A–1028

Total Pages : 7 **Roll No. ....**

MT-07

Bachelor of Science (BSC)

(Algebra)

बीजगणित

Examination, 2026 (Feb.)

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note :– This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $2 \times 9\frac{1}{2} = 19$

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that four matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ form a multiplicative group.

   दर्शाइए कि चार आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ एक गुणात्मक समूह बनाते हैं।

2. (a) Show that if a, b are any two elements of a group G then $(ab)^2 = a^2b^2$ if and only if G is abelian.

दर्शाइए कि यदि a, b समूह G के कोई दो तत्व हैं तो $(ab)^2 = a^2b^2$ यदि और केवल यदि G ओबेली समूह हैं।

(b) If H_1 and H_2 are two subgroups of a group G, then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G.

यदि H_1 और H_2 एक समूह G के दो उपसमूह हैं, तो $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह है।

3. State and proof the fundamental theorem of homomorphism.

समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को बताइये और सिद्ध कीजिये।

4. If $\mathbb{R}$ is a field of real numbers and $M_2(\mathbb{R})$ is a set of 2 × 2 matrices. Prove that $M_2(\mathbb{R})$ is a vector space with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication. Also show that $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ is a subspace of $M_2(\mathbb{R})$.

यदि $\mathbb{R}$ वास्तविक सेख्याओं का क्षेत्र है और $M_2(\mathbb{R})$, 2×2 आव्यूहों का एक समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि $M_2(\mathbb{R})$ आव्यूह योग और आव्यूह अदिश गुणन के सापेक्ष एक सदिश समष्टि है। यह भी दर्शाइए कि $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ का एक उपसमष्टि है।

5. Prove that a finite integral domain is a field.

सिद्ध कीजिये कि परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र है।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) $4 \times 4 = 16$

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ form an abelian group with respect to multiplication.

दिखाइए कि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ गुणन के संबंध में एक आबेली समूह बनाता है।

2. Find the order of each element of following group $G = \{1, 2, 3, 4, 5; \times_6\}$.

निम्नलिखित समूह के प्रत्येक तत्व का क्रम ज्ञात कीजिए $G = \{1, 2, 3, 4, 5; \times_6\}$ ।

3. If $f : G \to G'$ is a homomorphism from group (G, o) to (G', o'). e and e' are identity elements of G and G′ respectively. Then prove that :

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall\ a \in G$

यदि $f : G \to G'$ समूह (G, o) से (G', o') तक एक समरूपता है। e और e' क्रमशः G और G' के तत्समक अवयव हैं। तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall\ a \in G$

4. Prove that H is normal subgroup of G if and only if $xHx^{-1} = H$.

सिद्ध कीजिए कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि $xHx^{-1} = H$ ।

5. Prove that the quotient group of a cyclic group is cyclic. Give an example to show that converse need not true.

सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह का विभाग उपसमूह एक चक्रीय होता है। एक उदाहरण देकर दर्शाइए कि इसका विलोम भी आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

6. Prove that the intersection of two subrings of a ring is a subring of that ring.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय के दो उपवलयों का प्रतिच्छेद उस वलय का एक उपवलय होता है।

7. Prove that in vector space $V(\mathbb{R}) = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ vectors (a_1, a_2) and (b_1, b_2) are linearly independent if $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

सिद्ध करें कि सदिश समष्टि $V(\mathbb{R}) = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ में सदिश (a_1, a_2) तथा (b_1, b_2) रैखिकतः स्वतंत्र हैं यदि $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$।

8. Prove that the set $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, where $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 0)$ spans vector space $V(\mathbb{R}) = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ but does not form a basis for vector space $V(\mathbb{R})$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, जहाँ $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 0)$ सदिश समष्टि $V(\mathbb{R}) = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ को विस्तृत करता है।, लेकिन सदिश समष्टि $V(\mathbb{R})$ के लिए आधार नहीं बनाता है।

****