1, +3, −4, +4 होंगे और x का मान 3.5 आयेगा, किन्तु आन्तरगणन मूल्य एक–समान अर्थात् 19.97 ही निकलकर आयेगा।

(iii) लाग्रैंज की विधि (Lagrange's Method)

प्रयोग – फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ लाग्रैंज (Lagrange) द्वारा प्रतिपादित रीति आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति (universal method) है। सैद्धान्तिक दृष्टि से लाग्रैंज के सूत्र द्वारा किसी भी प्रकार की परिस्थिति में (चाहे स्वतंत्र चर मूल्यों के अन्तर समान हों या असमान हों) आन्तरगणन व बाह्यगणन किया जा सकता है। परन्तु व्यवहार में इस रीति का प्रयोग वहाँ किया जाता है जहाँ द्विपद–विस्तार रीति तथा न्यूटन की प्रगामी अन्तर–विधि प्रयुक्त न की जा सके अर्थात् जहाँ x's के अन्तर अनियमित या असमान (irregular or unequal intervals) हों। उदाहरणार्थ, यदि किसी नगर की 1981, 1985, 1990, 1991 और 1993 की जनसंख्या ज्ञात हो और 1989 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना हो या सन् 2002 ई0 की जनसंख्या का बाह्यगणन करना हो तो लाग्रैंज विधि ही अपनायी जाएगी क्योंकि वर्षों के अन्तर असमान है और इस स्थिति में द्विपद–विस्तार विधि या न्यूटन–विधि प्रयोग नहीं की जा सकती।

क्रिया विधि – (1) सर्वप्रथम x श्रेणी को x_0, x_1, x_2 ... आदि संकेताक्षरों तथा y श्रेणी को y_0, y_1, y_2 ... आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। स्वतंत्र पदमाला (x – series) के जिस मूल्य के लिए आन्तरगणन करना होता है उसे x द्वारा सम्बोधित किया जाता है और आश्रित श्रेणी के आन्तरगणित किये जाने वाले मूल्य को y_x कहते हैं।

(2) सूत्र के निर्माण करने हेतु नीचे एक काल्पनिक उदाहरण लिया जा रहा है। मान लीजिए x व y दो श्रेणी है और $x = 6$ पर y का मूल्य निकालना है।

x		y	
4	x_0	120	y_0
7	x_1	140	y_1
8	x_2	165	y_2
12	x_3	183	y_3

(i) अब सूत्र निर्माण के लिए सर्वप्रथम x's से x श्रेणी के सभी मूल्य घटाए जाएंगे परन्तु प्रथम मूल्य (y_0) का तत्सम्बन्धी (corresponding) x_0 मूल्य, x में से नहीं घटाया जाएगा। उदाहरणार्थ –

$$y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\ldots$$

(ii) सूत्र की इस प्रथम पंक्ति के 'हर' (denominator) मूल्सरें के लिए सदैव एक बात याद रखनी चाहिए कि x में से जो मूल्य नहीं घटाया गया था अर्थात् x_0, अब x श्रेणी के सभी मूल्य उसी (x_0) में से घटाये जायेंगे।

(iii) द्वितीय पंक्ति : $y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\ldots$

स्पष्ट है कि 'अंश' (numerator) के अन्तरों के लिए (अर्थात् पंक्ति के ऊपरी हिस्से में) x में से y_1 का तत्संवादी मूल्य x_1 नहीं घटाया गया है जबकि 'हर' में उसी x_1 में से ही x श्रेणी के सभी मूल्य घटाये गये हैं।

(iv) यह क्रम इसी प्रकार चलता रहेगा।

(v) सूत्र के विस्तार की सीमा, ज्ञात पदों की संख्या अर्थात् x_n पर निर्भर करती है। लाग्रेंज का सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

एक बार पुनः स्मरण रहे – सांख्यिकी की सभी किताबें यह बताती हैं कि लाग्रेंज का सूत्र मान्यता रहित है अतएव इसका प्रयोग प्रत्येक प्रकार के प्रश्न के लिए किया जा सकता है। लेकिन व्यवहार में परीक्षक ऐसा नहीं मानते। यदि कोई प्रश्न न्यूटन तथा द्विपद–विस्तार रीति

से निकालने योग्य है तो भले ही वह लाग्रैंज से भी हल किया जा सकता हो, लेकिन उसे लाग्रैंज से हल नहीं करना चाहिए।

उदाहरण (**Illustration**) : 8

निम्न तालिका में जीवन के प्रथम 6 माह के शिशु का सामान्य भार दिया हुआ है। 4 माह की आयु पर शिशु के भार का अनुमान लगाइए।

आयु (माह में) :	0	2	3	5	6
भार (पौण्ड में):	5	7	8	10	12

हल : स्वतंत्र चर के अन्तर असमान है अतः लाग्रैंज के सूत्र का प्रयोग किया जाएगा –

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x
आयु (age) x :	0	2	3	5	6	4
भार (weight) y :	5	7	8	10	12	?
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_x

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$+ y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y_x = \frac{5\times2\times1\times(-1)\times(-2)}{(-2)\times(-3)\times(-5)\times(-6)} + \frac{7\times4\times1\times(-1)\times(-2)}{2\times(-1)\times(-3)\times(-4)} + \frac{8\times4\times2\times(-1)\times(-2)}{3\times1\times(-2)\times(-3)}$$

$$+ \frac{10\times4\times2\times1\times(-2)}{5\times3\times2\times(-1)} + \frac{12\times4\times2\times1\times(-1)}{6\times4\times3\times1}$$

$$y_x = \frac{1}{9} - \frac{7}{3} + \frac{64}{9} + \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 0.111 - 2.3333 + 7.1111 + 5.3333 - 1.3333$$

$y_x = 12.5555 - 3.6666 = 8.8888\ or\ 8.9$ पौण्ड

अतः 4 महीने की आयु वाले शिशु का अनुमानित भार 8.9 पौण्ड है।

(iv) परवलयिक वक्र विधि (**Parabolic Curve Method**)

प्रयोग – लाग्रैंज की विधि की भाँति परवलय–वक्र विधि भी सार्वभौमिक रीति (universal method) है जिस की सहायता से भी किसी प्रकार की आन्तरगणन व बाह्यगणन की

समस्या का हल किया जा सकता है परन्तु गणन–क्रिया जटिल होने के कारण व्यवहार में इसका प्रयोग तब किया जाता है जबकि पदों की संख्या कम (3 या 4) हो और स्वतंत्र चर–मूल्यों में अधिकतम समान व थोड़ा अन्तर हो।

इस विधि में x का अज्ञात मूल्य ज्ञात करते समय हम यह मानते है कि y और x में परस्पर गणितीय सम्बन्ध है। दिए हुए समंकों के आधार पर निम्न समीकरण असंगित (fit) किया जाता है :

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

इस समीकरण में x तथा y के मूल्य इस प्रकार रखे जाते हैं कि जितने अचर पद (constants) $a, b, c, \ldots$ की संख्या है, उतने ही समीकरण प्राप्त हो जाएं। उसके बाद इन समीकरणाों को हल कर लिया जाता है। इससे $a, b, c, \ldots$ आदि के मान प्राप्त हो जाते हैं और इन्हें उपरोक्त समीकरण में रख दिया जाता है। अब x के किसी भी मूल्य के सापेक्ष y का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि हम इस समीकरण में x का वह मान लगा देते हैं।

समीकरण ज्ञात करने के लिए हम सबसे पहले ज्ञात मूल्यों की संख्या देखते हैं। यदि 4 मूल्य ज्ञात हों तो समीकरण : $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ होगा। जैसे–जैसे पदों की संख्या बढ़ती जाती है, समीकरण के पद भी बढ़ते जाते हैं। n पद ज्ञात होने पर समीकरण $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + nx^{n-1}$ निम्नांकित सारणी से इस नियम का सरल स्पष्टीकरण हो जाता है –

परवलय–वक्र समीकरण (**Parabolic Curve Equation**)

ज्ञात मूल्यों की संख्या **No. of known values (n)**	परवलय–वक्र का घात **Power of the Parabola (n – 1)**	समीकरण **Equation**
2	1	$y = a + bx$ सरल रेखा समीकरण
3	2	$y = a + bx + cx^2$
4	3	$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

5	4	$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$
n	$n–1$	$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+...+nx^{n-1}$

इसके बाद गणनाओं को सरल बनाने के लिए हम आन्तरगणन–पद को शून्य मानकर इसके सापेक्ष सभी स्वतंत्र चर मूल्यों (independent variable) के विचलन ज्ञात कर लेते हैं और इन विचलनों में से समावर्त्तक गुणक (common factor) निकाल देते हैं। x के इन मूल्यों और y के मूल्यों के आधार युगपत समीकरण (simultaneous equations) प्राप्त करके अचर पदों का मान ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण (**Illustration**) : 9

निम्न सारणी किसी फर्म की गत वर्षों की बिक्री प्रस्तुत करती है। परवलयिक–वक्र विधि (parabolic curve method) द्वारा उसकी 1991 की बिक्री आन्तरगणित कीजिए –

वर्ष	:	1981	1985	1989	1993
बिक्री (लाख रु0)	:	100	112	136	180

हल :

वर्ष	1985	1989	1991	1993	1997
विचलन : x's	–6 –3	–2 –1	0 0	+2 +1	+6 +3
बिक्री : y's	100	112	y	136	180

ज्ञात मूल्यों की संख्या 4 है। इसलिए तीसरे घात के परवलय–वक्र का समीकरण प्रयुक्त किया जाएगा –

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

उक्त समीकरण में ज्ञात मूल्य आदिष्ट करने पर निम्न 5 युगपत् समीकरणों की रचना की जाएगी –

$$100 = a + (bx – 3) + (cx – 3^2) + (dx – 3^3)$$

$100 = a - 3b + 9c - 27d$ ... (i)

$112 = a - b + c - d$ ... (ii)

$y = a$ ...(iii)

$136 = a + b + c + d$ ...(iv)

$180 = a + 3b + 9c + 27d$ ...(v)

समीकरण (iii) के अनुसार y का मूल्य a के बराबर है इसलिए बाकी समीकरणों की सहायता से a का मूल्य निकाला जाएगा –

(ii) व (iv) को जोड़ने पर निम्न परिणाम प्राप्त होता है –

$112 = a - b + c - d$

$136 = a + b + c + d$

$280 = 2a + 2c$ ... (vi)

इसी प्रकार (i) व (v) समीकरणों को जोड़ देने से निम्न समीकरण प्राप्त होता है –

$100 = a - 3b + 9c - 27d$

$180 = a + 3b + 9c + 27d$

$280 = 2a + 18c$ ... (vii)

(vi) को 9 से गुणा करके उसमें से (vii) घटाकर निम्नलिखित परिणाम निकलता है –

$2232 = 18a + 18c$

$280 = 2a + 18c$

$1952 = 16a$

$\therefore a = \frac{1952}{16} = 122$

क्योंकि a का मूल्य y के बराबर है इसलिए $y = 122$

1991 में उस संस्था की बिक्री का आन्तरगणित मूल्य 122 लाख रुपये ही आएगा। यदि इस प्रश्न में परवलय–वक्र विधि द्वारा आन्तरगणन करने का निर्देश न हो तो इसे न्यूटन की विधि द्वारा करना ही उपयुक्त होगा।

(v) अन्य रीतियाँ (**Other methods**)

आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की चार प्रमुख रीतियों के अतिरिक्त अन्य रीतियों का भी विशिष्ट परिस्थितियों में प्रयोग किया जा सकता है। इन रीतियों में से अधिकांश न्यूटन के प्रगामी अन्तर सूत्र के ही रूपान्तर है। यहाँ पर निम्न चार अन्य रीतियों का संक्षिप्त वर्णन किया गया है।

(क) न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि (**Newton-Gauss Forward Method**)

रीति का प्रयोग कब किया जाए? यह रीति न्यूटन की प्रगामी अन्तर–विधि का ही एक संशोधित रूप है। इस रीति का प्रयोग उस दशा में किया जाता है जब (i) x श्रेणी समान अन्तर से बढ़ती हो तथा (ii) दिए हुए मूल्यों के अलावा किसी ऐसे x के लिए y_x का आन्तरगणन हो जो श्रेणी के मध्य में आता हो। ध्यान रहे, न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति और इस रीति द्वारा उत्तर एक समान निकलकर आएगा।

क्रिया–विधि – (i) **संकेताक्षर** – स्वतंत्र चर माला अर्थात् x श्रेणी के जिस पद का आन्तरगणन करना होता है उससे ठीक पिछले पद को x_0, और उससे पिछले पदों को क्रमानुसार x_{-1}, x_{-2}, x_{-3} आदि तथा x_0 से अगले पदों को x_1, x_2, x_3 आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रकट किया जाता है। ठीक यही क्रिया y श्रेणी के साथ दोहराई जाती है। मान लीजिए एक श्रेणी में छः पद है और x = 32 पद के लिए आन्तरगणन करना है तो न्यूटन की 'प्रगामी अन्तर रीति', 'न्यूटन–गॉस अग्रगामी' और 'न्यूटन गॉस पृष्ठगामी' रीति में संकेताक्षरों का प्रयोग अग्र तालिका के अनुसार किया जाएगा –

न्यूटन प्रगामी		न्यूटन–गॉस अग्रगामी		पृष्ठगामी रीति	
x = 32		x = 32		x = 45	
10 x_0	40 y_0	10 x_{-2}	40 y_{-2}	10 x_{-4}	40
20 x_1	52 y_1	20 x_{-1}	52 y_{-1}	20 x_{-3}	52
30 x_2	68 y_2	30 x_0	68 y_0	30 x_{-2}	68
40 x_3	72 y_3	40 x_1	72 y_1	40 x_{-1}	72
50 x_4	80 y_4	50 x_2	80 y_2	50 x_0	80

60 x_5	85 y_5	60 x_3	85 y_3	60 x_1	85

(ii) **अन्तर सारणी** – न्यूटन की प्रगामी रीति की भाँति इसमें भी अन्तर–सारणी की रचना की जाती है। अन्तरों के संकेत चिन्ह y's के चिन्हों के अनुकूल होते हैं– जैसे $\Delta^1_{y_0}, \Delta^2_{y_{-1}}, \Delta^3_{y_{-1}}$ आदि –

(iii) ***x* का निर्धारण** – x के अन्तर का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है–

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद – पिछला पद}}{\text{निकटतम पदों का अन्तर}}$$

(iv) न्यूटन–गॉस अग्रगामी सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-1}} \ldots$$

उदाहरण (**Illustration**) : 10

निम्न आँकड़ों की सहायता से न्यूटन–गॉस विधि द्वारा x = 25 के तत्संवादी y का मूल्य आन्तरगणित कीजिए।

स्वतंत्र चर (x)	:	10	20	30	40
आश्रित चर (y)	:	25	28	34	45

हल : अन्तर–सारणी (न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि)

x's		y's		अन्तर					
				प्रथम		द्वितीय		तृतीय	
10	x_{-1}	25	y_{-1}	3	$\Delta^1_{y_{-1}}$				
20	x_0	28	y_0	6	$\Delta^1_{y_0}$	3	$\Delta^2_{y_{-1}}$	2	$\Delta^3_{y_{-1}}$
30	x_1	34	y_1	11	$\Delta^1_{y_1}$	5	$\Delta^2_{y_0}$		
40	x_2	45	y_2						

25	x	?	y_x

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद – पिछला पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}} = \frac{25 - 20}{30 - 20} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{2}\,\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)\,x(x-1)}{2\times 3}\,\Delta^3_{y_{-1}}$$

$$y_x = 28 + 0.5\times 6 + \frac{0.5\times(-0.5)\times 3}{2} + \frac{1.5\times 0.5\times(-0.5)\times 2}{2\times 3}$$

$$= 28 + 3 - 0.375 - 0.125 \quad or \quad 31 - 0.5 = 30.5$$

न्यूटन की प्रगामी अन्तर–रीति द्वारा भी यही उत्तर आता है।

(ख) न्यूटन–गॉस पृष्ठगामी रीति (**Newton-Gauss Backward Method**)

(i) रीति का प्रयोग – इस रीति का प्रयोग तब किया जाता है जब आन्तरगणन की जाने वाली संख्या श्रेणी के अन्तिम भाग में पड़ती हो। इस रीति की शेष विशेषताएं न्यूटन की सामान्य प्रगामी अन्तर विधि के ही समान है।

(ii) संकेतना एवं क्रिया–विधि – संकेतना की दृष्टि से यह रीति उपर्युक्त रीति से थोड़ी भिन्नता लिए हुए है। इस रीति के अन्तर्गत आन्तरगणन पद (x) से अगले (succeeding) पद को x_0 माना जाता है और इस मूल–बिन्दु से पूर्व–पदों को अग्रगामी रीति की ही भाँति x_{-1}, x_{-2}, आदि और x_0 के बाद वाले पदों को x_1, x_2 आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रकट किया जाता है। y श्रेणी के लिए भी ठीक इसी तरह से संकेताक्षरों का प्रयोग किया जाता है। तत्पश्चात् अन्तर–सारणी द्वारा अन्तर प्राप्त किए जाते हैं और x का मूल्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है –

$$x = \frac{\text{आन्तरगणन पद से अगला पद – आन्तरगणन पद}}{\text{निकटवर्ती पदों का अन्तर}}$$

(iii) सूत्र : अन्त में निम्नलिखित सूत्र द्वारा आन्तरगणन किया जाता है –

$$y_x = y_0 - x\,\Delta^1_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x}{1\times 2}\,\Delta^2_{y_{-1}} - \frac{(x+1)x\,(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-2}} + \frac{(x+1)x\,(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta^4_{y_{-2}} \ldots$$

(ग) स्टर्लिंग का सूत्र (**Stirling Formula**)

यह सूत्र न्यूटन–गॉस अग्रगामी व पृष्ठगामी दोनों सूत्रों का समान्तर माध्य है और श्रेणी के मध्यवर्ती पद के आश्रित मूल्य का आन्तरगणन करने के लिए उपयुक्त है। अग्रगामी विधि की भाँति इस रीति में भी आन्तरगणन पद से पहले के पद को ही मूल–बिन्दु (x_0, y_0) माना जाता है। सूत्र इस प्रकार है –

$$y_x = y_0 + x\left[\frac{\Delta^1_{y_0} + \Delta^1_{y_{-1}}}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{x(x^2-1)}{2\times 3}\left[\frac{\Delta^3_{y_{-1}} + \Delta^3_{y_{-2}}}{2}\right] + \ldots$$

उदाहरण 10 को स्टर्लिंग सूत्र के प्रयोग द्वारा भी हल किया जा सकता है –

$$y_x = 28 + 0.5\left[\frac{6+3}{2}\right] + \frac{(0.5)^2}{2}\times 3 + \frac{0.5(0.5^2-1)}{2\times 3}\times 2$$

$$= 28 + 0.5\times 4.5 + 0.375 + \frac{0.5\times(-0.75)\times 2}{2\times 3}$$

$$= 28 + 2.25 + 0.375 - 0.125 \;=\; 30.5$$

उपर्युक्त तीनों रीतियों का प्रयोग बहुत कम किया जाता है क्योंकि इनमें अन्तर निकालने और उपयुक्त सूत्र का प्रयोग करने में अधिकतर भ्रान्ति की स्थिति उत्पन्न हो जाती है। आन्तरगणन पद चाहे श्रेणी के आरम्भ, मध्य या अन्त में हो न्यूटन का मूल सूत्र (Newton's advancing differences formula) ही अधिकतर प्रयोग किया जाता है।

(घ) न्यूटन की विभाजित अन्तर–रीति (**Newton's Method for Divided Differences**)

रीति का प्रयोग – इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है जब x श्रेणी के पदों का अन्तर असमान (unequal) हो।

क्रिया विधि – इस रीति के अनुसार पहले विभाजित अन्तर–सारणी (Table of Divided Differences) बनाई जाती है जिसमें निकटवर्ती y's के अन्तरों से भाग देकर विभाजित अन्तर निकाले जाते हैं। यदि y के चार मूल्य ज्ञात हो तो तीन प्रमुख विभाजित अन्तरों (Leading Divided Differences) का प्रयोग किया जाएगा। अन्तर के प्रथम खाने में तीन विभाजित अन्तर उपलब्ध होंगे जिनमें से पहला, प्रथम प्रमुख विभाजित अन्तर होगा। प्रत्येक y में से पिछले y को घटाकर उनके तत्संवादी x's के अन्तर से भाग कर दिया जाएगा। यही सम्बद्ध विभाजित अन्तर होगा। दूसरे खाने में प्रथम खाने के तीन विभाजितान्तरों की सहायता से इसी प्रकार दो विभाजित अन्तर निकाल लिए जाएंगे जिनमें से पहला, द्वितीय प्रमुख विभाजित अन्तर कहलाएगा। तीसरे खाने में दूसरे कॉलम के दो अन्तरों के आधार पर एकमात्र विभाजित अन्तर प्राप्त किया जाएगा जो तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर

कहलाएगा। विभाजित अन्तर निकालने की यह प्रक्रिया निम्नांकित सारणी में स्पष्ट की गयी है –

विभाजितान्तर सारणी (**Table of Divided Differences**)

x's	*y*'s	विभाजित–अन्तर (**Divided Difference**)					
		प्रथम First		द्वितीय Second		तृतीय Third	
x_0	y_0	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	Δ_0^1				
x_1	y_1			$\frac{\Delta_1^1-\Delta_0^1}{x_2-x_0}$	Δ_0^2		
		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Δ_1^1			$\frac{\Delta_1^2-\Delta_0^2}{x_3-x_0}$	Δ_0^3
x_2	y_2			$\frac{\Delta_2^1-\Delta_1^1}{x_3-x_1}$	Δ_1^2		
x_3	y_3	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Δ_2^1				
x	y						

इस विधि द्वारा आन्तरगणन करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा –

$$y_x = y_0 + (x-x_0)\Delta_0^1 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta_0^2 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta_0^3 + \ldots$$

$\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, एवं तृतीय प्रमुख विभाजितान्तर (first, second and third leading divided differences respectively) हैं।

उदाहरण (**Illustration**) : 11

निम्न सारणी में सम्पदा कर लगने वाली सम्पदाओं की संख्या दी गयी है –

सम्पदा वर्ग (रु0) :	50,000–75,000	75,000–1,00,000	1,00,000–1,50,000
संख्या :	870	540	450

न्यूटन की विभाजित अन्तर रीति द्वारा 75,000 रु0 से 80,000 रु0 के बीच की सम्पदाओं की संख्या का आन्तरगणन कीजिए।

हल : विभाजित अन्तर सारणी

से कम 000रु0 *x*	संख्या *y*	विभाजित अन्तर

				प्रथम Δ^1		द्वितीय Δ^2	
75	x_0	870	y_0				
100	x_1	1410	y_1	$\frac{1410-870}{100-75}$	Δ_0^1 21.6	$\frac{9-21.6}{150-75}$	Δ_0^2 -0.168
150	x_2	1860	y_2	$\frac{1860-1410}{150-100}$	Δ_1^1 9		
80	x	?	y				

सूत्र : $y_x = y_0 + (x - x_0)\,\Delta_0^1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_0^2$

$$y_{80} = 870 + (80-75)\,21.6 + (80-75)(80-100)(-0.168)$$

$$= 870 + 108 + 16.8 = 994.8 \; or \; 995$$

75 हजार रु0 से कम वाली सम्पदाओं की संख्या = 870

80 हजार रु0 से कम वाली सम्पदाओं की संख्या = 995

अतः 75 से 80 हजार रु0 के बीच सम्पदाओं की संख्या = 995–870 = 125

14.8 सारांश (Summary)

सांख्यिकीय विश्लेषण करते समय कभी–कभी यह देखने में आता है कि प्रस्तुत समंक श्रेणी पूर्ण (complete) न होकर अपूर्ण (incomplete) होती है अर्थात् श्रेणी के कुछ मूल्य किन्हीं कारणों से अज्ञात बने रहते हैं। चूँकि एक सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी का होना अत्यावश्यक है, इसलिए उपलब्ध समंकों के आधार पर उन अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाने के लिए जिन सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है उन्हें आन्तरगणन तथा बाह्यगणन कहते हैं। अर्थात् आन्तरगणन का तात्पर्य दिए गए समंकों से कुछ विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी पद का सर्वाधिक सम्भावित मूल्य (most likely value) ज्ञात करने की विधि से है तथा बाह्यगणन से अभिप्राय किन्हीं विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी भावी तिथि के भावी समंक का पूर्वानुमान करना होता है।

आन्तरगणन अथवा बाह्यगणन करते समय हम यह कल्पना कर लेते हैं कि समंकों में परिवर्तन की दर सर्वदा समान है एवं समंकों की तिथियों के बीच कोई अचानक घटना नहीं घटी है, अर्थात् समंकों में एक प्रकार की continuity है।

यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से उच्चावचन होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

14.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

I. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) भारत में जनगणना प्रत्येक –––––– में एक बार आयोजित की जाती है।

(ii) अभाव या अपर्याप्तता की पूर्ति आन्तरगणन द्वारा –––––– लगाकर की जाती है।

(iii) आन्तरगणन व बाह्यगणन करते समय यह मान लिया जाता है कि दी हुई अवधि के समंकों में एकदम कोई –––––– नहीं हुई हैं।

(iv) यदि ज्ञात समंकों में लगभग नियमित रूप से –––––– होते हैं तो अज्ञात मूल्य का अनुमान भी यथासम्भव परिशुद्ध होता है।

(v) प्रत्यक्ष–द्विपद–विस्तार रीति –––––– पर आधारित है।

II. निम्न कथनों में से कौन सी सत्य है और कौन सी असत्य है :

(i) आन्तरगणन का उद्देश्य समंक श्रेणी के बीच की रिक्तियों को भरना होता है। स/अ

(ii) बाह्यगणन से अभिप्राय किन्हीं विशेष मान्यताओं के आधार पर किसी भावी तिथि के भावी समंक का पूर्वानुमान करना होता है। स/अ

(iii) न्यूटन की प्रगामी–अन्तर विधि द्विपद–प्रमेय पर आधारित नहीं है। स/अ

(iv) लाग्रैंज द्वारा प्रतिपादित लांग्रैज विधि आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति है। स/अ

(v) '*n*' वें घात के परवलयिक वक्र का समीकरण इस प्रकार है –

$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots.$ स/अ

III. निम्नलिखित में कौन सा विकल्प सही है :

(i) किन्हीं निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत मात्राओं के सर्वाधिक सम्भाव्य अनुमान लगाने की तकनीक को कहते हैं।

(अ) बाह्यगणन (ब) सहसम्बन्ध (स) प्रतीपगमन (द) आन्तरगणन

(ii) निम्नांकित रीतियों में कौन सी रीति सार्वभौमिक रीति है :

(अ) बिन्दु–रेखीय रीति (ब) प्रत्यक्ष द्विपद–विस्तार रीति

(स) न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति (द) न्यूटन–गॉस अग्रगामी विधि

(iv) स्टर्लिंग का सूत्र है :

(अ) $y_x = y_0 + x\Delta^1_{y_0} + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-1}} \ldots$

(ब) $y_x = y_0 - x\Delta^1_{y_1} + \frac{(x-1)x}{1\times 2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\times 2\times 3}\Delta^3_{y_{-2}} \ldots$

(स) $y_x = y_0 + x\left[\frac{\Delta^1_{y_0} + \Delta^1_{y_{-1}}}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\Delta^2_{y_{-1}} + \frac{x(x^2-1)}{2\times 3}\left[\frac{\Delta^3_{y_{-1}} + \Delta^3_{y_{-2}}}{2}\right] + \ldots$

(द) $y_x = y_0 + (x-x_0)\Delta^1_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta^2_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3_0 + \ldots$

(v) आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतियों को बाँटा जा सकता है –

(अ) दो श्रेणियों में (ब) तीन श्रेणियों में

(स) चार श्रेणियों में (द) पाँच श्रेणियों में

लघु उत्तरात्मक प्रश्न

(i) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की दो अन्तर्निहित मान्यताएँ लिखिए।

(ii) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिशुद्धता किन दो बातों पर निर्भर करती है?

(iii) $(y-1)^6$ का द्विपद विस्तार लिखिए।

(iv) न्यूटन प्रगामी विधि के अनुसार तृतीय प्रमुखान्तर (Δ^3_0) तक का अन्तर सारणी बनाइए।

(v) $n = 8$ तक एक पास्कल त्रिभुज की रचना कीजिए।

निबन्धात्मक प्रश्न

(i) सांख्यिकी में आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की उपयोगिता की व्याख्या कीजिए।

(ii) आन्तरगणन से आप क्या समझते हैं? किन मान्यताओं के अन्तर्गत मूल्य की अन्तर्गणना की जाती है?

(iii) 'आन्तरगणन' एवं 'बाह्यगणन' में अन्तर स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय अध्ययन में उनकी आवश्यकता का संक्षिप्त विवेचन कीजिए।

(iv) आन्तरगणन एवं बाह्यगणन के लिए प्रयोग होने वाली प्रमुख रीतियों का वर्णन कीजिए। वे अवस्थाएँ भी बताइए जिनमें प्रत्येक का प्रयोग उचित रहेगा।

(v) जनगणना के वर्षों के मध्य के वर्षों के परिवर्तनों की गणना आप कैसे करेंगे? क्या आप 1941, 1951, 1961, 1971 की जनगणना के अंकों के आधार पर 1976 की जनगणना का अनुमान कर सकते हैं?

संख्यात्मक प्रश्न

(i) निम्न सारणी एक फर्म के 2005 से 2010 तक के लाभ (लाख रु0) के समंक प्रस्तुत करती है। 2009 के लाभ की राशि अज्ञात है। बिन्दु रेखीय रीति द्वारा उसका आन्तरगणन कीजिए।

वर्ष :	2005	2006	2007	2008	2009	2010
लाभ :	108	113	111	110	?	114

(ii) 30 वर्ष की आयु के लिए अज्ञात मूल्य का आन्तरगणन कीजिए –

आयु (वर्षों में) :	10	15	20	25	30	35
मूल्य :	20	35	40	43	?	55

(iii) नीचे दी गयी सारणी की सहायता से 1970 तथा 1980 के उत्पादन की गणना कीजिए –

वर्ष :	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
उत्पादन :	200	230	270	?	380	?	460

(iv) निम्न समंकों से, आन्तरगणन की न्यूटन विधि द्वारा 25 वर्ष की आयु पर वार्षिक शुद्ध प्रीमियम ज्ञात कीजिए –

आयु (वर्षों में) :	20	24	28	32
प्रीमियम दर (रु0 में) :	0.01427	0.01581	0.01772	0.01996

(v) लाग्रेंज का सूत्र प्रयोग करके 6 और 7 हजार के बीच आय कमाने वाले व्यक्तियों की संख्या अनुमानित कीजिए।

आय (हजारों में) :	0–2	2–3	3–6	6–8
व्यक्तियों की संख्या :	10	15	35	20

अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर

26.9.1 (I) (i) – दशक (ii) – सर्वोपयुक्त अनुमान
(iii) प्रचण्ड वृद्धि (iv) – उच्चावचन (v) – द्विपद–प्रमेय
(II) (i) – स (ii) – स (iii) – अ (iv) – स (v) – अ
(III) (i) – ड (ii) – ड (iii) – अ (iv) – स (v) – अ

26.9.4 (i) – [112 लाख रु0] (ii) – [48]

(iii) – [1970 = 322; 1980 = 433]

(iv) – [0.01625]

(v) – [y_7 = 70, 70–60 = 10]

14.10 संदर्भ ग्रन्थ सूची/उपयोगी पाठ्य सामग्री

1) बंसल, एस0 एन0, एवं अग्रवाल, डी0 आर0, (1978), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा – 31;
2) नागर, कैलाश नाथ, (2005), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
3) लाल, एस0 एन0, चतुर्वेदी, एस0, *सांख्यिकी*, प्रकाशन, इलाहाबाद।
4) सिंह, एस0 पी0, (1997) *सांख्यिकी–सिद्धान्त एवं व्यवहार*, एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
5) अवस्थी, जी0 डी0 एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) *सांख्यिकीय विश्लेषण*, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
6) Gupta, S. P., (2005), *Statistical Methods*, S. Chand, New Delhi.
7) Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Vol. I, The World Press Private Limited.

इकाई–15.सूचकांक

15.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में सूचकांक या निर्देशांक के विषय का विस्तृत रूप से अध्ययन किया गया है। परिवर्तन प्रकृति का ही एक नियम है। आर्थिक क्षेत्र में यह नियम पूर्ण रूप से लागू होता है। आर्थिक क्षेत्र के विभिन्न पहलू जैसे :–मूल्य, उत्पादन, व्यापार, जीवन लागत इत्यादि निरन्तर परिवर्तित होते रहते हैं। इनमें सतत उतार–चढ़ाव होता रहता है। इन्हीं परिवर्तनों का अध्ययन करने और इनके प्रभावों को स्पष्ट करने के लिए जिस सांख्यिकीय तकनीक को विकसित किया गया है उसी तकनीक को सूचकांक अथवा निर्देषांक कहते हैं।

सूचकांकों का निर्माण सर्वप्रथम इटली के सांख्यिक कर्ल्ली ने किया था। इन्होंने 1764 में मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों की माप करने हेतु सन् 1500 ई0 को आधार वर्ष मानकर सन् 1750 के लिए मूल्य सूंचकांक का निर्माण किया। प्रारम्भ में सूचकांक को केवल मूल्यस्तर तथा मुद्रा की क्रयषक्ति का माप करने हेतु प्रयोग किया जाता था परन्तु आज के समय में इसका प्रयोग विस्तृत हो गया है। प्रत्येक पहलू में सूचकांक का प्रयोग किया जाता है। जैसे : उत्पादन, उपभोग, निर्यात, आयात, राष्ट्रीय आय, जीवन निर्वाह व्यय, सड़क दुर्घटनाओं जैसे संख्यात्मक तथ्य एवं निर्धनता, स्वास्थ्य, मानवीय विकास, कार्यक्षमता, बुद्धिमता आदि के अध्ययन में भी सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है।

सूचकांको के विकास में प्रो. जेवन्स, डॉ. मार्षल, वाल्ष, एजवर्थ आदि उल्लेखनीय नाम हैं परन्तु 100 सूत्रों का प्रतिपादन करके नया आयाम देने वाले फिषर का नाम उल्लेखनीय है।

15.2 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से हम यह ज्ञात कर सकेंगे कि–

(क) सूचकांक का आर्थिक एवं व्यावसायिक अध्ययन में क्या महत्व है ?

(ख) सूचकांकों की क्या उपयोगिता एवं क्या सीमाएं हैं ?

(ग) सूचकांकों का निर्माण किस प्रकार किया जाता है ?

(घ) विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की जानकारी।

(ङ) एक आदर्श सूचकांक के लिए विभिन्न जांच कौन सी हैं ?

15.3 सूचकांक का अर्थ एवं परिभाषा

सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य है जिनके द्वारा समय, स्थान या अन्य किसी विशेषता के आधार पर सम्बन्धित चर मूल्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का मापन किया जाता है।

(क) **क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार,** ''सूचकांक सम्बन्धित चर मूल्यों के आकार में होने वाले अन्तरों का मापन करने के साधन या उपाय हैं।''

(ख) **डॉ. एल. बाउले के अनुसार,** ''सूचकांकों का प्रयोग किसी मात्रा में होने वाले ऐसे परिवर्तनों का माप करने के लिए किया जाता है जिनका हम प्रत्यक्ष रूप से अवलोकन नहीं कर सकते।''

(ग) **सेक्राइस्ट के अनुसार**'' निर्देशांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी है जिसके द्वारा किसी तथ्य के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जाता है।''

(घ) **डॉ. एम. टटिल के शब्दों में,** निर्देशांक एक अकेले अनुपात के रूप में दो विभिन्न समयों, स्थानों अथवा परिस्थितियों में विभिन्न चरों में परिवर्तन को सामूहिक रूप से मापता है।''

निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है कि सूचकांक प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाने वाला एक विशेष प्रकार का माध्य है जिसके आधार पर विभिन्न समयों, स्थानों या अन्य समंक समूहों में होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनों की सामान्य प्रकृति को मापा जाता है।

जब हम केवल किसी अकेले चर का अध्ययन करते हैं तो वह एक चरीय सूचकांक कहलाता है जबकि कई चरों में होने वाले औसत परिवर्तनों का एक साथ अध्ययन किया जाये तो इसे मिश्रित सूचकांक कहते हैं। जैसे कृषि उत्पादन का सूचकांक मिश्रित सूचकांक का उदाहरण है।

15.4 सूचकांको की विशेषताएँ

(क) **तुलना का अधार** :– सूचकांकों द्वारा परिवर्तनों की तुलना समय अथवा स्थान के आधार पर की जाती है, जिस वर्ष के सूचकांक ज्ञात करने हो उसे चालू वर्ष या प्रचलित वर्ष तथा जिस निश्चित वर्ष से तुलना करनी हो उसे आधार वर्ष कहते हैं।

(ख) **विशिष्ट प्रकार के माध्य** :–माध्यों द्वारा असमान इकाईयों वाली श्रेणी की तुलना नहीं की जा सकती, परन्तु सूचकांकों द्वारा असमान इकाईयों वाली अनेक श्रेणियों में होने वाले परिवर्तनों का सापेक्ष अध्ययन सरलता से किया जा सकता है।

(ग) **प्रत्यक्ष मापन न होने वाले परिवर्तनों का माप** :–सामान्यतः सूचकांक की तकनीकी का प्रयोग ऐसे मिश्रित एवं जटिल परिवर्तनों के माप के लिए किया जाता है जिनको प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता। जैसे मूल्य स्तर, जीवन लागत अथवा आर्थिक क्रियाओं में परिवर्तन। यहाँ सूचकांक की सहायता से सापेक्ष परिवर्तनों का अध्ययन कर लिया जाता है।

(घ) **तुलनात्मक माप** :–सूचकांक एक तुलनात्मक अथवा सापेक्ष माप है। उदाहरण के लिए यदि यह कहा जाये कि सन् 1990 की तुलना में सन् 1998 में मूल्य निर्देशांक 160 है तो इसका अर्थ यह है कि 1990 की तुलना में 1998 में मूल्यों में 60 प्रतिशत वृद्धि हो गयी है।

(ङ) **सार्वभौमिक उपयोग** :–इस तकनीक का प्रारम्भ मूल्यों में परिवर्तन के मापन के लिए हुआ था, लेकिन वर्तमान समय में इस तकनीक का प्रयोग सर्वव्यापी बन गया है। इसके द्वारा विभिन्न क्षेत्रों में परिवर्तन का मापन किया जाता है।
वास्तव में ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है जिसमें संख्यात्मक को मापने के लिए सूचकांकों का प्रयोग न होता हो।

15.5 सूचकांको का महत्त्व एवं उपयोग

आर्थिक और व्यावसायिक क्षेत्र में परिवर्तनों के मापन और विश्लेषण की दृष्टि से सूचकांक एक महत्त्वपूर्ण एवं उपयोगी उपकरण बन चुका है और इस कारण इसके ''**आर्थिक वायुमापक यंत्र**'' कहा जाने लगा है। सूचकांक आर्थिक जगत का प्राण है क्योंकि उत्पादन, उपभोग, मुद्रा मूल्य, मांग, पूर्ति, मजदूरी, आयात–निर्यात, मूल्य स्तर जैसी प्रमुख समस्याओं का

समाधान सूचकांकों के प्रयोग द्वारा ही किया जाता है। संक्षेप में सूचकांक के प्रयोग एवं महत्त्व निम्न प्रकार से हैं –

(क) **तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना** :–सूचकांको की सापेक्ष माप के द्वारा किसी समय या स्थान के आधार पर सरलता से तुलना की जा सकती है क्योंकि सूचकांकों के द्वारा विभिनन प्रकृति की इकाईयों को एक अर्थपूर्ण एवं सरल संख्यात्मक मूल्य में परिवर्तित कर लिया जाता है।

(ख) **भावी प्रवृत्तियों के संकेतक** :–सूचकांक भूतकाल के सन्दर्भ में वर्तमान की व्याख्या करते हैं और भविष्य के लिए पुर्वानुमान लगाने में सहायक सिद्ध होते हैं।

(ग) **आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक** :–सूचकांको द्वारा सरकार मूल्यों में स्थिरता, न्यूनतम मजदूरी, मंहगाई भत्ता आदि सुनिष्चित कर लेती है। साथ ही विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्माण में भी सहायता मिलती है।

(घ) **जटिल तथ्यों को सरल बनाना** :–सूचकांकों की सहायता मे जटिल तथ्यों एवं उनके परिवर्तनों के अध्ययन को सरल बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए किसी देष में व्यावसायिक क्रियाओं में परिवर्तन एक जटिल तथ्य है जिसमें उद्योग, व्यापार, बैंकिंग, परिवहन आदि विभिन्न क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तन शामिल होते हैं लेकिन सूचकांक द्वारा इसका अध्ययन सरलता से किया जा सकता है।

(ङ) **विभिन्न मूल्यों की अवस्फीति में सहायक** :–सूचकांक हमें सिद्धान्त से व्यवहार की ओर ले जाते हैं और वास्तविक स्थिति की जानकारी देते हैं। सूचकांकों से अवस्फीतिकरण होने के कारण वास्तविक जानकारी प्राप्त होती है।

15.6 सूचकांको के प्रकार

सूचकांक को निम्न रूपों में वर्गीकृत किया जाता है–

(क) कीमत या मूल्य सूचकांक
(ख) मात्रा सूचकांक
(ग) कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक
(घ) उद्देश्य विशेष सूचकांक
(ङ) वस्तुओं की संख्या के आधार पर

मूल्य सूचकांक :– इन सूचकांको के माध्यम से मूल्यों में या मूल्य स्तर में परिवर्तन को मापा जा सकता है। इन्हें दो उपवर्गों में बांटा जा सकता है– थोक मूल्य सूचकांक व निर्वाह व्यय सूचकांक।

मात्रा सूचकांक :– इस प्रकार के सूचकांक भौतिक मात्रा में कमी या वृद्धि को मापने के लिए तैयार किये जाते हैं। जैसे– कृषि उत्पादन सूचकांक, औद्योगिक उत्पान सूचकांक आदि।

कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक:– इन सूचकांक का उद्देश्य आधार वर्ष के कुल मूल्य (मात्रा x कीमत) की तुलना में चालू वर्ष के कुल मूल्य में परिवर्तन का अध्ययन किया जाना है। जैसे–विक्रय राशि का सूचकांक।

उद्देष्य विशेष सूचकांक :– आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में किसी विशिष्ट उद्देश्य के लिए भी सूचकांक तैयार किये जा सकते हैं। जैसे–राष्ट्रीय आय सूचकांक, विकास दर सूचकांक, उत्पादकता सूचकांक आदि।

वस्तुओं की संख्या के आधार पर सूचकांक :– यदि किसी एक वस्तु के मूल्य के आधार पर सूचकांक तैयार किया जाता है, तो उसे सरल सूचकांक कहते हैं। यदि वस्तुओं के समूह के लिए सूचकांक बनाया जाता है तो उसे संयोजित या '**सकल**' सूचकांक कहा जाता है।

15.7 सूचकांक रचना सम्बन्धी सूचनाएँ

(1) **सूचकांको का उद्देश्य** :– सूचकांक बनाते समय सबसे पहले उसके उद्देश्य को निश्चित कर लेना जरूरी है। क्योंकि वस्तुओं का चुनाव, मूल्य उद्धरण, भारों का निर्धारण, सूचकांक की किस रीति का प्रयोग करना है जैसी महत्त्वपूर्ण बातें सही अर्थों में, सूचकांक के उद्देश्य पर ही निर्भर करती है।

(2) **वस्तुओं का चयन** :– दूसरा चरण वस्तुओं के चुनाव का होता है क्योंकि सभी वस्तुओं को शामिल करना आवश्यक नहीं होता। कौन सी वस्तुएँ कितनी संख्या में चुनी जाये, उनकी किस्म क्या हो, एवं उन्हें कैसे वर्गीकृत करें, ये सब ध्यान देने योग्य है।

(A) वस्तुएँ :–
निम्न विशेषताओं वाली वस्तुओं का चुनाव करनी चाहिए–

(i) **प्रतिनिधि एवं लोकप्रिय** :– वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जो सम्बन्धित वर्ग या क्षेत्र के लोगों में लोकप्रिय हो एवं उनकी आदतें, रीति–रिवाजों व आवश्यकताओं का प्रतिनिधित्व करें।

(ii) **पहचानने योग्य** :– वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जो आसानी से पहचानी जायें व उनका स्पष्ट वर्णन किया जा सकें।

(iii) **प्रमाणित एवं सजातीय** :– चुनी जाने वाली वस्तुएँ श्रेणीबद्ध व प्रमाणित होनी चाहिए उनकी किस्म में एकरूपता होनी चाहिए।

(B) **वस्तुओं की संख्या** :– इसके सन्दर्भ में कोई दृढ़ व निश्चित नियम नहीं है लेकिन वस्तुओं की संख्या का निर्धारण उपलब्ध समय व धन, शुद्धता तथा उद्देश्य व परिस्थितियों को ध्यान में रखकर करना चाहिए।

(C) **किस्म** :– सूचकांक में ऐसी वस्तुओं को शामिल करना चाहिए, जो सबसे अधिक प्रचलित व प्रमाणित हों। साथ ही उसके गुणों में भी स्थिरता होनी चाहिए।

(D) **वर्गीकरण** :– चुनी गयी वस्तुओं को सजातीयता के आधार पर कुछ निश्चित वर्गों व उपवर्गों में विभाजित कर देते हैं, जिससे सामान्य सूचकांक के साथ–साथ समूह सूचकांक भी ज्ञात किया जा सके।

(3) **मूल्य उद्धरण प्राप्त करना** :– वस्तुओं के चुनाव के बाद मूल्य उद्धरणों का चरण होता है। इसमें निम्न बातों पर विचार होता है–

(i) **थोक या फुटकर मूल्य** :–सूचकांकों के उद्देश्य के आधार पर मूल्य थोक या फुटकर मूल्य हो सकते हैं। परन्तु अधिकांशतः थोक मूल्य ही लिये जाते हैं। क्योंकि वे फुटकर मूल्यों की अपेक्षा अधिक स्थिर होते हैं।

(ii) **मूल्य व्यक्त करने का रूप** :– मूल्य दो प्रकार से व्यक्त किये जा सकते हैं–

(a) मुद्रा मूल्य जैसे–1000 रूपये प्रति कुन्तल।

(b) मात्रा मूल्य या प्रति लोग मूल्य– जैसे 2 किलो प्रति रूपये।

सूचकांक रचना में सदैव मुद्रा मूल्य का ही प्रयोग किया जाना चाहिए।

(iii) **मूल्य उद्वरणों की आवृत्ति या संख्या :–** वस्तु के महत्त्व के अनुसार यह तय करते हैं कि मूल्य उद्वरण यह कितनी बार व किस अन्तराल से लिये जायें अर्थात् साप्ताहिक या मासिक आधार पर। मूल्य उद्वरणों की संख्या जितनी अधिक होगी, शुद्धता भी उतनी अधिक होगी, परन्तु जटिलता भी बढ़ जायेगी। मूल्य उद्वरणों की आवृत्ति सूचकांक के उद्देश्य, अवधि, उपलब्ध साधन व शुद्धता के स्तर पर निर्भर होती है।

(iv) **मूल्य उद्वरण प्राप्ति के स्थान :–** सूचकांकों के लिए वस्तुओं के मूल्य उद्वरण उन बाजार से प्राप्त करना चाहिए जहाँ वस्तुओ का क्रय–विक्रय वृहद स्तर पर होता है। मूल्य उद्वरण के स्त्रोत स्वतंत्र, निष्पक्ष, विश्वसनीय व उपयुक्त होने चाहिए। विभिन्न पत्र–पत्रिकाओं, रेडियो, दूरदर्शन, कम्प्यूटर, इंटरनेट व अन्य सरकारी व अर्धसरकारी सूत्रों से भी मूल्य सूचना प्राप्त की जा सकती हैं।

(v) **मूल्य उद्वरण का औसत निकालना :–** मूल्य उद्वरणों के बारे में अंतिम चरण औसत निकालना है।

(4) आधार वर्ष का चुनाव तथा मूल्यानुपातों का परिकलन :–

मूल्य सूचकांक एक प्रमाप वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष के मूल्य स्तर को व्यक्त करते हैं। पिछला प्रमाप वर्ष जो आगामी वर्षों के तुलनात्मक अध्ययन का आधार होता है, आधार वर्ष कहलाता है।

एक अच्छे आधार वर्ष के सम्बन्ध में यह बाते महत्त्वपूर्ण हैं –

(i) वर्ष सामान्य हो (ii) वास्तविक हो

(iii) उस काल की समस्त सूचनायें उपलब्ध हो (iv) वर्ष अधिक पुराना न हो

आधार वर्ष ज्ञात करने की दो रीतियां हैं–

(i) स्थिर आधार रीति

(a) एक वर्षीय आधार (b) औसत अवधि आधार

(ii) श्रृंखला आधार रीति

(a) **एक वर्षीय स्थायी आधार :–** इस रीति में किसी एक सामान्य वर्ष को आधार वर्ष के रूप में चुन लिया जाता है।

स्थिर आधार के मूल्य को 100 मानकर निकाला गया प्रचलित वर्ष का प्रतिशत ही मूल्यानुपात कहलाता है। आधार वर्ष के मूल्य को P_0 एवं चालू वर्ष के मूल्य के P_1 द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\text{मूल्यानुपात } (R) = \frac{\text{Current year's price } (P_1)}{\text{Base year's price } (P_0)} \times 100$$

$$(R) = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

(b) औसत मूल्य आधार **(Average Price Base)** :–

$$\text{मूल्यानुपात (R)} = \frac{\text{Current year's price }(P_1)}{\text{Average price }(P_0)} \times 100$$

$$(R) = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

यदि एक ही वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य दिये हैं तो इनके मुल्यानुपात ही अभीष्ट सूचकांक हैं। इसके विपरीत प्रत्येक वर्ष के कई वस्तुओं के मूल्य दिये हो तो विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपात का सामान्तर माध्य ही सम्बन्धित प्रचलित वर्ष का सूचकांक होता है

अर्थात् **चालू वर्ष का सूचकांक** $\frac{\sum R}{N} = \frac{\text{मूल्यानुपातों का योग}}{\text{वस्तुओं की संख्या}}$

उदाहरण –1 :– सन् 1998 को आधार मानकर विभिन्न वर्षों के सूचकांक तैयार कीजिए–

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	44	48	46	52	50

हल :–

Year	Price	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$	Index No.
1998	40	--	100
1999	48	$\frac{48 \times 100}{40}$	120
2000	46	$\frac{46 \times 100}{40}$	115
2001	52	$\frac{52 \times 100}{40}$	130
2002	50	$\frac{50 \times 100}{40}$	125

उदाहरण –2 :–

निम्न समंकों से 1998 से 2000 तक के औसत मूल्य को आधार मानकर मूल्यानुपात की गणना कीजिए।

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	44	49	57	55	58

हल :– $Po = \frac{Price\ from\ 1998\ to\ 2000}{3} = \frac{44+49+57}{3} = \frac{150}{3} = 50$

Year	**Price**	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$	**Index No. (PR)**

1998	44	$\frac{44 \times 100}{40}$	88
1999	49+	$\frac{49 \times 100}{40}$	98
2000	57	$\frac{57 \times 100}{40}$	114
2001	55	$\frac{55 \times 100}{40}$	110
2002	58	$\frac{58 \times 100}{40}$	110

(ii) श्रृंखला आधार रीति :–

इस रीति को "**चल आधार रीति**" भी कहा जाता है और इसके आधार पर बना सूचकांक श्रृंखला आधार सूचकांक कहा जाता है। इस रीति में प्रत्येक चालू वर्ष के लिय हैं। उसका पिछला वर्ष आधार माना जाता है। उदाहरण के लिए 1998 से 2002 तक के वर्षों के सूचकांक तैयार करने हैं तो सन् 1998 के लिए 1997, सन् 1999 के लिए 1998, सन् 2000 के लिए 1999 और ऐसे ही आगे आधार वर्ष माने जायेंगे।

