खण्ड 1

Block 1

इकाई 1- गणित शिक्षण : इतिहास, प्रकृति और क्षेत्र

Mathematics Teaching: History, Nature and Scope

1.1 प्रस्तावना
1.2 उद्देश्य
1.3 गणित का इतिहास
  1.3.1 आदिकाल (500 ई.पू. तक)
  1.3.2 पूर्वमध्य काल (500 ई.पू. से 400 ई. तक)
  1.3.3 मध्यकाल अथवा स्वर्णकाल (400 ई. से 1200 ई. तक)
  1.3.4 उत्तरमध्य काल (1200 ई. से 1800 ई. तक)
  1.3.5 वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात)
1.4 गणित का स्वरूप
  1.4.1 परिभाषाएँ
  1.4.2 साध्य
  1.4.3 अभिगृहीत
  1.4.4 उपपत्तियाँ
1.5 निष्कर्षो की तार्किक वैधता
1.6 गणितीय प्रमेय तथा उसके निश्चर
1.7 गणित की निगमनात्मक प्रकृति
1.8 गणित में सौंदर्यबोध
1.9 गणित का कार्यक्षेत्र
1.10 सारांश
1.11 संदर्भ ग्रन्थ सूची
1.12 निबंधात्मक प्रश्न

1.1 प्रस्तावना

मानव जाति की उन्नति तथा सभ्यता के विकास में गणित का बहुत ही महत्वपूर्ण योगदान रहा है। गणित तथा मानव का सम्बन्ध आदिकाल से रहा है तथा मानव के जीवन की समस्याओं को हल करने में इस

विषय ने अनेक प्रकार से महत्वपूर्ण सहयोग दिया है। गणित मनुष्य की प्रकृति का भाग है।इस इकाई में गणित शिक्षण को ध्यान में रखते हुए गणित के इतिहास की चर्चा की गयी है। गणित के स्वरूप को बोधगम्य बनाने हेतु गणित के विभिन्न बिन्दुओं जैसे अपरिभाषित पद, परिभाषित पद, साध्य, अभिगृहीत, उपपत्तियां इत्यादि की विस्तार से चर्चा की गयी है। गणित के निगमनात्मक रूवरूप की चर्चा के साथ-साथ गणित के सौन्दर्यबोध स्वरूप पर भी विस्तार में प्रकाश डालने का प्रयास किया गया है। गणित एवं माध्यमिक स्तर के गणित के कार्यक्षेत्र को वर्णित किया गया है। गणित की अधिकतर अवधारणाएं, जिनको स्कूली पाठ्यचर्या में सम्मिलित किया गया है, की मूल उत्पत्ति दैनिक जीवन की स्थितियों तथा हमारे परिवेश में घटने वाली घटनाओं से है। गणित की अधिकांश प्रारम्भिक शाखाएं दैनिक जीवन की आवश्यकताओं से विकसित हुई हैं। निश्चित रूप से गणित शिक्षण के इस इकाई में दिये गये गणित का इतिहास, गणित की प्रकृति तथा गणित का कार्यक्षेत्र के विभिन्न आयामों को विस्तार से पढ़ने के बाद आप माध्यमिक एवं उच्च माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षण को भलीभांति संपन्न कर सकेंगे। साथ ही साथ इस इकाई में वर्णित की गयी बातें आपके दैनिक जीवन के साथ-साथ विद्यालयी, सामाजिक एवं अन्य क्षेत्रों में होने वाले कार्यों में प्रवीणता के साथ-साथ गति प्रदान करेंगे एवं महसूस की जाने वाली समस्याओं के समाधान हेतु भी एक उचित एवं वस्तुनिष्ठ दृष्टिकोण भी प्रदान करेंगे।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो जायेंगे कि -

1. गणित के ऐतिहासिक विकास को अपने शब्दों में व्याख्यायित कर सकेंगे।
2. गणित की प्रकृति से सम्बन्धित मूलभूत पदों जैसे - अपरिभाषित पद, परिभाषा, साध्य, अभिगृहित, उपपत्ति, मुक्त वाक्य, परिमाणसूचक इत्यादि को अपने शब्दों में अभिव्यक्त कर सकेंगे।
3. साध्यों के प्रकार, साध्यों के सत्यता मानों तथा साध्यों के संयोजनों के आधारभूत प्रकारों का विविधिकरण कर सकेंगे।
4. साध्यों के संयोजन, वियोजन, अंतर्भाव, समतुल्यता और निषेचन में अंतर स्पष्ट कर कसेंगे।
5. मुक्त वाक्यों तथा संयुक्त मुक्त वाक्यों के सत्यता समुच्चयों का चयन कर सकेंगे।
6. अंतरभाव के आवश्यक और पर्याप्त भागों को परिभाषित कर उनकी पहचान कर सकेंगे।
7. अंतर्भावों के विलोम, प्रतिलोम तथा प्रतिधनात्मक को लिख सकेंगे।
8. विभिन्न प्रकार की गणितीय उपपत्तियों में विभिन्नता कर सकेंगे।
9. गणित में सौंदर्यबोध का संरक्षण करने के साथ-साथ गणित में निहित सुंदरता की सराहना कर सकेंगे।
10. माध्यमिक एवं उच्च माध्यमिक स्तर पर गणित के कार्यक्षेत्र की विवेचना अपने शब्दों में कर सकेंगे।

1.3 गणित का इतिहास

हमारे देश में प्रारम्भ से ही गणित को बहुत महत्वपूर्ण विषय माना जाता रहा है। वेदांग ज्योतिष में गणित की महत्ता पर प्रकाश डालते हुए लिखा है-

यथा शिखा मयूराणां, नागानां मणयो यथा।
तद्वद्वेदांग-शात्राणं, गणितं मूध्नि वर्तते।।

अर्थात जिस प्रकार मयूरों की शिखाऐं और सर्पों की मणियां शरीर में सर्वोपरि मूर्धा स्थान (मस्तक) पर विराजमान है, उसी प्रकार वेदों के सब अंगों तथा शास्त्रों में गणित शिरोमणि है।

ठीक उसी प्रकार जैन गणितज्ञ महावीराचार्य ने गणित के सम्बन्ध में यहाँ तक कहा है-

बहुभिर्विप्रलापैः किम् त्रैलोक्ये सचराचरे।
यत्किंचिद्वस्तु तत्सर्व गणितेन बिना न हि।।

अर्थात् बहुत अधिक प्रलास करने से क्या लाभ है। इस सचराचर जगत में जो कुछ भी वस्तु है वह सब गणित के बिना समझना सम्भव ही नहीं है।

यह तथ्य भारतीय मनीषियों, दार्शनिकों तथा तत्ववेत्ताओ को भली भाँति ज्ञात था, इसी कारण उन्होंने प्रारम्भ से ही गणित के विकास पर विशेष ध्यान दिया। जब अरब एवं यूरोपीय देशों में गणित का ज्ञान नगण्य था तब तक भारत इस क्षेत्र में महान उपलब्धियाँ हासिल कर चुका था। इस सन्दर्भ में यह कहना अतिशयोक्तिपूर्ण न होगा कि बारहवीं शताब्दी तक भारत गणित के क्षेत्र में विश्व का ज्ञान गुरू था।

भारतीय गणित का शुभारम्भ 'ऋग्वेद' से होता है। इसका इतिहास मुख्य रूप से 'पाँच कालखण्डों' में विभक्त किया जा सकता है-

1. आदिकाल (500 ई.पू. तक)
    a. वैदिक काल (1000 ई.पू. तक)
    b. उत्तर वैदिक काल (1000 ई.पू. से 500 ई.पू. तक) - उत्तर वैदिक काल को दो भागों में बांटा गया है।
        i. शुल्व एवं वेदांग ज्योतिष काल
        ii. सूर्य प्रज्ञप्तिकाल
2. पूर्वमध्य काल (500 ई.पू. से 400 ई. तक)
3. मध्यकाल अथवा स्वर्णकाल (400 ई. से 1200 ई. तक)
4. उत्तरमध्य काल (1200 ई. से 1800 ई. तक)
5. वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात)

1.3.5 आदिकाल (500 ई.पू. तक)

आदिकाल भारतीय गणित के इतिहास में अत्यन्त महत्वपूर्ण है। इस काल में अंकगणित, बीजगणित एवं रेखागणित को विधिवत् एवं दृढ़तापूर्वक स्थापित किया जा चुका था।

(क) वैदिक काल (1000 ई.पू. तक) - वेदों में संख्याओं और दाशमिक प्रणाली का स्पष्ट उल्लेख मिलता है। ऋग्वेद की एक ऋचा है-

''द्वादश प्रधयश्य क्रमेकं त्रीणि नभ्यामिक उतच्चिकेत।
तस्मिन्त्सामकं त्रिशता न शंकवोऽर्विता षष्टिर्न चलचलास॥''

इसमें द्वादश अर्थात् बारह त्रीणि अर्थात तीन, त्रिशत अर्थात् तीन सौ, षष्टि अर्थात् साठ संख्याओं का प्रयोग दाशमिक प्रणाली का स्पष्ट उदाहरण है। इस काल में शून्य तथा 'दाशमिक स्थान मान' पद्धति का आविष्कार गणित के क्षेत्र में भारत की अभूतपूर्व देन है। यह ज्ञात नहीं है कि शून्य का आविष्कार कब और किसने किया, किन्तु इसका प्रयोग वैदिक काल में होता रहा है। शून्य एवं दाशमिक स्थान मान पद्धति का महत्व इसी से परिलक्षित होता है कि आज यह पद्धति सम्पूर्ण विश्व में प्रचलित है तथा इसी के आविष्कार ने गणित एवं विज्ञान को प्रगति के उन्नत शिखरों तक पहुँचाया है।

दाशमिक स्थानमान पद्धति भारत से अरब गयी और अरब से पश्चिमी देशों में पहुँची। यही काल है कि अरब के लोग 1 से 9 तक के अंकों को 'हिन्दसां' कहते हैं और पश्चिमी देशों में (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) को हिन्दू अरबीक न्यूमरल्स (Indo-Arabic Numerals) कहा जाता है।

(ख) उत्तर वैदिक काल (1000 ई.पू. से 500 ई.पू. तक)

i. **शुल्व एवं वेदांग ज्योतिष काल -** शुल्व वह रज्जु (रस्सी) होती थी, जो यज्ञ वेदी बनाने के लिए माप में काम आती थी। शुल्व सूत्रों में रेखागणित के सूत्रों का विकास एवं विस्तार उपलब्ध है। इनमें तीन सूत्रकारों के नाम विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं- बोधायन, आपस्तम्ब और कात्यायन। इनके अतिरिक्त मैत्रायण, वाराह, मानव एवं बाधुल इस काल के प्रसिद्ध सूत्रकार हैं। इनकी रचनाऐं इनके शुल्व-सूत्रों के रूप में मिलती हैं। बौधायन शुल्व सूत्र (1000 ई.पू.) का एक उदाहरण यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है जिसमें उस प्रमेय का उल्लेख है, जिसे आज पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है-

''दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्ण्या रज्जुः पाश्र्वमानी तिर्यङ्मानी च यत्पृथग्भूते कुरू तस्तदुभयं करोति।''

अर्थात् दीर्घचतुरश्र (आयत) की आक्षण्या रज्जु (कर्ण) पर बना क्षेत्र (वर्ग) पाश्र्वमानी (आधार) तथा तिर्यङ्मानी (लम्ब), पर बने क्षेत्र (वर्ग) के योग के बराबर होता है।

इसी के आगे बौधायन ने दो वर्गों के योग और अन्तर के बराबर वर्ग बनाने की विधि दी है और करणीगत संख्या का मान दशमलव के पाँच स्थानों तक निकालना भी बताया है। बोधायन ने अन्य करणीगत संख्याओं के मान भी दिये हैं। यज्ञों के लिए वेदी में माप के लिए जिस प्रकार रज्जु का प्रयोग किया गया तथा शुल्व सूत्रों की स्थापना हुई, उसी प्रकार यज्ञार्थ समुचित काल निर्णय हेतु इसी काल में ज्योतिष का भी विकास हुआ जिसके कारण *शुल्व काल* को *वेदांग ज्योतिष काल* भी कहा जाता है। ज्योतिष के क्षेत्र में गणित का विस्तरण काल-गणना की आवश्यकता को लेकर हुआ। वेदांग

ज्योतिष (1000 ई.पू.) के अध्ययन से ज्ञात होता है कि उस समय ज्योतिषियों को अंकगणितीय मूल संक्रियाओं योग, भाग, गुणा आदि का ज्ञान था यथा-

तिथि मेकादशाम्यस्तां पर्वआंशसमन्विताम्।
विभज्य भसमूहेन तिथिनक्षत्रमादिशेत।।

अर्थात् तिथि को (11) से गुणा करें, उसमें पर्व के अंश को जोड़ें और फिर नक्षत्र संख्या से भाग दें। इस प्रकार तिथि के नक्षत्र को बतावें।

ii. **सूर्य प्रज्ञप्तिकाल** - जैन साहित्यों में तत्कालीन गणित का विस्तृत विवरण उपलब्ध है। इस काल की प्रमुख कृतियाँ - सूर्य प्रज्ञप्ति तथा चन्द्र प्रज्ञप्ति (500 ई.पू.) हैं, जो जैन धर्म के प्रसिद्ध ग्रन्थ हैं। सूर्य प्रज्ञप्ति में 'दीर्घवृत्त' का स्पष्ट उल्लेख मिलता है, जिसका अर्थ है 'दीर्घ (आयत) पर बना परिवृत्त' जिसे परिमण्डल के नाम से जाना जाता था। अतः भारतीयों को दीर्घवृत्त का ज्ञान मिनमैक्स (350 ई.पू.) से पूर्व ही हो चुका था। उल्लेखनीय है कि भगवती सूत्र (300 ई.पू.) में भी 'परिमण्डल' शब्द दीर्घवृत्त के लिए प्रयुक्त किया है जिसके दो प्रकार बताये गये हैं -

(1) प्रतरपरिमण्डल (2) घन परिमण्डल

गणित एवं ज्योतिष के विकास में जैनाचार्यों का श्लाघनीय योगदान रहा है। उन्होंने भिन्न तैशाशिक व्यवहार तथा मिश्रानुपात, लेखन पद्धति, बीजगणितीय समीकरण, विविध श्रेणियां क्रमचय- संचय, समुच्चय सिद्धान्त, घातांक एवं लघुगणक के नियम आदि विषयों पर प्रकाश डाला है। जॉन नेपियर (1550-1617 ई.) के बहुत पहले लघुगणक का आविष्कार एवं विस्तृत अनुप्रयोग भारत में हो चुका था। बौद्ध साहित्य में भी गणित को पर्याप्त महत्व दिया गया है। इसमें गणित को गणना तथा संख्यान (उच्चगणित) को दो भागों में बाँटा गया है। संख्याओं का वर्णन तीन रूपों-संख्येय (ब्वनदजंइसम), असंख्येय (न्दबवनदजंइसम) तथा अनन्त (प्दपिदपजम) में किया है।

1.3.2 पूर्वमध्य काल (500 ई.पू. से 400 ई. तक)

इस काल में लिखी गयी पुस्तकों वक्षाली गणित, सूर्य सिद्धांत और गणित अनुयोग के कुछ पन्नों को छोड़कर शेष कृतियाँ काल कवलित हो गयी। किन्तु इन पन्नों से और मध्ययुगीन आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त आदि के उपलब्ध साहित्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि इस काल में भी गणित का विकास पर्याप्त रूप से हुआ था। अनुयोगद्वार, स्थानांग सूत्र व भगवतीसूत्र इस युग के प्रमुख ग्रंथ हैं। इनके अतिरिक्त जैनाचार्य उमास्वाति (135 ई.पू.) की कृति तत्वार्थाधिगम सूत्र भाष्य एवं आचार्य यतिवृषम (176 ई. के आस-पास) की कृति तिलोयपण्णती भी इस काल के प्रसिद्ध जैन ग्रंथ हैं।

1.3.3 मध्यकाल अथवा स्वर्णकाल (400 ई. से 1200 ई. तक)

मध्यकाल को भारतीय गणित का स्वर्ण युग कहा जाता है क्योंकि इस काल में आर्यभट्ट (प्रथम व द्वितीय), ब्रह्मगुप्त, श्रीधराचार्य, भास्कर, महावीराचार्य जैसे अनेक महान एवं श्रेष्ठ गणितज्ञ हुए। वेदों में जो सिद्धान्त, नियम एवं विधियाँ सूत्र रूप में है वे इस युग में जन साधारण के समक्ष आयी।

1.3.4 उत्तरमध्य काल (1200 ई. से 1800 ई. तक)

भास्कराचार्य द्वितीय के पश्चात् गणित के क्षेत्र में मौलिक कार्य अधिक नहीं हो सके। इस काल की प्रमुख देन 'प्राचीन ग्रन्थों पर टीकाएँ' है। इस युग में केरल के एक गणितज्ञ नीलकण्ठ ने 1500 ई. में ज्या का मान ज्ञात किया उनके अनुसार इस सूत्र का उल्लेख मलयालम पाण्डलेख 'मुक्तिभास' में भी किया गया है जिसे हम 'ग्रेगरी श्रेणी' के नाम से जानते हैं। इस काल मे नारायण पण्डित (1356 ई.), नीलकण्ठ (1587 ई.), कमलाकर (1608 ई.) तथा सम्राट जगन्नाथ (1731 ई.) नामक गणितज्ञों का महत्वपूर्ण योगदान रहा।

1.3.5 वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात)

वर्तमान काल का प्रारम्भ उत्तरमध्यकाल के पश्चात हुआ। इस युग में गणित के क्षेत्र मे महत्वपूर्ण अनुसंधान तथा सिद्धान्तों का प्रतिपादन हुआ जिससे गणित को नवीन दिशा प्राप्त हुई। इस युग में श्री रामानुजम का नाम विशेष रूप से उल्लेखनीय है। रामानुजम के अतिरिक्त इस युग में नृसिंह बापू देव शास्त्री (1831 ई.), स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज (1884-1960 ई.) तथा सुधाकर द्विवेदी के नाम प्रमुख हैं।

19वीं शताब्दी में, गणित की कार्यशैली अमूर्त (Abstract) तथा और अधिक अमूर्त होती गई। कार्ल फ्रेड्रिक गॉस (1777-1855 ई.) ने सम्मिश्र चरों के फलनों, पृष्ठों की ज्यामिति तथा अपरिमित श्रेणियों के कन्वर्जेन्स (Convergence) के अध्ययन में क्रांतिकारी तथा असाधारण कार्य किए। उसने बीजगणित की आधारभूत प्रमेय की पहली संतोषजनक उपत्ति प्रदान की।

19वीं शताब्दी में, लोबेचेवस्की तथा बोलयाई ने स्वतंत्रतापूर्वक अलग-अलग यह दर्शाया कि यूक्लिड की ज्यामिति के समांतर अभिगृहित को सत्य मानना आवश्यक नहीं है, जिसके फलस्वरूप दो अयूक्लिडीयन ज्यामितियाँ विकसित हुई, जो अतिपरवलीय (Hyperbolic) और दीर्घवृत्तीय (Elliptical) ज्यामितियाँ कहलाती हैं। इसी शताब्दी में, रीमा ने रीमैनियन ज्यामिति विकसित की जिसमें तीनों प्रकार की ज्यामितियों, अर्थात् यूक्लिडियन, अतिपरवलीय और दीर्घवृत्तीय ज्यामितियों का व्यापकीकरण किया गया है।

1.4 गणित का स्वरुप

गणित विषय की अपनी एक अलग प्रकृति है जिसके आधार पर हम उसकी तुलना किसी अन्य विषय से कर सकते हैं। किन्ही दो या दो से अधिक विषयों की तुलना का आधार उन विषयों की प्रकृति ही है जिसके आधार पर हम उस विषय के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं। गणित की प्रकृति को निम्न बिन्दुओं द्वारा भली-भाँति समझा जा सकता है-

1. गणित की अपनी भाषा (Language) है। भाषा का तात्पर्य - गणितीय पद, गणितीय प्रत्यय (Mathematical concept), सूत्र (Formulae), सिद्धान्त (Principle) तथा संकेतों (Signs) से है जो कि विशेष प्रकार के होते हैं तथा गणित की भाषा को जन्म देते हैं।
2. गणित में संख्याये (Numbers), स्थान (Place), दिशा (Direction) तथा मापन या माप-तौल (Measurement) का ज्ञान प्राप्त किया जाता है।
3. गणित के नियम, सिद्धान्त, सूत्र सभी स्थानों पर एक समान होते हैं जिससे उनके सत्यता की जाँच (Test) किसी भी समय तथा किसी भी स्थान पर किया जा सकता है।
4. गणित के ज्ञान का आधार हमारी ज्ञानेन्द्रियाँ (Senses) हैं। इसके ज्ञान का आधार निश्चित होता है जिससे उस पर विश्वास किया जा सकता है।
5. गणित का ज्ञान यथार्थ (Real), क्रमबद्ध (Systematic), तार्किक (Logical) तथा अधिक स्पष्ट (More clear) होता है, जिससे उसे एक बार ग्रहण करके आसानी से भुलाया नहीं जा सकता।
6. गणित में अमूर्त प्रत्ययों (Abstract concepts) को मूर्त रूप (Concrete concepts) में परिवर्तित किया जाता है, साथ ही उनकी व्याख्या की जाती है।
7. इसमें सम्पूर्ण वातावरण में पायी जाने वाली वस्तुओं (Goods) के परस्पर सम्बन्ध (Association) तथा संख्यात्मक निष्कर्ष निकाले जाते हैं।
8. इसके अध्ययन से प्रत्येक ज्ञान तथा सूचना स्पष्ट होती है तथा उसका एक सम्भावित उत्तर निश्चित होता है।
9. इसके विभिन्न नियमों, सिद्धान्तों, सूत्रों आदि में सन्देह (Doubt) की सम्भावना नहीं रहती है।
10. गणित के अध्ययन से आगमन (Inductive), निगमन (Deductive) तथा सामान्यीकरण (Generalisation) की योग्यता विकसित होती है।
11. गणित के अध्ययन से बालकों में आत्म-विश्वास (Self-confidence) और आत्म-निर्भरता (Self-dependence) का विकास होता है।
12. गणित की भाषा सुपरिभाषित, उपयुक्त तथा स्पष्ट होती है।
13. गणित के ज्ञान से बालकों में प्रशंसात्मक दृष्टिकोण तथा भावना का विकास होता है।
14. इसमें प्रदत्तों अथवा सूचनाओं (संख्यात्मक) को आधार मानकर संख्यात्मक निष्कर्ष निकाले जाते हैं।
15. गणित के ज्ञान का उपयोग (Application) विज्ञान की विभिन्न शाखाओं यथा-भौतिक, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान तथा अन्य विषयों के अध्ययन में किया जाता है।

16. गणित, विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में सहायक ही नहीं, बल्कि उनकी प्रगति तथा संगठन की आधारशिला है।
17. इससे बालकों में स्वस्थ तथा वैज्ञानिक दृष्टिकोण (Scientific View) विकसित होता है।

उपरोक्त बिन्दुओं के आधार पर हम गणित की प्रकृति को समझ सकते हैं तथा निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वास्तव में गणित की संरचना, जो कि उसकी प्रकृति की आधारशिला है, अन्य विषयों की अपेक्षा अधिक सुदृढ़ है। रोजर बेकन ने ठीक ही कहा है कि गणित सभी विज्ञानों का सिंह द्वार और कुंजी है।

1.4.1 परिभाषाएँ (Definitions)

किसी पद की परिभाषा एक अभिलाक्षणिक स्पष्टीकरण होता है। परिभाषा में या तो अपरिभाषित पद या वे पद होते हैं, जिन्हें पहले से ही परिभाषित किया जा चुका होता है। यहाँ शब्द 'स्पष्टीकरण' का प्रयोग सामान्य भाषा में प्रयोग किए गए 'अर्थ' के रूप में किया गया है। एक 'अभिलाक्षणिक स्पष्टीकरण' का आशय एक ऐसा स्पष्टीकरण से होता है, जो दिए हुए पद के अभिलक्षण (अर्थात उसकी विशेषताएँ) दर्शाता है, अर्थात वह स्पष्टीकरण जो केवल दिए हुए पद के लिए ही सत्य है। उदाहरणः *एक समकोण त्रिभुज वह त्रिभुज है, जिसके सभी कोण बराबर होते हैं।*

1.4.2 साध्य

एक 'साध्य' या 'कथन' व्याकरण की दृष्टि से एक ऐसा सही घोषणात्मक वाक्य होता है, जिसका कोई अर्थ हो, जो या तो सत्य हो या असत्य हो, परंतु दोनो नहीं हो। यदि कोई साध्य सत्य है, तो हम कहते है कि इसका सत्यता मान 'सत्य' है तथा यदि यह असत्य है, तो हम कहते हैं कि इसका सत्यता मान 'असत्य' है।

उदाहरणार्थ: *'3 और 6 का योग 9 है' एक साध्य है, जो सत्य है। परंतु '3 और 4 का योग 8 है' भी एक साध्य है, जो असत्य है। परंतु ''क्या 9, 3 और 6 का योग है?'' एक साध्य नहीं है, क्योकि यह एक घोषणात्मक वाक्य नहीं है, अर्थात इसमें कोई घोषणा*

1.4.3 अभिगृहीत

किसी साध्य को सत्य या असत्य निर्धारित करने के लिए एक प्रक्रिया अपनाई जाती है। जिसे तार्किक विवेचन (आगमनिक/निगमनिक विवेचन) कहा जा है। किसी साध्य की सत्यता को स्थापित करने वाली विधि एक गणितीय उपपत्ति या केवल उपपत्ति कहलाती है। एक साध्य को सिद्ध करने के लिए, हम उससे पहले स्थापित किए गय साध्यों को देखते हैं तथा इनमें से उचित साध्यों को चुनते हैं और इसके बाद दिए हुए साध्य की सत्यता को स्थापित करने के लिए विवेचन/तर्क के नियमों का प्रयोग करते हैं।

''क्या हम प्रत्येक साध्य को सिद्ध या असिद्ध कर सकते हैं?'' जब हम अपने आप से प्रश्न पूछते हैं कि दिया हुआ साध्य क्यों सत्य है, तक हम अपने पूर्व अनुभवों पर वापस आते हैं तथा अन्य सत्य साध्यों के पदों में कारण प्रदान करने का प्रयास करते हैं। जब हम इन साध्यों के बारे में पूछते हैं कि ये सत्य

क्यों हैं, तो हम पुनः अन्य सत्य साध्यों पर वापस पहुँच जाते हैं तथा अपरिभाषित पदों की तरह ही हम एक ऐसी स्थिति पर पहुँच जाते हैं, जहाँ हम किसी साध्य को न तो सिद्ध कर पाते हैं और न ही 'असिद्ध' कर पाते हैं, परंतु हम दृढ़तापूर्वक यह अनुभव करते हैं कि इस साध्य को सत्य होना ही चाहिए। इसलिए, इस साध्य को हम बिना उपपत्ति के सत्य स्वीकार कर लेते हैं। परंतु हमें इन बिना उपपत्ति के स्वीकार की गई साध्यों की संख्या न्यूनतम रखनी चाहिए, जिनका हम अन्य साध्यों को सिद्ध करने में प्रयोग करते हैं। बिना उपपत्ति के स्वीकार किए गये ये प्रारंभिक साध्य अभिगृहीत कहलाते हैं। एक गणितीय पद्धति में अभिगृहीतों के समुच्चय की निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं-

1. अभिगृहीत वे साध्य हैं जिन्हे बिना किसी प्रमाण के सत्य मान लिया जाता है।
2. अभिगृहीत आवश्यकता से अधिक नहीं होते हैं।
3. अभिगृहीत पर्याप्त होते हैं।
4. अभिगृहीत संगत होते हैं।

1.4.4 उपपत्तियाँ

किसी गणितीय साध्य की सत्यता को अभिगृहीतों के समुच्चय और पहले से प्रमाणित साध्यों तथा तर्क के नियमों को प्रयोग करते हुए, स्थापित किया जाता है। किसी साध्य को सत्यता को स्थापित करने वाली यह विधि उपपत्ति कहलाती है। उपपत्तियों को समझने तथा साध्यों के लिए उपपत्तियों की रचना करने के लिए हमें सर्वप्रथम तर्क अथवा गणितीय तर्क के नियम सीखने होंगे।

1.5 निष्कर्षो की तार्किक वैधता

कोई तर्क एक ऐसा दृढ़कथन है, जो कथनों के किसी समुच्चय को सत्य मान कर एक कथन की सत्यता को घोषित करता है। उदाहरणार्थ,

i. यदि मैं सायं 4 बजे उठूँ तो मैं सायं खेलने जाऊँगा।
ii. यदि मैं सायं खेलने नही जाऊँगा, तो मैं अपना सायं का नाश्ता नहीं कर पाऊँगा।
iii. मैंने सायं का नाश्ता कर लिया है, अतः
iv. मैं सायं 4 बजे उठा हूँ

एक तर्क या युक्ति है।

उपर्युक्त तर्क में प्रथम तीन कथन जो शब्द 'अतः' से पहले आ रहे हैं, परिकल्पनाएँ कहलाती हैं तथा 'अतः' के बाद आने वाला अंतिम कथन निष्कर्ष कहलाता है। निष्कर्ष, परिकल्पनाओं का तार्किक रूप से वैध परिणाम कहलाता है, यदि जब कभी समस्त पकिल्पनाएँ सत्य हों, तो निष्कर्ष भी सत्य हो। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि तर्क, तार्किक रूप से वैध है।

उपर्युक्त युक्ति तार्किक रूप से वैध है या नहीं, जानने के लिए हमें यह ज्ञात करना चाहिए कि जब (1) से (3) तक सभी सत्य हैं, तो क्या (4) भी सत्य है। अब क्योंकि 'मैंने सायं का नाश्ता कर लिया है'' सत्य है, अतः मैं अपना नाश्ता नहीं कर पाऊँगा असत्य हैं। इसीलिए, ''मैं सायं खेलने नहीं जाऊँगा'' असत्य है। अतः '' मैं सायं खेलने जाऊँगा,'' सत्य है। इसलिए, (1) सत्य है, चाहे मैं सायं 4 बजे उठूँ या न उठूँ। इस प्रकार, इसकी कोई गारंटी नहीं है कि (4) सत्य है या असत्य है। इसलिए, उपर्युक्त तर्क का निष्कर्ष तार्किक रूप से वैध नहीं है।

तर्क का निष्कर्ष तार्किक रूप से वैध होता है, जब सभी परिकल्पनाओं के सत्य होने पर, निष्कर्ष का सत्यता मान सत्य हो जाए।

1.6 गणितीय प्रमेय तथा उसके निश्चर

एक गणितीय प्रमेय किसी गणित पद्धति की परिकल्पनाओं, अभिगृहीतों तथा पहले से प्रमाणित प्रमेयों के एक समुच्चय से तार्किक रूप से निकाला गया एक वैध निष्कर्ष होता है। प्रमेय प्रायः एक अंतर्भाव के रूप में होता है, जिनमें परिकल्पना के बाद, संयोजक 'यदि, तो' का प्रयोग किया जाता है।

किसी प्रमेय की वैधता को स्थापित करने की विधि उपपत्ति कहलाती है। परिकल्पनाओं की सत्यता, गणितीय पद्धति के अभिगृहीतों की सत्यता तथा पहले से सिद्ध किये गये प्रमेयों की सत्यता को मान कर हम दर्शाते हैं कि प्रमेय का निष्कर्ष तार्किक रूप से बैध है।

i. **प्रत्यक्ष उपपत्ति-** किसी प्रमेय को एक अंतर्भाव के रूप में लिखने के बाद, उसकी प्रत्यक्ष उपपत्ति, सामान्यतः, उपपत्ति की सबसे अधिक प्रचलित विधि है, जिसमें हम परिकल्पना को सत्य मानते हुए प्रारंभ करते हैं तथा तर्क के नियमों, उन अभिगृहीतों, परिभाषाओं और पहले से स्थापित प्रमेयों का अनुप्रयोग करते हुए, जिनमें परिकल्पना सत्य है, सिद्ध करते हैं कि निष्कर्ष सत्य है।

ii. **अप्रत्यक्ष उपपत्तियाँ -**प्रतिधनात्मक द्वारा उपपत्तिः किसी प्रमेय को, प्रतिधनात्मक का प्रयोग करते हुए सिद्ध करने के लिए, हम उसके निष्कर्ष के निषेधन को सत्य मान लेते हैं तथा सीधी, अर्थात प्रत्यक्ष विधि अपनाते हुए, यह सिद्ध करते हैं कि परिकल्पना का निषेधन सत्य है, अर्थात यदि निष्कर्ष असत्य है, तो परिकल्पना भी असत्य है। परंतु परिकल्पना सत्य है, इसलिए निष्कर्ष भी सत्य होगा।

iii. **असिद्ध करने की विधि -**यदि हमारे पास एक सर्वव्यापिक परिमाणसूचक को सम्मिलित करने वाला कोई कथन है, तो इस कथन को सत्य सिद्ध करने के लिए, हमें यह सिद्ध करना होगा कि यह कथन समष्टीय समुच्चय के प्रत्येक अवयव के लिए सत्य है। तथापि यह सिद्ध करने के लिए कि यह कथन असत्य है, यह दर्शाना पर्याप्त है कि समष्टीय समुच्चय में एक विशेष मान ऐसा है, जिसके लिए वह कथन असत्य है। किसी कथन को असत्य सिद्ध करने वाला यह विशेष मान प्रत्युदाहरण

कहलाता है। किसी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए ऐसा प्रत्युदाहरण देना असिद्ध करने की विधि कहलाता है।

उदाहरणार्थ, कथन ''प्रत्येक विषम प्राकृत संख्या एक अभाज्य संख्या है'' पर आप विचार कीजिए। इस कथन को असिद्ध करने के लिए, यह पर्याप्त है कि हम एक ऐसी संख्या को उदाहरण दे सकें, जो एक अभाज्य संख्या नहीं हों। जब हमारे पास एक सर्वव्यापिक परिमाणसूचक को सम्मिलित करने वाला कोई कथन हो, तो समष्टीय समुच्चय से चर के कुछ विशेष मान लेकर यह ज्ञात करना कि कथन सत्य है या असत्य, सत्यापन (अमतपपिबंजपवद) कहलाता है।

