A–0882

Total Pages : 5 **Roll No. ....**

MT(N)-202

ABSTRACT ALGEBRA

Examination, June 2025

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 70

Note **:–** This paper is of Seventy (70) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

नोट : यह प्रश्न–पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $2 \times 19 = 38$

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If H is non-empty proper subset of a group G then H is subgroup of G if and only if $\forall\ a, b \in H, a * b^{-1} \in H$.

   यदि किसी समूह G का गैर रिक्त उचित उपसमुच्चय H है तो G का उपसमूह H होगा यदि और केवल यदि $\forall\ a, b \in H, a * b^{-1} \in H$.

2. State and prove the Lagrange's theorem for the finite group G. Also give the suitable example.

   परिमित समूह के लिए लैग्रेंज प्रमेय बताइए और सिद्ध कीजिए। उपयुक्त उदाहरण भी दीजिए।

3. State and prove the Cayley's theorem with example.

   केली के प्रमेय को उदाहरण सहित बताएं और सिद्ध करें।

4. If $f : G \to G$ is onto homomorphism then prove that

$$\frac{G}{\ker f} \cong G.$$

यदि समरूपता $f : G \to G$ पर आच्छादित है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{G}{\ker f} \cong G.$$

5. Define the following with suitable examples.

(a) Ring

(b) Field

(c) Integral Domain

(d) Ideals

(e) Subring

(f) Center of the group

उपयुक्त उदाहरणों के साथ निम्नलिखित को परिभाषित करें।

(a) रिंग

(b) फील्ड

(c) इंटीग्रल डोमेन

(d) आइडियल्स

(e) सबरिंग

(f) समूह का केंद्र

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×8=32

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. For any two sets A and B, prove that

   किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, सिद्ध कीजिए कि

   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. Show that set of integers (Z) forms a group with respect to the operation addition. Is this group is abelian group?

   दर्शाइए कि पूर्णांकों का समूह (Z) संक्रिया योग के संबंध में एक समूह बनाता है। क्या यह समूह एबेलियन समूह है?

3. Define quaternion group (Q_8). Find all the subgroup of the quaternion group. Is quaternion group is abelian?

   क्वाटरनियन समूह (Q_8) को परिभाषित करें। क्वाटरनियन समूह के सभी उपसमूह ज्ञात करें। क्या क्वाटरनियन समूह एबेलियन है?

4. Find the order of the each element of the group Z_6 and also find its generator.

समूह Z_6 के प्रत्येक तत्व की कोटि ज्ञात करें और Z_6 के जनक भी ज्ञात करें।

5. Define the cyclic group. Also, prove that every group of prime order is cyclic.

चक्रीय समूह को परिभाषित करें। साथ ही, सिद्ध करें कि अभाज्य क्रम का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

6. Prove that, out of $n!$ permutation on n-symbols $\frac{n!}{2}$ are even permutation and $\frac{n!}{2}$ are odd permutations.

सिद्ध कीजिए कि n-प्रतीकों के $n!$ पर क्रमचय में सम क्रमचय $\frac{n!}{2}$ और विषम क्रमचय $\frac{n!}{2}$ होते हैं

7. Define normal subgroup. If f is a homomorphism from G to G then kernel of f is the normal subgroup of G.

सामान्य उपसमूह को परिभाषित करें। यदि f, G से G एक समरूपता है तो सिद्ध कीजिये की कर्नेल (ker f), G का सामान्य उपसमूह है।

8. Prove that every group of order p^2 is an abelian group.

सिद्ध कीजिए कि कोटि p^2 का प्रत्येक समूह एबेलियन समूह होता है।

****