उदाहरण–3 :– निम्न समंकों से श्रृंखला आधार सूचकांक बनाइये–

Year	1998	1999	2000	2001	2002
Price	80	120	132	264	396

हल :–

गुण एवं दोष :– इस आधार का प्रमुख गुण यह है कि इससे तात्कालिक परिवर्तनों का पता चल जाता है। प्रत्येक वर्ष में होने वाले परिवर्तनों की तुलना पिछले वर्ष के परिवर्तनों से की जा सकती है। यह तुलना व्यापारी व उद्योगपति के लिए बहुत उपयोगी होती है। दूसरे श्रृंखला आधार वाले सूचकांक में आवष्यकतानुसार पुरानी वस्तुओं को हटाकर उनके स्थान पर नई वस्तुओं का समावेश किया जा सकता है। परन्तु श्रृंखला रीति के अनुसार बनाये गये सूचकांक दीर्घकालीन प्रवृत्ति स्पष्ट नहीं करते। इन सूचकांकों की रचना तुलनात्मक रूप से कठिन होती है। यदि किसी एक स्थान पर अशुद्धि हो जाये तो आगे सभी गणनाओं पर उसका प्रभाव पड़ेगा।

श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण की क्रिया विधि :–

इसका सूत्र निम्नलिखित है–

$$\text{श्रृंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100$$

L.R. (Link Relative) $= \frac{\text{Current Year's Price}}{\text{Previous Year's Price}} \times 100$

श्रृंखला मूल्यानुपातों को किसी एक ही स्थिर वर्ष पर आधारित करना :–

श्रृंखला मूल्यानुपातों द्वारा प्रत्येक वर्ष की पिछली वर्ष से तुलना करते हैं। इस प्रकार दो निकटवर्ती वर्षों में कड़ियाँ स्थापित हो जाती हैं। इन कड़ियों से एक श्रृंखला बन जाती है जिससे सभी वर्षों के परिवर्तन एक निश्चित वर्ष से श्रृंखला हो जाये। इस प्रकार से श्रृंखलित सूचकांक कहते हैं। इसे ज्ञात करने का निम्न सूत्र है–

चालू वर्ष का सूचकांक =

$$\frac{\text{गत वर्ष का श्रृंखलित सूचकांक} \times \text{चालू वर्ष का औसत श्रृंखला मूल्यानुपात}}{100}$$

Chain Index for current year =

$$\frac{\text{Previous Year's chain index} \times \text{Current year's average link Relatives}}{100}$$

स्थिर आधार एवं श्रृंखला आधार का अन्तर :–

(i) स्थिर आधार में आधार वर्ष स्थिर रहता है और आगे के वर्षों की तुलना इसी आधार वर्ष से की जाती है जबकि श्रृंखला आधार में आधार प्रति वर्ष बदलता रहता है और प्रत्येक वर्ष की तुलना पिछले वर्ष से करते हैं।

(ii) स्थिर आधार सूचकांकों की सहायता से दीर्घकालीन प्रवृत्ति का पता चलता है जबकि श्रृंखला आधार सूचकांक वर्ष प्रतिवर्ष के परिवर्तनों को प्रकट करते हैं।

(iii) स्थिर आधार सूचकांक में शामिल वस्तुओं में परिवर्तन नहीं किये जा सकते, जबकि श्रृंखला सूचकांक में प्रतिवर्ष वस्तु या पद में परिवर्तन किये जा सकते हैं।

(iv) स्थिर आधार सूचकांक की रचना मुल्यानुपातों के आधार पर की जाती है परन्तु श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण में श्रृंखला आधार सूचकांकों के निर्माण में श्रृंखला मूल्यानुपातों का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण–4 :– निम्न तालिका से सन् 1998 से 2002 तक के तीन वस्तुओं के औसत थोक मूल्य दिये गये हैं। श्रृंखला आधार रीति से सूचकांकों की रचना कीजिए।

Commodities	**Average Wholesale Prices**				
	1998	1999	2000	2001	2002
I	5	6	8	8	10
II	8	10	12	15	18
III	10	12	15	18	20

P=Price LR= Link relatives

15.8 सूचकांक बनाने की विधियाँ

विभिन्न विधियों को एक चार्ट के माध्यम से स्पष्ट किया जा सकता है:

सूचकांक निर्माण की विधियाँ

अभारित — सरल समूही रीति, मूल्य अनुपातो का माध्य

भारित — भारित समूहीरीति, मूल्य अनुपातो का भारित माध्य

अभारित सूचकांक :– इसमें मूल्यों को कोई भार प्रदान नहीं किया जाता और यह मान लिया जाता है कि सभी मदों का भार या सापेक्षिक महत्व समान है। रचना तकनीक के आधार पर अभारित सूचकांक निम्न दो प्रकार से तैयार किये जा सकते हैं।

a- सरल समूही रीतिः– सबसे सरल रीति है। आधार वर्ष के मूल्यों के योग एवं चालू वर्ष के मूल्यो के योग कहा जाता है। चालू वर्ष के योग में आधार वर्ष के योग का भाग देकर 100 से गुणा कर देते है।

$$\text{सूत्र}\quad \text{Index No}\left(P_{01}\right)=\frac{\sum P_1}{\sum P_0}x\,100$$

सीमाएँः–

1. विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व पर ध्यान नहीं दिया जाता।
2. सूचकांक पर मूल्य के विस्तार का प्रभाव पड़ता है।
3. मूल्य जिस इकाई (लीटर, मीटर आदि) में दिये गये है।
4. उनमें परिवर्तन करके सूचकांक का दुरूपयोग किया जा सकता है।

b. मूल्य अनुपातों की माध्य विधि :– इस विधि में सबसे पहले प्रत्येक वस्तु के मूल्य अनुपात निकाले जाते हैं। इसके लिये प्रत्येक वस्तु के चालू वर्ष के मूल्य में आधार वर्ष के मूल्य का भाग देकर 100 का गुणा $\frac{P_1}{P_0}$ x 100किया जाता है। मूल्यानुपातो के योगमें वस्तुओं की संख्या का भाग देकर सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है। सूत्र –

$$\left(P_{01}\right)=\frac{\sum\left[\frac{P_1}{P_0}x100\right]}{N}\qquad \text{or}\qquad \frac{\sum[P.R]}{N}$$

इस रीति के कई लाभ है –

- सूचंकाक पर इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि मूल्य किसी इकाई में है क्योंकि वे सब मूल्य अनुपातों में बदल जाते हैं।

- सूचकांक पर मूल्य के निरपेक्ष मान का भी कोई प्रभाव नहीं पड़ता। क्योंकि वे प्रतिशत में परिवर्तित हो जाते हैं।

सीमा – यह अभारित होने के कारण विभिन्न वस्तुओं को अका सापेक्षिक महत्व प्राप्त नहीं हो पाता।

उदाहरण 9– निम्न संमको से 2002 के मूल्यों के आधार पर 2007 के लिये सूचकांक ज्ञात कीजिए –

वस्तु	A	B	C	D	E
2002 मे मूल्य	12	25	10	5	6
2007 में मूल्य	15	20	12	10	15

हल :– सूचकांक की गणना

वस्तु	सरल समूही रीति		मूल्यानुपात रीति			
	2002 (Base) price (P_o)	2007 (Base) price (P_1)	2007 (Base) price (P_1)	Relative (R)	2007 (Current)	
					(P_1)	(R)
A	12	15	12	100	15	125
B	25	20	25	100	20	80
C	10	12	10	100	12	120
D	5	10	5	100	10	200
E	6	15	6	100	15	250
N = 6	$\sum P_0 = 58$	$\sum P_1 = 72$				$\sum R = 775$

सरल समूही रीति द्वारा सूचकांक 2007 or P_{01}

$$= \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \text{ x } 100 = \frac{72}{58} \text{ x } 100 = 124.14$$

मूल्यानुपात रीति द्वारा सूचकांक 2007 or P_{01}

$$= \frac{\sum R}{N} = \frac{775}{5} = 155$$

भारित सूचकांक (Weighted Index) –

इससे आशय ऐसे सूचकांको से है जिनकी गणना में विभिन्न वस्तुओं को उनका तुलनात्मक या सापेक्षिक महत्व प्रदान किया जाता है। इसलिये इनकी अधिक तर्कपूर्ण नापा जाता है। ये दो प्रकार के होते हैं :–

A. भारित समूही रीति – इस सूचकांक में शामिल सभी वस्तुओं को भार आवंटित किये जाते हैं। इसके निमार्ण की अनेक रीतियां है :–

1. लास्पेयर रीति (Laspeyre's Method) :– इस रीति में आधार वर्ष की मात्रा (q_0) द्वारा भार प्रदान किये जाते हैं।

अर्थात् –

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} x100$$

(जहाँ P_1= चालू वर्ष मूल्य, q_0= आधार वर्ष का मात्रा, q_0 = आधार वर्ष के मूल्य)

निमार्ण विधि :–

1. इस रीति का प्रतिपादन लोस्पेयर द्वारा 1871 में किया गया था।
2. इस रीति में आधार वर्ष की मात्राओं को भार माना गया है।
3. चालू वर्ष के मूल्य और आधार वर्ष के भार का गुणा करके उनका योग निकाल लेते है। $\left(\sum p_1 q_0\right)$
4. आधार वर्ष के मूल्य व आधार वर्ष के भारों के गुणनफल का योग निकालते है। $\left(\sum p_0 q_0\right)$
5. अन्त में $\left(\sum p_1 q_0\right)$को $\left(\sum p_0 q_0\right)$ से विभाजित करके भागफल को 100 से गुणा कर देते है।

   इस रीति में यह मान लिया गया है किस आधार वर्ष में वस्तुओं की जो मात्रा थी, वही चालू वर्ष में रही होगी।

2. **पाशे रीति (Paasches's Method):-** जर्मन के सांख्यिकीविद् **पाशे** ने अपनी रीति का प्रतिपादन 1874 में किया। इन्होंने चालू वर्ष की मात्रा को भार माना (q_1).

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} x100$$

लास्पेयर और पाशे के सूत्रों की तुलना के संदर्भ मे यह महत्त्वपूर्ण है कि भार में भिन्नता के कारण समान आंकड़ो के आधर पर भी दोनों सूत्रों से उत्तर में भिन्नता आती है।

मूल्य निर्देशांक में फिशर के आदर्श सूचकांक का स्थान है। यह सूचकांक फिशर ने 134 विभिन्न सूत्रो के गहन अध्ययन के पश्चात विकसित किया था। यह भारित सूचकांक का ही रूप है। इस सूत्र में परिवर्तन भारों का प्रयोग किया जाता है।

3. फिशर आदर्श का सूचकांक **(Fisher Ideal Index Number):** यह सूचकांक लास्पेयर तथा पाशे सूचकांको का गुणोत्तर माध्य है। फिशर सूचकांक में ये दोनों अभिनति संतुलित हो जाती है।

अतः

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}} x100$$

$$P_{01} = \sqrt{\text{Laspeyre Index } x \text{ Paasche Index}}$$

फिशर सूत्र के आदर्श होने के आधार :–

1. यह आधार वर्ष व चालू वर्ष दोनों की ही मात्रा व मूल्य का प्रयोग करता है।
2. यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण व तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण दोनों को ही संतुष्ट करता है।
3. यह स्थिर व परिवर्तनशील भारों दोनों पर आधारित है।

उदाहरण 10:– निम्न से वर्ष 2005 को आधार मानकर 2006 के लिये लास्पेयर, पाशे व फिशर सूचकांक ज्ञात कीजिए।

Article	**A**		**B**		**C**		**D**		**E**	
	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
Year 2005	4	9	6	12	5	15	4	10	3	14
Year 2006	6	9	8	8	6	11	5	10	2	7

हलः– सूचकांको की गणना

वस्तु	आधार 2005		चालू 2006		भारित समूह			
	P_0	q_0	P_1	q_1	P_1q_0	P_0q_0	P_1q_1	P_0q_1
A	4	9	6	9	54	36	54	36
B	6	12	8	8	96	72	64	48
C	5	15	6	11	90	75	66	55
D	4	10	5	10	50	40	50	40
E	3	14	2	7	28	42	14	21
					$\sum P_1q_0$ =318	$\sum P_0q_0$ =265	$\sum P_1q_1$ =248	$\sum P_0q_1$ =200

लास्पेयर सूचकांक $P_{01} = \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x 100 = \frac{318}{265} x 100 = 120$.

पाशे सूचकांक $P_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1} x 100 = \frac{248}{200} x 100 = 124$.

फिशर सूचकांक $P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}} x 100 = \sqrt{L x P}$.

$$P_{01} = \sqrt{120 x 124} = \sqrt{148}$$

4. **मार्शल एजवर्थ रीतिः–** इस रीति में आधार वर्ष और चालू वर्ष दोनों की मात्राओं के औसत का भार दिया जाता है, अर्थात्

$$P_{01} = \frac{\Sigma\ (q_o + q_1)P_1}{\Sigma\ (q_o + q_1)P_0} x100$$

$$P_{01} = \left[\frac{\sum P_1q_0 + \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 + \sum P_0q_1}\right] x100$$

5. **डोरविश एवं बाउले रीतिः–** यह रीति लास्पेयर तथा पाशे की रीति का मिश्रण है और यह इन दोनों सूचकांको का समान्तर माध्य होता है।

$$P_{01} = \frac{L + P}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_1q_0 +}{\sum P_0q_0 +} + \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}\right] x100$$

6. **कैली रीतिः–** इस सूत्र मे आवश्यकतानुसार आधार वर्ष या चालू वर्ष किसी को भी प्रमाणित मानकर उसकी मात्रा या दोनों की मात्रा के औसत भार दिये जाते हैं। इसलिये सूत्र मे के साथ व या 1 का प्रयोग नहीं किया जाता।

$$P_{01} = \frac{\sum P_1q}{\sum P_0q} x100$$

B. मूल्यानुपातो की भारित माध्य रीतिः– इस रीति में सूचकांक बनाने के लिये सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तु का आधार वर्ष के मूल्य के आधार पर चालू वर्ष के लिये मूल्य अनुपात निकाल लेते है। जिसके लिये $\left[\frac{P_1 \text{ x } 100}{P_0}\right]$ सूत्र का प्रयोग करते हैं।

यदि प्रश्न में भार स्पष्ट रूप से दिया हो तो उसका प्रयोग करते हैं लेकिन यदि आधार वर्ष की मात्रा (q_0) दी हो तो प्रत्येक वस्तु की आधार वर्ष का मात्रा और मूल्य (P_0) का गुणा (P_0q_0) करके मूल्य भार ज्ञात करते हैं। भार (w) का मूल्य अनुपात (PR) में गुणा करके और उनका योग (P_0) लगाकर $\sum WPR$ निकालते है और इसमें भार के योग $\sum W$ का भाग दिया जाता है।

$$\text{सूत्र} - \textbf{Weighted Index No.} = \frac{\sum WPR}{\sum W}$$

मूल्य भार को w के स्थान पर v से भी दर्शाया जा सकता है।

उदाहरण 11ः– एक औसत कर्मचारी वर्ग के परिवार के बजट के समूह सूचकांक और समूह भार है। दिये हुये भारो को प्रदान करते हुये सूचकांको की रचना कीजिये।

क्र.स.	समूह	सूचकांक	भार
1	भोजन	350	50
2	ईधन	240	10
3	वस्त्र	230	10
4	किराया	160	14
5	विविध	180	16

हलः–

.

समूह	सूचकांक (PR)	भार (W)	WPR
भोजन	350	50	17500
ईधन	240	10	2400
वस्त्र	230	10	2300
किराया	160	14	2240
विविध	180	16	2880
		$\sum W = 100$	$\sum WPR = 27,320$

$$\text{Index No} = \frac{\sum WPR}{\sum W} = \frac{27,320}{100} = 273.20$$

मूल्य सूचकांक :–

ऊपर दिये गये सभी सूचकांक कीमत सूचकांक तथा मात्रा सूचकांक को वर्णित करते हैं। मूल्य कीमत तथा मात्रा का गुणनफल होता है। अर्थात् मूल्य = कीमत x मात्रा ($v = pxq$)

मूल्य सूचकांक ज्ञात करने के लिये चालू वर्षो के मूल्यों के योग $\sum(P_1q_1)$ को आधार वर्ष के मूल्यों के योग $\sum(P_0q_0)$ से विभाजित करके उसे 100 से गुणा कर दिया जाता है अतः सूत्रानुसार – **Value Index No. or V =** $\frac{\Sigma\ P_1q_1}{\Sigma\ P_0q_0}x100$

$$\textbf{or} \quad \mathbf{V} = \frac{V_1}{V_0}x100$$

इनका प्रयोग कम होता है ।

सूत्रो की उपयुक्ता के मापदण्ड

एक उपयुक्त सूत्र के चुनाव की कसौटी हेतु कुछ मापदण्ड या परीक्षण सुझाये गये है, जो कि निम्नवत् है। **इकाई मापदण्डः–** इस मापदण्ड के अनुसार मूल्य और मात्राएँ किसी भी इकाई में व्यक्त की जा सकती है, सरल समूहो सूचकांक को छोडकर शेष सभी सूत्र इस मापदण्ड को सन्तुष्ट करते हैं। **समय उत्क्राम्यता परीक्षण** (Time Reversal Test):– इस परीक्षण से यह स्पष्ट है कि आधार वर्ष के आधार पर चालू वर्ष का सूचकांक निकाला जाय और फिर चालू वर्ष के आधार पर आधार वर्ष का सूचकांक ज्ञात किया जाए तो दोनों एक दूसरे के व्युत्क्रम होने चाहिए अर्थात् दोनों का गुणनफल 1 होना चाहिए।

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}} \qquad \text{or } P_{01}\ x\ P_{10} = 1$$

उदाहरण के लिये यदि 1990 के आधार पर 200 के मूल्य 4 गुने हो जाये तो यदि 2000 को आधार मानकर 1990 का सूचकांक बनाया जाय तो वह एक चौथाई होना चाहिये जिससे $4\ x\ \frac{1}{4} = 1$ हो सके।

फिशर का सूत्र इस परीक्षण का पूरा करता है, क्योंकि

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}}; P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}}$$

$$P_{01} \text{ x } P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1} x \frac{\sum P_0q_0 x \sum P_0q_1}{\sum P_1q_0 x \sum P_1q_1}} = 1$$

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test):– यह परीक्षण यह स्पष्ट करता है कि मूल्य के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (q_{01}) तैयार किया जाय तो इसका और मूल्य सूचकांक (P_{01})का गुणनफल चालू वर्ष के कुल मूल्य $\sum(P_1q_1)$और आधार वर्ष के कुल मूल्य $\sum(P_0q_0)$के अनुपात के बराबर होना चाहिए। अर्थात्

$$P_{01} \text{ x } q_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0}$$

चक्रीय परीक्षण (Circular Test):– यह परीक्षण समय उत्क्राम्यता परीक्षण का ही विस्तार है इसके अनुसार यदि 2009 का सूचकांक 1999 के आधार पर बनाया जाये और 1999 का सूचकांक 1989 के आधार पर बनाया जाये तो 1989 के आधार पर प्रत्यक्ष रूप से निकाला गया 2009 का सूचकांक असंगत नहीं होना चाहिए। इसमें सूचकांक चक्र के रूप मे तैयार किये जाते हैं। और उन सब का गुणनफल 1 होना चाहिए।

अतः सूत्रानुसार $\dfrac{\text{चालू वर्ष का नया सूचकांक नये आधार वष का पुराना सूचकांक}}{100}$

उदाहरण 12:– निम्नलिखित आंकड़ो से फिशर का आदर्श सूचकांक की गणना कीजियें। समय उत्क्राम्यता और तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणों की जाँच भी कीजिए।

Commodity		**2000**	**2005**
Rice	Price (Qty)	Rs. 4 (50 kg)	Rs.10 (40 kg)
Wheat	Price (Qty)	Rs. 3 (10 kg)	Rs.8 (8 kg)
Gram	Price (Qty)	Rs. 2 (5 kg)	Rs. 4 (4 kg)

हलः–

Item	**2000**		**2005**		P_1q_0	P_1q_1	P_0q_0	P_0q_1
	P_0	q_0	P_1	q_1				
Rice	4	50	10	40	500	400	200	160
Wheat	3	10	8	8	80	64	30	24
Gram	2	5	4	4	20	16	10	8
					600	**480**	**240**	**192**

Fisher's Ideal Index No.: -

$$100\sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0}} = 100\sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$= 100\sqrt{2.5 \text{ x } 2.5} = 250$$

Time Reversl Test: -

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0}} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_0}{\sum P_1q_0} x \frac{\sum P_0q_1}{\sum P_1q1}} = \sqrt{\frac{240}{600} x \frac{192}{480}}$$

$$P_{01} \text{ x } P_{10} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192} x \frac{240}{600} x \frac{192}{480}} = 1$$

Factor Reversal Test:- परीक्षाण के अनुसार $P_{01} \text{ x } q_{01} = \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0}$ होना चाहिए

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1q_0}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_1}} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_0q_1}{\sum P_0q_0} x \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_1q_0}} = \sqrt{\frac{192}{240} x \frac{480}{600}}$$

$$P_{01} \text{ x } Q_{01} = \sqrt{\frac{600}{240} x \frac{480}{192} x \frac{192}{240} x \frac{480}{600}} = 1$$

अर्थात् $\frac{\sum P_1q_1}{\sum P_0q_0}$

इस प्रकार यह सूत्र तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षण पर सही सिद्ध होता है।

15.9 सूचकांको की सीमाएँ

यह माना गया है कि परिवर्तनो की तुलनात्मक या सापेक्ष मापन की दृष्टि से सूचकांक एक महत्वपूर्ण सांख्यिकीय उपकरण है लेकिन व्यवहार में इसकी कुछ सीमाएँ है। यह परिसीमाएँ इस प्रकार से है।

1. **न्यादर्श पर आधारितः**— सूचकांक की गणना में प्रत्येक मद को शामिल करना अत्यन्त कठिन कार्य है। यदि न्यादर्श में शामिल की गई मदे समग्र का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करती, तो सही स्थिति प्रकट नहीं हो पायेगी।
2. **औसत का संकेत** :— सूचकांक द्वारा परिवर्तन से औसत का ही संकेत मिलता है। इसी के आधार पर इनका परिवर्तन किया जाना चाहिए।
3. **रचना सम्बन्धी सीमाएँः**— सूचकांको की रचना में असावधानियों का या भ्रम उत्पन्न हो सकता है। जैसे आधार वर्ष का चुनाव, भार का निर्धारण, औसत का प्रयोग आदि।
4. **विशिष्ट उद्देश्यो का प्रभावः**— किसी एक उद्देश्य से बनाया गया सूचकांक का प्रयोग दूसरे उद्देश्य के लिये नहीं हो सकता।
5. **गुणात्मक तथ्यो के परिवर्तन की उपेक्षाः**— सूचकांक के माध्यम से संख्यात्मक परिवर्तन का मापन सरलता से हो जाता है, लेकिन यदि सम्बन्धित तथ्यो में गुणात्मक परिवर्तन भी हुआ हो तो उसका सही प्रकटीकरण नहीं हो पाता।

15.10 सारांश

आर्थिक क्षेत्र में निरन्तर परिवर्तित होते रहते हैं। इन्हीं परिवर्तनों का अध्ययन करने और इनके प्रभावों को स्पष्ट करने के लिए जिस सांख्यिकीय तकनीक को विकसित किया गया है उसी तकनीक को सूचकांक अथवा निर्देशांक कहते हैं। प्रारम्भ में सूचकांक को केवल मूल्यस्तर तथा मुद्रा की क्रयशक्ति का माप करने हेतु प्रयोग किया जाता था, परन्तु आज के समय में इसका प्रयोग विस्तृत हो गया है। सूचकांको के विकास में प्रो. जेवन्स, डॉ. मार्शल, एजवर्थ फिशर का नाम उल्लेखनीय है। सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य है, जिनके द्वारा समय, स्थान या अन्य किसी विशेषता के आधार पर सम्बन्धित चर मूल्यों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का मापन किया जाता है।

सूचकांक को कीमत या मूल्य सूचकांक, मात्रा सूचकांक, कुल मूल्य सूचकांक या वैल्यू सूचकांक, उद्देश्य विशेष सूचकांक वस्तुओं की संख्या के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। मूल्य सूचकांक एक प्रमाप वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष के मूल्य स्तर को व्यक्त करते हैं। आधार वर्ष ज्ञात करने की दो रीतियां हैं— स्थिर आधार रीति एवं श्रृंखला आधार। आधार परिवर्तन दो प्रकार के होते हैं :— स्थिर आधार से श्रृखंला आधार में एवं श्रृखंला आधार से स्थिर आधार में। आधार वर्ष परिवर्तन आधार परिवर्तन से भिन्न होता है। आधार वर्ष परिवर्तन का आशय है— एक सूचकांक के दिये हुये (पुराने) आधार वर्ष को बदलकर उसके स्थान पर किसी नये आधार वर्ष पर आधारित करके एक नई सूचकांक श्रृखंला की पुर्नरचना करना। आधार वर्ष परिवर्तन की दो रीतियाँ है— प्रत्यक्ष या पुर्ननिर्माण रीति एवं अप्रत्यक्ष अथवा परोक्ष या संक्षिप्त रीति। सूचकांक रचना में किस माध्य का प्रयोग किया जाये यह तय करना जरूरी होता है। व्यवहार में माध्यका, समान्तर माध्य या गुणोत्तर माध्य में से किसी एक ही का प्रयोग

करना चाहिए। जब विभिन्न वस्तुओं से सम्बंधित भारों को ध्यान में रखकर सूचकांक बनाया जाता है। तो उसे भारित सूचकांक कहते हैं। भार देने की दो रीतियाँ है प्रत्यक्ष तथा परोक्ष भारांकन स्थिर तथा परिवर्तनशील भार। सूचकांक निर्माण की दो विधियाँ है– अभारित एवं भारित। भारित समूही रीति में शामिल सभी वस्तुओं को भार आवंटित किये जाते हैं। इसके निमार्ण की अनेक रीतियां है – लास्पेयर रीति, पाशे रीति, फिशर आदर्श का सूचकांक, मार्शल, एजवर्थ रीति, डोरविश एवं बाउले रीति व कैली रीति। एक उपयुक्त सूत्र के चुनाव की कसौटी हेतु कुछ मापदण्ड या परीक्षण सुक्षाये गये है। इकाई मापदण्ड, समय उत्क्राम्यता परीक्षण, तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण, चक्रीय परीक्षण। शिरोबन्धन का अर्थ दो सूचकांको मालाओं के शिरो को बांधने से है अर्थात् शिरो बन्धन का अर्थ दो या अधिक अधिव्याप्त सूचकांको की मालाओं को किसी एक सामान्य आधार पर एक सूचकांक माला में परिवर्तित करने से है। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक या निर्वाह लागत सूचकांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्ति के निर्वाह व्यय में होने वाले परिवर्तनो की दशा और मात्रा को प्रकट करते हैं।

सूचकांक एक तुलनात्मक अथवा सापेक्ष माप है।वास्तव में ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है, जिसमें संख्यात्मक को मापने के लिए सूचकांकों का प्रयोग न होता हो। तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना, भावी प्रवृत्तियों के संकेतक ,आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक ,जटिल तथ्यों को सरल बनाना, विभिन्न मूल्यों की अवस्फीति में सहायक सूचकांक की उपयोगिता को दर्शाता है। निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है कि सूचकांक प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाने वाला एक विशेष प्रकार का माध्य है जिसके आधार पर विभिन्न समयों, स्थानों या अन्य समंक समूहों में होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनों की सामान्य प्रकृति को मापा जाता है।

15.11 शब्दावली

1. तुलनात्मक अध्ययन – comparative study
2. सापेक्ष मापन – relative measurement
3. प्रतिनिधि मूल्य – Representative Price
4. स्थिर आधार रीति – जब आधार मूल्य स्थिर रहते है।
5. बहुवर्षीय माध्य आधार – कुछ वर्षो के माध्य को आधार मान लेते है।
6. चल आधार रीति – चालू वर्ष के लिये पिछला वर्ष आधार वर्ष मान लेते है
7. शिरोबन्धन – दो या अधिक सूचकांक मालाओ को किसी एक सूचकांक माला में परिवर्तित करने से है।

8- मूल्य अनुपात – Price Relative (P.R.)
9. उद्धरण – Quotation
10. भारांकन – weighting
11. सजातीय – Homogenous

15.12 लघु उत्तरीय प्रश्नः–

1. फिशर के आदर्श सूचकांक के निर्धारण में सामान्यता कितने खाने होते हैं।
2. पाशे का सूचकांक आधारित है।

   (1) आधार वर्ष की मात्रा पर (2) चालू वर्ष की मात्रा पर

(3) दोनों के औसत पर (4) इनमे से कोई नहीं।

3. एक अध्ययन सूचकांक वह है जो संतुष्ट करता है।
   (1) इकाई परीक्षण (2) समय उत्क्राम्यता परीक्षण
   (3) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (4) चक्रीय परीक्षण
4. निम्न में से आदर्श सूचकांक है
   (1) पाशे का सूत्र (2) फिशर का सूत्र
   (3) लास्पेयर का सूत्र (4) वाश का सूत्र
5. सूचकांको की रचना के लिये सर्वोत्तम माध्य है।
   (1) मध्यक (2) माध्यिका
   (3) बहुलक (4) गुणोत्तर माध्य
6. सूचकांक होते हैं आर्थिक
   (1) लेक्टोमीटर (2) स्पाइरामीटर
   (3) बैरो मीटर (4) कैलोरीमीटर

उत्तरः– (1) 1, (2) 2, (3) 3, (4) 2, (5) 4, (6) 3

15.13 सदंर्भ सहित ग्रन्थ

- डा0 एस सचदेवा :– परिमाणात्मक विधियाँ ,लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा।
- डा0 के0 एल0 गुप्ता एवं डा0 हरिओम गुप्ताः– परिमाणात्मक तकनीकें, नवयुग साहित्य भवन, आगरा।
- डा0 के0 एल0 गुप्ता, रवि कान्तः– अर्थशास्त्र की आधारभूत परिमाणात्मक विधियाँ, नवनीत पब्लिकेशन्स, आगरा।
- एस0पी0 सिंहः– साख्यिकीः सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस0 चन्द पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली।

15.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें:–

- Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
- Singh, S.P. (2010) Principles of Statistics , S &Chand Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
- Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

15.15 निबन्धात्मक प्रश्नः–

1. सूचकांक क्या है? इसका निर्माण कैसे किया जाता है? फिशर का सूत्र आदर्श सूचकांक क्यो कहलाता है?
2. सूचकांक की परिभाषा दीजिये? सूचकांक बनाने की स्थिर आधार विधि व श्रृखंला आधार विधि में अंतर स्पष्ट कीजिये व उनके तुलनात्मक गुणो का वर्णन कीजिये।
3. वर्ष 2004 को आधार मानकर नये सूचकांक ज्ञात कीजिये।

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006
सूचकांक	100	108	120	150	210	225

4. निम्न में से फिशर आदर्श मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजियेः–

वस्तुएँ	आधार वर्ष		प्रचलित वर्ष	
	मूल्य/इकाई	कुल व्यय	मूल्य/इकाई	कुल व्यय
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

इकाई – 16 काल श्रेणी विश्लेषण

16.1 प्रस्तावना –

प्रस्तुत इकाई में काल श्रेणी विश्लेषण पर प्रकाश डाला गया हैं। आधुनिक एवं व्यावसयिक क्षेत्रो में समय के साथ–साथ निरन्तर रीति से अनेक प्रकार के परिवर्तन होते रहते हैं। किसी भी चल के मूल्यों में समय में परिवर्तन के साथ साथ परिवर्तन होते रहते हैं। इस परिवर्तन के कई कारण हो सकते हैं जैसे– जनसँख्या में परिवर्तन, मूल्य में परिवर्तन, उपभोक्ताओं की रुचियों में परिवर्तन, उनकी आयों में परिवर्तन, आर्थिक स्थिति में परिवर्तन, आदि। काल की गति के साथ मूल्यों मे होने वाले विभिन्न दीर्घकाल एवं अल्पकालीन उच्चवचनों का विधिवत् विश्लेषण किसान, उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्गो के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है।

यदि किसी वस्तु के विक्रय सम्बन्धी पिछले 50 वर्षों के समंकों का अध्ययन किया जाए तो यह मालूम होगा कि वार्षिक विक्रय में प्रत्येक वर्ष परिवर्तन होता रहता है । यदि हम श्रेणी के अद्ध्य्यन के आधार पर अगले वर्षों में होने वाले विक्रय का पूर्वानुमान करना चाहते हैं तो हमें विक्रय को प्रभावित करने वाले सभी तत्वों के प्रभावों का अलग अलग अध्यन करना पडेगा।

अतः काल श्रेणी के विश्लेषण में हम किसी चल के मूल्यों को प्रभावित करने वालें विभिन्न तत्वों के प्रभावों का अध्ययन करते हैं। साथ ही काल श्रेणी के महत्त्व का भी अवलोकन करेंगे और भविष्य के बारे में पूर्वानुमान एवं पिछले अनुभवों से होने वाले लाभ में काल श्रेणी की भूमिका का भी अध्यन करेंगे।

16.2 उद्देश्यः–

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करके हम यह जान सकेगेंः–

- ✓ काल श्रेणी विश्लेषण किसे कहते हैं।
- ✓ काल श्रेणी के संघटक क्या हैं।
- ✓ दीर्घकालीन प्रवृत्ति एवं अल्पकालीन उच्चावचन में क्या अंतर है।
- ✓ अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन उच्चावचनों के मापन की कितनी विधियां हैं।
- ✓ काल श्रेणी के विश्लेषण के क्या महत्त्व हैं।

16.3 काल श्रेणी विश्लेषण

एडवर्ड–डे लेविस के अनुसार, ”अर्थशास्त्री के लिए यह जानने के प्रयासों मे कि आर्थिक व्यवस्था कैसे कार्य करता है, काल श्रेणी का अध्ययन सम्भवन, सूचना का सबसे महत्वपूर्ण स्रोत है।”काल की गति के साथ मूल्यों में होने वाला दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावनों का विश्लेषण किसान उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्गों के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है।

16.3.1 अर्थ :–काल श्रेणी का आशय ऐसी श्रेणी या समंकमाला से है, जिसमें 'काल' अर्थात् 'समय' के आधार पर संमक प्रस्तुत किय जाते हैं।

बर्नर हर्श के अनुसार, समय के क्रमिक बिन्दुओं के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल श्रेणी कहलाता है। **या लुन चाऊ** के अनुसार एक काल श्रेणी को

विभिन्न समय अवधियों में किसी आर्थिक चर या चरों के मिश्रण से सम्बन्धित संख्याओं के संकलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

"A time series may be defines as a collection of readings belonging to different time periods, of economic variable or composite of variables."- Prof Ya-Lun-Chou

तकनीकी दृष्टि से काल श्रेणी विश्लेषण में स्वतन्त्र चर मूल्य एवं समंक आश्रित चर होते हैं। यह संमक समय के साथ–साथ होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करते हैं।

उदहारण :–

भारत में जनसख्या –

वर्ष	जनसंख्या (करोड़)
1957	36.20
1961	43.90
1971	54.00
1981	68.40

निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि काल श्रेणी का आशय समय क्रम में सांख्यिकीय संमको की व्यवस्था से है। यह श्रेणी समय परिवर्तन के साथ ही तथ्य विशेष के संमकों में होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करती है। काल श्रेणी में होने वाले दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन न सिर्फ व्यापारी वरन् अर्थशास्त्री के लिए भी बड़ा महत्व रखता है। भूतकाल के परिवर्तन के विश्लेषण करके वे पिछले अनुभव के आधार पर भविष्य की नीतियाँ निर्धारित कर सकते हैं। और अपनी क्रियाओं पर नियंत्रण करके भविष्य के जोखिमों से अपने व्यापार की सुरक्षा कर सकते हैं। अतः यह कह सकते हैं कि विभिन्न वर्ग चाहे वो अर्थशास्त्री हो या उपभोक्ता, योजनाकार, किसान, राजनीतिक आदि सभी के लिये काल श्रेणी में से वाले परिवर्तनों का विश्लेषण विशेष रूप से उपयोगी होता है। एक विवेकपूर्ण विश्लेषण तथा संकेतको का वैज्ञानिक विवेचन काल श्रेणी की महत्ता में वृद्धि करता है।

16.4 काल श्रेणी के अंग या संघटक

अनेक प्रकार के घटक या परिवर्तन काल श्रेणी पर अपना प्रभाव डालते है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गों में बाँट सकते हैं और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते हैं। मूल संमकों को 'σ'से दर्शाया जाता है, इसके चार संघटक है।

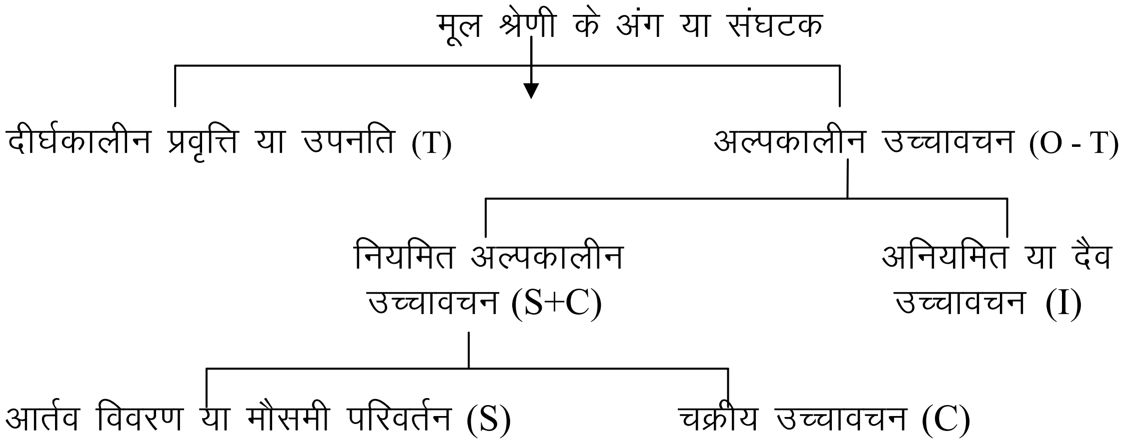
(i) दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T)

(ii) मौसमी विचरण (S)

(iii) चक्रीय उच्चारण (C)

(iv) अनियमित उच्चावचन (I)

काल श्रेणी के अंग या संघटक



अनेक प्रकार के घटक या परिवर्तन काल श्रेणी पर अपना प्रभाव डालते है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गों में बाँट सकते हैं और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते हैं।

16.4.1 दीर्घकालीन प्रवृति या उपनति (Secular trend or long term movement or trend)

इसे 'T' से सम्बोधित किया जाता है।जब दीर्घकाल में परिर्वतन की सामान्य दिशा का अध्ययन होता है तो उस प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृति कहते हैं। इस प्रकार secular trend किसी समंक में दीर्घकाल में घटने अथवा बढ़ने की प्रवृत्ति की ओर संकेत करती है न कि उनमे होने वाले अल्पकालीन उच्चावचनों की ओर।

प्रो0 सिम्पसन और काफ्का के अनुसार ″उपनति जिसे दीर्घकालीन प्रवृत्ति भी कहते हैं, किसी समयावधि मे बढ़ने या घटने की आधारभूत प्रवृत्ति होती है। उपनति की धारणा में अप्लकालीन परिवर्तन शामिल नहीं होते, वरन् दीर्घकालीन में हुये स्थिर परिवर्तन शामिल होते हैं।″

सरल शब्दों में यह कह सकते हैं कि अल्पकाल में समय–समय पर कई उतार चढ़ाव होते हैं पर दीर्घकाल में इन्हीं उतार–चढ़ाव में एक अर्न्तविहीन प्रवृत्ति देखने को मिलती है। इसी प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहते हैं। उदाहरण के तौर पर यदि देश में मूल्यों की बात करें तो हम पायेंगे कि उनमें समय–समय पर कई उतार–चढ़ाव हुये परन्तु दीर्घकाल में उनकी प्रवृत्ति बढ़ने की ही है। उत्पादन, उपभोग, विक्रय, निर्यात, विनियोग, कीमत, रोज़गार आदि के काल श्रेणियों में दीर्घकाल में बढ़ने अथवा घटने की प्रवृत्ति प्रतिलक्षित होती है। यह प्रवृत्ति जनसँख्या में वृद्धि, तकनीकी परिवर्तन, व्यावसायिक संगठन और विधि में परिवर्तन, प्राकृतिक साधनों की खोज, सरकारी नीति आदि ऐसे अनेक महत्वपूर्ण तथ्यों के प्रभावों के परिणामस्वरूप उत्पन्न होती है जिनमे परिवर्तन धीरे धीरे होता है। ऐसे तत्वों का आर्थिक समंको पर प्रभाव भी नियमित एवं मंद होता है।

“Trend, also called Secular trend or long term trend, is the basic tendency (of series) to grow or decline over a long period of time. The concept of trend does not include short term oscillations but rather study movements over a long period of time." -Simpson and Kafka

दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने के उद्देश्य–

इसे प्रवृत्ति को मापने के दो प्रमुख उद्देश्य है।

(1) अन्य संघटको की जानकारी – जैसे
अल्पकालीन उच्चावचन, मॉसमी विचरण, चक्रीय परिवर्तन आदि।

(2) भविष्य का अनुमान

प्रमुख विशेषताएँ –

(1) तीन पहलू – (i) वृद्धि प्रवृत्ति – देश में मूल्यों की स्थिति
(ii) कमी प्रवृत्ति – जनसंख्या की मृत्यु दर
(iii) स्थिर प्रवृत्ति – स्थान विशेष का तापमान

(2) विभिन्न समयों में विभिन्न प्रवृत्ति – यह भी मुमकिन है कि एक दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अन्दर एक समय में एक प्रवृति, दूसरे समय मे दूसरों प्रवृत्ति देखने को मिले।

(3) तुलनात्मक धारणा – क्योंकि दीर्घकाल एक तुलनात्मक धारण है अतः यह श्रेणी विशेष की विशेषताओं से प्रभावित होता है। मृतकों की संख्या किसी विशेष परिस्थिति के दौरान एक माह से कुछ माह में ही दीर्घकालीन अवधि के अन्तर्गत आ सकती है जबकि मूल्यों के उतार–चढ़ाव कई सालों की अवधि को इस श्रेणी में लाया जाता है।

16.4.2 नियमित अल्पकालीन उच्चावचन (Regular short term oscillation)

कई बार देखा गया है कि कुछ ऐसी शक्तियों काल श्रेणी को प्रभावित करती है, जिसकी समय–समय पर पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि यह पुनरावृति नियमित रूप से होती है। अतः उन्हें नियमित अप्लकालीन उच्चावचन कहा जाता है। विभिन्न रीतियों से निकाले गए प्रवृत्ति मूल्यों (trend values) को काल श्रेणी के मूल समंकों में से यदि घटा दिया जाए, तो जो शेष बचता है उसे अल्पकालीन उच्चावचन (short term oscillations) कहते हैं । इन्हें दो भागों में बांट सकते हैं।

a. आर्त्तव विचरण या मौसमी परिवर्तन (seasonal variations)–जो परिवर्तन एक वर्ष से कम की अवधि में ही नियमितता और लगभग एकरूप प्रवृत्ति के रूप में होते रहते है, उन्हें मॉसमी परिवर्तन कहते हैं–जेसे दिन, सप्ताह, माह, छमाहि आदि। इसके मुख्य कारण है।

(i) जलवायु

(ii) रीतिरिवाज, परम्परा और स्वभाव

(iii) समय विशेष की परिस्थिति–जैसे अप्रैल आते ही स्कूल की ड्रेस और किताबों की मांगों में उछाल।

आर्थिक समंकों के दृष्टिकोण से प्रतिवर्ष घटित होने वाली periodic movement अधिक महत्वपूर्ण होती हैं। यद्यपि मौसमी परिवर्तन का विस्तार परिवर्तनीय हो सकता है परन्तु उनकी अवधि सर्वदा निश्चित होती है। यही कारण है कि वार्षिक समंकों में मौसमी परिवर्तन दृष्टिगोचर नही होते।

<u>मौसमी परिवर्तन की विशेषताएँ</u> :–

(i) नियमित परिवर्तन

(ii) दोनों दशाओं में परिवर्तन–अर्थात् उतार भी और चढ़ाव भी।

(iii) पूर्वानुमान सम्भव–उपभोक्ता, उत्पादक विक्रेता आदि अपने निर्णय लेते समय परिवर्तनों का विशेष ध्यान रखते है और भविष्य पुर्वानुामान के लिए कर पाते है।

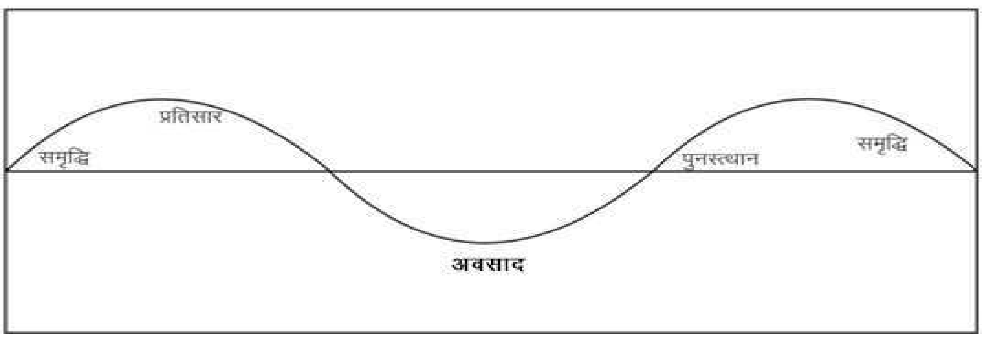
b.**चक्रीय उच्चावचन** (cyclical fluctuations) – यह प्रायः देखा गया है कि आर्थिक काल श्रेणियों में तरंग सरीखे (wave like) उतार चढ़ाव दिखलाई पड़ते हैं । इस प्रकार के परिवर्तन इनेपदमे बलबसम के कारण उत्पन्न होते हैं। यह उचावचन भी नियमित होने वाले होते हैं किन्तु इनकी पुनरावृत्ति एक वर्ष से अधिक की होती है। इन्हें चक्रीय इसलिये कहा जाता है क्योंकि इनका क्रम चक्रीय स्वभाव का होता है। जैसे व्यापार का चक्र जिसमें सामान्यतः चार अवस्थायें देखने को मिलता है–

समृद्धि – prosperity

प्रतिसार- recession

अवसाद- depression

पुनस्त्थान- recovery



यहाँ परिवर्तन की अवधि 3 वर्ष से 10 वर्ष की हो सकती है। इसके लिये 'C' शब्द का प्रयोग होता है।

चक्रीय उच्चावचन मौसमी परिवर्तन से भिन्न होते हैं । इनकी अवधि नियमित नहीं होती। फिर भी cyclical variation का परिवर्तन क्रम (sequence of change) लगभग नियमित होता है। इनकी अवधि मौसमी विचरण की अवधि से अधिक होती है ।

16.4.3 अनियमित या दैव उच्चावचन

जब अकस्मात कोई घटना या परिस्थिति से उच्चावचन होते हैं तो उन्हें अनियमित उच्चावचन कहा जाता है। जैसे किसी कारखाने में आग लगना, जिसके कारण लाभ कम हो जाना, हड़तालों के कारण उत्पादन प्रभावित होना आदि। इन परिवर्तनों की दिशा या मात्रा के बारें में अनुमान लगाना असंभव होता है। उनका अध्ययन करने के

लिए पहले दीर्घकालीन प्रवृत्ति और फिर अल्पकालीन उच्चावचन के प्रभावों को दूर करना आवश्यक है। परन्तु ऐसा करने पर भी अनियमित होने के कारण इनका वैज्ञानिक अध्ययन संभव नहीं। अनेक ऐसे तत्त्व है जहाँ पर अनियमित उच्चावचन देखने को मिलता है। जैसे युद्ध , बाढ़, भोचाल, हड़ताल, राजनीतिक परिवर्तन आदि जो कि अवधि एवं तीव्रता की दृष्टि से अनियमित होते हैं। ये न किसी काल क्रम से प्रभावित होते हैं न किसी अन्य प्रकार से नियमित होते हैं।

विशेषताएँ :–

(i) पूर्वानुमान नहीं–क्योंकि यहाँ जो शक्तियों क्रियाशील होता है उनके बारे में पहले से जानकारी मिलना सम्भव नहीं होता। अतः इसका पूर्वानुमान भी संभव नहीं हो पाता।

(ii) निश्चित प्रारूप न होना–नहीं ऐसे उच्चावचना का कोई निश्चित प्रारूप होता है न ही इनके पुनः होने की निश्चित अवधि होती है।

(iii) अल्पकालिक–ऐसे उच्चावचन प्रायः अल्पकालिक होते हैं पर इनका प्रभाव कभी–2 अत्यन्त गहरे होते हैं।

(iv) अनियमित परिवर्तन–इसके अन्तर्गत उन सभी परिवर्तना को शामिल किया जाता है जो न दीर्घकालिक प्रवृति और न मौसमी परिवर्तन की श्रेणी में आते है।

16.5 काल श्रेणी का विश्लेषण–आशय एवं मॉडल

काल श्रेणी निदर्श–काल श्रेणी के चार संघटकों का मापन निम्न दो मॉडलों पर आधारित है।

16.5.1 योज्य मॉडल (Additive)–यह इस मान्यता पर आधारित है कि मूल समंक चारों संघटक अंगो का योग होता है।

$$O = T + S + C + I$$

दीर्घकालीन उतपत्ति (T) को मूल संमक में से घटाकर अल्पकालीन उच्चावचनों का पृथक्क्करण किया जाता है।

$$O - T - S - C = I$$

अल्पकालीन उच्चावचनों (O-T) में से मौसमी विचरणों (S) को घटाकर चक्रीय व अनियमित परिवर्तन ज्ञात किया जा सकता है।

$$O - T - S = C + I$$

यदि अल्पकालीन उच्चावचनो (O-T) में से मौसमी और चक्रीय उच्चावचनों (S+C) को घटाकर अनियमित परिवर्तन ज्ञात किया जा सकता है।

$$O - T - (S + C) = I$$
$$= O - T - S - C = I$$

16.5.2 गुणात्मक मॉडल (multiplicative model)

इस में मूल संमक चारों सघंटकों को गुणनफल होता है।

$$O = T \times S \times C \times I$$

अल्पकालीन विचरण को मापने के लिये , इन्हें अलग–अलग ढंग से प्रयोग किया जा सकता है।

$$\frac{O}{T} = S \times C \times I$$

$$\frac{O}{T \times C} = S \times I$$

$$\frac{O}{T \times S \times C} = I$$

इस मॉडल में दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मूल संमको की इकाई के रूप में व्यक्त किया जाता है। व्यवहार में योज्य एवं गुणात्मक दोनों मॉडलों का मिश्रण भी अपनाये जा सकते हैं।

$$O = TSC + I$$

$$O = TC + SI$$

$$O = T + SCI$$

$$O = T + S + CI$$

16.6 दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन

इस प्रवृति को मापने के लिये चार प्रमुख रीतियाँ निम्न प्रकार है :–

1. मुक्त हस्त रीति
2. अर्द्ध मध्यक रीति
3. चल माध्य रीति
4. न्यूनतम वर्ग रीति

16.6.1 मुक्त हस्त वक्र रीति (The Free Hand Curve Method)

इस रीति में मूल काल श्रेणी को बिन्दु रेखीय पत्र पर अंकित करके एक चित्र बनाया जाता है। तथा उसके पश्चात् आकड़ो के उतार–चढाव को ध्यान में रखके उच्चावचनों के लगभग गुजरता हुआ एक सरलित वक्र खीचां जाता है। यही वक्र मुक्त हस्त रीति द्वारा दीर्घकालिन प्रवृत्ति या उपनति का पदर्शित करता है।

इसे **बिन्दुरेखीय रीति** भी कहते हैं अथवा **निरीक्षण द्वारा वक्र अन्वायोजन की रीति** भी कहते हैं। यह एक सरलतम रीति है, क्योंकि इसमें जटिल गणितीय क्रियाओं का प्रयोग नहीं होता है। परन्तु इस रीति के दोष निम्नलिखित है –

(1) विषयगत रीति – सरलित वक्र खीचने में व्यक्ति के पक्षपात और पूर्वोग्रहो का प्रभाव पड़ सकता है।

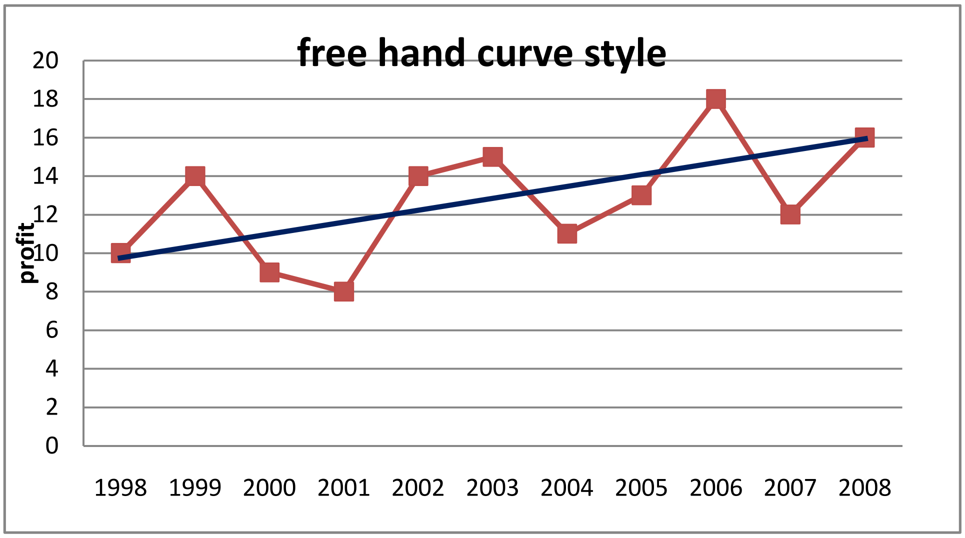
(2) इस रीति में परिशुद्धता का अभाव होता है।

(3) पूर्वानुमान में खतरा

उदाहरण :–

वर्ष	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
लाभ	10	14	9	8	14	15	11	13	18	12

हल :– वर्षों की संख्या के आधारपर एक बिन्दुरेखीय ग्राफ अंकित किया जाता है तथा मुक्त हस्त द्वारा एक सीधी रेखा अंकित की जाती है।



16.6.2 अर्द्ध मध्यक रीति (Semi Average Method)

इस रीति का अर्थ है–श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग (पूर्वाद्व तथा उत्तराद्ब) के मूल्यों का समान्तर माध्य इस रीति के द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार से है–

(1) काल श्रेणी का दो समान भागों में विभाजन – ऐसा करने के पश्चात् प्रत्येक भाग का माध्य निकालकर उस भाग के मध्य के समय बिन्दु के सामने रखा जाता है।

(2) दो माध्यों की गणना–दोनों समान भागों का अलग–अलग समान्तर माध्य ज्ञात कर लेते है। इस माध्यों को ही अर्द्धमध्यक कहते हैं।

(3) ग्राफ पेपर पर मूल बिन्दुओं का अंकन**-** पहले अर्द्धमध्यक का बिन्दु पहले भाग के समय के माध्यका बिन्दु के ऊपर और दूसरे अर्द्धमध्यक का बिन्दु के ऊपर लगाया जाता है।

(4) प्रवृत्ति सेवा – उपलब्ध सरल रेखा ही अर्द्धमध्यक रीति द्वारा प्राप्त प्रवृत्ति रेखा है। यदि मूल्यों की संख्या विषम हो तो बिल्कुल बीच के संमक को छोड़ दिया जाता है शेष क्रिया पूर्वरत रहता है।

उदाहरण 2:– निम्न संमकों से अर्द्धमध्यक रीति का प्रयोग करते हुए दीर्घकालीन प्रवृत्ति निर्धारित कीजिए तथा 2002 के मूल्य का अनुमान कीजिये–

वर्ष	1995	1996	1997	1998	1999	2000
उत्पादन	40	48	44	60	56	64

हल :– यहाँ कुछ 6 वर्षो के मूल्य दिये गये है इन्हें दो बराबर के भाग 3–3 वर्षों के होंगे और उनके माध्यम निकालकर बिन्दुओं पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति रेखा खींची जायेगी।

Year	production	3 Year semi total	Semi Avg.
1995	40		
1996	48	132	$\frac{132}{3} = 44$
1997	44		
1998	60	180	$\frac{180}{3} = 60$
1999	56		
2000	64		

वर्ष 1999 के लिये अर्द्ध माध्य = 60

वर्ष 1996 के लिये अर्द्ध माश्य = 44

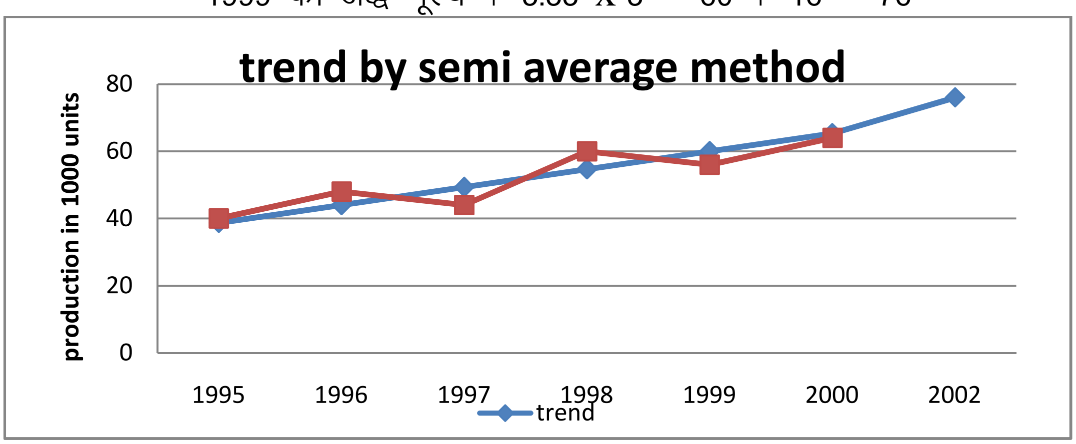
वार्षिक वृद्धि $\frac{16}{3} = 5.33$.