1.7 गणित की निगमनात्मक प्रकृति

इस विधि द्वारा शिक्षण करते समय शिक्षक बालकों के समक्ष कुछ विशेष परिस्थितियां एवं उदाहरण प्रस्तुत करता है। इन उदाहरणों के आधार पर बालक तार्किक ढंग से विचार विमर्श करते हुए किसी विशेष सिद्धान्त, नियम अथवा सूत्र पर पहॅचते हैं। नियमों, सूत्रों आदि का प्रतिपादन करते समय इस विधि में बालक अपने अनुभवों, मानसिक शक्तियों तथा पूर्व ज्ञान का प्रयोग करता है।

निगमन, आगमन के बिल्कुल विपरीत है। इस विधि में निगमन तर्क का प्रयोग किया जाता है। गणित के निगमनात्मक प्रकृति को स्पष्ट करने के लिए, इसके घटकों के बीच संबंधो को स्पष्ट करना पड़ेगा। हम प्रारम्भ में गणित के अत्यन्त नये पद जैसे 'अपरिभाषित पद' को सर्वप्रथम जानने का प्रयास करते हैं, जिसकी व्याख्या पूर्व में की जा चुकी है। अपरिभाषित पदो के माध्यम से नये पदों को परिभाषित करते हैं तथा इसके बाद इन पदों का प्रयोग करते हुए, 'अभिगृहित' विकसित करते हैं जो 'गणितीय सिद्धान्त' का आधार निर्मित करते हैं। इस प्रकार से हम गणितीय पदों तथा गणितीय अभिगृहीतों के संग्रह पर पहॅचते हैं। आगमनिक तर्क द्वारा, हम व्यापकीकरण पर पहुँचते हैं जो 'साध्य' कहलाते हैं। हम इन साध्यों की सत्यता को, तर्कों के नियमों का उपयोग करते हुए, स्थापित करते हैं और इन्हें प्रमेय कहते हैं। एक साध्य की सत्यता को स्थापित करने तथा उसे एक प्रमेय बनाने की बिधि उपपत्ति कहलाती है। गणित प्रकिया के इस प्रकृति को ही गणित की निगमनात्मक प्रकृति कहते हैं। एक बार गणितीय प्रमेयों के सिद्ध हो जाने पर उनका दैनिक जीवन में अथवा ज्ञान की अन्य शाखाओं में आई समस्याओं को हल करने में अथवा किसी प्राकृतिक घटना को समझने में अनुप्रयोग किया जाता है। समस्या हल करने की कला अति महत्वपूर्ण है, क्योंकि इसमें समस्या का एक उचित गणितीय निदर्शन संबंद्ध होता है।

1.8 गणित में सौंदर्यबोध

गणित पढ़ने वाले तथा गणित के प्रेमियों के लिये यह एक गीत है, सुन्दरता है, कला है, संगीत है तथा आनन्द प्राप्ति का एक प्रमुख साधन है। ऐसे लोगों ने ही धारणा बना रखी है कि गणित एक रसहीन तथा नीरस विषय है जिन्हें गणित का अध्ययन करने का अवसर नही मिला है। गणित में विभिन्न समस्याओं का

हल करने में बहुत आनन्द की प्राप्ति होती है। विशेषकर उस स्थिति में जब उनकी समस्याओं का उत्तर किताब में दिये गये उत्तरों से मिल जाता है, गणित पढ़ने वाला प्रत्येक बच्चा संतुष्टि, आत्म-विश्वास, आत्म-निर्भरता तथा सफलता की खुशी में प्रफुल्लित हो उठता है।

अवकाश का सुदुपयोग करने के लिय गणित की संख्याओं के खेल व पहेलियाँ विशेष रुप से महत्वपूर्ण हैं। जादू के वर्ग बनाये जा सकते हैं जिनकी सहायता से छात्र अभ्यास करके अपने मस्तिष्क को और अधिक विकसित कर सकते हैं। इस प्रकार विभिन्न गणितीय खेल या पहेलियाँ बच्चों का केवल मनोरंजन ही नहीं बल्कि बच्चों में आनंद की अनुभूति तथा गणित के ज्ञान की प्रशंसा करने की भावना भी अधिक प्रबल करती हैं।

गणित में सौंदर्यबोध को निम्नलिखित पाँच बिन्दुओं के माध्यम से वर्णित किया गया है।

i. **गणितीय भाषा में सुंदरता -** गणित की भाषा, गणितीय परिणामों तथा उपपत्तियों को व्यक्त करने की विधियाँ भी गणितज्ञों का मन मोहती रही हैं। गणित की भाषा की प्रशंसा करते हुए एक महान वैज्ञानिक गैलिलियों ने कहा था ''गणित वह भाषा है जिससे ईश्वर ने सृष्टि की रचना की''।

ii. **गणितीय अनुभवों में सुंदरता -** अधिकांश गणितज्ञ, गणितीय सुन्दरता का अनुभव, गणित में सक्रिय रूप से व्यस्त रहते समय करते हैं। विशेष रूप से 'संख्या सिद्धान्त' में संख्याओं के साथ कार्यरत रहते हुए, प्राप्त होने वाले गणितीय अनुभव आनन्दायी बन जाते हैं। ऐसा अन्य शाखाओं के लिए भी सत्य है।

iii. **गणितीय विधियों में सुंदरता-** गणितीय उपपत्तियों की स्वयं अपनी एक सुंदरता होती है। हम उपपत्ति की एक अत्यंत सुखद विधि का वर्णन एक आकर्षक उपपत्ति के रुप में करते हैं। एक आकर्षक उपपत्ति की निम्न विशेषताएँ हैं -

अ) पहले से स्थापित परिणामों की संख्या न्यूनतम होती है।

ब) असंबधित प्रतीत होने वाले परिणामों से एक परिणाम प्राप्त होता है।

स) एक नई तथा मूल अंतर्दृष्टि पर निर्भर होती है।

द) संक्षिप्त और स्पष्ट होती है।

य) एक ही प्रकार की समस्याओं को हल करने में अपनाई जा सकती है।

आकर्षक उपपत्तियों को ज्ञात करने के लिए, गणितज्ञ पहले से स्थापित परिणामों की नई और स्वतंत्र उपपत्तियाँ ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। पाइथागोरस प्रमेय एक ऐसी प्रमेय है, जिसके लिए अधिक से अधिक परिष्कृत उपपत्ति की खोज के लिए अनेक उपपत्तियाँ दी जा चुकी हैं।

iv. **गणित में परिशुद्धता और सुन्दरता का सहअस्तित्व -** गणित ही एक ऐसा विषय है, जिसमें, परिशुद्धता और सुन्दरता दोनो ही सदैव एक साथ रहते हैं।

v. **गणितीय परिणामों में सुंदरता-** कभी-कभी गणितीय परिणाम, गणित के दो ऐसे विशिष्ट क्षेत्रों में संबंध स्थापित करते हैं, जो संपूर्ण रूप से असंबंधित प्रतीत होते हैं। ऐसे परिणामों को प्रायः 'गहन' परिणाम कहा जाता है। गणितज्ञ जी.एच.हार्डी, जिनको विश्व के सम्मुख रामानुजन की पहचान कराने का श्रेय जाता है, ने कहा कि गणित के परिणामों की सुन्दरता 'आश्चर्य के अवयव' से उत्पन्न होती है। आयलर की सर्वसमिका प्रायः एक 'गहन' परिणाम कही जाती है तथा इसे गणित में सबसे अधिक अद्भुत या विलक्षण सूत्रों में से एक कहा जाता है।

इसकी गणितीय सुन्दरता में इतना आश्चर्यजनक क्या है? इस समिका में, योग, गुणन तथा घातांकीय आधारभूत गणितीय संक्रियाओं में से प्रत्येक ठीक एक बार प्रयुक्त हुआ है।

1.9 गणित का कार्यक्षेत्र

गणित का प्रारंभिक विकास दैनिक जीवन तथा व्यापारिक क्रियाकलापों में परिकलन करने, आस-पास की भूमि को मापने तथा अपने वातावरण में घटित होने वाली खगोलीय घटनाओं की भविष्यवाणियाँ करने की आवश्यकता के कारण हुआ। सामान्य तौर पर हम गणित को संरचना, स्थान तथा परिवर्तन के अध्ययन के रूप में उपविभाजित कर सकते हैं। मानव की स्थान के अध्ययन की जिज्ञासा के कारण ज्यामिति का विकास हुआ, सर्वप्रथम, प्रसिद्ध दो एवं तीन विमाओं वाली यूक्लिडियन ज्यामिति और त्रिकोणमिति तथा साथ ही अधिक विमाओं वाली ज्यामिति। संरचना का अध्ययन संख्याओं से प्रारंभ होता है, सर्वप्रथम ज्ञात प्राकृत संख्याओं और पूर्णांकों तथा उन पर अंकगणितीय संक्रियाएँ जिससे प्रारंभिक बीजगणित का जन्म हुआ। पूर्ण संख्याओं के गहन गुणों का अध्ययन संख्या सिद्धान्त में किया जाता है। सरल समीकरणों को हल करने की विधियों की छानबीन करने से, पहले परिमेय संख्याओं, वास्तविक संख्याओं तथा सम्मिश्र संख्याओं की खोज हुई। इन संख्याओं के गुणों की अधिक छानबीन तथा समीकरणों को हल करने की विधियों को ज्ञान करने के प्रयासों से अमूर्त बीजगणित के क्षेत्र का विकास हुआ जिसमें अन्य बातों के साथ ही वलयों और क्षेत्रों का अध्ययन होता है। भौतिक रूप से महत्वपूर्ण सदिशों की अवधारणा तथा उनकी संरचनात्मक गुणों के अध्ययन से सदिश स्पेसों की परिभाषाओं तथा रैखिक बीजगणित के अध्ययन का शुभारंभ हुआ। गणित की यह शाखा संरचना और स्पेस के अध्ययन से संबंधित है। अवकलन ज्यामिति और बीजीय ज्यामिति के आधुनिक क्षेत्रों ने ज्यामिति को विभिन्न दिशाओं में व्यापक किया है।

मापनीय राशियों में परिवर्तन को समझने और उसकी व्याख्या करने के लिए, कैलकुलस का अधिक उपयोगी साधन के रूप में विकास हुआ, जो प्राकृतिक विज्ञानों का एक सार्व विषय है। फलन की अवधारणा को, परिवर्तनशील चर की व्याख्या के लिए, एक केन्द्रीय अवधारणा के रूप में प्रस्तुत किया गया था। किसी राशि तथा उसमें होने वाले परिवर्तन की दर के बीच परस्पर संबंध पर आधारित समस्याओं के हल करने की विधियों को ज्ञात करने के प्रयास ने अवकलन समीकरणों के अध्ययन के

लिए प्रेरित किया। सतत् राशियो को निरूपित करने वाली फलनों का अध्ययन, वास्तविक विश्लेषण कहलाता है। अनेक कारणों से, इन संख्याओं को सम्मिश्र संख्याओं के रूप में व्यापक करना सुविधाजनक है। सम्मिश्र संख्याओं, उनके गणों, सम्मिश्र चरों के फलनों तथा उनके गुणों का सम्मिश्र विश्लेषण में अध्ययन किया जाता है। प्रकृति की अनेक अद्भुत घटनाओं के अध्ययन से गतिक पद्धतियों का अध्ययन प्रारम्भ हुआ। गणितीय तर्कशास्त्र जिसमें पुनरावर्तन सिद्धांत, निदर्श सिद्धांत तथा उपपत्ति सिद्धांत समाविष्ट हैं, कम्प्यूटर विज्ञान (संगणक विज्ञान) से निकटतम रूप से जुड़ा हुआ है।

सबसे पहले जब इलेक्ट्रानिक कम्प्यूटरों की कल्पना की गई, तब गणितज्ञों द्वारा अनेक आवश्यक सैद्धांतिक अवधारणाएँ विकसित की गई, जिनसें अभिकलनीयता सिद्धांत, अभिकलन-जटिलता सिद्धांत तथा सूचना सिद्धांत का विकास हुआ। इनमें से अनेक विषयों की आजकल सैद्धांतिक कम्प्यूटर विज्ञान के अंतर्गत जाँच की जाती है। गणित की वे शाखाएँ, जो कम्प्यूटर विज्ञान में सामान्यतः से सबसे अधिक उपयोगी हैं, आजकल प्रायः असतत् गणित कही जाती हैं। संयोगों का गणित अथवा निश्चित पदों में अनिश्चता का अध्ययन प्रायिकता का गणितीय सिद्धांत है, जिससे उन घटनाओं के विवरण तथा विश्लेषण की जा सकी है, जिनमें संयोग एक भूमिका अदा करता है। साँख्यिकी अनुप्रयोगिक गणित का एक महत्वपूर्ण क्षेत्र है, जो प्रायिकता सिद्धांत को एक साधन के रूप में प्रयोग करती है तथा इसका प्रयोग सभी विज्ञानो तथा सभी सामाजिक विज्ञानों में होता है।

1.9.1 माध्यामिक स्तर पर गणित शिक्षा का कार्यक्षेत्र

प्राथमिक स्तर के अंत तक गणितीय शिक्षा बच्चों के गणित अधिगम के मनोविज्ञान के तर्क से मार्गदर्शित होती है, न कि स्वयं गणित के तर्क से। यह माध्यमिक स्कूल ही है जब अधिगम अधिक तर्कपूर्ण हो जाता है तथा विद्यार्थी गणित की संरचना को समझने लगता है। इसीलिए 'तर्क-वितर्क' और 'गणितीय उपपत्ति' की धारणा गणित अधिगम का केन्द्र बिंदु बन जाती है। वह कठिन तथा अत्यन्त सुरुचिपूर्ण गणित की शब्दावली का प्रयोग करना प्रारंभ कर देता है। वह सावधानीपूर्वक परिभाषित पदों और अवधारणाओं के साथ गणित की भाषा का प्रयोग और प्रतीकों का प्रयोग सुविधाजनक रूप से कर लेता है, पहले से परिभाषित पदों/अवधारणाओं का प्रयोग करते हुए, साध्यों को परिशुद्ध रूप से व्यक्त कर देता है। ज्यामिति के अध्ययन से, विद्यार्थी गणित की संरचना, जैसे गणितीय पद, साध्य, उपपत्ति और प्रमेय की सराहना करना प्रारंभ करता है। माध्यमिक स्कूल गणित का एक बड़ा भाग पूर्व कक्षाओं में बताई गई गणित की अवधारणाओं और परिणामों के दृढ़ीकरण के प्रति समर्पित होता है। विद्यार्थी उन आकारों तथा उनसे संबद्ध सूत्रों के बारे में विवेचना करना प्रारम्भ कर देते हैं, जिन्हें वे अपनी प्राथमिक कक्षाओं में जान चुके हैं। यहाँ विद्यार्थी पिछली कक्षाओं में प्राथमिक स्तर पर पढ़े गए प्रारंभिक बीजगणित का अधिक दृढ़ता से अध्ययन करने लगते हैं। वे अब ज्यामितीय उपपत्तियों के लिए बीजीय परिचालन तकनीकों के प्रयोगों से परिचित हो जाते हैं। माध्यमिक स्तर पर विद्यार्थी में समस्या हल करने की क्षमता विकसित हो जाती है। इसके लिए वह अनेक ऐसी गणितीय तकनीकों को एकीकृत करता है, जो उसने पहले ही समस्या हल करने की क्षमता के समय देखी थी। विद्यार्थियों को ऐसी समस्याएँ दी जाती हैं, जो एक से अधिक क्षेत्रों से

संबद्ध हों। भौतिक, जैविक और सामाजिक विज्ञानों में प्रयुक्त गणित विद्यार्थियों को अत्यधिक प्रेरित करने के लिए प्रयोग किया जाता है। इसी स्तर पर, गणित निदर्शन, आँकड़ो के विश्लेषण एवं व्याख्या करने का परिचय भी कराया जाता है।

1.10 सारांश

इस इकाई में गणित शिक्षण विषय का सामान्य परिचय कराते हुए गणित का इतिहास, स्वरूप तथा कार्यक्षेत्र की विस्तार से चर्चा की गयी है। गणित के इतिहास के अन्तर्गत भारतीय तथा विश्व स्तर पर गणित के इतिहास की समीक्षा की गयी है। गणित के इतिहास को कुल पांच काल खण्डों क्रमशः आदिकाल, पूर्वमध्यकाल, मध्यकाल, उत्तर मध्यकाल तथा वर्तमान काल में विभाजित कर संक्षेप में प्रकाश डाला गया है। गणित के स्वरूप के अन्तर्गत गणित से सम्बन्धित महत्वपूर्ण बिन्दुओं जैसे- अपरिभाषित पद, परिभाषित पद, परिभाषा, अभिगृहीत, साध्य, मुक्त वाक्य, प्रमेय तथा उपपत्ति इत्यादि की चर्चा की गयी है। गणित में उपपत्ति को स्पष्ट करते हुए उपपत्ति के प्रकारों को बताया गया है। गणित में सौंदर्यबोध के आशय को बताते हुए सौंदर्यबोध के विभिन्न आयामों की विस्तार से चर्चा की गयी है। अन्त में गणित के कार्यक्षेत्र तथा खासकर माध्यमिक स्तर पर गणित के कार्यक्षेत्र की संक्षिप्त व्याख्या प्रदर्शित की गयी है।

1.11 सन्दर्भ ग्रंथ सूची

1. Bhatnagar, A.B. (2009). *Teaching of Mathematics*, R. Lal Book Depo, Meeruth.
2. IGNOU (2006). *Teaching of Mathematics*, New Delhi.
3. Jain, S.L. (2007). *Teaching of Mathematics*, Rajasthan Hindi Granth Acadamy, Jaipur.
4. Kulshreshtha, A.K. (2005). *Teaching of Mathematics*, R. Lal Book Depo, Meeruth.
5. NCERT (2006). *Focus Group Report on Teaching of Mathematics*, New Delhi.
6. NCERT (2012). *Pedagogy of Mathematics*, New Delhi.
7. NCTE (2009). *National Curriculum Framework for Teacher Education*, New Delhi.
8. www.en.wikipedia.org/wiki/history_of_mathematics

1.12 निबंधात्मक प्रश्न

1. गणित शिक्षण के संदर्भ में गणित के इतिहास का विवेचना करें।

2. गणित की प्रकृति से आप क्या समझते हैं? गणित के विभिन्न पदों पर प्रकाश डालते हुए गणित के प्रकृति का विस्तार से उल्लेख करें।
3. गणित में सौंदर्यबोध के विभिन्न आयामों की चर्चा करते हुए गणित के सौंदर्यबोध के महत्व को लिखें।
4. गणित में उपपत्ति किसे कहते हैं? गणित में उपपत्ति के विभिन्न प्रकारों की सोदाहरण चर्चा करें।
5. माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षा के कार्यक्षेत्र पर एक संक्षिप्त निबंध लिखें।

इकाई 2 - गणित और समाज

Mathematics and Society

2.1 प्रस्तावना
2.2 उद्देश्य
2.3 दैनिक जीवन में गणित
2.4 गणित और समाज
2.5 गणित और पर्यावरण विज्ञान
2.6 गणितज्ञों का योगदान
2.7 सारांश
2.8 सन्दर्भ ग्रंथ सूची

2.1. प्रस्तावना

गणित और समाज का बहुत ही गहरा रिश्ता रहा है। किसी भी समाज के विकास में गणित का बहुत महत्वपूर्ण योगदान रहा है। गणित हमारे समाज और हमारी अर्थव्यवस्था के विकास में भी महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता रहा है। जब हम अपने परिवेश व दिनचर्या को देखते हैं तो पाते हैं कि हमारे जीवन के प्रत्येक क्षण में और आसपास गणित ही गणित है। घड़ी का समय, भोजन की मात्रा, रोटियों की संख्या, पानी का आयतन, गिलास या लोटे की धारिता, थाली या प्लेट का व्यास व परिधि, कमरे की लम्बाई-चौड़ाई, ऊँचाई, वस्तुओं की तौल, दाल में पानी का अनुपात, खेत व मैदान का क्षेत्रफल, आदि सभी गणित की ही विषयवस्तु है। अतः हम कह सकते हैं कि गणित हमारे जीवन और समाज का अभिन्न हिस्सा है।

गणित का महत्व सिर्फ इसलिए नहीं है, क्योंकि गणित के बिना विज्ञान की परिकल्पना नही की जा सकती। सिर्फ इसलिए भी नहीं क्योंकि यह एकमात्र शाश्वत भाषा है। सिर्फ इसलिए भी नहीं, क्योंकि गणित के बिना कोई कविता एवं संगीत नहीं होंगे और ना ही कोई मोबाइल फ़ोन या कंप्यूटर होगा या ना ही कोई अंतरिक्ष विज्ञान की परिकल्पना सच हो सकेगी। सिर्फ इसलिए भी नहीं क्योंकि गणित भी कुछ मानवीय तरह का विषय है और यह हमें उस ब्रह्मांड के गहन सत्यों का साक्षात्कार करवाता है, जिसमें हम रहते हैं। जैसा कि लातवियायी गणितज्ञ टोबियास डान्टजिज ने कहा है- "गणित सर्वोच्च न्यायाधीश होता है और उसके फैसलों पर कोई अपील नहीं होती।" इसलिए, यदि हम बेहतर समाज का निर्माण करना चाहते हैं, तो हम यह भावी पीढ़ी को गणित की शिक्षा दिए बिना नहीं कर पाएंगे। एक समाज, नागरिकों के वैयक्तिक विकास और वृद्धि के बिना विकसित नही हो सकता। क्योंकि, यह हम सभी के व्यक्तिगत स्तर

पर महत्वपूर्ण है। सिर्फ इसलिए नहीं क्योंकि हम अपने जीवन स्तर को बेहतर करना चाहते हैं। सिर्फ इसलिए भी नहीं, क्योंकि इसके बिना कोई प्रगति और समृद्धि नहीं हो सकती। इसलिए भी नही, क्योंकि वैज्ञानिक ढंग से सोच-विचार का यह गहरा अहसास दिलाता है, और यह बताता है कि मनुष्य होने के क्या मायने हैं।

वास्तव में गणित एक सटीक विज्ञान है, जो नियमों व सूत्रों की सहायता से गणनाएँ कर किसी तथ्य के संदर्भ में हमें निष्कर्ष तक पहुँचाता है। यह सफल जीवन हेतु आवश्यक चिन्तन, तर्क व अनुमान जैसे कौशलों का विकास करता है। आजकल, यह किसी भी समाज की नई पीढ़ी के उज्ज्वल भविष्य के लिए एक महत्वपूर्ण कारक बन गयी है। गणित सभी के जीवन को सकारात्मक तरीके से प्रभावित करती है और हमें जीवन की सभी छोटी और बड़ी समस्याओं का सामना करना सिखाती है। बिना गणित के जीवन लक्ष्य रहित और कठिन हो जाता है। इसलिए हमें इसके महत्व और दैनिक जीवन में इसकी आवश्यकता को समझना चाहिए।

2.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

1. गणित हमारे आसपास की दुनिया में व्याप्त है, यह जान पाएंगे ।
2. गणित के ज्ञान को दैनिक तथा व्यावहरिक जीवन में सम्बन्ध स्थापित कर गणित की अवधारणा को सिखने और सिखाने की अवसर तलाश कर पाएंगे।
3. गणित की उपयोगिता, शक्ति और सौंदर्य की सराहना कर पाएंगे।
4. गणित का आनंद लें और समस्याओं को हल करते समय धैर्य और दृढ़ता का विकास करने में सक्षम हो पाएंगे।
5. विश्लेषण, सोचने, समझने, कारण बताने तथा तर्क करने की योग्यता का विकास करना।
6. गणितीय ज्ञान की अन्य छेत्र में उपोगोगिता की सराहना करना।
7. गणित की सोंदर्याता तथा समस्या समाधान की शक्ति का प्रशंशा करना।
8. भारत समेत दुनिया के महान गणितज्ञों के बारे में जानना एवं उनके योगदान की सराहना करना।

2.3. दैनिक जीवन में गणित

शिक्षा द्वारा हम ऐसे नागरिकों को तैयार करने की पैरवी करते हैं जहाँ व्यक्ति दूसरों की बातों को बिना सोचे-समझे स्वीकार न करे, बल्कि उस बात पर तथ्यों के साथ सोच विचार एवं तर्क करते हुए स्वयं से फैसला ले कि क्या सही और क्या गलत है?

गणित हमें तर्क करना, समस्या समाधान करने, बेहतर विकल्प तलाशने, सामान्यीकरण करने में मददगार होता है। ऐसी सोच को विकसित करने में गणित हमें ऐसे कौशलों, तौर-तरीकों को सिखाता है। गणित की ऐसी खूबी से ही स्कूली गणित का महत्व अनिवार्य विषय के तौर पर मजबूत होता है।

गणित विषय की दैनिक जीवन में उपयोगिता वाले पहलू को देखा जाए तो ऐसा कोई कार्य नजर ही नहीं आता, जहाँ बिना गणित के कुछ सम्भव हो पा रहा हो। मजदूर, किसान, दुकानदार, नौकरी करने वाला और चाहे कोई भी महिला-पुरूष, बच्चे जिसने शिक्षा प्राप्त की हो या नहीं की हो, सभी अपनी जिन्दगी में गणित का बखूबी से उपयोग करते दिखलाई पड़ते हैं। एक किसान को अपने खेत में हुई फसल की मात्रा का पूर्व निर्धारण करना हो, खेत में बीजारोपण के समय लगने वाले बीज की मात्रा का पता लगाना हो, फसल काटने के दौरान समय मजदूरी का निर्धारण करना हो या उतनी फसल के लिए आवश्यक बोरियों की संख्या का पता लगाना हो वह सटीकता के साथ लगा लेता है। घर पर किसी भी दैनिक क्रियाकलाप को ले लें, चाहे वह नहाने धोने का कार्य हो, बच्चों का खेलना हो, रसोई का कार्य करना हो या बाजार में खरीददारी हो सभी कार्यो में गणितीय कौशलों (अन्दाजा, अनुमान, समस्या समाधान के विभिन्न मॉडल सोचना, सादृष्यीकरण, गणितीय सम्प्रेषण, निरूपण, सामान्यीकरण आदि) का उपयोग किया जाता है। जिसने गणित की औपचारिक शिक्षा नहीं ली हो वो मौखिक और जिसने औपचारिक शिक्षा ली है वो मौखिक और लिखित दोनों ही रूपों में इस्तेमाल कर पाते हैं।

गणित विषय के इस सामाजिक और दैनिक जीवन में उपयोगिता के पहलू को ध्यान में रखते यह सोचना जरूरी हो जाता है कि क्या सच में गणित बहुत ही कठिन विषय है या इसे प्रस्तुत ही इस प्रकार से किया गया है कि इसे सभी नहीं कर सकते हैं।

हर बच्चा अपने आप में खास व्यक्तित्व रखता है जिसमें खास रुचियाँ, काबिलीयत होती है जिन्हें बढ़ावा देना लाजमी है। इसीलिए गणित में रुचि रखने वालों के लिए यह दायरा खुला रहना चाहिए जिससे वह गणित में योगदान दे सकें, गणित में जी सकें, आनन्द ले सकें और सामान्य रुचि वाले विद्यार्थी अपने जीवन को बेहतर बनाने के साथ-साथ अन्य विषयों को सीखने में मदद के तौर पर उपयोग कर सकें।

गणित शाश्वत कैसे है ?

सर्वप्रथम मानव ने गणित का आविष्कार नही बल्कि इसकी खोज की और गणित की भाषा अंग्रेजी जर्मन या रुसी नहीं है बल्कि संख्या है। अगर हम संख्या की भाषा से अच्छी तरह अवगत है तो हम अपने महत्वपूर्ण निर्णय एवं दैनिक कार्यों को सही अंजाम तक पहुंचा सकते है। हम सभी जानते है की गणित जहाँ शिक्षा का सर्वाधिक महत्वपूर्ण घटक है,वही कैरियर की दृष्टि से भी इसके अनोखे आयाम हैं। कौन सा ऐसा जॉब है जो प्राथमिक गणितीय योग्यता नहीं मांगता। अतः आज आवश्यकता है कि गणित शिक्षण को मनोरंजक तथा सार्थक बनाया जाये।

गणित के इस्तेमाल से हम विवेकपूर्ण खरीददारी, सही बीमा, घर की नवीनीकरण या शेयर बाज़ार आदि जिसमें हमारी विकास की संभावना अधिकतम हो। इन सारी समस्याओ का समाधान गणित ही तय

करता है। जब हम अपने परिवेश व दिनचर्या को देखते हैं तो पाते हैं कि हमारे जीवन के प्रत्येक क्षण और आस-पास गणित ही गणित है। किन्तु प्रश्न उठता है कि जब गणित हमारे जीवन में इस तरह समाहित है और उसके अभाव में जीवन की कल्पना सम्भव नहीं है तो उसके शिक्षण की आवश्यकता क्यों है? यद्यपि हम बचपन से ही जाने-अनजाने विभिन्न गणितीय संक्रियाओं से जुड़े रहते हैं, जैसे मिलाना, जोड़ना, निकालना घटाना, बाँटना, क्रमागत संख्याएँ जानना, विभिन्न आकारों को देखना, रुपए-पैसों की जानकारी, लेन-देन आदि, फिर भी हम यह नहीं समझ पाते कि हम किन गणितीय अवधारणाओं का प्रयोग कर रहे हैं? जिस कारण व्यावहारिक जीवन की अनेक समस्याओं को हल करने में परेशानी आती है। अतः हमे भावी जीवन में सफल होने हेतु लाभप्रद क्षमताओं का विकास करना आवश्यक है, विशेषकर अंक-ज्ञान, संख्या से जुड़ी क्षमताएँ, सांख्यिक संक्रियाएँ, माप, दशमलव, प्रतिशत, क्षेत्रफल, आयतन, ब्याज, नाप-तौल, लाभ-हानि, क्रय-विक्रय, अनुपात आदि। इनके विकास के साथ-साथ गणितीय ढ़ंग से सोचना, तर्क करना, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकालना और अमूर्त को समझने हेतु गणित शिक्षण अनिवार्य है।

गणित शिक्षण के प्रति भी हमारी समझ होना आवश्यक है क्योंकि सामान्यता लोगों में धारणा बनी हुई है कि गणित एक कठिन एवं बोझिल विषय है। इसमें अमूर्तता है तथा प्रतीकों, सूत्रों व परिभाषाओं का विषय होने के कारण बच्चों के सीखने में बाधक है। किन्तु यह धारणा सत्य नहीं है। वास्तव में गणित एक रोचक एवं अवधारणात्मक विषय है। इसके शिक्षण व सीखने में समस्या तभी आती है, जब इसे चॉक, डस्टर के माध्यम से या रटाकर सिखाने का प्रयास किया जाता है। आइये हम साथ मिलकर यह कोशिश करते हैं कि गणित कैसे हम अपनी दैनिक जीवन से जोरकर सिखने सिखाने की प्रक्रिया को रोचक और आसन बना सकते है।

आज गणित हमारे जीवन का एक अभिन्न अंग बन चूका है। हम अपने दिनचर्या में गणित का प्रयोग अक्सर करते ही रहते हैं। चाहे वह दफ्तर में किया गया काम हो या घर में बिताया गया समय हो, इस बात से ज्यादा फर्क नही पड़ता की हम कहाँ और क्या काम कर रहे हैं? गणित हमेशा ही वहां होता है।

रोजमर्रा की जिंदगी में

आइये हम इसका अवलोकन और विश्लेषण करें कि रोजमर्रा की जिंदगी में ऐसा कैसे और किस तरह से गणित समाहित है।

1. हम जब सुबह उठने का समय देखते हैं तो हमे अनुमान होता है कि हमारे पास अन्य जिम्मेदारियों को पूरा करने का पर्याप्त समय है या नहीं। (समय का ज्ञान, घड़ियों के इस्तेमाल करने का तरीका, दिनचर्या बनाने का तरीका इन सभी जगह गणित का प्रयोग दिखता है)
2. सुबह -सुबह जब हम चाय बना रहे होते हैं तो उसमे पानी, दूध, चीनी सही मात्रा और अनुपात के पीछे भी गणित समाहित होता है। इसी तरह जब हम दूध से दही जमा रहे होते हैं तो दूध की सही तापमान का अनुमान के पीछे भी गणित समाहित होता है। यहाँ तक कि सभी भोज्य पदार्थ के

बनने में उनकी सही तापमान एवं सही अनुपात के पीछे भी गणित अपनी भूमिका निभा रहा होता है।

