Roll No. …………………..

MT–04

Real Analysis and Metric Space

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

Bachelor of Science (BSC–12/16)

Second Year, Examination, 2018

Time : 3 Hours **Max. Marks : 40**

Note : This paper is of **forty (40)** marks containing **three (03)** Sections A, B and C. Learners are required to attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न पत्र चालीस (40) अंकों का है जो तीन (03) खण्डों 'क', 'ख' तथा 'ग' में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खण्डों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

Section–A / खण्ड–क

(Long Answer Type Questions) / (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long answer type questions of nine and half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $< s_n >$ be a sequence of positive real numbers such that :

$$s_n = \frac{1}{2}(s_{n-1} + s_{n-2}) \ \forall n > 2$$

then show that $< s_n >$ converges. Also find lim s_n.

यदि $< s_n >$ एक धनात्मक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम इस प्रकार है :

$$s_n = \frac{1}{2}(s_{n-1} + s_{n-2}) \ \forall n > 2$$

तब सिद्ध कीजिए कि $< s_n >$ अभिसारी है। lim s_n भी ज्ञात कीजिए।

2. State and prove Rolle's theorem.

रोली प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

3. Prove that the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{when } x \text{ is rational} \\ -x & \text{when } x \text{ is not rational} \end{cases}$$

is not integrable over (a, b) but $|f|$ is integrable.

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{जब } x \text{ परिमेय संख्या है} \\ -x & \text{जब } x \text{ परिमेय संख्या नहीं है} \end{cases}$$

[a, b] में समाकलनीय नहीं है, लेकिन $|f|$ समाकलनीय है।

4. Prove that if (X, d) is a metric space, then :

$$\left| d(x, z) - d(y, z) \right| \leq d(x, y) \ \forall x, y, z \in X$$

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\left| d(x, z) - d(y, z) \right| \leq d(x, y) \ \forall x, y, z \in X$$

Section–B / खण्ड–ख

(Short Answer Type Questions) / (लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short answer type questions of four (04) marks each. Learners are required to answer *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall \ x, y \in R$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall \ x, y \in R$$

2. Show that every open interval is an open set.

सिद्ध कीजिए कि विवृत अन्तराल एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Show that :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

4. Show that the function f is discontinuous at (0, 0) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x - y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि फलन f, (0, 0) पर असतत् है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x - y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

5. Find the derivative of f at $x = 0$ where $f(x) = x^2 |x|$.

फलन् f का $x = 0$ पर अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^2 |x|$ ।

6. If A and B be any two subsets of a metric space (X, d), then :

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{int } A \subseteq \text{int } B$$

यदि A और B एक दूरिक समष्टि (X, d) के कोई दो उपसमुच्चय हैं, तब :

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{आन्तरिक } A \subseteq \text{आन्तरिक } B$$

7. If $d : R \times R \rightarrow R$ is defined as $d(x, y) = |x - y|$ $\forall x, y \in R$, then show d is a metric on R.

यदि $d : R \times R \rightarrow R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in R$, तब सिद्ध कीजिए कि d, R पर दूरीक है।

8. Compute $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ where $f(x) = |x|$ by using partition.

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ का मान विभाजित का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = |x|$ ।

Section–C / खण्ड–ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective type questions of half $\left(\frac{1}{2}\right)$ mark each. All the questions of this Section are compulsory.

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए आधा $\left(\frac{1}{2}\right)$ अंक निर्धारित है। इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Write T for True and F for False statement :

सत्य कथन के लिए T और असत्य कथन के लिए F लिखिए :

1. e is a rational number.

   e एक परिमेय संख्या है।

2. $|x\,y| = |x||y| \;\forall\; x, y \in \mathrm{R}$.

3. Set R of real numbers is an open set.

   वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R एक विवृत समुच्चय है।

4. $\left\langle 1 + (-n)^n \right\rangle$ is oscillatory sequence.

   $\left\langle 1 + (-n)^n \right\rangle$ एक दोलक अनुक्रम है।

5. $f(x) = \frac{x - |x|}{x}$ is continuous everywhere.

$f(x) = \frac{x - |x|}{x}$ प्रत्येक बिन्दु पर सतत् है।

6. $f(x) = |x| + |x - 1|$ is differentiable at $x = 1$.

$f(x) = |x| + |x - 1|$, $x = 1$ पर अवकलनीय है।

7. $(3x + 1)$ is not integrable on $[1, 2]$.

$(3x + 1)$, $[1, 2]$ में समाकलनीय नहीं है।

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)} \right) = 0$.

9. $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y) \; \forall \; x, y, z \in X$ where d is a metric.

$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y) \; \forall \; x, y, z \in X$ जहाँ d एक दूरीक है।

10. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.