प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

वर्ष		उत्पादन
1995	44–5.33	38.67
1996		44
1997	44+533	49.33
1998	60–5.33	54.67
1999		60
2000	60+5.33	65.33

उपर्युक्त गणना के आधार पर 2002 का मूल्य

= 1999 का अर्द्ध मूल्य + 5.33 x 3 = 60 + 16 = 76



अर्द्ध मध्यक रीति के गुण –

1. सरलता
2. वतुनिष्ठता एवं निश्चितता
3. पूर्व या भावी अनुमान

<u>दोष</u> :–

(1) **रेखीय प्रवृत्ति**–यह रीति तभी प्रयोग हो सकती है जब दीर्घकालीन प्रवृत्ति लगभग रेखीय है।

(2) **चरम मूल्यों का प्रभाव**– मूल्य बहुत बड़े या छोटे होने पर अद्ध मध्यकों पर प्रभाव पड़ता है। और प्रवृत्ति रेखा उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर पाती।

16.6.3 चल माध्य रीति (Moving Average Method): -

यह एक लोचपूर्ण रीति है। जिसके अन्तर्गत दीर्घकालीन प्रवृत्ति को सरलता एवं प्रर्याप्त शुद्धता से ज्ञात किया जा सकता है।

यह रीति एक समान्तर माध्यों की श्रृख्लां है इसमें काल श्रेणी के निरन्तर अगले अतिव्यापी भाग के लिये समान्त माध्यों की गणना की जाती है।

यदि a, b, c, d, e, f छः वर्ष है और इनमें तीन वर्षीय चल माध्यों की गणना करनी है तो यह गणना इस प्रकार की जायेगी।

$$\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}$$

मूल प्रश्न यह उठता है कि कितने वर्षों का चल माध्य निकाला जाये–जैसे तीन वर्षीय, चार वर्षीय इत्यादि। चल माध्य की गणना की दृष्टि से प्रश्नों को दो भागों में बांटा जा सकता है–विषम अवधि चल माध्य एवं सम अवधि चल माश्य।

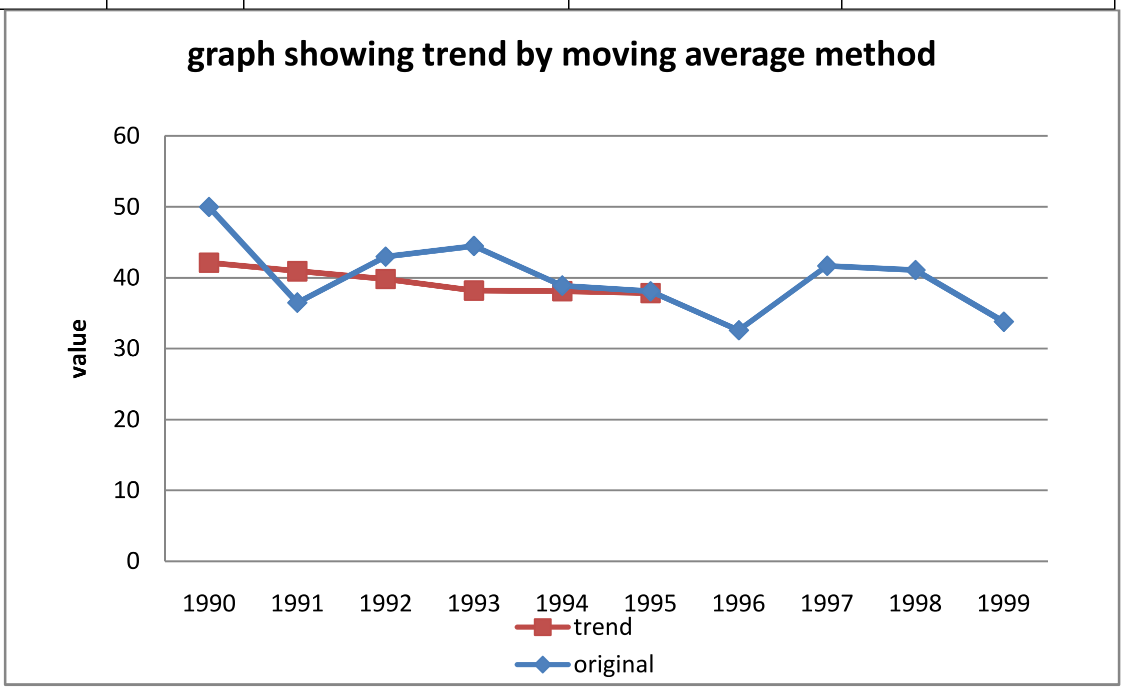
उदाहरण 3 –निम्न समंको से 4 वर्षीय चलमाध्य की गणना कीजिये और प्रवृत्ति को बिन्दुओं पत्र पर प्रोकित कीजिए।

वर्ष	मूल्य	वर्ष	मूल्य
1990	30.0	1995	38.10
1991	36.5	1996	32.60
1992	43.0	1997	41.70
1993	44.5	1998	41.10
1994	38.9	1999	33.80

हल– Calculation of trend Values by 4 yearly moving average –

year	**value**	**4 yearly moving tables**	**2 yearly moving tables**	**Moving Average**

1990	50.0			
1991	36.5	174.00		
1992	43.0	162.90	336.9	42.11
1993	44.5	164.50	327.4	40.93
1994	38.9	154.10	318.6	39.83
1995	38.1	151.30	305.4	38.18
1996	32.6	153.50	304.8	38.10
1997	41.7	149.20	302.7	37.84
1998	41.7			
1999	33.8			



<u>चल माध्य की अवधि</u> :–

जितनी अधिक अवधि का चल माध्य होगा, उतनी ही अनियमित उच्चावचनों की गहनता उतनी ही कम होती जायेगी अतः यदि अनियमित उच्चावचनों को कम करना हो तो लम्बी अवधि का चल माध्य लेना चाहिये।

परन्तु ऐसा करने मे एक दोष उत्पन्न होता है वह यह कि लम्बी अवधि का चल माध्य लेने पर प्रवृत्ति मूल्य वास्तविकता मूल्यों से उतनी ही दूर होते चले जायेंगे। अतः माध्य की अनुकूलतम अवधि वह होती है जो काल श्रेणी में विद्यमान चक्रीय अवधि के बराबर या गुणांक में है। ऐसा करने से चक्रीय विचरण अनियमित उच्चारण लगभग कम हो जाते हैं। और प्रवृति मूल्य का श्रेष्ठ सम्भावित मान मिल जाता है।

<u>चल माध्य रीति के गुण</u> :–

1. सरल

2. वस्तुनिष्ठता एवं निश्चिचता
3. लोचदार–ने मूल्य बढ़ने पर सभी गणनाएँ पुनः नहीं करनी होती वरन् कुछ अतिरिक्त माध्य बढ़ जाते हैं।
4. चक्रीय उच्चावचनों का उन्मूलन–यह तब संभव है जब चल माध्य का अवधि काल श्रेणी के चक्र की अवधि को ध्यान में रखकर निर्धारित कर ली जाये।
5. चरम मूल्यों का प्रभाव जिसके कारण प्रवृत्ति मूल्यों को उचित प्रकार ज्ञात नहीं किया जा सकता।

यदि काल श्रेणी में उच्चावचनों नियमित हो तो यह रीति सर्वश्रेष्ठ मानी जाती है।

16.6.4 न्यूनतम वर्ग रीति (method of least squares)–

यह रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति को ज्ञात करने की सर्वश्रेष्ठ रीति माना जाता है। इसके अन्तर्गत गणितीय समीकरणें के प्रयोग द्वारा न्यूनतम वर्ग मान्यता के आधार पर श्रेणी के लिये सर्वाधिक उपयुक्त रेखा खींची जाती है। यह रेखा सरल या परवलयिक वक्र का रूप ले सकती है।

इस रीतिको न्यूनतम वर्ग रीति इसलिये कहा जाता है क्योंकि इस रीति के आधार पर खींजी गयी प्रवृत्ति रेखा से मूल संमको के बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का योग अन्य किसी भी रेखा की तुलना में न्यूनतम होता है।

इस रीति के आधार पर प्रवृत्ति निर्धारण को तीन वर्गों में बाटा जा सकता है :–

1. सरल रेखा प्रवृत्ति अन्वायोजन।
2. परवलय वक्रीय अथवा अरेखीय अप्रवृत्ति अन्यायोजन।
3. अर्द्ध लघुगणकीय या घातांकीय वक्र।

(A) सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन (Fitting a Straight line trend): -

इसके अन्तर्गत निम्न आधारभूत समीकरण का प्रयोग किया जातजा है।

$y_c = a + bx$ $\quad$ Y_c = अभष्टि उपनत्ति मूल्य

X = समय की इकाई

अचर मूल्य a, b के इस प्रकार की जाती है

(1) दीर्घ रीति द्वारा (2) लघु रीति द्वारा

दीर्घ रीति–समय बिन्दुओं के लिये आरम्भ से क्रम संख्याएँ (1, 2, 3, ...आदि) प्रयुक्त की जाती है। ये क्रम संख्याएं x द्वारा व्यक्त की जाती है और इनका योग ($\sum x$) कर लिया जाता है।

1. क्रम संख्याओ के वर्गों का योग ($\sum x^2$) निकाला जाता है।
2. x और मूल समंको y के मूल्यों की गुणा करके उनका जोड़ ($\sum xy$) प्राप्त किया जाता है।
3. y मूल्यो का जोड़ ($\sum x$) प्राप्त किया जाता है।
4. $\sum x, \sum x^2, \sum xy, \sum y$, निकालने के बाद निम्न समीकरणों के द्वारा और के मूल्य निकाले जाते हैं।

$$\sum y = Na + b\sum x$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

a और b प्राप्त करके सरल रेखा के आधारभूत समीकरण को प्रयोग करके प्रवत्ति मूल्य निकाला जाता है।

लघु रीति–प्रवृत्ति निकालने के लिये यदि मध्यका वर्ष को मूलबिन्दु (O) माना जाये तो गणन क्रिया अत्यन्त सरल हो जाता है। $\sum xy$ शून्य हो जाता है, अतः

$$\sum y = Na$$

$$\sum xy = b\sum x^2$$

अतः $a = \frac{\sum y}{N}$ $\qquad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$

उदाहरण 4–काल श्रेणी के निम्न संमकों से न्यूनतक वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए।

Year	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Sales	5	7	9	10	12	17

–

Year	y	x	xy	x^2	y_c
2001	5	1	5	1	2.4+2.17x = 4.47
2002	7	2	14	4	2.4+2.17x2 = 6.74
2003	9	3	27	9	2.4+2.17x3 = 8.91
2004	10	4	40	16	2.4+2.17x4 = 11.08
2005	12	5	60	25	2.4+2.17x5 = 13.25
2006	17	6	102	35	2.4+2.17x6 = 15.42

$N = 6,\ \sum y = 60,\ \sum x = 21, \sum xy = 248,\ \sum x^2 = 91$

–

$$\sum y = Na + b\sum x$$

60 = 6a + 21b

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

248 = 21a + 91b

दोनों समीकरणों को हल करने पर –

420 = 42a + 147b

$\underline{496 = 42a + 182b}$ (2 से गुणा करने पर)

-76 = -35b

का मान (1) पर रखने पर –

60 = 6a + 21 x 2.17

$$a = \frac{14.43}{6} = 2.4$$

$$y_c = 2.4 + 2.17x$$

उदाहरण 5– न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निम्नलिखित संमको की सरल रेखीय प्रवृत्ति का अन्वायोजन कीजिए।

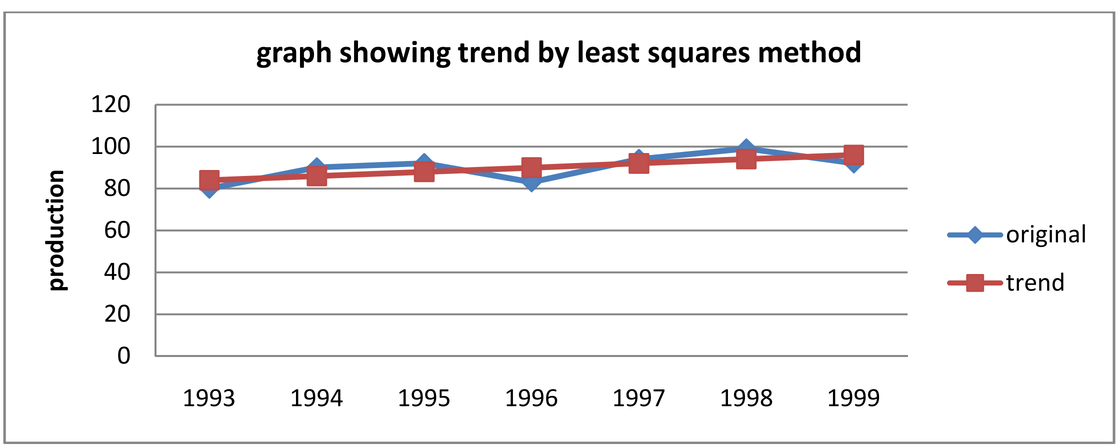
Year	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Sales	80	90	92	83	94	99	92

–

Year	Prood (y)	Deviation from 1996 (x)	Square x^2	xy	TRend Value a + bx = y0
1993	80	-3	9	-240	90 + 2x-3 = 84
1994	90	-2	4	-180	90 + 2x-2 = 86
1995	92	-1	1	-92	90 + 2x-1 = 98
1996	83	0	0	0	90 + 2x+ = 90
1997	94	1	1	94	90 + 2x1 = 92
1998	99	2	4	198	90 + 2x2 = 96
1999	92	3	9	276	90 + 2x3 = 96
N = 7	$\sum y = 630$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 28$	$\sum xy = 56$	$\sum y_c = 630$

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{630}{7} = 90, \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{56}{28} = 2$$

$$y_c = 90 + 2x$$



B. परवलय–वक्रीय अथवा अरेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन (**Fitting a parabolic Non linear trend**)

कभी कभार ऐसी स्थिति होती है जहाँ सरल रेखा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का यथार्थ रूप में प्रस्तुतिकरण नहीं कर पाती। ऐसी स्थिति में प्रवृति निकालने के लिये निश्चित घात का परवलयिक वक्र या ऐकन्द्रित वक्र खीचंना पड़ता है। उदाहरण के लिये द्वितीय घात के परवलयिक वक्र (Second Degree or Parabolic curve of the second dgeree) को स्पष्ट करना चाहे तो इसका मूल समीकरण निम्न प्रकार से है –

$y = a + bx + cx^2$

यहाँ a, b, c अचल मूल्य है, जिन्हें ज्ञात करने के लिये निम्न समीकरणों का प्रयोग किया जाता है।

$$\sum y = Na + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + bx\sum x^2 + cx\sum x^2$$

$$\sum x^2 y = ax\sum x^2 + + bx\sum x^3 + c\sum x3$$

यदि विचलन काल श्रेणी के ठीक माध्य से लिया हो तो $\sum x = 0$ का मान शून्य हो जायेगा और उपर्युक्त समीकरण सरल रूप से निम्न हो जायेंगे।

$$\sum y = Na + c\sum x^2$$

$$\sum xy = b\sum x^2$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + c\sum x4$$

यहाँ $\sum x^3$ इसलिये समाप्त हो गया है, क्योंकि $\sum x = 0$ होगा तो $\sum x^3$ कामान भी शून्य हो जायेगा।

उदाहरण–निम्न आंकड़ो के लिये द्वितीय कोटि का परवलयिक वक्र अन्वायोजित कीजिए–

Year	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**
Value	10	12	113	10	8

–

Year	y	x	x^2	x^3	Xy	xy	x^2y
1996	10	-2	4	-8	16	-20	40
1997	12	-2	1	-1	1	-12	12
1998	13	0	1	0	0	0	0

1999 2000	10 8	1 2	1 4	-1 -8	1 16	10 16	10 32
N = 5	$\sum y = 53$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 10$	$\sum x^3 = 0$	$\sum xy = 34$	$\sum xy = -6$	$\sum x^4 y = 94$

यहाँ पर $\sum x$ और $\sum x^3$ का योग 0 है।

$\sum y = Na + c\sum x^2$ or $53 = 5a + 10c$

$\sum xy = b\sum x^2$ or $-6 = 10b$

$\sum x^2 y = a\sum x^2 + c\sum x4$ or $94 = 10a + 34c$

समी० (2) में $10b = -6$ or $b = -0.6$.

समी० (1) में 2 से गुणा करने पर और समी (3) से घटाने पर –

$$94 = 10a + 34c$$

$$\frac{106 = 10a + 20c}{-12 = 14c}, \quad c = \frac{-12}{14} = 0.85$$

समी० (1) में c का मान रखने पर –

$$53 = 5a + 10x - 0.857$$

$$53 + 8.57 = 5a \text{ or } 5a = 61.57$$

$$a = 12.314$$

$$y = a + bx + cx^2$$

$$= 12.314 + (-0.6) x (-0.85)x^2$$

$$= 12.314 - 0.6x - 0.857x^2$$

वर्ष	X	गणना	प्रवृत्ति मूल्य (y_c)
1996	-2	$= 12.314 - 0.6x - 0.857 - 2^2$	= 10.08
1997	-1	$= 12.314 - 0.6 x - 1 - 0.857 x 1^2$	= 12.05
1998	0	= 12.314	= 12.314
1999	1	$= 12.314 - 0.6 x 1 - 0.857 x1^2$	= 10.85
2000	2	$= 12314 - 0.6 x 2 - 0.857 x 2^2$	= 7.68

C- अर्द्ध–लघुगणकीय या घातांकीय चक्र – (Semi-logarithm or exponential curve)

यदि काल श्रेणी में डाक स्थिर प्रतिशत की दर से वृद्धि या कमी होता है तो अर्द्ध लघुगणकीय अथवा घाताकीय वक्र का प्रयोग उचित रहता है।

समी०

a और b के मान की गणना के लिये निम्न समी० का प्रयोग किया जाता है–

$$\sum(\text{logy}) = \text{N log a} + \text{log b x} \sum \text{x}$$

$$\sum(\text{log y}) = \text{log a x} \sum \text{x} + \text{log b x} \sum \text{x}^2$$

यदि मूल बिन्दु मध्यका से लिये जाते हैं। तो उप्रयुक्त सूत्र की निम्न रूप से संक्षिप्तीकृत हो जाते हैं –

$$\sum(\text{log y}) = \text{N log a} \quad \text{or} \quad \text{log} = \frac{\sum \text{log y}}{\text{N}}$$

$$\sum(\text{x log y}) = \text{log b} \sum \text{x}^2 \quad \text{or} \quad \text{log b} = \frac{\sum(\text{x log y})}{\sum \text{x}^2}$$

यह वक्र सरल रेखा के रूप में ही बनता है यदि इसे अर्द्ध लघुगणकीय ग्राफ पर अंकित किया जाये लेकिन सामान्य ग्राफ पर यह वक्र अरेखीय हो जाता है।

न्यूनतम वर्ग रीति के लाभ :–

1. पूर्णता वस्तुनिष्ठ
2. पूर्वानुमान की सुविधा
3. पूरी अवधि के लिये प्रवृत्ति ज्ञात हो जाती है।
4. सर्वोपयुक्त रेखा
5. परिवर्तन दर की जानकारी

सीमाएँ :–

1. कठिन एवं जटिल रीति
2. लोच का अभाव
3. समीकरण का गलत चुनाव
4. भावी पूर्वानुमान की सीमाएँ क्योंकि इसमें मौसमी चक्रीय आदि उच्चावचनो को ध्यान में नहीं रखा जाता।

16.7 अल्पकालीन उच्चावचन का माप :–

काल श्रेणी पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति और अप्लकालीन उच्चवचनों दोनों का ही सामूहिक प्रभाव पड़ता है। अतः चल माध्य या न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निकाल गये प्रवृत्ति सहायक को मूल श्रेणी में से कर दिया जाये तो अल्पकालीन उच्चावचन शेष रह जाता है। इनको मापने की **प्रमुख रीतियां** निम्न प्रकार से है –

a) सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण (Simple average or seasonal Averages or seasonal variation index method)
b) चल माध्य द्वारा आर्त्तव विचरण (Seasonal variation througha moving average)
c) श्रृख्ंला मूल्यानुपात रीति (trend relative method)

d) प्रवृत्ति अनुमान रीति (Ratio to trend method)
e) चल माध्य अनुपाल रीति (Ratio to moving average method)

16.7.1 सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण आत्तर्व विचरण निकालने की यह सबसे सरल रीति है। इसका प्रयोग अधिकतर 12 मास आंकड़ो से ऋतुनिष्ठता का माप करने के लिये किया जाता है। यह रीति उस परिस्थिति में उपयुक्त है जहाँ आँकडो में कोई सुनिश्चित दीघकालीन प्रवृति स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर न हो।

$$\text{ऋतुनिष्ठ विचरण सूचकांक} = \frac{\text{ऋ तुकालिक मा ध्य}}{\text{सामान्य मा ध्य}} \times 100$$

उदाहरण निम्न संमको से ऋतुनिष्ठ सूचकाकों की गणना कीजिए –

Year	Jan	Feb	Mar	Apr	May	June	July	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2004	15	16	18	23	23	23	20	28	29	33	33	38
2005	23	22	28	31	31	28	22	28	32	37	34	44
2006	25	25	35	36	36	30	30	24	38	48	41	53

Calculation of seasonal variation indices by monthly average.

Month	1998	1999	2000	Total	Montly Avg	Seasonal India No.
Jan	15	23	25	63	21	70
Feb	16	22	25	63	21	70
Mar	18	28	35	81	27	90
Apr	18	27	36	81	27	90
May	23	21	36	90	30	100
Jun	23	28	30	81	27	90
July	20	22	30	72	24	80
Aug	28	28	34	90	30	100
Sept	29	32	38	99	33	110
Oct	33	37	47	117	39	130
Nov	33	34	41	108	36	120
Dec	38	44	53	135	45	150
Total				1080	360	1200
Avrage				90	30	100

$$\text{आर्त्तव विचरण निदेशांक} = \frac{\text{मासिक माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}} \times 100.$$

$$\text{जैसे जनवरी} = \frac{21 \times 100}{30} = 70 \text{ आदि}$$

16.7.2 चल माध्य द्वारा मौसमी विचरण – यह रीति प्रथम रीति से अधिक श्रेष्ठ है। इसके द्वारा चक्रीय उच्चावचनों को छोड़कर सभी प्रकार के विच्रानी प्रवृत्ति (trend) अल्पकालीन परिवर्तन (short time oscillations) मौसमी, तथा दैव उच्चावचन (random fluctuations) आदि का विशलेषण हो जाता है। यदि काल श्रेणी के मूल संमको पर उपनति का भी प्रभाव हो तो चल माध्यों का प्रयोग करके मॉसमी विचरणों का मापन किया जा सकता है। इस रीति का यह विशेषज्ञ लाभ है कि इसके द्वारा लगभग सभी प्रकार के विचरणों, प्रवृत्ति अल्पकालिक परिवर्तन तथा ऋतुनिष्ठ एवं अनियमित या दैव उच्चारण का विश्लेषण हो जाता है। यह रीति काल श्रेणी विश्लेषण के योगशील निदर्श पर आधारित है।

स्पष्तः यदि मौसमी परिवर्तनों को कुल उच्चावाचनों में से घटा दिया जाए तो शेष अनियमित उच्चावचन होंगे।

16.7.3 श्रृंख्ला मूल्यानुपात विधिः– मौसमी विचरण का विश्लेषण करने की यह एक सन्तोषजनक रीति है। इसके अनुसार पहले मौसम के श्रृखलानुपात परिगणित किये जाते हैं तथा फिर उनमें से अवशिष्ट प्रवृत्ति निकाल ली जाती है। इसकी क्रिया विधि इस प्रकार है–

1. प्रत्येक मॉसम का निम्न सूत्र द्वारा श्रृख्ला मूल्यानुपात ज्ञात किया जायेग।

$$\text{श्रृंख्ला मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित ऋतु मूल्य}}{\text{पिछला ऋतु मूल्य}}$$

2. प्रत्येक अवधि के श्रृंख्ला मूल्यानुपातो को समान्तर माध्य निकाला जायेगा।
3. उक्त श्रृंख्ला मूल्यानुपात माध्यों का प्रथम कालाविधि अधिक पर श्रृंख्ला सूचंकाकों में बदला जायेगा।

   प्रचलित ऋतु का श्रृंख्ला सूचकांक =.

   CR = Chain Relative (श्रृख्ंला सूचकांक)

   ALR = Link Relation (श्रृख्ंला मूल्यानुपात का माध्य)

   अन्तिम अवधि को आधार मानकर प्रथम अवधि का श्रंख्ला सूचकांक निकाला जायेगा।

   $$\text{प्रथम ऋतु का संगणित (R)} \frac{\text{अन्तिम ऋतु का LR प्रथम ऋतु का A.L.R}}{100}$$

16.7.4 प्रवृत्ति अनुपात विधि (Ratio to trend method) – यह रीति गुणनात्मक निदर्श पर आधारित है। प्रवृति को अधिक महत्व देती है और गणना क्रिया जटिल होने के कारण इसका प्रयोग भी कम किया जाता है। मूल समंकों को वर्ष के अनुसार अनुविन्यसित करके उनका मसमी माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। न्यूनतम वर्ग रीति से मूल समंकों के लिए दीर्घ्कालीन प्रवृत्ति (Secular trend) मालूम कर ली जाती है जो वार्षिक वृद्धि अथवा हास की दर प्रदर्शित करती है। इसे मासिक समंको की स्थिति में 12 तथा त्रैमासिक समंकों की स्थिति में 4 से भाग देकर मौसमी वृद्धि अथवा ह्मास दर मालूम कर ली जाती है। फिर मालूम किये गए मौसम माध्यों का माध्य मालूम कर लिया जाता है । यह माध्य श्रेणी के मध्य बिंदु का प्रवृत्ति मूल्य है। इस प्रकार मालूम किये गए प्रवुत्ति मूल्यों को 100 मानकर तत्संबंधी माध्य मूल्यों को प्रतिशत में बदल दिया जाता है । प्राप्त परिणाम ही मौसमी परिवर्तन के निर्देशांक होते हैं ।

16.8 काल श्रेणी का महत्व

(1) **भूतकाल के व्यवहार का विश्लेषण**–इस आधार पर व्यवहारों को नियन्त्रण करने की सुव्यवस्था हो सकती है।

(2) **भविष्य के विषय में अनुमान**–इसके बारे में बर्नर हिर्श का कहना है, काल श्रेण का विश्लेषण करने का मुख्य उद्देश्य भावी घटनाओं की गतिविधि का वास्तविक अनुमान लगाने के लिये आर्थिक तथ्यों में होने वाली परिवर्तनो को समझना, समझाना एवं मूल्याकिंत करना है।

(3) **तुलनात्मक अध्ययन**–दो या दो से अधिक सम्बन्धित समय अवधियों के संमकों का तुल्नात्मक अध्ययन करना सम्भव हो जाता है।

(4) **व्यापार चक्रों का अनुमान**–चक्रीय उच्चावचनों के आधार पर व्यापार चक्रों का अनुमान लगाया जा सकता है। व्यवसायों अपनो क्रियाओं को नियोजित कर सकता है।

अन्य साख्यिंकीय उपकरणों की भॉति काल श्रेणी विश्लेषण भी अनुमानित एंव सामान्य परिणाम तथा संकेत प्रदान करता है।

16.9 सारांश

काल की गति के साथ मूल्यों मे होने वाले विभिन्न दीर्घकाल एवं अल्पकालीन उच्चवचनों का विधिवत् विश्लेषण किसान, उपभोक्ता, व्यापारी, प्रशासक आदि सभी वर्गो के व्यक्तियों के लिये आवश्यक और उपयोगी होता है। निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि काल श्रेणी का आशय समय क्रम में सांख्यिकीय संमको की व्यवस्था से है। यह श्रेणी समय परिवर्तन के साथ ही तथ्य विशेष के संमकों में होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करती है। इन परिवर्तनों को कुछ वर्गों में बाँट सकते हैं और वर्ग ही काल श्रेणी के संघटक कहे जाते हैं।मूल संमकों को 'σ'से दर्शाया जाता है, इसके चार संघटक है।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T) मौसमी विचरण (S) चक्रीय उच्चारण (C)अनियमित उच्चावचन (I)

दीर्घकालीन प्रवृति को मापने के लिये चार प्रमुख रीतियाँ निम्न प्रकार है :–मुक्त हस्त रीति, अर्द्ध मध्यक रीति, चल माध्य रीति, एवं न्यूनतम वर्ग रीति। अल्पकालीन उच्चावचन को मापने की प्रमुख रीतियां सरल माध्य या आर्त्तव माध्य या आर्त्तव विचरण, चल माध्य द्वारा आर्त्तव विचरण, श्रृंख्ला मूल्यानुपात रीति, चल माध्य अनुपात रीति एवं प्रवृत्ति अनुपात रीति है । काल श्रेणी में होने वाले दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन न सिर्फ व्यापारी वरन् अर्थशास्त्री के लिए भी बड़ा महत्व रखता है। भूतकाल के परिवर्तन के विश्लेषण करके वे पिछले अनुभव के आधार पर भविष्य की नीतियाँ निर्धारित कर सकते हैं। और अपनी क्रियाओं पर नियंत्रण करके भविष्य के जोखिमों से अपने व्यापार की सुरक्षा कर सकते हैं। अतः यह कह सकते हैं कि विभिन्न वर्ग चाहे वो अर्थशास्त्री हो या उपभोक्ता, योजनाकार, किसान, राजनीतिक आदि सभी के लिये काल श्रेणी में से वाले परिवर्तनों का विश्लेषण विशेष रूप से उपयोगी होता है। एक विवेकपूर्ण विश्लेषण तथा संकेतको का वैज्ञानिक विवेचन काल श्रेणी की महत्ता में वृद्धि करता है।

16.10 शब्दावली :–

1)	समयानुसार श्रेणी	Chronological series
2)	संघटक	Components

3)	मौसमी परिवर्तन	ऐसे परिवर्तन जो नियमित और आवर्त्तक होते हैं।
4)	पुनरावृत्ति	Repetition
5)	दैव उच्चावचन	अनियमित उतार–चढाव
6)	सरलित वक्र	Smoothed Curve
7)	मध्यका बिन्दु	Mediain pt.
8)	अगले अतिव्यापी	Successive overlapping
9)	सर्वाधिक उपयुक्त रेखा	Line of best fit
10)	उपनति	Trend

16.11 लघु उत्तरीय प्रश्न :–

1) नियमित अल्पकालीन उच्चावचन को विभाजित किया जाता है।
2) ______________ (b) ______________
3) काल माला के गुणन मॉडल में γ =
O – T – S = __________________
4) किसी काल माला के समंको में बढ़ने या घटने की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को .... कहते हैं।
5) मौसमी विचरण .... अवधि के अल्पकालीन उच्चावचन है।

उत्तर :–

1) मौसमी, चक्रीय
2) $\gamma = T \times S \times C \times I$
3) C + T
4) सुदीर्घकाल उपनति
5) चक्रीय

16.12 बहुविकल्पीय प्रश्न :–

1) सामान्त माध्य की प्रमाप त्रुटि का सूत्र –

(i) $\frac{\sigma p}{n}$ - (ii) $\frac{\sqrt{\sigma p}}{n}$

(ii) $\sqrt{\frac{\sigma p}{n}}$ (iv) $\frac{\sigma p}{\sqrt{n}}$

2) माध्य विचलन को प्रमाप त्रुटि होती है –

(i) $0.78672\ \sigma/\sqrt{n}$ - (ii) $0.6028\ \sigma/\sqrt{n}$

(ii) $\sigma/\sqrt{n}$ (iv) $1.36\ \sigma/\sqrt{n}$

16.13 सदंर्भ सहित ग्रन्थ

- **डा0 एस सचदेवा :–** परिमाणात्मक विधियाँ ,लक्ष्मी नारायण अग्रवाल, आगरा
- **डा0 के0 एल0 गुप्ता एवं डा0 हरिओम गुप्ताः–** परिमाणात्मक तकनीकें ,नवयुग साहित्य भवन, आगरा।
- **डा0 के0 एल0 गुप्ता, रवि कान्तः–** अर्थशास्त्र की आधारभूत परिमाणात्मक विधियाँ ,नवनीत पब्लिकेशन्स, आगरा
- **एस0पी0 सिंहः–** सांख्यिकीः सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस0 चन्द पब्लिकेशन्स नई दिल्ली।

16.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें:–

- Kumar, Anil,(2008) Statistical Research Methodology, Aifa Publishing House.
- Singh, S.P. ((2010) Principles of Statistics , S .Chand Publishing House.
- Bhardwaj, R.S. (2000). Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
- Bose, D., (2003), An Introduction to Mathematical Economics, Himalaya Publishing House.

16.15 निबन्धात्मक प्रश्न :–

1) काल श्रेणी के विश्लेषण से आप क्या समझते है? उपनति मापन की विधियों का संक्षिप्त वर्णन कीजिये।
2) काल श्रेणी क्या है? दीर्घकालीन प्रवृत्ति, मौसमी परिवर्तनों तथा चक्रीय उच्चावचनों में अन्तर स्पष्ट कीजिये? किन्हीं दिये गये संमकों में दीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप किस प्रकार करेंगे।

इकाई– 17 प्रारम्भिक प्रायिकता एवं प्रायिकता बंटन विश्लेषण

17.1 प्रस्तावना (Introduction):–

वास्तविक जगत में मानव को विभिन्न परिस्थितियों में निर्णय लेने पड़ते है। आर्थिक, व्यापारिक, राजनैतिक या सामाजिक, कोई भी क्षेत्र क्यों ना हो वहाँ उतार–चढ़ाव होना स्वाभाविक है। संसार में अवलोकन करने के बाद यह दृष्टिगत होता है कि कुछ स्थितियों के परिणाम तो निश्चित होते हैं, किन्तु कुछ के परिणाम अनिश्चित होते हैं।

जिनके परिणाम निश्चित होते हैं, वे हर बार दोहराने पर भी एक ही परिणाम को प्राप्त होते हैं किन्तु कुछ प्रयोग ऐसे होते हैं, जिनके परिणाम अनिश्चित होते हैं और दोहराने पर अलग–अलग परिणाम को प्राप्त होते हैं। भविष्य की अनिश्चित घटनाओं का वैज्ञानिक आकलन तथा पूर्वानुमान लगाने के लिये कई सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया गया। 'प्रायिकता' ऐसे ही अनिश्चित घटनाओं के प्रयोग के बारे में अध्ययन करती है।

उदाहरण के तौर पर सिक्का उछालने पर शीर्ष (Head) अथवा पूंछ (Tail) का आना, पासा फेकेने पर 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 का आना पूर्णतः किसी एक का निश्चत रूप से आना अनिश्चित होता है। हमारे दैनिक जीवन में हम अक्सर इस तरह के कथनों का प्रयोग करते हैं जैसे *''सम्भवतः आज बारिश होगी''* या *''भारत सम्भवतः यह मैच जीत जायेगा''* या सम्भवतः *''मैं इस पद के लिये चयनित हो सकती हूँ।''* इन सभी वाक्यों में यह अनिश्चितता का तत्व विद्यमान है। इस अनिश्चितता का मापन कैसे किया जा सकता है? ऐसी अनिश्चित घटनाओं का पूर्वानुमान करने का आकलन प्रायिकता के अन्तर्गत किया जाता है।

आइयें प्रस्तुत अध्याय में प्रायिकता के इन मूलभूत अवधारणा, उसके योग, गुणन विभिन्न प्रमेय और उसके महत्व पर चर्चा करे, जिनका हम दिन–प्रतिदिन उपयोग करते हैं।

17.2 उद्देश्य (Objectives):–

प्रस्तुत इकाई में प्रायिकता के संदर्भ में जो अध्ययन किया जायेगा उसके उद्‌देश्य निम्न है :–

- ✓ प्रायिकता से क्या तात्पर्य है।
- ✓ प्रायिकता सिद्धान्तों का विकास कैसे हुआ?
- ✓ प्रायिकता की विभिन्न अवधारणाएँ क्या है?
- ✓ प्रायिकता के विभिन्न प्रमेय क्या है?
- ✓ प्रायिकता के क्या महत्व हैं।

17.3 प्रायिकता की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि (Historical Background of Probability):–

वास्तव में देखा जाए तो प्रायिकता का सिद्धान्त जुआरियों एवं सटोरियों की उपज है। 17वीं शताब्दी में यूरोप के जुआरी एवं सटोरियों ने अपनी खेल सम्बन्धित समस्याओं के हल एवं अपनी सफलता हेतु, गणितज्ञों से सलाह लेनी प्रारम्भ कर दी थी। प्रसिद्ध गणितज्ञ **गैलेलियों**, **पैस्कल**, **बर्नोली**, **डिन्मायवर**, **लालप्लास** द्वारा गणितीय माध्यम से प्रायिकता सिद्धान्त का उद्‌भव हुआ।

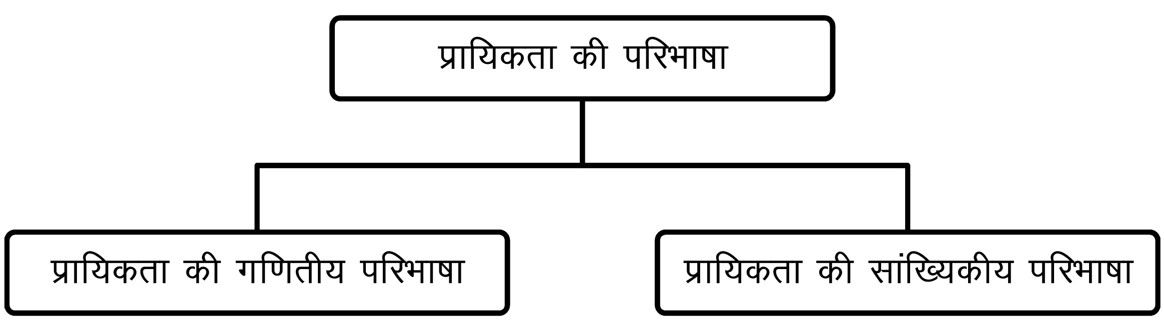
प्रायिकता के सिद्धान्तो का वैज्ञानिक एवं सुव्यवस्थित प्रतिपादन और विकास फ्रांस में हुआ। स्विटजरलैण्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ **जेम्स बर्नोली** (James Bernoulli) (1654-1705) ने बीस वर्षों तक व्यापक शोध तथा अध्ययन किया एवं आधुनिक समय में लोकप्रिय प्रायिकता का मशहूर सिद्धान्त ''**बर्नोली प्रमेय**'' का प्रतिपादन किया।

बाद में 18वीं व 19वीं सदी में अनेकों महत्वपूर्ण सिद्धान्त तथा प्रमेयों का निर्माण किया गया। प्रायिकता के प्रसिद्ध सिद्धान्तों की रचना **थॉमस बेयज** (Thomas Bayes) द्वारा की गयी। जिसे ''**बेयज प्रमेय**'' के नाम से जाना जाता है । फ्रांसीसी गणितज्ञ **पियर साइमन डी0 लाप्लेस** (Pierre Simon De Laplace) द्वारा रचित प्रसिद्ध पुस्तक *''थ्योरी ऑफ एनालिटिकल प्रोबोविलिटी (Theory of Analytical Probability)''* ने प्रायिकता के चिर प्रतिष्ठित सिद्धान्त का प्रतिपादन किया। बीसवी शताब्दी में इस संबंध में नये सिद्धान्त प्रस्तुत करने का श्रेय **आर0ए0 फिशर** (R.A. Fisher) को तथा **कार्ल पियरसन** (Karl Pearson) को है।

प्रायिकता के आधुनिक सिद्धान्तों के प्रतिपादन में सर्वाधिक महत्वपूर्ण योगदान रूसी गणितज्ञों का है। रूसी विद्वान कोल्मोगोरोव द्वारा 1933 में प्रकाशित पुस्तक ''**प्रायिकता के आधार**'' प्रायिकता के सिद्धान्तों के विकास में एक क्रान्तिकारी घटना है। उन्होंने प्रायिकता के सिद्धान्त को एक नवीन तथा व्यापक दिशा प्रदान की।

17.4 प्रायिकता की परिभाषा (Definition of Probability):–

वस्तुतः प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावना का माप है। इसे एक अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है। प्रायिकता को भिन्न या दशमलव के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। सामान्यतया किसी घटना के होने तथा न होने के संदर्भ में भावी संभावनाओं की माप को प्रायिकता द्वारा ही हल किया जा सकता है। यह किसी घटना के घटित होने की अनुकूल परिस्थितियों का, उस घटना के घटित होने वाली समस्त परिस्थितियों का अनुपात है।



17.4.1 प्रायिकता की गणितीय परिभाषा (Mathematical Definition of Probability):–

इसको ***पूर्ववर्ती प्रायिकता*** भी करते हैं। इसका प्रतिपादन फ्रांसीसी गणितज्ञ **लाप्लेस** ने किया था। इनके विचार से यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम सम सम्भावी तथा परस्पर अपवर्जी होते हैं।

लाप्लेस (Laplace) के अनुसार, *''अनुकूल घटनाओं का समान सम्भावना वाली सम्पूर्ण घटनाओं के साथ अनुपात ही प्रायिकता है। (The Probability of the happening of anyone of the several equally likely events in the ratio of the number of cases favourable to it to the total number of possible cases.)''*
उदाहरण के लिये सिक्के के फेंकने पर शीर्ष (Head) अथवा पूंछ (Tail) के आने की सम्भावना समान है। या फिर एक पासे के उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 के आने की सम्भावना समान है। एक समय में मात्र एक ही घटना घटित होगी अर्थात् एक ही परिणाम सामने आयेगा।

$$\mathbf{P(E) = \frac{m}{m+n}}$$

m = घटना के घटित होने की अनुकूल परिस्थितयां
m+n = सभी सम सम्भावी परिस्थितियाँ

घटना के घटित होने की सफलता P(E) अथवा p से व्यक्त की जाती है। वहीं घटना के न घटित होने की स्थिति को P(E) या q व्यक्त किया जाता है।

$$\mathbf{p = P(E) = \frac{m}{m+n}} \quad \text{एवं} \quad \mathbf{q \;=\; P(E) = \frac{n}{m+n}}$$

हर परिस्थिति में p व q का योग 1 होगा।
$p = 1 - q;\;\; q = 1 - p$

उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण

मान लीजिये एक मैच को जीतने की संभावना यदि 70 प्रतिशत है तो इसका अभिप्राय यह हुआ कि उस मैच को हारने की संभावना 30 प्रतिशत है।
यहाँ पर मैच जीतने की प्रायिकता =.7
मैच हारने की प्रायिकता =.3

एक अन्य उदाहरण में यदि एक सिक्के को उछाला जाए तो उसके शीर्ष (Head) आने की संभावना 1/2 होगी। इसी प्रकार उसके पुच्छ (Tail) आने का संभावना भी 1/2 होगी।

कुल परिणाम {H,T}
अनुकूल घटना {H} प्रायिकता P = ½ तथा 1 – 1/2 = 1/2

गणितीय परिभाषा की सीमा (Limitations of Mathematical Definition)

(1) इसमें समसम्भावी घटना को ही लिया जाता है। अतः यह संकुचित परिभाषा है।
(2) संभव परिणामों की संख्या अनिश्चित एवं अपरिमित होने पर यह परिभाषा असफल हो जाती है।

17.4.2 प्रायिकता की सांख्यिकीय परिभााषा (Statistical Definition of Probability):–

इसे परिभाषा को **साप्रेक्षिक आवृति** (Relative frequancy) या **आनुभाविक प्रायिकता** भी कहते हैं।

कैने और **कीपिंग** (Kenney and Keeping) के अनुसार *''यदि समान आवश्यक परिस्थितियों के अधीन किये गये n स्वतंत्र परीक्षणों में कोई घटना निश्चित रूप से m बार घटित होती है, तो m/n अनुपात सफलता की सापेक्ष आवृत्ति कहलायेगी। n के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर m/n की उपलब्ध सीमा ही प्रायिकता है। (If an event has occurred m times in the way described as 'success' in a series of n independent trails, all made under the same essential conditions, the ration m/n is called the relative frequency of success. The limit of m/n as n tends to infinity, is the probability of success in a single trial.)''*

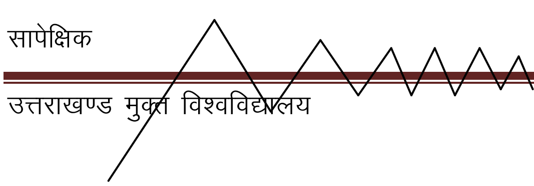
इसे प्रतीक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है–

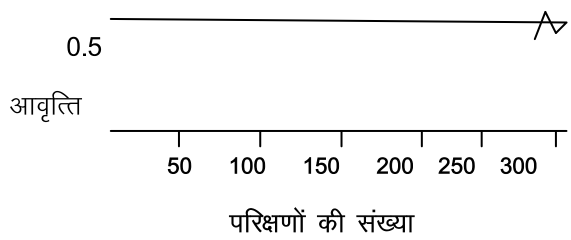
$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{m}{n}\right)$$

इस अभिधारणा का मुख्य सार यह है कि परीक्षण जब अनन्त की ओर बढ़ने लगते है तो सापेक्ष प्रायिकता स्थिरता की ओर प्रवृत्त होने लगती है।

मान लीजिये कि एक सिक्के को 10 बार उछाला गया तो शीर्ष आने की प्रायिकता 0.7 एवं पुच्छ (Tail) आया, प्रायिकता 0.3 होगी किन्तु जैसे जैसे परीक्षण की संख्या अनन्त की ओर प्रवृत्त होगी, शीर्ष एवं पुच्छ की प्रायिकता 0.5 के बराबर होने लगेगी।

यदि एक सिक्के को उछाले तो इसका ग्राफीय निरूपण इस प्रकार होगा–





संख्यिकी परिभाषा की आलोचना–

1. आधुनिक वैज्ञानिक युग में परिस्थितियां बदलती रहती है और इस परिभाषा में आवश्यक परिस्थिति की बात कही गयी है।
2. प्रयोग अनन्त होने की बात भी अव्यवहारिक है।

विद्वानों के इस विषय में कई मत होने के कारण प्रायिकता की अवधारणा को चार भिन्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है–