3. जलपान करते वक्त उसमे प्रयुक्त सामग्री का अनुपात पता होना, ताकि नमक, मिर्च, हल्दी आदि सभी का स्वाद पता चल सके। क्योंकि अगर अनुपात सही न हो तो हमारा स्वास्थ्य भी बिगड़ सकता है।
4. अपने कार्य स्थल पर पहुँचने के लिए यातायात, उनकी समय बाध्यता, क्षमता अनुसार सुविधा, समय का संतुलन आदि चीज भी गणित पर ही निर्भर करती है।
5. व्यक्तियों के कार्य क्षमता, कार्य विविधता के अनुसार उनकी दैनिक साप्ताहिक मासिक, फीस, वेतन या भत्ता अंतरराष्ट्रीय या राज्य स्तर पर प्राप्त करना।

i. **मोबाइल फोन के प्रयोग में -** नयी तकनीक के विकास में गणित अपना महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रहा है । उन भूमिकाओं में से एक महत्वपूर्ण योगदान मोबाइल फोन के विस्तार और विकास में समाहित है। हम सभी इस बात से रूबरू हैं कि आज आम जनजीवन में मोबाइल फोन संचार का सर्वोत्तम माध्यम बन गया है। मोबाइल के इस्तेमाल के पीछे गणित समाहित है। इसके प्रयोग के लिए आपको संख्याओं का ज्ञान होना चाहिय।

ii. **रसोई घर में -** खाना पकाने एवं उसे तैयार करने में भी गणित का महत्वपूर्ण योगदान होता है। भोज्य पदार्थ के बनने में उनकी सही तापमान एवं सही अनुपात के पीछे भी गणित अपनी भूमिका निभा रहा होता है। प्रत्येक सामग्री की माप एवं समय-समय पर उचित मात्रा प्राप्त करने के लिए उनको बढ़ने या घटाने के पीछे भी गणित अहम् भूमिका निभाती है। रसोई घर में किये गए प्रत्येक कार्य में गणित कहीं न कहीं समाहित है।

iii. **बागवानी में -** बागवानी जैसी सामान्य प्रक्रिया में भी गणित अहम् भूमिका अदा करता है। अगर आपको नए पौधे लगाने हो या बीजारोपण करना हो तो आपको पंक्तियों की संख्या, जमीन में की जाने वाली उचित छिद्रों की संख्या में भी गणित का ही इस्तेमाल होता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि हम ना चाहते हुए भी गणित का प्रयोग आम जीवन में करते रहते हैं।

iv. **कला के क्षेत्र में -** किसी भी प्रकार के कलात्मक कार्य में गणित का इस्तेमाल होता है चाहे मूर्तिकार हो, चित्रकार हो, नर्तक हो या किसी हस्त कला का प्रदर्शन करने वाला हो उन सभी के प्रदर्शन को सही दिशा प्रदान करने के पीछे गणित अवश्यम्भावी हो जाता है। कला का प्रत्येक रूप गणितीय कुशलता पर आधारित है।

v. **पर्यटन या भ्रमण के कार्यक्रम में -** प्रत्येक भ्रमण या पर्यटन के लिए गणित काम में आता है। भले ही आप किसी दर्शनीय स्थलों को देखने के लिए जा रहे हो या किसी चिड़ियाघर को देखने आप गणित की सहायता से ही ईंधन, पानी, दूरी, समय एवं मूल्य आदि का आंकलन कर पाते हैं।

vi. **बैंकिंग के क्षेत्र में -** क्या आप किसी ऐसी परिस्थिति की कल्पना कर सकते हैं जब आपको बैंक में जाना पड़े और आपको गणित का ज्ञान न हो। ऐसी स्थिति में आपको काफी दिक्कतों का सामान करना पर सकता है।

vii. **सांख्यिकी के क्षेत्र में -** सांख्यिकी वस्तुतः एक गणितीय विज्ञान है जिसमें किसी वस्तु/अवयव/तंत्र/समुदाय से सम्बन्धित आकड़ों का संग्रह, विश्लेषण, व्याख्या या स्पष्टीकरण और प्रस्तुति की जाती है। यह विभिन्न क्षेत्रों में लागू है - अकादमिक अनुशासन, प्राकृतिक विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, मानविकी, खेल, सरकार और व्यापार इत्यादि के क्षेत्र में।

सांख्यिकीय का प्रयोग डेटा के संग्रहण व वर्णन के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, डेटा में पैटर्न को इस तरह से मॉडल किया जा सकता है कि वह निष्कर्षों की यादृच्छिकता और अनिश्चितता का कारण को जानने, समझने और उसके बारे में अनुमान लगाने में मदद करता है।

अभ्यास प्रश्न

1. गणित रोजमर्रा के जिंदगी कैसे समाहित है कोई चार उदाहरण अपने आस पास की जिंदगी या परिवेश से दीजिये ?
2. **"गणित** शिक्षा का सर्वाधिक महत्वपूर्ण घटक है" इस कथन की पुष्टि हेतु अपनी विचार लिखे/

2.4. गणित और समाज

मानव एक सामाजिक प्राणी है इसमें कतिपय कोई शंका नहीं है और इसकी पुष्टि समाज में निहित कई प्रक्रियाओं एवं अन्य मूलभूत संरचनाओं से स्पष्ट होती है। कालांतर के साथ समाज में भी नूतन अवचेतनाओं को जगह मिलती है, जिससे पुरानी एवं बेतुकी हो रही चीजों, तथ्यों और विचारों को त्याग कर समाज नए-नूतन एवं समकालीन भावनाओं को पनपने की जगह प्रदान करता है। भारतीय समाज की ऐतिहासिक परिपाटी पर प्रकाश डाला जाये तो कई दयदिप्तमान गणितज्ञ जैसे की आर्यभट, ब्रह्मगुप्त रामानुजन जैसे कालजयी व्यक्तियों ने केवल भारतीय समाज पर अमिट छाप छोड़ी बल्कि कहीं न कहीं इससे पूरा विश्व भी प्रकाशमय हुआ।

शून्य की अवधारणा, दशमलव प्रणाली का प्रयोग का आकलन, खगोलशास्त्र की जटिल समस्याएं जैसे कि- पृथ्वी एवं सूर्य की दूरी, उनकी घूर्णन गति आदि.... समाज को इन गणितज्ञ /वैज्ञानिकों की ही देन है। यह देन भारतीय समाज ने पूरे विश्व को तोहफे के रूप में प्रदान किया है।

सवाई राजा मानसिंह के द्वारा स्थापित जयपुर एवं दिल्ली में जंतर मंतर और वेदशाला को स्थापना, रामानुजन के द्वारा जटिल गणितीय सूत्रों का सरलीकरण से इस बात को पुष्टि हो जाती है की गणित हमेशा से ही भारतीय समाज में जल के अन्दर बसे हुए ऑक्सीजन का काम करता रहा है।

हड़प्पा एवं मोहनजोदड़ो में बनाये गए स्नानागार, सड़कों की चौड़ाई, दो घाटों की बीच की दूरी, ईंट की लम्बाई एवं चौड़ाई से स्पष्ट है की भारत वर्ष गणित की उपज के लिए सबसे ज्यादा खुशहाल भूमि रही है। इन्ही गणितीय सूत्रों एवं समीकरणों के इस्तेमाल से आज भारत में कई शहरों में मेट्रो जैसे की दिल्ली एवं कोलकत्ता का मेट्रो, नाभिकीय विद्युत परियोजना, स्टेडियम जैसी विशालकाय इमारत, रेल कोच फैक्ट्री, चंद्रयान आदि। जो कभी स्वप्न प्रतीत होते थे हमारे सामने उन्नतिशील समाज के रूप में स्थापित हैं, इन सभी के पीछे गणित योगदान हैं। ऐसा बिल्कुल नहीं है कि भारत में गणित का विकास बंद अँधेरे कमरे में हुआ है। बल्कि भारतीय समाज ने जितनी सेवा गणित की की है, गणित ने भी आशा से बढ़कर भारतीय समाज की उतनी ही सेवा की है।

समाज में गणित का स्थान

किसी भी देश में गणित का समाज में स्थान उस समाज की प्रकृति एवं सोच और आकांक्षाओं पर निर्भर करता है। कनाडा ने संस्कृति एवं वैज्ञानिक स्वतंत्रता को यूरोपीय समाज से प्राप्त किया है एवं उसे बनाये रखने के लिए कटिबद्ध है। इसकी आकंक्षाओ के सुदृढ़ होने के पीछे अमेरिका से सामाजिक एवं कनाडा के वितीय संरचनाओं का उस देश पर आधारित होना भी है। यह व्याख्या इस बात को भी इंगित करता है की कनाडा ने भूत एवं वर्तमान में गणित को क्या स्थान प्रदान किया है। यही इसके भविष्य को भी तय करेगी। इसका आशय यह है की हमें प्राथमिक एवं द्वितीयक स्तर पर गणितीय साक्षरता को महत्व प्रदान करना चाहिए। जब तक एक सामान्य नागरिक उन सुविधाओ का इस्तेमाल आम जिंदगी में करके सरकार द्वारा ली गई निर्णयों पर टिप्पणी करने के काबिल न हो जाये, वैसे समाज में इसके औचित्य पर सवाल खड़ा रहता है।

गणितीय विकास में विविधता

अभी भी हमारे समाज के बहुत से हिस्से ऐसे है जहाँ पर गणित के प्रति उत्तरदायित्व की सफलता अभी भी प्रश्नात्मक है। बहुलवर्ग के लिए गणित 12वीं कक्षा से भी नीचे तक ही सीमित है। यह इस बात को दर्शाती है कि गणितीय शिक्षा के मामले में हम अब भी समाज के बड़े वर्ग को 17 वीं शताब्दी के आस-पास ही घेर कर खड़े हैं। इस सिमटे हुए दायरे में यह लगभग असंभव सा है कि हम गणित की विविधता एवं उसके मूल्य एवं उसके जटिलता को असमान रूप से बढ़ते हुए देख पा रहे है। कर्मानुसार इसी के चलते एक गलत अवधारणा बनती जा रही है की गणित अगर कार्यान्वित शिक्षा के लोकप्रिय मांग को पूरा नही कर पाता है तो गणित के उपयोगिता पर भी सवाल उठ सकते हैं।

अभ्यास प्रश्न

3. गणित और समाज के पारस्परिक सम्बन्ध को लिखिए।
4. किसी भी समाज के विकास में गणित का क्या योगदान रहा है ?

2.5. गणित एवं पर्यावरण विज्ञान

पर्यावरण विज्ञान मानव एवं पर्यावरण के मध्य स्थापित सानिध्य को दर्शाता है। पर्यावरण की स्थिरता एवं इसकी विविधता इस बात पर निर्भर करती है की उसके सानिध्य में रहने वाले मानव प्रजाति एवं जीव जन्तुओं का पर्यावरण के साथ किस प्रकार का सम्बन्ध स्थापित किया गया है। संरचनात्मक रूप से पारिस्थितिकी संतुलन कायम करने हेतु मानव एवं जीव-जंतुओं को पर्यावरण द्वारा प्रदान किये गए प्राकृतिक संसाधनों पर आश्रित होना पड़ता है। अतएव यह जिम्मेदारी मानव प्रजाति पर बनती है कि वे पर्यावरण का इस्तेमाल इस रूप में करें कि यह विरासत जो उन्हें अपने पूर्वजो से मिली है उसका ब्याज भी उन्हें चुकाना है। प्राकृतिक संसाधनों का इस्तेमाल बहुत सोच समझकर किया जाना चाहिए, क्योंकि कई संसाधनो का एक बार विलीन होने के बाद नवीनीकरण नहीं किया जा सकता। पर्यावरण में हो रहे बदलाव एवं उससे उत्पन्न समस्याओं से निजात पाने के लिए गणित विज्ञानं अहम् भूमिका अदा कर सकता है।

प्रमुख पर्यावरणविद हकेल, टानस्ले, राचेल कारसन, सुन्दर लाल बहुगुणा, राजस्थान की विशनोई जनजाति, भारत के वाटर मैन राजेंद्र सिंह, एवं सुलभ इंटरनेशनल के संस्थापक विन्देश्वरी पाठक के द्वारा गणित विज्ञान की सहायता से किये गए कार्य सराहनीय है। भारत सरकार द्वारा स्थापित जलवायु फंड ग्रीन हाईवे कॉरिडोर, सोलर पॉवर प्लांट की स्थापना, इंटरनेशनल सोलर अलायन्स गुड़गांव में फ्रांस की सहायता से, गुजरात में विश्व का सबसे बड़ा सोलर पावर प्लांट, केरल में विश्व का पहला तैरता हुआ सोलर पॉवर प्लांट, आईपीसीसी और टेरी (TERI) के द्वारा जारी किये गए लेखों एवं विश्लेषणों में गणित ने अहम् भूमिका अदा की है। भारतीय मानसून विभाग ने राष्ट्रिय आपदा प्रबंधन के सहयोग से मानसून में होने वाले परिवर्तन एवं उसका होने वाले कृषि पर प्रभाव और समुद्री क्षेत्रों से सटे हुए राज्यों में चक्रवात से बचने के अचूक उपायों में गणित ने कमाल का काम किया है। गणितीय विज्ञानं की वजह से कई देशों ने पानी की कमी से निजात पाने के लिए हाइड्रोपोनिक छिड़क सिंचाई प्रति ड्रॉप फसल, मिट्टी के स्वास्थ्य कार्ड, गुणवत्ता वायु सूचकांक आदि महत्वपूर्ण संरचनाओं की शुरुआत गणित की वजह से ही साकार हो पाया है।

भारत के द्वारा बनाये गए GPS के मॉडल पर NAVIC GPS से फसलों मौसमों एवं प्राकृतिक संसाधनों को गणित के उपयोग से संरक्षण संरक्षण प्राप्त हुए हैं। गणितीय आकलन की वजह से भारत में वनों की

प्रतिशतता में वृद्धि दर्ज की गई है, एवं जंगलों में रह रहे जन जातियों के लिए सफल जीवन एवं उनके कार्य कुशलता के लिए विकास के मॉडल तैयार किये गए हैं।

यह गणितीय विज्ञान का ही कमाल है कि पर्यावरण को सुरक्षित एवं हरा भरा रखने के लिए अब सरकारी संस्थानो, घरों एवं दफ्तरों को इस तरह से बनाया जा रहा है, कि कम से कम बिजली एवं अन्य प्राकृतिक संसथान का प्रयोग कम करे, जिससे प्रदूषण कम हो और पर्यावरण पर दुष्प्रभाव कम हो। गणितीय विज्ञान की सहायता से इस बात का पता लगाया जा सका है कि भारतीय समाज में निहित पारम्परिक आयुर्वेद, योग की सहायता से कई जटिल रोगों का निपटान किया जा सका है। जिसके लिए हमें प्रकृति पर अतिरिक्त भार न डालने से जल भूमि एवं वायु का प्रदूषण कम होता है। गणित विज्ञान की सहायता से आज यह पता लग चुका है की नदियों नालों पोखरों में यूट्रोफिकेशन की वजह से ऑक्सीजन की कमी की वजह से उसमें रहने वाले पौधों एवं जीवों की हत्या हो जाती है। गणित विज्ञान ने पर्यावरणविदों को हर तरह से शसक्त बनाने का काम किया है और इसी दिशा में हर साल पृथ्वी दिवस मनाया जाता है

अभ्यास प्रश्न

5. पर्यावरण विज्ञान की अवधारणा को सही मूर्त रूप प्रदान करने में गणित का क्या योगदान रहा है ?
6. कोई दो उदाहरण अपने पड़ोस की जिन्दंगी से दीजिये, जिसमे गणित पर्यावरण विज्ञान की अवधारणाअ को समझाने में मदद कर रही हो?

2.6. गणितज्ञों का योगदान

गणित मानव के विकास का एक मुलभुत विषय एवं कई वैज्ञानिक प्रयोग गणना एवं खोजों में भी सहायक रहा है। कई छात्रों के लिए यह दुह स्वप्न भी रहा है लेकिन जिन्होंने ऐसे रहस्यों को सुलझाने का माध्यम समझा है उनके लिए यह काफी रोचक है। विश्व इतिहास ने कई मेधावी गणितज्ञों को देखा है। जिन्होंने अपने योगदान से दुनिया को बदल दिया है।

1. **यूलर (Euler)**

   यूलर को गणित का बादशाह कहा जाता है। इस नेत्र विहीन मेधावी को सबसे बड़ा गणितज्ञ माना जाता है। यूलर के बाद जितने भी गणितीय सूत्रों की खोज की गई उनके नाम उस सूत्र को प्रतिपादित करने वाले वैज्ञानिक के नाम पर रखा गया। उसने गणित की दुनिया में क्रांति ला दी एवं विद्वता के स्तर पर उसे आइन्स्टीन के बराबर समझा जाता है। उसने गणितीय संकेतन, लघु लिपि त्रिकोणमिति फ़ंक्शन एवं फंक्शन को लिखने का तरीका, वृत्त की परिधि एवं इसके व्यास के अनुपात को *"π"* के रूप में लिखना, काल्पनिक इकाई के लिए [i] का प्रयोग, ग्रीक अक्षर

सिग्मा का प्रयोग Summation के लिए एवं प्राकृतिक लॉगरिथम के आधार के लिए [E] का प्रयोग जिसे यूलर स्थिरांक भी कहते हैं, को प्रतिपादित किया। उन्होंने Seven bridges of Konigsberg problem को ग्राफ थ्योरी के द्वारा सुलझाया एवं वस्तु के सतह, कोण एवं लम्बाई के लिए Euler Cracteristic की खोज की। उन्होंने कई स्थापित गणितीय प्रयोगों को आकार दिया है। अपने समय में उन्होंने Topology, Calculus Analysis Graph Theory को बनाने भूमिका अदा की।

2. गॉस (Gouse)

जर्मन गणित विशेषज्ञ गॉस को गणित का राजकुमार एवं गणित का अग्रणी कहा जाता है, जो बचपन से ही विलक्षण प्रतिभा के धनी थे। गॉस ने समुच्चय सिद्धान्त, सांख्यिकी, Differentiaon, भू- भौतिक विज्ञान विश्लेषण, इलेक्ट्रोस्टाटिस्टिक, संख्या सिद्धांत एवं खगोल विज्ञान में क्रन्तिकारी योगदान दिए। उन्होंने अंकगणित के मूलभूत प्रयोगों को साबित किया एवं नम्बर थ्योरी में अपना योगदान दिया।

3. यूक्लिड (Euclid)

यूक्लिड ग्रीक गणितज्ञ थे, इनका जन्म ईसा से लगभग 325 वर्ष पूर्व हुआ था। ऐसा कहा जाता है कि प्लेटो (Plato) के शिष्यों से ही एथेंस में इन्होंने अपनी प्रारंभिक शिक्षा प्राप्त की थी। उन्हें "ज्यामिति का जनक" कहा जाता है। यूक्लिड का सबसे बड़ा ग्रंथ 'एलीमेंट्स' (Elements) है, जो 13 भागों में विभाजित है। इससे पहले भी बहुत से गणितज्ञों ने ज्यामितियाँ लिखी थीं, परंतु उन सब के बाद जो ज्यामिति यूक्लिड ने लिखी उसकी बराबरी आज तक कोई नहीं कर सका है, और न संसार में आजतक कोई ऐसी पुस्तक लिखी गई जिसने किसी विज्ञान के क्षेत्र में बिना किसी परिवर्तन के लगभग 2000 वर्षो तक अपना प्रभुत्व जमाए रखा हो और जो मूल में 18 वीं शताब्दी के अंत तक पढ़ाई जाती रही हो। यूक्लिड ने नई उत्पत्तियाँ दी। उत्पत्तियों के क्रम भी बदल दिए, जिससे पुरानी उत्पत्तियाँ सब बेकार हो गई। यह मानना ही पड़ेगा कि पुस्तक की अभिकल्पना उनकी अपनी थी। उन्होंने उस समय तक के सभी अनुसंधानों को अपनी पुस्तक में दे दिया था। उसने सभी तथ्यों को बड़े तार्किक ढंग से ऐसे क्रम में लिखा चूकि प्रत्येक नया प्रमेय उनके पहले प्रमेयों के तथ्यों पर आधारित था। ऐसा करते करते यूक्लिड ऐसे तथ्यों पर पहुँचे जिनके लिये प्रमाण की आवश्यकता नहीं थी। उन्होंने ऐसे तथ्यों को स्वयंसिद्ध (axiom) कहा। ऐसे स्वयंसिद्धों की संख्या कहीं छह, या कहीं बारह है। अंतिम स्वयंसिद्ध इस प्रकार है। यदि एक रेखा दो रेखाओं को काटे और एक ओर अंत:कोणें का योग दो समकोण से कम है। बहुत दिनों तक तो इस स्वयंसिद्ध के विषय में किसी को आलोचना करने का साहस नहीं हुआ, परंतु लोग इसको स्वयंसिद्ध मानने में आपत्ति करते रहे। यहाँ तक कि बहुत जांच पड़ताल भी हुई ।18 वीं शताब्दी में ही लोग इस निष्कर्ष पर पहुँच पाए कि उपर्युक्त स्वयंसिद्ध सत्य नहीं है, जिससे उन्होंने यूक्लिडीय ज्यामिति का आविष्कार किया था।

4. पाईथोगोरस (Pythagoras)

पाईथोगोरस सामोस के (उनका जन्म 580 और 572 ई॰पू॰ के बीच हुआ और मृत्यु 500 और 490 ई॰पू॰ के बीच हुई), एक ग्रीक गणितज्ञ, दार्शनिक और पाईथोगोरियनवाद नामक धार्मिक आन्दोलन के संस्थापक थे। हालाँकि कुछ लोग गणित और प्राकृतिक दर्शन में उनके योगदान की संभावनाओं पर सवाल उठाते हैं। उन्हें मुख्यतः पाईथोगोरस प्रमेय (Pythagorean theorem) के लिए जाना जाता है, जिसका नाम उनके नाम पर दिया गया है। पाइथोगोरस को "संख्या के जनक" के रूप में जाना जाता है, छठी शताब्दी ईसा पूर्व में धार्मिक शिक्षण और दर्शन में उनका महत्वपर्ण योगदान रहा। हम जानते हैं कि पाइथोगोरस और उनके शिष्य मानते थे कि सब कुछ गणित से सम्बंधित है और संख्याओं में ही अंततः वास्तविकता है और गणित के माध्यम से हर चीज के बारे में भविष्यवाणी की जा सकती है तथा हर चीज को एक ताल बद्ध प्रतिरूप या चक्र के रूप में मापा जा सकता है। लम्बलीकस (Iamblichus) के अनुसार, पाइथोगोरस ने कहा कि "संख्या ही विचारों और रूपों का शासक है और देवताओं और राक्षसों का कारण है।"

5. आइंस्टाइन (Einstein)

आइंस्टाइन एक महान भौतिकविद एवं गणितज्ञ थे जिनका जन्म 14मार्च 1879 को उल्म वुर्टेमबर्ग, जर्मनी में हुआ था। उनकी प्रारंभिक शिक्षा Catholic Elementary School' में हुई। 16 वर्ष की अवस्था में उन्होंने Swiss Federal Polytechnic का entrance exam भाग लिया जो की Zurich शहर में आयोजित हुआ था। उन्होंने गणित और भौतिकी में आशा से बढाकर सफलता प्राप्त की परन्तु बाकी विषय में अनुतीर्ण हो गए। आइंस्टाइन ने 1905 में Ph.D. की उपाधि प्राप्त की। उन्होंने 1908 में बर्न विश्वविद्यालय में लेक्चरर का पद प्राप्त किया।

अपनी वैज्ञानिक प्रतिभा के साथ-साथ उन्होंने शास्त्रीय संगीत और वायलिन बजाना का शौक था। वह असाधारण प्रतिभा और शानदार वैज्ञानिक दिमाग के लिए जाने जाते रहे है। उन्होंने सैकड़ों किताबें और लेख प्रकाशित किए। क्वांटम भौतिकी और 'Manhattan Project' पर उनका काम अमेरिकी सरकार के लिए बहुत महत्वपूर्ण साबित हुआ।

6. बट्रेंड रसेल (Bertrand Russell)

बट्रेंड रसेल बीसवीं शती के प्रख्यात दार्शनिक, महान गणितज्ञ और शांति के अग्रदूत थे। बर्ट्रेंड रसेल (18 मई 1872 - 3 फ़रवरी 1970) एक अंतरराष्ट्रीय ख्याति प्राप्त ब्रिटिश दार्शनिक, गणितज्ञ, वैज्ञानिक, शिक्षाशास्त्री, राजनीतिज्ञ, समाजशास्त्री तथा लेखक थे। रसेल ने ट्रिनिटी कॉलेज, कैम्ब्रिज से गणित और नैतिक विज्ञान की शिक्षा पाई। प्रारंभ से ही इनकी रुचि गणित और दर्शन की ओर थी, बाद में समाजशास्त्र इनका तीसरा विषय हो गया। इन्होंने 11 वर्ष की अल्प आयु में गणित के एक सिद्धांत का अनुसंधान किया था जो इनके जीवन की एक महान घटना थी। गणित के क्षेत्र में इनकी देन शास्त्रीय थी, जिससे वह बहुत लोकप्रिय नहीं हो सके, लेकिन महानता निर्विवाद है। ए. एन. ह्वाइकहैड के सहयोग से रचित "प्रिंसिपिया मैथेमेटिका" अपने ढंग का अपूर्व ग्रंथ है। इन्होंने "नाभिकी भौतिकी" और "सापेक्षता" पर भी लिखा है।

तर्कशास्त्र, समुच्चय सिद्धान्त, भाषाविज्ञान, कृत्रिम बुद्धि, संज्ञानात्मक विज्ञान, कंप्यूटर विज्ञान, दर्शन, विशेष रूप से भाषा, साहित्यविज्ञान, और तत्वमीमांसा का दर्शन शास्त्र और मुख्यतः भाषा का दर्शन शास्त्र पर रसेल का गहरा प्रभाव माना जाता है।

बर्ट्रेंड रसेल "रायल ह्यूमन सोसाइटी" के सदस्य रहे। ब्रिटेन की "इंडिया लीग" के अध्यक्ष चुने गए थे। अत: भारत के स्वतंत्रता संग्राम से भी इनका निकट का संबंध था। वृद्धावस्था में भी यह परमाणु-परीक्षणविरोधी आंदोलनों के सूत्रधार थे। ब्रिटिश दार्शनिक तार्किक गणितज्ञ इतिहासकार लेखक सामाजिक आलोचक राजनितिक विचारक थे। सन् 1950 में इन्हें साहित्य का "नोबेल" पुरस्कार प्रदान किया गया। इन्होंने 40 ग्रंथों का प्रणयन किया था। "इंट्रोडक्शन टु मैथेमेटिकल फिलॉसॉफी", आउटलाइन ऑव फिलॉसॉफी" तथा मैरेज एंड मोरैलिटी" इसकी महत्वपूर्ण कृतियाँ हैं।

7. आर्यभट्ट (Aryabhata)

आर्यभट्ट (476–550 CE) प्राचीन समय के सबसे महान खगोलशास्त्रीयों और गणितज्ञों में से एक थे। विज्ञान और गणित के क्षेत्र में उनके कार्य आज भी वैज्ञानिकों को प्रेरणा देते हैं। आर्यभट्ट उन पहले व्यक्तियों में से थे जिन्होंने बीजगणित (एलजेबरा) का प्रयोग किया। उन्होंने अपनी प्रसिद्ध रचना 'आर्यभटिया' (गणित की पुस्तक) को कविता के रूप में लिखा। यह प्राचीन भारत की बहुचर्चित पुस्तकों में से एक है। इस पुस्तक में दी गयी ज्यादातर जानकारी खगोलशास्त्र और गोलीय त्रिकोणमिति से संबंध रखती है। 'आर्यभटिया' में अंकगणित, बीजगणित और त्रिकोणमिति के 33 नियम भी दिए गए हैं। उनके दो प्रमुख योगदान हैं शून्य का परिचय और पाइ के अनुमानित मान की गणना। आर्यभट्ट, गणित के क्षेत्र में सबसे महान भारतीय विद्वान के रूप में जाना जाता है, इनके प्रमुख योगदानों में Pi का मान दशमलव के 5 अंकों तक का अनुमान इन्होने ही लगाया गया था। और उन्होंने साइन (Sine)की अवधारणा पर भी चर्चा की। वह आर्यभट्ट ही थे जिन्होंने त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना की थी, जो कि [1/2x लम्बाई xचौराई] है। बीजगणित में उन्होंने वर्गों और क्यूब्स की श्रृंखला का सार बताया और ax - by = c प्रकार के समीकरणों को हल किया है।

आर्यभट महान भारतीय विद्वान जो की खगोलीय पिंडो के सिद्धान्त के लिए प्रसिद्ध हुए और इनके थ्योरी आधुनिक गणना के अनुसार काफी सटीक है। आधुनिक गणितीय गणनाओं के संदर्भ में खगोलीय निकायों पर अपने प्रमेयों के लिए प्रसिद्ध हैं। आज हम सभी इस बात को जानते हैं कि पृथ्वी गोल है और अपनी धुरी पर घूमती है और इसी कारण रात और दिन होते हैं। मध्यकाल में 'निकोलस कॉपरनिकस' ने यह सिद्धांत प्रतिपादित किया था पर इस वास्तविकता से बहुत कम लोग ही परिचित होगें कि 'कॉपरनिकस' से लगभग 1 हज़ार साल पहले ही आर्यभट्ट ने यह खोज कर ली थी कि पृथ्वी गोल है और उसकी परिधि अनुमानत: 24835 मील है। सूर्य और चन्द्र ग्रहण के हिन्दू धर्म की मान्यता को आर्यभट्ट ने ग़लत सिद्ध किया। इस महान वैज्ञानिक और गणितज्ञ को यह भी ज्ञात था कि चन्द्रमा और दूसरे ग्रह सूर्य की किरणों से

प्रकाशमान होते हैं। आर्यभट्ट ने अपने सूत्रों से यह सिद्ध किया कि एक वर्ष में 366 दिन नहीं वरन 365.2951 दिन होते हैं।

8. ब्रह्मगुप्त (Brahmagupta)

ब्रह्मगुप्त (जन्म: 598 ई. - मृत्यु: 668 ई.) प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ थे। ब्रह्मगुप्त गणित ज्योतिष के बहुत बड़े आचार्य थे। आर्यभट्ट के बाद भारत के पहले गणित शास्त्री 'भास्कराचार्य प्रथम' थे। उसके बाद ब्रह्मगुप्त हुए। ब्रह्मगुप्त खगोल शास्त्री भी थे और आपने 'शून्य' के उपयोग के नियम खोजे थे। इसके बाद अंकगणित और बीजगणित के विषय में लिखने वाले कई गणितशास्त्री हुए। प्रसिद्ध ज्योतिषी भास्कराचार्य ने इनको 'गणकचक्र - चूड़ामणि' कहा है और इनके मूलाकों को अपने 'सिद्धान्त शिरोमणि' का आधार माना है। इनके ग्रन्थों में सर्वप्रसिद्ध हैं, 'ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त' और 'खण्ड-खाद्यक'। 'ब्रह्मस्फुट सिद्धांत' सबसे पहला ग्रन्थ माना जाता है जिसमें शून्य का एक विभिन्न अंक के रूप में उल्लेख किया गया है। यही नहीं, बल्कि इस ग्रन्थ में ऋणात्मक अंकों और शून्य पर गणित करने के सभी नियमों का वर्णन भी किया गया है। ख़लीफ़ाओं के राज्यकाल में इनके अनुवाद अरबी भाषा में भी कराये गये थे, जिन्हें अरब देश में 'अल सिन्द हिन्द' और 'अल अर्कन्द' कहते थे। पहली पुस्तक 'ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त' का अनुवाद है और दूसरी 'खण्ड-खाद्यक' का अनुवाद है।

ब्रहगुप्त ने दुनिया को धनात्मक संख्या एवं शून्य (zero) का सिद्धान्त दिया। उन्होंने Simultaneous एवं द्विघात समीकरण को हल करने का तरीका बताया। उन्होंने चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल अर्ध परिमिति (semi-perimeter) की मदद से निकला । उन्होने बताया कि चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत होते हैं। ब्रह्मगुप्त ने चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल निकालने का सन्निकट सूत्र (approximate formula) तथा यथातथ सूत्र (exact formula) भी दिया है। ब्रहगुप्त को संख्यात्मक विश्लेषण (Numerical Analysis) का जनक माना जाता है।

9. श्रीनिवास रामानुजन (Srinivasa Ramanujan)

विलक्षण प्रतिभा के धनी श्रीनिवास रामानुजन् इयंगर (22 दिसम्बर 1887 – 26 अप्रैल 1920) आधुनिक काल के एक महान भारतीय गणितज्ञ थे। इन्हें गणित में कोई विशेष प्रशिक्षण नहीं मिला, फिर भी इन्होंने विश्लेषण एवं संख्या सिद्धांत के क्षेत्रों में गहन योगदान दिए। इन्होंने अपने प्रतिभा और लगन से न केवल गणित के क्षेत्र में अद्भुत अविष्कार किए वरन भारत को अतुलनीय गौरव भी प्रदान किया।

इन्होंने खुद से गणित सीखा और 32 साल की कम उम्र में उन्होंने गणित के 3,884 प्रमेयों का संकलन किया जो किसी को भी आश्चर्य चकित कर सकते हैं। इनमें से अधिकांश प्रमेय सही सिद्ध किये जा चुके हैं। यद्यपि इनकी कुछ खोजों को गणित मुख्यधारा में अब तक नहीं अपनाया गया है। हाल में इनके सूत्रों को क्रिस्टल-विज्ञान में प्रयुक्त किया गया है। इनके कार्य से प्रभावित

गणित के क्षेत्रों में हो रहे काम के लिये रामानुजन जर्नल की स्थापना की गई है। श्रीनिवास रामानुजन आयंगर कार्यो में प्रमुख संख्या सिद्धांत Number Theory, गणितीय विश्लेषण, स्ट्रिंग सिद्धांत और क्रिस्टलोग्राफी के योगदान के लिए जाना जाता है। इन्होने शून्य और अनन्त को हमेशा ध्यान में रखा और इसके अंतर्सम्बन्धों को समझाने के लिए गणित के सूत्रों प्रतिपादित किया।

रामानुजन ने इंग्लैण्ड में पाँच वर्षों तक मुख्यतः संख्या सिद्धान्त के क्षेत्र में काम किया। इस सूत्र की विशेषता यह है कि यह गणित के दो सबसे प्रसिद्ध नियतांकों ('पाई' तथा 'ई') का सम्बन्ध एक अनन्त सतत भिन्न के माध्यम से व्यक्त करता है। पाई के लिये उन्होने एक दूसरा सूत्र भी (सन् १९१० में) दिया था। रामानुजन संख्याएँ- 'रामानुजन संख्या' उस प्राकृतिक संख्या को कहते हैं जिसे दो अलग-अलग प्रकार से दो संख्याओं के घनों के योग द्वारा निरूपित किया जा सकता है। उदाहरण - 1729, 4104, 20683, 39312, 40033 आदि रामानुजन संख्याएं हैं। इन्हें हार्डी-रामानुजन संख्या भी कहते हैं।

10. भास्कर प्रथम (Bhaskara-I)

भास्कर प्रथम (600 ई – 680 ईसवी) भारत के सातवीं शताब्दी के महान गणितज्ञ, संस्कृत विद्वान और खगोलशास्त्री थे। संभवतः ऐसा माना जाता है कि उन्होने ही सबसे पहले संख्याओं को हिन्दू दाशमिक पद्धति में लिखना आरम्भ किया। उन्होने आर्यभट के कार्य को आगे बढ़ाया एवं आर्यभट्ट की रचनाओं पर टीकाएँ और उसी सन्दर्भ में ज्या क (sin x) का परिमेय मान बताया, जो अनन्य एवं अत्यन्त उल्लेखनीय कार्य था इस क्रांतकारी कार्य का गणित में बहुत बड़ा योगदान है। आर्यभटीय पर उन्होने सन् ६२९ में आर्यभटीयभाष्य नामक टीका लिखी जो संस्कृत गद्य में लिखी गणित एवं खगोलशास्त्र की प्रथम पुस्तक है। आर्यभट की परिपाटी में ही उन्होने महाभास्करीय एवं लघुभास्करीय नामक दो खगोलशास्त्रीय ग्रंथ भी लिखे।

भास्कर ने (Differential Calculus) की नींव रखी, और (Differential Coefficient)का एक उदाहरण दिया जिसे आज हम Rolle's के प्रमेय के रूप में क्या जानते हैं। उन्होंने ही दुनिया को बताया कि किसी भी संख्या का योग और अनन्त का योग अनंत है, साथ ही बताया कि शून्य से विभाजित कोई भी संख्या अनंत है। बीजीय समीकरणों को हल करने की चक्रीय विधि पेश करने वाला वह प्रथम गणितज्ञ थे।

11. सत्येंद्रनाथ बोस (Satyendra Nath Bose)

सत्येन्द्रनाथ बोस का जन्म १ जनवरी १८९४ को कोलकाता में हुआ था। ये भारतीय गणितज्ञ एवं भौतिक विद थे। उनकी प्रतिभा को देखकर उनके अध्यापक ने भविष्यवाणी की कि वह एक दिन पियरे साइमन, लेप्लास और आगस्टीन लुई काउथी जैसे गणितज्ञ बनेंगे।

उनके द्वारा लिखा एक लेख - "प्लांक्स लॉ एण्ड लाइट क्वांटम" भारत की किसी पत्रिका ने नहीं छापा तो सत्येन्द्रनाथ बोस ने उसे सीधे आइंस्टीन को भेज दिया। आइंस्टीन उस पत्र का अनुवाद स्वयं जर्मन में किया और प्रकाशित करा दिया। इससे सत्येन्द्रनाथ बोस को बहुत प्रसिद्धि मिली। यह 1920 का समय था जब क्वान्टम मेकेनिक्स में यह गुत्थी की तरह थी, क्वान्टम मेकेनिक्स के विकास हो तो रहा था लेकिन गति बेहद धीमी थी क्योंकि कहीं न कहीं प्लांक्स के नियम को अगले चरण तक ले जाना था। उसी समय भारत में ढाका विश्वविद्यालय के एक प्रोफेसर सत्येद्र नाथ बोस, क्वान्टम मेकेनिक्स के अध्यन्न में आए और उन्होंने 1924 को एक चार पृष्ठ के रिसेर्च पेपर लिखा जिसका शीर्षक था 'Planck's Law and the Hypothesis of Light Quanta (1924)' जो आज मॉडर्न क्वान्टम मेकेनिक्स और कणों से जुड़ी किसी भी खोज, अध्ययन का आधार है। सत्येंद्र नाथ का यह रिसेर्च पेपर आगे चलकर बोस–आइंस्टीन स्टेटिक्स और बोस–आइंस्टीन कनडेनसेट (एक तरह की स्टेट ऑफ मैटर) के रूप में बदला जिसकी खोज सत्येंद्र नाथ बोस और आइंस्टीन ने खुद मिलकर की।

सन् १९२६ में सत्येन्द्रनाथ बोस भारत लौटे और ढाका विश्वविद्यालय में १९५० तक काम किया। फिर शांतिनिकेतन में विश्व-भारती विश्वविद्यालय के कुलपति बने। उनका निधन ४ फ़रवरी १९७४ को हुआ। अपने वैज्ञानिक योगदान के लिए वह सदा याद किए जाएँगे।

अभ्यास प्रश्न

7. आइंस्टाइन के गणित योगदान को लिखे
8. हार्डी-रामानुजन संख्या क्या है?
9. ब्रह्मगुप्त का गणित के क्षेत्र में योगदान क्या था ?
10. यूक्लिड का सबसे बड़ा ग्रंथ 'एलीमेंट्स' (Elements) गणित की किस अवधारणा को व्यक्त करता है ?

