Total Page No. : 6] **[Roll No. ....**

MT–07

B.Sc. IIIrd Year Examination Dec., 2023

ALGEBRA

बीजगणित

Time : 2 Hours] [**Max. Marks :** 35

Note :– This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। **परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।**

Section–A

(खण्ड–क)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

***Note* :–** Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If H and K are finite subgroups of a group G, then prove that :

$$0(HK) = \frac{0(H)0(K)}{0(H \cap K)}$$

यदि H और K समूह G के परिमित उपसमूह है, तो सिद्ध कीजिए :

$$0(HK) = \frac{0(H)0(K)}{0(H \cap K)}$$

2. Prove that H is a normal subgroup of a group G iff the product of any two right cosets of H in G is a right coset of H in G.

साबित कीजिए कि H समूह G का एक सामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि G में H के किन्हीं दो सही सहसमुच्चय का गुणनफल G में H का एक सही सहसमुच्चय है।

3. (a) Prove that a finite integral domain is a field

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित अभिन्न डोमेन एक क्षेत्र है।

(b) Show that the ring z_p of integers modulo p is a field if and only if p is prime

दिखाइए कि पूर्णांक मॉड्यूल p का रिंग z_p एक फील्ड है यदि और केवल यदि p अभाज्य है।

4. Prove that a finite dimensional vector space V has dimension n if and only if n is the maximum number of linearly independent vectors in any subset of V.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित आयामी सदिश समष्टि V का आयाम n है यदि और केवल यदि n, V के किसी उपसमुच्चय में रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिशों की अधिकतम संख्या है।

5. Write short notes on the following :

(i) Definition of subgroup

(ii) Permutation group

(iii) Field

(iv) Basis and dimensions

(v) Quotient space and its dimension

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

(i) उपसमूह की परिभाषा

(ii) क्रम परिवर्तन समूह

(iii) फील्ड

(iv) आधार और आयाम

(v) भागफल स्थान और उसका आयाम

Section–B

(खण्ड–ख)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Prove thatt he set of cube roots of unity forms an abelian group with respect to multiplication.

सिद्ध कीजिए कि एकता के घनमूलों का समुच्चय गुणन के सम्बन्ध में एक एबेलियन समूह बनाता है।

2. Show by an example that the union of two subgroup of a group G is not necessarily a subgroup of G.

एक उदाहरण द्वारा दिखाइए कि समूह G के दो उपसमूहों का मिलन आवश्यक रूप से G का उपसमूह नहीं है।

3. Define cyclic group and show that U_9 is a cyclic group.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए और दिखाइए कि U_9 एक चक्रीय समूह है।

4. Define subring of a ring and prove that intersection of two subrings is again a subring.

एक रिंग के सबरिंग को परिभाषित कीजिए और साबित कीजिए कि दो सबरिंग का प्रतिच्छेदन फिर से एक सबरिंग है।

5. Prove that every field is an integral domain, but the converse need not be true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक अभिन्न डोमेन है, लेकिन इसका विपरीत सत्य होना आवश्यक नहीं है।

6. Define linear dependence and independent of vectors and prove that every superset of a linearly dependent set is linearly dependent.

सदिशों की रैखिक निर्भरता और स्वतंत्रता को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि रैखिकत: आश्रित समुच्चय का प्रत्येक सुपरसेट रैखिकत: आश्रित होता है।

7. Consider two subspaces A and B of $V = R^4(R)$ such that :

$$A = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in R\},$$

$$B = \{(0, y, z, t) : y, z, t \in R\}$$

Determine dim $(A \cap B)$.

$V = R^4(R)$ के दो उपस्थान A और B पर विचार करें जैसे कि :

$$A = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in R\},$$

$$B = \{(0, y, z, t) : y, z, t \in R\}$$

dim $(A \cap B)$ निर्धारित कीजिए।

8. Prove that every finite dimensional vector space V(F) has a basis.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित आयामी सदिश समष्टि V(F) का एक आधार होता है।

****