Total Page No. : 5] **[Roll No. ....**

MT–04

B.Sc. IInd Year Examination Dec., 2023

REAL ANALYSIS AND METRIC SPACE

वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि

Time : 2 Hours] [**Max. Marks :** 35

Note :– This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. ***Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.***

यह प्रश्न–पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। **परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर–पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।**

Section–A

(खण्ड–अ)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 2×9½=19

Note :– Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half (9½) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ (9½) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **दो** (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. If $a_1, a_2 > 0$ and $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}}$, $n > 2$; then show that $\langle a_n \rangle$ converges to $\dfrac{3a_1a_2}{2a_1+a_2}$.

   यदि $a_1, a_2 > 0$ और $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}}$, $n > 2$; फिर दिखाइए कि $\dfrac{3a_1a_2}{2a_1+a_2}$ में परिवर्तित हो जाता है।

2. If $(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; and $f(x) = 0$, $x = 0$. Prove that $f(x)$ has a derivative at $x = 0$ and that $f(x)$ and $f'(x)$ are continuous at $x = 0$.

   यदि $(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; तथा $f(x) = 0$, $x = 0$। सिद्ध कीजिए कि $f(x)$ का $x = 0$ पर एक व्युत्पन्न है और $f(x)$ और $f'(x)$, $x = 0$ पर निरन्तर हैं।

3. Test for uniform convergence, the sequence $\{f_n\}$, where

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2},\ x \in [0,\ 1].$$

एक समान अभिसरण के लिए परीक्षण, अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2},\ x \in [0,\ 1]।$$

4. Prove that continuous image of a connected set is connected.

सिद्ध कीजिए कि कनेक्टेड सेट की निरन्तर छवि जुड़ी हुई है।

5. Prove that a necessary and sufficient condition for the integrability of a bounded function f is that to every $\in > 0$, there corresponds $\delta > 0$ such that for every partition P of $[a, b]$ with norm $\mu(P) < \delta$, $U(P, f) - L(P, f) < \in$.

सिद्ध कीजिए कि एक बंधे हुए फंक्शन f की अभिन्नता के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त शर्त यह है कि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए $\delta > 0$ से मेल खाता है, जैसे कि $[a, b]$ के प्रत्येक विभाजन P के लिए मानदण्ड $\mu(P) < \delta$, $U(P, f) - L(P, f) < \in$ ।

Section–B

(खण्ड–ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 4×4=16

***Note* :–** Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल **चार** (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Show that the set of rational numbers is not order-complete.

   दिखाइए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय क्रम–पूर्ण नहीं है।

2. Prove that the derived set of a set is closed.

   सिद्ध कीजिए कि समुच्चय का व्युत्पन्न समुच्चय बंद है।

3. Prove that the limit of a sequence is unique.

   सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम की सीमा अद्वितीय है।

4. Show that :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

   दर्शाइए कि :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

5. Let (X, d) be any metric space. Show that the function d_1 defined by :

$$d_1(x.y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ \forall x,y \in \mathrm{X}$$

मान लीजिए (X, d) कोई मीट्रिक स्थान है। दिखाइए कि फंक्शन द्वारा परिभाषित है :

$$d_1(x.y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ \forall x,y \in \mathrm{X}$$

6. Prove that every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक बंद गोला एक बंद समुच्चय है।

7. Prove that every sequentially compact metric space (X, d) is compact.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्रमिक रूप से संहत मीट्रिक स्थान (X, d) संहत है।

8. Show that every totally bounded metric space is separable.

दिखाइए कि प्रत्येक पूरी तरह से घिरा हुआ मीट्रिक स्थान अलग करने योग्य है।

****