1. प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित अवधारणा
2. प्रायिकता की सांख्यिकीय अवधारणा
3. प्रायिकता की व्यक्तिनिष्ठ अवधारणा
4. प्रायिकता की अभिगृहयिता अवधारणा

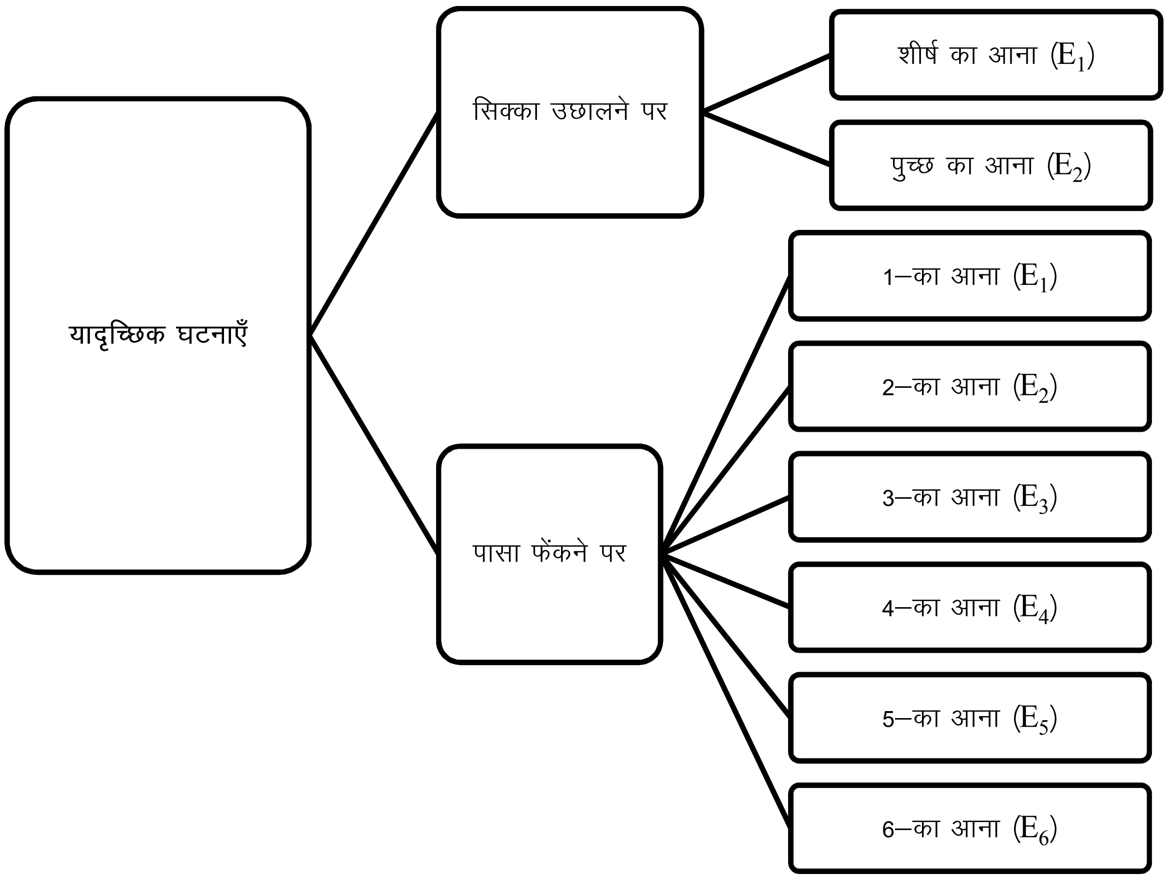
इन अवधारणाओं का परास्नातक स्तर पर विस्तृत रूप से अध्ययन किया जायेगा।

17.5 प्रायिकता में प्रयुक्त शब्दावलियाँ (Terminology used in Probability):–

- **प्रयोग** (Experiment) – प्रयोग दो तरह के होते हैं–
  1. निश्चित प्रयोग
  2. यादृच्छिक प्रयोग

1. **निश्चित प्रयोग** (Deterministic Experiment)– ऐसे प्रयोग जिनके परिणाम निश्चित होते हैं और हर बार दोहराने पर एक ही जैसे परिणाम प्राप्त होते हैं, निश्चित प्रयोग कहलाते हैं। जैसे– न्यूटन का सिद्धान्त, ओम नियम, पास्कल का नियम आदि। विज्ञान के अधिकांश प्रयोग इसी श्रेणी में आते है।
2. **यादृच्छिक प्रयोग** (Random Experiments)– कुछ ऐसे प्रयोग भी होते ह, जो दैव प्रयोग पर आधारित होते हैं। इसके परिणाम अनिश्चित होते है क्योंकि बार–बार दोहराने पर इनके परिणाम में अंतर आने लगता है। ऐसे प्रयोग यादृच्छिक प्रयोग कहलाते है।

जैसे– सिक्का उछालना या पास फेंकना आदि। इन्हीं प्रयोग को प्राथिकता के माध्यम से अध्ययन किया जाता है। इन प्रयोग में घटित होने वाली घटनायें यादृच्छिक घटनाएँ (Random Events) कहलाती है। इनके परिणामों को '**E**' द्वारा दर्शाया जाता है।



➢ **घटनायें** (Events)

1. **सरल या मौलिक घटनाएँ** (Simple or Elementary Events)– ऐसी घटनाएँ जिन्हें और भी आगे सरल घटनाअें में तोड़ा नहीं जा सकता या व्यक्त नहीं किया जा सकता हो वे घटनाएँ सरल घटनाएँ कहलाती है। इनके प्रतिदर्श समष्टि में केवल एक ही अवयव या एक ही प्रतिदर्श बिन्दु होता है।
2. **मिश्र या यौगिक घटनाएँ** (Compund or Joint Events)– जिन घटनाओं को एक से अधिक सरल घटनाओं में विभाजित कर व्यक्त किया जा सके, वे मिश्र घटनायें कहलाती है। सरल शब्दों में कहा जाय तो जब दो या दो से अधिक घटनाओं का घटित होना परस्पर सम्बद्ध हो तो इसे मिश्रित घटनायें कहते हैं। इसके अन्तर्गत दो या

दो से अधिक घटनायें साथ–साथ होती है। उदाहरण के तौर पर **$E1 \cap E2$** या **E1. E2** एक मिश्रित घटना है।

3. **संयुक्त घटनाएँ** (Complex or Composite Events)– सरल घटनाओं के सम्मिलन को संयुक्त घटना कहते हैं। जैसे– **$E1 + E2$** या **$E1 \cup E2$** संयुक्त घटना के उदाहरण है।
4. **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ** (Mutually Exclusive Events)– ऐसी घटनायें जो एक साथ घटित नहीं हो सकती, परस्पर अपवर्जी घटना कहलाती है। एक समय पर एक ही घटना घट सकती है और एक के घटित होने पर किसी और घटना के होने की कोई संभावना नहीं होती। जैसे यदि एक सिक्का उछाला जाय तो यदि शीर्ष (Head) आता है तो पुच्छ (Tail) आने की संभावना समाप्त हो जाती है।
5. **निःशेषी घटना** (Exhaustive Events)– घटनाओं का वह समूह जिनमें किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित सभी परिणाम सम्मिलित हो, निःशेषी घटनायें कहलाती है। जैसे एक पासा फेंकने पर सम संख्या का घटित होना। (E1) तथा विषम संख्या (E2) का घटित होना निःशेषी घटनायें है।
6. **पूरक घटनाएँ** (Complementary Events)– ऐसी घटनायें परस्पर अपवर्जी घटनायें होती है। किसी एक घटना के घटित हो जाने पर यदि अन्य घटनाओं के होने की संभावना समाप्त हो जाए तो ऐसी घटनाएँ पूरक घटनाएँ कहलाती है। जैसे यदि एक सिक्का को उछालने पर शीर्ष (Head) आये और इसे E1 कहें तो इसकी पूरक घटना E1' होगी जो कि (Tail) यानि पुच्छ है।

   $E1 = H$ तो $E1' = T$ यदि

   E1 घटित हुआ, तो E1' घटित नहीं होगा।
7. **स्वतन्त्र घटनाएँ** (Independent Events)– यदि किसी घटना का घटित होना या घटित न होना। किसी दूसरी घटना के घटित होने या न होने पर निर्भर नहीं करती है, तो ऐसी घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है। उदाहरण के लिये– मान लीजिए की दो सिक्के उछाले जाये और दोनों सिक्कों पर पुच्छ (Tail) ही आये तो दानों घटनाएँ स्वतन्त्र घटनाएँ ही कहलायेगी क्योंकि E1 के घटित होने से या न होने से E2 प्रभावित नहीं होगी।

   E1= पहले सिक्के पर पुच्छ (Tail) का आना।

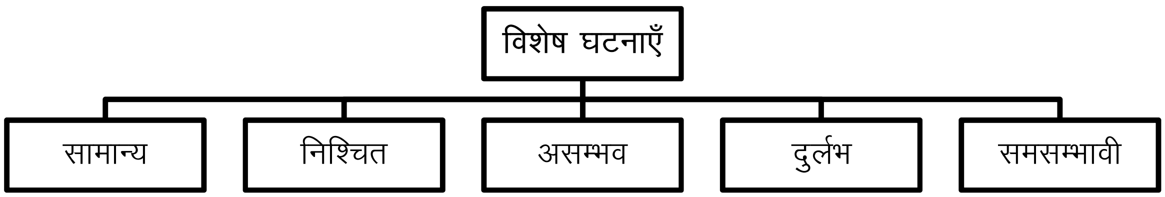
   E2= दूसरे सिक्के पर भी पुच्छ (Tail) का आना।
8. **परतन्त्र या आश्रित घटनाएँ** (Dependent Events)– स्वतन्त्र घटनाओं के विपरीत जब किसी घटना के घटित होने या न होने से दूसरी घटना का घटित होना प्रभावित होता है तो ऐसी घटनायें आश्रित घटनाएँ कहलाती है। जैसे–

   E1= बरसात का होना।

   E2 = अच्छी कृषि का होना।

(i) **प्रतिबन्धी घटनायें** (Conditional Events)–जब किसी एक घटना के घटित होने के पश्चात् दूसरी घटना घटित हो, तो ऐसी घटनायें प्रतिबन्धी घटनाएँ कहलाती है।

यदि E1 तथा E2 दो घटनाये है और E1घटना पहले घटित हो चुकी है तो E2 के घटित होने को E2/E1 द्वारा व्यक्त करेंगे।
E2/E1 का अर्थ है E2 का घटित होना जबकि E1 पहले घटित हो चुकी है।
E2/E1 का अर्थ है कि E1 का घटित होनी जबकि E2 पहले घटित हो चुका है।
उपरोक्त घटनाओं के अतिरिक्त कुछ विशेष घटनाएँ होती है, जिन्हें 5 रूपों में विभक्त किया जा सकता है।



(1) सामान्य घटनाएँ (General events)– ये ऐसी घटनायें है परिणामों की संख्या (m) घटित होने वाली समस्त परिणामों की संख्या (n) से कम होनी चाहिये।

$$\text{प्रायिकता } (p) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या } (m)}{\text{समस्त परिणामों की संख्या } (n)}$$

यदि $m < n$ तो यह घटना सामान्य घटना है।

अतः $P(E) = P = \frac{m}{n}$ से $P > 1$

(2) निश्चित घटनाएँ (Certain Events)– ऐसी घटना जिसके घटने की प्रायिकता निश्चित है, अर्थात् वह सदैव घटित होती है, निश्चित घटना कहलाती है।

जैसे–$m = n$; $P = \frac{m}{n}$ से $P = 1$

अत्एव एक निश्चित घटना की प्रायिकता सदैव 1 होती है।

(3) असम्भव घटनाएँ (Impossible events)– ऐसी घटनाये जो कभी घटित नहीं हो सकती असम्भव या असम्भावित घटनायें कहलाती है। यहाँ

$m = 0$, $n > o$, $P = \frac{m}{n}$ $P= 0$

ऐसी घटनाओं की प्रायिकता शून्य होती है। उदाहरण के लिये पासा उछालने पर 7 या 0 का आना।

(4) दुर्लभ या विरल घटनाएँ (Rare Events)– ऐसी घटनायें जो कभी–कभी ही घटित होती है या जिनके घटने की सम्भावना नगण्य के बराबर होती है, दुर्लभ घटनायें कहलाती है। जैसे 01 वर्ष में 366 दिन का होना। यहां पर

$m \to 0,\ n > 0$ अतः $P = \frac{m}{n}$ $P \to 0$

ऐसी घटनाओं की प्रायिकता लगभग शून्य होती है।

(5) समसम्भावी घटनाएँ (Equally –likely events)– ऐसी घटनायें जिनके घटित होने की सम्भावना समान रहती है समसम्भावी घटना कहलाती है। जैसे सिक्के पर शीर्ष (Head) या पुच्छ (Tail) का आना पासे पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 का आना क्योंकि घटनाओं की प्रायिकता समान रहती है, अतः इन्हें सम्प्रायिक घटनाएँ कहा जाता है।

घटनाओ से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण तथ्य (Some important facts related to events):–

➢ **घटनाओं का योग** (Sum of Events)– जब E1 एवं E2 दो घटनाओं में से कम से कम एक जरूर घटित हो, तो इसे E1 + E2 से व्यक्त करते हैं। E1 + E2 के सम्बन्ध में तीन स्थितियाँ घटित हो सकती हैः

(i) केवल E1 घटित हो और E2 न हो

(ii) केवल E2 घटित हो और E1 न हो

(iii) केवल E1 एवं E2 घटित हो।

इसी प्रकार n घटनाओं के लिये जब E1, E2, E3 ………………En-1 तथा En में से कम से कम एक जरूर घटित हो तो इसे E1+E2+ ……………. En से व्यक्त करेंगे। जब सभी घटित हो तो = E1. E2. E3 …………. En समुच्चय की भाषा में E1+E2+ ……………. En को $E1 \cup E2$ ………$\cup$ En से व्यक्त किया जा सकता है।

➢ **घटनाओ का गुणन** (Multiplication of Events)– जब दो घटनायें एक साथ घटित होती है तो उन्हें E1.E2 से व्यक्त किया जाता है।

E1= गुलाम का आना

E2= चिड़ी का आना

E1. E2= चिड़ी के गुलाम का आना

प्रतिदर्श समष्टि (Sample space)– किसी प्रयोग के लिये **प्रतिदर्श समष्टि** Sample space प्रयोग के समस्त परिणामों का समुच्चय (Set) है। उदाहरण के लिये यदि दो सिक्के उछाले जाय तो, उसके परिणामों को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

S= {(H,T) (H,H) (T, H) (T,T)}

यही Sample space है।

यदि एक ही सिक्के को फेंका जाए तो Sample space होगाः– S = {H,T}

प्रायिकता, जिसको P से व्यक्त किया जाता है। उसके आगे ( ) कोष्ठक लगाकर उसमें घटना का नाम अंकित किया जाता है।

17.6 प्रायिकता से सम्बन्धित महत्वपूर्ण तथ्य (Important facts related of Probability):–

1. **प्रायिकता का प्रदर्शन**– यदि कोई घटना घटित होती है तो उसे E से व्यक्त किया जाता है और उसकी प्रायिकता को P(E) से प्रदर्शित किया जाता है। इसे अनुपात में यह प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

   P (E) = m/n ; m/n एक अनुपात है।

   प्रतिशतता के रूप में m/n * 100 होगा।

2. **प्रायिकता की सीमाएँ** (Units of Probability)– प्रायिकता की न्यूनतम सीमा शून्य एवं अधिकतम सीमा 1 होता है। अतः किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता शून्य एवं एक के मध्य होती है।

   $0 \leq P \leq 1$ अथवा $0 \leq P(E) \leq 1$

   प्रतिदर्श समष्टि की समस्त घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 होता है।

   P (E1) + P(E2) + P (E3)+ ……………….+ P (En) = 1

   या P1 + P2 +P3 + ……………….+ Pn = 1

   किसी घटना के घटित होने या घटित न होने की प्रायिकता का योग 1 होता है।

   P(E) + P(E) = 1

   यदि कोई घटना E, m ढंग से घटित हो सकती है तथा n ढंग से नहीं तो

   $P(E)= \frac{m}{m+n}$ या $P(E) = \frac{n}{m+n}$

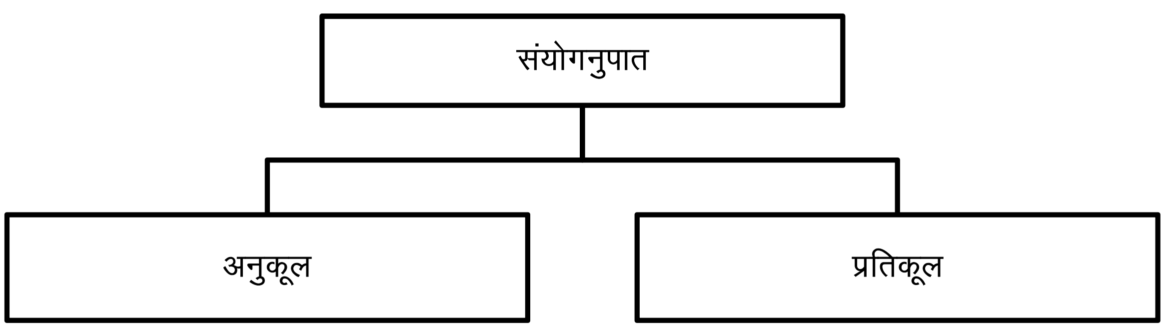
   $P(E) + P(E)= \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n}$

   $\frac{m+n}{m+n} = 1$

   प्रायिकता वाली घटनाओं को निश्चित घटना कहते हैं।

   शून्य (0) प्रायिकता वाली घटना को असंभव घटना कहते हैं।

3. संयोगनुपात (Odds)



यदि कोई घटना m तरीकों से घटित होती हो और n तरीकों से नहीं तो m :n को अनुकूल संयोगनुपात कहते हैं।

$P(E)= \frac{m}{m+n}$

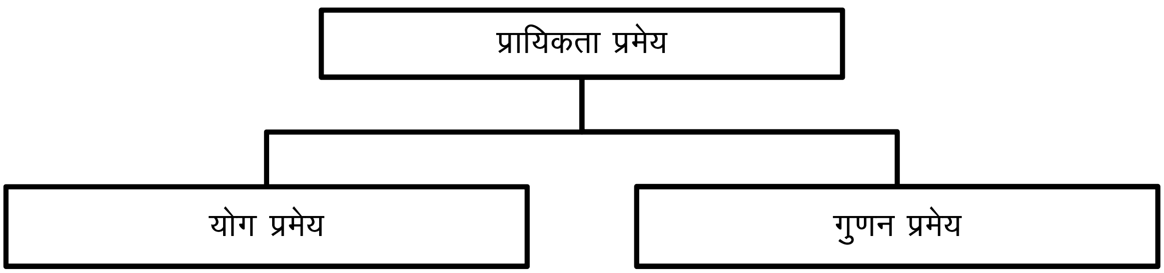
$P(E^1) = \frac{n}{m+n}$

$P(E) : P(E^1) = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n} = m : n$

यदि कोई घटना E, m तरीको से घटित होती हो तथा n तरीको से न घटित होती हो तो n : m को ही प्रतिकूल संयोगनुपात कहेंगे।

$P(E) : P(E^1) = \frac{n}{m+n} : \frac{m}{m+n} = n : m$

17.7 प्रायिकता का प्रमेय (Theorems and Probability):–



17.7.1 प्रायिकता का योग प्रमेय (Addition Theorem of Probability):–

यदि E1 तथा E2 दो घटनाये हो तो–

P(E1 +E2) = P(E1) + P(E1) + P(E2) – P(E1.E2)

जहां P(E1+E2)= E1 अथवा E2 में कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता

P(E1)= E1 के घटित होने की प्रायिकता
P(E2)= E2 के घटित होने की प्रायिकता

P(E1.E2) = E1 व E2 के एक साथ घटित होने की प्रायिकता E1 तथा E2 के एक साथ घटित होने को दोहरे गणना में शामिल किया जाता है अतः इसे एक बार घटा दिया जाता है।

इस प्रमेय की दो विशष स्थितियाँ (Special cases) है–

(1) जब E1 तथा E2 परस्पर अपवर्जी हो – उप प्रमेय–1
(2) जब E1 तथा E2 परस्पर अपवर्जी न हो अर्थात् – उप प्रमेय–2 स्वतंत्र घटनाएं हो।
(1) जब घटनायें E1 व E2 परस्पर अपवर्जी होगी तो व एक साथ घटित नहीं होगी।

P (E1 E2) =0
P(E1 +E2) = P(E1) + P (E2) + 0
P(E1 +E2) = P(E1) + P (E2)

यदि परस्पर अपवर्जी घटनायें n है तो

P(E1 + E2 + ……………En) = P(E1) + P(E2)+ …………… P(En)
उपप्रमेय 2– यदि घटना E1 तथा E2 परस्पर अपवर्जी नहीं है तो इसका तात्पर्य हुआ कि वे एक साथ घटित हो सकती है।
अतः
P(E1 + E2) = P(E1) + P(E2) – P(E1*E2)
= P(E1) + P(E2) – P(E1) * (E2)

17.7.2 प्रायिकता का गुणन प्रमेय (Multiplication Theorem of Probability):–

यदि E1 तथा E2 हो तो
P(E1.E2) = P(E1). P(E2/E1) या P(E2) . P(E1/E2)
जहां P(E1/E2) = प्रतिबन्धी प्रायिकता

इस प्रमेय की दो विशिष्ट स्थितियां है।
उपप्रमेय 1– जब घटनायें स्वतन्त्र हो
उप प्रमेय 2– जब घटनायें परतन्त्र हो
उप प्रमेय 1– जब घटना E1 तथा E2 स्वतन्त्र होगी तो E1 के घटने या न घटने का E2 पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।
अर्थात् P(E2/E1) = P(E2)
एवं P(E1/E2)= P(E1)
अतः P(E1.E2) = P(E1) . P(E) या P(E2). P(E1)
उपप्रमेय 2– जब घटनायें E1 तथा E2 परस्पर स्वतन्त्र नहीं हो बल्कि परतंत्र घटनाये हो तो वे एक दूसरे से प्रभावित होगी। अतः
P(E1.E2) = P(E1). P(E2/E1)

उदाहरण– एक सिक्का उछालने पर उसके शीर्ष एवं पुच्छ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये?
हल– कुल सम्भावनाएं–2
शीर्ष के लिये अनुकूल परिणामों की संख्या–1
प्रायिकता (P) = $\frac{\text{अनुकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{कुल तरीके}}$
अतः P(H)=1/2
इसी प्रकार पुच्छ आने की प्रायिकता–
कुल संभावनाएँ–2 (n)
पुच्छ के लिये अनुकूल परिणामों की संख्या–1 (m)
अतः P = m/n = 1/2

अतः दोनों शीर्ष एवं पुच्छ आने की अलग–अलग प्रायिकता 1/2 ही होगी।

उदाहरण– 25 पैसे के 2 और 10 पैसे के 1 सिक्के को उछाला जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये–

(1) 20 पैसों के सिक्कों पर H पड़े?

(2) 20 पैसों के सिक्को पर T पड़े?

हल–

(1) कुल सिक्के = 3

कुल सम्भावनाएं = $2^3 = 8$

दोनों 20 पैसों पर H पड़ने की संभावना = 2 = m

P (2H ; 20 पैसे के) = 2/8 = 1/4 Ans.

(2) कुल सिक्के = 3

कुल संभावनाएं = $2^3 = 8$

दोनों 20 पैसो पर T पड़ने की संभावना = 2/8 = 1/4 Ans

17.8 प्रायिकता का महत्व एवं प्रयोग (Importance and Uses of Probability):–

प्रायिकता प्रमुखतः खेल विषयों जैसे जुए, लाटरी आदि क्षेत्रों से सम्बन्धित रही और संयोग प्रधान क्षेत्रों में इसका विकास बना रहा। परन्तु समय के साथ इसके क्षेत्र में भी विकास हुआ। आधुनिक काल में इसका प्रयोग, सामाजिक, आर्थिक, बीमों का व्यवसायिक, राजनैतिक एवं वैज्ञानिक समेत ऐसे हर क्षेत्र में होने लगा जहाँ न सिर्फ अनिश्चितता पाई जाती है बल्कि जहाँ जोखिम चुनौती के रूप में सामने आते हैं। जब मनुष्य को विवेक निर्णय लेने होते हैं, तो प्रायिकता का रोचक प्रयोग इसे और भी वैज्ञानिक आधारशिला प्रदान करता है।

विभिन्न क्षेत्रों में प्रायिकता का प्रयोग व्यापक स्तर पर किया जाता है।

1. **संयोग तथा सट्टा लगाना**–प्रायिकता का वैज्ञानिक ज्ञान इस क्षेत्र के विकास के माध्यम से हुआ। इस के प्रयोग से सट्टा का अनुमान लगाना आसान हो गया है। अतः परिस्थितियों में विवेकपूर्ण निर्णय लेने में प्रायिकता सहायक सिद्ध होने लगी।
2. **परिकल्पना एवं सार्थकता परिक्षणों का आधार**– प्रायिकता सिद्धान्त के माध्यम से परिकल्पना एवं सार्थकता परीक्षणों हेतु सहायता मिलती है। इसके द्वारा पूर्वानुमान एवं प्रत्याशित मूल्यों को मापने में मदद मिलती है। प्रायिकता की सहायता से प्रत्याशित आवृत्ति से कर सार्थकता का परीक्षण किया जाता है।
3. **सांख्यिकीय निर्वाचनो में प्रयोग**– सांख्यिकीय निर्वाचनों हेतु समग्र का परीक्षण प्रतिवर्ष संमकों के माध्यम से किया जाता है। यह प्रायिकता पर आधारित है क्योंकि यादृच्छिक रूप से चयनित यथोचित प्रतिदर्श समष्टि की मूलभूत अभिलक्षणों का पर्याप्त मात्रा में प्रतिनिधित्व करते हैं।
4. **सांख्यिकीय निर्णयन का आधार**– बिना प्रायिकता के सिद्धान्त की सांख्यिकीय निर्णय की कल्पना नहीं की जा सकती। निर्णय सिद्धान्त प्रायिकता के मूलभूत नियमों तथा

अवधारणाओं तथा प्रत्याशित मूल्यों के प्रयोग पर आधारित है। अभिप्रयोगों तथा परीक्षणों की सहायता से प्रत्येक क्षेत्र की समस्याओ के हल हेतु प्रायिकता अवधारणा का प्रयोग किया जाता है।

5. **आर्थिक एवं व्यवसायिक निर्णयों में प्रयोग–** विशेष तौर पर बीमा, निवेश, वित्तीय तथा पूंजीगत के आकलन तथा पूर्वानुमान हमेशा से एक चुनौतीपूर्ण कार्य कर रहा है। परन्तु प्रायिकता के विभिन्न सिद्धान्तों के माध्यम से उनको चुनौती पूर्ण परिस्थितियों का ताक्रिक, वैज्ञानिक तथा विश्लेषण करना अत्यधिक सरल हो जाता है।

17.9 सारांश (Summary):–

संसार में दो प्रकार के प्रयोग होते हैं–एक निश्चित दूसरा अनिश्चित। अनिश्चित परिणाम ऐसे होते हैं जिनके परिणाम बार–बार दोहराने पर भी परिवर्तित हो जाते हैं। प्रायिकता ऐसे ही प्रयोगों के अध्ययन में अति महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। आरम्भ से वर्तमान समय तक एक लम्बा सफर तय कर चुकी प्रायिकता का सिद्धान्त अनेकों विषयों तथा क्षेत्रों में महत्वपूर्ण योगदान कर रहा है।

महज एक भावनात्मक कथन तक सीमित न रहकर यह एक रोचक तक्र सम्मत् एवं वैज्ञानिक स्वरूप धारण कर चुका है। प्रायिकता नये आयाम प्राप्त कर चुका है।

वर्ममान युग में प्रायिकता के सिद्धान्त का अति तीव्रता के साथ विकास हुआ है। आज सामाजिक, आर्थिक, भौतिक और प्राकृतिक विज्ञानों का कोई भी ऐसा क्षेत्र नहीं है जिसमें प्रायिकता सिद्धान्त प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से अनुप्रयोग न होता है। चाहे वह क्षेत्र बीमा का हो या व्यवसाय का या फिर वित्तीय पूंजी बाजार का अर्थव्यवस्था के हर क्षेत्र में इस सिद्धान्त का महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

17.10 शब्दावली :–

- **प्रतिदर्श** – प्रतिदर्श प्रतिचयन समग्र की इकाईयों का वह भाग है जो पूर्ण समग्र के अध्ययन हेतु चुना जाता है इसे लघु समग्र भी कहते हैं।
- **प्रभाग** – विभाग
- **कार्यान्वयन** – लागू करना
- **समन्वय** – तालमेल

17.11 अभ्यास प्रश्न :–

17.11.1 बहुविकल्पीय प्रश्नः–

18 प्रायिकता का सिद्धान्त किसकी देन है?

(a) सटोरिये (b) जुआरी (c) a & b दोनों (d) इनमें से कोई नहीं

19 निम्नलिखित में से प्रायिकता का प्रयोग कहां होता है?

(a) बीजगणित (b) ज्यामिति (c) भौतिक (d) उपर्युक्त सभी

20 'प्रायिकता के आधार' के लेखक कौन है?

(a) रोनाल्ड फिशर (b) मार्कोव (c) बर्नोली (d) काल्मोग्रोव

21 ऐसे प्रयोग जिन्हें बार–बार दोहराने पर भी परिणाम एक ही प्राप्त होता है कौन से प्रयोग होते हैं?

(a) यादृच्छिक (b) निश्चित (c) अनिश्चित (d) कोई नहीं

22 जब एक घटना के घटित होने के पश्चात जब दूसरी घटना घटित हो, ऐसी घटना को कहते हैं–

(a) परतन्त्र घटना (b) प्रतिबन्धी घटना (c) सामान्य घटना (d) कोई नहीं

23 किसी घटना के होने या न होने की प्रायिकता क्या होती है?

(a) शून्य से ∞ के मध्य (b) 1 (c) शून्य से 1 के बीच (d) 0

हल : **(1) c (2) d (3) d (4) b (5) b (6) c**

17.11.2 लघु उत्तरीय प्रश्न :–

निम्नलिखित को समझाइये–

1. संयुक्त घटना
2. पूरक घटना
3. दुर्लभ घटना
4. प्रायिकता की उपयोगिता किन–किन क्षेत्रों में होता है?
5. प्रायिकता की गणितीय परिभाषा को परिभाषित कीजिये।
6. प्रायिकता की क्या सीमाएँ है?

17.11.2 लघु उत्तरीय प्रश्न :–

1. 52 पत्तों की ता"ा की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर उसके बेगम होने की की क्या प्रायिकता है?
2. रमे"ा के पास एक लाटरी योजना के 10 में से 5 टिकट है और दूसरी लाटरी योजना के 10 मे से 8 टिकट है। उसके इनाम आने की प्रायिकता क्या है।
3. एक थैले में 5 लाल, 8 सफेद और 10 काली गेंद है। एक गेंद खीची जाती है। इस बात की क्या संभावना है कि खीची गयी गेंद सफेद या काली होगी?
4. दो पासो को एक बार फेंकने पर कम से कम 8 का योग आने का क्या संभावना है?

17.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूचीः–

- सिंह, एस0 पी0 (2001) *सांख्यिकीय सिद्धान्त,* एस. चन्द एण्ड कम्पनी प्रा. लि0, नई दिल्ली।

- सेठ, एम0 एल0 (2000–01) *सांख्यिकीय सिद्धान्त* लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पुस्तक प्रकाशक, आगरा।
- डॉ0 एस0वी0 रावतः परिणात्मक विधियां MAEC-104 उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी
- डॉ0 एस0एन0 लाल एवं एस0के0 चतुर्वेदी– अर्थशास्त्र में गणितीय तथा सांख्यिकीय विधियां, शिव पब्लिशिंग हाउस, इलाहाबाद
- डा0 जी0डी0 अवस्थी एवं डा0 एस0के0 निगम– सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेण्टर, शिवानी आर्ट प्रेस, नई दिल्ली
- जी0एस0 मोन्गाः Mathematics and statistics for economics, Vikas Publishing House Pvt Ltd. Noida

17.13 सहायक/उपयोग पाठ्य सामग्री

- जी0एस0 मोन्गाः Mathematics and statistics for economics, Vikas Publishing House Pvt Ltd. Noida
- William Feller : An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol 1, 3ed (WSE) Paperback – 2008, Wiley Publications

17.14 निबन्धात्मक प्रश्न :–

1. प्रायिकता के विभिन्न सिद्धान्तों को विस्तृत रूप से समझाइयें।
2. प्रायिकता के योग एवं गुणन प्रमेय को उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

इकाई 18 द्विपद प्रमेय

18.1 प्रस्तावना

पूर्व की ईकाई में प्रायिकता सिद्धान्तों का विस्तार से अध्ययन कर प्रायिकता की विभिन्न अवधारणाओं, प्रमेयों तथा उनसे सम्बन्धित समस्याओं का विश्लेषण किया गया। जिसका प्रयोग विभिन्न घटनाओं के घटित होने की सम्भावनाओं का वैज्ञानिक तरीकों से आकलन करने में किया जाता है। जिसका महत्व आज संयोग प्रधान खेलों के साथ–साथ आर्थिक, व्यावसायिक, वैज्ञानिक एवं राजनैतिक सभी क्षेत्रों में स्थापित हो गया है।

भावी सम्भावनाओं का आकलन करने के साथ–साथ प्रायिकता सिद्धान्तों के प्रयोग यादृच्छिक चरों के भावी मूल्यों को ज्ञात करने तथा किस प्रकार इन मूल्यों में कुल आवृति किस प्रकार से आवंटित होती है इसके लिये प्रायिकता बंटन प्रयुक्त होते हैं । इन बंटनों में जेम्स बर्नोली द्वारा विकसित द्विपद बंटन प्रमुख है । इस बंटन को बर्नोली प्रमेय या द्विपद प्रमेय के अन्तर्गत अध्ययन किया जाता है। द्विपद प्रमेय में एक ऐसे बंटन का अध्ययन किया जाता है जो कि खण्डित आवृत्ति बंटन होता है, जोकि दो घटनाओं की सफलता एवं असफलता की भावी सम्भावनाओं के सम्पूर्ण समूह को व्यक्त करता है जिसका विस्तार से अध्ययन हम वर्तमान इकाई के अन्तर्गत करेंगे –

18.2 उद्देश्य

वर्तमान इकाई के उद्देश्य निम्नवत् है –

- ☐ द्विपद प्रमेय उद्भव विकास तथा अर्थ क्या है ?
- ☐ द्विपद प्रमेय किन प्रमुख मान्यताओं पर आधारित है ?
- ☐ प्रायिकता बंटन से क्या तात्पर्य है तथा प्रमुख प्रायिकता बंटन कौन–कौन से हैं?
- ☐ द्विपद प्रमेय का विस्तार किस प्रकार से होता है ?
- ☐ द्विपद प्रमेय के प्रमुख अचर मूल्य कौन–कौन से हैं ?
- ☐ द्विपद प्रमेय की मुख्य विशेषतायें एवं गुण कौन–कौन से हैं ?
- ☐ द्विपद प्रमेय से सम्बन्धित मुख्य फलन कौन–कौन से हैं ?
- ☐ द्विपद प्रमेय से प्रत्याशित आवृतियाँ किस प्रकार से ज्ञात की जा सकती हैं ?
- ☐ द्विपद प्रमेय पर आधारित समस्याओं का हल किस प्रकार से किया जा सकता है ?
- ☐ द्विपद प्रमेय के उपयोग तथा महत्व कौन–कौन से हैं ?

18.3 सैद्धान्तिक प्रायिकता बंटन

ऐसे आवृत्ति बंटन जिन्हें वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों द्वारा निश्चित करके कुछ निश्चित परिकल्पनाओं, मान्यताओं अथवा प्रायिकता नियमों के आधार पर गणितीय रूप से अनुमानिक किया जाता है तो ऐसे बंटन को सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन या प्रायिकता बंटन कहते हैं; यानि इस बंटन में प्रायिकताओं को सापेक्ष बारम्बारता माना जाता है । सैद्धान्तिक प्रायिकता बंटन को निम्न दो भागों में बाँटा जा सकता है –

(1) असतत् प्रायिकता बंटन (2) सतत् प्रायिकता बंटन

जहाँ तक असतत् या खण्डित प्रायिकता बंटन का प्रश्न है इनमें द्विपद, प्वॉयसॉ तथा समरूप बंटन इसके अन्तर्गत आते हैं, वहीं आयताकार, चर घातांकी तथा प्रसामान्य बंटन सतत् प्रायिकता बंटन के अन्तर्गत आते हैं । प्रायिकता बंटन की मुख्य विशेषतायें निम्न हैं μ

- प्रायिकता बंटन में विचर के मानों की तत्संवादी प्रायिकता का योग एक होता है – $p_1 + p_2 + p_3 + \dots\dots\dots + p_n = 1$ या $\Sigma p = 1$
- प्रायिकता बंटन की अवधारणा आवृत्ति बंटन के समान होती है । यह बंटन हमें यह बताता है कि विचर के विभिन्न मूल्य कुल आवृति किस प्रकार से वितरित है ।
- अवलोकनों की संख्या अधिक होने पर प्रायिकता बंटन सापेक्ष आवृत्ति बंटन का सैद्धान्तिक रूप ग्रहण कर देता है ।

द्विपद बंटन या द्विपद प्रमेय

द्विपद बंटन की रचना करने का श्रेय स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नोली (1654-1705) को है। परन्तु इसका प्रकाशन उनकी मृत्यु के आठ वर्ष बाद सन् 1713 ई0 में हुआ था । इस बंटन को बर्नोली बंटन भी कहा जाता है। द्विपद का शाब्दिक अर्थ है दो पदों का पाया जाना, जिसमें एक पद घटना की सफलता से सम्बन्धित होता है तथा दूसरा घटना की असफलता से, वास्तव में द्विपद बंटन या वितरण एक ऐसा खण्डित आवृति वितरण है जो द्वन्द्वात्मक विकल्पों यानि अलग–अलग प्रकृति के विकल्पों के सम्भावना को प्रकट करता है। इसे द्विपद प्रमेय के भी नाम से जाना जाता है ।

यदि किसी अभिप्रयोग में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p तथा न घटित होने की प्रायिकता q है तो कुल n परीक्षणों में निश्चित रूप से उसके r बार घटित होने की प्रायिकता जेम्स बर्नोली द्वारा दिये गये निम्न सूत्रानुसार ज्ञात की जा सकती है –

$$p(r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$$

जहाँ $p + q = 1$, $r = 0, 1, 2, 3 \dots\dots\dots\dots\, n$

यदि अब सफलताओं की संख्या को $r = 0, 1, 2, 3 \dots\dots\dots n$ से सम्बन्धित प्रायिकताओं क्रमानुसार लिख दी जाती है तो उपलब्ध बंटन ऐसा द्विपद प्रायिकता बंटन कहलाता है । जिससे प्राचल n तथा p है ।

स्पष्टतः $\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, p^r q^{n-r} = (p + q)^n = 1$

18.4 द्विपद प्रमेय की मान्यतायें

द्विपद प्रमेय के अनुसार रचित द्विपद बंटन का गणितीय स्वरूप निम्न मान्यताओं के अनुसार विकसित किया जा सकता है –

- यादृच्छिक अभिप्रयोग स्वतन्त्र होना चाहिए, यानि एक परीक्षण के परिणाम का दूसरे परीक्षण के परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए ।
- यादृच्छिक अभिप्रयोग समान परिस्थितियों में आवर्तक रूप से परीक्षणों को स्थिर और परिमित संख्या के अनुरूप किया जाता है यानि परीक्षणों की संख्या n स्थिर तथा परिमित है ।

□□ प्रत्येक परीक्षण में अभिप्रयोग के दो परस्पर अपवर्जी परिणाम होते हैं जहाँ p सफलता को तथा q असफलता के घटित होने को व्यक्त करता है ।

□□ सभी परीक्षणों में घटना के घटित होने की प्रायिकता p स्थिर रहती है इसी प्रकार q भी स्थिर रहती है ।

18.5 द्विपद बंटन या प्रमेय का विस्तार

सुडौल सिक्का उछालने के अभिप्रयोग के माध्यम से द्विपद प्रमेय के विस्तार को आसानी से समझाया जा सकता है यदि एक सिक्के को उछाला जाये तो दो परिणाम चित (Head) तथा पट (Tail) आयेंगे, जिसमें p को सफलता (चित) तथा q को असफलता (पट) के संकेत से व्यक्त किया जाये तो प्रायिकता सिद्धान्त अनुसार यह कहा जा सकता है कि –

$$p = q = \frac{1}{2} \text{ और } p + q = 1$$

यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जायें तो निम्न संभावित परिणाम घटित हो सकते हैं ।

दो सिक्के का अभिप्रयोग

परिणाम		तरीके		प्रायिकता	सफलता	प्रायिकता माप
चित (H)	पट (T)	I	II			
2	0	H	H	$p \times p = p^2$	2	¼
1	1	H	T	$p \times q = 2pq$	1	½
		T	H	$p \times q$		
0	2	T	T	$q \times q = q^2$	0	½
योग				$(p + q)^2$		1

दो चित (H, H), दो पट (T, T), एक चित एक पट (H, T), एक पट एक चित (T, H) आ सकते हैं। इन परिणामों की प्रायिकता का अनुमान निम्न सारणी से लगाया जा सकता है–

तीन सिक्के का अभिप्रयोग

परिणाम		तरीके	प्रायिकता	सफलता	प्रायिकता माप
चित (H)	पट (T)	I II III			
3	0	H H H	$p \times p \times p = p^3$	3	1/8
2	1	H H T	$p \times p \times q = p^2q$		
		H T H	$p \times q \times p = p^2q \quad 3p^2q$	2	3/8
		T H H	$q \times p \times p = p^2q$		
1	2	H T T	$p \times q \times q = pq^2$		
		T H T	$q \times p \times q = pq^2$	1	3/8
		T T H	$q \times q \times p = pq^2$		
0	3	T T T	$q \times q \times q = q^3$	0	1/8
योग		$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p + q)^3$			1

यदि तीन सिक्के (I, II, III) एक साथ उछाले जायें तो परिणाम निम्न सारणी के माध्यम से प्रस्तुत किये जा सकते हैं μ

इसी प्रकार 4, 5, 6, 7............. n घटनाओं के लिये द्विपद बंटन बनाये जा सकते हैं यहाँ पर घटनाओं की संख्या (p + q) की घात के समान होगी जिसका कि विस्तार ज्ञात किया जा सकता है ।

एक घटना μ $(p+q)^1 = p + q$

दो घटनायें μ $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$

तीन घटनायें μ $(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^3 + q^3$

चार घटनायें μ $(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$

पाँच घटनायें μ $(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$

अतः इस सूत्र को निम्न सामान्य रूप दिया जा सकता है –

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q^1 \; \frac{n(n-1)}{2\times1} \, p^{n-2}q^2 \; \frac{n(n-1)(n-2)\,p^{n-3}q}{3\times2\times1}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)p^{n-4}q^4 + \dots\dots\dots\dots + q^4}{4\times3\times2\times1}$$

उपरोक्त समीकरण में यदि n = 4 रखा जाये तो –

$$(p+q)^n = (p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + \frac{4(4-1)}{2\times1}\, p^{4-2}q^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3\times2\times1}\, p^{4-3}q + q^4$$

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

विस्तार के विभिन्न पदों में संख्यात्मक गुणांक संचय के नियमों के अनुसार भी प्राप्त किये जा सकते हैं μ

$$(p+q)^4 = {}^nC_4\, p^4q + {}^nc_3\, p^3q^2 + {}^nC_2\, p^2q^2 + {}^nC_1\, pq^3 + {}^nC_0\, pq^4$$

$$(p+q)^4 = {}^4C_4\, p^4 + {}^4C_3\, p^3q^2 + {}^4C_2\, p^2q^2 + {}^4C_1\, pq^3 + {}^4C_0\, q^4$$

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

अतः स्पष्ट है कि द्विपद विस्तार का प्रत्येक पद बर्नोली प्रमेय द्वारा $p(r) = {}^nC_r\, p^rq^{n-r}$ द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है वास्तव में द्विपद बंटन प्राप्त करने के लिये सभी (n+1) पदों को बर्नोली प्रमेय के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है ।

द्विपद बंटन के विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक पास्कल के त्रिभुज (Pascal Triangle) के माध्यम से देखे जा सकते हैं ।

पास्कल त्रिभुज में प्रत्येक गुणांक उससे पिछली पंक्ति के दोनों ओर का गुणांक है जैसे μ 10 = 4+6, 15 = 10 + 5 आदि ।

घात n	$(p+q)^n$ के विस्तार के गुणांक	योग 2^n
	1	
1	1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	512
10	1 10 45 120 210 256 210 120 45 10 1	1024

18.6 द्विपद बंटन लिखने के सामान्य नियम

द्विपद प्रमेय के विभिन्न पदों को ज्ञात करते समय निम्न नियम महत्वपूर्ण हैं µ

पदों की संख्या µ द्विपद विस्तार में (n+1) पद होते हैं अर्थात् (p+q) की घात से एक पद अधिक होता है जैसे – $(p+q)^7$ में 8 पद होंगे ।

घातों का योग µ प्रत्येक पद में p और q की घातों का योग n होना चाहिए (क्योंकि r. n — r = n) जैसे $(p+q)^6$ के पहले पद के विस्तार में घातों का योग 6 है (p^6q) इसी प्रकार दूसरे पद में भी 5+1, तीसरे में 4+2, ... अन्तिम में 0+6 है ।

घातों का क्रम µ $(p+q)^n$ के विस्तार में p की घातों के क्रम क्रमशः n, n — 1, n — 2, ...3, 2, 1, 0 होते हैं। यानि घटते जाते हैं वहीं q की घातों के क्रम बढ़ते जाते हैं और अन्तिम पद n घात का प्रयोग है ।

संख्यात्मक गुणांक µ विभिन्न पदों के गुणांकों के सम्बन्ध में तीन बातें महत्वपूर्ण हैं µ

(i) पूरे द्विपद विस्तार के विभिन्न गुणांक सदा सममितीय (Symmetrical) होते हैं, जैसा कि पास्कल त्रिभुज से स्पष्ट है । n = 3 के लिये 1, 3, 3, 1, n = 4 के लिये 1, 4, 6, 4, 1 होता है।

(ii) गुणांक की गणना सूत्र, संचय या पास्कल त्रिभुज के माध्यम से की जा सकती है।

(iii) किसी द्विपद बंटन के लिये सभी पदों के गुणांकों का योग 2^n होता है । जैसे – n = 4 के लिये गुणांक 1, 4, 6, 4, 1 होंगे जिनका योग 16 होगा तथा प्रत्येक क्रमित घात के लिये यह योग दुगना होता जाता है । जैसे n = 2 के लिये 4, n = 3 के लिये 8, n = 4 के लिए 16 एवं n = 5 के लिए 32 होगा ।

प्रायिकताओं का योग µ द्विपद बंटन के सभी प्रायिकताओं का योग हमेशा 1 होगा ।

p तथा q का क्रम µ यह एक महत्वपूर्ण बात है द्विपद बंटन का सामान्य रूप $(p+q)^n$ है लेकिन इसमें कठिनाई यह है कि सफलताओं की संख्या को अवरोही क्रम (desending order) में लिखा जाता है यानि पहले बड़ी फिर उससे छोटी तथा अंत में शून्य, परन्तु सफलताओं की संख्या को आरोही क्रम में रखकर प्रायिकता ज्ञात करने के लिए $(q + p)^n$ का विस्तार लिखा जाता है। $(q + p)^n$ का विस्तार ठीक उसी प्रकार से लिखा जाता है जिस प्रकार $(p + q)^n$ का अन्तर मात्र यह है कि p और q का स्थानान्तरण कर दिया जाता है। n = 6, p = सफलता q = असफलता की प्रायिकता तो $(p + q)^6$ तथा $(q + p)^6$ के विस्तार निम्नवत् होंगे।

यानि $(q + p)^n$ को निम्न रूप में व्यक्त किया जायेगा μ

$$(q+p)^n = {}^nC_0\, q^n p^0 + {}^nC_1\, q^{n-1}p^1 + {}^nC_2\, q^{n-2}p^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, q^0p^n$$

$$(q+p)^n = q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}p + {}^nC_2\, q^{n-2}p^2 + \ldots\ldots + {}^nc_n\, p^n$$

$(p + q)^6$		**$(q + p)^6$**	
सफलताओं की संख्या r (n–r)	प्रायिकता	असफलताओं की संख्या r (n–r)	प्रायिकता
6 (0)	${}^6C_6\, p^6q^0 = p^7$	0 (6)	${}^6C_6\, p^0q^6 = q^6$
5 (1)	${}^6C_5\, p^5q = 6p^5q$	1 (5)	${}^6C_5\, pq^5 = 6pq^5$
4 (2)	${}^6C_4\, p^4q^2 = 15p^4q^2$	2 (4)	${}^6C_4\, p^2q^4 = 15p^2q^4$
3 (3)	${}^6C_3\, p^3q^3 = 20p^3q^3$	(3) 3	${}^6C_3\, p^3q^3 = 20p^3q^3$
2 (4)	${}^6C_2\, p^2q^4 = 15p^2q^4$	4 (2)	${}^6C_2\, p^4q^2 = 15p^4q^2$
1 (5)	${}^6C_1\, pq^5 = 6pq^5$	5 (1)	${}^6C_1\, p^5q = 6p^5q$
0 (6)	${}^6C_6\, p^0q^6 = q^6$	6 (0)	${}^6C_0\, p^6q^0 = p^6$

18.7 द्विपद बंटन का स्वरूप

द्विपद वितरण का सामान्य रूप मुख्यतया दो बातों पर निर्भर करता है – (i) p तथा ͅ का मूल्य (ii) n का मान

यदि किसी घटना की सफलता एवं असफलता की सम्भावना समान है यानि p = q = ½ तो प्राप्त आवृति बंटन सममित होगा और प्रत्याशित आवृतियाँ केन्द्रीय प्रवृतियों के दोनों ओर समान रूप से वितरित होंगी । उदाहरणार्थ यदि 4 सिक्के 256 बार उछाले जाये तो 4, 3, 2, 1, 0 चित्त हेतु आवृतियाँ 16, 64, 96, 64, 16 होंगी यानि वितरण सममित है । यदि p q तो वितरण सममित न होकर विषमता लिये हुए होगा, यदि उपर्युक्त उदाहरण में अगर p = 1/4 तथा q = 3/4 है तो प्राप्त आवृतियाँ 1, 12, 54,108, 81 होंगी । उपरोक्त का स्पष्टीकरण निम्न है –

यदि p = q = 1/2 तो

$$256\,(p+q)^4 = 256\,[p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4]$$

$$256\,(½+½) = 256\,[(½)^4 + 256 \times 4(½)^3(½) + 256 \times (½)^2(½)^2 + 256\times 4(½)(½)^3 + 256 \times (½)^4]$$

$= 16 + 64 + 96 + 64 + 16$

यानि वितरण सममित है ।

यदि $p = 1/4, q = 3/4$ तो

$256\,(p+q)^4 = 256\,[p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4\,pq^3 + q^4]$

तो $256\,(¼+3/4)^4 = 256(¼)^4 + 256 \times 4(½)^3(3/4) + 256 \times (½)^2(3/4)^2 + 256 \times (½)(3/4)^3 + 256(3/4)^4$

$= 1 + 12 + 54 + 108 + 81$

यानि वितरण असमित है ।

यदि p तथा q का मान समान न हो एवं n के मान में निरन्तर वृद्धि कर दी जाये तो भी विषमता कम होने लगती है यानि वितरण सममित होने लगता है, निष्कर्षतया यह कहा जा सकता है कि कोई आवृति वितरण किस प्रकार का होगा यह p, q और n के मूल्य पर निर्भर करेगा ।

18.8 द्विपद वितरण की प्रत्याशित आवृतियाँ

यदि n स्वतन्त्र बर्नोली अभिप्रयोगों के द्विपद प्रयोग को N बार दोहराया जाये तब इन N द्विपद प्रयोगों में r सफलता दिखाने वाले द्विपद प्रयोगों की प्रत्याशित संख्या को द्विपद प्रयोगों की कुल संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है यदि n घटनाओं की N परीक्षणों में प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं तो प्रत्येक पद की प्रायिकता को परीक्षणों की कुल संख्या से गुणा कर दिया जाता है ।

यानि n घटनाओं की N परीक्षणों में त सफलता की प्रत्याशित आवृति

$= N\,{}^nC_r\,p^rq^{n-r}\,,\ r = 0, 1, 2, ... n$

अतः 0, 1, 2, 3, ... n की प्रत्याशित आवृतियाँ क्रमशः निम्न होंगी –

$N\,q^n, N\,{}^nC_1\,pq^{n-1}, N\,{}^nC_2\,p^2q^{n-2}............Np^n$

जोकि $N\,(q+p)^n$ के विस्तार से प्राप्त होती है ।

सफलता की संख्या चित्त **(H)**	प्रायिकता $(q + p)^n$	प्रत्याषित आवृति $N\,(q + p)^n$

0 1 2 3 4	${}^4C_0\,(½)^4(½)^0 = 1/16$ ${}^4C_1\,(½)^3(½)^1 = ¼$ ${}^4C_2\,(½)^2(½)^2 = 3/8$ ${}^4C_3\,(½)^1(½)^3 = ¼$ ${}^4C_0\,(½)^0(½)^4 = 1/16$	$64 \times 1/16 = 4$ $64 \times ¼ = 16$ $64 \times 3/8 = 24$ $64 \times ¼ = 16$ $64 \times 1/16 = 4$
योग		**64**

उदाहरण 1. μ यदि 4 सिक्कों को 64 बार उछाला जाये तो चित आने की प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात कीजिए –

हल μ यहाँ पर $p = q = ½, n = 4, N = 64$

अतः $64\,(½ + ½)^4$ का विस्तार ज्ञात किया जायेगा ।

उदाहरण 2. μ यदि 8 सिक्के 256 बार उछाले जाते हैं तो निम्न परिणामों की प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात कीजिए –

(i) 4 चित्त (Head)

(ii) 5 या अधिक चित

(iii) कोई चित नहीं

(iv) कोई पट (Tail) नहीं

(v) कम से कम 7 चित

हल μ यहाँ $N = 256,\ p = q = ½, n = 8$

(i) 4 चित तथा 4 पट आने की प्रायिकता μ

$$p(4) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r} = {}^8C_4\,(½)^4(½)^4 = 70 \times \frac{1}{256} = \frac{70}{256}$$

अतः 4 चित आने की प्रत्याशित आवृति $= 256 \times \frac{70}{256} = 70$

(ii) 5 या अधिक चित की प्रायिकता μ

5 चित की प्रायिकता $p(5) = {}^8C_5\,(½)^5(½)^3$

$$p(5) = 56 \times \frac{1}{256} = \frac{56}{256}$$

6 चित की प्रायिकता $p(6) = {}^8C_6\,(½)^6(½)^2 = 28/256$

7 चित की प्रायिकता $p(7) = {}^8C_7\,(½)^7(½) = 8/256$

8 चित की प्रायिकता $p(8) = {}^8C_0\,(½)^8(½)^0 = 1/256$

अतः 5 या अधिक चित आने की प्रत्याशित आवृति निम्न होगी ।

प्रत्याशित आवृति = 256 [p(5) + 256 p(6) + 256 p(7) + 256 p(8)]

$$= 256\times\frac{56}{256}+256\times\frac{28}{256}+256\times\frac{8}{256}+256\times\frac{1}{256}$$

= 56 + 28 + 8 + 1 = 95

(iii) शून्य चित की प्रायिकता $p(0) = {}^8C_0\, p^0 q^8 = (½)^8 = \frac{1}{256}$

प्रत्याशित आवृति = $256 \times \frac{1}{256} = 1$

(iv) शून्य पट की आवृति यानि सारे के सारे चित –

अतः $p(8) = {}^8C_8\, p^8 q^0 = (½)^8 = \frac{1}{256}$

यानि आवृति = $256 \times \frac{1}{256} = 1$

(v) कम से कम 7 चित यानि कि 7 तथा 8 चित आये –

p(7) = 8/256, p(8) = 1/256

अतः प्रत्याशित आवृति = 256 × p(7) + 256 × p(8)

$$= 256 \times\frac{8}{256} + 256 \times \frac{1}{256} = 8 + 1 = 9$$

उदाहरण 3. μ यह मानते हुए कि किसी बस्ती की आधी आबादी लोकप्रिय टीवी धारावाहिक देखने की शौकीन हैं तथा यह मान्यता है कि यदि 2048 में से प्रत्येक 10 व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर अन्वेषक यह पूछता है कि आप यह धारावाहिक देखते हैं या नहीं तो कितने अन्वेषक यह सूचना देंगे कि चार या कम व्यक्ति यह धारावाहिक देखते हैं ?

