A–0009

Total Pages : 7 **Roll No. .....**

MT (N)-301

Linear Algebra

Examination February, 2026

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 70

Note* :–** This paper is of Seventy (70) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्न-पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) (2×19=38)

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the set of all solution (a, b, c) of the equation $a + b + 2c = 0$ is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

   सिद्ध कीजिए कि समीकरण $a + b + 2c = 0$ के सभी हलों (a, b, c) का समुच्चय, सदिश समष्टि $V_3(R)$ की एक उपसमष्टि (subspace) है।

2. If W_1 and W_2 are finite dimensional subspace of a vector space V, then show that $W_1 + W_2$ is finite dimensional and :

   $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$

यदि W_1 और W_2 एक सदिश समष्टि V की परिमित-विमीय उपसमष्टियाँ (finite dimensional subspace) हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $W_1 + W_2$ परिमित-विमीय है और :

$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$

3. Let U and V be vector spaces over the field F and let T be a linear transformation from U into V . Suppose U is finite dimensional, then prove that :

$$rank(T) + nulity(T) = \dim U$$

मान लीजिए U और V क्षेत्र F पर परिभाषित सदिश समष्टियाँ हैं और मान लीजिए T, U से V में एक रैखिक परिवर्तन (linear transformation) है। यदि V परिमित-विमीय (finite dimensional) है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$rank(T) + nulity(T) = \dim U$$

4. State and prove the Bessel's inequality.

बेसल की असमिका (Bessel's inequality) को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

5. Defined basis and dual basis. Find the dual basis of the basis set :

$B = \{(1, 1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ for $V_3(R)$

आधार (Basis) और द्वैत आधार (Dual Basis) को परिभाषित कीजिए। $V_3(R)$ के लिए आधार समुच्चय $B = \{(1, 1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ के द्वैत आधार (Dual Basis) ज्ञात कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) (4×8=32)

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If α, β, γ are linearly independent vectors of V(F) where F is any subfield of the field of complex numbers then prove that $\alpha, + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ are also linearly independent.

   यदि V(F) के रैखिकतः आश्रित सदिश α, β, γ हैं, जहाँ F सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र का कोई उपक्षेत्र है, तो सिद्ध कीजिए कि $\alpha, + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ भी रैखिकतः आश्रित हैं।

2. Determine the basis of the subspace spanned by the vectors $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 1, -1), \alpha_3 = (1, -1, -4), \alpha_4 = (4, 2, -2)$.

   सदिशों $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 1, -1), \alpha_3 = (1, -1, -4), \alpha_4 = (4, 2, -2)$ द्वारा निर्मित उपसमष्टि का आधार ज्ञात कीजिए।

3. Define the range of linear transformation T from the vector space V to U. Also, show that range of linear transformation is a subspace of vector space U.

सदि समष्टि V से U में परिभाषित रैखिक परिवर्तन T के परिसर (Range) को परिभाषित कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि रैखिक परिवर्तन का परिसर, सदिश समष्टि U की एक उपसमष्टि है।

4. Find the rank and nullity of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

की कोटि (Rank) और शून्यता (Nullity) ज्ञात कीजिए :

5. If :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

then find a non-singular matrix P^{-1} such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

यदि :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

है, तो एक अव्युत्क्रमणीय (Non-singular) आव्यूह P^{-1} ज्ञात कीजिए ताकि $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) है।

6. Evaluate :

$$A = \begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

7. Define the following : Inner product space, orthogonality, orthonormality and norm of a vector. Also provide the suitable example.

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए : आंतरिक गुणन समष्टि (Inner product space), लांबिकता (Orthogonality), अभिलांबिकता (Orthonormality) और एक सदिश का मान (Norm)। प्रत्येक के लिए उपयुक्त उदाहरण भी दीजिए।

8. Consider $f(t) = t + 2$, $g(t) = 3t - 2$ and $h(t) = t^2 - 2t - 3$ and in the polynomial space P(t) with inner product defined as :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Then find :

(i) $\langle f, g \rangle$ and $\langle f, h \rangle$

(ii) $\| h \|$

बहुपद समष्टि P(t) में $f(t) = t + 2$, $g(t) = 3t - 2$ और $h(t) = t^2 - 2t - 3$ पर विचार कीजिए, जहाँ आंतरिक :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

से परिभाषित कीजिए। तब ज्ञात कीजिए :

(i) $\langle f, g \rangle$ and $\langle f, h \rangle$

(ii) $\| h \|$

****