A–0007

Total Pages : 7 **Roll No. ....**

MT (N)-202

Abstract Algebra

Examination February, 2026

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 70

Note* :–** This paper is of Seventy (70) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्न–पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–ख)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) (2×19=38)

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड **'क'** में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Define group. Show that the set $G = \{mz | m$ is fixed integer and $z \in Z$ (set of integer)$\}$ is form a group with respect to the operation addition. Is this group is abelian group or not.

   समूह को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि समुच्चय $G = \{mz | m$ निश्चित पूर्णांक है और $z \in Z$ (पूर्णांणों का समुच्चय)$\}$ संक्रिया योग के सापेक्ष एक समूह बनाता है। क्या समूह एक अबेलियन समूह है या नहीं।

2. If G be a group and H is the subgroup of G. Then prove the following statement are equivalent :

(a) The subgroup H is normal in G

(b) For all $a \in G$, $aHa^{-1} \subseteq H$

(c) For all $a \in G$, $aHa^{-1} = H$

यदि G एक समूह है और H, G का एक उपसमूह है, तो सिद्ध कीजिए निम्नलिखित कथन समतुल्य है :

(अ) उपसमूह H, G में सामान्य है

(ब) सभी $a \in G$, $aHa^{-1} \subseteq H$

(स) सभी $a \in G$, $aHa^{-1} = H$

3. Prove that the set A_n of all even permutation of degree n forms a group of order $\frac{n!}{2}$ with respect to the permutation multiplication. Also show that the set A_4 of all even permutation on four symbols {1, 2, 3, 4} is a finite non–abelian group of order 12 with respect to the operation permutation multiplication.

सिद्ध कीजिए कि n घात के सभी समपरिचयों (Even Permutation) का समुच्चय A_n, क्रम $\frac{n!}{2}$ का एक समूह बनाता है, परिचय गुणन के सापेक्ष। यह भी दिखाइए कि चार प्रतीकों {1, 2, 3, 4} पर सभी समपरिचयों का समुच्चय A_4, क्रम 12 का एक सांत, अ–अबेलियन समूह है, परिचय गुणन संक्रिया के सापेक्ष।

4. If $f : G \to G'$ be a isomorphism then prove the following :

   (a) The f-image of the identity e of G is the identity $f(e)$ of G′.

   (b) The f-image of the inverse element a of G is the inverse of f-image of a i.e., $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

   (c) The order of an element a of G is equal to the order of its image $f(a)$.

   यदि $f : G \to G'$ एक समरूपता (Isomorphism) है, तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

   (a) G के तत्समक अवयव e का f-प्रतिबिम्ब, G′ का तत्समक अवयव e' है। (अर्थात, $f(e) = e'$)।

   (b) G के किसी अवयव a के प्रतिलोम का f-प्रतिबिम्ब, a के f-प्रतिबिम्ब का प्रतिलोम है। (अर्थात् $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$।

   (c) G के किसी अवयव a का क्रम (Order), उसके प्रतिबिम्ब $f(a)$ के क्रम के बराबर होता है।

5. Prove that finite integral domain is field.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सांत समाकलन प्रांत (Finite Integral Domain) एक क्षेत्र (Field) होता है।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) (4×8=32)

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions on ly.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the function, $f : \text{N} \rightarrow \text{N}$ such that $f(x) = x^2$, is one-one but not on-to.

   सिद्ध कीजिए कि फलन $f : \text{N} \rightarrow \text{N}$ जो $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, एक-एक (one-one) है परंतु आच्छादक (onto) नहीं है।

2. Define the following : Subgroup, Abelian group, Cyclic group and Symmetric group. Also provide their suitable example.

   निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए : उपसमूह (Subgroup), आबेलियन समूह (Abelian group), चक्रीय समूह (Cyclic group) और सममित समूह (Symmetric group)। साथ ही उनके उपयुक्त उदाहरण भी दीजिए।

3. Prove that identity and inverse element in a group are always unique.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह में तत्समक अवयव (identity element) और प्रतिलोम अवयव (inverse element) सदैव अद्वितीय (unique) होते हैं।

4. Prove that the intersection of two subgroup is always a subgroup.

सिद्ध कीजिए कि दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ (intersection) सदैव एक उपसमूह होता है।

5. Find the order of each element of the group $(Z_6, +_6)$. Also prove that $(Z_6, +_6)$ is cyclic group.

समूह $(Z_6, +_6)$ के प्रत्येक अवयव का क्रम (order) ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $(Z_6, +_6)$ एक चक्रीय समूह (cyclic group) है।

6. Define range of homomorphism. If $f : G \rightarrow G'$ then prove that range of homomorphism is subgroup of G'.

समरूपता का परिसर (range of homomorphism) परिभाषित कीजिए। यदि $f : G \rightarrow G'$ एक समूह समरूपता (group homomorphism) है, तो सिद्ध कीजिए कि इस समरूपता का परिसर, G' का एक उपसमूह (subgroup) होता है।

7. Prove that every group is isomorphic to a permutation group.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह (permutation group) के लिए समरूपी (isomorphic) होता है।

8. Show that the set $R = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ is a ring under the usual addition and multiplication as binary composition.

दशाईए कि समुच्चय $R = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$, सामान्य योग और गुणन संक्रियाओं के साथ वलय (ring) बनाता है।

****