Roll No. ……..

MT–07

Algebra

(बीजगणित)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

Third Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Define regular permutation group. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

   नियमित क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिए। गुणनात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ के तुल्यकारी नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए।

2. If H and K be finite subgroups of a group G, then prove that :

$$o(HK) = \frac{o(H)\, o(K)}{o(H \cap K)}$$

   यदि H और K समूह के G परिमित उपसमूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$o(HK) = \frac{o(H)\, o(K)}{o(H \cap K)}$$

3. Define a field. Show that the system $\{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, .5\}$ is a field.

   क्षेत्र की परिभाषा दीजिए। दिखाइये कि संरचना $\{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, .5\}$ एक क्षेत्र है।

4. The necessary and sufficient condition for a non-empty subset W of a vector space V(F) to be subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि के उपसमुच्चय के उपसदिश समष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है $a, b \in F$ और $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ ।

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Find the order of every element of group $(\{0, 1, 2\}, +_3)$.

   समूह $(\{0, 1, 2\}, +_3)$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।

2. Prove that the intersection of two normal subgroup of a group is a normal subgroup.

   सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का कटाव भी एक प्रसामान्य उपसमूह होगा।

3. Prove that if two vectors are linearly dependent, one of them is a scalar multiple of other.

   सिद्ध कीजिए कि दो सदिश यदि एकघाती स्वतन्त्र होते हैं, तो उनमें से एक दूसरे का अदिश गुणांक होता है।

4. Prove that a ring is without zero divisors iff the cancellation laws hold in it.

   सिद्ध कीजिए कि वलय शून्य भाजक रहित होगा यदि और और केवल यदि तभी जब उसमें निरसन नियम मान्य होंगे।

5. Prove that for $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ is necessary and sufficient condition for H to be subgroup of G.

   सिद्ध कीजिए कि $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, H को G के उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है।

6. Prove that every group of prime order is cyclic.

   सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

7. Prove that a system consisting of vectors :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0).....$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

   is a basis of $V_n(F)$.

   सिद्ध कीजिए कि एक प्रबन्ध जिसमें सदिश :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0).....$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

   हैं, $V_n(F)$ का आधार होगा।

8. If S, T are subsets of V(F), then prove that :

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

यदि S, T, V(F) के उपसमुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Choose the correct answer :

सही उत्तर का चयन कीजिए :

1. Every cyclic group is :
   (a) Permutation group
   (b) Abelian group
   (c) Non-abelian group
   (d) None of these

   प्रत्येक चक्रीय समूह होता है :
   (अ) क्रमचय समूह
   (ब) आबेली समूह
   (स) अन-आबेली समूह
   (द) इनमें से कोई नहीं

2. Generator of a group G = {1, –1, i, $-i$} under multiplication is :

(a) 1

(b) –1

(c) i

(d) None of these

गुणन के सापेक्ष एक समूह G = {1, –1, i, $-i$} का जनक है :

(अ) 1

(ब) –1

(स) i

(द) इनमें से कोई नहीं

3. If $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ are permutations, then AB is :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 11 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

यदि $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ क्रमचय हों, तो AB है :

(अ) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 11 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

(ब) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

(स) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

(द) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

4. If a is an element of a group G and its order n, then :

(a) $a^n = a$

(b) $a^n = e$

(c) $a^{-n} = e$

(d) $a = e^n$

यदि a एक समूह G का एक अवयव है जिसका क्रम n है, तो :

(अ) $a^n = a$

(ब) $a^n = e$

(स) $a^{-n} = e$

(द) $a = e^n$

5. In the field $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5, \times_5)$ the multiplicative inverse of 4 is :

   (a) 3

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 4

   क्षेत्र $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5, \times_5)$ में 4 का गुणात्मक प्रतिलोम है :

   (अ) 3

   (ब) 1

   (स) 2

   (द) 4

Write T for true and F for false :

सत्य के लिए T तथा असत्य के लिए F लिखिए :

6. A system consisting of a single non-zero vector is always linearly independent.
   एक सिस्टम जिसमें एक अकेला अशून्य सदिश है, हमेशा एक-घातीय स्वतंत्र होता है।

7. Dimension of a vector space is always finite.
   प्रत्येक सदिश समष्टि की विमा परिमित होती है।

8. Every field is an integral domain.
   प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

9. Every *n*-dimensional vector space V(F) is isomorphic to $V_n(F)$.

   प्रत्येक *n*-दिशित सदिश समष्टि V(F) समकारित होती है $V_n(F)$ से।

10. Union of two subgroups of a group G is again a subgroup of G.

    समूह G के किन्हीं भी दो उपसमूहों का सम्मिलन भी G का उपसमूह होगा।