A-0620

Total Pages : 7 **Roll No. ....**

MT–04

Bachelor of Science (BSC)

(Real Analysis and Metric Space)

(वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि)

2nd Year Examination, Session December 2024

Time : 2:00 Hrs. Max. Marks : 35

Note* :–** This paper is of Thirty Five (35) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट :– यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

नोट :– खण्ड **'क'** में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $x, y \in \mathrm{R}$, then :

   (i) $|x| = \max\{x, -x\}$

   (ii) $x \le |x|$ and $-x \le |x|$

   (iii) $|xy| = |x||y|$

   (iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|, y \neq 0$

   यदि $x, y \in \mathrm{R}$ हो, तो :

   (i) $|x| = \max\{x, -x\}$

(ii) $x \le |x|$ और $-x \le |x|$

(iii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|, y \neq 0$

2. Prove that $\sqrt{2}$ is a irrational number.

सिद्ध कीजिए $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. Prove that the function

$$f(x) = e^x, x \in R$$

is differential in R.

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x) = e^x, x \in R \text{ प्रान्त } R$$

में अवकलनीय है।

4. Verify Rolle's theorem when

$$f(x) = 8x - x^2$$

in the interval [2, 6].

अंतराल [2, 6] में फलन

$$f(x) = 8x - x^2$$

के लिए रोल प्रमेय का परीक्षण कीजिए।

5. Every convergent sequence is bounded.

प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध है।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :– खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that the sequence $\{x_n\}$ is convergent. Where :

$$\{x_n\} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+n)} \;\; \forall\, n \in \mathrm{N}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी है। जहाँ :

$$\{x_n\} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+n)} \;\; \forall\, n \in \mathrm{N} \text{ हैं।}$$

2. For which value of K the function f :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \mathrm{K}x \;;\; x > 1 \\ 5x - 3\mathrm{K} \;;\; x \le 1 \end{cases}$$

is continuous at $x = 1$.

K के किस मान के लिए फलन f :

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-\mathrm{K}x \ ; \ x>1\\ 5x-3\mathrm{K} \ ; \ x\le 1\end{cases}$$

$x = 1$ पर संतत होगा।

3. Let $f(x)$ be a function defined on $\left[0,\frac{1}{4}\pi\right]$ by :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x \ , \ \text{if } x \text{ is rational}\\ \sin x \ , \ \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

Show that f is not Remain integral over $\left[0,\frac{1}{4}\pi\right]$.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x \ , \ \text{यदि } x \text{ परिमेय है}\\ \sin x \ , \ \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है}\end{cases}$$

अंतराल $\left[0,\frac{1}{4}\pi\right]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

4. Examine the uniform convergence of a series whose sum of terms is :

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}; \ 0\le x\le 1$$

उस श्रेणी के एक समान अभिसरण का परीक्षण कीजिए जिसके न पदों का योगफल निम्न है :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx};\ 0 \le x \le 1$$

5. Let (x, d) be a metric space and A, B is a subset of X. Then :

(i) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(iii) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$

माना (x, d) एक दूरिक समष्टि है तथा A, B, X के दो उपमुच्चय है। तब :

(i) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(iii) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$

6. Let (x, d_1) and (x, d_2) be two metric spaces and let f is a function from x to y. Show that f is continuous at $x_0 \in X$ if and only if :

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

माना (x, d_1) तथा (x, d_2) दो दूरिक समष्टियाँ है तथा f, x से y में एक फलन है। प्रदर्शित कीजिए कि f, $x_0 \in X$ पर सतत होगा यदि और केवल यदि :

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

7. Every finite subset of a metric space is compact.

   एक दूरिक समष्टि का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय सहंत होता है।

8. What is the mean value theorem of integral calculus ?

   समाकलन गणित की माध्य मान प्रमेय क्या है ?

****