1.6 सारांश

- गणित हमें तर्क करना, समस्या समाधान करने, बेहतर विकल्प तलाशने, सामान्यीकरण करने में मददगार होता है। ऐसी सोच को विकसित करने में गणित हमें ऐसे कौशलों, तौर-तरीकों को सिखाता है। गणित की ऐसी खूबी से ही स्कूली गणित का महत्व अनिवार्य विषय के तौर पर मजबूत होता है।
- गणित विषय के इस सामाजिक और दैनिक जीवन में उपयोगिता के पहलू को ध्यान में रखते हुए निम्न क्षेत्रों - रोजमर्रा की जिंदगी , मोबाइल, रसोई घर, बागवानी, कला क्षेत्र, पर्यटन या भ्रमण, बैंकिंग क्षेत्र तथा सांख्यिकी के क्षेत्र उपयोगिता को स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है।

- *गणित जीवन का शास्वत सत्य है।*
- *गणित और समाज एक दूसरे के पूरक है तथा आश्रित भी। इन दोनों का विकास तथा उन्नति इन दोनों में ही समाहित* है। किसी भी देश में गणित का समाज में स्थान उस समाज की प्रकृति एवं सोच और आकांक्षाओं पर निर्भर करता है।
- गणितीय विज्ञान का ही कमाल है कि पर्यावरण को सुरक्षित एवं हरा भरा रखने के लिए अब सरकारी संस्थानो, घरों एवं दफ्तरों को इस तरह से बनाया जा रहा है । गणितीय विज्ञान की सहायता से इस बात का पता लगाया जा सका है कि भारतीय समाज में निहित पारम्परिक आयुर्वेद, योग की सहायता से कई जटिल रोगों का निपटा जा सका है।
  विश्व इतिहास ने कई मेधावी गणितज्ञों को देखा है। जिन्होंने अपने योगदान से दुनिया को बदल दिया है। ऐसे ही कुछ गणितिज्ञों का जीवन परिचय तथा उपलब्धियों को बताने का प्रयास किया गया है। जैसे- यूलर, गॉस, यूक्लिड, पाइथागोरस, आइन्स्टाइन, रसेल, आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, रामानुजन, भास्करचार्य तथा सतेंद्र नाथ बोस।

1.7 सन्दर्भ ग्रंथ सूची

1. Fatima R. 'Role of Mathematics in the Development of Society'. Accessble - http://www.ncert.nic.in/pdf_files/Final-ArticleRole%20of%20Mathematics %20in% 20the% 20Development %20ofSociety-NCER-.pdf
2. James, Anice (2010). "Teaching of mathematics", Neel Kamal Publication Pvt. Ltd. Hyderabad
3. Kulshreshtha, A.K. (2010). "Teaching of Mathematics", R. Lall, Book Depot, Meerut
4. Lal, D. (2015); Geometry and Geometrical Patterns in Nature, The Signage, Jamshedpur, Vol. 3 No.-1, JanJun, 2015, Pp 107-116
5. Laure Gouba. (2008). 'The importance of Mathematics in everyday life' African Institute for Mathematical Sciences 6 Melrose Road, Muizenberg 7945, South Africa, Accesseble- http://users.aims.ac.za/~laure/math_life.pdf
6. कुलश्रेष्ठ, ए.के. (2010); "शिक्षण गणित", आर. लाल, बुक डिपो, मेरठ
7. जितेन्द्र कुमार, (नवम्बर एवं दिसम्बर २०१०); प्राथमिक कक्षाएँ एवं संवाद, शैक्षणिक संदर्भ अंक 15 (मूल अंक 72), एकलव्य पत्रिका होशांगाबाद, भोपाल, म.प., पृष्ठ सं० २५-३३

8. बरूआहा, रिशा. (2016); 'गणित, पर्यावरण और भाषा: मिला-जुला संसाधन' टीचर्स ऑफ इण्डिया के अँग्रेजी सेक्शन में प्रकाशित; अनुवादित- कविता तिवारी; http://www.teachersofindia.org/
9. लाल. डी. (जनवरी 2015); गणित का अर्थपूर्ण शिक्षण, प्राथमिक शिक्षा, एनसीईआरटी, वॉल्यूम 13, साल 3, प्रथम क्वार्टर 2015 , पृष्ठ सं० 41-48
10. विश्व के प्रसिद्ध गणितज्ञ; http://famous-mathematicians.org/

इकाई 3 -विद्यालयी स्तर पर गणित शिक्षण का उद्देश्य

Aims of Teaching Mathematics at School Level

3.1 प्रस्तावना
3.2 उद्देश्य
3.3 गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य
3.4 गणित शिक्षण के लक्ष्यों एवं विशिष्ट उद्देश्यों का अध्ययन
3.5 विद्यालयी शिक्षा के उद्देश्य:गणित में जिज्ञासा, रचनात्मकता सौंदर्य बोध (माध्यमिक स्तर)
3.6 सारांश
3.7 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
3.8 संदर्भ ग्रंथ सूची
3.9 निबंधात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना

गणित मानव समाज के लिए बहुत ही महत्वपूर्ण विषय है। यह एक ऐसा विषय है जिसकी अपनी एक संस्कृति है। गणित व्यक्ति की तार्किक क्षमताओं को विकसित करने में सहायता करती है यह सभ्यता के विकास में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) ने भी सामान्य शिक्षा के क्षेत्र में गणित के महत्त्व की स्वीकार किया है और उनका सुझाव है की " गणित को एक ऐसा साधन माना जाना चाहिए जो बच्चों को सोचने, तर्क करने, विश्लेषित करने और अपनी बात को तर्कसंगत ढंग से प्रकट करने में समर्थ बना सकता है। एक विशिष्ट विषय होने के अतिरिक्त गणित को ऐसे किसी भी विषय का सहवर्ती माना जाना चाहिए जिसमें विश्लेषण और तर्कशक्ति की जरूरत होती है"।

वर्तमान इकाई में हम गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य, लक्ष्यों एवं विशिष्ट उद्देश्यों का अध्ययन एवं गणित में जिज्ञासा, रचनात्मकता सौंदर्य बोध का अध्ययन करेंगे।

3.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप -

1. गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य को बता सकेंगे।
2. गणित शिक्षण के लक्ष्यों एवं विशिष्ट उद्देश्यों का अर्थ बता सकेंगे।

3. ब्लूम के विशिष्ट उद्देश्यों का विश्लेषण कर सकेंगे।
4. लक्ष्यों एवं उद्देश्यों में अंतर बता सकेंगे।
5. गणित में जिज्ञासा, रचनात्मकता एवं सौंदर्य बोध को अपने शब्दों में व्यक्त कर सकेंगे।

3.3 गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य

प्रत्येक कार्य की तरह ही अध्ययन-अध्यापन भी एक सोद्देश्य प्रक्रिया है। प्रत्येक विषय की शिक्षा के के कुछ अत्याधिक व्यापक उद्देश्य होते है इन्ही उद्देश्यों को आधारशिला बनाकर ही शिक्षा का ढाँचा तैयार किया जाता है। इस ढाँचे के आधार पर ही शिक्षण कार्य सम्पन्न किया जाता है। यदि शिक्षक को शिक्षण उद्देश्यों का ज्ञान नहीं होगा तो वह अध्यापन कार्य सुचारू रूप से क्रियान्वित नहीं कर पायेगा तथा छात्र भी अध्ययन कार्य में अधिक रूचि नहीं लेगा। किसी विषय के उद्देश्यों का निर्धारण करते समय मुख्य रूप से उस राष्ट्र एंव समाज की आवश्यकताए, विषय की प्रकृति, रीति-रिवाज, परम्पराएं एवं मूल्यों को विशेष महत्व दिया जाता है। उद्देश्यों को आधारशिला बनकर ही शिक्षा का ढांचा तैयार किया जाता है ओर इसी ढांचे पर ही सम्पूर्ण शिक्षा प्रक्रिया निर्भर होती है। सका क्षेत्र व्यापक होता है तथा प्रकृति अप्रत्यक्ष, दीर्घ कालीन तथा व्यक्तिनिष्ठ होती है। इसके अभाव में कोइ भी कार्य सार्थक नहीं हो सकता। लक्ष्य विद्यार्थी एवं अध्यापक दोनो के लिए आदर्श होते है। इसीलिए अध्यापक गणों को शिक्षण से पूर्व एक लक्ष्य सुनिश्चित करना नितान्त आवश्यक होता है अन्यथा दिशाहीन अध्यापन या शिक्षण से छात्र एक मूकदर्शक बन कर रह जाता है अत: अध्यापक का शिक्षण प्रक्रिया प्रारम्भ करने से पहले उस विषय के उद्देश्य को भी-भांति समझ लेने चाहिए क्योंकि जब तक शिक्षक को स्वयं उस विषय के उद्देश्य का पता नहीं होंगे तब तक विद्यार्थियों को ज्ञान प्राप्ति में सहायता नहीं कर सकता है। इस पर प्रो0 बी0डी0 भाटिया ने कहा है कि''उद्देश्यों के ज्ञान के अभाव में शिक्षक उस नाविक के समान है जिसे अपने गन्तव्य का पता ही नहीं है तथा बालक उस पतवार रहित नौका के समान है जो समुद्र की लहरों के थपेडे खाकर किसी तट पर जा लगेगी।''

प्राचीन समय में गणित के अध्यन का मुख्य उद्देश्य केवल दैनिक जीवन में काम आने वाले ज्ञान से ही संबंधित था। एवं इसका क्षेत्र सीमित था परन्तु वर्तमान में हमारा सामाजिक ढांचा गणित पर ही आधारित है तथा आज का युग विज्ञान का युग है और विज्ञान बिना गणित के संभव नहीं है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 के अनुसार स्कूल स्तर पर गणित की शिक्षा के बुनियादी सिद्धांत निम्नलिखित हैं :-

- गणित की शिक्षा और शिक्षण, छात्रों को प्राथमिक स्तर पर प्राप्त गणितीय ज्ञान और कौशल को और दृढ़ीकरण प्रदान करे।
- गणित को एक ऐसा साधन माना जाना चाहिए जो बच्चों को सोचने, तर्क करने, विश्लेषित करने और अपनी बात को तर्कसंगत ढंग से प्रकट करने में समर्थ बना सकता है। एक विशिष्ट विषय

होने के अतिरिक्त गणित को ऐसे किसी भी विषय का सहवर्ती माना जाना चाहिए जिसमें विश्लेषण और तर्कशक्ति की जरूरत होती है।

- तार्किक रूप से स्पष्ट करने की क्षमता प्रदान करे।
- विभिन्न क्षेत्रों में होने वाली समस्याओं को सुलझाने के उपकरण के रूप में , अपनी खूबसूरत संरचनाओं और पैटर्न आदि के लिए गणित के प्रति अभिमूल्यन विकसित करे
- गणित शिक्षण को इस प्रकार से पुनर्गठित किया जाएगा कि वह आधुनिक टेक्नॉलाजी के उपकरणों के साथ जुड़ सके।

अत: गणित शिक्षण के सामन्य उद्देश्य निम्नलिखित हैं-

- विद्यार्थी को गणित संबंधी सम्प्रत्ययों एवं सिद्धान्तों का ज्ञान कराना।
- गणित के ज्ञान द्वारा विद्यार्थियों को जीवकोपार्जन हेतु सक्षम बनाना।
- विद्यार्थियों में गणित अध्ययन के प्रति रूचि उत्पन्न करना।
- विद्यार्थियों में तार्किक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में मानसिक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करना।
- विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का सर्वांगीण विकास करना।
- गणित अध्ययन के द्वारा छात्रों को एक विशिष्ट अनुशासन प्रदान करना।

विभिन्न स्तरों पर गणित शिक्षण के उद्देश्य

वर्तमान शिक्षा व्यवस्था में शिक्षण के विविध स्तर हैं। इन्हें प्राथमिक स्तर, निम्न माध्यमिक स्तर, माध्यमिक स्तर, उच्चतर माध्यमिक स्तर और उच्च स्तर के रूप में वर्गीकृत किया गया है और इन्ही स्तरों के अनुरूप ही गणित शिक्षण के उद्देश्यों का ढांचा तैयार किया गया है।
निम्न माध्यमिक स्तर और आध्यमिक स्तर के गणित का विवरण इस प्रकार है-

निम्न माध्यमिक स्तर

इस स्तर में कक्षा 6 से 8 और 11 से 14 वर्ष आयु वर्ग के छात्र आते हैं। इस अवस्था में बालकों की प्रवृत्ति जिज्ञासू होती हैं। वे अपने परिवेश के विषय में जानकारी प्राप्त करने के लिए सदैव उत्सुक रहते है। इस प्रकार उनके ज्ञान का सुदृढीकरण करने के साथ-साथ उन्हें गणित के कुछ विशिष्ट सम्बन्धो को सीखने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। इसीलिए उन्हें तथ्यों के संकलन एंव संगठनाओं द्वारा निष्कर्ष निकालने के लिए अधिक अवसर उपलब्ध कराये जातेहै जिससे कि गणित शिक्षण के माध्यम से बालकों में क्रमबद्ध

एंव सुव्यवस्थित कार्य करने की आदत का विकास किया जा सकें। इसके अलावा इस अवस्था में बालको में संवेदन शीलता अधिक होती है और इसी समय उनके संवेगो का सुदृढीकरण भी होता है इसलिए इस अवस्था में उनमें जिन अच्छी आदतों का निर्माणहोता है वे जीवन पर्यन्त बनी रहती है। अत: यह स्तर उनमें अच्छी आदतों के निर्माण का सबसे उपयुक्त स्तर है। इसको ध्यान में रखकर उनमें अच्छीआदतों का निर्माण किया जाये जिससे वे तथ्य परक गणितीय प्रक्रिया का अनुप्रयोग करके निर्णय लेने में सक्षम हो सकें।

उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखकर निम्न या माध्यमिक स्तरपर गणित – शिक्षणके निम्नलिखित सामान्य उद्देश्य प्रस्तुत है।

i. छात्रों में गणितीय अभिरूचि का विकास करना।
ii. छात्रों में दैनिक जीवन की परिस्थितियों से सम्बद्ध समस्याओं को गणितीय ज्ञान द्वारा हल करने एंव निर्णय लेने की क्षमता का विकास करना।
iii. छात्रों को गणित के अनुप्रयोग द्वारा सामाजिक घटनाओं की व्याख्या करने के सुयोग्य बनाना।
iv. गणितीय ज्ञान से प्रेरित तथ्योंके अधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए छात्रों को कुशल बनाना।
v. छात्रों को गणित का ज्ञान कराकर सीखने का कौशल प्रदान करना।
vi. छात्रों को गणित का ज्ञान कराकर धारणा और तथ्य के अन्तर का बोध कराना।
vii. छात्रों को गणित का ज्ञान कराकर समानताओं एवं अन्तर के आधार पर वर्गीकृत करने में निपुण बनाना।
viii. छात्रों में ज्यमिति उपकरणों के प्रति रूचि उत्पन्नकरना एवं उनके प्रयोग द्वारा उनमें रचनात्म्क कौशल का विकास करना।
ix. छात्रों में गणित के ज्ञान से स्वस्थ अभिवृत्तियों का विकास करना।
x. छात्रों को गणितीय ज्ञान से भावी जीवन सफल बनाने के लिए प्रशिक्षित करना।
xi. 21वीं शताब्दी की चुनौतियों का सामना करने में गणितीय ज्ञान द्वारा छात्रों को सक्षम बनाना।

माध्यमिक स्तर

इस स्तर में कक्षा 9 एंव 10 तथा 15 से 16 वर्ष आयु वर्ग के छात्र आते हैं। यह उनकी किशारेावास्था का काल कहलाता है। इस अवस्था में छात्रों का शारीरिक, मानसिक एवं संवेगात्मक विकास बड़ी तीव्रता से होता है। अत: इस स्तर पर गणित शिक्षण इस प्रकार किया जाये, जिससे छात्र गणित की विभिन्न समस्याओं को समझ सकें, समस्याओं का सीमांकन कर सकें, समस्या का हल खोजने के लिए सृजित ज्ञान के आधार पर परिकल्पना का निर्माण कर सकें। परिकल्पना के परीक्षण हेतु तथ्यों एंव प्रमाणों का पर्याप्त संकलन कर सकें, संगणनाएं करके आकलन कर सकें तथा तथ्योंपर आधारित निष्कर्ष निकाल सकें। क्योंकि इस स्तर पर गणित का अध्ययन पृथक रूप से किया जाता है। अत: इस स्तर पर छात्रों की रूचियों एंव आवश्कयताओं के अनुरूप गणित शिक्षण के उद्देश्यों का निर्धारण किया गया है-

उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखकर माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण के निम्नलिखित सामान्य उद्देश्य प्रस्तुत किये गये है-

i. छात्रों को गणितकी शब्दावली, संकेतो, प्रत्ययों, सिद्धान्तों, संक्रियाओं आदि की जानकारी कराना तथा समझने की योग्यता विकसित करना।
ii. छात्रों में गणित सम्बन्धी आधारभूत कौशलों का विकास करना।
iii. छात्रों में गणित सम्बन्धी कुशलताओं का विकास करना।
iv. छात्रों को जीवन की व्यवहारिक समस्याओं में गणित ज्ञान तथा कौशलों का प्रयोग करने में कुशल बनाना।
v. छात्रों में विश्लेषण, सोचने-समझने कारण बताने तथा तर्क करने की योग्यताओं का विकास करना।
vi. छात्रों में गणित के ज्ञान का समस्या समाधान में उपयोग करने की योग्यता का विकास करना।
vii. छात्रों में गणित अध्ययन में रूचि उत्पन्न करना।
viii. गणित की प्रतियोंगिताओं एंव गणित परिषद की गतिविधियोंमें सक्रिय भाग लेने मे रूचि विकसित करना।
ix. छात्रों में गणित के ज्ञान को अन्य क्षेत्रों में उपयेाग करने की कुशलता प्रदान करना।
x. छात्रों को महान गणितज्ञों के योगदान से परिचित कराना।
xi. छात्रों में ध्यान केन्द्रित करने की योग्यता, आत्म निर्भरता तथा खोजपूर्ण आदतों का विकास करना।
xii. छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करना।
xiii. छात्रों के व्यक्तिव का सर्वांगीण विकास करना।
xiv. छात्रों को गणित का ज्ञान कराकर तकनीकी व्यवसायों के लिए तैयार करना।

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि गणित एक जटिल एवं नीरस विषय है। कठिन मानसिक प्रयास के बिना केाई भी व्यक्ति गणित में पारंगत नहीं हो सकता। परन्तु जिस किसी व्यक्ति में शुद्ध ज्ञान के स्वाद को चख लिया है, जिस किसी व्यक्ति ने गणित के सौंदर्य को देख लिया है वह गंभीर प्रयास करने की इच्छा करेंगा। इस प्रकार शिक्षण का मुख्य उद्देश्य छात्र को शुद्र ज्ञान का स्वाद चखाना और गणित के सौंदर्य का दर्शन कराना होना चाहिए।

अभ्यास प्रश्न

1. सामान्य उद्देश्यों की प्रकृति अप्रत्यक्ष होती है।(सत्य /असत्य)
2. सामान्य उद्देश्य अल्पकालीन तथा व्यक्तिनिष्ठ होते है।(सत्य /असत्य)
3. गणित शिक्षण के किन्ही चार सामान्य उद्देश्यों को लिखिए

3.4 गणित शिक्षण के लक्ष्यों एवं विशिष्ट उद्देश्यों का अध्ययन

गणित शिक्षा के उद्देश्यों को किसी सीमा में बांधकर नहीं रखा जा सकता। इसका क्षेत्र असीमित है। जिसमें विद्यार्थियों का न केवल बौद्धिक विकास ही किया जाता है बल्कि उनका मनोवैज्ञानिक व सामाजिक विकास भी होता है। जिससे वे जीवन के सभी पक्षों को समझ सकें।

सामान्यत: सामान्य उद्देश्य या लक्ष्य व विशिष्ट उद्देश्य (Aims of Goals and specific objective) को विद्यार्थी एक ही समझ लेता है लेकिन वास्तव में ये एक नहीं होते। गणित शिक्षण में ये दोनों अलग-अलग होते है।

लक्ष्य (Aims or Goals)

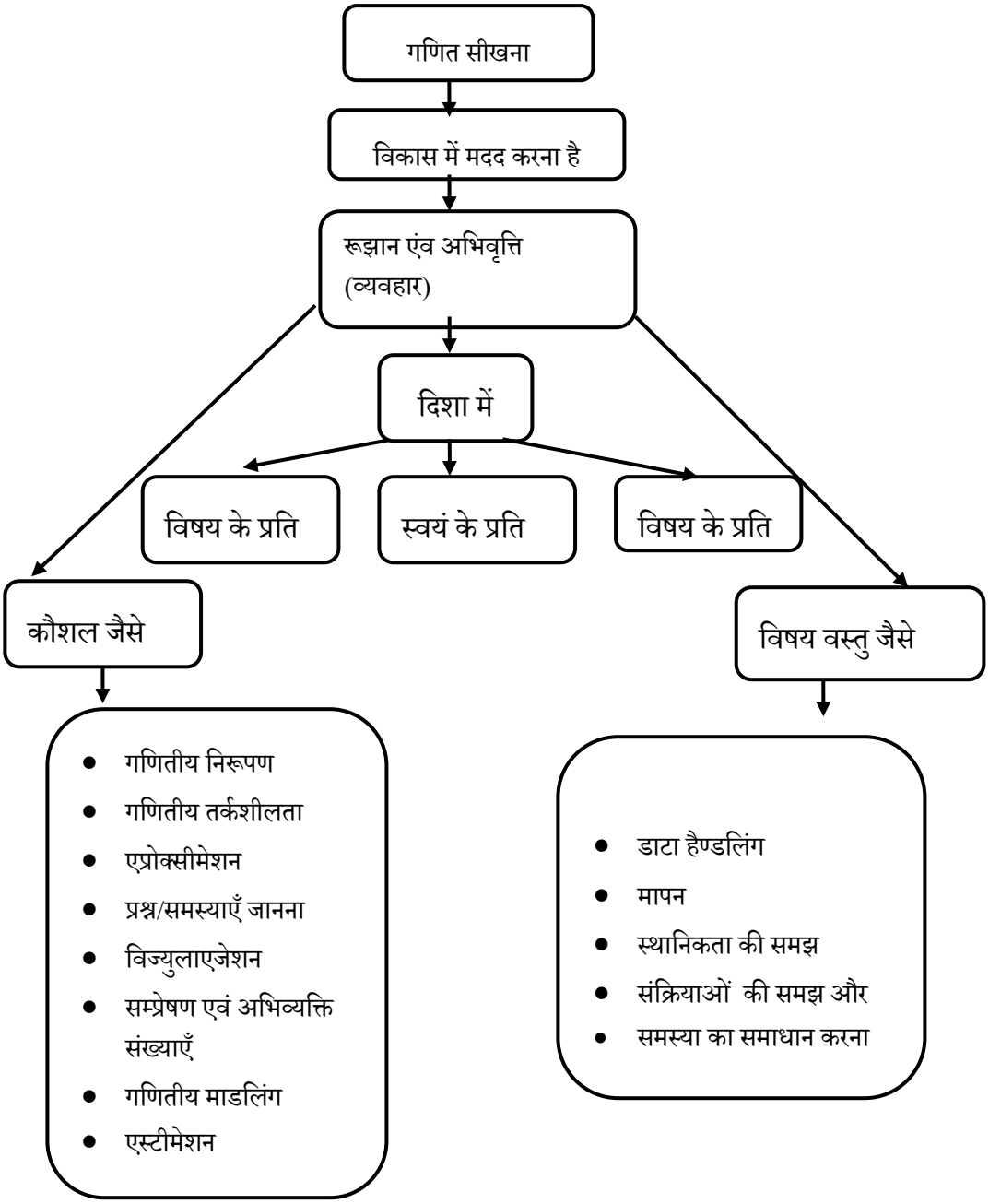
लक्ष्यों को सामान्य उद्देश्य भी कहा जाता है। सामान्य उद्देश्यों को पूरी तरह से प्राप्त नहीं किया जा सकता क्यांकि ये बड़े होते हैं। उनकी प्राप्ति विद्यालयों, समाज व राष्ट्र को आधार बनकर की जाती है। ये इनके अभाव में प्राप्त नहीं किये जा सकते। लक्ष्य विद्यार्थी के आदर्श होते हैं जिनकों ध्यान में रखकर ही विद्यार्थी अपने सही मार्ग या दिशा तक पहुचता है। इसके द्वारा कक्ष में सीखने का वातावरण उत्पन्न किया जाता है। जिसकी सहायता से अध्यसापक को अपने अध्यापन कार्य में सहायता मिलती है। जिससे वह विद्यार्थियों को सही ज्ञान प्राप्ति में सहायक सिद्ध होता है।

किसी भी विषय को पढ़ने व पढा़ने से पहले उस विषय के उद्देश्य निर्धारित करने आवश्यक होते हैं जिनको विद्यार्थियों के व्यवहार में परिवर्तन लाने के लिए प्रयोग कर विद्यार्थियों को ज्ञान प्रदान किया जा सकता है।

अत: गणित शिक्षण के लक्ष्य निर्धारण –

i. बौद्धिक लक्ष्यों के लिए (for the Intellectual Aims)
ii. प्रयोगात्मक लक्ष्यों के लिए (for the Practice Aims)
iii. अनुशासन सम्बन्धी लक्ष्यों के लिए (for the Disciplinary aims)
iv. जीवकोपार्जन सम्बन्धी लक्ष्यों के लिए (for the vocational Aims)
v. अवकाश के समय का सदुपयोग करने के लिए (for the Utilization of Leisure Time)
vi. नैतिक लक्ष्यों के लिए (for the Moral Aims)

गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों/लक्ष्यों को 'गणित सीखने के मायने' के रूप में नीचे दिये गये चार्ट द्वारा निम्न प्रकार दर्शाया गया है, जो गणित सीखने के मायनों के अन्तर्गत गणितशिक्षण की विषयवस्तु एंव इस विषय वस्तु पर काम कराते हुये गणितीय कौशलों के विकास पर जोर देता है।


गणित सीखना
विकास में मदद करना है
रूझान एंव अभिवृत्ति
(व्यवहार)
दिशा में
विषय के प्रति
स्वयं के प्रति
विषय के प्रति
कौशल जैसे
विषय वस्तु जैसे
गणितीय निरूपण
गणितीय तर्कशीलता
एप्रोक्सीमेशन
प्रश्न/समस्याएँ जानना
विज्युलाएजेशन
सम्प्रेषण एवं अभिव्यक्ति संख्याएँ
गणितीय माडलिंग
एस्टीमेशन
डाटा हैण्डलिंग
मापन
स्थानिकता की समझ
संक्रियाओं की समझ और
समस्या का समाधान करना

विशिष्ट उद्देश्य (Specific Objectives)

विशिष्ट उद्देश्य वह माध्यम होते है, जिनकी सहायता से उद्देश्यों या लक्ष्यों को प्राप्त किया जा सकता है। कोई भी व्यक्ति अपने अंतिम उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए, उस उद्देश्य से संबंधित क्रियाओं को क्रमबद्ध तरीके से लगाकर उसे पूरा करते हैं तथा विशिष्ट उद्देश्य तक पहुंचते हैं। विशिष्ट उद्दश्यों को विभिन्न प्रकार के विषयों तथा उप विषयों के लिए बनाया जाता है। विशिष्ट उद्देश्यों का संबंध शिक्षण (Teaching) से होता है जिसके आधार पर ही विद्यार्थियों की उपलब्धि (Achievement) जांची जाती है। शिक्षण से सम्बन्धित होने के कारण विशिष्ट उद्देष्यों का सम्बन्ध वांछित व्यावहारिक परिवर्तनों से होता है। उनकी प्रकृति औपचारिक होती है। अत:शिक्षक और विक्षार्थी दोनों को ही इनका अध्ययन करना चाहिए।

ब्लूम के अनुसार गणित शिक्षण के विशिष्ट उद्देश्य: सीखने के एक से अधिक प्रकार हैं। बेंज़ामिन ब्लूम (1956) के नेतृत्व में, कॉलेजों की एक समिति ने शैक्षिक गतिविधियों के तीन डोमेनों की पहचान की जो की निम्नवत है :

- **संज्ञानात्मक-** मानसिक कौशल (ज्ञान)
- **भावनात्मक-** भावनाओं या भावनात्मक क्षेत्रों में विकास (मनोवृत्ति)
- **साइकोमोटर-** मैनुअल या शारीरिक कौशल (कौशल)

i. संज्ञानात्मक- संज्ञानात्मक डोमेन (ब्लूम,1956) में ज्ञान तथा बौद्धिक कौशलों का विकास शामिल है। इसमें विशेष तथ्यों का पुनर्स्मरण या पहचान, प्रक्रियागत स्वरूप एवं परिकल्पनाएं शामिल हैं जो बौद्धिक क्षमताओं तथा कौशलों के विकास में मदद करती हैं। कुल छः मुख्य श्रेणियां हैं, जो सरलतम से आरम्भ होकर सबसे जटिल तक के क्रम में नीचे सूचीबद्ध हैं। इन श्रेणियों को कठिनाइयों की कोटियों के रूप में सोचा जा सकता है। यानि, इसके पहले कि दूसरा सीखा जाए, पहले पर महारथ हासिल करनी होगी।

a. **ज्ञान-** आंकड़े या जानकारी याद करना। सूचक शब्द: परिभाषित करता है, वर्णन करता है, पहचान करता है, जानता है, लेबल्स, सूचियां, मिलान, नाम, रूपरेखाएं, याद रखकर दोहराता है, पहचानता है, पुनरुत्पादित करता है, चुनता है, अवस्थाएं।

b. **समझ-बूझ-** अनुवाद, प्रक्षेप, एवं निर्देशों के अर्थ समझना तथा समस्याओं की व्याख्या। अपने शब्दों में समस्या का कथन।सूचक शब्द: समझता है, परिवर्तित करता है, बचाव करता है, अंतर करता है, अनुमान करता है, वर्णन करता है, सामान्यीकरण करता है,उदाहरण देता है, निष्कर्ष

