K–41

Total Page No. : 6] **[Roll No. ....**

MT–08

B.Sc. IIIrd Year Examination Dec., 2023

COMPLEX ANALYSIS

समिश्र विश्लेषण

Time : 2 Hours] [**Max. Marks :** 35

Note* :–** This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। **परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।**

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and derive Cauchy-Riemann equations for analytic functions.

   विश्लेषणात्मक कार्यों के लिए कॉची–रीमान समीकरण बताइए। और व्युत्पन्न कीजिए।

2. Find the analytic function whose real past is $\dfrac{\sin 2x}{(\cosh 2y - \cos 2x)}$.

   वह विश्लेषणात्मक फलन ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग $\dfrac{\sin 2x}{(\cosh 2y - \cos 2x)}$ है।

3. Let $f(z)$ be an analytic function of z in a region D of the z-plane and let $f'(z) \neq 0$ inside D. Then prove that the mapping $w = f(z)$ is conformal at the points of D.

मान लीजिए कि $f(z)$, z-तल के क्षेत्र में D में z का एक विश्लेषणात्मक कार्य है और मान लीजए कि $f'(z) \neq 0$ के अन्दर है। फिर सिद्ध कीजिए कि मानचित्रण $w = f(z)$, D के बिन्दुओं पर अनुरूप है।

4. Let $f(z)$ be an analytic function within and on the boundary C of a simply connected region D and let z_0 be any point within C, then derive :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

मान लीजिए कि $f(z)$ एक सरल रूप से जुड़े हुए क्षेत्र D की सीमा C के भीतर और सीमा पर एक विश्लेषणात्मक कार्य है और मान लीजिए कि z_0 के भीतर कोई बिन्दु है। फिर व्युत्पन्न कीजिए :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

5. With the help of calculus of residue, calculate the value of $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

अवशेषों के केलकुलस की सहायता से, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ के मूल्य की गणना कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If z_1 and z_2 are two complex numbers, then prove that :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

यदि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

2. Prove that an analytic function with constant modulus is constant.

सिद्ध कीजिए कि स्थिर मापांक वाला एक विश्लेषणात्मक फलन स्थिर होता है।

3. If $f(z) = u + v$ is an analytic function of $z = x + iy$, prove that the families of curves $u = c_1$, $v = c_2$ are orthogonal to each other.

यदि $f(z) = u + v$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषणात्मक कार्य है, तो सिद्ध कीजिए कि वक्र $u = c_1$, $v = c_2$ के परिवार एक दूसरे के लिए ऑर्थोगोनल हैं।

4. Consider the transformation $w = z.\ \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ and determine the region in the w-plane corresponding to the rectangular region bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$ in the z-plane.

परिवर्तन $w = z$ पर विचार कीजिए। $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ और z-तल में $x = 0$, $y = 0$ और $x + y = 1$ रेखाओं से घिरे आयताकार क्षेत्र के अनुरूप w-तल में क्षेत्र निर्धारित कीजिए।

5. Find the radius of convergence of the power series $\sum \frac{z^n}{n!}$.

पॉवर शृंखला $\sum \frac{z^n}{n!}$ के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. State and prove Liouvile theorem for entire function.

सम्पूर्ण फलन के लिए लिउवले प्रमेय बताइए और सिद्ध कीजिए।

7. Show that the function e^z has an isolated essential singularity at $z = \infty$.

दिखाइए कि फंक्शन e^z में $z = \infty$ पर एक पृथक् आवश्यक विलक्षणता है।

8. Determine the poles of the function $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ and residue at each point.

फंक्शन $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ के ध्रुव और प्रत्येक बिन्दु पर अवशेष निर्धारित कीजिए।

****