हल μ N = 2048, n = 10 (प्रतिदर्श की संख्या)

0, 1, 2, 3 .... 10 धारावाहिक दर्शकों में से कम से चार व्यक्ति यह धारावाहिक देखते हैं कि प्रत्याशित आवृति निम्न वितरण से देखी जायेगी –

$(q+p)^{10}$ यहाँ p = q = ½

दर्शकों की संख्या = 0 1 2 3 4

प्रत्याशित आवृति = $N\,[q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4]$

$= 2048\,[(½)^{10} + 10(½)^9(½) + 45(½)^8(½)^2 + 120(½)^7(½)^3 + 210(½)^6(½)^4]$

$= 2048 \times (½)^{10}\,[1 + 10 + 45 + 120 + 210]$

= 2 × 386 = 772

अतः 772 अन्वेषक यह सूचना देंगे कि 4 या कम व्यक्ति टीवी धारावाहिक देखते हैं ।

उदाहरण 4. μ किसी उद्योग में काम करने वाले श्रमिकों में से 25% के गम्भीर रोग से पीड़ित होने की सम्भावना है, इस बात की क्या प्रायिकता है कि 6 में से 4 या अधिक रोग ग्रस्त होंगे ?

हल μ बीमारी होने की सम्भावना यानि प्रायिकता = 25/100 = 1/4 = p

बीमारी न होने की प्रायिकता $q = 1 — 1/4 = 3/4$

6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 श्रमिकों के बीमार होने की प्रायिकता $(p+q)^6$ के विस्तार से ज्ञात की जायेगी ।

यानि $p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3 + 15p^2q^4 + 6pq^5 + p^6$

लेकिन चार या अधिक श्रमिकों के बीमार होने की सम्भावना निम्न विस्तार से निर्धारित होगी – $p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2$

$$= (1/4)^6 + 6(1/4)^5(3/4) + 15(1/4)^4(3/4)^2$$

$$= \frac{1}{4096} + 6 \times \frac{1}{4096} \times \frac{3}{4} + 15 \times \frac{1}{256} \times \frac{9}{16}$$

$$= \frac{1}{4096} + \frac{18}{4096} + \frac{135}{4096} = \frac{156}{4096} = \frac{77}{2048}$$

18.9 वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों की तुलना

यह तथ्य स्पष्ट किया जा चुका है कि यदि घटना से सम्बन्धित प्रयोगों की संख्या अधिक हो अर्थात् N की मात्रा अत्यधिक बृहद हो तो वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों के मध्य अन्तर काफी कम हो जाता है। वास्तव में विभिन्न प्रतिचयन परीक्षण इस मान्यता के आधार पर ही किये जाते हैं, वास्तविक तथा प्रत्याशित आवृतियों की तुलना करने की दो रीतियाँ हैं (i) बिन्दुरेखीय रीति तथा (ii) काई वर्ग रीति

(i) बिन्दु रेखीय रीति (Graphic Method) — इस विधि के अनुसार वास्तविक तथा प्रत्याशित दोनों आवृतियों को ग्राफ पेपर पर अंकित कर दिया जाता है । अंकित बिन्दुओं से बनने वाले ये दोनों वक्र यदि एक दूसरे के समान हो तो यह अन्तर निरर्थक (insignificant) माना जाता है तथा ऐसी दशा में यह कहा जायेगा कि वक्र आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट है (The fit is good) । इसके विपरीत यदि दोनों वक्रों परस्पर एक दूसरे से दूर हों तो वास्तविक तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक माना जायेगा और वक्र अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं माना जाता है (The fit is not good) ।

(ii) काई वर्ग परीक्षण (X^2 Test) — काई वर्ग परीक्षण द्वारा भी वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृतियों के मध्य अन्तर स्थापित किया जा सकता gS X^2 का मान सूत्र द्वारा निर्धारित करने के बाद स्वातन्त्र्य–संख्या (degree of freedom) ज्ञात की जाती है इसके बाद सम्बन्धित स्वातन्त्रयांश के लिए 5% या 1% स्तर पर X^2 सारणी (Table) में से X^2 का मूल्य देखा जाता है यदि X^2 का परिकलित मूल्य (Calculated Value) उसके सारणी मूल्य से अधिक होता है तो अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं होता है यानि वास्तविक तथा अवलोकित आवृतियों के मध्य अन्तर सार्थक होता है इस स्थिति के विपरीत होने पर अन्तर अर्थहीन होता है। यहाँ पर यह बात ध्यान देने योग्य है कि स्वातन्त्रयांश संख्या सफलताओं की संख्या से 1 कम होता है। X^2 का मान निम्न सूत्र द्वारा निर्धारित किया जा सकता है।

$$X^2 = \sum\left[\frac{(fo-fe)^2}{fe}\right]$$

जहाँ fe = प्रत्याशित आवृति, fo = अवलोकित आवृति ।

उदाहरण 5. μ 192 परिवारों में, जिनके लिये सूरजमुखी (albinos) बच्चे के उत्पन्न होने की सम्भावना 25% पायी जाती है प्रथम तीन बच्चों में सूरजमुखी बच्चों का बंटन निम्न प्रकार था μ

सूरजमुखी बच्चों की संख्या	0	1	2	3	योग
परिवारों की संख्या	77	90	20	5	192

इस मान्यता के साथ कि द्विपद नियम लागू होता है सैद्धान्तिक आवृतियों को ज्ञात कीजिये और X^2 का प्रयोग करते हुए आसंजन सौष्ठव (goodness of fit) की जाँच कीजिए ।

हल μ यहाँ पर सूरजमुखी बच्चे के जन्म की प्रायिकता $p = 25/100 = 1/4$

सूरजमुखी बच्चे के न होने की प्रायिकता $q = 1 — 1/4 = 3/4$

0, 1, 2, 3 सूरजमुखी बच्चों के जन्म की प्रत्याशित प्रायिकता μ

$N(q+p)^n = 192(3/4+1/4)^3$ से ज्ञात की जायेगी ।

अतः $192(3/4 + 1/4)^3$

$= 192[(3/4)^3 + {}^3C_1(3/4)^2(1/4) + {}^3C_2(3/4)(1/4)^2 + {}^3C_3(1/4)^3]$

$= 192 \left[\frac{27}{64} + 3\times\frac{9}{64} + 3\times\frac{9}{64} + \frac{1}{64}\right]$

$= \frac{192}{64}\ [27 + 27 + 27 + 1] = 81 + 81 + 27 + 3 = 192$

अतः 0, 1, 2, 3 के सूरजमुखी बच्चे होने की प्रत्याशित आवृति 81, 81, 27 तथा 3 होगी । आसंजन उत्कृष्ट होने के लिये X^2 की जाँच करनी होगी μ

r	fo (अवलोकित)	fe (प्रत्याषित)	fo – fe	$(fo–fe)^2$	$(fo–fe)^2/fe$
0	77	81	–4	16	16/81=0.1975
1	90	81	+9	81	81/81=1.0000
2	20	27	–7	49	49/27=1.8148
3	5	3	+2	4	4/3 = 1.3333
	N = 192	192			$X^2 = 4.3456$

यहाँ पर सफलताओं की संख्या (0, 1, 2, 3) यानि 4 है अतः स्वातन्त्रय संख्या d.f. (4 – 1) = 3 होगी एवं d.f. 3 पर 5% सार्थकता के स्तर पर सारणी मूल्य 7.815 होती है । जोकि परिकलित मूल्य से अधिक है इससे यह स्पष्ट है कि अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक नहीं है तथा आसंजन उत्तम है ।

उदाहरण 6. μ 4 सिक्कों का समुच्चय 3200 बार उछाला गया तथा प्रत्येक बार आये चितों की संख्या लिखी गयी है जिसके निम्न परिणाम आये हैं। ज्ञात कीजिए कि सिक्का सुडौल (unbaised) है ।

चितों की संख्या 0 1 2 3 4 आवृति 100 800 1200 950 150

हल μ सिक्के के सुडौल होने पर चित तथा पट आने की प्रायिकता $p = q = ½$ यहाँ पर $n = 4$ तथा $N = 3200$

अतः $N(q+p)^n = 3200\ (½+½)^4$ के विस्तार के द्वारा ही सैद्धान्तिक आवृति बंटन लिखा जायेगा ।

$3200\ (½+½)^4 = 3200\ [(½)^4 + 4(½)^3(½) + 6(½)^2(½)^2 + 4(½)(½)^3 +(½)^4]$

$= 200\ [1 + 4 + 6 +4 + 1]$

$200 + 800 + 1200 + 800 + 200 = 3200$

अतः 0, 1, 2, 3, 4 चितों की प्रत्याशित आवृति 200, 800, 1200, 800, 200 होगी ।

सिक्कों के सुडौल होने के लिये अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर अर्थहीन होना चाहिए जिसकी जाँच X^2 के माध्यम से की जा सकती है –

r	*fo* (अवलोकित)	*fe* (प्रत्याषित)	fo – fe	$(fo–fe)^2$	$(fo–fe)^2/fe$
0	100	200	–100	1000	50.000
1	800	800	0	0	0
2	1200	1200	0	0	0
3	950	800	+150	22500	28.125
4	150	200	–50	2500	12.500
	N = 3200	192			$X^2 = 90.625$

यहाँ पर (d.f.) 3 होगी तथा 3 (d.f.) पर 5% सार्थकता के स्तर पर सारणी मूल्य 7.815 होता है जोकि परिकलित मूल्य से कम है अतः अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों में अन्तर सार्थक है तथा सिक्का सुडौल नहीं है ।

18.10 द्विपद बंटन के अचर मूल्य (Constant of the Bionomical distribution)

किसी भी द्विपद बंटन के अचर मूल्यों या अचरांक के अन्तर्गत हम इसके माध्य (Mean), प्रमाप विचलन (Standard Deviation) तथा परिघातों (Moments), विषमता (Skewness) एवं पृथुशीर्षत्व (Krutosis) का अध्ययन करते हैं। यह सभी अचर मूल्य द्विपर वितरण के विश्लेषण में अत्याधिक महत्वपूर्ण होते हैं इनके माध्यम से हमें द्विपद बंटन में आवृतियों के स्वरूप, विस्तार, सममितता आदि गुणों के आंकलन में सहायता मिलती है अर्थात् द्विपद बंटन की आकार प्रकार तथा प्रकृति किस प्रकार की है यह सभी अचर मूल्यों के माध्यम से ही निर्धारित किया जाता है ।

माध्य μ ऐसे सैद्धान्तिक आवृति वितरणों में जहाँ स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या और प्रायिकता का मूल्य दिया गया हो माध्य एवं प्रमाप विचलन को सरलता से निर्धारित किया जा सकता है । द्विपद वितरण के समान्तर माध्य या मध्यक का सूत्र निम्नवत् है μ

माध्य यानि $\bar{X} = np$

जहाँ μ n = स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या तथा p = प्रायिकता ।

प्रमाप विचलन μ माध्य के पश्चात् दूसरे महत्वपूर्ण अचर मूल्य को भी स्वतन्त्र घटनाओं की संख्या तथा किसी घटना की सफलता (p) एवं असफलता (q) के माध्यम् से निर्धारित किया जा सकता है जोकि निम्नवत् है μ

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

परिघात μ आवृति बंटन की विशेषताओं का सांख्यकीय विश्लेषण करने में परिघातों का बहुत महत्व है । वस्तुतया परिघात अथवा आघूर्ण का प्रयोग अधिकांश तथा यान्त्रिक विज्ञान (Mechanics) में किया जाता है जिसका शब्दिक अर्थ घुमाव उत्पन्न करने वाली प्रवृत्ति की शक्ति की माप है जहाँ इसे भार तथा केन्द्र से दूरी के रूप में नापते हैं परन्तु सांख्यिकी में इसे वर्ग आवृतियों (Class frequency) तथा समान्तर माध्य से विभिन्न मूल्यों की दूरी के गुणनफल के रूप में निर्धारित किया जाता है । इसका मुख्य उद्देश्य किसी बंटन की सरंचना, स्वरूप एवं सममितता का विश्लेषण करना तथा सममिति की प्रकृति की जाँच करना मुख्य है। सैद्धान्तिक तथा व्यवहारिक तौर पर प्रथम चार प्रतिघातों का अध्ययन महत्वपूर्ण होता है यह प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ परिघात कहलाते हैं जिन्हें □$_1$, □$_2$, □$_3$ तथा □$_4$ से निरुपित किया जाता है एवं द्विपद बंटन हेतु इन्हें निम्न तरह से परिभाषित किया जा सकता है

प्रथम परिघात μ समान्तर माध्य से मूल्यों के विचलनों तथा आवृतियों के गुणनफल को प्रथम परिघात के रूप में परिभाषित किया जाता है यह सदैव शून्य होता है । यानि □$_1 = 0$

द्वितीय परिघात μ आवृतियों तथा समान्तर माध्य से विचलनों के वर्ग तथा आवृतियों के गुणनफल के रूप में परिभाषित होता है। यहाँ द्विपद प्रमेय हेतु □$_2 = npq$ वास्तव में यह प्रमाप विचलन का ही वर्ग होता है।

तृतीय परिघात μ इसमें आवृतियों की गुणा विचलनों के घन से की जाती है तथा यहाँ पर □$_3 = npq(q-p)$ ।

चतुर्थ परिघात μ इसमें आवृतियों की गुणा विचलनों की चौथी घात से की जाती है, यहाँ पर □$_4 = 3n^2p^2q^2 + npq\,(1 - 6pq)$ ।

परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक μ विषमता गुणांक का भी आवृति बंटन के आकार, संरचना के विश्लेषण में महत्व होता है । **कार्ल पियरर्सन** के अनुसार परिघात अनुपातों के आधार पर निम्न दो सूत्रों द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात किये जा सकते हैं μ

(i) प्रथम परिघात विषमता गुणांक μ इसको r_1 या के द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इसका सूत्र निम्नवत् है μ

$$r_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^3}} = \frac{npq(q-p)}{\sqrt{n^3p^3q^3}} = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$$

;पपद्ध **द्वितीय परिघात विषमता गुणांक μ** इसको □$_1$ के द्वारा निरूपित किया जाता है । जो कि निम्नवत् है μ

$$\beta_2 = \frac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3} = \frac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}$$

पृथुशीर्षत्व (ककुदता) μ आवृति वक्र के शीर्ष की प्रकृति का अध्ययन करने हेतु पृथुशीर्षत्व का माप निकाला जाता है इसे शिखरीयता या ककुदता भी कहा जाता है इससे आवृति वक्र के शीर्ष के नुकीलेपन अथवा चपटेपन को मापा जाता है कार्ल पियरर्सन ने द्वितीय तथा चतुर्थ परिघातों के माध्यम से पृथुशीर्षत्व की माप निम्न प्रकार से निर्धारित की μ

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \frac{3n^2p^2q^2 + npq\,(n-6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$\beta_2 = \frac{3n^2p^2q^2}{n^2p^2q^2} + \frac{npq\,(n-6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq}$$

यदि □$_2$ झ 3 तो शीर्षनुकीला एवं □$_2$ ढ 3 तो शीर्ष चपटा तथा □$_2$ त्र 3 शीर्ष मध्यम ।

द्विपद बंटन के समस्त अचर मूल्य संक्षेप में निम्नवत् हैं μ

द्विपद बंटन च्त त्र दब्त ददृतचत

$\bar{X}$ त्र दचए $\sigma = \sqrt{npq}$

▱$_1$ त्र 0ए ▱$_2$ त्र दचुए ▱$_3$ त्र दचु;दृचद्ध

▱$_4$ त्र 3द^{2}चु^{22}. दचु ;1 दृ6चुद्ध

$$r_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}, \quad \beta_1 = \frac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}, \quad \beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq},$$

उदाहरण 7ण μ सोलह सिक्के 216 बार उछाले जाते हैं। उक्त सैद्धान्तिक बंटन के माध्य एवं मानक विचलन मूल्य क्या हैं ? साथ ही चारों परिघात मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

हल μ यहाँ च त्र ु त्र)ए द त्र 16ए छ त्र 216

सैद्धान्तिक बंटन के समान्तर माध्य त्र दच त्र 16 ×) त्र 8

प्रमाप विचलन त्र $\sqrt{npq} = \sqrt{16 \times ½ \times ½} = \sqrt{4} = 2$

परिघात : ▱$_1$ त्र 0ए ▱$_2$ त्र दचु त्र 16 ×) ×) त्र 4

▱$_3$ त्र दचु;दृचद्ध त्र 16 ×) ×);)दृ)द्ध त्र 0

▱$_4$ त्र 3द^{2}चु^{22}. दचु ;1 दृ6चुद्ध

त्र 3×16×16×(×(. 16×)×);1दृ6×)×)द्ध

त्र 48. 4;दृ)द्ध त्र 46

उदाहरण 8ण μ एक कारखाने में औसत रूप से 25ः पेच दोषपूर्ण पाये जाते हैं। 10 पेचों में से दोषपूर्ण पेचों को ज्ञात करने के लिए माध्य, प्रसरण ज्ञात कीजिए एवं परिघातों पर आधारित विषमता एवं पृथुशीर्षत्व के गुणांक भी परिकलित कीजिए ?

हल μ दोषपूर्ण पेचों की प्रायिकता च त्र 25ध्100 त्र (ए ु त्र 1दृ(त्र 3ध्4

यहाँ पर द त्र 10

अतः $\bar{X}$ त्र दच त्र 10 × (त्र 2ण्5

चूँकि $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \times ¼ \times 3/4} = \sqrt{7.5}$ एवं प्रसरण □² त्र 7ण्5

परिघातों पर आधारित विषमता गुणांक : $\beta_1 = \frac{(q-p)^2}{\sqrt{npq}}$

$$\beta_1 = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}{10 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{10 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{30} = 0.033$$

पृथुशीर्षत्व का माप : $\beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq}$

$$3 + \frac{1 - 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{10 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}$$

$$\beta_2 = 3 - \frac{1 \times 4 \times 4}{10 \times 8} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

जोकि 3 से कम अतः शीर्ष चपटा है ।

उदाहरण 9. μ भारत के किसी राज्य में जहाँ बालक के जन्म होने की सम्भावना 50% ठीक 4 बच्चों वाले 4096 परिवारों का चयन किया गया किसी परिवार में 0, 1, 2, 3, 4 बालक होने की सम्भावनायें ज्ञात करके इन वालकों की संख्या पर आधारित 4096 परिवारों का सैद्धान्तिक आवृति बंटन ज्ञात कीजिए और उस बंटन का समान्तर माध्य तथा मानक विचलन का परिकलन कीजिए ।

हल μ यहाँ पर बालक के जन्म होने की प्रायिकता $p = 50/100 = ½$ तथा बालिका होने की प्रायिकता $q = ½$

$n = 4, \; N = 4096$

$\bar{X}$ त्र दच त्र 4 ×) त्र 2

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times ½ \times ½} = 1$

बालक के जन्म लेने की सैद्धान्तिक आवृति $N(q+p)^4$ से ज्ञात होगी μ

$4096(½+½)^4 = 4096[(½)^4 + 4(½)^3(½) + 6(½)^2(½)^2 + 4(½)(½)^3 + (½)^4]$

4096/16 [1 + 4 + 6 + 4 + 1]

256 [1 + 4 + 6 + 4 + 1]

256 + 1024 + 1536 + 1024 + 256

अतः प्रत्याशित आवृति निम्नवत् होगी μ

लड़कों की संख्या	0	1	2	3	4
परिवारों की संख्या	256	1024	1536	1024	256

18.11 द्विपर बंटन का आघूर्ण जनक फलन (Moment Generating function of Bionomial distribution)

यह द्विपद बंटन का एक महत्वपूर्ण फलन होता है यदि x चर द्विपद बंटन की विशेषताओं को निरूपित करना है तो शून्य के परितः आघूर्ण जनक फलन को निम्न प्रकार से निरूपित किया जा सकता है μ

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=o}^{n} e^{tx}\, {}^nC_c\, p^x q^{n-x}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=o}^{n} {}^nC_x\, (pe^t)^x q^{n-x} = (q + pe^t)^n$$

इसी प्रकार आघूर्ण जनक फलनः माध्य के पारितः भी निम्न प्रकार से विश्लेषण किया जा सकता है μ

$$m_{X-np}(t) = E[e^{t(x-np)}]$$

$$= e^{-npt} E(e^{tx})$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=o}^{n} e^{tx}\, {}^nC_x\, p^x q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=o}^{n} {}^nC_x\, (pe^t)^x q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} (q + pe^t)^x$$

$$= (qe^{-pt} + pe^{t-pt})^n$$

$$= (qe^{-pt} + pe^{qt})$$

$$m_{X-np}(t) = (qe^{-pt} + pe^{qt})$$

योग प्रमेय

यह एक महत्वपूर्ण प्रमेय है तथा इस प्रमेय के अनुसार दा स्वतन्त्र द्विपद चरों जिनके प्राचल (n_1, p_1) तथा (n_2, p_2) है का योग भी द्विपद चर होताा है । अर्थात् यदि दो स्वतन्त्र द्विपद चरों में प्राचल (n_1, p_1) तथा (n_2, p_2) हो तो उनके योग का बंटन भी द्विपद चर बंटन होगा।

हल μ यदि X □ B $(n_1\ p)$ यानि X द्विपद वितरण के अनुसार जिसके प्राचल n तथा p हैं ऐसी दशा में शून्य के परितः आघूर्ण जनक फलन $m_X(t) = (q_1 + p_1 et)^n$ होगा ।

अतः $m_{X_1}(t) = (q_1 + p_1 e^t)^{n1}$

तथा $m_{X_2}(t) = (q_2 + p_2 e^t)^{n2}$

अतः $m_{x_1} + x_2(t) = m_{x_1}(t)\, m_{x_2}(t)$ (चूँकि x_1, x_2 स्वतन्त्र हैं ।)

इसलिये $m_{x_1} + x_2(t) = (q_1 + p_1 e^t)^{n1} (q_2 + p_2 e^t)^{n2}$ .... (A)

चूँकि (A) से स्पष्ट है कि इसके पदाये पक्ष को तभी $(q + pe^t)^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जबकि $q_1 = q_2 = q$ एवं $p_1 = p_2 = p$ मान लिया जाये ।

अतः $m_{x_1 + x_2}(t) = (q + pe^t)^{n1+n2}$

यानि $x_1 + x_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि दो स्वतन्त्र द्विपद चरों x_1 एवं x_2 जिनके प्राचल क्रमशः (n_2, p_1) और (n_2, p_2) हो तो उनके योग का बंटन भी द्विपद बंटन होगा जिसके प्राचल $[(n_1 + n_2), p]$ होंगे एवं यह तभी सम्भव होगा जबकि – $p_1 = p_2$

द्विपद बंटन के परिघातों के लिये रिकरेन्स सम्बन्ध या फलन (Recurrence function or Relation for the moments of Bionomial distribution)

इस सम्बन्ध को $(q + p)^n$ के लिए रेरोविक्सी (Renovsky) के सूत्र द्वारा निरूपित किया जाता है । जो कि निम्नवत् है μ

$$\mu_{r+1} = pq(n_r \mu_{r-1} + \frac{d\mu r}{dp})$$

जहाँ μ_r माध्य के परितः r वाँ आघूर्ण है जिसे निम्न प्रकार से हल किया जा सकता है μ

μ_r (परिभाषा के अनुसार) $= E(X - EX)^r = E(X - np)^r$

अथवा $\mu_r = \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_r \, p^x (1 - p)^{n-x}$

p के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\mu r}{dp} = \sum_{x=o}^{n} (-rn)(x - np)^{r-1} \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$\cdot \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x \, p^{x-1} (1 - p)^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-1-x}$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \sum_{x=o}^{n} (x - np)^r \, {}^nC_x (1 - p)^{n-x} \left[\frac{x}{p} - \frac{x-x}{1-p}\right]$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \frac{1}{p(1-p)} \sum_{x=o}^{n} (x - np)^{r+1} \, {}^nC_x \, p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$\because \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = \frac{x-np}{p(1-p)}$$

$$= -rn\mu_{r-1} + \frac{1}{p(1-p)} \mu_{r+1}$$

अतः $\mu_{r-1} = pq\,(nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu r}{dp}\,)$ .... B

यह सम्बन्ध परिघातों के लिये रिकरेन्स फलन को दर्शाता है यदि $r = 1$ रखने पर μ

$\mu_2 = pq\,(n\mu_0 + \frac{d\mu_1}{dp}\,)$

$= npq$ (pw¡fd $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0$)

B esa $r = 2$ j[kus ij

$$\mu_3 = pq\,(2n\mu_1 + \frac{d\mu r}{dp})$$

$$= pq\,(\frac{d\mu r}{dp})\ (\text{pw¡fd } \mu_1 = 0)$$

$$= pq\left(\frac{d}{dp}npq\right)$$

$$= pq\left(\frac{d}{dp}np(1-p)\right)\ (\text{pw¡fd } q = 1-p)$$

$$= npq\left(\frac{d}{dp}(p-p)^2\right)$$

$$= npq\,[(1-2p)]$$

$$\mu_3 = npq\,(q-p)\ [\text{pw¡fd } (1-2p) = 1-p-p = q-q]$$

B में $r = 3$ रखने पर

$$\mu_4 = pq\left(3n\mu_2 + \frac{d\mu_3}{dp}\right)$$

$$= pq\,[3n.npq + \frac{d}{dp}\ npq\,(1-2p)]$$

$$= pq\,[3n^2pq + \frac{d}{dp}\ np\,(1-p)\,(1-2p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + pq\,[n(1-p)\,(1-2p) - np(1-2p) - 2np\,(1-p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + pq\,(n - 6np + 6np^2)$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq\,[1 - 6p\,(1-p)]$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq\,(1 - 6pq)$$

$$\mu_4 = npq\,(3npq + 1 - 6pq)$$

द्विपद बंटन, प्रगुण प्रमेय एवं बहुपद बंटन (Maltinational distribution)

बहुपद बंटन स्वतन्त्र व सर्वसम अभिप्रयोगों से सम्बद्ध एक ऐसा खण्डित बंटन है जिसके दो या दो से अधिक परिणाम हो सकते हैं। वास्तव में यह द्विपद बंटन का ही

व्यापकीकरण है। प्रगुण प्रमेय के अनुसार जब किसी घटना दो या दो से अधिक अपवर्जी तथा निरशेष (Mutually exclusive and exhaustive) परिणाम हो तो इन परिणामों के परस्पर आधार पर निखमत बंटन एक बहुपदी बंटन का निर्माण करता है। जहाँ द्विपद बंटन के दो सम्भाव्य परिणाम हो सकते हैं वहीं बहुपद बंटन के दो से अधिक सम्भाव्य परिणाम हो सकते हैं।

मान्यतायें μ वहुपद बंटन की मान्यतायें निम्न हैं ।

(i) परीक्षणों की स्थिर संख्या n के लिए समान परिस्थितियों में अभिप्रयोग किया जाता है ।

(ii) अभिप्रयोग के K (72) परस्पर अपवर्जी एवं निरशेष परिणाम होते हैं जिन्हें $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots\ldots E_K$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः समष्टि प्रतिदर्श

$$S = \{E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots E_K\}$$

(iii) विभिन्न प्ररिणामों $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots E_K$ की क्रमानुसार $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_K$ प्रायिकतायें होती हैं जो परीक्षणों में समान रहती हैं तथा जिनका योग एक होता है ।

$$Ep = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_K = 1$$

(iv) परीक्षण परस्पर स्वतन्त्र होते हैं ।

बहुपद बंटन वस्तुतः $(p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots p_K)^n$ का विस्तार है ।

n परीक्षणों में यह प्रायिकता कि E_1 की x_1, E_2 की $x_2 \ldots\ldots E_K$ की K_K बार घटित होने की प्रायिकता –

$$p\,(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_K) = \frac{n!}{X_1!\,X_2!\,X_3!\ldots\ldots\ldots X!}\; p_1^{x1} \times p_2^{x2} \ldots\ldots\ldots p_K^{KK}$$

जहाँ पर $x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_K = 4$ तथा □p =1

जोकि बहुपद बंटन का वांछित प्रायिकता फल है । इसे बहुपद विस्तार का सामान्य पद भी कहते हैं ।

18.12 द्विपद बंटन की विशेषतायें

द्विपद वितरण की प्रमुख विशेषतायें निम्नवत हैं –

सैद्धान्तिक बंटन μ यह बंटन सिद्धान्तया बर्नोली प्रमेय पर आधारित है यानि च;तद्ध त्र दह्त चत ुददृत तथा प्रायिकता बंटन को छ से गुणाकर प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात की जाती हैं ।

खण्डित बंटन μ यह आवृति बंटन खण्डित प्रकृति का होता है इसमें सफलताओं की संख्या पूर्णांक रूप में यानि 0ए 1ए 2ए 3 ००००००००००००००००० द हुआ करती हैं और तत्संवादी प्रायिकतायें और प्रत्याशित आवृतियाँ द्विपद प्रमेय के विस्तार द्वारा परिकलित की जाती हैं ।

आवृति बहुभुज ;थ्तमुनमदबल च्वसलहवदद्ध **μ** द्विपद बंटन को ग्राफ पेपर पर आवृति बहुभुज के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है ।

स्वरूप μ द्विपद बंटन के प्राचल द तथा च है । इसका स्वरूप च और ु के साथ घातांक द की मात्रा पर निर्भर करता है यदि च त्र ु हो तो बंटन सममित होगा चाहे द का मान चाहे कुछ भी हो । परन्तु यदि च और ु असमान हों तो बंटन असमित होगा एवं च झ 0ण्5 होने पर यह बांयी ओर तथा च ढ 0ण्5 होने पर यह दाहिनी ओर असममित होगा । घातांक का मान अत्याधिक होने पर यह असममिति कम होती जायेगी एवं द के अत्याधिक अधिक होने पर यह बंटन सममिति की ओर प्रवृत होता जायेगा ।

द्विपद बंटन का प्वॉयसॉ एवं प्रसामान्य बंटन से सम्बन्ध μ यद्यपि द्विपद बंटन तथा प्वॉयसॉ बंटन एक असतत् यानि खण्डित बंटन है एवं प्रसामान्य बंटन एक सतत् यानि अखण्डित बंटन है परन्तु तीनों बंटनों में कुछ विशेष परिस्थितियों में गहरा सम्बन्ध स्थापित हो जाता है ।

यदि द का मान अत्याधिक होता जाये एवं घटना के घटित होने की प्रायिकता च अत्याधिक कम हो या शून्य के सन्निकट हो तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता ु एक के सन्निकट हो जाये तो द्विपद बंटन एक ऐसे प्वॉयवॉ बंटन का रूप धारण करता है जिसकी निम्न विशेषतायें होती हैं μ

यदि द □ □ ए च □ 0ए ु □ 1

तो माध्य त्र उ त्र दच एवं प्रमाप विचलन □□त्र $\sqrt{m} = \sqrt{np}$ चूँकि दच तथा $\sqrt{npq}$ द्विपद प्रमेय के अचरांक है वहीं m तथा $\sqrt{m}$ प्वॉयसॉ बंटन के अचरांक हैं ।

इसी प्रकार द्विपद बंटन एवं प्रसामान्य बंटन में भी सुनिश्चित सम्बन्ध होता है द्विपद बंटन निम्न दो परिस्थितियों में द्विपद बंटन का सीमांत रूप होता है μ

(i) p तथा q दोनों ही छोटे न हों तथा एक दूसरे के सन्निकट हों यानि p □ q.

(ii) n परीक्षणों की संख्या अत्याधिक हो यानि n □ □ ।

ऐसी परिस्थितियों में द्विपद बंटन एक ऐसे प्रसामान्य बंटन के सन्निकट होता जाता है जिसका प्रमापीकृत विचर (Standardised Variable) $Z = \dfrac{x - np}{\sqrt{npq}}$ हो तथा जिसका माध्य शून्य ; □□= 0) एवं प्रसरण एक (□^{2}= 1) हो ।

18.13 द्विपद बंटन की उपयोगिता एवं महत्व

यद्यपि सांख्यिकीय विश्लेषण में सैद्धान्तिक आवृति बंटनों का विशेष महत्व है एक प्रकार से यह वितरण सांख्यिकी के आधार है इस सन्दर्भ में द्विपद प्रमेय का अपनी ही एक महत्वपूर्ण भूमिका है क्योंकि न सिर्फ अपनी विशिष्ट विशेषताओं के कारण से लोकप्रिय है अपितु यह

सांख्यिकीय का सबसे प्राचीन आवृति बंटन है जिसकी आगे चलकर अन्य बंटनों का विकास हुआ है । इस बंटन के उपयोग तथा महत्व निम्नवत है μ

भावी पूर्वानुमान μ द्विपद बंटन का उपयोग उस क्षेत्र में किया जाता है जहाँ घटनाओं की सफलता–असफलता के आधार पर द्वन्द्व भाजन (dichotomous classification) किया जा सकता है जैसे सिक्के की उछाल में चित्त पट का ऑकलन, कारखाने में निख्रमत वस्तुओं के दोषमुक्त या दोषपूर्ण होने के सन्दर्भ में ऑकलन, जनगणना में स्त्री–पुरुष का चयन आदि इस बंटन का प्रयोग दैव पर आधारित घटनाओं पर सफलता से किया जा सकता है जिससे भावी समंकों की प्रवृत्ति ज्ञात कर भावी पूर्वानुमान लगाये जा सके तथा विवेकपूर्ण निर्णय लिये जा सकें ।

अनुसंधान कार्य में सहायक μ जहाँ कही पर वास्तविक अनुसंधान दुःरह, असम्भव एवं अत्याधिक खर्चीला हो वहाँ द्विपद प्रमेय की सहायता से ऐसे प्रत्याशित समंकों का निर्धारण किया जा सकता है जोकि वास्तविक समंकों के स्थानापन्न हो तथा जिनका प्रयोग वैज्ञानिक एवं अनुसंधान कार्यों में किया जा सकता है ।

प्रतिचयन के परीक्षण में सहायक μ द्विपद बंटन से प्राप्त प्रत्याशित आवृतियों तथा अवलोकित आवृतियों के तुलना करने पर यह निर्धारित किया जा सकता है दोनों मूल्यों में अन्तर होने का क्या कारण है अर्थात् यह अन्तर प्रतिचयन के उच्चावचनों (Fluctuation) के कारण उत्पन्न हुआ है या किन्हीं अन्य कारणों से अतः यह प्रतिचयन के परीक्षण में सहायक होता है ।

परिकल्पनाओं का परीक्षण μ द्विपद प्रमेय की भूमिका परिकल्पनाओं के परीक्षण में भी महत्वपूर्ण है क्योंकि प्रत्याशित आवृतियों के ऑकलन में यह प्रमेय महत्वपूर्ण है । जिसकी तुलना वास्तविक आवृतियों से कर परिकल्पनाओं का परीक्षण एवं अन्वायोजन की उत्कृष्टता की जाँच की जाती है ।

उद्योग, विपणन तथा व्यवसाय में महत्व μ द्विपद प्रमेय का व्यवहारिक उपयोग तथा महत्व आख्रथक जगत में विशेषतौर पर उद्योग, विपणन एवं व्यवसाय में आज स्थापित हो चला है । आज समय वस्तु की गुणवत्ता परीक्षण तथा साख के निर्माण का है जिस दिशा में द्विपद प्रमेय के माध्यम से कम समय में कम खर्च पर बेहतर ऑकलन लगाया जा सकता है। गुणवत्ता परीक्षण (Quality Control) में तो द्विपद प्रमेय का उपयोग सबसे महत्वपूर्ण है। इसके अतिरिक्त वित्तीय प्रत्याशाओं के ऑकलन व्यापारिक परिस्थितियों के पूर्वानुमान आदि में भी द्विपद प्रमेय अत्याधिक उपयोगी है ।

18.14 सारांश

द्विपद प्रमेय आधारित बंटन को सन्दर्भ में वर्तमान ईकाई में हमने व्यापक अध्ययन किया एवं इसके विभिन्न सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक पहलुओं पर विचार करते हुए विभिन्न समस्याओं को इस प्रमेय के माध्यम से हल किया तथा महत्वपूर्ण निष्कर्षों एवं परिणामों का विश्लेषण किया ।

इसमें कोई भी संशय नहीं है कि द्विपद प्रमेय के माध्यम से भावी पूर्वानुमान लगाने तथा प्रत्याशित आवृतियों के ऑकलन में बहुत सहायता मिलती है परन्तु साथ ही साथ द्विपद प्रमेय

उन क्षेत्रों में अत्याधिक सफलतापूर्वक प्रयोग की जाती है जहाँ कि घटनाओं के सफलता तथा असफलता के आधार द्वन्द्व भाजन किया जाता है । इसकी इन्हीं विशेषताओं के कारण से औद्योगिक तथा व्यापारिक जगत में विशेषतौर पर गुणवत्ता नियन्त्रण में इसका प्रयोग किया जाता है ।

यद्यपि द्विपद प्रमेय की भी अपनी ही सीमायें तथा खामियाँ हैं परन्तु हमें यह नहीं भूलना चाहिये कि यह सांख्यिकीय के उन महत्वपूर्ण प्रमेयों में से है जिन्होंने सैद्धान्तिक आवृति बंटनों के निर्माण का सूत्रपात करते हुए आने वाले समय में विद्वानों को प्रेरित किया कि वह नवीन प्रमेयों एवं सिद्धान्तों का निर्माण कर सके ।

18.15 शब्दावली

प्रत्याशित मूल्य μ किसी यादृच्छिक चर का प्रत्याशित मूल्य या गणितिय प्रत्याशा उस चर का भारित माध्य कहलाता है इसे E से निरूपित करते हैं ।

अर्थात् $E(X) = \sum_{i-1}^{n} p_i X_i$

यादृच्छिक चर μ यादृच्छिक चर उस चर को कहते हैं जिसका मूल्य किसी यादृच्छिक परिणाम द्वारा निर्धारिति होता है ।

आर्वग या सैद्धान्तिक आवृति बंटन μ ऐसे बंटन जो कि अवलोकनों पर आधारित न होकर निश्चित पूर्व कल्पनाओं, मान्यताओं एवं प्रायिकता नियमों के आधार पर गणितीय रूप से अनुमानित किया जाता है ।

अवलोकित समंक μ ऐसे परिणाम जो कि एक साथ नहीं घटित हो सकते यानि किसी सिक्के की उछाल में चित या पट आना ।

स्वातन्×य संख्या (d.f.) μ स्वातन्×य संख्या वह आवृतियाँ होती हैं जिन्हें परीक्षणकर्त्ता अपनी इच्छानुसार निर्धारित कर सकता है । यदि तीन संख्याओं का योग 24 है तो दो संख्यायें हम अपनी स्वेच्छा से निर्धारित कर कसते हैं परन्तु तीसरी नहीं यहाँ पर (d.f.) = (n – 1) ।

प्राचल μ समष्टि के सभी ईकाईयों के अभिलक्ष्णों के सांख्यिकीय मान प्राचल (Paramiter) कहलाते हैं ।

प्रतिचयन μ समष्टि से प्रतिनिधि प्रतिपर्ण के चयन करने की रीतियाँ प्रतिचयन कहलाती हैं ।

परिकल्पना μ सांख्यिकीय परिकल्पना किसी समष्टि प्राचल के संख्यात्मक मान के सन्दर्भ में की गयी मान्यता होती है जो सत्य या असत्य हो सकती है इसको किसी प्रायिकता बंटन की सहायता से यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर परीक्षण करके स्वीकार या अस्वीकार किया जा सकता है ।

सार्थकता का स्तर (Level of Significance) μ सार्थकता का स्तर विश्वसनीयता की वह सीमा है जहाँ परीक्षणकर्त्ता यह विश्वास से कह सकता है कि परिकल्पना सत्य है या असत्य यह समान्यतया 1% या 5% के स्तर पर नापी जाती है ।

आसंजन उत्कृष्ट μ यदि प्रत्याशित तथा अवलोकित आवृतियों का अन्तर सार्थक नहीं होता है तो आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट माना जाता है ।

यदि यह अन्तर सार्थक होता है तो आसंजन या अन्वायोजन उत्कृष्ट नहीं माना जाता है ।

प्वॉयवॉ बंटन μ फ्रांसीसी गणितज्ञ डेनिस प्वॉयसॉ द्वारा दिया खण्डित बंटन है जो निम्न है μ $p(x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$

यहाँ पर च का मान बहुत कम (0 के सन्निकट) तथा q का मान अधिक यानि (1 के सन्निकट) होता है ।

प्रसामान्य बंटन μ यह एक अखण्डित तथा महत्वपूर्ण बंटन होता है जिसके प्राचल X□ तथा □□होते हैं तथा प्रमापित प्रसामान्य चर मूल्य (Z Score) निम्न होता है μ

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$

18.16 बहुविकल्पीय प्रश्न

1. द्विपद बंटन किस प्रकार का बंटन है ?
   (i) मिश्रित (ii) आश्रित (iii) खण्डित (iv) अखण्डित
2. प्रसामान्य बंटन किस प्रकार का बंटन है ?
   (i) सतत् (ii) असतत् (iii) मिश्रित (iv) आश्रित
3. द्विपद बंटन की रचना का श्रेय किस विद्वान को है ?
   (i) थॉमस बर्नोली (ii) जेम्स बर्नोली (iii) डेविस (iv) मारकोव
4. द्विपद बंटन का समान्तर माध्य होता है ?
   (i) p (ii) q (iii) np (iv) n
5. द्विपद प्रमेय का प्रसरण होता है ?
   (i) npq (ii) $\sqrt{npq}$ (iii) np (iv) $\sqrt{np}$
6. द्विपद बंटन का प्रथम परिघात होता है ?
   (i) np (ii) npq (iii) 1 (iv) 0
7. द्विपद प्रमेय का दूसरा परिघात होता है ?
   (i) $\sqrt{npq}$ s(ii) $n^2p^2q^2$ (iii) npq (iv) np
8. द्विपद बंटन में यानि $(p + q)^n$ में पद होते हैं ?
   (i) n (ii) n + 1 (iii) n – 1 (iv) np
9. द्विपद बंटन में (p + q) का प्रयोग होता है ।
   (i) 1 से ज्यादा (ii) 1 से कम (iii) 1 (iv) 0
10. द्विपद बंटन के सभी पदों के गुणांकों का योग कितना होता है ?
   (i) n^2 (ii) 2^n (iii) 2n (iv) n + 1

11. यदि किसी परीक्षणों में सफलताओं की संख्या द है तो स्वान्×य संख्या कितनी होगी ?

(i) $n-1$ (ii) n (iii) $n+1$ (iv) n^2

12. बर्नोली प्रमेय किसके द्वारा निरूपित होती है ।

(i) ${}^nC_r\, q^r\, p^{n-r}$ (ii) ${}^rC_n\, p^r q^{n-r}$ (iii) ${}^nC_r\, p^r q^{n-r}$ (iv) कोई नहीं

उत्तरमाला µ 1. (iii), 2. (i), 3. (ii), 4. (iii), 5. (i), 6. (iv), 7. (iii), 8. (ii), 9. (iii), 10. (iii), 11. (i), 12 (iii)

संख्यात्मक प्रश्न

1. छः पांसे 729 बार फेंके जाते हैं कम से कम तीन पांसों पर 5 या 6 आने की प्रायिकता कितनी बार होगी ?

2. यदि द्विपद बंटन का माध्य 4 तथा प्रसरण 3 है तो n, p ,q के मान ज्ञात कीजिए ।

3. द्विपद वितरण ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 4 तथा प्रसरण 6 है ।

4. निम्न द्विपद का पूर्ण विस्तार कीजिए µ $256(½+½)^4$

5. यह मानते हुए कि किसी शहर की आधी जनसंख्या शाकाहारी है एवं 100 अन्वेषकों में से प्रत्येक 10 व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर उनसे पूछना है कि वह शाकाहारी है या नहीं, कितने अन्वेषक यह रिपोर्ट करेंगे कि तीन या इससे कम लोग शाकाहारी हैं ? (संकेत यहाँ च = ½ = q½

6. एक निर्माण की प्रक्रिया में औसत रूप ls 5% वस्तुयें दोषपूर्ण बनती हैं तीन वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में 0, 1, 2, तथा 3 दोषपूर्ण वस्तुयें पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

7ण एक सामान्य पांसा पाँच बार फेंकने पर 5 का अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए µ (i) एक समय भी नहीं (ii) दो ckj (iii) पाँच बार ।

8. यदि प्रत्येक 30 दिनों में औसतन 12 दिन वर्षा होती है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि किसी सप्ताह के प्रथम चार दिन वर्षाहीन होंगे तथा शेष बरसाती होंगे ।

9. 7 सिक्कों की 128 उछालों में चित की संख्या का आवृति बंटन निम्न प्रकार से है प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात करते हुए आसंजन की उत्कृष्टता की जाँच कीजिए ।

10. द्विपद बंटन के लिये µ (i) माध्य (ii) प्रमाप विचलन (iii) विषमता परिघात गुणांक (iv) पृथुशीर्षत्व का माप

उत्तरमाला µ 1. 233, **2.** 16, ¼, 3/4, **3.** $(2/3 + 1/3)^{18}$ **4.** 16, 64, 96, 64, 16 **5.** 17.2, **6.** 0.8574, 0.1354, 0.0071, 0.0001, **7.** (i) 0.402 (ii) 0.161 (iii) 0.00013 **8.** 0.00829 **9.** 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 **10.** (i) 42 (ii) 3.55 (iii) –0.1127 (iv) 2.9794

18.17 निबन्धात्मक प्रश्न

1. सैद्धान्तिक आवृति बंटन का अर्थ स्पष्ट करते हुए द्विपद बंटन की विवेचना कीजिये तथा प्वॉयसॉ एवं प्रसामान्य बंटन से इसकी संक्षिप्त तुलना कीजिए ?

2. द्विपद बंटन की विशेषतायें बताते हुए इसकी उपयोगिता तथा महत्व पर प्रकाश डालिए ।
3. द्विपद बंटन के अचर मूल्यों को स्पष्ट करते हुए उनका महत्व समझाइये तथा परिघातों, विषमता गुणांक एवं पृथुषीर्षत्व का माप परिभाषित कीजिए ।
4. अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृतियों से क्या तात्पर्य है आसंजन की उत्कृष्टता जाँच करने पर द्विपद प्रमेय के महत्व की चर्चा कीजिए ।
5. द्विपद प्रमेय की मान्यतायें तथा सामान्य नियम लिखते हुए पास्कल त्रिभुज को स्पष्ट कीजिए ।

18.18 सन्दर्भ ग्रन्थ सूत्र

□ नागर, कैलाश नाथ (2008), सांख्यिकी के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाशन ।

□□सिंह, एस0 पी0, सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिडेट ।

□□Bose, D. (2003), An Introduction to Mathematical, Economics, Himalaya Publishing House.