निकालता है, व्याख्या करता है, सविस्तार व्याख्यान करता है, अनुवाद करता है, भविष्यवाणी करता है, पुनर्लेखन करता है, सारांश देता है, अनुवाद करता है।

c. **अनुप्रयोग-** किसी परिकल्पना का नई परिस्थिति में उपयोग या एक अमूर्त कल्पना का स्वतः उपयोग करें। कक्षा में सीखी गई बातों का कार्यस्थल पर नई स्थितियों में अनुप्रयोग होता है। सूचक शब्द: अनुप्रयोग करता है, बदलाव, गणना करता है, निर्माण करता है, प्रदर्शित करता है, खोज करता है, हेरफेर करता है, रूपांतरण करता है, भविष्यवाणी करता है, तैयार करता है, उत्पादित करता है, सम्बन्ध स्थापित करता है, दिखाता है, हल करता है, उपयोग करता है।

d. **विश्लेषण-** वस्तु या परिकल्पना को विभिन्न भागों में अलग करता है ताकि उसका संगठनात्मक ढांचा समझा जा सके। तथ्यों एवं निष्कर्षों के बीच अंतर कर सकता है।सूचक शब्द: विश्लेषण करता है, विखंडित करता है, तुलना करता है, विषमता दिखलाता है, चित्र, विनिर्माण,अंतर करता है, भेद करता है, अंतर करता है, पहचानता है, दर्शाता है, निष्कर्ष करता है, रूपरेखा बनाता है, सम्बन्ध स्थापित करता है, चुनता है, अलग-अलग करता है।

e. **संश्लेषण-** विविध तत्वों से एक ढांचा या पैटर्न बनाता है। एक नए अर्थ या ढांचे पर ज़ोर देकर हिस्सों को जोडकर सम्पूर्ण बनाता है। सूचक शब्द: श्रेणीबद्ध करता है, मिलाता है, एकत्रित करता है, तैयार करता है, बनाता है,सृजित करता है, डिज़ाइन करता है, वर्णन करता है, जनित करता है, संशोधित करता है, संगठित करता है, योजना बनाता है, पुनर्व्यवस्थित करता है, पुनर्निर्माण करता है,सम्बन्ध स्थापित करता है, पुनर्संगठित करता है, दोहराता है, पुनर्लेखन करता है, सारांशीकृत करता है, बताता है, लिखता है।

f. **मूल्यांकन-** विचारों तथा सामग्रियों के मूल्य पर निर्णय करना।सूचक शब्द: मूल्यांकन करता है, तुलना करता है, निष्कर्ष निकालता है, विषमता पहचानता है,आलोचना करता है, आलोचक, बचाव करता है, वर्णन करता है, भेद करता है, आकलन करता है, वर्णन करता है,व्याख्या करता है, औचित्य सिद्ध करता है, सम्बन्ध बनाता है, सारांशीकृत करता है, समर्थन करता है।

ii. **भावात्मक डोमेन -** भावात्मक डोमेन (क्रथ्वोल, ब्लूम, मासिआ, 1973) में वे तरीके शामिल हैं जिनका हम भावात्मक रूप से सामना करते हैं, जैसे कि भावनाएं, मूल्य, तारीफ, उत्साह, प्रेरणा एवं वृत्तियां। पांच मुख्य श्रेणियां सरलतम व्यवहार से अत्यंत जटिल के क्रम में सूचीबद्ध की गई हैं:

a. **प्राप्ति से सम्बन्धित परिघटना-** सजगता, सुनने की तत्परता, चुनिंदा ध्यान सूचक शब्द: पूछता है, चुनता है, वर्णन करता है, अनुसरण करता है,देता है, रखता है, पहचान करता है, जगह मालूम करता है, नाम बताता है, इंगित करता है, चुनता है,बैठता है, खड़ा करता है, उत्तर देता है, उपयोग करता है।

b. **परिघटना पर प्रतिक्रिया देना -** सीखने वालों की ओर से सक्रिय भागीदारी। एक विशेष परिघटना को समझकर उसपर प्रतिक्रिया देता है। सीखने के नतीज़े उत्तर देने में अचूकता पर या उत्तर देने में संतुष्टि (प्रेरकता) बल दे सकते हैं।सूचक शब्द: उत्तर, मदद करता है, सहायता करता

है, पालन करता है, सदृश बनाता है,विचार विमर्श करता है, अभिवादन करता है, सहायता करता है, लेबल, करता है, अनुशीलन करता है, प्रस्तुत करता है,

c. **मूल्यांकन-** एक विशेष वस्तु, परिघटना या व्यवहार से जुड़े एक व्यक्ति की योग्यता या मूल्य। यह आसान स्वीकृति से प्रतिबद्धता की अधिक जटिल अवस्था तक हो सकता है।मूल्यांकन विशेष मूल्यों के समुच्चय के आंतरीकरण पर आधारित हैसूचक शब्द: पूरा करता है, प्रदर्शित करता है, अंतर करता है, समझाता है, अनुसरण करता है,बनाता है, पहल, आमंत्रित करता है, जुड़ता है, औचित्य सिद्ध करता है, प्रस्तावित करता है, पढ़ता है, रिपोर्ट देता है, चुनता है, बांटता है, अध्ययन करता है, कार्य करता है।

d. **संगठन-** जब छात्रों के सम्मुख एक से अधिक मूल्य होते हैं तो प्रत्यय निर्माण के लिए इन मूल्यों को एक क्रम में व्यवस्थित कर दिया जाता है। तत्पश्चात् इन मूल्यों को आत्मसात् करके इनमें सम्बन्ध स्थापित किया जाता है। संगठन को पुनः भागों में बाँटा जा सकता है-1.आत्मयिकरण 2.व्यवस्थापन।कार्यसूचक शब्द-सहसम्बन्ध स्थापित करना, निर्णय करना, निश्चित करना, तुलना करना, बनाना, सम्बन्ध स्थापित करना, चयन करना व्यवस्था करना आदि।

e. **मूल्य समावेशित करना (चरित्रगत)-** एक मूल्य प्रणाली है जो उनके व्यवहारों को नियंत्रित करती है। यह व्यवहार व्यापक है, एक समान, अनुमान योग्य एवं सबसे महत्वपूर्ण रूप से शिक्षार्थी के लिए चरित्रगत है। सूचक शब्द: कार्य करता है, अंतर करता है, प्रभावित करता है, सुनता है, संशोधित करता है, प्रदर्शित करता है, अभ्यास करता है, प्रस्तावित करता है, योग्यता हासिल करता है, प्रश्न करता है, सुधारता है, देता है, हल करता है, पुष्टि करता है।

iii. **साइकोमोटर डोमेन -** साइकोमोटर डोमेन (सिम्पसन, 1972) में शारीरिक हलचल, समन्वय एवं मोटर-कौशल क्षेत्र शामिल हैं। इन कौशलों के विकास के लिए अभ्यास की आवश्यकता होती है। इसकी श्रेणियां निम्नवत हैं –

a. **बोध-** महसूस कर सकने वाले संकेतों का उपयोग कर मोटर गतिविधि के मार्गदर्शन करने की क्षमता। यह संकेत के चयन द्वारा इंद्रियगत उत्तेजन से लेकर अनुवाद तक होता है। सूचक शब्द: चुनता है, वर्णन करता है, पहचानता है, अंतर करता है, विभेद करता है, पहचानता है, अलग करता है, सम्बन्ध जोड़ता है, चुनता है।

b. **शीघ्रता (सेट)-** कार्य करने की तैयारी। इसमें मानसिक, शारीरिक तथा भावनात्मक समूह शामिल हैं। ये तीन समूह वे स्थितियां हैं जो विभिन्न स्थितियों के लिए एक व्यक्ति की प्रतिक्रिया पूर्वनिर्धारित करती हैं सूचक शब्द: आरम्भ करता है, प्रदर्शित करता है, समझाता है, हटाता है, आगे बढता है, प्रतिक्रिया व्यक्त करता है, दर्शाता है, कथन करता है, स्वेच्छा से करता है।

c. **मार्गदर्शित प्रतिक्रिया -** एक जटिल कौशल सीखने में आरम्भिक अवस्थाएं जिनमें अनुकृति तथा प्रयास और त्रुटि शामिल है।सूचक शब्द: नकल करता है, अनुसरण करता है, प्रतिक्रिया करना, पुनरोत्पादन करता है, प्रतिक्रिया करता है।

d. **क्रियाविधि-** यह एक जटिल कौशल सीखने की मध्यवर्ती अवस्था है। बुद्धिमत्तापूर्वक प्रतिक्रिया आदत में आ गई होती है तथा गतिविधियां कुछ विश्वास एवं दक्षता के साथ की जा सकती हैं।

e. **सूचक शब्द-** जोड़ता है, , बनाता है, खोल कर अलग करता है,प्रदर्शित करता है, जोड़ता है, लगाता है, पीसता है, गर्म करता है, मैनिपुलेट करता है, मापता है, सुधारता है, मिलाता है, संगठित करता है, चित्र बनाता है।

f. **प्रकट रूप वाली जटिल प्रतिक्रिया-** मोटर कार्यों का कुशल निष्पादन जिसमें जटिल आंदोलन पैटर्न शामिल है। प्रवीणता को एक त्वरित, और उच्च-समन्वित प्रदर्शन द्वारा दर्शाया जाता है, जिसमें ऊर्जा की न्यूनतम आवश्यकता हो। सूचक शब्द: जोड़ता है, , बनाता है, खोल कर अलग करता है, प्रदर्शित करता है, जोड़ता है, मापता है, सुधारता है, मिलाता है, संगठित करता है, चित्र बनाता है।

g. **अनुकूलन-** कौशल अच्छी तरह से विकसित हैं और व्यक्ति विशेष आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए क्रियाकलापों के पैटर्नों को संशोधित कर सकता है। सूचक शब्द:अनुकूलन करता है, बदलता है, परिवर्तन करता है, पुनर्व्यवस्थित करता है, पुनर्संगठित करता है, संशोधित करता है, बदलता है।

h. **व्युत्पत्ति-** एक विशेष स्थिति या विशिष्ट समस्या में फिट होने के आधार पर नई क्रियाकलापों का पैटर्न सृजित करना। सीखने के परिणाम उच्च विकसित कौशल आधारित रचनात्मकता पर जोर देते हों।सूचक शब्द: व्यवस्थित करता है, बनाता है, मेल करता है, जोड़ता है, निर्माण करता है, सृजित करता है, डिजाइन करता है, आरंभ करता है, बनाता है, व्युत्पत्ति करता

उद्देश्यों की प्राप्ति में गणित शिक्षक की भूमिका

गणित शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति में एक शिक्षक निम्नलिखित तरह से विद्यार्थियों को सहायता प्रदान कर सकता है।

i. शिक्षक द्वारा उपुयक्त शिक्षण विधियों का प्रयोग करना जिससे कि दिये गये ज्ञान को विद्यार्थी सरलता पूर्वक समझ सकें।

ii. विभिन्न वैज्ञानिकों के बारे में विद्यार्थियों को बताना जिससे विद्यार्थी अभिप्रेरित (Motivate) हो सके।

iii. शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों में सृजनात्मक सोंच को विकसित करना।

iv. गणित को दैनिक जीवन व व्यावहारिक जीवन से सम्बन्धित होने के बारे में विद्यार्थियें को बताना।

v. शिक्षण के समयस शिक्षक द्वारा समय-समय पर उपयुक्त शिक्षण सामग्री का प्रयोग करना। जिससे विद्यार्थियों में शिक्षण के प्रति रूचि बनी रहे।

vi. विद्यार्थियों को क्रियात्मकअनुभव प्रदान करना।

लक्ष्यों एंव विशिष्ट उद्देश्यों में अन्तर

विद्यार्थी सामान्यत: लक्ष्यों या सामान्य उद्देश्यों तथा विशिष्ट उद्देश्यों को एक समान ही समझते हैं। लेकिन इनमें कई तरह से अन्तर होता है- जो निम्न प्रकार है-

लक्ष्य (Aims)	विशिष्ट उद्देश्य (Specific objectives)
1- लक्ष्यों का क्षेत्र असीमित होता है।	1- इनका क्षेत्र सीमित होता है।
2- लक्ष्य अप्रत्यक्ष होते हैं।	2- ये प्रत्यक्ष होते है।
3- लक्ष्य अस्पष्ट होते हैं।	3- स्पष्ट होते है।
4- लक्ष्य अनिश्चित होते हैं।	4- ये निश्चित होते है।
5- इनकी अवधि दीर्घ कालीन अर्थात इन्हें लम्बी अवधि के अन्दर ही प्राप्त किया जा सकता है।	5- इनकी अवधि छोटी या अल्पकालीन होती है।
6- लक्ष्योंकी प्राप्ति के लिए विद्यालय, समाज तथा सम्पूर्ण राष्ट्र उत्तरदायी होता है।	6- इनकी प्राप्ति शिक्षक द्वारा की जाती है।
7- इनका आधार दार्शनिक होता है।	7- इनका आधार मनोवैज्ञानिक होता है।
8- ये व्यक्तिनिष्ठ होते हैं।	8- ये वस्तुनिष्ठ होते हैं।

अभ्यास प्रश्न

4. लक्ष्यों को _____उद्देश्य भी कहा जाता है।
5. _____ माध्यम है, जिनकी सहायता से लक्ष्यों को प्राप्त किया जा सकता है।
6. सम्पूर्ण शैक्षिक गतिविधियों को किन तीन भागों में विभक्त किया जा सकता है ?
7. _____वस्तु या परिकल्पना को विभिन्न भागों में अलग करता है।
8. _____का अर्थ है सीखने वालों की ओर से सक्रिय भागीदारी।

3.5 विद्यालयी शिक्षा के उद्देश्य:गणित में जिज्ञासा, रचनात्मकता सौंदर्य बोध (माध्यमिक स्तर)

मनुष्य की अन्तर्निहित पूर्णता को अभिव्यक्त करना ही शिक्षा है। ज्ञान मनुष्य में निहित है। ज्ञान मनुष्य में स्वाभाव-सिद्ध है, कोई भी ज्ञान बाहर से नहीं आता, सब अंदर ही है। हम जो कहते हैं की मनुष्य जनता है वास्तव में वह शिक्षा की मदद से आविष्कार करता है और ये अनावरण की प्रक्रिया शिक्षक द्वारा किया जाना चाहिए। छात्रों के छिपी और जन्मजात प्रतिभा को बाहर लाने के लिए शिक्षक की परिशुद्धता, सरलता और कुशलता ज़रूरी है।शिक्षा मस्तिष्क में भरी गयी जानकारी मात्र नहीं है जो की उम्र भर व्यव्हार में लायी न जा सके। शिक्षा का उद्देश्य चरित्र निर्माण, जीवन निर्माण और वास्तविक जीवन के

प्रभावित करने वाले विचारों का एकीकरण होना चाहिए। ए रेनी ने लिखा है कि ''गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य शुद्ध ज्ञान के आनन्द से छात्रों को परिचित कराना होना चाहिए ओर इस आनन्द के माध्यम से तर्कपूर्ण चिन्तन के अनुशासन में उन्हें शिक्षित किया जाना चाहिए जोकि गणित के लिए आवश्यक है।''

माध्यमिक स्तर पर शिक्षण ग्रहण करने वाले बालक किशोरवस्था के होते है। जिससे उनमें शारीरिक मानसिक तथा संवेगात्मक विकास होते है। इस अवस्था में छात्र व्यक्तियों, वस्तुओं, घटनाओं व समस्याओं के विषय में सोचने, समझने, तर्क करने, परिल्पनाओं को बनाने तथा उनहें सिद्ध करने हेतु प्रमाणों को संकलित करने, विश्लेषण तथा आकलन करने तथा तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने के योग्य हो जाते है। चूँकि इस स्तर पर गणित का अध्ययन क्षेत्र अलग रूप में प्रदर्शित होता है। इसलिए गणित विषय के प्रति छात्रों में रूचि उत्पनन करना व रूझान बढ़ाने तथा उसकी विभिन्न क्षेत्रों में उपयोगिताओं परिप्रेक्ष्य में इसकी उद्देश्यों का निर्धारण करना आवश्यक हो जाता है । गणित एक जटिल विषय माना जाता है। इसमें पारंगत होने के लिए कठिन परिश्रम तथा प्रयास की आवश्यकता होती है। जिस व्यक्ति ने गणित के ज्ञान का स्वाद चख लिया, उसके सौन्दर्य को देख लिया तो उसके अन्दर उसे पाने की अलख स्वतः जागृत हो जाती है।इसे मन को मजबूत और बुद्धि का विस्तार करने वाला होना चाहिए जिससे छात्र अगले चलकर खुद अपने पैरों पर खड़ा हो सके। इसके अलावा किसी भी विषय का ज्ञान किसी छात्र को अपने विचारों को खुल कर व्यक्त करने में मददगार होनी चाहिए और साथ साथ वह इसका असल जीवन में इस्तेमाल भी कर सकने में सक्षम बने और यही बात गणित शिक्षण पर भी लागु होती है।पृथक्करण का उपयोग रिश्तों को समझने के लिए, संरचना समझने के लिए, कारण जानने के लिए, वाद-विवाद के लिए, किसी बयान की सत्यता या असत्यता का पता लगाने के लिए किया जाना चाहिए।गणित शिक्षा, प्रथाओं और गणित के शिक्षण के तरीकों का अध्ययन है। गणित शिक्षा के निम्नलिखित लक्ष्य हैं:-

- डर के बजाय आनंद की भावना विकसित करना।
- गणित शिक्षण इस तरह होने चाहिए की इसका ज्ञान वास्तविक जीवन में इस्तेमाल किया जा सके न की फ़ार्मुलों और परिधीय प्रक्रियाएं याद रखने के मकसद से होनी चाहिए।
- शिक्षार्थी को गणित को इस रूप में देखे जिसके बारे में वो बातें कर सके, जिसके द्वारा वो सम्प्रेषित कर सके, जो मिलकर काम करने में सहायक हो और जिसका ज्ञान वो आपस में बाँट सकें।

पृथक्करण का उपयोग रिश्तों को समझने के लिए, संरचना समझने के लिए, कारण जानने के लिए, वाद-विवाद के लिए, किसी बयान की सत्यता या असत्यता का पता लगाने के लिए किया जाना चाहिए। गणित के ज्ञान का उपयोग एकाग्रता विकसित करने में,अभिव्यक्ति की शक्ति बढ़ने में, आत्मनिर्भर बनने में, खोजी रवैये को विकसित करने में, जीवनस्तर स्तर सुधारने के साथ साथ उन सभी गुणों को विकसित करने में होता है जो मनुष्य के अस्तित्व ज़रूरी है। इसलिए शिक्षा में गणित के लिए एक निश्चित स्थान है। परंतु ऐसे सर्वांगीण विकास के लिए, स्कूल स्तर पर गणित की शिक्षा बहुत प्रभावी होना चाहिए। हमारे

विद्यालयों में गणित शिक्षण का प्रमुख लक्ष्य क्या होना चाहिए के जवाब में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या 2005 तथा उसका बुनियादी दस्तावेज - गणित शिक्षण के लिए बनाया गया आधार पत्रा (पोजीशन पेपर) कुछ इस तरह से देते हैं ''बच्चों (यानी शिक्षार्थी) की सोचने यानी चिंतन प्रक्रियाओं का गणितीयकरण करना।'' इस लक्ष्य को तय करते ही यह सवाल भी उठता है कि गणितीय तौर तरीकों से सोचने या चिंतन करने में ऐसी कौन-कौनसी खासियतें हैं और उन्हें कैसे विकसित किया जा सकता है। चूंकि चिंतन या सोचने का तरीका एक प्रक्रिया है, कोई उत्पाद नहीं इसलिए उसे लिया/दिया नहीं जाता बल्कि विकसित करना पड़ता है। पोजीशन पेपर उन जरूरी गणितीय प्रक्रियाओं को हमारे सामने रखता है और इसके साथ ही गणित शिक्षण को लेकर एक समग्र नजरिया भी प्रस्तुत करता है।गणित के पोजीशन पेपर के अनुसार निम्नलिखित गणितीय प्रक्रियाओं के जरिए शिक्षार्थियों के सोचने यानी चिंतन करने के तरीके का गणितीयकरण किया जाना चाहिए।

i. औपचारिक समस्या समाधान (कुछ आम गुरों का इस्तेमाल करना, जैसेः अमूर्तन करना, मात्रा में
ii. बदलना, समरूपता (यानी एनोलॉजी) की तलाश करना, मामले का विश्लेषण करना, किसी समस्या को सरल घटकों में तोड़ना, अंदाजा-जांच करना आदि)
iii. मात्रा का अंदाज तथा हलों का करीब-करीब सही अनुमान लगाना
iv. उपयुक्ततम यानी मौजूदा सूचनाओं को बेहतरीन इस्तेमाल करके तरीकों का चयन करना
v. पैटर्न का इस्तेमाल करना व पैटर्न बनाना
vi. दृश्यीकरण तथा प्रस्तुतीकरण (अनेक तरीकों से), जैसे जोड़ को चीजों के चित्रों से तथा संख्या रेखा पर दर्शाना
vii. संबंध जोड़ना (गणित के अंदर गणितीय अवधारणाओं के बीच तथा गणित का दूसरे विषयों के साथ)
viii. व्यवस्थित तरीके से तर्क करना (अपनी दलील को विकसित करना, दलील की जांच करना, अनुमान गढ़ना व उसकी छानबीन करना, अनेक तरीकों से तर्क करने की समझ विकसित करना)
ix. गणितीय संप्रेषण (भाषा का सटीक व स्पष्ट अर्थों में इस्तेमाल करना व गणितीय विचार का, कथनों का निरूपण करना तथा इसका उल्टा)

पोजीशन पेपर यह भी कहता है कि इन सभी प्रक्रियाओं को विकसित करते वक्तस काम करने के तौर तरीकों, प्रक्रियाओं तथा हलों के एक नहीं बल्कि अनेक तरीकों पर जोर देनाचाहिए।

- गणनविधि (यानी गणना करने के कदम) का इस्तेमाल करके एक ही सही जवाब को हासिल करने के शिकंजे से गणित की गरदन छुड़ाना बहुत जरूरी है।
- गणितीय क्षमताएं सामाजिक हालातों तथा उन गतिविधियों के जरिए विकसित होती है ं जिनमें उन्हें सीखा जाता है।

- समस्याओं को हल करने का सिर्फ व सिर्फ एक तरीका सभी सीखने वालों के लिए नुकसानदेह होता है।

गणित शिक्षण के बारे में एक समग्र नजरिया प्रस्तुत करते वक्त उपरोक्त बातों को शामिल करते हुए पोजीशन पेपर इस बात की तरफ भी हमारा ध्यान दिलाता है कि गणित पर काम इस तरह से किया जाए कि बच्चे गणित में आनंद उठाएं। अध्यापक कक्षा के सिर्फ कुछ ही नहीं बल्कि हरेक बच्चे को हरेक बच्चे को हरेक बच्चे को गणित सीखने से जोड़ें। बच्चे सिर्फ कैसे करना है, इतना ही नहीं, बल्कि यह बात भी सीखें कि उसे वैसे ही क्यों करना है, कब व कैसे उस तरीके का इस्तेमाल करना है, आदि। इसके साथ ही बच्चे गणित के बुनियादी ढांचे को समझें। सबसे अहम बात यह है कि बच्चे तार्किक चिंतन करना सीखें, चीजों के बारे में तर्क करें, वक्तव्यों या कथनों के सही या गलत होने की जांच करने के तरीके तथा उनकी मदद से जांच करना सीखें।

3.6 सारांश

उद्देश्यों को आधारशिला बनकर ही शिक्षा का ढांचा तैयार किया जाता है ओर इसी ढांचे पर ही सम्पूर्ण शिक्षा प्रक्रिया निर्भर होती है। सका क्षेत्र व्यापक होता है तथा प्रकृति अप्रत्यक्ष, दीर्घ कालीन तथा व्यक्तिनिष्ठ होती है। इसके अभाव में कोइ भी कार्य सार्थक नहीं हो सकता। लक्ष्य विद्यार्थी एवं अध्यापक दोनो के लिए आदर्श होते है। इसीलिए अध्यापक गणों को शिक्षण से पूर्व एक लक्ष्य सुनिश्चित करना नितान्त आवश्यक होता है अन्यथा दिशाहीन अध्यापन या शिक्षण से छात्र एक मूकदर्शक बन कर रह जाता है गणित शिक्षण के सामन्य उद्देश्य निम्नलिखित हैं-

- विद्यार्थी को गणित संबंधी सम्प्रत्ययों एवं सिद्धान्तों का ज्ञान कराना।
- गणित के ज्ञान द्वारा विद्यार्थियों को जीवकोपार्जन हेतु सक्षम बनाना।
- विद्यार्थियों में गणित अध्ययन के प्रति रूचि उत्पन्न करना।
- विद्यार्थियों में तार्किक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में मानसिक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करना।
- विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का सर्वांगीण विकास करना।
- गणित अध्ययन के द्वारा छात्रों को एक विशिष्ट अनुशासन प्रदान करना।

लक्ष्यों को सामान्य उद्देश्य भी कहा जाता है। सामान्य उद्देश्यों को पूरी तरह से प्राप्त नहीं किया जा सकता क्यांकि ये बड़े होते हैं। उनकी प्राप्ति विद्यालयों, समाज व राष्ट्र को आधार बनकर की जाती है। ये इनके अभाव में प्राप्त नहीं किये जा सकते। लक्ष्य विद्यार्थी के आदर्श होते हैं जिनकों ध्यान में रखकर ही

विद्यार्थी अपने सही मार्ग या दिशा तक पहुचता है। इसके द्वारा कक्ष में सीखने का वातावरण उत्पन्न किया जाता है। जिसकी सहायता से अध्यसापक को अपने अध्यापन कार्य में सहायता मिलती है। जिससे वह विद्यार्थियों को सही ज्ञान प्राप्ति में सहायक सिद्ध होता है।

विशिष्ट उद्देश्य वह माध्यम होते है, जिनकी सहायता से उद्देश्यों या लक्ष्यों को प्राप्त किया जा सकता है। कोई भी व्यक्ति अपने अंतिम उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए, उस उद्देश्य से संबंधित क्रियाओं को क्रमबद्ध तरीके से लगाकर उसे पूरा करते हैं तथा विशिष्ट उद्देश्य तक पहुंचते हैं। विशिष्ट उद्दश्यों को विभिन्न प्रकार के विषयों तथा उप विषयों के लिए बनाया जाता है। विशिष्ट उद्देश्यों का संबंध शिक्षण (Teaching) से होता है जिसके आधार पर ही विद्यार्थियों की उपलब्धि (Achievement) जांची जाती है। शिक्षण से सम्बन्धित होने के कारण विशिष्ट उद्देष्यों का सम्बन्ध वांछित व्यावहारिक परिवर्तनों से होता है। उनकी प्रकृति औपचारिक होती है।

सीखने के एक से अधिक प्रकार हैं। बेंज़ामिन ब्लूम (1956) के नेतृत्व में, कॉलेजों की एक समिति ने शैक्षिक गतिविधियों के तीन डोमेनों की पहचान की जो की निम्नवत है :

- संज्ञानात्मक: मानसिक कौशल (ज्ञान)
- भावनात्मक: भावनाओं या भावनात्मक क्षेत्रों में विकास (मनोवृत्ति)
- साइकोमोटर: मैनुअल या शारीरिक कौशल (कौशल)

माध्यमिक स्तर पर शिक्षण ग्रहण करने वाले बालक किशोरवस्था के होते है। जिससे उनमें शारीरिक मानसिक तथा संवेगात्मक विकास होते है। इस अवस्था में छात्र व्यक्तियों, वस्तुओं, घटनाओं व समस्याओं के विषय में सोचने, समझने, तर्क करने, परिल्पनाओं को बनाने तथा उनहें सिद्ध करने हेतु प्रमाणों को संकलित करने, विश्लेषण तथा आकलन करने तथा तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने के योग्य हो जाते है। चूँकि इस स्तर पर गणित का अध्ययन क्षेत्र अलग रूप में प्रदर्शित होता है। इसलिए गणित विषय के प्रति छात्रों में रूचि उत्पनन करना व रूझान बढ़ाने तथा उसकी विभिन्न क्षेत्रों में उपयोगिताओं परिप्रेक्ष्य में इसकी उद्देश्यों का निर्धारण करना आवश्यक हो जाता है । गणित एक जटिल विषय माना जाता है। इसमें पारंगत होने के लिए कठिन परिश्रम तथा प्रयास की आवश्यकता होती है। जिस व्यक्ति ने गणित के ज्ञान का स्वाद चख लिया, उसके सौन्दर्य को देख लिया तो उसके अन्दर उसे पाने की अलख स्वतः जागृत हो जाती है।इसे मन को मजबूत और बुद्धि का विस्तार करने वाला होना चाहिए जिससे छात्र अगले चलकर खुद अपने पैरों पर खड़ा हो सके। इसके अलावा किसी भी विषय का ज्ञान किसी छात्र को अपने विचारों को खुल कर व्यक्त करने में मददगार होनी चाहिए और साथ साथ वह इसका असल जीवन में इस्तेमाल भी कर सकने में सक्षम बने और यही बात गणित शिक्षण पर भी लागु होती है।

3.7 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य
2. असत्य
3. गणित शिक्षण के चार सामान्य उद्देश्यों निम्नलिखित हैं -
   i. विद्यार्थी को गणित संबंधी सम्प्रत्ययों एवं सिद्धान्तों का ज्ञान कराना।
   ii. विद्यार्थियों में गणित अध्ययन के प्रति रूचि उत्पन्न करना।
   iii. विद्यार्थियों में तार्किक शक्ति का विकास करना।
   iv. विद्यार्थियों में मानसिक शक्ति का विकास करना।
4. सामान्य
5. विशिष्ट उद्देश्य
6. संज्ञानात्मक: मानसिक कौशल (ज्ञान),भावनात्मक: भावनाओं या भावनात्मक क्षेत्रों में विकास (मनोवृत्ति) और साइकोमोटर: मैनुअल या शारीरिक कौशल (कौशल)
7. विश्लेषण
8. परिघटना पर प्रतिक्रिया देना

3.8 संदर्भ ग्रंथ सूची

1. राष्ट्रीय पाठ्यचर्या 2005, रा.शै.अनु.प्र.प., 2006
2. गणित शिक्षण, राष्ट्रीय फोकस समूह का आधार पत्रा, रा. शै. अनु. प्र. प., 2006
3. गणित का पाठ्यक्रम, रा. शै. अनु. प्र. प., 2006
4. गणित में झलकती संस्कृति, गुणाकर मुले, राजकमल प्रकाशन, 2006
5. Chambers, P. (2010).Teaching Mathematics, Sage Publication, New Delhi.
6. Chapman, L.R. (1970). The Process of Learning Mathematics, New York: Pregamon Press.
7. David, A.H., Maggie, M.K., & Louann, H.L. (2007). Teaching Mathematics Meaningfully: Solutions for Reaching Struggling Learners, Canada: Amazon Books.
8. Gupta, H. N., & Shankaran, V. (Ed.), (1984). Content-Cum-Methodology of Teaching Mathematics. NCERT, New Delhi.
9. James, A. (2005). Teaching of Mathematics, New Delhi: Neelkamal Publication.

10. Kumar, S. (2009). Teaching of Mathematics, New Delhi: Anmol Publications.
11. Mangal, S.K. (1993). Teaching of Mathematics, New Delhi: Arya Book Depot.
12. Siddhu, K.S. (1990). Teaching of Mathematics, New Delhi: Sterling Publishers.
13. Suggested Readings
14. Keeley, P. K., & Cheryl, T. R. (2011). Mathematics Formative Assessment, Canada: Sage Publications.
15. National Curriculum Framework for Teacher Education. (2009). NCTE, New Delhi.

