A–0702

Total Pages : 5 **Roll No. .....**

MT-07

Bachelor of Science (BSC)

(Algebra)

(बीजगणित)

Examination, June 2025

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note* :–** This paper is of Thirty Five (35) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट :– यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $2 \times 9\frac{1}{2} = 19$

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट :– खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the set $G = \{a + b\sqrt{2} \ \ a, b \in Q,\}$ is a group with respect to addition.

   दर्शाइए कि समुच्चय $G = \{a + b\sqrt{2} \ \ a, b \in Q,\}$ योग के सापेक्ष एक समूह है।

2. (a) Prove that every subgroup is an abelian group.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक उपसमूह एक एबेलियन समूह है।

   (b) Show that (G, *) is a commutative group.

   दर्शाइए कि (G, *) एक क्रमविनिमेय समूह है।

3. Define the sum of two subspaces U and W of a vector space V. Prove that the sum U + W is also a subspace of V.

एक सदिश समष्टि V के दो उपसमष्टि U और W का योगफल परिभाषित कीजिए। सिद्ध करें कि योग U + W, V का भी एक उपसमष्टि है।

4. Prove that the union of two subspaces is a subspace if and only if one contained in the other.

सिद्ध कीजिए कि दो उप-स्थानों का संघ एक उप-स्थान होता है यदि और केवल यदि एक-दूसरे में निहित हो।

5. Prove that every non-zero homomorphism from a field to a ring is injective.

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र से एक वलय तक प्रत्येक शून्येतर समरूपता अंत: क्षेपी होती है।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :– खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the intersection of two subrings is subring.

   सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों को प्रतिच्छेदन उपवलय होता है।

2. Prove that the group G is abelian if and only if :

$$(a.\ b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \ \forall\ a, b \in G$$

   सिद्ध कीजिए कि समूह G आबेलियन है यदि और केवल यदि :

$$(a.\ b)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \ \forall\ a, b \in G$$

3. Prove that for any subgroup H of a group G and any $a, b \in G$, the left cosets aH and bH are either disjoint or identical.

   सिद्ध कीजिए कि समूह G के किसी उपसमूह H तथा किसी $a, b \in G$ के लिए बाएँ सहसमुच्चय aH तथा bH या तो असंयुक्त होते हैं या समान होते हैं।

4. Show that any finite integral domain is a Field.

   दर्शाइए कि कोई भी परिमित समाकलन डोमेन एक क्षेत्र है।

5. Define Division ring. Prove that every division ring is a simple ring.

   विभाजन वलय को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक विभाजन वलय एक साधारण वलय है।

6. Show that the vectors (1, 1, 0), (2, 1, 1) and (3, 0, 3) in $R^{(3)}$ are linearly independent.

दर्शाइए कि $R^{(3)}$ में सदिश (1, 1, 0), (2, 1, 1) और (3, 0, 3) रैखिकत: स्वतंत्र हैं।

7. Define a subspace. Prove that the intersection of two subspaces of a vector space is a subspace of V(F).

उप-समष्टि को परिभाषित करें। सिद्ध करें कि एक सदिश समष्टि के दो उपसमष्टि का प्रतिच्छेदन V(F) का एक उपसमष्टि है।

8. Prove that finite integral domain is a field.

सिद्ध कीजिए कि परिमित समाकलन डोमेन एक क्षेत्र है।

****