□□शर्मा, गोकुल चन्द, चौधरी, एस0 एस0 साख्यिकीय विधियाँ, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी ।

इकाई–19 आँकड़ों का टी – टेस्ट एवं एफ – टेस्ट परीक्षण

19.1 प्रस्तावना (Introduction):–

आर्थिक गणितीय विधियां एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी की यह 19वीं इकाई है। जिसमें हम सार्थकता परीक्षण की जानकारी प्राप्त करेंगे कि किस प्रकार किसी समग्र से लिये गये प्रतिचयन की सार्थकता का परीक्षण किया जाता है।

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के बाद आप टी तथा एफ परीक्षण की पूर्ण प्रक्रिया को जान सकेंगे।

19.2 उद्देश्य (Objectives):–

इस इकाई के पढ़ने के बाद आप :–

- ✓ टी परीक्षण की प्रक्रिया को जान पायेंगे।
- ✓ टी परीक्षण द्वारा दो लघु प्रतिचयन या युग्मित पदों के अंतर परीक्षण को जान जायेंगे।
- ✓ प्रसरण की सार्थकता के एफ परीक्षण की पूर्ण प्रक्रिया को समझ सकेंगे।

19.3 छोटे प्रतिचयन में सार्थकता परीक्षण (Test of Significance in small sample) :–

जब प्रतिचयन का आकार छोटा होता है, तो प्रतिचयन बंटन प्रसामान्य नहीं होता तथा प्रतिचयन समंको से प्राप्त प्रतिचयन माध्य, प्रतिचयन प्रमाप विचलन आदि प्राचलन के समरूप या परस्पर सन्निकट नहीं होते। इसलिए छोटे प्रतिचयन के विश्लेषण के लिए सर्वथा नई विधियों का प्रयोग किया जाता है। छोटे प्रतिचयन विश्लेषण में प्राचल मूल्य का अनुमान नहीं लगाया जाता, बल्कि केवल यह ज्ञात करना होता है, कि प्रतिचयन के अवलोकित मूल्य और प्राचल मूल्य का अन्तर प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण उत्पन्न हुआ है या नहीं। इस हेतु एक दी गई परिकल्पना का परीक्षण किया जाता है। उदाहरणार्थ यदि 20 छात्राओं केन्द्र प्रतिचयन में औसत वजन 65 किलोग्राम है, तो इस प्रतिचयन के आधार पर हम यह आकलन करने का प्रयास करेगे कि 65 किलोग्राम औसत वजन की परिकल्पना से कहाँ तक मेल रखती है कि समग्र का वास्तविक वजन औसतन 65 किलोग्राम है।

छोटे प्रतिचयन में सार्थकता परीक्षण का कार्य कुछ विशिष्ठता लिये हुए होता है। इसलिए छोटे प्रतिचयन की परिकल्पना की जाँच अलग प्रकार से की जाती है। जिस हेतु निम्न वितरण परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है।

1. टी वितरण के आधार पर सार्थकता परीक्षण।
2. फिशर का जेड वितरण
3. एफ वितरण

19.4 स्टूडेण्ड टी परीक्षण (Student t-test):–

छोटे प्रतिचयनों में सार्थकता परीक्षण के क्षेत्र में सर्वाधिक योगदान **सर विलियम सीली गोस्सेट** (Sir William Sealy Gosset) का है। सर विलियम सीली गोस्सेट डरबिन आयरलैण्ड की एक मद्य निर्माण उद्योग में सांख्यिकी सलाहकार के रूप में कार्य करते थे। जिन्होंने स्टुडेण्ड उपनाम से 1908 में छोटे प्रतिचयन पर एक शोध पत्र छापा। इन्हीं के उपनाम पर छोटे प्रतिचयन का यह सार्थकता परीक्षण आगे चलकर टी–परीक्षण या स्टूडेण्ड टी बंटन के नाम से प्रसिद्ध हुआ।

➢ **टी–बंटन की गणना**– टी–बंटन की परिकलन मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोगकिया जाता है–

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S} \times \sqrt{n}$$

जहाँ

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\left(X - \overline{X}\right)^2}{n_1 - 1}}$$

OR

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n - 1}}$$

$\bar{X}$= प्रतिचयन का माध्य

μ = समग्र का माध्य

n= प्रतिचयन इकाइयों की संख्या

S= प्रतिचयन का प्रमाप विचलन

स्टुडेण्ड टी बंटन की मान्यताएं अथवा विशेषताएँ

1. मूल समग्र जिससे छोटा प्रतिचयन लिया गया है। प्रसामान्य है, प्रसामान्य बंटन की तरह टी बंटन का वक्र भी एक शिखर वाला घण्टाकार होता है।
2. प्रतिचयन दैव प्रतिचयन विधि से लिया गया है।
3. प्रसामान्य बंटन की तरह टी–बंटन का माध्य शून्य होता है।

4. टी बंटन की सबसे महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि टी–वक्र का आकार प्रतिचयन इकाईयों पर निर्भर करता है तथा अलग–अलग स्वातन्त्र्य कोटियों (df) अर्थात् n-1 के लिए टी वक्र का स्वरूप अलग–अलग होता है।

स्टुडेण्ड टी बंटन का प्रयोग छोटे प्रतिचयन से प्राप्त विभिन्न परिणामों की सार्थकता परीक्षण के लिए किया जा रहा है। मुख्य रूप से इसके गणना तथा प्रयोग की विधि निम्न प्रकार है।

1. प्रतिचयन माध्य का सार्थकता परीक्षण
2. दो प्रतिचयन माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण
3. आश्रित प्रतिचयन या युग्मित प्रतिचयन में अन्तर परीक्षण
4. टी–परीक्षण द्वारा सहसंबंध गुणांक की सार्थकता का परीक्षण

19.4.1 प्रतिचयन माध्य का सार्थकता परीक्षण **(Test of Significance of Sample Mean)**:–

जब दैव विधि से चुने गये प्रतिचयन के समान्तर माध्य और समग्र के समान्तर माध्य में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करना हो, तो निम्न प्रक्रिया को अपनाया जाता है जिससे टी का परिकलित मूल्य ज्ञात करके, उसकी तुलना टी के सारणी मूल्य से की जाती है और प्रतिचयन के माध्य तथा समग्र के माध्य के समान होने की शून्य परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार किया जाता है। संक्षेप में टी परीक्षण की प्रक्रिया इस प्रकार है–

⇒ **शून्य परिकल्पना**– सामान्यतया शून्य परिकल्पना की जाती है कि प्रतिचयन माध्य और समग्र के माध्य में कोई अंतर नहीं है अर्थात् प्रतिचयन का माध्य समग्र के माध्य के बराबर है और वैकल्पिक परिकल्पना कि प्रतिचयन के माध्य और समग्र के माध्य में अंतर है अर्थात् प्रतिचयन का माध्य समग्र के माध्य के बराबर नहीं है।

शून्य परिकल्पना–प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान है।

H_0 :– $\overline{X} = \mu$ OR $\overline{X} - \mu = 0$

वैकल्पिक परिकल्पना–प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान नहीं है।

H_A :– $\overline{X} \neq \mu$ OR $\overline{X} - \mu \neq 0$

⇒ **प्रतिचयन के प्रमाप विचलन का आंकलन**– प्रतिचयन के प्रमाप विचलन के आधार पर S का आंकलन निम्न सूत्र से किया जाता है।

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\left(X - \overline{X}\right)^2}{n_1 - 1}}$$

OR

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n - 1}}$$

⇒ **टी परीक्षण का परिकलित मूल्य का आंकलन**–स्टुडेन्ट टी परीक्षण का निम्न सूत्र द्वारा परिकलित मूल्य ज्ञात किया जाता है।

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S} \times \sqrt{n}$$

यदि प्रतिचयन का प्रमाप विचलन दिया हो तो बेस्सेल संशोधन को समायोजित करने के लिये सूत्र में पर n के स्थान पर पर n-1 का प्रयोग किया जाता है। संशोधित सूत्र इस प्रकार होगा।

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S} \times \sqrt{n} - 1$$

⇒ **टी का सारणी मूल्य** – टी का परिकलित मूल्य की तुलना करने के लिये टी का सारणी मूल्य ज्ञात किया जाता है। छोटे प्रतिचयन में स्वातन्त्र्य कोटीयों (df) की संख्या (n-1) के आधार पर 99% तथा 95% अर्थात् 0.01% तथा 0.05% सार्थकता स्तर पर टी का सारणी मूल्य ज्ञात किया जाता है।

⇒ **निष्कर्ष का निर्वचन**– टी परीक्षण के परिकलित मूल्य तथा सारणीय मूल्य के आधार पर उत्तर का निर्वचन किया जाता है।

1. यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से कम है तो हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हुए प्रतिचयन के माध्य तथा समग्र के माध्य के अंतर को अर्थहीन मानते हैं। अर्थात् प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान है।

शून्य परिकल्पना H_0 :– $\overline{X} = \mu$ OR $\overline{X} - \mu = 0$

2. यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से अधिक है तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हुए प्रतिचयन माध्य तथा समग्र के माध्य के अंतर को अर्थपूर्ण मानते हैं। अर्थात् प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान नहीं है।

H_A :– $\overline{X} \neq \mu$ OR $\overline{X} - \mu \neq 0$

उदाहरण 1:–एक समग्र से लिये गये दैव प्रतिचयन में 10 छात्राों का वजन क्रमशः 53, 54, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 60, 61 किलोग्राम है। इस परिकल्पना की जांच कीजिये कि समग्र का माध्य वजन 55 किलोग्राम है। 5% सार्थकता स्तर पर 9 स्वातन्त्र्य कोटियो (*df*) के लिये टी का सारणी मूल्य 2.262 है।

हल–

$\Rightarrow$ **शून्य परिकल्पना**– प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान है

H_0 :– $\overline{X} = \mu$ OR $\overline{X} - \mu = 0$

वैकल्पिक परिकल्पना–प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान नहीं है।

$$H_A :- \ \overline{X} \neq \mu \quad \text{OR} \ \overline{X} - \mu \neq 0$$

X	***dx*** **=X–$\overline{X}$**	***dx*^{2}**
53	-4	16
54	-3	9
54	-3	9
55	-2	4
56	-1	1
58	1	1
59	2	4
60	3	9
60	3	9
61	4	16
∑X=570	**∑d*x*=0**	**∑d*x*^{2}=78**

$$\overline{X_1} = \frac{\sum X}{N} = \frac{570}{10} = 57$$

$\Rightarrow$ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन–

$$S = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{78}{10-1}} = \sqrt{\frac{78}{9}}$$

$$S = \sqrt{8.6667} = 2.94$$

$\Rightarrow$ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S} \times \sqrt{n} = \frac{57 - 55}{2.94} \times \sqrt{10}$$

$$= \frac{2}{2.94} \times 3.162 = \frac{6.324}{2.94} = 2.15$$

$\Rightarrow$ निष्कर्ष का निर्वचन– 5% सार्थकता स्तर पर 9 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) के लिये टी का सारणी मूल्य 2.262 है। जबकि टी का परिकलित मूल्य 2.15 है। इस प्रकार हम देखते हैं कि परिकलित मूल्य सारणी मूल्य से कम है। अर्थात् $(t_{cal} < t_{tab})$ अतः शून्य परिकल्पना सत्य है। अर्थात् प्रतिचयन माध्य तथा समग्र के माध्य का अंतर अर्थहीन है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि समग्र का माध्य वजन 55 किलोग्राम है।

समग्र माध्य की विश्वास्यता सीमाएँ–

एक प्रसामान्य समग्र से चुने गये दैव प्रतिचयन के माध्य के आधार पर समग्र के माध्य की 95 प्रतिशत तथा 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएं ज्ञात की जा सकती है इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$t_{.05}$ = टी सारणी का .05% का मूल्य n–1 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) पर ।

$t_{.01}$= टी सारणी का .01% का मूल्य n–1 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) पर ।

उदाहरण 2:– 10 शहरों के एक दैव प्रतिचयन में माध्य जनसंख्या 65000 थी। तथा प्रतिचयन शहरी का विचलन 1500 था। माध्य के लिये 95% तथा 99% पर विश्वास्यता सीमाएं ज्ञात कीजिये।

हल–

$n = 10,\ \overline{X} = 65000,\ S = 1500$

क्योंकि S की गणना करते हुए n–1 का प्रयोग नहीं किया गया। अतः संशोधित सूत्र का प्रयोग करेंगे।

95% पर विश्वास्यता सीमाएँ–

$$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{.05}$$

$$= 65000 \pm \frac{1500}{\sqrt{10-1}} \times 2.262$$

$$= 65000 \pm \frac{1500}{\sqrt{9}} \times 2.262$$

$$= 65000 \pm \frac{1500 \times 2.262}{3}$$

$$= 65000 \pm 500 \times 2.262$$

$$= 65000 \pm 1131$$

$$= 63869 \text{ to } 66131$$

99**%** पर विश्वास्यता सीमाएँ–

$$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{.01}$$

$$= 65000 \pm \frac{1500}{\sqrt{10-1}} \times 3.25$$

$$= 65000 \pm \frac{1500}{\sqrt{9}} \times 3.25$$

$$= 65000 \pm \frac{1500 \times 3.25}{3}$$

$$= 65000 \pm 500 \times 3.25$$

$$= 65000 \pm 1625 \quad = \quad 63375 \text{ to } 66625$$

19.4.2 दो छोटे प्रतिचयनों के माध्यों में अंतर सार्थकता परीक्षण (IntrSignificance Test of Difference Between teo small Sample Mean):–

इसका उद्देश्य दो छोटे प्रतिचयनों के माध्य के अंतर की सार्थकता की जांच करना है और यह पता करना है कि दोनों प्रतिचयनों के माध्यो के बीच अंतर सार्थक व अर्थपूर्ण है या अर्थहीन है। अर्थात् दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये है या नहीं। इस हेतु टी की परिकलन मूल्य निम्न प्रकार प्राप्त किया जाता है।

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{S} \frac{\sqrt{n_1 \times n_2}}{n_1 + n_2}$$

जहाँ

$$S = \sqrt{\frac{\sum dx_1^2 + \sum dx_1^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

टी के परिकलन मूल्य की गणना करने के बाद स्वातन्त्र्य कोटी (df) पर टी का सारणी मूल्य ज्ञात कर शून्य परिकल्पना की जांच करते हैं।

⇒ <u>**शून्य परिकल्पना**</u> यह ली जाती है कि दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये हैं। अर्थात्

$$H_0 :- \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

वैकल्पिक परिकल्पना यह ली जाती है कि दोनों प्रतिचयन एक समग्र से नहीं लिये गये हैं। अर्थात्

$$H_A :- \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

⇒ <u>निष्कर्ष का निर्वचन</u>– टी परीक्षण के परिकलित मूल्य तथा सारणीय मूल्य के आधार पर उत्तर का निर्वचन किया जाता है।

1. यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से कम है तो हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हैं कि दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये हैं। अर्थात्
$$H_0 :- \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$
2. यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से अधिक है तो हम शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं कि दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से नहीं लिये गये हैं। अर्थात्
$$H_A :- \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

उदाहरण 3:– दो दैव प्रतिचयन जिनकी पद संख्या क्रमशः 9 तथा 8 है। इन दो दैव प्रतिचयनों का समान्तर माध्य क्रमशः 196.42 तथा 198.82 है तथा माध्य से लिये गये विचलनों

के वर्गों का जोड़ क्रमशः 26.94 तथा 18.73 है। क्या दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये हैं।

हल–

⇒ <u>शून्य परिकल्पना</u>– माना दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये हैं। अर्थात्

$$H_0 :- \ \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

$$H_A :- \ \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

⇒ <u>प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –</u>

$$S = \sqrt{\frac{\sum dx_1^2 + \sum dx_1^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{26.94 + 18.73}{9 + 8 - 2}} = \sqrt{\frac{45.67}{15}}$$

$$= \sqrt{3.0447} = 1.745$$

⇒ <u>टी–बंटन की गणना</u>–

$$t = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S} \frac{\sqrt{n_1 \times n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{196.42 - 198.82}{1.745} \sqrt{\frac{9 \times 8}{9 + 8}}$$

$$= \frac{2.40}{1.745} \sqrt{\frac{72}{17}} = \frac{2.40}{1.745} \sqrt{4.2353}$$

$$= \frac{2.40 \times 2.058}{1.745} = \frac{4.9392}{1.745} = 2.8305$$

⇒ <u>निर्वचन</u>– 15 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) के लिये 5% सार्थकता स्तर पर टी का सारणी मूल्य 2.31 है। जबकि टी का परिकलित मूल्य 2.83 है जोकि टी के सारणी मूल्य से

अधिक है। अतः शून्य परिकल्पना असत्य है और दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से नहीं लिये गये हैं। अर्थात्

$$\bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

उदाहरण 4:– छात्रों के दो समूहों की एक परीक्षा में प्राप्तांक इस प्रकार है। दोनों समूहों के छात्रों द्वारा प्राप्त अंको के समान्तर माध्य में अंतर की सार्थकता का परीक्षण करो।

प्रथम समूह के प्राप्तांक – 18, 20, 36, 50, 49, 36, 34, 49, 41

दूसरा समूह के प्राप्तांक – 29, 28, 26, 35, 30, 44, 46

हल–

$\Rightarrow$ <u>शून्य परिकल्पना</u> माना दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिये गये हैं। अर्थात्

$$H_o :- \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

प्रथम समूह के प्राप्तांक			**दूसरा समूह** के प्राप्तांक		
X_1	dx_1	dx_1^2	X_2	dx_2	dx_2^2
18	-19	361	29	-5	25
20	-17	289	28	-6	36
36	-1	1	26	-8	64
50	13	169	35	1	1
49	12	144	30	-4	16
36	-1	1	44	10	100
34	-3	9	46	12	144
49	12	144	$\Sigma X_2 = 238$	$\Sigma dx_2 = 0$	$\Sigma dx_2^2 = 386$
41	4	16	$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1}$ $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2}$		
$\Sigma X_1 = 333$	$\Sigma dx_1 = 0$	$\Sigma dx_1^2 = 1134$			

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1} = \frac{333}{9} = 37$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2} = \frac{238}{7} = 34$$

⇒ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –

$$S = \sqrt{\frac{\sum dx_1^2 \ + \sum dx_2^2}{n_1 + \ n_2 - 2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1134 + 986}{9 + 7 - 2}} = \sqrt{\frac{1520}{14}}$$

$$S = \sqrt{108.5714} = 10.4197$$

⇒ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \ \overline{X}_2\,|}{S}\frac{\sqrt{n_1 \ \times n_2}}{n_1 \ + \ n_2}$$

$$= \frac{37 - 34}{10.4197}\sqrt{\frac{9 \times 7}{9 + 7}}$$

$$= \frac{3}{10.4197}\sqrt{\frac{63}{16}} = \frac{3}{10.4197}\sqrt{3.9375}$$

$$= \frac{3}{10.4197} \times 1.9843$$

$$= \frac{5.9529}{10.4197} = 0.5713$$

⇒ निर्वचन– 5 % सार्थकता स्तर पर 14 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर टी का सारणी मूल्य 2.145 है। जोकि टी के परिकलित मूल्य 0.571 से अधिक है। इसलिये शून्य परिकल्पना सत्य है दोनों समूहों के समान्तर माध्य में अंतर अर्थहीन है। अर्थात् $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ है।

19.4.3 युग्मित प्रतियचन में अंतर सार्थकता परीक्षण (Test of Diffefence Significance in Paired Samples):–

इस परीक्षण का प्रयोग तब किया जाता है जब समान इकाईयों पर किसी घटना का प्रभाव देखना हो। उदाहरण के लिये किसी खाद का फसल पर प्रभाव किसी दवा का रोगियों पर प्रभाव, किसी कोचिंग का छात्रों के परीक्षा परिणाम पर प्रभाव आदि को देखने के लिये अंतर परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। इस परीक्षण की आवश्यक शर्त है कि प्रतिचयन की समान इकाईयों का अलग– अलग परिस्थिति में विश्लेषण किया जाता है।

अंतर परीक्षण की प्रक्रिया:–

1. सर्वप्रथम बाद की स्थिति में से पहले की स्थिति को घटाकर वृद्धि या कमी को ज्ञात किया जाता है। वृद्धि या कमी अर्थात् समकों का अंतर (D) ज्ञात किया जाता है।
2. प्राप्त समंको के अंतर (D) का समान्तर माध्य निकाला जाता है अर्थात् $\overline{D} = \frac{\sum D}{n}$
3. फिर निम्न सूत्र द्वारा अंतरों का प्रमाण विचलन (S) ज्ञात किया जाता है।

$$S = \sqrt{\frac{\left(D - \overline{D}\right)^2}{n_1 - 1}}$$

4. t- का परिकलन मूल्य निम्न सूत्र से निकाला जाता है–

$$t = \frac{\overline{D}-0}{S} \times \sqrt{n} \quad \text{OR} \quad t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$$

नोट:– क्योंकि वास्तविक अंतर को शून्य मानते हैं इसलिये सूत्र में D–0 का प्रयोग करते हैं।

5. **स्वातन्त्र्य कोटियाँ (*df*)** – अंतर परीक्षण में स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*)की संख्या सदैव n–1 होती है तथा 5% सार्थकता स्तर पर टी का सारणी मूल्य देखकर उत्तर का निर्वचन किया जाता है।
6. **निर्वचन**– टी परीक्षण के परिकलित मूल्य तथा सारणीय मूल्य के आधार पर उत्तर का निर्वचन किया जाता है।
   - यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से कम है, तो हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हैं। अर्थात् पहले तथा बाद की स्थिती एक समान है।
   - यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से अधिक है, तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं। अर्थात् पहले तथा बाद की स्थिती एक समान नहीं है।

उदाहरण 5:– एक विशेष दवा 9 रोगियों को देने से उनके रक्त दाब पर निम्न अंतर पाया गया।

अंतर (D)   7, 3, -1, 4, 3, -3, -4, 6, -5

क्या यह आंकडे यह प्रदर्शित करते हैं कि दवा देने से सामान्यतः रक्त दाब से वृद्धि होती है।

हल–

⇒ शून्य परिकल्पनाः– शून्य परिकल्पना यह है कि दवा से पहले तथा बाद का रक्त दाब एक समान है। अर्थात् दवा से रक्त दाब में कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

D	$D-\overline{D}$	$(D-\overline{D})^2$	D^2
7	5.89	34.6921	49
3	1.89	3.5721	9
-1	-2.89	4.4521	1
4	2.89	8.3521	16
3	1.89	3.5721	9
-3	-4.11	16.8921	9
-4	-5.11	26.1121	16
6	4.89	23.9121	36
-5	-6.11	37.3321	25
$\sum D=13$	$\sum D-\overline{D}=0$	$\sum(D-\overline{D})^2=$ 158.8889	$\sum D^2=170$

$$\overline{D}=\frac{\sum D}{n}=\frac{10}{9}=1.11$$

⇒ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –

$$S=\sqrt{\frac{(D-\overline{D})^2}{n_1-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{158.8889}{9-1}}=\sqrt{\frac{158.8889}{8}}$$

$$=\sqrt{19.8611}=4.4565$$

⇒ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$$

$$= \frac{1.11\sqrt{10}}{S} = \frac{1.11 \times 3.1623}{4.4565}$$

$$= \frac{3.5101}{4.4565} = 0.7876$$

⇒ निर्वचन– टी का परिकलित मूल्य 0.78 है, जोकि 5% सार्थकता स्तर पर 8 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) के लिये, टी के सारणी मूल्य से कम है। अतः शून्य परिकल्पना असत्य है। अर्थात् दवा से रोगियों के रक्त दाब में वृद्धि होती है।

⇒ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –

$$S = \sqrt{\frac{\sum D^2 - \left(\overline{D}\right)^2 \times n}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{170 - (1.11)^2 \times 9}{9-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{170 - 11.0889}{8}} = \sqrt{\frac{158.9111}{8}}$$

$$= \sqrt{19.8638} = 4.4568$$

⇒ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$$

$$= \frac{1.11\sqrt{10}}{S} = \frac{1.11 \times 3.1623}{4.4568}$$

$$= \frac{3.5101}{4.4568} = 0.7875$$

⇒ **निर्वचन**– टी का परिकलित मूल्य 0.78 है जोकि 5% सार्थकता स्तर पर 8 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) के लिये, टी के सारणी मूल्य से कम है अतः शून्य परिकल्पना असत्य है। अर्थात् दवा से रोगियों के रक्त दाब में वृद्धि होती है।

उदाहरण 6:– एक विशेष कोचिंग के पूर्व तथा बाद के 10 छात्राओं के प्रांप्ताक इस प्रकार हैं। इस परिकल्पना की जांच कीजिये कि कोचिंग से प्राप्तांको में अर्थपूर्ण वृद्धि हुई।

छात्रों का क्रम	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पूर्व के प्राप्तांक	109	112	98	114	102	97	88	101	89	91
बाद के प्राप्तांक	115	120	99	117	105	98	91	99	93	89

हल–

⇒ **शून्य परिकल्पनाः**– कोचिंग से छात्रों के प्राप्तांक में कोई वृद्धि नहीं हुई। कोचिंग से पहले तथा बाद के प्राप्तांक एक समान हैं।

छात्रों का क्रम	पूर्व के प्राप्तांक	बाद के प्राप्तांक	अंतर (D)	$D-\overline{D}$	$(D-\overline{D})^2$	D^2
1	109	115	6	3.5	12.25	36
2	112	120	8	5.5	30.25	64
3	98	99	1	-1.5	2.25	1
4	114	117	3	0.5	0.25	9
5	102	105	3	0.5	0.25	9
6	97	98	1	-1.5	2.25	1
7	88	91	3	0.5	0.25	9
8	101	99	-2	-4.5	20.25	4
9	89	93	4	1.5	2.25	16
10	91	89	-2	-4.5	20.25	4
			$\sum D=25$	$\sum D-\overline{D}=0$	$\sum(D-\overline{D})^2=90.50$	$\sum D^2=153$

$$\overline{D}=\frac{\sum D}{n}=\frac{25}{10}=2.5$$

⇒ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –

$$S=\sqrt{\frac{(D-\overline{D})^2}{n_1-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{90.50}{10-1}} = \sqrt{\frac{90.50}{9}}$$

$$= \sqrt{10.06} = 3.17$$

$\Rightarrow$ प्रतिचयन का प्रमाप विचलन –

$$S = \sqrt{\frac{\sum D^2 - \left(\overline{D}\right)^2 \times n}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{153 - (2.5)^2 \times 10}{10-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{153 - 62.5}{9}} = \sqrt{\frac{90.5}{9}}$$

$$= \sqrt{10.0555} = 3.17$$

$\Rightarrow$ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{\overline{D}\sqrt{n}}{S}$$

$$= \frac{2.5\sqrt{10}}{3.17} = \frac{2.5 \times 3.1623}{3.17}$$

$$= \frac{7.91}{3.17} = 2.494$$

$\Rightarrow$ निर्वचनः–टी का परिकलित मूल्य 2.494 है तथा 5% सार्थकता स्तर पर 9 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) के टी के सारणी मूल्य 2-262 है जोकि टी के परिकलित मूल्य से कम है। अतः शून्य परिकल्पना (H_0) असत्य है अर्थात् कोचिंग से छात्रों के प्राप्तांक में कोई वृद्धि नहीं हुई।

19.4.4 सह सम्बन्ध गुणांक का सार्थकता परीक्षण (Test of Significance of Co-efficent of Correlation):–

जब सह संबंध गुणांक के लिये टी परीक्षण की जांच करनी हो कि समग्र में गुण सम्बन्ध शून्य है अर्थात् समग्र के चर सम्बन्धित है अथवा नहीं। सह सम्बन्ध गुणांक में टी परीक्षण का सूत्र निम्न है

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

परन्तु स्वातन्त्र्य कोटियों (df)की संख्या n–2 होती है।

⇒ <u>शून्य परिकल्पना</u>– सर्वप्रथम शून्य परिकल्पना मानी जाती है कि समग्र के चरों में सहसंबंध शून्य है। अर्थात् सह संबंध गुणांक सार्थक नहीं है। या अर्थहीन है तत्पश्चात् टी के परिकलित मूल्य की 1% या 5% सार्थकता स्तर पर n–2 स्वातन्त्र्य कोटियों (df) पर टी के सारणी मूल्य से तुलना करके शून्य परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करते हैं।

उदाहरण 7:– 18 प्रतिचयन को सहसंबंध गुणांक 0.6 है। क्या यह 1% सार्थकता स्तर पर अर्थपूर्ण है।

$(t_{0.01} = 2.92)$

हल–

⇒ <u>शून्य परिकल्पना</u>– सह संबंध अर्थहीन है या सार्थक नहीं है।

⇒ <u>टी–बंटन की गणना</u>–

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

$$= \frac{0.6}{\sqrt{1-0.6^2}}\sqrt{18-2}$$

$$= \frac{0.6}{\sqrt{1-.36}}\sqrt{16}$$

$$= \frac{0.6}{\sqrt{0.64}} \times 4 = \frac{0.6\times 4}{0.8}$$

$$= \frac{2.4}{0.8} = 3$$

⇒ निर्वचन–टी का परिकलित मूल्य 3 है तथा 1% सार्थकता स्तर पर 16 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर टी का सारणी मूल्य 2.92 से अधिक है। अतः शून्य परिकल्पना (H_0) असत्य है अर्थात् सह संबंध सार्थक या अर्थपूर्ण है।

उदाहरण 8:– एक प्रसामान्य समग्र से लिये गये 27 दैव प्रतिचयन का सहसंबंध गुणांक 0.4 है। क्या समग्र के चरों में सहसंबंध सार्थक हैं। ((df-24, $t_{0.01} = 2.79$)

हल–

⇒ शून्य परिकल्पना–समग्र के चरों में सह संबंध सार्थक नहीं है।

⇒ टी–बंटन की गणना–

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

$$= \frac{0.4}{\sqrt{1-0.4^2}}\sqrt{27-2}$$

$$= \frac{0.4}{\sqrt{1-.16}}\sqrt{25}$$

$$= \frac{0.4}{\sqrt{0.84}} \times 5 = \frac{0.4 \times 5}{0.92}$$

$$= \frac{2.0}{0.92} = 2.17$$

⇒ निर्वचन–टी का परिकलित मूल्य 2.17 है तथा 1% सार्थकता स्तर पर 24 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर टी का सारणी मूल्य 2.79 है। जो परिकलित मूल्य से अधिक है। अतः शून्य परिकल्पना सत्य है। अर्थात् समग्र के चरों में सहसंबंध सार्थक या अर्थपूर्ण नहीं है।

19.5 एफ परीक्षण (F-Test) :–

समग्र के प्रसरण या विचरण माप की जांच करने के लिए एफ परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। एफ परीक्षण को **प्रोफेसर रॉनेल्ड फिशर** (Prof. Ronald Fisher) तथा **जार्ज स्नेडैकॉर** (George Sendecor) द्वारा प्रतिपादित तथा विकसित किया गया। स्नेडैकॉर ने प्रो0 रॉनेल्ड फिशर के सम्मान में ही इस प्रसरण अनुपात परीक्षण का नाम एफ परीक्षण (F Test) रखा था।

जब यह परीक्षण करना हो कि दोनों प्रतिचयन एक ही प्रसरण वाले प्रसामान्य समग्र में से लिए गये हैं, तो एफ परीक्षण का प्रयोग किया जाता है।

एफ परीक्षण की मान्यताएँ– एफ परीक्षण का प्रयोग करते समय निम्न मान्यताओं मान ली जाती है।

1. समग्र का बंटन प्रसामान्य है।
2. समग्र तथा प्रतिचयन की प्रत्येक इकाई स्वतंत्र होनी चाहिए।
3. प्रसरण का अनुपात एक से अधिक होना चाहिए।
4. प्रसरण के विभिन्न घटकों का योग कुल प्रसरण के बराबर होना चाहिए। अर्थात्

कुल प्रसरण = प्रतिचयन के बीच का प्रसरण + प्रतिचयन के अन्दर का प्रसरण

एफ परीक्षण की गणना की प्रक्रिया–

1. **शून्य परिकल्पना–** शून्य परिकल्पना यह मानी जाती है कि दोनों समग्र का प्रसरण समान है।

शून्य परिकल्पना– दोनों समग्र का प्रसरण समान है।

$$H_0 :- \ \sigma^1 = \sigma^2$$

वैकल्पिक परिकल्पना– दोनों समग्र का प्रसरण समान नहीं है।

$$H_0 :- \quad \sigma^1 \neq \sigma^2$$

2. **प्रसरण की गणना–** दोनों प्रतिचयन के प्रसरण की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है–

$$S_1^{\,2} = \frac{\Sigma(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1};\ S_2^{\,2} = \frac{\Sigma(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$$

3. **प्रसरण अनुपात की गणना–** प्रसरण अनुपात की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है–

प्रसरण अनुपात (एफ का मान)= $\dfrac{\text{वृहत्तर प्रसरण आकलन}}{\text{लघु प्रसरण आकलन}}$

यदि $S_1^2 > S_2^2$ हो, तो एफ का मान ज्ञात करने के लिए S_1^2 / S_2^2 होगा।

यदि $S_2^2 > S_1^2$ हो तो एक का मान ज्ञात करने के लिए S_2^2 / S_1^2 होगा।

4. **स्वातन्त्र कोटियों की संख्या ज्ञात करना –** एफ सारणी में स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) को ज्ञात करने के लिए ν1 तथा ν2 को ज्ञात करना होता है। एफ सारणी में बडे प्रसरण

अनुपात के $n-1$ को ν_1 मान कर लघु प्रसरण अनुपात के $n-1$ को ν_2 मान कर एफ सारणी का मूल्य ज्ञात किया जाता है। सामान्यतया एफ सारणी में 5% सार्थकता स्तर पर ν_1 तथा ν_2 के लिए एफ सारणी का मूल्य देखा जाता है।

ν_2 \ ν_1	→ वृहत्तर प्रसरण के लिए ***df***					
↓ लघुत्तर प्रसरण के लिए ***df***						

5. **निष्कर्ष या निर्वचन–** अन्त में उत्तर के निर्वचन के लिए एफ के परिकलित मूल्य तथा सारणी मूल्य की तुलना की जाती है।यदि एफ का परिकलित मूल्य एफ के सारणी मूल्य से अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना असत्य होती है। अर्थात् दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से नहीं लिए गये है या प्रसरण अनुपात सार्थक है।

$F > F_{.05}$:– शून्य परिकल्पना असत्य होगी, तो प्रसरण अनुपात सार्थक है अर्थात् दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से नहीं लिए गये है।

$F < F_{.05}$:– शून्य परिकल्पना सत्य होगी, तो प्रसरण अनुपात सार्थक नहीं है अर्थात् दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से लिए गये है।

एफ परीक्षण के गुण–

1. एफ परीक्षण $\chi 2$ तथा t परीक्षण से भिन्न है क्योंकि इसमें दो स्वातन्त्र्य कोटियां होती है जिसके आधार पर एफ सारणी का मूल ज्ञात किया जाता है।
2. एफ परीक्षण में प्रसरण अनुपात सदैव धनात्मक होता है। क्योंकि सदैव वृहत्त प्रसरण आकलन को गणना के दौरान सूत्र में ऊपर रखा जाता है।

उदाहरण 9:– दो मजदूरों द्वारा उत्पादित वस्तुओं की इकाइयों का विवरण इस प्रकार है। कौन सा मजदूर अधिक स्थिर है। एक परीक्षण का प्रयोग करो।

A मजदूर– 40   30   38   41   38   35

B मजदूर– 39   38   41   33   32   39   40   34

हल–

शून्य परिकल्पना– दोनों मजदूरों की उत्पादकता स्थिर है। अर्थात् दोनों का उत्पादन प्रसरण एक समान है।

$$H_0 :-\ \sigma^1 = \sigma^2$$

वैकल्पिक परिकल्पना–दोनों का उत्पादन प्रसरण एक समान नहीं है।

$$H_0 :-\ \sigma^1 \neq \sigma^2$$

A मजदूर			**B मजदूर**		
$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{dx_1}$	$\mathbf{dx_1^2}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{dx_2}$	$\mathbf{dx_2^2}$
40	3	9	39	2	4
30	-7	49	38	1	1
38	1	1	41	4	16
41	4	16	33	-4	16
38	1	1	32	-5	25
35	-2	4	39	2	4
$\Sigma X_1 = 222$	$\Sigma dx_1 = 0$	$\Sigma dx_1^2 = 80$	40	3	9
$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1} \bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2}$			34	-3	9
			$\Sigma X_2 = 296$	$\Sigma dx_2 = 0$	$\Sigma dx_2^2 = 84$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1} = \frac{222}{6} = 37$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2} = \frac{296}{8} \ 37$$

$$S_1^2 = \frac{\Sigma(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}$$

$$= \frac{80}{6-1} = \frac{80}{5} = 16$$

$$S_2^2 = \frac{\Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

$$S_2^2 = \frac{\Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

$$= \frac{84}{8-1} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\text{प्रसरण अनुपात (एफ का मान)} = \frac{\text{वृहत्तर प्रसरण आकलन}}{\text{लघु प्रसरण आकलन}}$$

यदि $S_1^2 > S_2^2$ हो, तो एफ का मान ज्ञात करने के लिए S_1^2 / S_2^2 होगा।

प्रसरण अनुपात (एफ का मान) = 16/12 = 1.33

वृहत्तर प्रसरण आकलन - स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) $\nu 1 = n-1 = 6-1 = 5$

लघु प्रसरण आकलन – स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) $\nu 2 = n-1 = 8-1 = 7$

$F_{.05}$ का सारणी मूल्य $(\nu 1, \nu 2) = 3.97$

निर्वचन– एफ का परिकलित मूल्य 1.33, 5% सार्थकता स्तर पर एफ के सारणी मूल्य 3.97 से कम है। अतः शून्य परिकल्पना सत्य है कि दोनों की उत्पादकता स्थिर है। अतः इस बात का कोई प्रमाण नहीं है कि B मजदूर अधिक स्थिर है।

19.6 सारांश (Summary):–

छोटे प्रतिचयन की परिकल्पना की जाँच अलग प्रकार से की जाती है। जिसके लिये निम्न वितरण परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है।

1. टी वितरण के आधार पर सार्थकता परीक्षण।
2. एफ वितरण

- **टी वितरण के आधार पर सार्थकता परीक्षण–**

छोटे प्रतिचयनों में सार्थकता परीक्षण के क्षेत्र में सर्वाधिक योगदान सर विलियम सीली गोस्सेट का है। इन्हीं के उपनाम पर छोटे प्रतिचयन का यह सार्थकता परीक्षण स्टूडेण्ड टी बंटन के नाम से प्रसिद्ध हुआ। टी–बंटन की परिकलन मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{S} \times \sqrt{n} \qquad \text{जहाँ} \qquad S = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n_1-1}}$$

स्टुडेण्ड टी बंटन का प्रयोग छोटे प्रतिचयन से प्राप्त विभिन्न परिणामों की सार्थकता परीक्षण के लिए किया जा रहा है। मुख्य रूप से इसके गणना तथा प्रयोग की विधि निम्न प्रकार है।

1. **प्रतिचयन माध्य का सार्थकता परीक्षण–शून्य परिकल्पना**–प्रतिचयन का माध्य तथा समग्र का माध्य के समान है। अर्थात् $H_0 - \overline{X} = \mu$

स्टुडेन्ट टी परीक्षण का निम्न सूत्र द्वारा परिकलित मूल्य ज्ञात किया जाता है।

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{S} \times \sqrt{n} \text{ जहाँ } S = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n_1-1}}$$

यदि प्रतिचयन का प्रमाप विचलन दिया हो तो बेस्सेल संशोधन को समायोजित करने के लिये सूत्र में पर n के स्थान पर पर n–1 का प्रयोग किया जाता है। संशोधित सूत्र इस प्रकार होगा।

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{S} \times \sqrt{n}-1$$

टी का परिकलित मूल्य की तुलना करने के लिये टी का सारणी मूल्य ज्ञात किया जाता है। छोटे प्रतिचयन में स्वातन्त्र्य कोटीयों (*df*)की संख्या (n–1)के आधर पर 99% तथा 95% अर्थात् 0.01% तथा 0.05% सार्थकता स्तर पर टी का सारणी मूल्य ज्ञात किया जाता है। टी परीक्षण के परिकलित मूल्य तथा सारणीय मूल्य के आधार पर उत्तर का निर्वचन किया जाता है। यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से कम है तो हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हैं और यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से अधिक है तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं।

समग्र माध्य की विश्वास्यता सीमाएँ–

एक प्रसामान्य समग्र से चुने गये दैव प्रतिचयन के माध्य के आधार पर समग्र के माध्य की 95 प्रतिशत तथा 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएं ज्ञात की जा सकती है इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$t_{.05}$ = टी सारणी का .05% का मूल्य n–1 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर ।

$t_{.01}$= टी सारणी का .01% का मूल्य n–1 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर ।

95% पर विश्वास्यतया सीमाएँ–

$$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{.05}$$

99% पर विश्वास्यतया सीमाएँ–

$$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{.01}$$

2. **दो प्रतिचयन माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण**–इसका उद्देश्य दो छोटे प्रतिचयनों के माध्य के अंतर की सार्थकता की जांच करना है और यह पता करना है कि दोनों प्रतिचयनों के माध्यो के बीच अंतर सार्थक व अर्थपूर्ण है या अर्थहीन है।

$$t = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S} \frac{\sqrt{n_1 \times n_2}}{n_1 + n_2}$$

जहाँ

$$S = \sqrt{\frac{\sum dx_1^2 + \sum dx_1^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

टी के परिकलन मूल्य की गणना करने के बाद स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर टी का सारणी मूल्य ज्ञात कर शून्य परिकल्पना की जांच करते हैं।

3. **आश्रित प्रतिचयन या युग्मित प्रतिचयन में अन्तर परीक्षण**–इस परीक्षण का प्रयोग तब किया जाता है जब समान इकाईयों पर किसी घटना का प्रभाव देखना इस परीक्षण की आवश्यक शर्त है कि प्रतिचयन की समान इकाईयों का अलग– अलग परिस्थिति में विश्लेषण किया जाता है।

$$t = \frac{\bar{D}-0}{S} \times \sqrt{n} \quad \text{or} \quad t = \frac{\bar{D}\sqrt{n}}{S} \quad \text{जहाँ} \quad S = \sqrt{\frac{(D-\bar{D})^2}{n_1-1}}$$

अंतर परीक्षण में स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) की संख्या सदैव n–1 होती है तथा 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य देखकर उत्तर का निर्वचन किया जाता है।

4. **टी–परीक्षण द्वारा सहसंबंध गुणांक की सार्थकता का परीक्षण**–जब सह संबंध गुणांक के लिये t परीक्षण की जांच करनी हो कि समग्र में गुण सम्बन्ध शून्य है अर्थात् समग्र के चर असम्बन्धित है अथवा नहीं। सह सम्बन्ध गुणांक में t परीक्षण का सूत्र निम्न है

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

परन्तु स्वातन्त्र्य कोटि (*df*) की संख्या n–2 होती है।

➢ **एफ परीक्षण**–समग्र के प्रसरण या विचरण मापांक की जांच करने के लिए एफ परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। एफ परीक्षण को **प्रोफेसर रॉनेल्ड फिशर** तथा जार्ज स्नेडैकॉर द्वारा प्रतिपादित तथा विकसित किया गया। स्नेडैकॉर ने प्रो0 रॉनेल्ड फिशर के सम्मान में ही इस प्रसरण अनुपात परीक्षण का नाम एफ परीक्षण (F Test) रखा था।

शून्य परिकल्पना यह मानी जाती है कि दोनों समग्र का प्रसरण समान है।

दोनों प्रतिचयन के प्रसरण की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है–

$${S_1}^2 = \frac{\Sigma(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}; \; {S_2}^2 = \frac{\Sigma(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$$

प्रसरण अनुपात की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है–

$$\text{प्रसरण अनुपात (एफ का मान)} = \frac{\text{वृहत्तर प्रसरण आकलन}}{\text{लघु प्रसरण आकलन}}$$

यदि $S_1^2 > S_2^2$ हो, तोएफ का मान ज्ञात करने के लिए S_1^2 / S_2^2 होगा।
यदि $S_1^2 > S_2^2$ हो, तो एफ का मान ज्ञात करने के लिए S_1^2 / S_2^2 होगा।

एफ सारणी में स्वातन्त्र्य कोटियों (df) को ज्ञात करने के लिए $v1$ तथा $v2$ को ज्ञात करना होता है। एफ सारणी में बडे प्रसरण अनुपात के $n-1$ को $v1$ मान कर लघु प्रसरण अनुपात के $n-1$ को $v2$ मान कर एफसारणी का मूल्य ज्ञात किया जाता है। सामान्यतया एफ सारणी में 5% सार्थकता स्तर पर $v1$ तथा $v2$ के लिए एफ सारणी का मूल्य देखा जाता है। अन्त में उत्तर के निर्वचन के लिए एफ के परिकलित मूल्य तथा सारणी मूल्य की तुलना की जाती है। और यदि एफ का परिकलित मूल्य एफ के सारणी मूल्य से अधिक होता है। शून्य परिकल्पना असत्य होता है। अर्थात् दोनों समग्र का प्रसरण एक समान नहीं है। या प्रसरण अनुपात सार्थक है या दोनों प्रतिचयन एक ही समग्र से नहीं लिए गये है। इस इकाई के अध्ययन से आप छोटे प्रतिचयन के सार्थकता परीक्षण की प्रक्रिया को जान चुके है।

19.7 शब्दावली :–

- **समग्र–** समग्र से अर्थ, अनुसंधान के लिये निर्धारित समस्त क्षेत्र से है। जिसके बारे में जानकारी प्राप्त करनी है।
- **प्रतिचयन–** प्रतिचयन समग्र की इकाईयों का वह भाग है जो पूर्ण समग्र के अध्ययन हेतु चुना जाता है इसे लघु समग्र भी कहते हैं।
- **शून्य परिकल्पना–** शून्य परिकल्पना के अंतर्गत यह मान लिया जाता है कि दो घटनायें एक समान हैं। अर्थात् उनके बीच का अंतर शून्य है।
- **समान्तर माध्य–** समान्तर माध्य, वह मूल्य है जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग को उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

19.8 अभ्यास प्रश्नः–

रिक्त स्थान भरों :–

1. छोटे प्रतिचयनों में सार्थकता परीक्षण के क्षेत्र में सर्वाधिक योगदान .... का है ।
2. सर विलियम सीली गोस्सेट ने स्टुडेण्ड उपनाम से .... में छोटे प्रतिचयन पर एक शोध पत्र छापा।
3. यदि प्रतिचयन का प्रमाप विचलन दिया हो तो बेस्सेल संशोधन को समायोजित करने के लिये सूत्र में पर nके स्थान पर पर................. का प्रयोग किया जाता है।

4. यदि टी का परिकलित मूल्य टी के सारणी मूल्य से कम है तो हम .... करते हैं।
5. युग्मित प्रतिचयन में अन्तर परीक्षण का प्रयोग तब किया जाता है, जब .... इकाईयों पर किसी घटना का प्रभाव देखना हो।
6. अंतर परीक्षण में स्वातन्त्र्य कोटीयों की संख्या सदैव .... होती हैं।
7. जब सह संबंध गुणांक के लिये टी परीक्षण की जांच करनी हो तो स्वातन्त्र्य कोटीयों की संख्या ....होती है।
8. एफ परीक्षण को .... तथा .... द्वारा प्रतिपादित तथा विकसित किया गया।
9. यदि $S_1^2 > S_2^2$ हो, तो एफ का मान ज्ञात करने के लिए ....होगा।
10. एफ सारणी में बडे प्रसरण अनुपात के $n-1$ को ....मान कर एफ सारणी का मूल्य ज्ञात किया जाता है।
11. लघु प्रसरण अनुपात के .... को ν2 मान कर एफ सारणी का मूल्य ज्ञात किया जाता है।

उत्तर–

(1) सर विलियम सीली गोस्सेट (2)1908 (3) $n-1$ (4) शून्य परिकल्पना को स्वीकार (5) समान इकाईयों (6) $n-1$ (7) $n-2$ (8)प्रोफेसर रॉनेल्ड फिशर तथा जार्ज स्नेडैकॉर (9) S_1^2 / S_2^2 (10) ν1 (10) $n-1$।

19.9 सन्दर्भ ग्रन्थ :–

- गुप्ता, डॉ. बी.एन. (2006), *सांख्यिकी*, साहित्य भवन पब्लिशर्स एण्ड डिस्ट्रीब्यूटर्स (प्रा.) लिमिटेड आगरा।
- नागर, कैलाश नाथ (2001), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
- सिंह एस.पी. (2006), *सांख्यिकी सिद्धांत एवं व्यवहार*, एस. चन्द एण्ड कम्पनी प्रा. मिल., नई दिल्ली।
- सिंह, एसपी, (2004), *सांख्यिकी के मूल तत्व*, एस चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड दिल्ली।
- http://www.studytrails.com/blog/t-test-f-test-and-p-value/
- http://14.139.121.170/pluginfile.php/1282/mod_resource/content/2/123%20t-F-Z-Chi-test.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/F-test
- http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1383356.files/Lecture%2020%20-%20t-tests%20and%20F-tests%20-%201%20per%20page.pdf

- https://www.codot.gov/business/designsupport/materials-and-geotechnical/manuals/2014-fmm/cp/cp-10s/07-cp-14-14.pdf

19.10 सहायक/उपयोग पाठ्य सामग्री

- Pillai R.S.N .and V.Bagavathi (2006), '*Stalistics Theory and Practics'*, S.Chand and Company Ltd. New Delhi.
- Gupta S.C. (2003), '*Fundamentals of Statistics'*, Himalaya Publishing House Delhi.