3.9 निबंधात्मक प्रश्न

1. गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य से आप क्या समझते हैं ?
2. गणित शिक्षण के लक्ष्यों एवं विशिष्ट उद्देश्यों का अर्थ बताईये।
3. ब्लूम के विशिष्ट उद्देश्यों का विश्लेषण कीजिए।
4. लक्ष्यों एवं उद्देश्यों में अंतरबताईये।
5. गणित में जिज्ञासा, रचनात्मकता एवं सौंदर्य बोध को अपने शब्दों में व्यक्त कीजिए।

इकाई 4 - गणित शिक्षण में अधिगम उद्देश्य
Learning Objectives in Mathematics Teaching

4.1 प्रस्तावना
4.2 उद्देश्य
4.3 गणित शिक्षण में अधिगम उद्देश्य
  4.3.1 गणित शिक्षण में अधिगम उद्देश्य का अर्थ
  4.3.2 गणित शिक्षण में अधिगम और वांछित व्याहारगत परिवर्तन
4.4 सुपरिभाषित अधिगम उद्देश्यों की विशेषताएं
4.5 अनुदेशात्मक उद्देश्यों का ब्लूम वर्गीकरण
4.6 गणित की विभिन्न विषय वस्तु के लिए अधिगम उद्देश्यों की पहचान एवं रचना
  4.6.1 बालक के संज्ञानात्मक विकास की दृष्टि से
  4.6.2 बालक के भावात्मक विकास की दृष्टि से
  4.6.3 बालक के क्रियात्मक विकास की दृष्टि से
4.7 सारांश
4.8 संदर्भ ग्रंथ सूची
4.9 निबंधात्मक प्रश्न

4.1 प्रस्तावना

ऐसा माना जाता है कि शिक्षा समाज की आधारशिला है। बिना शिक्षा के किसी भी समाज का विकास सम्भव नहीं है क्योंकि समाज में जैसी शिक्षा व्यवस्था होगी, उसी प्रकार के समाज का निर्माण होगा। हम जिस प्रकार के समाज का निर्माण करना चाहते हैं तो हमें उसी प्रकार के शिक्षा के उद्देश्यों का निर्धारण करना अत्यावश्यक है। शिक्षा के अपने कोई निहित उद्देश्य नहीं होते हैं। उद्देश्य केवल व्यक्तियों के होते है, जो देश और समाज का निर्माण करते हैं। अतः इस बात पर सदैव ध्यान दिया जाता है कि शिक्षा के उद्देश्य समाज के उद्देश्य के अनुकूल हों। ऐसे उद्देश्य न निर्धारित किये जायें, जो शाश्वत रूप से किसी काल्पनिक स्वर्ग में परिलक्षित हों। बल्कि व्यवहारिक रूप से उन्हें प्राप्त किया जा सके और व्यक्ति समाज और देश की आवश्यकताओं को पूरा कर सके। इसी के साथ अपने स्रोत एवं साधन का भी ध्यान रखना चाहिए। यद्यपि शिक्षा के उद्देश्यों के विभिन्न प्रयोजन होते हैं और उन्हीं प्रयोजनों के आधार पर उनका निर्माण किया जाता है। इसलिए उसके अलग-अलग स्वरूप् हैं। इन अलग-अलग स्वरूपों वाले उद्देश्यों की प्राप्ति भी अलग-

अलग विषयों के माध्यम से होती है। यदि हिन्दी से छात्रों को सैन्दर्यात्मक बोध की प्राप्ति होती है तो विज्ञान से वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है। इसी प्रकार गणित से अनेक प्रकार की गणनाओंका सृजन जो सभ्य समाज के व्यक्तियों के बौद्धिक एवं मानसिक विकास की अति आवश्यकता है, का बोध होता है। अतः सभी विषय अपने-अपने उद्देश्यों की प्राप्ति कर समाज की आवश्यकताओं को पूरा करते हैं। बिना उद्देश्यों के शिक्षक एवं छात्र दोनों ही दिशाविहीन हो सकते हैं। किसी ने कहा है कि, ''उद्देश्यों के ज्ञान के अभाव में शिक्षक उस नाविक के समाज है, जो अपने लक्ष्य या मंजिल को नहीं जानता है और छात्र दोनों ही दिशाविहीन नौका के समान है, जो लहरों के थपेड़े खाकर किसी किनारे पर जा लगेगी।'' अतः विषय के उद्देश्य अच्छे और निश्चिय हों और शिक्षक उन्हें जानता हो ।

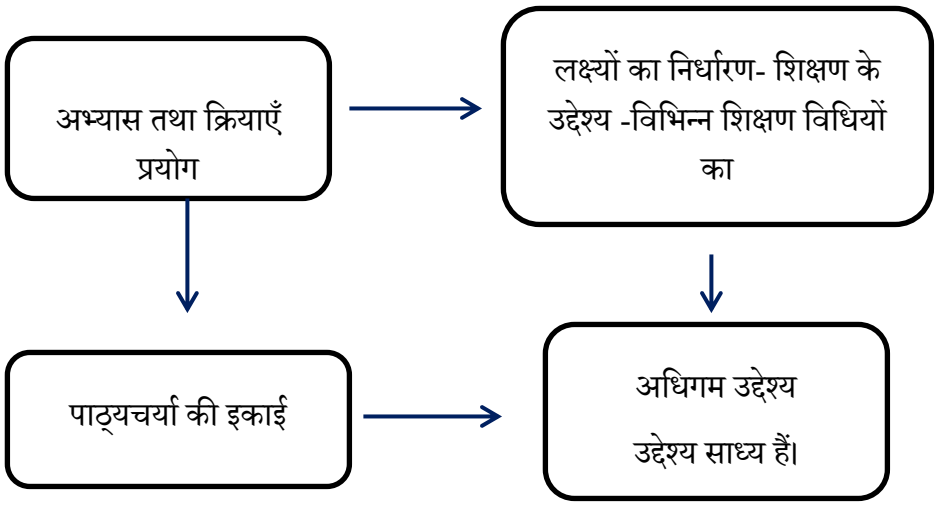
4.2 इकाई के उद्देश्य

1. अधिगम उद्देश्यों और वांछित व्यवहारगत परिवर्तनां में संबंध समझ सकेगें।
2. अधिगम उद्देश्यों की विशेषताओं से परिचित हो सकेगें।
3. व्यावहार के तीनों पक्षों संज्ञानात्मक, भावात्मक, क्रियात्मक के विभिन्न घटकों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेगें।
4. व्यवहार के तीनों पक्षों संबंधी घटकों की सीखने की उपलब्धियां एवं क्रिया पदों की जानकारी प्राप्त कर सकेगें।
5. उपरोक्त क्रिया पदो के अनुरूप गणित के विभिन्न प्रकरणों के लिए अधिगम उद्देश्यों की रचना कर सकेगें।

4.3 गणित शिक्षण में अधिगम उद्देश्य (Learning Objectives in Mathematics Teaching)

कक्षा में प्रत्येक शिक्षक द्वारा प्राप्त किये जाने वाले तात्कालिक तथ्य ही अधिगम उद्देश्य होते हैं। इन अधिगम उद्देश्यों के द्वारा छात्रों के व्यवहार में परिवर्तन होता है। उनका पूर्वानुमान लगाकर इन्हें अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तनों के रूप में व्यक्त करने की चेष्टा की जाती है। एक शिक्षाविद् ने कहा है कि, ''शिक्षण कुछ कहना न होकर अनवरत अभ्यास की प्रक्रिया है।''

अतः सतत् अभ्यास द्वारा छोटे-छोटे लक्ष्य निर्धारित किये जाते हैं, उन लक्ष्यों को अधिगम उद्देश्य कहा जाता है तथा इन उद्देश्यों के आधार पर शिक्षण के उद्देश्य निर्धारित होते है। पुनः विभिन्न शिक्षण विधियों का प्रयोग कर व्यवहारगत परिवर्तन की आशा की जाती है।



इन उद्देश्य प्राप्ति की छोटी-छोटी क्रियाएँ ही अधिगम उद्देश्य है। यह अपेक्षित, व्यवहारगत परिवर्तन तथा व्यवहारिक उपयोगिता कहलाती है। अधिगम उद्देश्य लक्ष्य की प्राप्ति के साधन हैं। इन अधिगम उद्देश्यों की परीक्षा के लिए पाठ्य वस्तु प्रश्न, व्यवहार परिवर्तन तथा आवश्यक वस्तुएँ आवश्यक होती हैं।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद (N.C.E.R.T.) ने गणित शिक्षण के अधिगम उद्देश्यों का अर्थ स्पष्ट करते हुए कहा है, ‘‘किसी उद्देश्य को जब विद्यार्थी के व्यवहार के रूप में परिभाषित किया जाता है, तब वह मापन योग्य तथा अधिगम उद्देश्य बन जाता है।‘‘

4.3.1 गणित शिक्षण में अधिगम उद्देश्य का अर्थ (Meaning of Learning in Mathematics Objectives)

स्थायी उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए विषय अध्ययन की कई छोटी-छोटी बातों को ध्यान में रखना पड़ता है अर्थात् इसके छोटे-छोटे लक्ष्य बनाने पड़ते हैं। इन्हें उस उद्देश्य के अधिगम उद्देश्य के अधिगम उद्देश्य कहते हैं, अर्थात् उद्देश्य किसी कार्य के अंतिम बिन्दु हैं, जिन्हें शिक्षण सीमित समय में प्राप्त करना चाहता है एवं जिसके लिए उसकी समस्त कार्य प्रणाली उसी ओर (अंतिम बिन्दु की ओर) निर्देशित होती रहती है। ‘उद्देश्य‘ तथा अधिगम उद्देश्य एक-दूसरे के निकटतम सम्बन्धित होते हैं। यद्यपि दोनों अलग-अलग होते है। उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए हम जो मार्ग अपनाते हैं। वह अधिगम उद्देश्य कहलाता है।

अधिगम उद्देश्य का अर्थ शिक्षण द्वारा शिक्षार्थी में उत्पन्न कर सकने योग्य वे व्यवहारगत परिवर्तन हैं, जो अपेक्षित हैं, किन्तु ये अधिगम उद्देश्य तब ही अधिक स्पष्ट होते हैं जब इन व्यवहारगत परिवर्तनों को व्यवहार के विभिन्न पक्षों-ज्ञान, अवबोध, ज्ञानोपयोग, कौशल अभिरुचि एवं अभिवृती तथा पाठ्य-वस्तु

के विशिष्ट क्षेत्र या प्रकरण के सन्दर्भ में पारिभाषित करते हैं। जैसे कक्षा 5 के लिए प्रकरण प्रतिशत के अधिगम उद्देश्य निम्नलिखित होंगे-

i. **ज्ञानात्मक (Knowledge Related) -** (ज्ञान,अवबोध, ज्ञानोपयोग) छात्र प्रतिशत का अर्थ, भिन्नों में परिवर्तन, लाभ-हानि के रूप एवं ब्याज दर के रूप आदि सम्प्रत्ययों का पुनः स्मरण, पुनप्रर्स्तुतिकरण विभेद, तुलना, दैनिक जीवन की समस्याओं में अनुप्रयोग कर सकेंगे।

ii. **भावात्मक (Continents Related) अभिरुचि एवं अभिवृत्ति -** छात्र प्रतिशत के प्रश्नों को हल करने में रुचि लेंगें। वे ब्याज, लाभ-हानि आदि व्यवहारिक समस्याओं में प्रतिशत के अनुप्रयोग की अभिवृती प्रदर्शित करेंगे।

iii. **क्रियात्मक (Action Related) -** छात्र प्रतिशत के प्रश्नों के हल करने का कौशल प्रदर्शित करेंगे।

इस प्रकार अधिगम उद्देश्य पाठ्य विषय-वस्तु के सन्दर्भ में शिक्षण द्वारा शिक्षार्थी में उत्पन्न वांछितत व्यवहारगत परिवतनों का व्यवहार के विभिन्न क्षेत्रों में स्पष्ट कथन होते हैं।

4.3.2 गणित शिक्षण में अधिगम और वांछित व्याहारगत परिवर्तनLearning and Required Behavioral Changes in mathematics teaching

प्रतिदिन पढ़ाये जाने वाले पाठों के माध्यम से हम कुछ तात्कालिक उद्देश्यों की पूर्ति करते हैं, जिन्हें हम अधिगम उद्देश्य कहते हैं। इन उद्देश्यों के अन्तर्गत यह आता है कि हम छात्रों में कौन-कौन-से तत्सम्बन्धी व्यवहार परिवर्तन लाना चाहते हैं। जिस प्रकार भिन्न एवं दशमलव का ज्ञान देकर हम यह आशा करते हैं कि जो छात्र पूर्ण संख्याओं में गणना करते थे, वे छात्र वस्तुओं और धनराशि की गणना करने में भिन्न एवं दशमलव का उपयोग कर सकते हैं। इन उद्देश्यों और उनके अन्तर्गत व्यवहारगत परिवर्तनों की जाँच करके शिक्षक उद्देश्य प्राप्ति की सफलता का अनुमान लगा सकता है। अतः इन व्यवहारों को जाँच कर सकने योग्य व्यवहार भी कहते हैं। इन उद्देश्यों की जानकारी अध्यापक को अध्यापन दिशा प्रदान करती है तथा उसे और अधिक प्रभावी बनाती है। अध्यापक अपनी विषय-वस्तु एवं शिक्षण विधि आदि के चयन में तथा पाठ बिन्दुओं के क्रम में इन सभी का ध्यान रखना है और इन्हें प्राप्त करने में सफल होता है।

4.4 सुपरिभाषित अधिगम उद्देश्यों की विशेषताएं Features of well-defined learning objectives

i. **यह विशिष्ट और परिशुद्ध (Specific and Precise) होते है** - मूल्य आधारित उद्धेश्य या सामान्य (प्राथमिक एवं माध्यमिक स्तर) उद्धेश्य इतने विशिष्ट नहीं होते जितने की यह उद्धेश्य। वे सामाजिक अपेक्षाओं के अनुरूप होते है और उसी भाषा में व्यक्त होते है जैसे उपयोगी मूल्य पर

आधारित पर उद्धेश्य छात्र को अपने व्यवसायिक जीवन में सफल बनाना है। शिक्षक उसके लिए छात्र में क्या परिवर्तन लाये इसका इसमें उल्लेख नहीं है। इसी प्रकार उच्च माध्यमिक स्तर का एक उद्देश्य छात्रों में तार्किक क्षमता का विकास करना है, परन्तु छात्रों को क्या और कैसे सिखा कर, यह स्पष्ट नहीं है। अधिगम उद्देश्य इस दुविधा को दूर करते है, जैसे-

अधिगम उद्देश्य

- छात्र त्रिभुज की परिभाषा का प्रत्यास्मरण करता है (ज्ञानात्मक)
- छात्र समबाहु त्रिभुज में अन्तर करता है (अवबोधात्मक)

त्रिभुज की परिभाषा विषय वस्तु है तथा प्रत्यास्मरण करता है कार्य-सूचक क्रिया है। दूसरे विशिष्ट उद्धेश्य में 'अन्तर करता है' कार्य-सूचक क्रिया (Action Verb) है।

ii. **यह उद्धेश्य व्यवहारगत प्रतिफल (behavioral Outcome**) के रूप में होते है, जिनमें शिक्षक मूल्यांकन के द्वारा वस्तविक उपलब्धि का परीक्षण कर सकता है। मूल्य आधारित और सामान्य उद्धेश्यों में इस प्रकार का तात्कालित मूल्यांकन सम्भव नहीं है।

iii. **यह उद्धेश्य प्राप्य (Attainable) है-** इन उद्धेश्यों को शिक्षक तात्कालिक प्रश्नों (मूल्यांकन) के माध्यम से पूरा होता हुआ देख सकता है। मूल्य आधारित उद्धेश्यों या सामान्य उद्धेश्य लम्बी अवधि के होते है (लगभग लक्ष्य की तरह होते है जिनकी प्राप्ति की अपेक्षा की जाती है, परन्तु यह प्राप्त हुए या नहीं इसका तात्कालिक वस्तुनिष्ठ मूल्यांकन सम्भव नहीं है।

उपरोक्त विशेषताओं के कारण शिक्षक अपनी शिक्षण तथा छात्रों की प्रगति का सतत् मूल्यांकन करने के लिए उन्हें अपनी पाठयोजना में स्थान देते है।

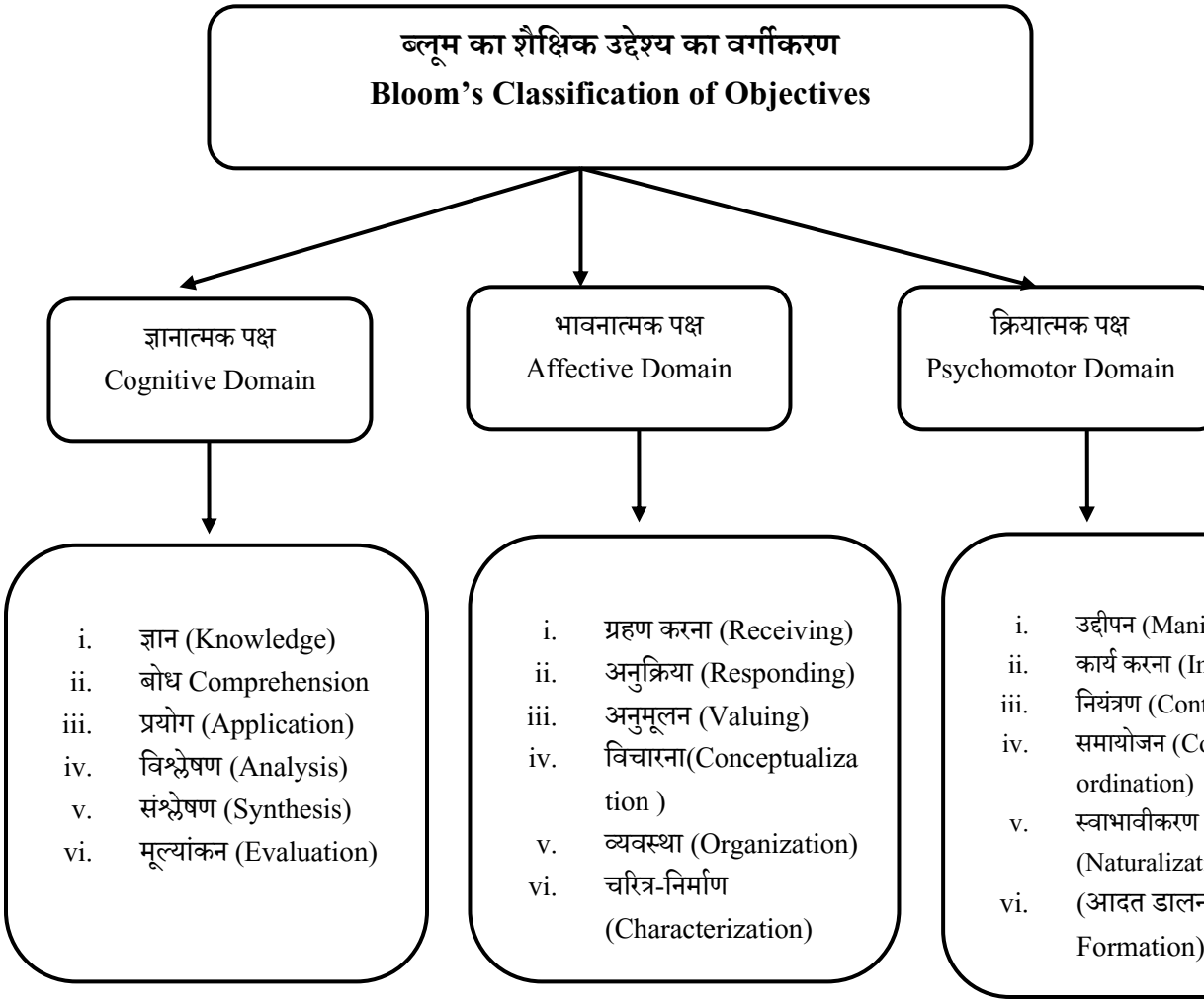
4.5 अनुदेशात्मक उद्देश्यों का ब्लूम वर्गीकरण Bloom Classification of Instructional Objectives

अंग्रेजी के Taxonomy शब्द का अर्थ होता है Classification अथवा वर्गीकरण। जब इसका प्रयोग शिक्षा के क्षेत्र में किया जाता है। तब इसका तात्पर्य 'शैक्षिक उद्देश्यों के एक व्यवस्थित क्रम(System of Classification of Education Objectives) से होता है। इस प्रकार का व्यवस्थित क्रम या वर्गीकरण शिक्षा से संबंधित प्रत्येक प्रकार के व्यक्ति के लिए उपयोगी होता है। यह (Taxonomy) निम्नांकित तीन प्रकार के सिद्धांतों पर आधारित होती है-

i. शैक्षिक सिद्धांत
ii. तार्किक सिद्धांत
iii. मनोवैज्ञानिक सिद्धांत

इस क्षेत्र में सर्वप्रथम महत्वपूर्ण कार्य बैंजामिन बी0 एम0 ब्लूम ने किया था। बाद में आर0 एफ0 मेगर (Mager), डी0 आर0 क्रैथबाल (Krathwohl) एएन0 ई0 ग्रोनलैण्ड (N.E. Gronland), तथा मैसिया

(B.B. Masia) आदि ने भी इस क्षेत्र में कार्य किया। इनमें सर्वाधिक प्रचलित ब्लूम का वर्गीकरण है। ब्लूम ने शैक्षिक उद्देश्यों को तीन प्रमुख भागों में विभाजित किया-



ब्लूम के उपर्युक्त वर्गीकरण के आधार पर अनेक लोगों ने इस क्षेत्र में कार्य किया और ब्लूम के शैक्षिक उद्देश्यों के वर्णन में संशोधन प्रस्तावित किए। इन संशोधनों में गणित के क्षेत्र में में SMSG (School Mathematics Study Group) द्वारा किया गया वर्गीकरण काफी अच्छा पाया गया है। इस वर्गीकरण में निम्नांकित वर्ग हैं-

SMSG Classification of Mathematics Objectives

i. ज्ञान (Knowing) का जानना,

ii. अनुवाद करना (Translation)
iii. कार्य करना (Manipulating)
iv. चयन करना (Choosing)
v. विश्लेषण करना (Analyzing)
vi. संश्लेषण करना (Synthesizing)
vii. मूल्यांकन करना (Evaluating)

4.6 गणित की विभिन्न विषय वस्तु के लिए अधिगम उद्देश्यों की पहचान एवं रचना (Identifying and constructing learning objectives for different content areas in mathematics)

4.6.1 बालक के संज्ञानात्मक विकास की दृष्टि से In Context of Cognitive Development of Learners

संज्ञानात्मक क्षेत्र के उद्धेश्य

जैसा उपर के चार्ट में प्रदर्शित किया गया है, संज्ञानात्मक घटक को सरल से कठिन की ओर छ: भागों में बांटा गया है : ज्ञान (पहचान, प्रत्यास्मरण) अवबोध, अनुप्रयोग, विश्लेषण और संश्लेषण एवं मूल्यांकन। यह विभाजन स्व: नहीं है, क्योकि अवबोध में ज्ञान भी शामिल है, अनुप्रयोग में ज्ञान और अवबोध दोनों शामिल तथा विश्लेषण, संश्लेषण में पहले तीन भी शामिल है। इनकी प्राप्ति का मूल्यांकन छात्रों की इन व्यवहारगत क्रियाओं से किया जा सकता है

(i) **ज्ञान सम्बन्धित उद्देश्य -** पहचान - इसमें उत्तर के विकल्प छात्र के सामने हेतु हैं जिसमें से उसे सही विकल्प चुनना होता है, उदाहरण के लिए-

किसी त्रिभुज में उसके कोणों का योग होता है

a. एक समकोण
b. दो समकोण
c. तीन समकोण
d. कोई समकोण नहीं

बाई और दी गई परिभाषाओं का दाई ओर की आकृतियों से मिलान कीजिए

तीन रेखाओं वाली बन्द आकृति	चतुर्भुज
चार रेखाओं वाली बन्द आकृति	त्रिभुज
चार से अधिक रेखाओं वाली बन्द आकृति	बहुभुज

इस प्रकार ऐसी व्यवहारगत क्रियाओं से 'पहचान' उद्धेश्य की प्राप्ति की पहचान होती है जैसे

- छात्र सही विकल्प पहचानता है, चुनाव करता है

- छात्र सही सुमेलन करता है
- सही चिन्हांकन (labeling) करता है

इस प्रकार प्रत्यास्मरण के कुछ उदाहरण इस प्रकार हो सकते है

- छात्र समलम्ब चतुर्भुज की परिभाषा देता है
- चक्रीय चतुर्भुज (cyclic quadrilateral) की विषेशताओं की सूची बनाता है (list) वर्णन करता है (describes) /कथन करता है (states) /दोहराता है (reproduce) करता है।

(ii) **अवबोध सम्बन्धी उद्धेश्य -** इसको विषय वस्तु के अर्थ को समझने के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसकी प्राप्ति की पहचान छात्र के इन व्यवहारों से हो सकती है

- छात्र विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों में अन्तर करता है
- विषय सामग्री को एक रूप से दूसरे रूप में बदल सकता है

जैसे यदि किसी लाभ में तीन साझेदारों को क्रमष 500 रू. 700 रू. 900 रू. मिलते है तो वह उनके लाभों को 5 : 7 : 9 के अनुपात में परिवर्तित कर सकता है

$2x2 – 5x +3$ को $(2x - 3) (x - 1)$ के रूप में लिख सकता है

- छात्र अपने कथन के तर्क दे सकता है (defend) कर सकता है
  $2x2- 5x + 3$, $(2x - 3) (x - 1)$ के बराबर क्यों है इसका तर्क दे सकता है
- छात्र अनुमान लगा सकता है
  3,5,7,9,11 ..... की श्रृंखला में अगली दो संख्याएं 13 और 15 होंगी
- छात्र सामान्यीकरण कर सकता है
  1. 3= 22 प्रथम दो विषम संख्याओं का जोड = 22
  1. 3. 5 = 32 प्रथम तीन विषम संख्याओं का जोड़ – 33
  1. 3. 5 7 = 42 प्रथम चार विषम संख्याओं का जोड 42
  इसलिए प्रथम 10 विषम संख्याओं का योग 102 होगा (सामान्यीकरण)
- छात्र उदाहरण दे सकता है
- जसे किसी सौदे में लाभ या हानि के उदाहरण दे सकता है
  समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression) के उदाहरण दे सकता है
- चार्ट, ग्राफ से अर्थ निर्णय कर सकता है
- उसे देख कर भविष्यात्मक झुकाव (Trend) का अनुमान लगा सकता है इत्यादि

(iii) **अनुप्रयोग सम्बन्धी उद्धेश्य -** सीखी हुई सामग्री को नवीन और मूर्त स्थितियों में प्रयोग करने की योग्यता इसका परिचायक है उदाहरण - अवधारणाओं और सिद्धान्तों को नई स्थितियों में प्रयोग करना

- आकडो की सहायता से ग्राफ चार्ट का निर्माण करना
- किसी विधि या प्रक्रिया का सही उपयोग दर्शाना

(iv) विश्लेषण या संश्लेषण सम्बन्धी उद्देश्य - विश्लेषण करने की योग्यता का परिचय व्यक्ति की किसी विषय सामग्री को उसके अंगभूत (Components) भागो में इस प्रयोजन से बांटने (Breakdown) में है कि उसके संगठनात्मक ढांचे का समझा जा सके। यह अवबोध और अनुप्रयोग से उपर बौद्धिक स्तर की क्रिया है क्योंकि इसमें सामग्री की विषय वस्तु (content) तथा उसके ढांचे (structure) दोनों को समझने की आवश्यकता होती हैं इसकी प्राप्ति की पहचान छात्रों के इन व्यवहारों से हो सकती है

- छात्र अकथित मान्यताओं (unstated assumptions) को पहचानता है
  जैसे प्रमेय, "किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण होता है" इसको सिद्ध करने के लिए "दो समकोणों" की अकथित मान्यता का यह विश्लेषण कि दो समकोण एक सीधी रेखा बनाते है, इसलिए यदि तीनों कोण मिला दिया जाये तो एक सीधी रेखा बनायेंगे
- छात्र तर्क में तार्किक दोष (fallacy) को पहचानता है

  जैसे – $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}$

  इसलिए – $\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$

परन्तु यह निष्कर्ष गलत है, क्योकि $\frac{x^2-1}{x+1}$ में x = -1 पर परिभाषित नहीं है जबकि x = 1 परिभाषित है।

छात्र विश्लेषण के माध्यम से कोई निष्कर्ष निकाल सकता है

जैसे -

9 x 2 = 18

9 x 15= 135

9 x 17=153

9 x 27= 243

विश्लेषण से पता चलता है कि सभी में गुणनफल के अंकों का योग 9 उससे पूरा कटने वाली संख्या है (1+ 8 = 9, 1+ 3 + 5 = 9, 2 + 4 + 3 = 9) इसलिए जिस संख्या में अंको का योग 9 या उसको कोई गुणनफल होगा, वह 9 से पूरी पूरी विभाजित हो जायेगी।

इसी प्रकार संश्लेषण में विभिन्न भागों का एक साथ लाकर नये सामग्री (whole) बनाने की योग्यता शामिल है।

ज्यामितिक गोरखधन्धे, गेस्टाल आकृतियां (जिसमें भागों को विभिन्न रूप से व्यवस्थित करके विभिन्न प्रकार की आकृतियां देखी जा सकती है) का हल, इस योग्यता ज्वलंत उदाहरण है।

ब्लूम का ज्ञानात्मक क्षेत्र (Cognitive Domain of Bloom)

ज्ञानात्मक क्षेत्र में ब्लूम ने उद्देश्यों को ज्ञान ,बोध, प्रयोग, विष्लेषण, संष्लेषण तथा मूल्यांकान की श्रेणियों में विभाजित किया है। इसमें ज्ञान, बोध और प्रयोग- को निम्न स्तर, विश्लेषण तथा संश्लेषण को मध्यम स्तर, तथा मूल्यांकन को उच्च स्तर पर माना गया है। ये छः उपभाग मिलकर शैक्षिक क्रिया को स्वचालित बनाते हैं। जब तक एक बार यह क्रिया शुरू हो जाती है तो इसका पूरा चक्र चलते लगता है। निम्नाकिंत सारणी के माध्यम से इस क्षेत्र का वर्णन किया जा रहा है-

ब्लूम द्वारा विकसित ज्ञानात्मक क्षेत्र का वर्णन (Cognitive Domain of Bloom)

स्तर (Level)	वर्ग (Class)	सीखने की उप्लाब्धियाँ (Learning Outcomes)	कार्य क्रियाएँ/क्रिया पद (Action Verbs)
निम्न स्तर	ज्ञान (Knowledge)	i. विशिष्ट वस्तुओं का ज्ञान ii. साधनों का ज्ञान iii. सार्वभौम वस्तुओं का ज्ञान	परिभाशा देना, कहना (States) पहचानना, चुनना,नाम बताना, लिखना, सूची बनाना, दोहराना, प्रत्यास्मरण, अभिज्ञान, मापन, मिलाना (Matching etc.)
	बोध (Comprehension)	i. अनुवाद करना ii. व्याख्या करना iii. उल्लेख या बाह्य गणना करना (Eztrapolation)	व्याख्या करना, सारांश देना, अंतर बताना, उदाहरण देना, पुन: लिखना, बदलना (Convert) औचित्य सिद्ध करना, प्रतिनिधित्व करना, अपने शब्दों में बताना।
	प्रयोग (Application)	i. नियमों व सिद्धांतों का सामान्यीकरण करना ii. निदान (Diagnose) करना iii. पाठ्य वस्तु का प्रयोग करना	चयन करना, छाँटना, पाना, प्रदर्षन करना, दिखाना, निर्माण करना, गणना करना, प्रयोग करना, रचना करना, खोजना, भविश्यवाणी करना, तैयारी करना, परिवर्तित (Changes)
		i. तत्वों का विश्लेषण करना ii. संबंधों का विश्लेषण	विश्लेषण करना, पृथ्क्कीकरण करना, आलोचना करना।

मध्यम स्तर	विश्लेषण (Analysis)	करना iii. व्यवस्थित सिद्धांतों का विश्लेषण करना	
		i. अद्भुत संप्रेषण (Unique Communication) ii. योजना बनाना iii. अमूर्त संबंध खोजना	योग करना, पुनर्व्याख्या करना, सारांष देना, पुन: लिखना, मिलाना (Combine), सृजन करना, प्रारूप तैयार करना, संकलित करना, संगठित करना, वर्णन करना।
	संश्लेषण (Synthesis)	i. आंतरिक सांक्षियों द्वारा निर्णय ii. बाह्य साक्षियों द्वारा निर्णय	अवगत करना (Appraise) , निष्कर्ष निकालना, आलोचना करना, सांराष देना, उचित ठहराना, निर्णय लेना, निर्धारण, मूल्यांकन करना।
	मूल्यांकन (Evaluation)		

भावात्मक क्षेत्र के उद्धेश्य (बालक के भावात्मक विकास कि द्रस्थी से)–

भावात्मक पक्ष रूचियों, अभिवृत्तियों, मूल्यों तथा संवेगों से संबंधित उद्देश्यों की व्याख्या करता है। ब्लूम महोदय ने इस क्षेत्र के उद्देश्यों को पाँच भागों में विभाजित किया, जिनका संक्षिप्त वर्णन निम्नाकिंत सारणी के माध्यम से किया जा रहा है-

- कक्षा शिक्षण में छात्रों के मनोयोगों/ध्यान (attention) को प्राप्त करना, बनाये रखना तथा निर्देशित रखना। इसकी पहचान छात्रों में ऐसी क्रियाओं से होती है जैसे उनका शिक्षक की बातों को ध्यान से सुनना, अधिगम के महत्व की चेतना प्रदर्शित करना, इत्यादि।
- छात्र कक्षा क्रियाओं को सक्रिय रूप से भाग लेता है, इसका अर्थ हुआ कि जो कक्षा में हो रहा है उसे केवल ध्यानपूर्वक देखता सुनता ही नहीं साथ-साथ उनके प्रति प्रतिक्रिया भी करता है, इसकी पहचान छात्र के इन व्यवहारों से होती है जैसे वह अपना गृहकार्य पूरा करके लाता है, कक्षा के वाद विवाद में भाग लेता है, विषय में रूचि प्रदर्शित करता है, दूसरों की (विषय) सहायता करने में प्रसन्नता महसूस करता है, इत्यादि।
- छात्र प्रजातान्त्रिक मूल्यों में विश्वास करता है जैसे गणित के अच्छे साहित्य की सराहना करता है, दिन प्रतिदिन के जीवन में गणित की भूमिका की सराहना करता है, गणित की प्रगति को समझने में प्रसन्नता महसूस करता है, परिकलन कुशलताओं की शक्ति को सराहना करता है, गणित को मनोरंजनात्मक मूल्य की सराहना करता है, इत्यादि।

- छात्र विभिन्न मूल्यों को एक साथ रखकर उनके बीज प्रतिद्वन्द्व (conflict) का समाधान करके एक आन्तरिक दृष्टि से सुसंगत मूल्य व्यवस्था का निर्माण शुरू करता है। इसका परिचय इस प्रकार मिलता है जैसे, वह प्रजातन्त्र में स्वतन्त्रता तथा कर्तव्यों में संतुलन को मान्यता देता है, समस्याओं के समाधान में व्यवस्थित योजना की भूमिका को स्वीकार करता, अपने स्वयं के व्यवहार की जिम्मेदारी स्वीकार करता है अपनी शक्ति और सीमाओं को समझता है अपनी योग्यताओं, रूचियों और विश्वासों में सांमजस्य बिठाते हुए अपने जीवन की योजना बनाता है।
- छात्र अपनी पूर्व मान्यताओं एवं मूल्यों के आधार पर अपनी जीवन शैली विकसित करता है, इसका आभास इन क्रियाओं से होता है जैसे स्वतंत्र रूप से कार्य करने में आत्म विश्वास का प्रदर्शन करता है। समूहिक क्रियाओं में सहयोग करता है, समस्या समाधान में वस्तुनिष्ठ दृष्टि कोण प्रयोग करता है, अध्यवसाय (Industry) नियमितता (punctuality) और आत्म अनुशासन प्रदर्शित करता है, अच्छी स्वास्थ्य आदतें रखता है, इत्यादि

