

K-35

Total Page No. : 6]

[Roll No.]

MT-02

B.Sc. Ist Year Examination Dec., 2023

**CALCULUS AND DIFFERENTIAL
EQUATION**

कलन एवं अवकलन समीकरण

Time : 2 Hours]

[Max. Marks : 35

Note :- This paper is of Thirty five (35) marks divided into two (02) Sections 'A' and 'B'. Attempt the questions contained in these Sections according to the detailed instructions given there in. *Candidates should limit their answers to the questions on the given answer sheet. No additional (B) answer sheet will be issued.*

यह प्रश्न-पत्र पैंतीस (35) अंकों का है, जो दो (02) खण्डों 'क' तथा 'ख' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है। परीक्षार्थी अपने प्रश्नों के उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका तक ही सीमित रखें। कोई अतिरिक्त (बी) उत्तर-पुस्तिका जारी नहीं की जायेगी।

Section-A

(खण्ड-अ)

Long Answer Type Questions

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

2×9½=19

K-35

(1)

P.T.O.

Note :- Section 'A' contains Five (05) Long-answer type questions of Nine and Half ($9\frac{1}{2}$) marks each. Learners are required to answer any *two* (02) questions only.

खण्ड 'क' में पाँच (05) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए साढ़े नौ ($9\frac{1}{2}$) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो (02) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.

लैग्रान्जे रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय की कथन सहित व्याख्या कीजिए।

2. Find the value of the integral $\iiint x^2 dx dy dz$ where the area of integral is within the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

$\iiint x^2 dx dy dz$ मान ज्ञात कीजिए जहाँ समाकलन के क्षेत्र सम्पूर्ण

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ है।

3. If $x^x + y^y + z^z = c$, then show that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$

in the case of $x = y = z$.

यदि $x^x + y^y + z^z = c$, तो प्रदर्शित कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$

कि $x = y = z$ होने की दशा में।

4. Show that the length of the curve $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ is $\pi a\sqrt{2}$.

प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ की लम्बाई $\pi a\sqrt{2}$ है।

5. Prove that the series is divergent :

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी :

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

अपसारी है।

Section-B

(खण्ड-ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

4×4=16

Note :- Section 'B' contains Eight (08) Short-answer type questions of Four (04) marks each. Learners are required to answer any *four* (04) questions only.

खण्ड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए चार (04) अंक निर्धारित हैं। शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार (04) प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

1. Test the convergence of the following series :

(a) $\sqrt{(n^3 + 1)} - \sqrt{n^3}$

(b) $\sqrt{(n^2 + 1)} - n$

निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

(अ) $\sqrt{(n^3 + 1)} - \sqrt{n^3}$

(ब) $\sqrt{(n^2 + 1)} - n$

2. Prove that the pedal equation of the curve $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ will be $r^2 = a^2 - 3p^2$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ का पदिक समीकरण $r^2 = a^2 - 3p^2$ होगा।

3. If :

$$u = \log \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)$$

then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

यदि :

$$u = \log \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)$$

तो सिद्ध कीजिए :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

4. Find the minima of $x^2 + y^2 + z^2$ while $x + y + z = 3a$.

$x^2 + y^2 + z^2$ का निम्नतम मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x + y + z = 3a$ ।

5. Find the asymptotes of the curve $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

वक्र $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

6. Find the envelope of the straight line $x \cos^3 \theta + y \sin^3 \theta = C$, when the parameter is θ .

सरल रेखा का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि θ प्राचल है।

7. Find the values of these gamma functions :

(a) $\Gamma \left(-\frac{1}{2} \right)$

(b) $\Gamma \left(-\frac{5}{2} \right)$

निम्नलिखित गामा फलनों के मान ज्ञात कीजिए :

(अ) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

(ब) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

8. Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

निम्नलिखित अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$
