

A-112

Total Pages : 6

Roll No.

MT-02

**CALCULUS AND DIFFERENTIAL
EQUATION**

कलन एवं अवकलन समीकरण

Bachelor of Science (BSC)

1st Year Examination, 2024 (June)

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 35

Note :- This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। *परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।*

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

$2 \times 9\frac{1}{2} = 19$

Note :- Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and proof Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

कोशी रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय की कथन सहित व्याख्या कीजिए।

2. Find the definition of beta function and its relation with gamma function.

बीटा फलन की परिभाषा तथा गामा फलन से इसका सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{\sqrt{(m+n)}}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{(m+n)}}$$

3. Find the value of the following integral by converting the order integration :

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

निम्नलिखित द्वि-समाकलन को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

4. Prove that the area of the larger part into two parts into which the circle $x^2 + y^2 = 64a^2$, is divided by the parabola $y^2 = 12ax$ is $\left(\frac{16a^2}{3}\right)(8\pi - \sqrt{3})$.

सिद्ध कीजिए कि दो भागों में बड़े भाग का क्षेत्रफल जिनमें व्रत $x^2 + y^2 = 64a^2$, परवलय $y^2 = 12ax$ के द्वारा विभाजित किया जाता है वह है $\left(\frac{16a^2}{3}\right)(8\pi - \sqrt{3})$ ।

5. Verify Euler's theorem for the function :

$$f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$$

फलन $f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ के लिए आयलर के प्रमेय का

सत्यापन कीजिए।

Section-B

(खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×4=16

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Test the convergence of the following series :

(i) $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \dots$

(ii) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \dots$

निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परिक्षण कीजिए :

(i) $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \dots$

(ii) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \dots$

2. If $x \sin t + y \cos t = f'(t)$, $x \cos t - y \sin t = f''(t)$, then prove that :

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) + f'''(t)$$

यदि $x \sin t + y \cos t = f'(t)$, $x \cos t - y \sin t = f''(t)$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) + f'''(t)$$

3. If $u = x^y$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

यदि $u = x^y$ ।

4. Find the maxima of :

$$\frac{\log x}{x} \quad (0 < x < \infty)$$

$\frac{\log x}{x} \quad (0 < x < \infty)$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

5. Find the asymptotes of the curve $x^3 + yx^2 - xy^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$.

वक्र $x^3 + yx^2 - xy^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$ की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

6. Trace the curve $r = a(1 + \cos \theta)$.

वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ का अनुरेखण कीजिए।

7. Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$$

निम्नलिखित अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$$

8. Find the value of the following integral :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$
