Total Pages : 5 **Roll No. ....**

MT–04

REAL ANALYSIS & METRIC SPACE

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि

Bachelor of Science (BSC)

2nd Year Examination, 2024 (June)

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note :– This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If a and b are any two positive real numbers, then prove that there exists a positive integer n such that $na > b$.

   यदि a और b कोई दो सकारात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो साबित करें कि एक सकारात्मक पूर्णांक n मौजूद है जैसे कि $na > b$।

2. Let (X, d) be any metric space. Show that the function d_1 defined by :

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \forall x, y \in X$$

मान लीजिए (X, d) कोई मीट्रिक स्थान हैं दिखाइए कि फंक्शन द्वारा परिभाषित है :

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \forall x, y \in X$$

3. Prove that every sequentially compact metric space (X, d) is compact.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्रमिक रूप से संहत मीट्रिक स्थान (X, d) संहत है।

4. If $a_1, a_2 > 0$ and $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}}$, $n > 2$; then show that $\langle a_n \rangle$ converges to $\dfrac{3a_1a_2}{2a_1+a_2}$.

यदि $a_1, a_2 > 0$ और $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}}$, $n > 2$; फिर दिखाइए कि $\dfrac{3a_1a_2}{2a_1+a_2}$ में परिवर्तित हो जाता है।

5. Test for uniform convergence, the sequence $\{f_n\}$, where $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, for all real x.

एक समान अभिसरण के लिए परीक्षण, अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, सभी वास्तविक x के लिए।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that a function which is derivable at a point is necessarily continuous at that point but converse need not be true.

   सिद्ध कीजिए कि एक फलन जो एक बिंदु पर व्युत्पन्न है, आवश्यक रूप से उस बिंदु पर निरन्तर है, लेकिन इसका विपरीत सत्य होना आवश्यक नहीं है।

2. Prove that a metric space X is connected if and only if every real valued continuous function f has the intermediate value property.

   सिद्ध कीजिए कि एक मीट्रिक स्थान X तभी जुड़ा होता है जब प्रत्येक वास्तविक मूल्यवान निरंतर फंक्शन f में मध्यवर्ती मूल्य गुण होता है।

3. Prove that continuous image of a compact set is compact.

   सिद्ध कीजिए कि एक संहत समुच्चय की सतत छवि संहत होती है।

4. Prove that every infinite bounded set has a limit point.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनंत परिबद्ध समुच्चय का एक सीमा बिंदु होता है।

5. Prove that a sequence cannot converge to more than one limit.

सिद्ध कीजिए कि एक अनुक्रम एक से अधिक सीमा तक परिवर्तित नहीं हो सकता।

6. Show that :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

दिखाइए कि :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

7. Show that every continuous function is integrable.

दिखाइए कि प्रत्येक सतत फलन समाकलनीय है।

8. Prove that every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक बंद गोला एक बंद समुच्चय है।

****