

A-0880

Total Pages : 5

Roll No.

MT(N)-201

REAL ANALYSIS

Examination, June 2025

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 70

Note :- This paper is of Seventy (70) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

नोट : यह प्रश्न-पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। *परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।*

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

2×19=38

Note :- Section ‘A’ contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड ‘क’ में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. A sequence $\{x_n\}$ is bounded if \exists a positive real number M such that $|x_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को परिबद्ध कहा जाता है यदि एक सकारात्मक वास्तविक संख्या M से इस प्रकार परिबद्ध किया जाता है कि $|x_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

2. If f and g are two bounded and integrable functions on $[a, b]$ then the product $f.g$ is also bounded and integrable on $[a, b]$.

यदि f और g $[a, b]$ पर दो परिबद्ध और पूर्णांकीय फलन हैं तो उत्पाद $f.g$ भी $[a, b]$ पर परिबद्ध और पूर्णांकीय है।

3. Examine for convergence of the integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$.

समाकलन $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ के अभिसरण की जाँच करे।

4. Prove that every polynomial function is continuous.

सिद्ध करें कि प्रत्येक बहुपद फलन सतत होता है।

5. Prove that every Differentiable function is continuous function and also check the differentiability of $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

सिद्ध करें कि प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत फलन है और $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ की अवकलनीयता की भी जाँच करें।

Section-B

(खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×8=32

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ is an onto function.

सिद्ध करें कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ आच्छादक फलन है।

2. Prove that the set of natural number \mathbb{N} is not bounded above.

सिद्ध कीजिए कि प्राकृत संख्या \mathbb{N} का समुच्चय ऊपर परिबद्ध नहीं है।

3. Prove that the union of two open sets in \mathbb{R} is an open set.

सिद्ध करें कि \mathbb{R} में दो खुले समुच्चयों का मिलन एक खुला समुच्चय है।

4. Prove that every convergent sequence is bounded.

सिद्ध करें कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध है।

5. Every monotonically increasing sequence which is bounded above converge to its least upper bound.

प्रत्येक नीरस रूप से बढ़ता हुआ क्रम जो ऊपर से घिरा हुआ है, अपनी सबसे छोटी ऊपरी सीमा में परिवर्तित हो जाता है।

6. Prove that every uniform convergent is pointwise convergent.

सिद्ध करें कि प्रत्येक एकसमान अभिसरण बिंदुवार अभिसरण है।

7. Examine for convergence of the integrals : $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$.

समाकलन $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ के अभिसरण की जाँच करें।

8. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$, where n is a positive integer.

ज्ञात करें $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है
