A–117

Total Pages : 5 **Roll No. ....**

MT–07

ALGEBRA

बीजगणित

Bachelor of Science (BSC)

3rd Year Examination, 2024 (June)

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note :– This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $2\times9\frac{1}{2}=19$

Note :– Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and prove Lagrange's theorem.

   लैग्रेंज प्रमेय बताइए और सिद्ध कीजिए।

2. Prove that H is a normal subgroup of a group G if the product of any two right cosets of H in G is a right coset of H in G.

   सिद्ध कीजिए कि H समूह G का एक सामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि G में H के किन्हीं दो सही सहसमुच्चय का गुणनफल G में H का एक सही सहसमुच्चय है।

3. Let R be a commutative ring. Then prove that R is an integral domain if and only if cancellation laws with respect to multiplication holds. Also show that cancellation law may not hold in an arbitrary ring.

माना R एक क्रमविनिमेय वलय है। फिर सिद्ध कीजिए कि R एक अभिन्न डोमेन है यदि और केवल यदि गुणन के संबंध में रद्दीकरण कानून लागू होता है। यह भी दिखाइए कि रद्दीकरण कानून मनमाने वलय पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

4. Prove that a finite dimensional vector space V has dimension n if and only if n is the maximum number of linearly independent vectors in any subset of V.

   सिद्ध कीजिए कि एक परिमित आयामी सदिश समष्टि V का आयाम n है यदि और केवल यदि n, V के किसी उपसमुच्चय में रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिशों की अधिकतम संख्या है।

5. Write short notes on the following :

   (i) Definition of group

   (ii) Group homomorphism

   (iii) Integral domain

   (iv) Basis and dimensions

   (v) Linear dependence and independence of vectors

   निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणिया लिखिए :

   (i) समूह की परिभाषा

   (ii) समूह समरूपता

   (iii) इंटीग्रल डोमेन

   (iv) आधार और आयाम

   (v) सदिशों की रैखिक निर्भरता और स्वतंत्रता

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the set of all nth roots of unity forms an abelian group with respect to multiplication.

   सिद्ध कीजिए कि एकता के सभी nवें मूलों का समुच्चय गुणन के संबंध में एक एबेलियन समूह बनाता है।

2. Prove that the intersection of two subgroups of a group G is a subgroup of G.

   सिद्ध कीजिए कि समूह G के दो उपसमूह का प्रतिच्छेदन G का एक उपसमूह है।

3. Define cyclic group and show that U_8 is not a cyclic group.

   चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए और दिखाइए कि U_8 एक चक्रीय समूह नहीं है।

4. Define subring of a ring and prove that a nonempty subset S of a ring R is a subring of R iff (i) $ab \in$ S and (ii) $ab \in$ S, $\forall a, b \in$ S.

एक रिंग के सबरिंग को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि रिंग R का एक गैर–रिक्त उपसमुच्चय S, R का एक सबरिंग है यदि (i) $ab \in$ S और (ii) $ab \in$ S, $\forall a, b \in$ S।

5. Define field and prove that a finite division ring is a field.

क्षेत्र को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि एक परिमित विभाजन वलय एक क्षेत्र है।

6. Define linear dependence and independence of vectors and prove that every subset of a linearly independent set is linearly independent.

सदिशों की रैखिक निर्भरता और स्वतंत्रता को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।

7. Find two subspaces A and B of V = $R^4(R)$ such that dim A = 2 dim B = 3 and dim A $\cap$ B = 1.

V = $R^4(R)$ के दो उपस्थान A और B इस प्रकार खोजिए कि dim A = 2 dim B = 3 और dim A $\cap$ B = 1.

8. Prove that any two bases of a finite dimensional vector space V(F) have the same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि परिमित आयामी सदिश समष्टि V(F) के किन्हीं दो आधारों में तत्वों की संख्या समान होती है।

****