A–0005

Total Pages : 6 **Roll No. .....**

MT (N)-201

Real Analysis

Examination February, 2026

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 70

Note* :–** This paper is of Seventy (70) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट : यह प्रश्न-पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) (2×19=38)

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट : खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that any sequence is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

   यह सिद्ध कीजिए कि कोई भी अनुक्रम (sequence) अभिसारी (convergent) होता है यदि और केवल यदि वह एक कॉशी अनुक्रम (Cauchy sequence) हो।

2. Write definition of uniformly continuous function and prove that the function $f(x) = x^2$ is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

   समान रूप से सतत (Uniformly Continuous) फलन की परिभाषा लिखिए और यह सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $\mathbb{R}$ पर समान रूप से सतत नहीं है।

3. Define Upper Darboux Sums and Lower Darboux Sums and Compute L(P, f) and U(P, f) if

$f(x) = x$ for $x \in [0, 3]$ and let P = {0, 1, 2, 3} be the partition of [0, 3].

उच्च डारबू योग (Upper Darboux Sums) और निम्न डारबू योग (Lower Darboux Sums) की परिभाषा दीजिए और L(P, f) तथा U(P, f) की गणना कीजिए यदि $f(x) = x$ जहाँ $x \in [0, 3]$ तथा विभाजन (Partition) P = {0, 1, 2, 3} है।

4. Prove that the sequence of functions $\langle f_n(x) \rangle$ where :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

is uniformly convergent

on $[a, b]$, $a > 0$ but is only pointwise convergent on $[0, b]$.

यह सिद्ध कीजिए कि फलनों का अनुक्रम $\langle f_n(x) \rangle$ जहाँ :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

है, $[a, b]$, $a > 0$ पर समान रूप से अभिसारी (uniformly convergent) है, परन्तु $[0, b]$ पर केवल बिन्दुवार अभिसारी (pointwise convergent) है।

5. Prove that every differentiable function is continuous but converse need not be true.

यह सिद्ध करें कि प्रत्येक अवकलनीय (differentiable) फलन सतत (continuous) होता है, परन्तु इसका प्रतिलोम (converse) सत्य नहीं है।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) (4×8=32)

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions on ly.

नोट : खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. For any two sets A and B, prove that :

   (a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   (b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

   किसी भी दो समुच्चयों A और B के लिए यह सिद्ध कीजिए कि :

   (अ) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   (ब) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

2. Write and prove Archimedean property of $\mathbb{R}$.

   $\mathbb{R}$ (वास्तविक संख्याओं) के आर्किमीडीय गुण (Archimedean Property) को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

3. Let $c \in \mathbb{R}$. Then prove that union of two neighborhoods of c is a neighborhood of c.

मान लीजिए $c \in \mathbb{R}$ के दो आसन्न क्षेत्रों (neighborhoods) का संयोजन (union) c का एक आसन्न क्षेत्र होता है।

4. Find the derived set of each of the following :

$$S = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

निम्नलिखित प्रत्येक का अवकलित समुच्चय (derived set) ज्ञात कीजिए :

$$S = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

5. Examine the convergence of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ के अभिसरण (convergence) की जाँच कीजिए।

6. Find the Taylor series for the function $x^4 + x - 2$ centered at $a = 1$.

फलन $x^4 + x - 2$ का टेलर श्रेणी विस्तार ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र $a = 1$ है।

7. Examine for convergence of the integral :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\, dx$$

समाकल $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\, dx$ के अभिसरण की जाँच करें।

8. Prove that the set of all rational number is not a closed set.

सिद्ध कीजिए कि सभी परिमेय संख्याओं (rational number) का समुच्चय बंद समुच्चय (closed set) नहीं है।

****