A–0703

Total Pages : 6 **Roll No. .....**

MT-08

Bachelor of Science (BSC)

(Complex Analysis)

(समिश्र विश्लेषण)

Examination, June 2025

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note* :–** This paper is of Thirty Five (35) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट :– यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $2 \times 9\frac{1}{2} = 19$

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट :– खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Define the complex plane, describe Cartesian and polar forms.

   जटिल समतल को परिभाषित कीजिए, कार्तीय और ध्रुवीय रूपों का वर्णन कीजिए।

2. If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$ where u, v, r, θ are all real, show that the Cauchy-Riemann Equation are :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषणात्मक फंक्शन है और $z = re^{i\theta}$ जहाँ u, v, r, θ सभी वास्तविक हैं, तो दिखाएँ कि कॉची-रीमैन समीकरण हैं :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

3. State Cauchy Residue theorem. Use it to evaluate the integral :

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

कॉची अवशेष प्रमेय बताइए। समाकल $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ का मूल्यांकन करने के लिए इसका उपयोग कीजिए।

4. Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$.

द्विरेखीय रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ को बिन्दुओं $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ में मानचित्रित करता है।

5. State and prove the Cauchy integral Formula.

कॉची समाकल सूत्र बताइए और सिद्ध कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :– खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $f(z) = z^2$ then prove that f is continuous at a point $z = i \in \mathbb{C}$.

   यदि $f(z) = z^2$ तो सिद्ध कीजिए कि f बिन्दु $z = i \in \mathbb{C}$ पर सतत है।

2. Find the analytic iunction $f(z) = u + iv$, where :

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y]$$

   विश्लेषणात्मक फंक्शन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y]$$

3. Find the radius of convergence ofthe power series :

$$\frac{z}{2}+\frac{1.3}{2.5}z^2+\frac{1.3.5}{2.5.8}+z^3+...$$

घात श्रेणी $\frac{z}{2}+\frac{1.3}{2.5}z^2+\frac{1.3.5}{2.5.8}+z^3+...$ के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. Find the poles and residue of the function :

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-z-2}$$

फंक्शन $f(z)=\frac{2z+1}{z^2-z-2}$ के ध्रुव और अवशेष ज्ञात कीजिए।

5. Expand cos z at the point $z=\frac{\pi}{2}$.

cos z को बिन्दु $z=\frac{\pi}{2}$ पर विस्तारित कीजिए।

6. Discuss Isolated and Non-Isolated Singularities with Examples.

उदाहरणों के साथ पृथक और गैर-पृथक एकवचनों पर चर्चा कीजिए।

7. Find the power series expansion of $f(z) = e^z$ about $z = 0$.

$z = 0$ के आसपास फ़ंक्शन $f(z) = e^z$ का घात श्रेणी विस्तार ज्ञात कीजिए।

8. Define the following :

(a) Critical points

(b) Cauchy integral formula

(c) Singularities

(d) Analytic function

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए।

(अ) क्रिटिकल पॉइंट

(ब) कॉची इंटीग्रल फॉर्मूला

(स) सिंगुलैरिटीज

(द) एनालिटिक फंक्शन

****