4.6.3 बालक के क्रियात्मक विकास की दृष्टि से (In Context of Cognitive Development of Learners)

ब्लूम द्वारा विकसित भावात्मक उद्देश्य क्षेत्र

वर्ग	सीखने की उपलब्धियाँ	कार्य-क्रियाएँ
ग्रहण करना (Receiving)	i. क्रिया की जागरूकता (Awareness of Phenomena) ii. क्रिया प्राप्ति की इच्छा (Willingness to receive Phenomena) iii. नियन्त्रित या चयनित योजना (Controlled or selected scheme)	बताना, पहचानना, स्वीकार करना, ग्रहण करना, प्रत्यक्षीकरण करना, चयन करना, पसन्द करना, सूचना देना।
अनुक्रिया (Responding)	i. अनुक्रिया में सहमति (Acquiescence in responding) ii. अनुक्रियाओं की इच्छा (Willingness to respond) iii. अनुक्रिया में संतोष (Satisfaction in response)	उत्तर देना, विकास करना, कथन करना, आलेखन, लिखना, सूची बनाना, चयन करना, सहायता करना, प्रस्तुत करना।
अनुमूल्यन (Valuing)	i. मूल्य स्वीकारना (Acceptance of a value) ii. मूल्य की प्राथमिकता (Preference for a value) iii. वचनबद्धता (Commitment)	स्वीकार, भाग लेना, प्रभावित करना, पहचानना, वृद्धि करना, निर्णय लेना, प्रस्तावित करना, आमंत्रित करना, पूरा करना, मिलाना, भाग लेना, दिखाना।

व्यवस्था (Organization)	i. मूल्य की अवधारणा (Acceptance of a value) ii. मूल्य की प्राथमिकता (Organization of Value system)	क्रमिक रूप देना, परिवर्तन करना, संगठित करना, वर्णन करना, आदेष देना। संशोध करना, निष्चिय करना, बनाना, समायोजन करना।
मूल्य समूह का विषेशीकरण (Characterization of a value complex)	i. सामान्य समूह (Generalized set) ii. विषेशीकरण (Characteization)	कार्य करना, हल करना, दुहराना, बदलना, स्वीकारना, प्रदर्षित करना, अभ्यास करना, प्रस्तावित करना, विकसित करना।

4.6.3 मनोचालक क्षेत्र के उद्देश्य

- सही आकृतियां खींचना
- प्रयोगशाला के उपकरणों को जल्दी और सही सही जमाना
- गणित के उपकरणों को कुशलतापूर्वक प्रयोग करना- नापता कोण बनाना इत्यादि अक्सर इसमें कुछ मौखिक और अन्य कुशलताएं भी शामिल की जाती है जैसे
- अपने विचारों को स्पष्ट तथा परिशुद्ध रूप से व्यक्त करना
- आकड़ों को व्यवस्थित रूप से संगठित करना तथा उनका अर्थ निर्णय करना
- मौखिक परिकलन (calculation) की कुशलता इत्यादि

मनोचालक क्षेत्र के उद्देश्य -

- सही आकृतियां खींचना
- प्रयोगशाला के उपकरणों को जल्दी और सही सही जमाना
- गणित के उपकरणों को कुशलतापूर्वक प्रयोग करना- नापता कोण बनाना इत्यादि अक्सर इसमें कुछ मौखिक और अन्य कुशलताएं भी शामिल की जाती है जैसे
- अपने विचारों को स्पष्ट तथा परिशुद्ध रूप से व्यक्त करना
- आकड़ों को व्यवस्थित रूप से संगठित करना तथा उनका अर्थ निर्णय करना
- मौखिक परिकलन (calculation) की कुशलता इत्यादि

क्रियात्मक (मनोगत्यात्मक) उद्देश्य/क्षेत्र (Psychomotor Objectives/Domain)

क्रियात्मक (मनोगत्यात्मक) उद्देश्यों का संबंध छात्रों की शारीरिक क्रियाओं के प्रशिक्षण तथा कौशल के विकास से होता है। क्रियात्मक पक्ष के प्रमुख स्तर निम्नांकित हैं- (1) उद्दीपन, (2) कार्य करना, (3) नियंत्रण, (4) संयोजन (Coordination) (5) स्वाभावीकरण तथा (6) आदतों का निर्माण करना। E.J. Sympson के क्रियात्मक उद्देश्यों को ब्लूम की तरह पाँच स्तरों पर बाँटा है, जिनका वर्णन निम्न सारणी में किया गया है-

क्रियात्मक (मनोगत्यात्मक) उद्देश्य वर्गीकरण

वर्ग	उपलब्धियाँ	कार्य-क्रियाएँ
प्रत्यक्षीकरण (Perception)	i. वर्णनात्मक स्तर ii. संक्रमण काल की स्थिति iii. व्याख्यात्मक स्तर	निर्माण करना, चित्र बनाना
व्यवस्था/मनोस्थिति (Set)	i. मानसिक स्तर ii. शारीरिक स्तर iii. संवेगात्मक स्तर	प्रारूप तैयार करना, बनाना
निर्देषात्मक अनुक्रिया (Guided Response)	जटिल कौशल वाली क्रियोओं पर बल देना।	पहचानना, स्थापित करना।
कार्य प्रणाली/कार्य कौषल (Mechamism)	i. आत्मविश्वाश व कौशल का विकास। ii. उपर्युक्त अनुक्रियाओं में सहायक।	मरम्मत करना तथा अभ्यास करना।
जटिल प्रत्यक्ष अनुक्रिया (Complex Overt Response)	i. क्रियात्मक पक्ष का सर्वोच्च स्तर है ii. जटिल कार्य करने की क्षमता व कौषल का विकास	जोड़ना, सृजन करना, बदलना, पता लगाना।

शिक्षण उद्देश्यों को लिखना (Writing Teaching Objectives)

शिक्षण उद्देश्य पहचानने तथा निर्धारित करने के पश्चात् शिक्षक का एक महत्त्ववपूर्ण उत्तरदायित्व आता है- 'उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप' ;ठमींअपवतंस ज्मतउेद्ध में लिखने का। उद्देश्यों का व्यावहारिक रूप शिक्षण क्रियाओं को विशिष्ट रूप् में प्रस्तुत करता है।

(Behavioral Objectives are The objectives written in behavioral terms. Behavioral may be defined as visible activity. Behavioral Objectives State how a person (student) is to act, think or feel.

उद्देश्य लेखन के पद (Steps of Writing Objectives)

व्यावहारिक उद्देश्यों को लिखते समय निम्नांकित पदों का प्रयोग किया जाता हैः-

i. शिक्षण-उद्देश्य लिखना।
ii. पाठ्य-वस्तु छाँटना।
iii. छात्र दिये गये पाठ्यचर्या से किस तरह शिक्षण उद्देश्यों को प्राप्त कर सकेंगे-योजना बनाना।
iv. उपलब्धि (Performance Criteria) के आधार पर शिक्षण उद्देश्यों को पुनः लिखना। जिसमें निम्न बातें अवश्य आ जायें-
    a. छात्र से प्रत्याशित व्यवहार का विवरण।
    b. वे दशाएँ (Conditions) जिनमें यह व्यवहार अपेक्षित है।
    c. लिखे हुए व्यवहारात्मक रूप वाले उद्देश्यों को पुनः देखना (Review) तथा उनका विश्लेषण एवम् मूल्यांकन न करना।

4.7 सारांश

अधिगम उद्देश्य - ऐसे व्यवहारगत प्रतिफलों के रूप में रखा जाता है।
जिनका प्रत्यक्ष अवलोकन किया जा सकता है, मापन किया जा सकता है तथा मूल्यांकन किया जा सकता है। यह उद्देश्य ज्ञानात्मक, मनोचालक एवं भावात्मक पक्ष के हो सकते है।
अधिगम उद्धेश्यों की उपलब्धि से शिक्षण के उद्धेश्य प्राप्त होते है। गणित शिक्षण के सामान्य उद्धेश्य गणित शिक्षण के अधिगम उद्धेश्यों से प्राप्त होते है।
शिक्षक के लिए यही अधिगम उद्धेश्य उसकी पाठ योजना बनाने में सहायक होते है क्योकि वह अनुभव जन्य व्यवहारों के प्रतिफल के रूप में होते है, जिनके प्राप्ति का मूल्यांकन वह विभिन्न प्रकार की विधियों से कर सकता है।

4.8 संदर्भ ग्रंथ सूची

1. Kapoor J.N (1967); Some Aspects of school Mathematics, Arya Book Depot Nai wala, Karolbagh N. Delhi.
2. Kumar Sudhir (1997); Teaching of Mathematics Anmol Publications, Pvt Ltd. N. Delhi-2.
3. Sidhu, Kulbir Singh (1967); The Teaching of Mathematics, sterling Publishers (P) Ltd.Morigate, Delhi-6.
4. N.C.E.R.T. New Delhi (2000) "National Curriculum Framework for School Education.

5. N.C.E.R.T. New Delhi (2005) "National Curriculum Framework for School Education.
6. N.C.E.R.T. New Delhi (2005) Report of Position paper of Mathematics focus group "NCF 2005

4.9 निबंधात्मक प्रश्न

1. अधिगम उद्देश्यों का अर्थ बताइये?
2. अधिगम उद्देश्यों और व्यवहारगत परिवर्तनों में क्या संबंध होता है।
3. अधिगम उद्देश्यों की विशेषताओं का उल्लेख कीजिए।
4. स्लूम द्वारा प्रतिपादित अधिगम उद्देश्यों के वर्गीकरण का वर्णन कीजिए।
5. संरचनात्मक घटक के विभिनन अधिगम क्रियाकलाप एवं क्रिया पदों को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।
6. भावात्मक घटक के विभिन्न अधिगम उपलब्धियों एवं क्रियापदों की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।
7. क्रियात्मक घटक के विभिन्न अधिगम उपलब्धियों एवं क्रिया पदों की उदाहण सहित व्याख्या कीजिए।

इकाई 5 - विद्यार्थी को समझना : रचनावाद एवं विधेयवाद का परिप्रेक्ष्य

Understanding Learners : Behaviourist vs Constructivist vs Enactivist Perspective

5.1 प्रस्तावना
5.2 उद्देश्य
5.3 रचनावाद
5.4 संज्ञानात्मक रचनावाद : पियाजे का परिप्रेक्ष्य
5.5 संज्ञानात्मक रचनावाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण
5.6 समाज सांस्कृतिक रचनावाद: वाईगोत्सकी का परिप्रेक्ष्य
5.7 समाज सांस्कृतिक रचनावाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण
5.8 विधेयवाद
5.9 विधेयवाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण
5.10 सारांश
5.11 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची / अन्य अध्ययन
5.12 निबंधात्मक प्रश्न

5.1 प्रस्तावना

बीसवीं शताब्दी में शिक्षण- अधिगम की प्रक्रिया में बहुत सारे परिवर्तन देखे। वस्तुतः यह शताब्दी आधुनिक मनोविज्ञान एवं शिक्षण अधिगम से सम्बंधित प्रयोगों एवं मनोविज्ञान के विकास का साक्ष्य है। मनोविज्ञान में हुए प्रयोगों का शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया पर व्यापक प्रभाव पड़ा और तदनुसार हुए वैज्ञानिक विकास के कारण बीसवीं सदी में शिक्षण विधियों, पाठ्यक्रम, आदि में क्रांतिकारी परिवर्तन हुए। 1915 में वाटसन के व्यवहार वादी मैनिफेस्टो एवं व्यवहार वादियों द्वारा किये गए विभिन्न प्रयोगों ने पूरे विश्व में सम्पूर्ण शिक्षा व्यवस्था को उद्दीपक अनुक्रिया के संबंधन के रूप में परिवर्तित कर दिया और तदनुसार कक्षा कक्ष एवं शिक्षण विधियों में परिवर्तन ला दिए परन्तु बीसवीं सदी के उत्तरार्द्ध एवं विशेषकर आखिरी दो दशकों में हुए व्यापक अनुसंधानों एवं मनोविज्ञान पर संज्ञानात्मक विचारधारा के बढ़ते प्रभाव ने व्यवहारवादी विचारधारा को हाशिये पर ला खड़ा किया। संज्ञानवाद के बढ़ते प्रभाव के कारण शिक्षा के

क्षेत्र में रचनावाद का उदय जीन पियाजे के संज्ञानात्मक विकास के सिद्धांतों के फलस्वरूप हुआ जिसमे बाद में पियाजे के अलावा रूसी वैज्ञानिक लेव वाय गोत्स्की, गेने, ब्रूनर आदि मनोवैज्ञानिकों ने भी अपना महत्वपूर्ण योगदान दिया। रचनावादी विचारधारा ने शिक्षण अधिगम की नवीन व्याख्या प्रस्तुत की और नवीन शिक्षणविधियों का प्रयोग किये जाने, नवीन पाठ्यक्रम का निर्माण किये जाने का सुझाव दिया और धीरे धीरे रचनावादी शिक्षण विधियाँ अत्यंत लोक प्रिय होती गयीं। शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया में आये इस परिवर्तन ने जब सभी विषयों को प्रभावित किया तो गणित का शिक्षण शास्त्र इस से कैसे अछूता रह सकता था? इन शैक्षिक विचाधाराओं ने गणित शिक्षण के क्षेत्र में भी बड़े परिवर्तन का आरम्भ किया एवं उसे एक नयी दिशा प्रदान की। इस इकाई का उद्देश्य गणित शिक्षण के विभिन्न नवीन मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण यथा रचनावादी विचारधारा एवं विधेयवादी दृष्टिकोण से आपको परिचित कराना है ताकि आप गणित के शिक्षण शास्त्र को उसकी व्यापकता में समझ सकें।

5.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

1. शिक्षण अधिगम के रचनावादी दृष्टिकोण की चर्चा कर सकेंगे।
2. संज्ञानात्मक रचनावाद के पियाजे का परिप्रेक्ष्य का वर्णन कर सकेंगे।
3. गणित अधिगम एवं शिक्षण पर संज्ञानात्मक रचनावाद के प्रभाव की व्याख्या कर सकेंगे।
4. समाज सांस्कृतिक रचनावाद के वाईगोत्सकी के परिप्रेक्ष्य का वर्णन कर सकेंगे।
5. गणित अधिगम एवं शिक्षण पर समाज सांस्कृतिक रचनावाद के प्रभाव की व्याख्या कर सकेंगे।
6. शिक्षण अधिगम के विधेयवादी दृष्टिकोण का वर्णन कर सकेंगे।
7. गणित अधिगम एवं शिक्षण के विधेयवादी परिप्रेक्ष्य पर प्रकाश डाल सकेंगे ।

5.3 रचनावाद (Constructivism)

व्यवहारवादी विचारधारा का सम्पूर्ण शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया पर व्यापक प्रभाव पड़ा और व्यवहारवादियों द्वारा किये गए अनुसंधानों विशेषकर अधिगम से सम्बंधित उनके अनुसन्धान ने शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया को वैज्ञानिक बनाने में अपना अत्यंत महत्वपूर्ण योगदान दिया। समय के साथ आये परिवर्तनों एवं अधिगम के क्षेत्र में हुए बाद के अनुसंधानों ने यह साबित किया कि व्यवहारवादी शिक्षण व्यवस्था ने आदमी की आतंरिक सोचने समझने की प्रक्रिया की उपेक्षा करके उसे सिर्फ वातावरण के उद्दीपकों के प्रति अनुक्रिया देनेवाला एक जीव बना दिया है जबकि व्यक्ति एक सोचने समझने एवं तार्किक क्षमता से युक्त प्राणी है। व्यवहारवाद की इन कमियों ने रचनावादी दृष्टिकोण को जन्म दिया। रचनावादी विचार धारा के प्रवर्तक के रूप में सुप्रसिद्ध मनोवैज्ञानिक **जीन पियाजे (Jean Piaget)** को माना जाता है जिनके **संज्ञानात्मक विकास के सिद्धांत** ने मनोविज्ञान एवं अधिगम के प्रति व्यवहारवादी विचारधारा

को चुनौती दी और व्यवहारवादी विचारधारा से इतर मनोविज्ञान में संज्ञानवादी (Cognitive) विचारधारा की नींव रखी। वस्तुतः जीन पियाजे ने व्यवहारवादी मान्यता कि 'बालक सिर्फ वातावरण से सीखता है' की बजाय यह माना कि बालक के अधिगम में वातावरण के साथ साथ उसकी संज्ञानात्मक प्रक्रियाओं का योगदान भी है और वातावरण एवं मानसिक संरचनाओं की पारस्परिक अन्तः क्रिया बालक के अधिगम में महवपूर्ण भूमिका निभाती है। रचनावाद परिप्रेक्ष्य अधिगम की प्रक्रिया के केन्द्र में बालक को रखता है व इसके अनुसार शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया में शिक्षक की भूमिका अधिगम के सुगमकर्ता के रूप में होती है। बाद में दूसरे महत्वपूर्ण रचनावादी मनोवैज्ञानिक लेव वाईगोत्सकी (Lev Vygotsky) ने इस मान्यता को ख़ारिज किया कि बालक सिर्फ मानसिक प्रक्रियाओं एवं वातावरण की अन्तःक्रिया से सीखता है। वाइगोत्सकी ने सामाजिक रचनावाद का विचार दिया जिसके अनुसार अधिगम प्रक्रिया में अधिगमकर्ता द्वारा अन्य सहपाठियों, शिक्षकों तथा वातावरण के साथ अंतःक्रिया प्रमुख होती है। अधिगम अतःक्रियाओं पर आधारित होता है। पियाजे से अलग वाईगोत्सकी ने बताया की अधिगम हमेशा सामाजिक सांस्कृतिक वातावरण में होता है, अतः अधिगम को हमेशा सांस्कृतिक एवं सामाजिक परिप्रेक्ष्य में देखा जाना चाहिए। साथ ही उन्होंने यह भी बताया कि बालक के अधिगम में उसके समाज एवं संस्कृति की महवपूर्ण भूमिका होती है। इस प्रकार रचनावादी दृष्टिकोण दो अलग विचारधाराओं में बंट गया: पहला **ज्ञान रचनावाद (Cognitive Constructivism)** जिसके प्रसिद्ध विद्वान जीन पियाजे (Jean Piajet) , ब्रूनर (Jerome Bruner), गैने (Gagne) आदि रहे और दूसरा **सामाजिक संस्कृतिवाद (Socio-Culturist Perspective) जिसके प्रवर्तक एवं प्रबल समर्थक** वाईगोत्सकी (Lev Vygotsky) रहे।

रचनावाद के अनुसार प्रत्येक शिक्षार्थी अपने स्वयं के लिए ज्ञान का निर्माण करता है। रचनावादी परिप्रेक्ष्य के अन्तर्गत छात्र एक कोरी स्लेट (Tabula Rusa) नहीं होता है बल्कि वह अपने साथ पूर्व अनुभव लाता है, वह किसी परिस्थिति के सांस्कृतिक तत्व और पूर्व ज्ञान के आधार पर ज्ञान का निर्माण करता है। रचनावादी परिप्रेक्ष्य में विद्यार्थियों की समालोचनात्मक चिंतन व अभिप्रेरणा को विकसित कर उन्हें स्वतंत्र अधिगमकर्ता के रूप में परिवर्तित किये जाने पर जोर दिया जाता है। रचनावादी परिप्रेक्ष्य में शिक्षण युक्तियां व गतिविधियां अधिगम प्रक्रिया पर आधारित होती हैं। रचनावादी परिप्रेक्ष्य का केन्द्र है छात्र सशक्तीकरण। जैसे अभिभावक बालक के जन्म के बाद उसके स्वतंत्र जीवन यापन के लिए हर संभव आवश्यकताओं की पूर्ति करते हैं, ऐसे ही रचनावादी परिप्रेक्ष्य का उद्देश्य अधिगमकर्ता का निर्माण होता है और शिक्षक उसी के लिए प्रयासरत रहता है।

रचनावाद की प्रमुख मान्यताएं, रचनावाद के अनुसार शिक्षण, अधिगम, शिक्षक एवं विद्यार्थी

रचनावाद की प्रमुख मान्यताएं:

रचनावाद की शिक्षण अधिगम से सम्बंधित प्रमुख मान्यताएं निम्नांकित हैं:

- अधिगमकर्ता ज्ञान की रचना में अपने संवेदी अंगों को इनपुट की तरह उपयोग करता है।
- अधिगम एक सामाजिक प्रक्रिया है।
- अधिगमकर्ता जितना अधिक जानता है उतना अधिक सीखता है।
- अधिगम की प्रक्रिया समयबद्ध होती है।
- अधिगम प्रक्रिया में अधिगमकर्ता सूचनाओं को ग्रहण करता है उन पर विचार करता है, उनका उपयोग करता है व अभ्यास करता है।
- अधिगम में प्रेरणा एक आवश्यक तत्व है जिससे अधिगमकर्ता की संवेदी संरचनाएं सक्रिय रहती हैं।
- अधिगमकर्ता दूसरे अधिगमकर्ताओं व शिक्षक दोनों से सीखता है।

रचनावाद की विशेषताएं:

- रचनावाद के फलस्वरूप कई सारी शिक्षण विधियों यथा सहयोगात्मक अधिगम, परियोजना विधि, खोज विधी, सहपाठी शिक्षण आदि का विकास हुआ है जो रचनावाद के सिद्धान्तों के अनुरूप हैं।
- विद्यार्थियों को अपने अधिगम के लिए उत्तरदायित्व देना।
- विद्यार्थियों को अधिगम की तैयारी से अधिगम के मूल्यांकन तक सक्रिय रूप से सम्मिलित रखना।
- विद्यार्थियों को सामूहिक गतिविधियों क लिए अभिप्रेरित करना।
- विद्यार्थियों में जिज्ञासा को प्रोत्साहित करना व उसकी तृप्ति हेतु प्रयास कराना।

रचनावाद की सीमायें

- रचनावाद प्रत्येक अधिगमकर्ता को विशिष्ट मानता है जिसके अनुरूप उसके अधिगम अनुभवों का नियोजन होना चाहिए, परन्तु एक कक्षा में एक समय में एक से अधिक छात्र होते हैं जिनके अनुसार अधिगम अनुभवें का नियोजन वास्तविक में संभव प्रतीत नहीं होता।
- पाठ्यक्रम के विस्तार और विविधता के चलते इस परिप्रेक्ष्य के अनुसार पाठ्यक्रम समय से पूर्ण करना भी एक चुनौती है क्योंकि इस परिप्रेक्ष्य में अधिगम में समय ज्यादा लगता है।

रचनावादी शिक्षक की विशेषतायें

- एक संरचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों की स्वच्छदता एवं आरंभ करने की प्रवृत्ति को स्वीकार एवं प्रोत्साहित करता है।

- एक रचनावादी शिक्षक पाथमिक स्रोतों से प्राप्त सूचनाओं, अंत: क्रियात्मक शिक्षण सामग्रियों का प्रयोग करता है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों की अनुक्रिया के आधार पर अध्यापन, अनुदेशनात्मक युक्तियों के परिवर्तन अपने पाठ्य सामग्री में परिवर्तन करता है।
- रचनावादी शिक्षक अपनी जानकारी विद्यार्थियों से साझा करने से पहले विभिन्न संकल्पनाओं पर विद्यार्थीं की समझ को जानने का प्रयास करता है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों को शिक्षक एवं अन्य साथियों के साथ संवाद स्थापित करने के लिए प्रेरित करता है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों की जिज्ञासा को विचारोत्तेजक, मुक्त, प्रश्नों के माध्यम से एवं एक दूसरे से प्रश्न पूछने के माध्यम से प्रोत्साहित करता है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों के आरंभिक अनुक्रियाओं को आगे ले जाता है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों को उन अनुभवों के लिए प्रेरित करता है जो उनकी आरंभिक परिकल्पना के विपरीत हो सकते हैं और तब परिचर्चा को प्रोत्साहन देना है।
- रचनावादी शिक्षक विद्यार्थियों को (प्रश्न पूछने के बाद) उत्तर देने के लिए पर्याप्त समय देता हैं।
- रचनावादी शिक्षक संबंध निर्माण एवं मेटाफोर निर्माण के लिए समय देता है।
- रचनावादी शिक्षक अधिगम चक्र प्रतिमान का प्रयोग करते हुए विद्यार्थियों की प्राकृतिक जिज्ञासा को संपोषित करता है।

5.4 संज्ञानात्मक रचनावाद (Cognitive Constructivism): पियाजे का परिप्रेक्ष्य

संज्ञानात्मक रचनावाद के अनुसार अधिगम एक सक्रिय प्रक्रिया है जो प्रत्येक अधिगमकर्ता के लिए विशिष्ट होती है जिसमें अधिगमकर्ता अपने पूर्व अनुभवों व ज्ञान के आधार पर प्रत्ययों में संबंध स्थापित करे उनके अर्थों की रचना करता है। संज्ञानात्मक रचनावाद का मत है कि प्रत्येक अधिगमकर्ता ज्ञान की रचना वैयक्तिक संज्ञान के सन्दर्भ में करता है। संज्ञानात्मक रचनावाद इस मान्यता पर आधारित है कि मानव, ज्ञान एवं उसके अर्थ की रचना अनुभवों के आधार पर करता है। संज्ञानात्मक रचनावाद का मूल जीन प्याजे द्वारा किये गये अध्ययन हैं। पियाजे ने रचनावाद के संज्ञानात्मक रचनावाद का विचार रखा जिसके अनुसार ज्ञान की रचना सक्रिय रूप से अधिगमकर्ता द्वारा की जाती है। ज्ञान को निष्क्रिय रूप में बाह्य वातावरण से ग्रहण नहीं किया जाता। पियाजे के अनुसार प्रत्येक अधिगम के फलस्वरूप अधिगमकर्ता की मानसिक संरचनाओं (*स्कीमा*) का निर्माण होता है व जब नई परिस्थिति में अधिगमकर्ता

पहुंचता है तो उसके अनुसार व अपनी इन संरचनाओं में संशोधन कर परिस्थिति के साथ समायोजन स्थापित करता है। पियाजे ने अपने संज्ञानात्मक विकास के सिद्धान्त को बताया कि व्यक्ति का अधिगम सम्मिलन (Assimilation) और आत्मसातीकरण (Accommodation) की प्रक्रिया द्वारा होता है। व्यक्ति नये अनुभव को मस्तिष्क में उपस्थित पुरानी रचनाओं (Scheme) से मिलान करता है (Assimilation) और यदि यह पुरानी रचनाओं से मिलता नहीं है तब व्यक्ति एक नयी संरचना विकसित करता है और इस प्रकार विभिन्न रचनाओं का मिलान एवं निर्माण करते हुए व्यक्ति का वातावरण से मानसिक अनुकूलन (Adaptation) होता है जो उसे साम्यावस्था में बनाये रखने में मदद करता है। शैक्षिक आंदोलन यथा: पूछताछ आधारित अधिगम (Inquiry-based learning), सक्रिय अधिगम (Active learning), अनुभव आधारित (Experiential learning, अधिगम ज्ञान रचना (Knowledge Building) आदि सभी वस्तुत: संज्ञानात्मक रचनावाद से व्यत्पन्न है। रचनावाद के अनुसार शिक्षक ज्ञान के स्रोत के रूप में नहीं बल्कि ज्ञान प्राप्ति के सहयोगी की भूमिका अदा करता है।

पियाजे द्वारा दिया गया संज्ञानात्मक विकास के चरण (Stages of Cognitive development proposed by Piaget): जीन प्याजे मुख्यतः चार्ल्स डार्विन के वातावरण से जीव के अनुकूलन के सिद्धांत से प्रभावित थे जिस प्रकार डार्विन ने बताया कि जीव का शरीर धीरे धीरे वातावरण के अनुसार अपने आप को समायोजित कर लेता है ठीक उसी प्रकार पियाजे का मत था कि विभिन्न अनुभवों के साथ साथ व्यक्ति का मानसिक अनुकूलन होता है।

जीन पियाजे ने व्यक्ति के संज्ञानात्मक विकास को चार अवस्थाओं में बांटा जिनका संक्षिप्त विवरण निम्नांकित है:

आयु	**अवस्था/चरण (Stages)**	**विशेषताएं (Main characteristics)**
1. जन्म से 2 वर्ष की उम्र तक (Form birth to 2 years)	संवेदी गमक अवस्था (Sensory – motor stage)	जन्म के समय की प्रतिवर्त क्रियाएं (reflex action) प्रतीकों का उपयोग (Use of symbols) करते हुए सोचना प्रारंभ करना, संवेदी अनुभवों को संयोजित करना तथा दुनिया के बारे में एक समझ गढ़ना एवं वस्तु का स्थायित्व (Object permanence) की उपलब्धि।
2. 2 से 7 वर्ष (2 to 7 years)	पूर्व संक्रियात्मक अवस्था (Pre-operational stage)	बच्चा प्रतीकों और प्रतिमाओं (Symbols and images) का उपयोग कर अपनी दुनिया को प्रस्तुत करना प्रारंभ करता है। उसकी सोच आत्म केन्द्रित (ego centric) होती है।
5. 7 से 12 वर्ष (From 7 to 12	मूर्त संक्रियात्मक अवस्था (Concrete-operational	बच्चा मूर्त पदार्थों और घटनाओं के बारे में तार्किक ढंग स सोचना आरंभ करता है और चीजों को

years)	stage)	विभिन्न वर्गों में विभाजित (Categorization) कर सकता है। इस अवस्था में बालक में संधारण क्षमता (Conservation) का विकास भी हो जाता है।
4. 12 से ऊपर (above 12 years)	औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था (Formal operational stage)	बच्चा अमूर्त विचारों का उपयोग करने लगता है। तार्किक और व्यवस्थित रूप से विचार करने तथा मनन द्वारा चिन्तन की क्षमताएं विकसित कर लेता है।

5.5 संज्ञानात्मक रचनावाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण

जीन पियाजे के सिद्धांत का विस्तृत विवरण आप शिक्षा मनोविज्ञान में पढ़ चुके होंगे ऐसी आशा है यहाँ पर हम गणित अधिगम के सन्दर्भ में उसकी विशेष चर्चा करेंगे

पियाजे का सिद्धांत एवं गणितीय विकास के महत्वपूर्ण विन्दु:

पियाजे के सिद्धांत में वर्णित निम्नलिखित विकासात्मक विशेषताएं गणितीय विकास में सहायक होती हैं:

वस्तु स्थिरता / वस्तु स्थायित्व (Object Permanence): लगभग 8-12 माह की आयु में बालक में वस्तु स्थिरता (Object Permanence) आने लगती है वस्तु स्थिरता का तात्पर्य है बच्चे में विकसित हो रही यह समझ कि वस्तु का अस्तित्व है भले ही वह नजर के सामने हो या न हो हालाँकि पियाजे के अनुसार बच्चों में A-B खोज त्रुटी देखि जाती है जिसका सामान्य अर्थ है किसी वस्तु को जिसे पहले किसी स्थान A पर छुपा दिया गया था उसे वहां से हटा कर B स्थान पर रख दिया जाये परन्तु बालक उसे बार बार A स्थान पर ही खोजता है। संवेदी गमक अवस्था तक यह त्रुटी दूर हो जाती है और बालक में सटीक A-B खोज का विकास हो जाता है

मानसिक निरूपण (Mental Representation): जैसा कि पियाजे का मानना था, बच्चों में तार्किक क्षमता का विकास 7-8 माह में समस्या समाधान के रूप में होने लगता है उदहारण के लिए सात-आठ माह का बालक बिस्तर के दूसरे छोर पर रखे खिलौने को बिस्तर को खींच कर अपने पास लाना सीख जाता है। तदुपरांत 10-12 माह की अवस्था में तार्किक समस्या समाधान (Analogical Problem Solving) अर्थात एक समस्या समाधान के तरीके को दूसरी सामान परिस्थिति में समस्या समाधान हेतु प्रयोग करना) की क्षमता भी विकसित होनी शुरू हो जाती है। संवेदी गमक अवस्था के अंतिम चरण तक बच्चे में मानसिक निरूपण की क्षमता का विकास होने लगता है। इसका एक संकेत यह है कि १८-२४ माह की अवस्था तक आते आते बच्चा विभिन्न समस्याओं के त्वरित समाधान तक पहुँचने में सफल होने लगता है। इस अवस्था तक आते आते बच्चा प्रयास एवं त्रुटी से सीखने की बजाये मानसिक मंथन कर के कई बार समस्याओं के समाधान तक पहुँचने में सफल होने लगता है। गणितीय विकास के सन्दर्भ

में यह विकास अत्यंत महत्वपूर्ण है क्योंकि यह इस तथ्य का द्योतक है कि इस अवस्था में तार्किक क्षमता के विकास का आरम्भ हो चुका है।

संधारण के नियम की समझ (Understanding law of conservation)

पूर्व संक्रियात्मक अवस्था के बालक में संधारण के नियम (अर्थात आकृति अथवा रखने के तरीके में परिवर्तन से किसी वस्तु की संख्या / मात्रा में परिवर्तन नहीं होता) की समझ नहीं होती। यह समझ उसमे मूर्त्त संक्रियात्मक अवस्था में विकसित होना आरम्भ हो जाता है। जैसे मान लें, दो गिलास हैं - एक लंबा सिलिंडर की आकृति का और दूसरा चौड़ा। दोनों गिलासों मे समान मात्रा में द्रव भरा हो और यदि बच्चे से पूछें कि किस गिलास में द्रव अधिक या कम है तो पूर्व संक्रियात्मक अवस्था का बालक लंबी आकृति वाले गिलास में अधिक द्रव है बताएगा जबकि यहां गिलास की आकृति में परिवर्तन के बावजूद शरबत की मात्रा स्थिर है, इसकी समझ पूर्व संक्रियात्मक अवस्था में बच्चों में नहीं रहती। यह समझ मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में आते आते विकसित होने लग जाती है।

5.6 समाज सांस्कृतिक रचनावाद: वाईगोत्सकी का परिप्रेक्ष्य

लेव वाईगोत्सकी (Lev Vyogotsky)