19.11 निबन्धात्मक प्रश्न :–

1. टी परीक्षण का वर्णन कीजिए। इस परीक्षण के विभिन्न अनुप्रयोग बताइए।
2. दो प्रतिचयन प्रसरणो की समानता की जॉच के लिए एफ परीक्षण का विवेचन कीजिए।
3. लघु प्रतिचयन की सार्थकता परीक्षण पर एक विस्तृत लिखिए।
4. निम्न पर टिप्पणी लिखो।
   - स्टूडेन्ट को टी परीक्षण।
   - फिशर का एफ परीक्षण।

प्रश्न हल कीजिए–

1. किसी समग्र जिसका माध्य 47.5 है से लिये गये प्रतिचयन इस प्रकार है। 45, 47, 50, 52, 48, 47, 49, 53, 51 इसका सार्थकता परीक्षण कीजिये। 5% सार्थकता स्तर पर 8 स्वातन्त्र्य कोटियों (*df*) पर t का सारणी मूल्य 2.31 है।
2. किसी अस्पताल में पाँच रोगियों को एक दवा देने के बाद उनका वजन क्रमशः 42, 39, 48, 60 तथा 41 था। 7 रोगियों को दूसरी दवा देने के बाद उनका वजन क्रमशः 38, 42, 56, 64, 68, 69 तथा 62 था। क्या दोनों वर्गों के भार समान है। इसका परीक्षण कीजिये। 5% सार्थकता स्तर पर 10 स्वातत्य कोटि पर t का सारणी मूल्य 1.812 है।
3. निम्न तालिका में दो टेस्टों में 11 छात्राों के प्राप्तांक दिये गये हैं। दूसरा टेस्ट एक महीने के गहन कोचिंग के पश्चात लिया गया। क्या कोचिंग के बाद सुधार हुआ है।

पहला टेस्ट	23	20	19	21	18	20	18	17	23	16	19
दूसरा टेस्ट	24	19	22	18	20	22	20	20	23	20	17

($t=1.48< t_{.05}=2.228$)

4. 12 समुह के दैव प्रतिचयन का सह संबंध गुणांक 0.45 है। क्या यह सहसंबंध का मान सार्थक है। (10 *df* पर $t_{.05}$ का मान 2.228)
5. किसी आठ वस्तु के प्रतिचयन में वस्तु की दो विशेषताओं के मध्य सहसंबंध गुणांक 0.32 है। क्या यह मान सार्थक है। (6 *df* पर $t_{.05}$ का मूल्य 2.45 है)
6. दो प्रसामान्य समग्रों से लिये गये दो दैव प्रतिचयन निम्न प्रकार हैं।

Sample I	20	16	26	27	23	22	18	24	25	19
Sample II	17	23	32	25	22	24	28	18	31	33

समग्रों के प्रसरण के अनुपात ज्ञात कीजिये और यह परीक्षण कीजिये कि क्या समग्रों का समान प्रसरण है। F परीक्षण का प्रयोग कीजिये।

7. दो प्रसामान्य समग्रों से लिये गये दो दैव प्रतिचयन क्रमशः 8 तथा 7 हैं। परीक्षण कीजिये कि क्या समग्रों का प्रसरण समान है। F परीक्षण का प्रयोग कीजिये।

Sample I	9	11	12	11	15	9	12	14
Sample II	10	12	10	14	9	8	10	

<u>उत्तर</u>– (1) t =1.83 (2) t=1.7036 (3) $t=1.48< t_{.05}=2.228$ (4) t=1.6 (5) t=0.83 (6) $S_1^2 = 13.33$, $S_2^2 = 31.57$, F=2.37< 3.18, (7) $F=\frac{4.79}{3.95}$, F= 1.21< 4.21 ।

इकाई–20 जन्म–मृत्यु सांख्यिकीय विश्लेषण

20.1 प्रस्तावना

20.2 उद्देश्य

20.3 जन्म–मृत्यु सांख्यिकीय विश्लेषण

20.4 जन्म दर

20.5 ऊंची जन्म दर के कारण

20.6 मृत्यु दर

20.7 मृत्यु दर में कमी के कारण

20.8 सारांश

20.9 शब्दावली

20.10 अभ्यास प्रश्न

20.11 सन्दर्भ ग्रन्थ

20.12 सहायक पाठ्य सामग्री

20.13 निबंधात्मक प्रश्न

20.1 प्रस्तावना (Introduction):–

जन्म–मृत्यु सांख्यिकीय विश्लेषण एवं सांख्यिकीय सर्वेक्षण संस्थान खण्ड 5 की यह 20वीं इकाई है। इस इकाई में आप जन्म दर को निर्धारित करने वाली, विभिन्न प्रजनन दरों तथा जन्म दर में वृद्धि के कारणों सहित मृत्यु–दर को नापने की विभिन्न विधियों को उदाहरण सहित जानकारी प्राप्त करेंगे।

अतः प्रस्तुत इकाई में जन्म–मृत्यु दर को नापने की विभिन्न विधियों का उदाहरण सहित विश्लेषण प्रस्तुत किया गया है। इस इकाई के अध्ययन के बाद आप जन्म दर व मृत्यु दर के विभिन्न पहलुओं को सामान्य दृष्टि से समझ सकेंगे।

20.2 उद्देश्य (Objectives):–

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप :–

- ✓ समझ सकेंगे कि जन्म दर विभिन्न प्रजनन दर से कैसे प्रभावित होती है।
- ✓ जन्म दर में वृद्धि के कारणों को समझ सकेंगे।
- ✓ मृत्यु दर की विभिन्न विधियों को जान जायेंगे।
- ✓ मृत्यु दर में हो रही कमीं को समझ सकेंगे।

20.3 जन्म–मृत्यु सांख्यिकीय विश्लेषण (Birth-Death Statistics Analysis):–

जनसंख्या किसी अर्थव्यवस्था के समस्त कार्यकलापों की धुरी है, जो निरन्तर परिवर्तनशील है। प्रारम्भ में जनसंख्या सम्बन्धी अधिकांश अध्ययन केवल जनगणना तक ही सीमित था, लेकिन 20वीं शताब्दी में इसमें जनसख्या के गुणात्मक पहलुओं का भी अध्ययन किया जाने लगा। किसी देश की जनसंख्या के आकार में परिवर्तन में जन्म तथा मृत्यु दर की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। आर्थिक विकास की प्रारम्भिक अवस्था में जहां जन्म तथा मृत्यु दर अधिक होती है, वहीं विकास की प्रक्रिया के साथ इसमें कमी आती जाती है।

20.4 जन्म दर (Birth Rate):–

किसी देश की जनसंख्या का आकार मुख्य रूप से जन्म दर पर निर्भर करता है। विकास की प्रारम्भिक अवस्था में जन्म दर ऊँची होती है, लेकिन मृत्यु दर भी ऊँची होने के कारण जनसंख्या का आकार स्थिर रहता है। जैसे–जैसे विकास का क्रम बढ़ता है तथा सामाजिक व स्वास्थ्य सेवाओं में सुधार होता है, तो मृत्यु दर में कमी होती जाती है। ऊँची जन्म दर के कारण जनसंख्या तीव्र गति से बढ़ती है। लेकिन विकास का क्रम बढ़ने के साथ–साथ मृत्यु दर के बाद जन्म दर में भी कमी आने लगती है जिससे जनसंख्या वृद्धि की दर कम हो जाती है परन्तु जन्म दर के कम या अधिक होने के साथ–साथ प्रजनन दर का भी जनसंख्या के आकार पर बहुत प्रभाव पड़ता है। वास्तव में विस्तृत अर्थ में जन्म दर से अभिप्राय प्रजनन दर से ही लगाया जाता है।

प्रजनन दर को किसी जनसंख्या में होने वाले जन्मों की संख्या के आधार पर मापा जाता है, परन्तु किसी भी विधि के द्वारा प्रजनन दर को शत्–प्रतिशत शुद्धता के साथ नहीं नापा जा सकता है। प्रजनन दर की अधिकाधिक सही जानकारी हेतु अनेक विधियों का प्रतिपादन किया गया। जिसमें से प्रजनन को मापने की मुख्य विधियाँ इस प्रकार हैः–

20.4.1 अशोधित जन्म दर (Crude Birth Rate):–

साधारण शब्दों में अशोधित जन्म दर एक वर्ष में जन्में कुछ बच्चों की संख्या का उसी वर्ष के मध्य की कुल जनसंख्या से निकाला गया वह अनुपात है जो 1000 से व्यक्त किया जाता है, इसे निम्न सूत्र के द्वारा भी स्पष्ट कर सकते हैं।

$$\text{अशोधित जन्म दर} = \frac{\text{किसी वर्ष में जन्मों बच्चों की संख्या}}{\text{मध्य वर्गीय कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$\mathbf{CBR} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}} \times \mathbf{K}$$

CBR = अशोधित जन्म दर (Crude Birth Rate)
B = किसी वर्ष में जन्में बच्चों की संख्या
P = मध्य वर्गीय कुल जनसंख्या
K = स्थिरांक है जिसे सामान्यतया 1000 लिया जाता है।

उदाहरण – किसी शहर की आबादी 9,50,000 तथा जन्म संख्या 34065 है तो CBR होगी।

$$\mathbf{CBR} = \frac{B}{C} \times K$$

$$= \frac{34065}{950000} \times 1000 = 35.8579$$

गुणः–

1. अशोधित जन्म दर की गणना सरल है। इसकी गणना करने के लिए जिन समंकों का प्रयोग किया जाता है, वह आसानी से उपलब्ध हो जाते हैं।
2. इसका प्रयोग जनसंख्या वृद्धि पर पड़ने वाले प्रभावों के जानने के लिए किया जाता है।
3. यदि इस दर में से अशोधित मृत्यु दर घटा दी जाये तो जनसंख्या के विकास की दर मालूम की जा सकती है।

दोषः–

1. इसमें जनसंख्या के गठन पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता है।
2. समस्त जनसंख्या के स्थान पर केवल उसी विवाहित स्त्री संख्या को आधार माना जाना चाहिए।

20.4.2 सामान्य प्रजनन दर (General Fertility Rate):–

सामान्य प्रजनन दर अशोधित जन्म दर का संशोधित रूप है, जिसमें समस्त जनसंख्या को आधार न मानकर केवल संतानोत्पादन आयु वर्ग की स्त्रियों के आधार पर आंकलन किया जाता है।

$$\text{सामान्य प्रजनन दर} = \frac{\text{एक वर्ष में जन्में बच्चों की संख्या}}{\text{उसी वर्ष के मध्य की पुनरूत्पादन आयु वर्ग की स्त्रियों की संख्या}} \times 1000$$

$$\mathbf{GER} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{W}} \times \mathbf{K}$$

GFR = सामान्य प्रजनन दर (General Fertility Rate)

B = एक वर्ष में जन्में बच्चों की संख्या

W = उसी वर्ष के मध्य की पुनरूत्पादन आयु वर्ग की स्त्रियों की संख्या

K = स्थिरांक है जिसे सामान्यतया 1000 लिया जाता है।

उदाहरण– पुनरूउत्पादन आयु वर्ग की स्त्रियों की संख्या 4,00,000 तथा जन्म की संख्या 34065 हैं तो

$$\boldsymbol{GER = \frac{B}{W} \times K}$$

$$GER = \frac{34065}{450000} \times 1000 = 75.7$$

गुणः–

1. यह विधि जन्मों के पंजीकरण में अच्छा कार्य करती है।

दोषः–

1. इसमें प्रयोग आयु वर्ग में अविवाहित, विधवा तथा बांझ आदि स्त्रियां भी होती हैं।
2. इस आयु वर्ग की स्त्रियों में आयु वृद्धि के साथ प्रजनन दर कम होती जाती है।
3. इस में आयु वर्ग की भिन्नता के कारण आंकड़े अतुलनीय हो जाते हैं।

20.4.3 आयु विशिष्ट प्रजनन दर(**Age Specific Fertility Rate**):–

प्रो0 बोग के अनुसार *''किसी विशिष्ठ आयु वर्ग की प्रति हजार स्त्रियों द्वारा जन्मित बच्चों की संख्या ही आयु विशिष्ट प्रजनन दर है।'* इसकी गणना करने के लिए स्त्रियों को उप वर्गों में बांटकर प्रत्येक उपवर्ग की अलग–अलग आयु विशिष्ट प्रजनन दर की गणना की जाती है। इसका सूत्र है।

$$\text{आयु विशिष्ट प्रजनन दर} = \frac{\text{आयु विशेष की स्त्रियों के जन्में बच्चों की संख्या}}{\text{उसी आयु विशेष की स्त्रियों की मध्य वर्षीय संख्या}} \times 1000$$

$$\mathbf{ASFR} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{W}} \times \mathbf{K}$$

ASFR = आयु विशिष्ट प्रजनन दर (Age SpecificFertility Rate)

B = आयु विशेष की स्त्रियों के जन्में बच्चों की संख्या

W = उसी आयु विशेष की स्त्रियों की मध्य वर्षीय संख्या

उदाहरण–

आयुवर्ग	स्त्रियों की संख्या	जन्में बच्चों की संख्या	आयु विशिष्ट प्रजनन दर
15-19	45000	3850	85.56 *
20-24	39089	10672	273.02
25-29	35650	8965	251.47
30-34	30653	6580	214.66
35-39	29861	3987	133.52
39-40	25753	1931	74.98
योग	206006	35985	

$$* \text{ ASFR} = \frac{B}{W} \times K$$

$$= \frac{3850}{45000} \times 1000 = 85.56$$

गुणः–

1. यह आयु संरचना में परिवर्तनों से प्रभावित नहीं होती।
2. आयु परिवर्तन का प्रजनन दर पर प्रभाव देखा जा सकता है।
3. यह प्रजनन दर गणना की विधि में एक प्रमुख सुधार है।
4. यह कुल प्रजनन दर तथा योगात्मक प्रजनन दर का आधार है।

दोषः–

1. इसमें अनेक प्रजनन दर होती है।
2. जनसंख्या का सही चित्र प्रस्तुत नहीं होता।

20.4.4 कुल प्रजनन दर **(Total Fertility Rate)**:–

आयु विशिष्ट प्रजनन दरों के योग को आयु वर्गांतर से गुणा करके तथा एक हजार से भाग देकर इसे प्राप्त किया जा सकता है। इसे प्रतिस्थापन दर भी कहते हैं।

$$\boxed{\text{कुल प्रजनन दर} = \frac{\text{आयु वर्गांतर} \times \text{आयु विशिष्ट प्रजनन दरों के योग}}{1000}}$$

$$\textbf{TFR} = \frac{\sum \textbf{ASFR} \times \textbf{Age Interval}}{\textbf{1000}}$$

TFR = कुल प्रजनन दर

$\sum$ASFR = आयु विशिष्ट प्रजनन दरों के योग

Age Interval = आयु वर्गांतर

उदाहरण–

आयुवर्ग	आयु विशिष्ट प्रजनन दर	कुल प्रजनन दर
15-19	85.56	0.43
20-24	273.02	1.37
25-29	251.47	1.26
30-34	214.66	1.07
35-39	133.52	0.67
39-40	74.98	0.37
योग	**1033.21**	**5.17**

$$TFR = \frac{\sum \text{ASFR} \times \text{Age Interval}}{1000}$$

$$= \frac{1033.21 \times 5}{1000} = \frac{5166.05}{1000} = 5.166(5.17)$$

इसका तात्पर्य यह है कि एक स्त्री प्रजनन आयु वर्ग पार करते ही 5.17 स्त्रियों को अपने स्थान पर प्रतिस्थापित कर देती है।

20.4.5 कुल पुनरूत्पादन दर (Gross Reproduction Rate):–

कुल पुनरूत्पादन दर निकालने के लिए कुल प्रजनन दर को कुल जन्म में लड़कियों (बालिक शिशु) के अनुपात से गुणा कर दिया जाता है।

कुल पुनरूत्पादन दर = कुल प्रजनन दर × कुल जन्म में लड़कियों का अनुपात

कुल पुनरूत्पादन दर निकालने के लिए आयु वर्गांतर को लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर से गुणा कर दिया जाता है।

कुल पुनरूत्पादन दर = आयु वर्गांतर × लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर

$$\mathbf{GRR = Age\ Interval \times \sum ASFR^F}$$

GRR = कुल पुनरूत्पादन दर

Age Interval = आयु वर्गांतर

$\sum \text{ASFR}^F$ = लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर

उदाहरण–

आयुवर्ग	स्त्रियों की संख्या	कुल जन्म में लड़कियों की संख्या	लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर
15-19	45000	1877	41.71
20-24	39089	4985	127.53
25-29	35650	4209	118.06
30-34	30653	1528	49.85
35-39	29861	978	32.75
39-40	25753	781	30.33
योग	**206006**	**14358**	**400.23**

GRR = Age Interval × $\sum ASFR^F$

GRR = 5 × 400.23

GRR = 2001.15

GRR (Per Women) = 2001.15/1000= 2.001

20.4.6 शुद्ध पुनरूत्पादन दर (Net Reproducation Rate):–

जब कुल पुनरूत्पादन दर में मृत्यु के तत्व को भी सम्मिलित कर लिया जाता है तो शुद्ध पुनरूत्पादन दर की गणना की जाती है। शुद्ध पुनरूत्पादन दर में आयु वर्गांतर को महिला जीवन तालिका कालम के अनुपात से गुणा किया जाता है।

शुद्ध पुनरूत्पादन दर = आयु वर्गांतर × महिला जीवन तालिका कालम के अनुपात

महिला जीवन तालिका कालम अनुपात उपलब्ध न रहने पर निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

शुद्ध पुनरूत्पादन दर = आयु वर्गांतर × लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर × **Servival Factor**

उदाहरण–

आयुवर्ग	स्त्रियों की संख्या	कुल जन्म में लड़कियों की संख्या	लड़कियों की आयु विशिष्ट प्रजनन दर	Servival Factor	ASFR (F) × Survival factor
15-19	45000	1877	41.71	0.9	37.54
20-24	39089	4985	127.53	0.8	102.02
25-29	35650	4209	118.06	0.7	82.65
30-34	30653	1528	49.85	0.6	29.91
35-39	29861	978	32.75	0.5	16.38
39-40	25753	781	30.33	0.4	12.13
योग	**206006**	**14358**			**280.62**

NRR = Age Interval $\sum(ASFR^F \times$ Servival Factor)

$= 5 \times 280.62$

$= 4003.1$

GRR (Per Women) = 4003.1/1000= 4.003

20.4.7 योगात्मक प्रजनन दर (Cumulative Fertility Rate):–

यह कुल प्रजनन दर के ही समान है, केवल अन्तर यह है कि यह प्रति हजार स्त्रियों के सम्पूर्ण प्रजनन काल में उत्पन्न किये गये बच्चों की संख्या प्रकट करता है। इसकी गणना करने के लिए पहले आयु विशिष्ट प्रजनन दरें निकाली जाती है। जिसे आयु वर्गान्तरों से गुणा कर दिया जाता है तथा इन गुणनफलों की संचयी वृत्ति निकाल ली जाती है। संचयी वृत्ति का अन्तिम मूल्य सभी का योग होता है।

20.4.8 शिशु स्त्री अनुपात (Child-Women Ratio):–

इससे किसी भी देश की जनसंख्या में वयस्क स्त्रियों की प्रजननता को मापा जा सकता है। समान्यतया इसमें 5 वर्ग से कम आयु के बच्चों की संख्या 15 से 44 वर्ष की आयु वर्ग की प्रति हजार स्त्रियों के अनुपात में दर्शाया जाता है। दोनों लिंग के बच्चों की संख्या जिनकी आयु 5 वर्ष से कम है।

$$\text{शिशु स्त्री अनुपात} = \frac{\text{5 वर्ग से कम आयु के बच्चों की संख्या} \times 1000}{\text{15 से 44 वर्ष की आयु वर्ग की स्त्रियां}}$$

$$\text{CWR} = \frac{P_{0-4}}{W_{15-44}} \times 1000$$

CWR = शिशु स्त्री अनुपात

$P_{0\text{-}4}$ = 5 वर्ग से कम आयु के बच्चों की संख्या

$W_{15\text{-}44}$ = 15 से 44 वर्ष की आयु वर्ग की स्त्रियां

उदाहरण –

यदि किसी क्षेत्र की जनगणना में 0–4 वर्ष के बच्चों की संख्या 1850 है तथा 15 से 44 वर्ष की स्त्रियों की संख्या 15080 है तो शिशु स्त्री अनुपात होगा।

$$CWR = \frac{1850}{15080} \times 1000 = 122.68$$

20.5 ऊंची जन्म दर के कारण (Causes of High Birth Rate):–

किसी देश की जनसंख्या के आंकड़ों का विश्लेषण करने पर ज्ञात होता है कि जन्म दर में विकास के क्रम के साथ धीरे–धीरे ही कमी आती है। यद्यपि विकसित देशों में स्थिर या ऋणात्मक जन्म दर की प्रवृत्ति देखी जाती है परन्तु अधिकांश विकासशील देशों में ऊंची जन्म दर ही पायी जाती है। भारत जैसे विकासशील देश में भी ऊंची जन्म दर पायी जाती है। भारत में ऊंची जन्म दर के मुख्य कारण निम्न है।

1. सामाजिक व धार्मिक दृष्टि से विवाह संस्था एक अनिवार्यता है। अतः हर व्यक्ति विवाह करके संतान उत्पन्न करना अनिवार्य समझता है जिससे जन्म दर ऊंची बनी रहती है।
2. बड़ा परिवार सामाजिक सुरक्षा व समृद्धि का प्रतीक माना जाता है जिससे जन्म दर में वृद्धि होती है।
3. कम आयु में विवाह होने पर दम्पत्ति को बहुत लम्बी प्रजनन अवधि मिल जाती है जो जन्म दर को ऊंचा कर देती है।
4. भारत में सन्तान के जन्म को ईश्वर की देन समझा जाता है जो जन्म दर ऊंची होने का एक महत्वपूर्ण कारण है। धार्मिक दृष्टि से पुत्र का होना आवश्यक समझा जाता है।

5. भारत जैसे देश में विकास के साथ औसत आयु में वृद्धि हुई है जिससे अप्रत्यक्ष रूप से जन्म दर में वृद्धि हुई है।
6. भारत में स्त्रियों की सामाजिक स्थिति बहुत निम्न है जिससे उन्हें इस सम्बन्ध में भी कोई निर्णय लेने का अधिकार नहीं दिया जाता।
7. जन्म दर पर आर्थिक व शैक्षिक स्तर का बहुत प्रभाव पड़ता है लेकिन निम्न आर्थिक व शैक्षिक स्तर के कारण अधिक बच्चे अधिक आय के कारण माने जाते हैं जबकि यह सही नहीं है।
8. शिशु मृत्यु दर का अधिक होना भी ऊंची जन्म दर का मुख्य कारण है क्योंकि उचित स्वास्थ्य सेवाओं के अभाव में देश में शिशु मृत्यु दर ऊंची है।
9. भारत जैसे देश में परिवार नियोजन की व्यवस्था का उचित क्रियान्वयन न होना भी ऊंची जन्म दर का मुख्य कारण माना जाता है।
10. भारत की ऊष्ण जलवायु भी ऊंची जन्म दर के लिए उत्तरदायी है क्योंकि इसके कारण देश में, कम आयु में ही लड़कियों में प्रजनन क्षमता आ जाती है।

20.6 मृत्यु दर (Death Rate):–

मानव ज्ञान के विकास में मृत्यु नें बहुत ही महत्वपूर्ण भूमिका निभाई है। जनसंख्या विश्लेषण में मृत्यु दर का भी उतना ही महत्व है जितना जन्म दर का, क्योंकि किसी देश की जनसंख्या वृद्धि दोनों पर निर्भर करती है। विकास के साथ मृत्यु दर में कमी होती जाती है जबकि जन्म दर ऊंची बनी रहती है जिससे जनसंख्या विस्फोट की स्थिति उत्पन्न हो जाती है लेकिन मृत्यु दर में कमी किसी देश के विकासको प्रदर्शित करती है। चिकित्सा शास्त्र का विकास मृत्यु दर में कमी लाने के लिए ही हुआ है।

मृत्यु दर का प्रयोग मृत्यु का जनसंख्या पर दबाव मापने के लिए किया जाता है। मृत्यु दर द्वारा दो या अनेक देशों, राज्यों अथवा समयावधि में मृत्यु की स्थिति की तुलना की जा सकती है। मृत्यु दर को मापने की अनेक विधियाँ है। साधारण तथा जनसंख्या विश्लेषण में मुख्य निम्न मृत्यु दर निकाली जाती है।

20.6.1 अशोधित मृत्यु दर (Crude Death Rate):–

सामान्यतया अशोधित मृत्यु दर को ही मृत्यु दर कहा जाता है। यह वह दर है जो प्रति एक हजार व्यक्तियों पर मृत्यु की संख्या दर्शाती है। इसे अशोधित इसलिए कहते हैं क्योंकि इसमें जनसंख्या के गठन पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता।

$$\text{अशोधित मृत्यु दर} = \frac{\text{किसी वर्ष में कुल मृत्युओं की संख्या}}{\text{उसी वर्ष के मध्य की कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$\mathbf{CDR = \frac{D}{P} \times K}$$

D = किसी वर्ष में कुल मृत्युओं की संख्या

P = उसी वर्ष के मध्य की कुल जनसंख्या

K = स्थिरांक है जिसे सामान्यतया 1000 लिया जाता है।

उदाहरण – यदि किसी शहर की जनसंख्या 80,000 तथा कुल मृत्युओं की संख्या 785 है तो CWR होगी।

$$CDR = \frac{D}{P} \times K$$

$$CDR = \frac{785}{80000} \times 1000$$

$$CDR = \frac{785000}{80000} = 9.81$$

गुणः–

1. इस दर की गणना सरल है। मृत्यु दरों के त्वरित अनुमान के लिए सामान्यतया इसी विधि का प्रयोग किया जाता है।
2. मृत्यु दर सम्बन्धी गहन अध्ययन करने से पूर्व सामान्य प्रवृत्ति को ज्ञान करने के लिए इसका प्रयोग किया जाता है।

दोषः–

1. यह दर तुलनात्मक दृष्टि से उचित नहीं क्योंकि इसमें जनसंख्या के गठन को ध्यान में नहीं रखा जाता।
2. इस दर को ज्ञात करने के लिए दो अलग–अलग स्त्रोत से आंकड़े लिए जाते हैं अतः यह अवैज्ञानिक विधि है।

20.6.2 विशिष्ट मृत्यु दर (Specific Death Rate):–

एक या एक से अधिक विशेषताओं के आधार पर निकाली गयी मृत्यु दर को विशिष्ट मृत्यु दर कहते हैं। जैसे आयु विशिष्ट मृत्यु दर, लिंग विशिष्ट मृत्यु दर आदि।

आयु विशिष्ट मृत्यु दर –

मृत्यु दर को आयु सबसे अधिक प्रभावित करती है। आयु विशिष्ट मृत्यु दर आयु वर्ग तथा तत्सम्बन्धित मृत्यु संख्या का प्रति हजार में व्यक्त अनुपात है। आयु वर्ग में एक वर्ग में मरने वालों की संख्या तथा आयु वर्ग को उसी वर्ग की कुल जनसंख्या। इसी

प्रकार लिंग विशिष्ट मृत्यु दर भी ज्ञात की जा सकती है। स्त्री तथा पुरूषों की विशिष्ट मृत्यु दर।

$$\text{आयु विशिष्ट मृत्यु दर} = \frac{\text{आयु वर्ग में एक वर्ग में मरने वालों की संख्या}}{\text{आयु वर्ग को उसी वर्ग की कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$ASDR_x = \frac{D_x}{P_x} \times K$$

$ASDR_x$ = आयु विशिष्ट मृत्यु दर
D_x = आयु वर्ग में एक वर्ग में मरने वालों की संख्या
P_x = आयु वर्ग को उसी वर्ग की कुल जनसंख्या।
K = स्थिरांक है जिसे सामान्यतया 1000 लिया जाता है।

उदाहरण –

आयुवर्ग	कुल जनसंख्या	मरने वालों की संख्या	आयु विशिष्ट मृत्यु दर
15-19	45000	507	11.27 *
20-24	39089	298	7.62
25-29	35650	218	6.12
30-34	30653	152	4.96
35-39	29861	301	10.08
39-40	25753	397	15.42
योग	**206006**	**1873**	**55.46**

$$* \ ASDR_x = \frac{D_x}{P_x} \times K$$

$$ASDR_x = \frac{507}{45000} \times 1000 = 11.27$$

20.6.3 मातृत्व मृत्यु दर (Maternal Mortality Rate):–

शिशु जन्म के कारण जिन स्त्रियों की मृत्यु हो जाती है। उसे मातृत्व मृत्यु दर द्वारा दर्शाया जाता है। इसकी गणना करने के लिए किसी एक वर्ष में बच्चा पैदा होने के समय मरने वाली स्त्रियों की संख्या को उसी वर्ष में कुल जन्में शिशु की संख्या से भाग देकर एक हजार से गुणा कर दिया जाता है।

$$\text{मातृत्व मृत्यु दर} = \frac{\text{किसी एक वर्ष में बच्चा पैदा होने के समय मरने वाली स्त्रियों की संख्या}}{\text{उसी वर्ष में कुल जन्में शिशु की संख्या}} \times 1000$$

उदाहरण – यदि किसी शहर में किसी वर्ष कुल 7000 शिशु पैदा हुए तथा शिशु पैदा होते समय मरने वाली स्त्रियों की संख्या 53 है तो मातृत्व मृत्यु दर होगी।

$$\text{मातृत्व मृत्यु दर} = \frac{53}{7000} \times 1000 = 7.57$$

20.6.4 शिशु मृत्यु दर (Infant Mortality Rate):–

जनसंख्या विश्लेषण में शिशु मृत्यु दर का बहुत महत्व है। इस दर से पता चलता है कि एक वर्ष में प्रति हजार सजीव जन्मों में कितने शिशुओं की मृत्यु एक वर्ष की आयु के भीतर हुई है। किसी वर्ष में जीवन का प्रथम वर्ष पूरा होने से पहले मरने वाले शिशुओं की संख्या उसी वर्ष के कुल सजीव जन्मों की संख्या।

$$\text{शिशु मृत्यु दर} = \frac{\text{किसी वर्ष में जीवन का प्रथम वर्ष पूरा होने से पहले मरने वाले शिशुओं की संख्या}}{\text{उसी वर्ष के कुल सजीव जन्मों की संख्या}} \times 1000$$

$$\mathbf{IMR} = \frac{\mathbf{D_0}}{\mathbf{B}} \times \mathbf{1000}$$

IMR = शिशु मृत्यु दर (Infant Mortality Rate)

D_0 = किसी वर्ष में जीवन का प्रथम वर्ष पूरा होने से पहले मरने वाले शिशुओं की संख्या

B = उसी वर्ष के कुल सजीव जन्मों की संख्या

उदाहरण –

यदि किसी शहर में किसी वर्ष कुल 7000 शिशु पैदा हुए तथा जीवन का प्रथम वर्ष पूरा होने से पहले मरने वाले शिशुओं की संख्या 89 है तो शिशु मृत्यु दर होगी।

$$\text{IMR} = \frac{D_0}{B} \times 1000$$

$$= \frac{89}{7000} \times 1000$$

$= 12.71$

20.7 मृत्यु दर में कमी के कारण (Causes of Decline in Death Rate):–

आर्थिक विकास के साथ–साथ किसी देश में स्वास्थ्य सेवाओं व आर्थिक व सामाजिक व्यवस्था में सुधार होता है जिससे मृत्यु दर में कमी आती है। विकास की प्रक्रिया के साथ मृत्यु दर में कमी के साथ प्रत्याशित आयु में भी वृद्धि होती जाती है। भारत में भी आर्थिक विकास के साथ सामाजिक व चिकित्सा व्यवस्था में सुधार आया है जिससे मृत्यु दर जो 1941–51 में 37.4 प्रति हजार थी, 1951–61 में 22.8 प्रति हजार, 1981–91 में 10 प्रति हजार, 2016 में 7.3 प्रति हजार हो गई है। मृत्यु दर में इस कमी के मुख्य कारण निम्न है।

1. भारत में मृत्यु दर में कमी का मुख्य कारण स्वास्थ्य व चिकित्सा सुविधाओं का विकास व सुधार है जिससे महामारी जैसे प्लेग, हेज, टीबी आदि पर रोक लगी है।
2. देश में तेजी से शहरीकरण हुआ है जिससे जन सुविधाओं में वृद्धि के साथ वह जनता को पहुंच में है, जिससे आवश्यकता के समय उचित स्वास्थ्य सुविधायें उपलब्ध हो जाती है।
3. देश में साक्षरता दर में वृद्धि के साथ महिलाओं की साक्षरता भी बढ़ी है जिससे वह बच्चों के स्वास्थ्य के रख–रखाव के साथ परिवार की जिम्मेदारी भी पूर्ण कुशलता से निभाती है जिससे परिवार के अन्य सदस्यों का स्वास्थ्य भी ठीक रहता है।
4. सामाजिक व धार्मिक अंधविश्वास में कमी, जैसे पुत्र ही अनिवार्य है। या बेटी बोझ है, या सन्तान ईश्वर का वरदान है आदि सोच में परिवर्तन आया है जिससे शिशु के स्वास्थ्य देखभाल में वृद्धि हुई है विशेष कर बालिका शिशु की।
5. आर्थिक विकास के साथ लोगों के रहन–सहन का स्तर बढ़ा है तथा जीवन स्तर में सुधार हुआ है। अब लोगों छोटी–छोटी बीमारी में भी डाक्टर का परामर्श लेने लगे हैं जिससे सही समय पर बड़ी बीमारी की जानकारी होने से मृत्यु को टाला जा सकता है।
6. अब सरकार द्वारा शहरी क्षेत्र के अतिरिक्त ग्रामीण क्षेत्र में भी स्वास्थ्य सेवाओं का विकास किया गया है तथा महिला व बाल विकास मंत्रालय के तहत मातृत्व व शिशु की पूरी देखभाल की जाती है तथा ''आशा'' द्वारा गर्भवती महिला तथा उसकी प्रसूति की उचित व्यवस्था की जाती है जिससे मातृत्व मृत्यु दर व शिशु मृत्यु दर में कमी आयी है।
7. आर्थिक विकास के साथ भारत में लोगों में स्वच्छता के प्रति भी जागरूकता आई है। लोग अपनी तथा अपने आस–पास की स्वच्छता का ध्यान रखने लगे है तथा अपने स्वास्थ्य के प्रति जागरूक हो गये है। साथ ही सरकार द्वारा अनेक नशीले पदार्थों व धूम्रपान आदि को हतोत्साहित किये जाने के कारण लोग इनका प्रयोग कम करने लगे हैं जिससे उनकी प्रत्याशित आयु बढ़ी है तथा मृत्यु दर में कमी आयी है।

20.8 सारांश (Summary):–

जनसंख्या किसी अर्थव्यवस्था के समस्त कार्यकलापों की धुरी है। किसी देश की जनसंख्या के आकार में परिवर्तन में जन्म तथा मृत्यु दर की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। किसी देश की जनसंख्या का आकार मुख्य रूप से जन्म दर पर निर्भर करता है। विकास की प्रारम्भिक अवस्था में जन्म दर ऊंची होती है, वास्तव में विस्तृत अर्थ में जन्म दर से अभिप्राय प्रजनन दर से ही लगाया जाता है। प्रजनन दर को किसी जनसंख्या में होने वाले जन्मों की संख्या के आधार पर मापा जाता है। प्रजनन दर की अधिकाधिक सही जानकारी हेतु अनेक विधियों का प्रतिपादन किया गया। जिसमें से प्रजनन को मापने की मुख्य विधियाँ इस प्रकार है:– अशोधित जन्म दर – साधारण शब्दों में अशोधित जन्म दर एक वर्ष में जन्में कुछ बच्चों की संख्या का उसी वर्ष के मध्य की कुल जनसंख्या से निकाला गया वह अनुपात है जो 1000 से व्यक्त किया जाता है। सामान्य प्रजनन दर, अशोधित जन्म दर का संशोधित रूप है, जिसमें समस्त जनसंख्या को आधार न मानकर केवल संतानोत्पादन आयु वर्ग की स्त्रियों के आधार पर आंकलन किया जाता है। आयु विशिष्ट प्रजनन दर, इसकी गणना करने के लिए स्त्रियों को उप वर्गों में बांटकर प्रत्येक उपवर्ग की अलग–अलग आयु विशिष्ट प्रजनन दर की गणना की जाती है। कुल प्रजनन दर, आयु विशिष्ट प्रजनन दरों के योग को आयु वर्गांतर से गुणा करके तथा एक हजार से भाग देकर इसे प्राप्त किया जा सकता है। इसे प्रतिस्थापन दर भी कहते हैं। कुल पुनरूत्पादन दर निकालने के लिए कुल प्रजनन दर को कुल जन्म में लड़कियों (बालिक शिशु) के अनुपात से गुणा कर दिया जाता है। शुद्ध पुनरूत्पादन दर, जब कुल पुनरूत्पादन दर में मृत्यु के तत्व को भी सम्मिलित कर लिया जाता है तो शुद्ध पुनरूत्पादन दर की गणना की जाती है। योगात्मक प्रजनन दर, यह कुल प्रजनन दर के ही समान है, केवल अन्तर यह है कि यह प्रति हजार स्त्रियों के सम्पूर्ण प्रजनन काल में उत्पन्न किये गये बच्चों की संख्या प्रकट करता है। शिशु स्त्री अनुपात, इससे किसी भी देश की जनसंख्या में वयस्क स्त्रियों की प्रजननता को मापा जा सकता है। समान्यतया इसमें 5 वर्ग से कम आयु के बच्चों की संख्या 15 से 44 वर्ष की आयु वर्ग की प्रति हजार स्त्रियों के अनुपात में दर्शाया जाता है। दोनों लिंग के बच्चों की संख्या जिनकी आयु 5 वर्ष से कम है।

अधिकांश विकासशील देशों में ऊंची जन्म दर ही पायी जाती है। भारत जैसे विकासशील देश में भी ऊंची जन्म दर पायी जाती है। भारत में ऊंची जन्म दर के मुख्य कारण है। सामाजिक व धार्मिक दृष्टि से विवाह संस्था एक अनिवार्यता है। अतः हर व्यक्ति विवाह करके संतान उत्पन्न करना अनिवार्य समझता है। बड़ा परिवार सामाजिक सुरक्षा व समृद्धि का प्रतीक माना जाता है। कम आयु में विवाह होने पर दम्पत्ति को बहुत लम्बी प्रजनन अवधि मिल जाती है। भारत में सन्तान के जन्म को ईश्वर की देन समझा जाता है। भारत में स्त्रियों की सामाजिक स्थिति बहुत निम्न है। भारत की ऊष्ण जलवायु, परिवार नियोजन की व्यवस्था का उचित क्रियान्वयन न होना, शिशु मृत्यु दर का अधिक होना भी ऊंची जन्म दर के लिए उत्तरदायी है।

मृत्यु दर का प्रयोग मृत्यु का जनसंख्या पर दबाव मापने के लिए किया जाता है। मृत्यु दर द्वारा दो या अनेक देशों, राज्यों अथवा समयावधि में मृत्यु की स्थिति की तुलना की जा सकती है। मृत्यु दर को मापने की अनेक विधियाँ है। साधारण तथा जनसंख्या विश्लेषण में मुख्य निम्न मृत्यु दर निकाली जाती है। सामान्यतया अशोधित मृत्यु दर को ही मृत्यु दर कहा जाता है। यह वह दर है जो प्रति एक हजार व्यक्तियों पर मृत्यु की संख्या दर्शाती है। इसे अशोधित इसलिए कहते हैं क्योंकि इसमें जनसंख्या के गठन पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता। विशिष्ट मृत्यु दर, एक या एक से अधिक विशेषताओं के आधार पर निकाली गयी मृत्यु दर को विशिष्ट मृत्यु दर कहते हैं। जैसे आयु विशिष्ट मृत्यु दर, लिंग विशिष्ट मृत्यु दर आदि। आयु विशिष्ट मृत्यु दर आयु वर्ग तथा तत्सम्बन्धित मृत्यु संख्या का प्रति हजार में व्यक्त अनुपात है। मातृत्व मृत्यु दर, शिशु जन्म के कारण जिन स्त्रियों की मृत्यु हो जाती है। उसे मातृत्व मृत्यु दर द्वारा दर्शाया जाता है। शिशु मृत्यु दर,एक वर्ष में प्रति हजार सजीव जन्मों में कितने शिशुओं की मृत्यु एक वर्ष की आयु के भीतर हुई है।आर्थिक विकास के साथ–साथ किसी देश में स्वास्थ्य सेवाओं व आर्थिक व सामाजिक व्यवस्था में सुधार होता है जिससे मृत्यु दर में कमी आती है। मृत्यु दर में इस कमी के मुख्य कारण है। स्वास्थ्य व चिकित्सा सुविधाओं का विकास व सुधार है जिससे महामारी जैसे प्लेग, हेज, टीबी आदि पर रोक लगी है। जन सुविधाओं में वृद्धि, महिलाओं की साक्षरता में वृद्धि, सामाजिक व धार्मिक अंधविश्वास में कमी, लोगों के रहन–सहन तथा जीवन स्तर में सुधार, महिला व बाल विकास मंत्रालय के तहत मातृत्व व शिशु की पूरी देखभाल की जाती है तथा ''आशा'' द्वारा गर्भवती महिला तथा उसकी प्रसूति की उचित व्यवस्था की जाती है जिससे मातृत्व मृत्यु दर व शिशु मृत्यु दर में कमी आयी है।

20.9 शब्दावली :–

- **जनगणना** – पूर्ण जनता की गणना, भारत में प्रत्येक 10 वर्ष बाद देश की सम्पूर्ण जनता की गणना की जाती है।
- **सन्तोषजनक आयु वर्ग** – स्त्रियों का 15–44 वर्ष का आयु वर्ग जो सन्तान उत्पन्न करने योग्य हो।
- **प्रत्याशित आयु** – किसी व्यक्ति के जीवित रहने की आयु या आयु तक जीवित रहने की संभावना।
- **जनसंख्या विस्फोट** – वह स्थिति जिसमें ऊंची जन्म दर तथा निम्न मृत्यु दर के कारण जनसंख्या में तेजी से वृद्धि होती है।

20.10 अभ्यास प्रश्न :–

रिक्त स्थान भरों :–

1. प्रारम्भ में जनसंख्या सम्बन्धी अधिकांश अध्ययन केवल जनगणना तक ही सीमित था, लेकिन 20वीं शताब्दी में इसमें जनसख्या के .... पहलुओं का भी अध्ययन किया जाने लगा।

2. विकास की प्रारम्भिक अवस्था में जन्म दर .... होती है।
3. प्रजनन दर को किसी जनसंख्या में होने वाले .... के आधार पर मापा जाता है।
4. सामान्य प्रजनन दर .... जन्म दर का संशोधित रूप है।
5. किसी विशिष्ठ आयु वर्ग की प्रति हजार स्त्रियों द्वारा जन्मित बच्चों की संख्या ही .... प्रजनन दर कहते हैं।
6. आयु विशिष्ट प्रजनन दर को .... दर भी कहते हैं।
7. कुल पुनरूत्पादन दर निकालने के लिए कुल प्रजनन दर को कुल जन्म में लड़कियों के अनुपात से .... कर दिया जाता है।
8. जब कुल पुनरूत्पादन दर में .... के तत्व को भी सम्मिलित कर लिया जाता है तो शुद्ध पुनरूत्पादन दर की गणना की जाती है।
9. सामान्यतया अशोधित मृत्यु दर को ही .... कहा जाता है।
10. एक या एक से अधिक विशेषताओं के आधार पर निकाली गयी मृत्यु दर को .... दर कहते हैं।
11. शिशु जन्म के कारण जिन स्त्रियों की मृत्यु हो जाती है। उसे .... मृत्यु दर कहते हैं।
12. शिशु मृत्यु दर से पता चलता है कि एक वर्ष में प्रति हजार सजीव जन्मों में कितने शिशुओं की मृत्यु .... की आयु के भीतर हुई है।

उत्तर–

(1) गुणात्मक (2) ऊँची (3) जन्मों की संख्या (4) अशोधित जन्म दर (5) आयु विशिष्ट प्रजनन दर (6) प्रतिस्थापन दर (7) गुणा (8) मृत्यु के तत्व (9) मृत्यु दर (10) विशिष्ट मृत्यु दर (11) मातृत्व मृत्यु दर (12) एक वर्ष ।

20.11 सन्दर्भ ग्रन्थ :–

- गोयल, डॉ० एन०पी०, (1995–96), *जनांकिकी के सिद्धान्त*, जयश्री प्रकाशन, मुजफ्फरनगर।
- सिंह एस.पी. (2006), सांख्यिकी सिद्धांत एवं व्यवहार, एस. चन्द एण्ड कम्पनी प्रा. मिल., नई दिल्ली।
- Sharma, Rajendra K. (2007) '*Demography and population problems*', Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd. New Delhi.
- http://adph.org/healthstats/assets/Formulas.pdf
- http://www.authorstream.com/Presentation/aSGuest132895-1396406-demographic-rates-and-ratios/
- http://www.sociologydiscussion.com/demography/population-growth/measuring-birth-rate-top-10-methods/2984

- http://nsdl.niscair.res.in/jspui/bitstream/123456789/849/1/DemograhicMethods.pdf

20.12 सहायक/उपयोग पाठ्य सामग्री

- Pathak, K.B and F Ram (2015), '*Techniques of Demographic Analysis'*, Himalaya Publishing House Pvt. Ltd. Delhi.

20.13 निबन्धात्मक प्रश्न :–

1. भारत में ऊंची जन्म दर तथा निम्न मृत्यु दर के क्या कारण है।
2. जन्म दर से क्या समझते हैं ? जन्म दर को मापने की विधियों की व्याख्या कीजिए।
3. मृत्यु दर से क्या अभिप्राय है ? मृत्यु दर की गणना किस प्रकार की जाती है।
4. निम्न के सूत्र लिखो :–
   - अशोधित जन्म दर
   - सामान्य प्रजनन दर
   - कुल प्रजनन दर
   - शिशु स्त्री अनुपात
   - अशोधित मृत्यु दर
   - आयु विशिष्ट मृत्यु दर
   - मातृत्व मृत्यु दर
   - शिशु मृत्यु दर
5. निम्न की व्याख्या उदाहरण सहित कीजिए।
   - आयु विशिष्ट प्रजनन दर
   - कुल पुनरूत्पादन दर
   - विशिष्ट मृत्यु दर

इकाई–21 राष्ट्रीय सांख्यिकी संगठन एवं राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन

21.1 प्रस्तावना (Introduction):–

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से आप भारत की सांख्यिकीय व्यवस्था को समझेंगे। जन्म मृत्यु सांख्यिकीय विश्लेषण एवं सांख्यिकीय सर्वेक्षण संस्थान खण्ड की यह 21वीं इकाई है इससे पूर्व की इकाई में हमें जन्म एवं मृत्यु की सांख्यिकीय विश्लेषण की जानकारी हुई।

प्रस्तुत इकाई में भारत की राष्ट्रीय सांख्यिकीय संगठन एवं राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की विस्तृत जानकारी प्रस्तुत की जा रही है कि भारत की सांख्यिकीय व्यवस्था में इन संस्थाओं की पूर्ण कार्य प्रणाली क्या है।

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन से आप भारत की सांख्यिकीय व्यवस्था को समझेंगे।

21.2 उद्देश्य (Objectives):–

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप :–

- ✓ राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था की जानकारी प्राप्त करेंगे।
- ✓ केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन की व्यवस्था तथा कार्यों को समझ सकेंगे।
- ✓ राष्ट्रीय सांख्यिकीय व्यवस्था में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की भूमिका को समझ सकेंगे।

21.3 राष्ट्रीय सांख्यिकीय संगठन की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि (Historical Background of National Statistical Organisation):–

किसी देश के व्यवस्थित आर्थिक विकास नीति की रचना तथा उसकी प्रगति (पर्याप्त, विश्वसनीय तथा यथार्थ) संमकों की निरन्तर उपलब्धता पर निर्भर करती है। भारत में समंक संकलन की परम्परा बहुत पुरानी है। कौटिल्य के 'अर्थशास्त्र' तथा 'आईन– ए–अकबरी' में भारत की तत्कालीन आर्थिक स्थिति के आंकड़ों के संकलन के अनेक प्रसंग मिलते हैं।

भारत में 1881 का वर्ष सांख्यिकीय विकास की दृष्टि से बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इस वर्ष प्रथम विधिवत जनगणना सम्पन्न की गयी तथा आर्थिक आंकड़ों के आधार पर भारत के इम्पीरियल गेजेटियर का प्रथम बार प्रकाशन किया गया और विभिन्न प्रान्तों में कृषि विभाग स्थापित किया गया। जिसे सांख्यिकीय संस्थान का दायित्व भी सौंपा गया। 1996 में पहली बार इण्डियन ट्रेड जनरल पत्रिका का प्रकाशन हुआ। 1930 में कृषि अनुसंधान साम्राज्य परिषद् तथा 1933 में सांख्यिकीय शक्ति संस्थान की स्थापना की गई। 1942 में औद्योगिक समंक अधिनियम पारित किया गया। 1946 से निर्माण उद्योगों के वार्षिक संमक संकलन का कार्य होने लगे।

अगस्त 1947 में भारत के स्वतंत्रता प्राप्ति के बाद समंक संकलन व प्रकाशन के कार्यों में तेजी पकड़ी। 1947 से आर्थिक सलाहकार के थोक मूल्य सूचकांकों का प्रकाशन शुरू हुआ। 1949 में राष्ट्रीय आय समिति की नियुक्ति की गई। 1950 में राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण निदेशालय की स्थापना की गई 1970 में इसे राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन के रूप पुनर्गठन किया गया। 1951 में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन की स्थापना की गई। 1959 में भारतीय सांख्यिकीय संस्थान की स्थापना की गई। 1961 में सांख्यिकीय विभाग का गठन किया गया। 1967 में संगणक केन्द्र की स्थापना हुई। 1977 में आर्थिक संगणना का कार्य आरम्भ हुआ और राष्ट्रीय स्तर पर संमक बैंक का गठन किया गया। 1982 में राष्ट्रीय सांख्यिकीय सलाहकार मण्डल की स्थापना हुई और 1993 में भारत संयुक्त राष्ट्र सांख्यिकीय आयोग का सदस्य चुना गया।

21.4 भारत में वर्तमान सांख्यिकीय व्यवस्था (Existing Statistical System in India):–

सांख्यिकीय विभाग तथा कार्यान्वयन विभाग के 15 अक्टूबर 1999 में सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय एक स्वतंत्र मंत्रालय के रूप में अस्तित्व में आया। मंत्रालय में दो खण्ड है। एक सांख्यिकी से संबंधित तथा दूसरा कार्यक्रम कार्यान्वयन से संबंधित है।

सांख्यिकीय खण्ड– इसे राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय (NSO) कहा जाता हैं जिसमें केन्द्रीय संगठन (CSO) तथा संगणक केन्द्र तथा NSSO है।

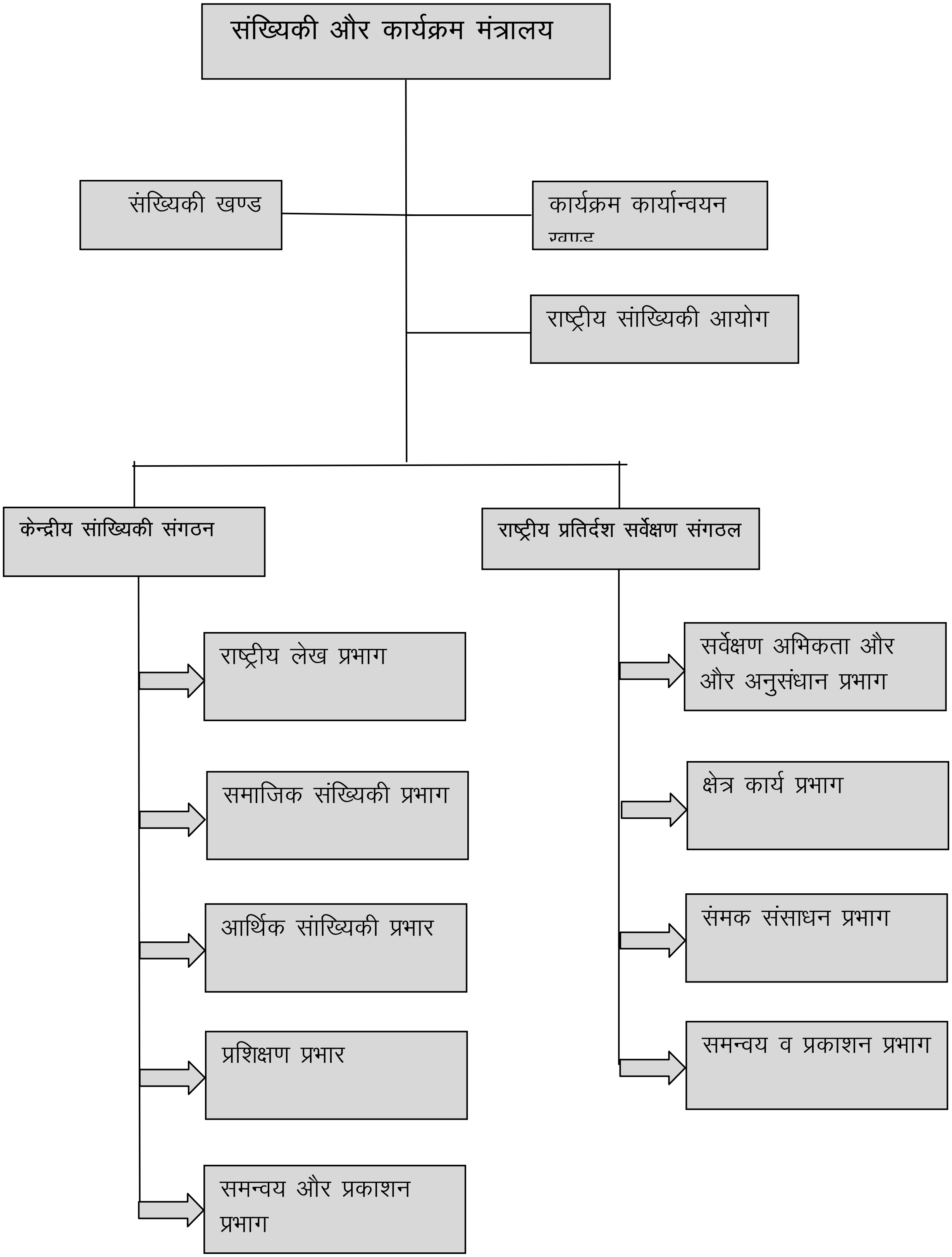
कार्यक्रम कार्यान्वयन खण्ड– इसमें तीन प्रभाग है बीस सूत्री कार्यक्रम, आधारभूत संरचना प्रबोधन तथा परियोजना प्रबंधन तथा सांसद स्थानीय क्षेत्र विकास योजना।

राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय द्वारा किये जाने वाले मुख्य कार्य निम्न प्रकार हैं–

1. राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय देश के योजनाबद्ध विकास हेतु नोडल एजेन्सी के रूप में कार्य करता है।
2. यह भारत सरकार के विभिन्न मंत्रालयों, विभागों तथा राज्यों के सांख्यिकीय विभागों के कार्यों में समन्वय स्थापित करता है।
3. राष्ट्रीय उत्पाद, सरकार तथा निजी उपभोग, पूंजी निर्माण, बचत आदि से संबंधित अनुमान लगाना तथा आंकड़ों का प्रकाशन करना।
4. विभिन्न सामाजिक आर्थिक क्षेत्रों में संबंधित विभिन्न समस्याओं के अध्ययन हेतु आवश्यक आंकड़े तैयार करना।
5. सांख्यिकीय के विभिन्न विषयों से संबंधित संगोष्ठियों, कार्याशालाओं तथा सम्मेलनों की वित्त व्यवस्था करना।
6. देश के आधारभूत संरचना के क्षेत्रों के कार्यों के निष्पादन पर कार्यक्रम कार्यान्वयन खण्ड द्वारा निगरानी रखी जाती है।
7. अंतर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय संगठनों से सम्पक्र बनाये रखना।

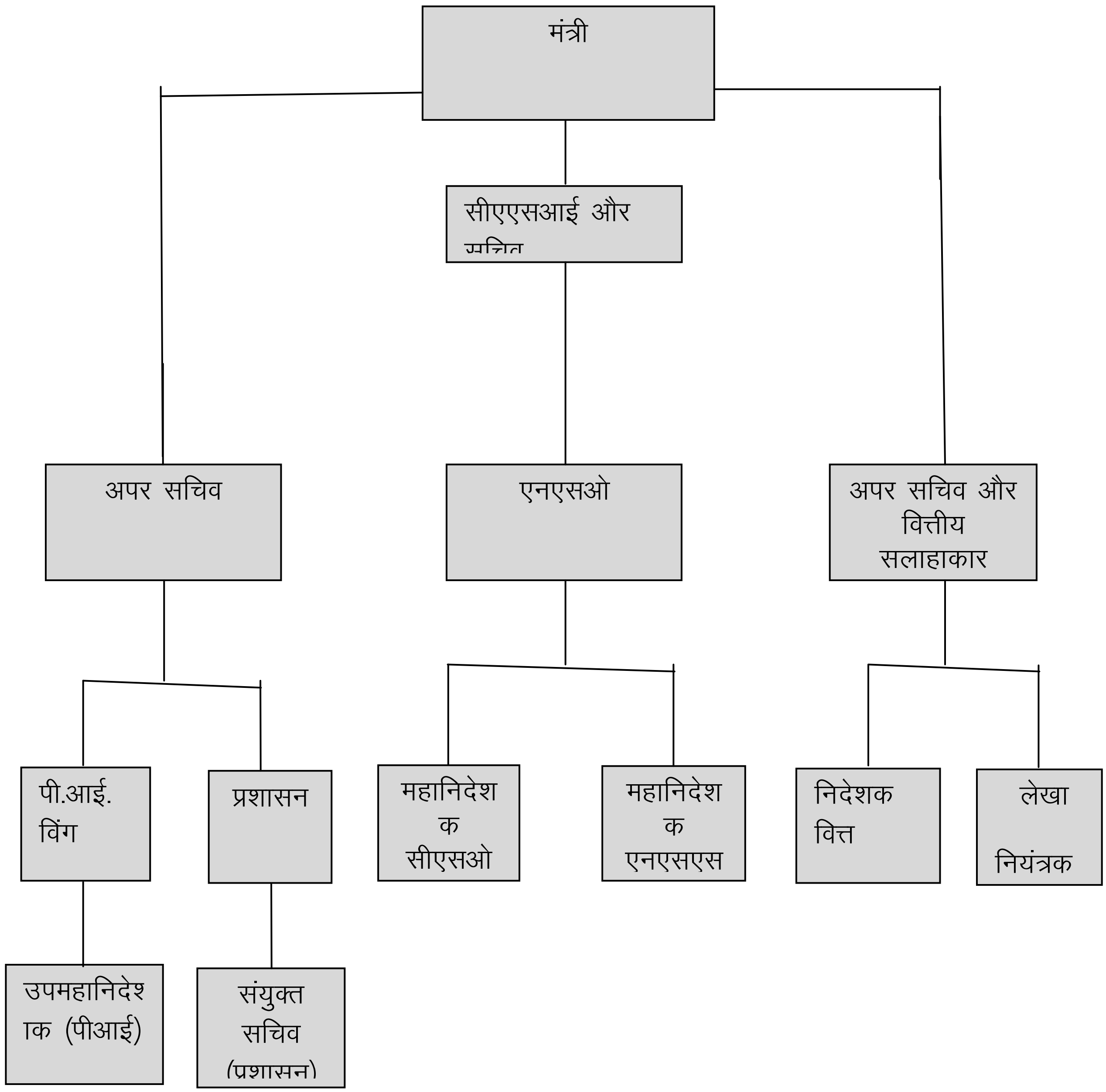
सरकारी, अर्द्धसरकारी अथवा निजी आंकड़ों का प्रसार करना।

1. सरकारी, अर्द्धसरकारी अथवा निजी आंकड़ों का प्रसार करना।


संख्यिकी और कार्यक्रम मंत्रालय
संख्यिकी खण्ड
कार्यक्रम कार्यान्वयन
राष्ट्रीय सांख्यिकी आयोग
केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन
राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठल
राष्ट्रीय लेख प्रभाग
समाजिक संख्यिकी प्रभाग
आर्थिक सांख्यिकी प्रभार
प्रशिक्षण प्रभार
समन्वय और प्रकाशन प्रभाग
सर्वेक्षण अभिकता और और अनुसंधान प्रभाग
क्षेत्र कार्य प्रभाग
संमक संसाधन प्रभाग
समन्वय व प्रकाशन प्रभाग

संगठन चार्ट

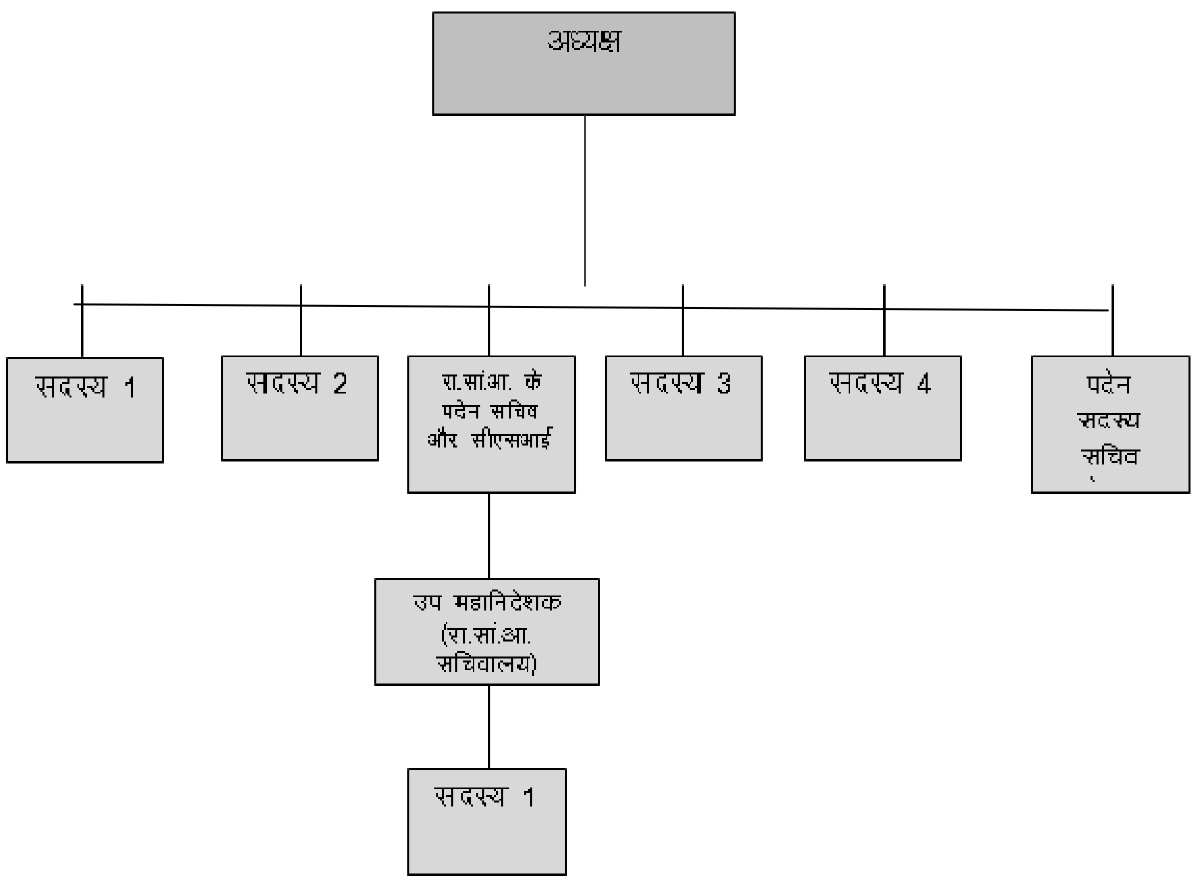
संख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय



21.5 राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग (National Statistical Commission):–

भारत सरकार ने 1 जून, 2005 के एक संकल्प द्वारा राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग (एन. एस.सीत्र) का गठन करने का निर्णय लिया। राष्ट्रीय आयोग की स्थापना वर्ष 2001 में रंगराजन आयोग द्वारा भारतीय सांख्यिकीय प्रणाली की समीक्षा करने तथा मंत्रिमंडल द्वारा इस सिफारिश को स्वीकार करने के उपरांत की गयी थी। राष्ट्रीय सांख्यिकी आयोग का गठन 12 जुलाई, 2006 को किया गया था और यह तभी से कार्य कर रहा है। राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग में एक अंशकालिक अध्यक्ष तथा चार अंशकालिक सदस्य हैं जो विशिष्ट सांख्यिकीय क्षेत्रों में विशेषता रखने वाले तथा अनुभवती व्यक्ति हैं। इसके अलावा, सचिव, नीति आयोग एन.ए.सी. के पदेन सदस्य हैं। अंशकालिक अध्यक्ष/सदस्य का अधिकतम कार्यकाल तीन वर्ष का होता है। भारत के मुख्य सांख्यिकीविद् राष्ट्रीय सांख्यिकी आयोग के सचिव है। वे सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय में भारत सरकार के भी सचिव हैं। वर्तमान में डा0 आर0 बी0 बर्मन अध्यक्ष हैं।

<u>संगठन चार्ट राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग</u>



राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग का मुख्य उद्देश्य देश की सांख्यिकीय संस्थाओं द्वारा आंकड़ों के संकलन में आने वाली कठिनाइयों में कमी लाना है। इस हेतु आयोग केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन तथा केन्द्र और राज्य के विभिन्न विभागों के मध्य समन्वय स्थापित करता है।

21.6 केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organisation):–

1925 में स्थापित 'आर्थिक समिति' का सुझाव था कि देश में सांख्यिकी व्यवस्था को सुचारू रूप देने हेतु राष्ट्रीय स्तर पर एक केन्द्रीय सांख्यिकी संस्थान तथा राज्यों में सांख्यिकी प्रभागों की स्थापना की जानी चाहिए। जिसका समर्थन शाही कृषि आयोग ने भी किया था। सरकार ने इन सुझावों को ध्यान में रखते हुए 1951 में मंत्रिमंडल सचिवालय के अधीन एक केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन की स्थापना की गई। 1954 में वित्त मंत्रालय से राष्ट्रीय आय आंकलन का कार्य केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन को हस्तांतरित किया गया। 1957 में औद्योगिक समंक निदेशालय का कार्य वाणिज्य एवं उद्योग मंत्रालय से इस केन्द्रीय संगठन के पास आ गया। 1961 से सांख्यिकी विभाग के अधीन कर दिया गया है। 1973 में केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का कार्य योजना मंत्रालय के सांख्यिकी विभाग को हस्तांतरित कर दिया गया। वर्तमान में केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, सांख्यिकी एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन मंत्रालय के अंतर्गत कार्य कर रहा है। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, राष्ट्रीय सांख्यिकी संगठन के दो खण्डों में से एक हैं, जो देश के सांख्यिकीय कार्यकलापों को समन्वय करता है तथा सांख्यिकीय मानकों का विकास और उसका अनुरक्षण करता हैं। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का कार्यालय सरदार पटेल भवन, संसद मार्ग, नई दिल्ली में स्थित है।

संगठन–

केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का संचालन एक निदेशक मण्डल द्वारा किया जाता है। जिसमें एक प्रमुख महानिदेशक तथा 5 अपर महानिदेशक होते हैं। जो राष्ट्रीय लेखा प्रभाग, सामाजिक सांख्यिकी प्रभाग, अर्थ सांख्यिकी प्रभाग, प्रशिक्षण प्रभाग और समन्वय एवं प्रकाशन प्रभाग का कार्य देखते हैं।

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के प्रभाग–

केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन के कार्यों को सुचारू रूप से चलाने के लिए 5 प्रमुख प्रभाग है। जो इस प्रकार हैं।

1. **राष्ट्रीय लेखा प्रभाग :–**

यह प्रभाग राष्ट्रीय लेखे तैयार करने के लिए जिम्मेदार है, जिनमें सकल घरेलू उत्पाद, सरकारी और प्राइवेट अंतिम खपत व्यय और स्थायी पूंजी निर्माण के अन्य कार्य भी शामिल हैं। यह प्रभाग एक वार्षिक प्रकाशन तैयार करता है, जिसका नाम है– 'राष्ट्रीय लेखा सांख्यिकी', जिसमें ये सांख्यिकी दी जाती है।

2. **सामाजिक सांख्यिकी प्रभाग :–**

इस प्रभाग को मिलेनियम डेवलपमेंट गोल, पर्यावरण संबंधी आर्थिक लेखाकरण, कार्यशाला/संगोष्ठी/ सम्मेलन आयोजित करने के लिए सहायता अनुदान देना, सांख्यिकी बिलों के लिए राष्ट्रीय/अंतराष्ट्रीय पुरस्कार, सामाजिक–धार्मिक वर्गों पर राष्ट्रीय डेटा बैंक

तैयार करना, स्थानीय स्तरीय विकास के लिए बुनियादी सांख्यिकी प्रायोगिक योजना बनाना, समय उपयोग सर्वेक्षण तथा नियमित और तदर्थ सांख्यिकीय प्रकाशन जारी करना।

3. आर्थिक सांख्यिकी प्रभाग :–

यह प्रभाग आर्थिक गणना और वार्षिक औद्योगिक सर्वेक्षण करता है, अखिल भारतीय औद्योगिक वर्गीकरण और राष्ट्रीय उत्पाद वर्गीकरण जैसे वर्गीकरण तैयार करता है।

4. प्रशिक्षण प्रभागः–

इस प्रभाग की मुख्य जिम्मेदारी जनशक्ति को सांख्यिकी के सिद्धांतों और अनुप्रयोगों का प्रशिक्षण देना है। यह प्रभाग राष्ट्रीय सांख्यिकीय प्रणाली प्रशिक्षण अकादमी की भी देख–रेख करता है, जो भारत में आधिकारिक सांख्यिकी से मानव संसाधन विकास और अंतर्राष्ट्रीय स्तर, विशेषतः विकासशील और साक्र देशों के लिए भी एक प्रमुख संस्थान है।

5. समन्वय और प्रकाशन प्रभाग :–

यह प्रभाग केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन और संबंधित मंत्रालयों तथा राज्य/संघ राज्य क्षेत्र की सरकारों के साथ सांख्यिकी मामलों, केन्द्र और राज्य सांख्यिकीय संगठनों की गोष्ठियों के आयोजन के कार्य को देखता है और प्रतिवर्ष सांख्यिकी दिवस मनाता। यह प्रभाग क्षमता विकास योजना और भारत सांख्यिकी सुदृढ़ीकरण परियोजना के कार्यान्वयन के लिए भी जिम्मेदार है। ये योजनाए विश्व बैंक की सहायता से केन्द्र द्वारा प्रायोजित योजनाए हैं। भारतीय सांख्यिकीय संस्थान से संबंधित प्रशासनिक कार्य भी प्रभाग देखता है।

केन्द्रीय संख्यिकी संगठन के कार्य

1 संख्यिकी संकलन में समन्वय –

केन्द्रीय संख्यिकी संगठन का मुख्य कार्य विभिन्न मंत्रालयों तथा राज्यों के विभागों द्वारा संकलित समंकों के बीच समन्वय बनाये रखना है ताकि समंकों में एकरुपता आये और अनावश्यक दोहरेपन से होने वाले अपव्यय को रोका जा सकें।

2 परिभाषाओं एवं मानको को निर्धारण –

समकों की राष्ट्रीय और अन्तराष्ट्रीय तुलनात्मकता में वृद्वि करने और उनके वास्तविक स्तर में निरन्तर सुधार करने की दृष्टि से संगठन द्वारा आदर्श परिभाषाओं और मानको का निर्धारण किया जाता है।

3 परामर्श अन्तराष्ट्रीय संपक्र प्रशिक्षण प्रदान करना–

विभिन्न प्रशिक्षण कार्यक्रमों में देखभाल करने और राष्ट्रीय सांख्यिकीय प्रणाली प्रशिक्षण अकादमी का मार्गदर्षन करने के उद्देश्य से भारत सरकार के वरिष्ठ अधिकारियों और प्रतिष्ठित संस्थानों से विशेषज्ञों को सदस्यों के रूप में शामिल करते हुए महानिदेशक, सीएसओ की अध्यक्षता में ' प्रशिक्षण कार्यक्रम अनुमोदन समिति' नामक एक उच्च स्तरीय समिति का गठन किया गया है। समिति सभी मोड्यूल्स के लिए पाठ्यक्रम, अवधि और प्रशिक्षण विधियों के अलावाा आवश्यकता आधारित प्रशिक्षण कैलेण्डर का मूल्यांकन और अनुमोदन करती है। अधिकतर पाठ्यक्रमों का संचालन राष्ट्रीय सांख्यिकीय प्रणाली प्रशिक्षण अकादमी में किया जाता है, जबकि कुछ विषिष्ट पाठ्यक्रम दिल्ली या बाहर स्थित अति विश्वसनीय प्रतिष्ठित संस्थानों/संगठनों के माध्यम से आयोजित किए जाते हैं। विभिन्न विश्वविद्यालयों द्वारा प्रायोजित छात्रों को केन्द्र के

अधिकारियों के मार्गदर्षन के अंतर्गत आईटी से संबंधित परियोजनाएं विकसित करने के लिए दो से छह माह की अवधि के लिए इंटर्नशिप प्रदान कर रहा है।

4 आँकड़े एकत्र करना –

दिल्ली एवं उसके आसपास स्थित विभिन्न सरकारी मंत्रालयों/विभागों/ संगठनों तथा सार्वजनिक उपक्रमों की आंकड़ा संसाधन आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए मंत्रिमंडल सविचालय के अंतर्गत तत्कालीन सांख्यिकी विभाग के तहत 1967–68 में संगणक केन्द्र की स्थापना की गई थी। इस केंद्र में अब प्रचालन प्रणाली के रूप में विंडोज 10 का उपयोग करते हुए क्लाइंट/सर्वर आक्रिटेक्चर के अंतर्गत एक अत्याधुनिक पीसी–आधारित कम्प्यूटर प्रणाली को स्थापित किया गया है। संगणक केन्द्र ने छठी आर्थिक गणना 2012 का आंकड़ा प्रसंस्करण कर दिया है और केन्द्रीय सांख्यिकी कार्यालय के तहत कार्य कर रहा है। यह केन्द्र राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षणों, आर्थिक गणना और वार्षिक औद्योगिक सर्वेक्षण के माध्यम से सृजित यूनिट स्तर के आंकड़ों का प्रसारण करता है। केन्द्र का सर्वर **24X7X365** आधार पर चलता है। संगणक केन्द्र ने आंकड़ा केन्द्र के अपग्रेडिंग तथा रखरखाव के लिए हार्डवेयर तथा सॉफ्टवेयर की खरीद करता है।

5 आर्थिक गणना का आयोजन –

पहली आर्थिक गणना 1976 में दूसरी 1990 में आयोजित की गई। छठी आर्थिक गणना 2012 में आयोजित की गई। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण के 73वें दौर के लिए छठी आर्थिक गणना पर आधारित क्षेत्र–फ्रेम का उपयोग किया गया है तथा सेवा क्षेत्र को समप्रित एनएसएस के अगले 74वें दौर के लिए छठी आर्थिक गणना के अनुसार 10 या इससे अधिक मजदूरों वाले उद्यमों के लिए सूची फ्रेम का उपयोग किया जा रहा है। राष्ट्रीय व्यापार रजिस्टर तैयार करने के लिए छठी आर्थिक गणना के आंकड़े प्रयोग किया गए हैं।

6 राष्ट्रीय लेखा आकलन–

राष्ट्रीय लेखा आकलन में संगठन के महत्वपूर्ण क्रियाकलाप इस प्रकार हैः–

- वर्तमान और स्थिर कीमतों पर सकल घरेलू उत्पाद (जीडीपी) का तिमाही अनुमान तैयार करना।
- स्थायी पूंजी के पूंजी स्टॉक और खपत का अनुमान तैयार करना।
- राज्यवार सकल मूल्य संवर्धन का अनुमान तैयार करना और रेलवे, संचार, बैंकिंग तथा बीमा और राज्य घरेलू उत्पाद के तुलनात्मक अनुमान तैयार करना।

7 सामाजिक सांख्यिकी –

सामाजिक सांख्यिकी में पर्यावरण सांख्यिकी सहित सामाजिक–सांख्यिकी के विकास को समन्वित करने का दायित्व सौंपा गया है। सामाजिक सांख्यिकी के दायरे में जनसंख्या, गरीबी, मानव विकास, रोजगार, स्वासथ्य, शिक्षा, सामाजिक न्याय, महिला सशक्तिकरण, लैंगिक सांख्यिकी, विकलांगता, पर्यावरण, सहस्राब्दि विकासात्मक लक्ष्यों

की सांख्यिकीय निगरानी, वहनीय विकासात्मक लक्ष्यों, तथा साक्र विकास लक्ष्यों और साक्र सामाजिक चार्टर की सांख्यिकी संबंधी निगरानी को शामिल किया गया है।

8 प्रदर्शन व प्रचार प्रकाशन–

संगठन द्वारा नियमित रुप से कुछ पत्र पत्रिकाओं का प्रकाशन किया जाता है प्रमुख प्रकाशन इस प्रकार है।

(i) सांख्यिकीय सारांश– भारत (वार्षिक) (Statistical Abstract- India-Annual)

(ii) सांख्यिकीय पॉकेट बुक– भारत (वार्षिक) (Statistical Pocket Book-India-Annual)

(iii) सांख्यिकीय का मासिक सारांश (Monthly Abstract of Statistics)

(iv) उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण (Annual Survey of Industries)

(v) भारतीय अर्थव्यवस्था समंको में (Indain Economy in Figures)

(vi) राष्ट्रीय आय समंक (National Income Statistics)

(vii) भारत में सांख्यिकी व्यवस्था (Statistical System in India)

(viii) राष्ट्रीय वाणिज्य सांख्यिकी– स्रोत एवं विधि (वार्षिक) (National Accounts Statistics Sources & Method Annual)

21.7 राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन (National Sample Survey Organisation):–

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण की स्थापना सामाजिक, आर्थिक, औद्योगिक, कृषि तथा जनसंख्या संबंधी समको का विस्तृत संकलन करने हेतु 1950 में की गयी थी। जनवरी 1971 में केन्द्र सरकार ने साख्यिकीय विभाग के अधीन राष्ट्रीय संगठन की स्थापना विभाग के अधीन राष्ट्रीय संगठन की स्थापना की गयी। फरवरी 1973 से यह संगठन योजना मंत्रालय के साख्यिकी विभाग के अधीन कार्य कर रहा था। वर्तमान में केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, सांख्यिकी एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन मंत्रालय के अंतर्गत कार्य कर रहा है।

संगठन व प्रबंधः–

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण कार्यालय (एन.एस.एस.ओ.) के प्रमुख एक महानिदेशक होते हैं, जो अखिल भारतीय आधार पर विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक स्तर पर प्रतिदर्श सर्वेक्षण करने के लिये जिम्मेदार होते हैं। प्रारम्भिक डेटा विभिन्न सामाजिक– आर्थिक विषयों पर राष्ट्रव्यापी स्तर पर घरों का सर्वेक्षण, वार्षिक, औद्योगिक सर्वेक्षण(ए.एस.आई.) आदि करके एकत्र किया जाता है। इन सर्वेक्षणों के अलावा राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण ग्रामीण और शहरी कीमतों से संबंधित डेटा एकत्र करता है।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन के निम्नलिखित चार प्रभाग हैंः

1. **सर्वेक्षण अभिकल्प और अनुसंधान प्रभाग :–**

यह प्रभाग कलकत्ता में स्थित है और सर्वेक्षणों की तकनीकी योजना तैयार करने, संकल्पनाएं और परिभाषाएं तैयार करने, अभिकल्प प्रतिदर्श करने, पूछताछ अनुसूचियां तैयार करने, तालिका योजना बनाने, सर्वेक्षण परिणामों के विश्लेषण और प्रस्तुतीकरण के लिये जिम्मेदार है।

2. फील्ड कार्य प्रभाग :–

इस प्रभाग का मुख्यालय दिल्ली/फरीदाबाद में स्थित है और इसका 6 आंचलिक कार्यालयों, 49 क्षेत्रीय कार्यालयों और 118 उप–क्षेत्रीय कार्यालयों का नेटवक्र है जो पूरे देश में फैला हुआ है। यह प्रभाग एन.एस.एस.ओ. द्वारा किये जाने वाले सर्वेक्षणों के लिये प्राथमिक डेटा के संकलन के लिये जिम्मेदार है।

3. डेटा संसाधन प्रभाग :–

इस प्रभाग का मुख्यालय कोलकाता में स्थित है और विभिन्न स्थानों में इसके 6 अन्य डेटा संसाधन केन्द्र हैं। यह प्रभाग प्रतिदर्श चयन, सॉफ्टवेयर विकास, संसाधन, सर्वेक्षण के माध्यम से एकत्र किये जाने वाले डेटा के वैद्यीकरण और तालिका तैयार करने के लिये जिम्मेदार हैं।

4. समन्वय और प्रकाशन प्रभाग :–

यह प्रभाग नई दिल्ली में स्थित है। यह प्रभाग एन.एस.एस.ओ. के विभिन्न प्रभागों के सभी क्रियाकलापों का समन्वय करता है। यह सर्वेक्षण नामक एन.एस.एस.ओ. की छमाही पत्रिका का प्रकाशन भी करता है और एन.एस.एस.ओ. द्वारा किये गये विभिन्न सामाजिक आर्थिक सर्वेक्षणों के परिणामों के संबंध में राष्ट्रीय संगोष्ठियां भी आयोजित करता है।

उददेश्यः– राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन निम्न उददेश्यों के लिये आंकडे एकत्र करता है।

1. नीति निर्माण।
2. कार्यक्रम क्रियान्वयन।
3. कार्यक्रमों का मूल्यांकन।
4. शोध व जन जाग्रति।
5. राष्ट्रीय विकास हेतु आर्थिक व प्रशासनिक निर्णय लेने हेतु।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन द्वारा किये जाने वाले मुख्य कार्य निम्न प्रकार हैं–

1. **मंत्रालयों एवं अन्य संस्थानों के लिये आवश्यक संमकों का संकलन करना :–** यह संगठन केन्द्रीय सरकार के विभिन्न मंत्रालयों, योजना आयोग, राज्य सरकारों व अन्य संस्थानों के लिये आवश्यक संमकों का संकलन करता है।
2. **बहुदेशीय सामाजिक– आर्थिक सर्वेक्षणों का आयोजन करना :–** संगठन का एक महत्वपूर्ण कार्य देश में बहु उद्देशीय सामाजिक आर्थिक सर्वेक्षण करना है। इस सर्वेक्षण में मुख्य रूप से निम्न पांच विषयों को शामिल किया जाता है–
   1. जनांकिकी, स्वास्थ्य एवं परिवार कल्याण।
   2. परिसम्पत्तियां, ऋण और पूँजी– विनियोजन।
   3. भूमि स्वामित्व एवं पशुधन उपक्रम।
   4. रोजगार, ग्रामीण श्रमिक एवं उपभोक्ता व्यय।
   5. गैर कृषि उपक्रमों में स्व– रोजगार।

   इनमें से पहले तीन विषयों पर दस वर्ष में एक–एक बार तथा बाद के दो विषयों पर पांच वर्ष में एक–एक बार सर्वेक्षण किया जाता है।
3. **औद्योगिक संमक संकलन :–** संगठित औद्योगिक क्षेत्र में दैव प्रतिदर्श सर्वेक्षणों द्वारा उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण के लिए कार्यक्षेत्रा तैयार करना, राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन का दायित्व है।

4. **कृषि संमको में सुधार** :– कृषि संमकों के क्षेत्रा में संगठन की राज्य सरकारों को फसल अनुमान सर्वेक्षण के संबंध में तकनीकी मार्गदर्शन प्रदान करता है तथा कृषि संमकों में सुधार की दृष्टि से सुझाव व सलाह देता है।
5. **मूल्य समंको का संकलन**– संगठन दो प्रकार के मूल्यों के आंकड़े एकत्रा करता है। कृषि व ग्रामीण क्षेत्र के लिये तथा शहरी गैर श्रमिक कर्मचारियों के लिये। इस हेतु संगठन 603 गांवो के मूल्यों का संकलन करता है तथा 59 शहरों में फैले 70 क्रेनो से आंकड़े एकत्र कर उपभोक्ब्ता मूल्य सूचकांक की रचना करता है।
6. **आर्थिक संगणना के अनुवर्त– सर्वेक्षणों का आयोजन करना** :– यह संगठन भारतीय सांख्यिकीय संस्थान कलकत्ता के सहयोग से दैव प्रतिचयन के आधार पर देश की विभिन्न आर्थिक, सामाजिक व जनांकिकीय समस्याओं से संबंधित समंक एकत्रित करता है तथा सरकार को प्रविधि संबंधी सलाह देता है।
7. **मंत्रालयों, विभागों तथा अन्य संस्थानों के लिये समंक संकलन**– संगठन विभिन्न केन्द्रीय मंत्रालयों, योजना, आयोग आदि के लिये समय– समय पर सर्वेक्षणों का आयोजन कर आवश्यक समंको का निकलन करता है।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन की कार्ययोजना–

प्रत्येक वार्षिक दौर की सर्वेक्षण अवधि तीन– तीन महीनों के चार उप दौरों में बांटी गयी है– जुलाई से सितम्बर, अक्टूअर से दिसम्बर, जनवरी से मार्च, और अप्रैल से जून। प्रत्येक उप दौर में सर्वेक्षण के लिये समान संख्या में प्रतिदर्श ग्रामों और खण्डो का आंवटन किया जाता है और सर्वेक्षण कार्य उसी उप दौर की अवधि में पूरा करना पड़ता है।

सर्वेक्षण का मुख्य सि़द्धांत – सर्वेक्षण करते समय निम्न सिद्धान्तों को ध्यान में रखकर सर्वेक्षण प्रक्रिया को पूर्ण किया जाता है।

(1) सर्वेक्षण का उद्देश्य
(2) समग्र को परिभाषित करना जहां से प्रतिचयन लिये जाने हैं।
(3) प्रतिचयन की इकाईयों का निर्धारण
(4) प्रतिचयन की उचित विधि का निर्धारण व चुनाव
(5) समंक संकलन की विधियों का निर्धारण
(6) प्रश्नावली तथा अनुसूची का निर्माण

गतिविधियां :–

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन के सर्वेक्षण विभिन्न चक्रों या दौरों में सम्पन्न किये जाते हैं। संगठन ने अपने सर्वेक्षण का प्रथम चक्र अक्टूबर 1950 से मार्च 1951 की अवधि में किया था। दिसम्बर 1991 तक संगठन सर्वेक्षण के 47 चक्र पूरे कर चुका है। पिछले दिनों संगठन द्वारा अपने सर्वेक्षण चक्र में निम्न विषयों को शामिल किया गया।

67 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2010 से जून 2011)– गैर कृषि उद्यमों विनिर्माण व्यापार और अन्य सेवायें निर्माण को छोड़कर।

68 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2011 से जून 2012)– रोजगार व बेरोजगारी तथा घरेलू उपभोक्ता व्यय।

69 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई – दिसम्बर 2012)– आवास की स्थिति में पानी की आपूर्ति और स्वच्छता तथा सफाई व्यवस्था।

70 वां सर्वेक्षण चक्र (जनवरी– दिसम्बर 2013)– भूमि एवं पशु धन की स्थिति और किसानों की कर्ज तथा निवेश की स्थिति।

71 वां सर्वेक्षण चक्र (जनवरी– दिसम्बर 2014)– स्वास्थ्य तथा शिक्षा पर सामाजिक खपत।

72 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2014– जून 2015)– उपभोक्ता व्यय, घरेलू पर्यटन और टिकाऊ वस्तुओं और सेवाओं की खपत।

73 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2016– जून 2017)– सेवा क्षेत्र– सार्वजनिक उद्यम, वायु परिवहन, वित्त व बीमा, निजी साहूकार, स्वयं सहायता समूह।

74 वें सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2016–जून 2017) के कामकाजी समूह ने प्रतिचयन अभिकल्प संबंधी अपने उप–समूहों की रिपोर्ट पर विचार–विमर्श करने के लिए प्रो0 बी0 एन0 गोदार की अध्यक्षता में 4 मई 2016 को नई दिल्ली में अपनी चौथी बैठक आयोजित की।

75 वें सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2017–जून 2018) के कार्यकारी समूह ने प्रो0 आर0 राधाकृष्ण, आर्थिक और सामाजिक अध्ययन केन्द्र, हैदराबाद की अध्यक्षता में 27–28 अक्टूबर 2016 की अपनी प्रथम बैठक आयोजित की।

75 वें सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2017–जून 2018) के कार्यकारी समूह के उप–समूह 4 (परिवार उपभोग व्यय संबंधी सर्वेक्षण के लिए) की प्रथम बैठक प्रो0 राधाकृष्ण अवैतनिक वरिष्ठ फैला, आर्थिक और सामाजिक अध्ययन केन्द्र, हैदराबाद की अध्यक्षता में 20 दिसम्बर, 2016 को सीईएसएस, हैदराबाद में आयोजित की गई।

21.8 भारतीय संख्यिकी व्यवस्था सम्बन्धी सामान्य दोष (General Demerits related to Indian Statistical System):–

भारत के आर्थिक विकास की नीति निर्माण एवं मूल्यांकन में समकों का विशेष महत्व है। जिससे सरकार अपनी नीति का मूल्यांकन कर अपनी नीति का पूर्ननिर्माण करती है, जिससे विकास को उचित दिशा मिल सकें। अतः संमको का उचित संकलन व मूल्यांकन आवश्यक है। लेकिन आज भी उचित संमक प्राप्त करना एक कठिन कार्य है। और उसमें सुधार की काफी सम्भावनायें है। संक्षेप में भारतीय सांख्यिकी व्यवस्था संबंधी सामान्य दोष इस प्रकार है–

1. **अपर्याप्तता एवं अपूर्णता**– भारतीय सांख्यिकी व्यवस्था का प्रमुख दोष उनकी अपर्याप्तता है। आज भी देश में अनेक महत्वपूर्ण विषयों के संबंध में पर्याप्त तथा पूर्ण संमक उपलब्ध नहीं है। अनेक दूरस्थ व दुर्गम स्थानों के मानचित्र नहीं बनाये गये है। इसी प्रकार अनेक आर्थिक क्रियाओं का संमक संकलन नहीं हो सका है। जो संमक संकलन हुआ है, उसमें भी अनेक सामाजिक व आर्थिक क्रियाओं को पूरी तरह समाहित नहीं किया गया है। जिससे वह संमक भी अपूर्ण व अपर्याप्त है।
2. **शुद्धता का अभाव**– शुद्धता की कमी के कारण प्राप्त संमक सही विषय स्थिति की जानकारी नहीं देते। जिससे निष्कर्ष भी गलत व खतरनाक हो जाते हैं। संमकों में शुद्धता के अभाव के मुख्य कारण– संकलनकर्त्ताओं या प्रगणकों की अयोग्यता,

अप्रशिक्षण, अनुभव हीनता तथा लापरवाही होती है। कई बार अशिक्षा, अज्ञानता व अंधविश्वास के कारण सूचक भी सही सूचना नहीं देते। इसके अतिरिक्त प्रशासनिक व कानूनी बाध्यता भी अशुद्धता उत्पन्न करती है।

3. **समन्वय का अभाव**– सांख्यिकीय व्यवस्था में अनेक संस्थाये व व्यक्ति संमक संकलन का कार्य करते हैं। जिनकी कार्यविधि में अन्तर के कारण समन्वय का अभाव पाया जाता है, साथ ही ऐसे में समय, धन व श्रम भी अधिक लगता है।
   1. भारत में केन्द्रीय सांख्यिकी व्यवस्था का आलोचनात्मक मूल्यांकन करें।
   2. राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन के कार्यो व प्रभागों का वर्णन कीजिए।
4. **एकरूपता का अभाव**– स्वतंत्रता प्राप्ति से अब तक भारतीय सांख्यिकी व्यवस्था में अनेक परिवर्तन हुए है। जिससे संमक संकलन की विधियों वर्गीकरण तथा सारणीयन की विधियों तथा प्रयुक्त मानको व इकाई की परिभाषाओं में समय–समय पर अनेक परिवर्तन हुए, जिससे संकलित संमकों में एकरूपता का अभाव है।
5. **समुचित विश्लेषण व मूल्यांकन का अभाव**– हमारे देश में जो संमक संकलित किये जाते हैं। उनमें से अधिकांश अवैज्ञानिक, रूप से संकलित किये जाते हैं जिससे उनके विश्लेषण में कठिनाई आती है। क्योंकि अधिकांश संमक सरकारी नीतियों तथा सरकारी उपलब्धियों का प्रचार करने हेतु एकत्रित किये जाते हैं।
6. **नौकरशाही का प्रभाव**– देश में सांख्यिकी व्यवस्था में लगभग सभी विभागों, कार्यालयों तथा स्तरो पर कार्यालय अध्यक्ष व विभागाध्यक्ष को राजनीतिक दलों व नेताओं के दबाव में कार्य करना पड़ता है। जिससे संमक संकलन से लेकर विश्लेषण व निर्वचन तक की व्यवस्था प्रभावित होती है। जिससे संकलित संमकों में अभनति आ जाती है। जिससे उनकी विश्वसनीयता समाप्त हो जाती है।
7. **विकेन्द्रीकरण का अभाव**– यद्यति देश की सांख्यिकी व्यवस्था को विकेन्द्रीकृत करने के अनेक प्रयास किये गये है लेकिन सभी महत्वपूर्ण कार्य केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन तथा राष्ट्रीय प्रतिचयन सर्वेक्षण संगठन द्वारा ही सम्पन्न किये जाते हैं। जिससे वास्तविक विकेन्द्रीकरण नहीं हो पाया है, और अधिकांश सांख्यिकी गतिविधियां इन दो संगठनों तक ही सीमित है।
8. **प्रशिक्षण व्यवस्था का अभाव**– यद्यपि संमक संकलन से लेकर निर्वचन की विधियों की संगणको प्रगणको की संकल्पना तथा कर्मचारियों को समय–समय पर जानकारी व प्रशिक्षण दिया जाता है लेकिन यह पर्याप्त नहीं है। प्रत्येक संगणक व कर्मचारी को निश्चत अवधि का प्रशिक्षण दिया जाना चाहिए, जिससे उनकी कार्यक्षमता बढ़े अथवा उसमें सुधार हो।
9. **प्रकाशन में विलम्ब**– भारतीय संमको का सबसे बड़ा दोष उनके प्रकाशन में होने वाला विलम्ब है। जिससे उनकी उपयोगिता अर्थहीन हो जाती है। और संमक मात्र संख्याए बन जाती है, क्योंकि संमक समय सापेक्ष होते हैं, तथा और समय बीत जाने पर वह अपनी सार्थकता खो देते है।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन की कमियाँ–

1. इसके अनेक सर्वेक्षण चक्र में एकरूपता का अभाव है। जिस कारण तुलना में कठिनाई आती है।
2. इसकी प्रश्नावली व अनुसूची के प्रश्न जटिल है तथा उनमें सामंजस्य का अभाव है।
3. कई बार सर्वेक्षण का क्षेत्र बहुत सीमित होता है। जिससे सही परिणाम प्राप्त नहीं होते।
4. कई बार अन्य संस्थाओं व संगठनों द्वारा एकत्र संमक तथा इनके संमको में अत्याधिक भिन्नता पाई जाती है।
5. सर्वेक्षण के दौरान सूचकों तथा साक्षीयों को दी गई प्रश्नावलीयों में से अधिकांश अधूरी भरी होती है, या वापिस भेजी नहीं जाती।
6. सर्वेक्षण से प्राप्त परिणाम व निष्कर्ष की समय पर प्रकाशन नहीं होता, यद्यति वर्तमान समय में संगठन की वेबसाइट पर सर्वेक्षण रिपोर्ट अपलोड कर दी जाती है, लेकिन ये रिपोर्ट अधिकतर अंग्रेजी भाषा में होती हैं, जिससे सीमित लोग ही इसका प्रयोग कर पाते हैं।

21.9 सारांश (Summary):–

भारत में 1881 का वर्ष सांख्यिकीय विकास की दृष्टि से बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इस वर्ष प्रथम विधिवत जनगणना सम्पन्न की गयी। अगस्त 1947 में भारत के स्वतंत्रता प्राप्ति के बाद समंक संकलन व प्रकाशन के कार्यों में तेजी पकड़ी। 15 अक्टूबर 1999 में सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय एक स्वतंत्र मंत्रालय के रूप में अस्तित्व में आया। मंत्रालय में दो खण्ड है। एक सांख्यिकी से संबंधित तथा दूसरा कार्यक्रम कार्यान्वयन से संबंधित है। सांख्यिकीय खण्ड को राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय (NSO) कहा जाता हैं जिसमें केन्द्रीय संगठन (CSO) तथा संगणक केन्द्र तथा राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन है। 1951 में मंत्रिमंडल सचिवालय के अधीन एक केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन की स्थापना की गई। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का संचालन एक निदेशक मण्डल द्वारा किया जाता है। जिसमें एक प्रमुख महानिदेशक तथा 5 अपर महानिदेशक होते हैं। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन के कार्यों को सुचारू रूप से चलाने के लिए 5 प्रमुख प्रभाग है। जो इस प्रकार हैं – राष्ट्रीय लेखा प्रभाग, सामाजिक सांख्यिकी प्रभाग, अर्थ सांख्यिकी प्रभाग, प्रषिक्षण प्रभाग और समन्वय एवं प्रकाशन प्रभाग। केन्द्रीय सांख्यिकी कार्यालय मंत्रालय का संबद्ध कार्यालय देश में सांख्यिकीय कार्यकलापों का समन्वय तथा सांख्यिकीय मानकों का विकास करता है। इसके कार्यकलापों में अन्य बातों के साथ–साथ राष्ट्रीय लेखा के संकलन, औद्योगिक उत्पादन सूचकों, शहरी/ग्रामीण/संयुक्त के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक, लैंगिक सांख्यिकी सहित मानव विकास सांख्यिकी, उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण और आर्थिक गणना का आयोजन और सरकारी सांख्यिकी में प्रषिक्षण देना शामिल है। सी.एस.ओ. राज्यों तथा संघ राज्य क्षेत्रों में सांख्यिकी के विकास में भी सहायता करता है और ऊर्जा सांख्यिकी, सामाजिक तथा पर्यावरण सांख्यिकी का प्रसार करता है तथा राष्ट्रीय औद्योगिक वर्गीकरण तैयार करता है।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण की स्थापना सामाजिक, आर्थिक, औद्योगिक, कृषि तथा जनसंख्या संबंधी समको का विस्तृत संकलन करने हेतु 1950 में की गयी थी। जनवरी 1971 में केन्द्र सरकार ने साख्यिकीय विभाग के अधीन राष्ट्रीय संगठन की स्थापना विभाग के अधीन

राष्ट्रीय संगठन की स्थापना की गयी। फरवरी 1973 से यह संगठन योजना मंत्रालय के साख्यिकी विभाग के अधीन कार्य कर रहा था। वर्तमान में केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, सांख्यिकी एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन मंत्रालय के अंतर्गत कार्य कर रहा है। राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण कार्यालय (एन.एस.एस.ओ.) के प्रमुख एक महानिदेशक होते हैं, जो अखिल भारतीय आधार पर विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक स्तर पर प्रतिदर्श सर्वेक्षण करने के लिये जिम्मेदार होते हैं। राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन के चार प्रभाग हैंः सर्वेक्षण अभिकल्प और अनुसंधान प्रभाग, फील्ड कार्य प्रभाग, डेटा संसाधन प्रभाग, समन्वय और प्रकाशन प्रभाग। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण कार्यालय (एन.एस.ओ.), सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय पर अखिल भारत स्तर पर विभिन्न फील्डों में बड़े पैमाने पर प्रतिदर्श सर्वेक्षण आयोजित करने का दायित्व है। आर्थिक गणना की अनुवर्तन कार्रवाई के तौर पर विभिन्न सामाजिक आर्थिक विषयों पर राष्ट्रव्यापी परिवार सर्वेक्षणों, सांख्यिकी संग्रहण अधिनियम के वार्षिक उद्योग सर्वेक्षण तथा उद्यम सर्वेक्षण के माध्यम से नियमित रूप से प्राथमिक आंकड़े एकत्रित किए जाते हैं। इन सर्वेक्षणों के अलावा, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण कार्यालय ग्रामीण तथा शहरी मूल्यों से संबंधित आंकड़े एकत्रित करने,एवं फसल अनुमान सर्वेक्षणों के माध्यम से फसल संबंधी सांख्यिकी के सुधार में महतवपूर्ण भूमिका निभाता है। यह शहरी क्षेत्रों में सामाजिक आर्थिक सर्वेक्षणों में नमूने तैयार करने हेतु शहरी क्षेत्रीय इकाइयों का एक फ्रेम भी तैयार करता है। राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन मंत्रालयों एवं अन्य संस्थानों के लिये आवश्यक संमकों का संकलन करता है। बहुदेशीय सामाजिक– आर्थिक सर्वेक्षणों का आयोजन करता है। संगठन का एक महत्वपूर्ण कार्य देश में सामाजिक आर्थिक सर्वेक्षण करना है। इस सर्वेक्षण में मुख्य रूप से निम्न पांच विषयों को शामिल किया जाता है– जनांकिकी, स्वास्थ्य एवं परिवार कल्याण ,परिसम्पत्तियां, ऋण और पूँजी– विनियोजन, भूमि स्वामित्व एवं पशुधन उपक्रम, रोजगार, ग्रामीण श्रमिक एवं उपभोक्ता व्यय, गैर कृषि उपक्रमों में स्व–रोजगार।

राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन के सर्वेक्षण विभिन्न चक्रों या दौरों में सम्पन्न किये जाते हैं। संगठन ने अपने सर्वेक्षण का प्रथम चक्र अक्टूबर 1950 से मार्च 1951 की अवधि में किया था। दिसम्बर 1991 तक संगठन सर्वेक्षण के 47 चक्र पूरे कर चुका है। 70 वां सर्वेक्षण चक्र (जनवरी– दिसम्बर 2013)– भूमि एवं पशु धन की स्थिति और किसानों की कर्ज तथा निवेश की स्थिति। 71 वां सर्वेक्षण चक्र– (जनवरी– दिसम्बर 2014)– स्वास्थ्य तथा शिक्षा पर सामाजिक खपत। 72 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2014– जून 2015)– उपभोक्ता व्यय, घरेलू पर्यटन और टिकाऊ वस्तुओं और सेवाओं की खपत। 73 वां सर्वेक्षण चक्र (जुलाई 2016– जून 2017)– सेवा क्षेत्र– सार्वजनिक उद्यम, वायु परिवहन, वित्त व बीमा, निजी साहूकार, स्वयं सहायता समूह।

भारत के आर्थिक विकास की नीति निर्माण एवं मूल्यांकन में समकों का विशेष महत्व है। लेकिन आज भी उचित संमक प्राप्त करना एक कठिन कार्य है और उसमें सुधार की काफी सम्भावनायें है। संक्षेप में भारतीय सांख्यिकी व्यवस्था संबंधी सामान्य दोष इस प्रकार है– अपर्याप्तता एवं अपूर्णता, शुद्धता का अभाव, समन्वय का अभाव, एकरूपता का अभाव, समुचित विश्लेषण व मूल्यांकन का अभाव, नौकरशाही का प्रभाव, विकेन्द्रीकरण का अभाव, प्रशिक्षण व्यवस्था का अभाव, प्रकाशन में विलम्ब।

21.10 शब्दावली :–

- **प्रतिर्दश** – प्रतिर्दश प्रतिचयन समग्र की इकाईयों का वह भाग है जो पूर्ण समग्र के अध्ययन हेतु चुना जाता है इसे लघु समग्र भी कहते हैं।
- **प्रभाग** – विभाग
- **कार्यान्वयन** – लागू करना
- **समन्वय** – तालमेल

21.11 अभ्यास प्रश्न :–

21.11.1 निम्न संस्थाओं का पूरा नाम लिखो :–

1. NSSO
2. NSO
3. NSC
4. CSO

21.11.2 रिक्त स्थान भरों :–

1. राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण की स्थापना................. में की गयी थी।
2. राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन के .... प्रभाग हैं।
3. संगठन ने अपने सर्वेक्षण का प्रथम चक्र .... की अवधि में किया।
4. सर्वेक्षण अभिकल्प और अनुसंधान प्रभाग................. में स्थित है।
5. फील्ड कार्य प्रभाग का मुख्यालय .... में स्थित है।
6. डेटा संसाधन प्रभाग का मुख्यालय .... में स्थित है।
7. समन्वय और प्रकाशन प्रभाग................. में स्थित है।
8. 1996 में पहली बार .... का प्रकाशन हुआ।
9. 1951 में .... की स्थापना की गई।
10. ....वर्ष में आर्थिक संगणना का कार्य आरम्भ हुआ।
11. ....वर्ष में सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय एक स्वतंत्र मंत्रालय के रूप में अस्तित्व में आया।
12. .... को राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय कहा जाता हैं।
13. कार्यक्रम कार्यान्वयन खण्ड के .... प्रभाग है।
14. राष्ट्रीय सांख्यिकी आयोग का गठन ....को किया गया था।
15. वर्तमान में .... राष्ट्रीय सांख्यिकी आयोग के अध्यक्ष हैं।
16. केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का कार्यालय .... नई दिल्ली में स्थित है।
17. केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का संचालन एक .... द्वारा किया जाता है। जिसमें एक प्रमुख महानिदेशक तथा................. अपर महानिदेशक होते हैं।
18. केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन के .... प्रमुख प्रभाग है।
19. राष्ट्रीय लेखा प्रभाग एक वार्षिक प्रकाशन तैयार करता है, जिसका नाम है– ....

उत्तर– **21.11.1** (1) राष्ट्रीय प्रतिर्दश सर्वेक्षण संगठन (National Sample Survey Organisation) (2) राष्ट्रीय सांख्यिकी संगठन (National Statistical Organisation) (3)

राष्ट्रीय सांख्यिकीय आयोग (National Statistical Commission) (4) केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन। (Central Statistical Organisation)

21.11.2. (1) 1950 (2) चार (3) अक्टूबर 1950 से मार्च 1951 (4) कोलकाता (5) दिल्ली/फरीदाबाद (6) कोलकाता (7) नई दिल्ली (8) इण्डियन ट्रेड जनरल पत्रिका (9) केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (10) 1977(1115 अक्टूबर 1999 (12) सांख्यिकीय खण्ड (13) तीन (14)12 जुलाई, 2006 (15) डा0 आर0बी0 बर्मन (16) सरदार पटेल भवन, संसद मार्ग (17) निदेशक मण्डल, 5 जिले (18) 5 (19) राष्ट्रीय लेखा सांख्यिकी।

21.12 सन्दर्भ ग्रन्थ सूचीः–

- सिंह, एस0 पी0 (2001) *सांख्यिकीय सिद्धान्त,* एस. चन्द एण्ड कम्पनी प्रा. लि0, नई दिल्ली।
- सेठ, एम0 एल0 (2000–01) *सांख्यिकीय सिद्धान्त* लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पुस्तक प्रकाशक, आगरा।