

A-1101

Total Pages : 7

Roll No.

MT (N)-220

(Discrete Mathematics)

3rd Semester Examination, Session December 2024

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 70

Note :- This paper is of Seventy (70) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein.
Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

नोट :- यह प्रश्न-पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। ***परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।***

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

2×19=38

Note :— Section ‘A’ contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any two (02) questions only.

नोट :— खण्ड ‘क’ में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove the following proposition :

$$P(n): 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

निम्नलिखित प्रस्ताव को सिद्ध कीजिए :

$$P(n): 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

2. Show that the set of all positive rational number Q^+ forms an abelian group under the composition

defined by $a * b = \frac{ab}{2}$.

सिद्ध कीजिए की सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं Q^+ का समुच्चय परिभाषित संरचना $a * b = \frac{ab}{2}$ के अंतर्गत एक अबेलियन समूह बनाता है।

3. State and Prove the Lagrange's theorem for a finite group G.

किसी सीमित समूह के लिए लगरांगेस प्रमेय को कथन सहित सिद्ध करें।

4. Draw a diagram of each of the following multigraphs $G = G(V, E)$, where $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$:

- (i) $E = [\{P_2, P_4\}, \{P_2, P_3\}, \{P_3, P_5\}, \{P_5, P_4\}]$
(ii) $E = [\{P_1, P_1\}, \{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_3, P_2\}, \{P_4, P_1\}, \{P_5, P_4\}]$

निम्नलिखित प्रत्येक मल्टीग्राफ $G = G(V, E)$ के लिए एक आरेख बनायें, जब $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$:

- (i) $E = [\{P_2, P_4\}, \{P_2, P_3\}, \{P_3, P_5\}, \{P_5, P_4\}]$
(ii) $E = [\{P_1, P_1\}, \{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_3, P_2\}, \{P_4, P_1\}, \{P_5, P_4\}]$

5. Define the followings with suitable example :

- (i) Power sets

- (ii) Venn diagram
- (iii) One-One function
- (iv) On-to function
- (v) Automation theory

निम्नलिखित को उपयुक्त उदाहरण सहित परिभाषित करें :

- (i) घात समुच्चय
- (ii) वेन आरेख
- (iii) एकांकी फलन
- (iv) आच्छादित फलन
- (v) ऑटोमेशन कथन

Section-B

(खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×8=32

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :- खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If R as the relation from $P = \{1, 2, 3, 4\}$ to $Q = \{x, y, z\}$ defined by :

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

Then find following :

- (i) Find out domain and range of R
- (ii) Find the R^{-1} of R

यदि $R, P = \{1, 2, 3, 4\}$ से $Q = \{x, y, z\}$ में एक सम्बन्ध है जहाँ :

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

प्रदर्शित करता है। तब निम्न को ज्ञात करें :

- (i) R का डोमेन और रेंज का पता लगाएं
 - (ii) R का R^{-1} ज्ञात करें
2. If f is a function $f: R \rightarrow R$ such that :

$$f(x) = 3x + 2 \forall x \in R$$

Prove that f is a one-one and on to both.

यदि f एक फलन है $f: R \rightarrow R$ ताकि $f(x) = 3x + 2 \forall x \in R$ ।

सिद्ध कीजिए कि फलन f एक एकांकी एवं आच्छादित दोनों फलन है।

3. Find the principal disjunctive normal form of $p \wedge (p \wedge q)$.

$p \wedge (p \wedge q)$ का प्रमुख वियोजक सामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

4. Prove that if $p + q \geq 93$, then $p \geq 47$ or $q \geq 47$, p and q being the positive integers.

सिद्ध करें कि यदि $p + q \geq 93$, तब $p \geq 47$ या $q \geq 47$, जहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक हैं।

5. Find the solution of the recurrence relation :

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - 5x_{n-2}, n > 2 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

दिए गए पुनरावृत्ति संबंध का समाधान खोजें :

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - 5x_{n-2}, n > 2 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

6. Determine the numeric function corresponding to each of the following generating functions :

(i) $G(x) = \frac{2}{1 - 4x^2}$

(ii) $G(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$

निम्नलिखित प्रत्येक जनरेटिंग फंक्शन के अनुरूप संख्यात्मक फंक्शन निर्धारित करें :

$$(i) \quad G(x) = \frac{2}{1-4x^2}$$

$$(ii) \quad G(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

7. Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if the following conditions are satisfied :

$$(i) \quad a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$(ii) \quad a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

सिद्ध कीजिए कि समूह G का एक गैर-रिक्त उपसमूह H , G का एक उपसमूह है यदि :

$$(i) \quad a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$(ii) \quad a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

8. Prove that total number of pendent vertices in a fully binary tree with n vertices $\frac{n+1}{2}$

सिद्ध करें कि n शीर्षों वाले पूर्णतः द्विआधारी वृक्ष में लंबित शीर्षों की

कुल संख्या $\frac{n+1}{2}$ है।
