

A-1025

Total Pages : 4

Roll No.

MT-04

Bachelor of Science (BSC)

(Real Analysis & Metric Space)

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि

Examination, 2026 (Feb.)

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 35

Note :- This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। *परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।*

A-1025

(1)

P.T.O.

Section–A (खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

$2 \times 9\frac{1}{2} = 19$

Note :- Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. A sequence $\langle f_n \rangle$ of function $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ converges uniformly on A if and only if it is uniformly Cauchy on A.

एक फलन श्रेणी $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ सर्वत्र एकसमान अभिसर होती है, यदि और केवल यदि वह A पर सर्वत्र एकसमान कोशी है।

2. Write the short notes with examples of the following :
 - (a) Completeness in metric space
 - (b) Boundedness in metric space

निम्नलिखित पर एक संक्षिप्त टिप्पणी उदाहरण के साथ लिखिए :

- (a) पूरकता दूरीक समष्टि में।
 - (b) बाध्यता दूरीक समष्टि में।
3. Prove that $g_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, converges pointwise but not uniformly.

सिद्ध कीजिए की दी गयी श्रेणी $g_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, बिन्दुगत रूप से एक फल f की ओर जाती है, लेकिन रैखिक समान रूप से नहीं।

4. Let :
$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}$$

show that f is continuous at the point $(5, -3)$.

यदि :
$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}$$

है, तो यह दर्शाए कि f बिन्दु $(5, -3)$ पर सतत् फलन है।

5. Show that the sequence $\langle x_n \rangle = \frac{1}{n}$ is Cauchy in \mathbb{R} .

दर्शाए कि दी गयी श्रेणी $\langle x_n \rangle = \frac{1}{n}$, \mathbb{R} में कोशी है।

Section-B (खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×4=16

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Verify Rolle's theorem for $f(x) = x^2 - 4x + 3$ on $[1, 3]$.
बिन्दु $[1, 3]$ के लिए $f(x) = x^2 - 4x + 3$ पर रोले को सत्यापित कीजिए।

2. What is separable space ? Is \mathbb{R} separable ?
पृथक्कारी समष्टि क्या है ? क्या \mathbb{R} पृथक्कारी है ?

3. What is the difference between open cover and finite subcover ?

खुले आवरण एवं परिमित उपआवरण में क्या अन्तर है ?

4. Find :
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

ज्ञात कीजिए :
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

5. Let $X = \{a, b, c\}$, then :

(a) How many distinct topologies are possible in X

(b) Verify the topological axioms.

$X = \{a, b, c\}$ के लिए :

(अ) कितनी भिन्न टोपोलॉजी संभव है।

(ब) टोपोलॉजीकल शीर्ष अभिगुहीतों का सत्यापन कीजिए।

6. Define the following :

(a) Limit point

(b) Connected space

(c) Product space

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

(अ) सीमबिन्दु

(ब) अविभाज्य स्थान

(स) गुणित स्थान

7. If $f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$ and $f_n(0) = 0$. For each fixed $x \in (0, 1]$, find $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

यदि $f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$ और $f_n(0) = 0$ प्रत्येक नियत $x \in (0, 1]$, के लिए, ज्ञात कीजिए $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

8. Prove that every closed subset of X is compact.

सिद्ध कीजिए की 'X' का प्रत्येक सम बंद उप समुच्चय सघन है।
