

A-1100

Total Pages : 5

Roll No.

MT (N)-201

(Real Analysis)

3rd Semester Examination, Session December 2024

Time : 2:00 Hrs.

Max. Marks : 70

Note :- This paper is of Seventy (70) marks divided into Two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given therein. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

नोट :- यह प्रश्न-पत्र सत्तर (70) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। *परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।*

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

2×19=38

Note :— Section ‘A’ contains Five (05) Long-answer type questions of Nineteen (19) marks each. Learners are required to answer any two (02) questions only.

नोट :— खण्ड ‘क’ में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए उन्नीस (19) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove that every infinite and bounded subset of $\mathbb{R}$ has a limit point.

सिद्ध करें कि $\mathbb{R}$ के प्रत्येक अनंत और परिबद्ध उपसमुच्चय का एक सीमा बिन्दु होता है।

2. State and prove Rolle’s Theorem.

रोले का प्रमेय बताएं और सिद्ध करें।

3. Show that function $f(x) = x^3$ is Riemann integrable on any interval $[0, b]$.

दिखाएँ कि फंक्शन $f(x) = x^3$ किसी भी अंतराल $[0, b]$ पर रिमैन पूर्णांकित है।

4. Prove that the sequence of functions $\langle f_n \rangle$ Where,

$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$ is non-uniformly convergent on $[0, 1]$.

सिद्ध करें कि $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$, $[0, 1]$ पर गैर एकसमान अभिसरण फलन है।

5. Examine for convergence of the integrals :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

समाकलन $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ के अभिसरण की जाँच करें।

Section-B

(खण्ड-ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×8=32

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Eight (08) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

नोट :- खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए आठ (08) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Let $A = \{1, 5, 8, 9\}$ and $B = \{2, 4\}$ and $f = \{(1, 2), (5, 4), (8, 2), (9, 4)\}$. Then prove f is a onto function.
मान लीजिए $A = \{1, 5, 8, 9\}$ और $B = \{2, 4\}$ और $f = \{(1, 2), (5, 4), (8, 2), (9, 4)\}$ । फिर सिद्ध करें कि f एक आच्छादक फलन है।
2. Define Archimedean Property of $\mathbb{Q}$.
 $\mathbb{Q}$ की आर्किमिडीयन गुण को परिभाषित कीजिए।
3. Find the derived set of :

$$S = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Q} \right\} \text{ का व्युत्पन्न समुच्चय ज्ञात कीजिए।}$$

4. A sequence is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.
कोई अनुक्रम अभिसारी होता है यदि और केवल यदि वह कॉची अनुक्रम हो।

5. Test the convergence of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$$

शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

6. Prove that $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on $[-2, 2]$.

सिद्ध करें कि $f(x) = x^2$ एकसमान रूप से $[-2, 2]$ पर सतत है।

7. Prove that every Monotonic function f is Riemann integrable.

सिद्ध करें कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन f रीमैन इंटीग्रेबल है।

8. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$ is uniformly convergent on $[0, 1]$.

सिद्ध करें कि $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$, $[0, 1]$ पर एकसमान अभिसरण है।
