A-0623

Total Pages : 5 **Roll No. ....**

MT–07

Bachelor of Science (BSC)

(Algebra)

(बीजगणित)

3rd Year Examination, Session December 2024

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note* :–** This paper is of Thirty Five (35) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट :– यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट :– खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the characteristic of an integral domain is either 0 or a prime number.

   सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रांत की विशेषता या तो 0 या एक अभाज्य संख्या होती है।

2. The intersection of any *two* subspaces W_1 and W_2 of the vector space V(F) is also a subspace of V(F).

   सदिश समष्टि V(F) के किन्हीं **दो** उपसमष्टि W_1 और W_2 का प्रतिच्छेदन भी V(F) का एक उपसमष्टि है।

3. Show that M is maximal ideal of R iff R/M is a field.

   दर्शाइए कि M, R की उच्चिष्ट फलन है यदि और केवल यदि R/M एक क्षेत्र है।

4. Show that the vectors (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, 2) form a basis of R^3.

दर्शाइए कि वेक्टर (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, 2) का आधार बनाते हैं।

5. State and prove the fundamental theorem of ring homomorphism.

वलय समरूपता के मूल सिद्धान्त को बताइए और सिद्ध कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :– खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that if every element of a group G is its own inverse, then G is abelian.

दर्शाइए कि यदि समूह G का प्रत्येक अवयव स्वयं का व्युत्क्रम है, तो G आबेली है।

2. If G be a group, then prove that :

$$Z = \{z \in G : xz = zx \; \forall \; x \in G\}$$

is a subgroup of G.(Z is called Centre of G).

यदि G एक समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$Z = \{z \in G : xz = zx \; \forall \; x \in G\}$$

G का एक उपसमूह है। (Z को G का केन्द्र कहा जाता है)।

3. Show that :

$$(Ha)^{-1} = a^{-1} H$$

where $H < G$ and $a \in G$.

दर्शाइए कि :

$$(Ha)^{-1} = a^{-1} H$$

जहाँ $H < G$ तथा $a \in G$.

4. Show that any Field F is an integral domain.

दर्शाइए कि कोई भी क्षेत्र F एक पूर्णांकीय डोमेन है।

5. Prove that a subgroup is a cyclic group is again cycle group.

सिद्ध कीजिए कि एक उपसमूह एक चक्रीय समूह है जो पुनः चक्रीय समूह है।

6. Show that the vectors (1, 2, 0), (0, 3, 1) and (–1, 0, 1) in $R^{(3)}$ are linearly independent.

दर्शाइए कि $R^{(3)}$ में सदिश (1, 2, 0), (0, 3, 1) और (–1, 0, 1) रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

7. Prove that the group G is abelian if and only if :

$$(a \, . \, a)^2 = a^2 b^2 \ \forall \ a, b \in G$$

सिद्ध कीजिए कि समूह G आबेलियन है यदि और केवल यदि :

$$(a \, . \, a)^2 = a^2 b^2 \ \forall \ a, b \in G$$

8. Define a vector space and give one example.

सदिश समष्टि को परिभाषित दीजिए और एक उदाहरण दीजिए।

****