

A-0699

Total Pages : 6

Roll No.

MT-04

Bachelor of Science (BSC)

(Real Analysis & Metric Space)

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

Examination, June 2025

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 35

Note :- This paper is of Thirty Five (35) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

नोट :- यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। *परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।*

A-0699/MT-04

(1)

P.T.O.

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

$$2 \times 9\frac{1}{2} = 19$$

Note :– Section ‘A’ contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट :– खण्ड ‘क’ में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Write a short note of the following :

- (a) Open set
- (b) Closed set
- (c) Compact set

निम्नलिखित का एक संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

- (अ) विवृत समुच्चय
- (ब) संवृत समुच्चय
- (स) संहत समुच्चय

2. State and prove Rolle's theorem.

रोले का प्रमेय बताइए और सिद्ध करें।

3. Examine the function defined below for continuity at $x = 0$:

$$f(x) = \frac{\sin^2 ax}{x^2} \text{ for } x \neq 0, f(x) = 1 \text{ for } x = 0$$

सांतत्यता के लिए $x = 0$ पर नीचे परिभाषित फंक्शन की जांच करें :

$$f(x) = \frac{\sin^2 ax}{x^2} \text{ के लिए } x \neq 0, f(x) = 1 \text{ के लिए } x = 0$$

4. Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$, but not differentiable at $x = 0$, where $|x|$ means the numerical value or the absolute value of x .

सिद्ध कीजिए कि फंक्शन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है लेकिन $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है, जहाँ $|x|$ का मतलब है कि संख्यात्मक मान या निरपेक्ष मान है।

5. If $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ and $a = 0$, $b = 4$, find 'c' using Lagrange's mean value theorem.

यदि $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ तथा $a = 0$, $b = 4$ माध्य मान प्रमेय का उपयोग करके 'सी' का मान ज्ञात कीजिए।

Section-B

(खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×4=16

Note :- Section 'B' contains eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :- खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the sequence $\langle s_n \rangle$ where $s_n = \frac{3n}{n+5n^{1/2}}$ has the limit 3.

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम $\langle s_n \rangle$ जहाँ $s_n = \frac{3n}{n+5n^{1/2}}$ की सीमा 3 है।

2. Test for uniform convergence of the series :

(a) $\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$

(b) $\sum \frac{x}{n(1+nx^2)}$

शृंखला के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

(अ) $\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$

(ब) $\sum \frac{x}{n(1+nx^2)}$

3. Find an $m \in \mathbb{N}$ such that :

$$\left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \frac{1}{5} \text{ for all } n \geq m$$

एक $m \in \mathbb{N}$ ऐसा ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \frac{1}{5}$ है।

4. Prove that in metric space (X, d) every convergent sequences is a Cauchy sequence.

दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कॉशी अनुक्रम होता है।

5. State and prove Darboux theorem.

डारबू प्रमेय का उल्लेख कीजिए और सिद्ध कीजिए।

6. State and prove Cauchy first theorem on limit.

कॉची का सीमा पर प्रथम प्रमेय बताएं और सिद्ध करें।

7. A set is closed iff its complement is open.

एक समुच्चय संवृत होगा यदि और केवल उसका पूरक विवृत है।

8. Prove that the function :

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

is continuous at origin, where $f(0, 0) = 0$.

सिद्ध करें कि फलन :

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

मूल बिन्दु पर संतत है, जहाँ $f(0, 0) = 0$ ।