रचनावादी विचारधारा के समाज-संस्कृतिवादी दृष्टिकोण (Socio-Culturist Approach) के महत्वपूर्ण मनोवैज्ञानिकों में लेव वाईगोत्सकी हैं जिन्होंने संज्ञानात्मक विकास को भाषा और सामाजिक एवं सांस्कृतिक अन्तःक्रिया का प्रतिफल माना है। संज्ञानात्मक विकास के सन्दर्भ में रूसी मनोवैज्ञानिक लेव वाईगोत्सकी (Lev Vygotsky) ने जीन प्याजे से अलग एक अन्य दृष्टिकोण सामने रखा जो महत्वपूर्ण है। वाईगोत्सकी का मानना था कि बालक के संज्ञानात्मक विकास में उसके समाज एवं संस्कृति की भी महत्वपूर्ण भूमिका होती है और इसी वजह से वाईगोत्सकी के सिद्धांत को समाज – सांस्कृतिक सिद्धांत (Socio-Cultural Theory) के नाम से भी जाना जाता है। हालाँकि लेव वाईगोत्सकी का यह सिद्धांत जीन प्याजे के सिद्धांत की तरह लोकप्रियता नहीं प्राप्त कर सका परन्तु शिक्षा पर बढ़ते रचनावादी प्रभाव ने वर्तमान शिक्षाविदों को लेव वाईगोत्सकी के सिद्धांत की ओर आकर्षित किया है। लेव वाईगोत्सकी के सिद्धांत के ज्यादा लोकप्रिय न हो पाने के कारणों में से एक है उनका मात्र 57 वर्ष की अवस्था में असामयिक निधन। वाईगोत्सकी के अनुसार बच्चे के पास अन्य जीवों के सामान ही मौलिक ध्यान, प्रत्यक्षण एवं स्मरण क्षमता होती है जिसका विकास प्रारंभिक दो वर्षों में वातावरण के साथ उनके सीधे संपर्क के कारण होता है। इसके बाद भाषा का तीव्र गति से विकास उनकी चिंतन प्रक्रिया पर गहरा प्रभाव डालता है। वाईगोत्सकी ने संज्ञानात्मक विकास में बच्चों की भाषा एवं चिन्तन को भी महत्वपूर्ण साधन बतलाया है। इनका मत है कि छोटे बच्चों द्वारा भाषा का उपयोग सिर्फ सामाजिक संचार के लिये ही नहीं किया जाता है बल्कि इसका उपयोग वे अपने व्यवहार को नियोजित एवं निर्देशित करने के लिए भी करते

हैं। बच्चे प्रायः आत्म नियमन के लिये भी भाषा का उपयोग करते हैं जिसे तो इसे आंतरिक सम्भाषण या निजी सम्भाषण का नाम दिया जा सकता है। यदि हम जीन प्याजे के सिद्धांत पर नजर डालें तो इस बिन्दु पर वाईगोत्सकी का मत पियाजे से भिन्न है। पियाजे के अनुसार यह निजी सम्भाषण आत्मकेन्द्रित व्यवहार (Egocentrism) है जबकि वाईगोत्सकी अनुसार यह आरम्भिक वाल्यावस्था में चिन्तन का एक महत्वपूर्ण साधन है।

समाज-संस्कृतिवादी दृष्टिकोण की मान्यताएं

समाज-संस्कृतिवादी दृष्टिकोण की मान्यताएं निम्नांकित हैं:

- बिना किसी सन्दर्भ के अधिगम संभव नहीं हो सकता अर्थात सन्दर्भगत अधिगम ही मौलिक अधिगम है।
- अधिगम में परासंज्ञान (Meta Cognition) की भूमिका महत्वपूर्ण होती है।
- अधिगम उत्पाद से ज्यादा महत्वपूर्ण अधिगम प्रक्रिया होती है अर्थात अधिगम प्रक्रिया को रुचिकर बनाकर इसे प्रभावशाली बनाया जा सकता है।
- मानव विकास के लिए सामाजिक सन्दर्भ बहुत ही आवश्यक है, इसलिए बायगोत्सकी को सामाजिक सृजनवाद का जनक भी माना जाता है।
- बच्चों द्वारा ज्ञान का सृजन किया जाता है न कि उनके द्वारा प्राप्त किया जाता है।
- किसी भी बच्चे का विकास सामाजिक परिस्थिति में ही संभव है।
- बच्चों का संज्ञानात्मक विकास सामूहिक प्रक्रिया द्वारा संभव हो पाता है।
- बच्चे सामाजिक अंतःक्रिया द्वारा ही सीखते हैं।
- विकास एक आजीवन प्रक्रिया है जो सामाजिक अंतःक्रिया पर निर्भर करता है तथा इस सामाजिक अधिगम के फलस्वरूप संज्ञानात्मक विकास संभव होता है।

रचनावादी सामाजिक संस्कृतिवाद एवं अधिगम

भाषा बच्चों को विभिन्न मानसिक क्रियाओं एवं व्यवहार एवं तदनुसार उपयुक्त कार्य विधि को सोचने में में मदद करता है, अतः वाईगोत्सकी ने भाषा को समस्त उच्च स्तरीय संज्ञानात्मक प्रक्रियाओं यथा नियंत्रित अवधान, ऐच्छिक स्मरण, योजना बनाना, समस्या समाधान एवं अमूर्त चिंतन एवं तर्क का आधार माना है। वाईगोत्सकी का मत था कि बच्चों में उत्तम परन्तु अक्रमबद्ध, असंगठित तथा स्वत: प्रवर्तित, सम्प्रत्यय होते हैं और जब ऐसे बच्चों का संवाद या वार्तालाप अधिक निपुण एवं प्रवीण सम्प्रत्यय वाले व्यक्ति से होता है तब उनके बीच के संवाद के फलस्वरूप उनका सम्प्रत्यय एक क्रमबद्ध, तार्किक एवं तर्कसंगत सम्प्रत्यय में बदल जाता है।

लेव वाईगोत्सकी के सिद्धांत का केंद्र है:संस्कृति: मूल्य,विश्वास, रीतिरिवाज एवं किसी सामाजिक समूह के कौशल कैसे उसकी अगली पीढ़ियों में स्थानांतरित होते हैं। लेव वाईगोत्सकी के अनुसार सामजिक अंतःक्रिया विशेषकर बच्चों एवं उनसे अपेक्षाकृत ज्यादा ज्ञान रखनेवाले समाज के सदस्यों के मध्य का सहयोगात्मक संवाद बच्चों के चिंतन एवं उनके संस्कृति विशेष में व्यवहार के विकास में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। वाईगोत्सकी का मानना था कि चूँकि वयस्क एवं अपेक्षाकृत अधिक ज्ञान रखनेवाले सहपाठी बच्चों को सांस्कृतिक रूप से सार्थक क्रियाकलापों पर दक्षता हासिल करने में मदद करते हैं, अतः उनका आपसी संवाद बच्चों के चिंतन का एक भाग बन जाता है। बच्चे इन संवादों की विशेषताओं को आत्मसात कर लेते हैं अतः वे भाषा का प्रयोग अपने विचारों एवं कार्यों के निर्देशन और नए कौशल सीखने में करते हैं। जीन प्याजे की तरह ही वाईगोत्सकी का यह मानना है कि बच्चे सक्रिय एवं रचनात्मक जीव हैं परन्तु पियाजे का मानना कि 'बच्चे स्वतंत्र रूप से अपने प्रयासों से संसार का अनुभव करते हैं' के विपरीत वाईगोत्सकी मानते हैं कि 'संज्ञानात्मक विकास एक समाज संपोषित प्रक्रिया है जिसमे बच्चे नए ज्ञान की प्राप्ति के लिए वयस्कों एवं अपेक्षाकृत अधिक ज्ञान वाले सहपाठियों / मित्रों की सहायता पर निर्भर रहते हैं'। वाईगोत्सकी का यह भी मानना है कि विशेषज्ञों के साथ संवाद के कारण बच्चों के संज्ञान में सतत परिवर्तन होते रहते हैं जिसमे काफी सांस्कृतिक विभिन्नताएं पाई जाती हैं।

समीपस्थ विकास का क्षेत्र (Zone of Proximal Development or ZPD) वाईगोत्सकी के अनुसार बच्चों का अधिगम उनके समीपस्थ विकास के क्षेत्र में होता है। समीपस्थ विकास का क्षेत्र वह क्षेत्र है जिसमे कोई बच्चा विभिन्न कार्यों को स्वतंत्र रूप से नहीं कर पाता परन्तु वयस्कों एवं अपेक्षाकृत अधिक कुशल सहपाठियों के सहयोग से कर सकता है। वाईगोत्सकी अनुसार संज्ञानात्मक विकास को प्रोत्साहित करने के लिए सामाजिक अंतःक्रिया में अंतर्वैयक्तिकता (Inter-subjectivity) (अर्थात दो व्यक्ति दो भिन्न समझ से कोई कार्य आरम्भ करें और आखिर में एक सहभागी समझ तक पहुंचें) का होना आवश्यक है। साथ ही सामाजिक अंतःक्रिया में ढांचा / मंच निर्माण (Scaffolding) भी होना चाहिए। ढांचा / मंच निर्माण (Scaffolding) से तात्पर्य शिक्षण के दौरान शिक्षक के द्वारा दिए जा रहे सहयोग के उपयुक्त समायोजन से है ताकि नया ज्ञान बच्चे की वर्तमान दक्षता मे समाहित हो सके। जब बच्चे को इसकी कम जानकारी होती है कि आगे क्या करना है तब उसे प्रत्यक्ष निर्देश देना, कार्य को छोटे छोटे भागों में बांटकर समझाना, कार्य करने के विभिन्न तरीके एवं उनके पीछे का तर्क बताना और बच्चा जैसे जैसे उस कार्य में दक्षता हासिल करले वैसे वैसे सहयोग को कम करते जाना और अंततः बच्चे को स्वतंत्र रूप से उस कार्य मे दक्ष बना देना ढांचा निर्माण (Scaffolding) है। आजकल ढांचा निर्माण/ मंच निर्माण की बजाय वृहत अर्थों में इस प्रक्रिया के लिए निर्देशित सहभागिता (Guided Participation) शब्द ज्यादा लोकप्रिय हो रहा है। मान लिया जाए कि एक ही आयु के दो बालक A और B पियाजे द्वारा दिये गये संरक्षण समस्याओं का समाधान स्वतंत्र रूप से नहीं कर पाते हैं, परन्तु माता पिता, शिक्षक या अन्य अपने से बड़े उम्र के बच्चों से निर्देश पाकर A तो इन समस्याओं का समाधान कर लेता है परन्तु B उसका समाधान इस प्रकार की सहायता दिए जाने पर भी नहीं कर पाता है। ऐसे में क्या Aऔर B दोनों

एक ही संज्ञानात्मक स्तर पर हैं? पियाजे का उत्तर होगा हाँ जबकि वाईगोत्सकी का उत्तर होगा नहीं क्योंकि दोनों के 'समीपस्थ विकास का क्षेत्र' अर्थात बच्चे स्वतंत्र रूप से क्या कर सकते हैं तथा व्यस्कों से सहायता प्राप्त करके वे क्या और कर सकते है, में अंतर है।

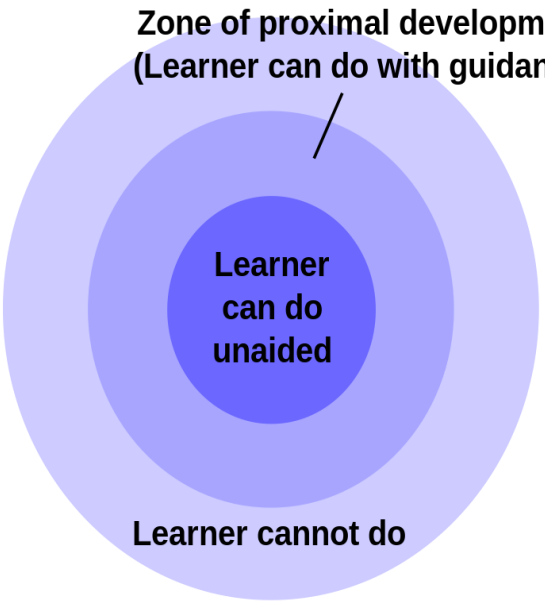
5.7 समाज सांस्कृतिक रचनावाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण

वाईगोत्सकी का सिद्धांत एवं गणित अधिगम:

वाईगोत्सकी के सिद्धांत की दोनों महत्वपूर्ण संकल्पनाएँ गणित शिक्षण एवं अधिगम के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण हैं:

ढांचा निर्माण (Scaffolding): जैसा कि ऊपर चर्चा की जा चुकी है ढांचा / मंच निर्माण (Scaffolding) से तात्पर्य शिक्षण के दौरान शिक्षक के द्वारा दिए जा रहे सहयोग के उपयुक्त समायोजन से है ताकि नया ज्ञान बच्चे की वर्तमान दक्षता मे समाहित हो सके। जब बच्चे को इसकी कम जानकारी होती है कि आगे क्या करना है तब उसे प्रत्यक्ष निर्देश देना, कार्य को छोटे छोटे भागों में बांटकर समझाना, कार्य करने के विभिन्न तरीके एवं उनके पीछे का तर्क बताना और बच्चा जैसे जैसे उस कार्य में दक्षता हासिल करले वैसे वैसे सहयोग को कम करते जाना और अंततः बच्चे को स्वतंत्र रूप से उस कार्य मे दक्ष बना देना ढांचा निर्माण (Scaffolding) है। अगर देखा जाये तो गणित शिक्षण वस्तुतः सर्वाधिक ढांचा निर्माण (Scaffolding) पर आधारित है विभिन्न गणितीय समस्याओं के समाधान के दौरान अक्सर एक शिक्षक को ढांचा निर्माण (Scaffolding) की सहायता लेनी पड़ती है।

समीपस्थ विकास का क्षेत्र (Zone of Proximal Development or ZPD) जैसा कि ऊपर वर्णित है वाईगोत्सकी के अनुसार बच्चों का अधिगम उनके समीपस्थ विकास के क्षेत्र में होता है। समीपस्थ विकास का क्षेत्र वह क्षेत्र है जिसमे कोई बच्चा विभिन्न कार्यों को स्वतंत्र रूप से नहीं कर पाता परन्तु वयस्कों एवं अपेक्षाकृत अधिक कुशल सहपाठियों के सहयोग से कर सकता है। यह संकल्पना एक गणित शिक्षक के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है क्योंकि गणित शिक्षक को हमेशा बच्चों को गणितीय समस्या समाधान में बच्चों की इस प्रकार सहायता करनी होती है कि वह समीपस्थ विकास का क्षेत्र से स्वतंत्र कार्य तक पहुँच सके जैसा कि आप दिए गए चित्र में देख पा रहे हैं, समीपस्थ विअक्स का क्षेत्र वस्तुतः बच्चे की क्षमता का द्योतक है कि वह किस सीमा तक दिए गए कार्य को कर सकता है और एक गणित शिक्षक के लिए यह जानना आवश्यक है कि बालक में आगे क्या सम्भावनाये है ताकि उसके अनुसार शिक्षण की योजना बनायीं जा सके।



5.8 विधेयवाद (Enactivism)

विधेयवाद (Enactivism) - विधेयवाद अपेक्षाकृत नवीन उपागम है जिसके अनुसार बालक / व्यक्ति / जीव एक सजीव / कार्यशील तंत्र है जो अंतहीन रूप से अपना निर्माण करता है। (Enactivism describes living as systems that produce themselves endlessly (Reid 1995). विधेयवाद के बारे में यह जानना दिलचस्प है कि यह व्यवहारवाद एवं संज्ञान वाद का एक मिश्रित दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है जहाँ व्यवहार वाद ने मानव अधिगम को सिर्फ वातावरण के साथ व्यक्ति की अंतःक्रिया का परिणाम माना है वही संज्ञान वादियों ने इसे व्यक्ति के संज्ञानात्मक अनुभवों का प्रतिफल माना है। विधेयवाद वातावरण एवं संज्ञान को अविभाज्य मानते हुए संज्ञान में वातावरण को सन्निहित मानता है तथा यह बताता है कि अधिगम व्यक्ति एवं वातावरण की सक्रिय अन्तः क्रिया का परिणाम है। रचनावादियों ने जहाँ संज्ञानात्मक तंत्र को सूचनाओं का प्रोसेसर माना है वहीँ विधेयवाद उसे सूचनाओं का प्रोसेसर नहीं बल्कि सूचनाओं का निर्माता (Producer of Information) माना है, यह एक बड़ा अंतर है दोनों विचारधाराओं में। वस्तुतः विधेयवाद की मान्यताके अनुसार वास्तविकता एवं मस्तिष्क एक दुसरे से अविभाज्य हैं अतः उन्हें अलग करके नहीं देखा जा सकता। फलतः अधिगम सिर्फ कक्षा कक्ष की परिस्थितियों में संभव नहीं है जहाँ एक और रचनाव्वाद की मान्यता है कि मानसिक विचार शारीरिक कर्योंसेअलग है जबकि विधेय वाद इन्हें एक दुसरे में समाहित माना है। रचनावाद ज्ञान को कोई बाह्य वस्तु मानता है जिसे ग्रहण किया जाता है वहीँ विधेयवाद का मानना है ज्ञान प्रत्येक व्यक्ति में अन्तर्निहित है। वस्तुतः विधेयवाद जन्तुविज्ञान, मनोविज्ञान एवं शिक्षा पर आधारित एक व्यापक दृष्टिकोण है विधेयवाद के अनुसार संज्ञान, व्यक्ति में सन्निहित जैविक, संस्कृति एवं मनोवैज्ञानिक कार्यात्मक क्षमता है।

जैसा कि इसके प्रवर्तक मतुराना एवं वारेला कहती हैं सजीव तंत्र केवल निरिक्षण योग्य वस्तु अथवा अंतःक्रियात्मक तंत्र नहीं है बल्कि वह अपने आप में समाहित स्वायत्त, आत्म सन्दर्भ पूर्ण एवं आत्म निर्माण क्षमता युक्त एक बंद तंत्र है"।(Living systems are not simply observation objects or interacting systems, but rather autonomous, self-contained, self- referencing and self-constructing closed systems).(Maturana & Varela 1980)

विधेयवाद की प्रमुख मान्यताएं

विधेयवाद की प्रमुख मान्यताएं निम्नाकित हैं:

- **बालक एक सजीव आत्म निर्माण (Autopoietic) तंत्र है।** (आत्म निर्माण शब्द जीव विज्ञान में प्रयुक्त होने वाला एक प्रमुख शब्द है जिसका तात्पर्य उस किसी सजीव तंत्र की उस विशेषता से है जिसके द्वारा वह सजीव तंत्र आत्म निर्माण एवम आत्म नियमन के द्वारा अपना अस्तित्व बनाये रखता है) (*Autopoiesis* is the property of a living system such as a bacterial cell or a multicellular organism) that allows it to maintain and renew itself by regulating its composition and conserving its boundaries)
- व्यक्ति की विभिन्न क्रियाएं अधिगम / समझ का परिणाम नहीं हैं बल्कि वे स्वयं ही समझ/ अधिगम हैं
- चिन्तन एवं संज्ञान विभिन्न शारीरिक क्रियओं मे संनिहित है
- आत्मनिष्ठता एवं वस्तुनिष्ठता एक दूसरे के विपरीत नहीं बल्कि पूरक हैं
- संज्ञान व्यक्ति की सम्पूर्णता में सन्निहित है
- जटिल संज्ञानात्मक प्रक्रियाएं सामान्य उप तंत्रों द्वारा संपन्न होती हैं
- संज्ञान को व्यक्ति से अलग करके नहीं देखा जा सकता है

5.9 विधेयवाद एवं गणित अधिगम एवं शिक्षण

विधेयवाद एवं गणित शिक्षण अधिगम (Enactivism & Teaching and Learning of Mathematics)

विधेयवाद एवं गणित शिक्षण एवं अधिगम: विधेयवाद गणित शिक्षण एवं अधिगम के लिए अत्यंत महवपूर्ण है क्योकि गणित एक ऐसा विषय है जिसमे संज्ञान के साथ साथ व्यक्ति की कार्यात्मकता भी आवश्यक है। साथ ही गणित एक ऐसा विषय है जिससे सम्बंधित विचार सिर्फ वातावरण से नहीं बल्कि अंतर्ज्ञान से भी उत्पन होते हैं। वस्तुतः प्रथम दृष्टया विधेयवाद (Enactivism) शिक्षण अधिगम का एक व्यापक सन्दर्भ प्रदान करता है। गणित एवं गणित का ज्ञान सिर्फ एक संज्ञानात्मक क्रिया नहीं है बल्कि यह

सम्पूर्ण जीवन से जुडी क्रिया है अतः यदि इसे जीवन की सम्पूर्णता में ही देखा जाना समीचीन है एक अलग संज्ञानात्मक प्रक्रिया के रूप में नहीं।

इसे समझने के लिए इसे निम्नांकित सन्दर्भ में देखा जा सकता है:

Enactivism= Constructivism + Embodied Cognition

हालाँकि विधेयवाद एक नवीन विचारधारा है और इसपर अभी और अनुसन्धान की आवश्यकता है।

5.10 सारांश

रचनावादी विचार धारा के प्रवर्तक के रूप में सुप्रसिद्ध मनोवैज्ञानिक जीन पियाजे (Jean Piaget) को माना जाता है। पियाजे ने माना कि बालक के अधिगम में वातावरण के साथ साथ उसकी संज्ञानात्मक प्रक्रियाओं का योगदान भी है और वातावरण एवं मानसिक संरचनाओं की पारस्परिक अन्तः क्रिया बालक के अधिगम में महवपूर्ण भूमिका निभाती है बाद में रचनावादी दृष्टिकोण दो अलग विचारधाराओं में बंट गया: पहला ज्ञान रचनावाद (Cognitive Constructivism) जिसके प्रसिद्ध विद्वान जीन पियाजे (Jean Piaget) , ब्रूनर (Jerome Bruner), गैने (Gagne) आदि रहे और दूसरा सामाजिक संस्कृतिवाद (Socio-Culturist Perspective) जिसके प्रवर्तक एवं प्रबल समर्थक वाईगोत्सकी (Lev Vygotsky) रहे। रचनावादियों के अनुसार शिक्षा का तात्पर्य बालक का सर्वांगीण विकास (बौद्धिक, शारीरिक, सामाजिक-भावनात्मक आदि) है, अतः आकलन का भी उद्देश्य सर्वांगींण विकास को आकलन करने वाला होना चाहिए। संज्ञानात्मक रचनावाद के अनुसार आकलन का उद्देश्य वर्ष के अंत में विद्यार्थी ने अन्य विद्यार्थी की तुलना में कितना सीखा की बजाये विद्यार्थी की अधिगम समस्याओं को जानना एवं तदनुसार नैदानिक शिक्षण प्रदान करना है। सामाजिक संस्कृतिवाद समस्त अधिगम को सामाजिक एवं सांस्कृतिक परिप्रेक्ष्य में देखता है अतः आकलन को भी विद्यार्थी के सामाजिक एवं सांस्कृतिक परिप्रेक्ष्य में देखा जाना चाहिए।विधेयवाद अपेक्षाकृत नवीन उपागम है जिसके अनुसार बालक / व्यक्ति / जीव एक सजीव / कार्यशील तंत्र है जो अंतहीन रूप से अपना निर्माण करता है।विधेयवाद वातावरण एवं संज्ञान को अविभाज्य मानते हुए संज्ञान में वातावरण को सन्निहित मानता है तथा यह बताता है कि अधिगम व्यक्ति एवं वातावरण की सक्रिय अन्तः क्रिया का परिणाम है। रचनावादियों ने जहाँ संज्ञानात्मक तंत्र को सूचनाओं का प्रोसेसर माना है वहीँ विधेयवाद उसे सूचनाओं का प्रोसेसर नहीं बल्कि सूचनाओं का निर्माता (Producer of Information) माना है। वस्तुतः विधेयवाद की मान्यताके अनुसार वास्तविकता एवं मस्तिष्क एक दुसरे से अविभाज्य हैं अतः उन्हें अलग करके नहीं देखा जा सकता। फलतः अधिगम सिर्फ कक्षा कक्ष की परिस्थितियों में संभव नहीं है। हालाँकि विधेयवाद एक नवीन विचारधारा है और इसपर अभी और अनुसन्धान की आवश्यकता है।

5.11 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची / अन्य अध्ययन

1. Mangal S.K. (2009) Advanced Educational Psychology, PHI, India
2. Mangal S.K. (2014) Educational Technology, PHI, India
3. NCERT (2005) Constructivist Approach of Teaching,
4. Singh A.K. (2007) General Psychology
5. https://froese.files.wordpress.com/2014/04/froese-14-radicalizing-enactivism-basic-minds-without-content.pdf
6. http://www.embodiment.org.uk/topics/enactivism.htm
7. http://www.acadiau.ca/~dreid/enactivism/EnactivismMathEd.html
8. http://www.eucognition.org/index.php?page=embodied-dynamicism-and-enactivism
9. http://etec.ctlt.ubc.ca/510wiki/Enactivist_Theory

5.12 निबंधात्मक प्रश्न

1. शिक्षण अधिगम एवं आकलन के प्रति व्यवहार वादी दृष्टिकोण का वर्णन करें।
2. शिक्षण अधिगम एवं आकलन के प्रति रचनावादी दृष्टिकोण का वर्णन करें।
3. संज्ञानात्मक रचनावाद पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।
4. वायगोत्सकी के समाज-सांस्कृतिक सिद्धांत का वर्णन करें ।
5. सामाजिक संस्कृतिवाद की प्रमुख मान्यताओं एवं शिक्षण अधिगम के प्रति उसका दृष्टिकोण स्पष्ट करें।
6. विधेयवाद एवं उसकी प्रमुख मान्यताओं का वर्णन करें ।
7. निकटतम विकास क्षेत्र की संकल्पना को स्पष्ट करें ।

खण्ड 2

Block 2

इकाई 1- विद्यालयी गणित पाठ्यचर्या

School Mathematics Curriculum

1.1 प्रस्तावना
1.2 उद्देश्य
1.3 गणित पाठ्यचर्या का संप्रत्यय
1.4 गणित पाठ्यचर्या निर्माण के उद्देश्य
1.5 गणित पाठ्यचर्या निर्माण के सिद्धांत
1.6 विद्यालयी गणित की दृष्टि या महत्व
1.7 विभिन्न विद्यालयी अवस्थाओं के लिए गणित शिक्षा के पाठ्यचर्या विकल्प
1.8 विद्यालयी गणित पाठ्यचर्या के महत्वपूर्ण पक्ष
1.9 विभिन्न स्कूली अवस्थाओं के लिए गणित के विभिन्न प्रकरणों का शैक्षणिक विश्लेषण
1.10 सारांश
1.11 संदर्भ ग्रंथ सूची
1.12 निबंधात्मक प्रश्न

1.1 प्रस्तावना

गणित एक महत्वपूर्ण विषय है। गणिक का शिक्षण प्राथमिक कक्षा से ही अनिवार्य हो गया है। अतः गणित का पाठ्यचर्या में महत्वपूर्ण स्थान है। प्रत्येक छात्र सैकेण्डरी स्तर तक गणित की व्यावहारिकता को समझता है और जैसे ही छात्र व्यवहारिक जीवन में प्रवेश करता है, उसे अपनी रोजी रोटी या जीविकोपार्जन के लिए दुकानों, कार्यालयों तथा बैंकों आदि में अपनी सेवाएं प्रदान करनी पड़ती है। इसके साथ-ही साथ अपनी व्यक्तिगत समस्याओं को भी हल करना पड़ता है। उपरोक्त संस्थानों में वह लाभ-हानि तत्काल धन एवं मितीकाटा आदि के बारे में जानकारी करके उसे प्रयोग में लाता है। गणित का शिक्षणकरके उन्हें मानसिक प्रशिक्षण प्राप्त होता है तथा भविष्य में कार्य करने के लिए पर्याप्त जानकारी या उन्हें अपना उचित व्यवयाय चुनने के लिए आवश्यक जानकारी प्राप्त होती है। इस प्रकार अपना उचित व्यवसाय चुनने के लिए आवश्यक जानाकरी प्राप्त होती है। इस प्रकार का व्यवसायिक निर्देशन सेकेण्डरी स्तर पर ही प्रारंभ हो जाता है। अन्य विषय भी इसके आधार पर मानव के लिए उपयोगी हो सकते है

अन्यथा निरर्थक सि) होते है। छोटे मजदूर या कर्मचारी से लेकर बड़े अधिकारी तक तथा अपने घर से लेकर बड़े भवन तक के निर्माण के कार्य में गणित की जानकारी अत्यन्त आवश्यक होती है।

प्रस्तुत अध्याय पाठ्यचर्या निर्माण के इसी पक्ष पर प्रकाश डाल रहा है।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन करने के पश्चात आप

1. पाठ्यचर्या का अर्थ जान सकेंगे।
2. पाठ्यचर्या एवं पाठ्यवस्तु में अन्तर कर सकेंगे।
3. पाठ्यचर्या निर्माण के उद्देश्यों की जानकारी हो सकेगी।
4. पाठ्यचर्या निर्माण के सिद्धान्तों के की जानकारी हो सकेगी।
5. विभिन्न स्कूली अवस्थाओं के लिए पाठ्यचर्या विकल्पों को समझ सकेगें।
6. विद्यालयी गणित पाठ्यचर्या के विभिन्न पक्षों को समझ सकेगें।

अधिगम उद्देश्यों का अर्थ जान सकेगें

1. 3 गणित पाठ्यचर्या का संप्रत्यय (Concept of Mathematics Curriculum)

क्यूरी क्यूलम (Curriculum) शब्द एक लैटिन शब्द हैए जिसका अर्थ है "दौडने का मैदान।" शिक्षा के क्षेत्र में उसका तात्पर्य विद्यार्थी के दौड के मैदान से है। इसके अनुसार गणित पाठ्यचर्या गणित के छात्रध्छात्रा का दौडने का मैदान। गणित शिक्षण उन उद्देश्यों को प्राप्त करने की योजना ब) विधि है जो गणित द्वारा शिक्षा के निर्धारित लक्ष्य की प्राप्ति में सहायक हो। इस योजना को ही हम पाठ्यचर्चा की संज्ञा दे सकते है।

पाठ्यचर्या एक व्यापक शब्द है जिसमें विषय के उद्देश्यए विषय वस्तु तथा उससे सम्बन्धित पाठशाला में होने वाले समस्त क्रियाकलाप शामिल होते है। इस प्रकार कक्षा के अन्दर और बाहर होने वाले समस्त क्रियाकलाप जो गणित शिक्षण के उद्देश्यों को प्राप्त करने की दिशा में किये जाते हैए उसकी पाठ्यचर्या का भाग है।

कनिंघम (Cunningham) के अनुसार "पाठ्यचर्या कलाकार (अध्यापक) के हाथ में वह साधन है जिससे वह पदार्थ (विद्यार्थी) को अपने आदर्श (उद्देश्य) के अनुसार अपने स्टूडियो (स्कूल) में ढाल सके।"

1.4 गणित पाठ्यचर्या निर्माण के उद्देश्य

पी0 सैमुअल के अनुसार (Samuel) "पाठ्यचर्या में विद्यार्थी के सभी सीखने के (learning Experience) अनुभव निहित होते है जो वह अपने कक्षा। कक्ष में खेल के मैदान में और अपने शिक्षकों एवं सहपाठियों से विचार विमर्श के आदान प्रदान द्वारा प्राप्त करता है।श्श्

गणित के पाठ्यचर्या में गणित से सम्बन्धित सभी प्रकार के वह अध्ययन और अनुभव शामिल होते है जो शिक्षा के विस्तृत पाठ्यचर्या का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है तथा शिक्षा के उद्देश्यों की प्राप्ति में सहायक होता है। इसके दो प्रमुख पक्ष (Aspect) है।

I. पाठयक्रम की विषय वस्तु और वे क्रियाये जो गणित के माध्यम से शिक्षा के उद्देश्यों की प्राप्ति में सहायक हो सकती है । गणित के मूल्य आधारित उद्देश्यों को हमने चार भागों में बांटा है उपयोगिता पर आधारित उद्देश्यए अनुशासनात्मक उद्देश्य तथा सांस्कृतिक उद्देश्य व नैतिक उद्देश्यों गणित के पाठ्यचर्या की रूप रेखा इन्हीं उद्देश्यो को ध्यान में रख कर बनाई जाती है जैसे ।

i. **उपयोगिता की दृष्टि से** (i) दैनिक जीवन अधिक किफायती, (Economical) सुनियोजितए संतुलितए सभ्य और सफल बनाने में (ii) अन्य विषयों के अध्ययन में (iii) उपयुक्त व्यवसायों को अपनाने में (iv) उच्च शिक्षा में जाने की तैयारी में (v) सभ्यता के विकास के विभिन्न पहलुओं जैसे उद्योग, व्यापार, वाणिज्य, इन्जीनियरिंग तथा भौतिक और सामाजिक विज्ञानों के विकास में गणित की भूमिका को समझने इत्यादि में सहायक हो।

ii. **अनुशासन की दृष्टि से,** व्यवहार में सरलता, परिशुद्धता, परिणामों की सुनिश्चितता, मौलिकता इत्यादि जैसे गुणों के विकास में सहायक हो। गणित शिक्षण मस्तिष्क को अनुशासित करता है। पहले गणित की विषय वस्तु के चुनाव में यही एक कसौटी थी। इसलिए उसमें कुछ ऐसी अनुपयोगी विषय वस्तु भी शामिल कर ली गई थी जिसका व्यवहारिक जीवन में कोई उपयोग नहीं था। परन्तु अब यह महसूस किया जा रहा है कि विषय वस्तु ऐसी होनी चाहिए जो मस्तिष्क को अनुशासित करने के साथ साथ उपयोगी भी है। यदि एक ही प्रकरण को केवल एक काम के लिए और दूसरे को केवल दूसरे काम के लिए क्यों चुना जाए। इस दिशा में थार्नडाईक (Thorndike) के विचार और अधिक स्पष्ट है रू किसी भी चीज को केवल मानसिक अनुशासन मूल्य के कारण मत सिखाइये परन्तु हर उस चीज को सिखाइये जिससे जो भी अनुशासनात्मक मूल्य है प्राप्त किये जा सकें। ("Teach nothing because of its disciplinary value, but everything so as to get what disciplinary value it does have")

iii. **सांस्कृतिक प्रगति में सहायक होने की दृष्टि से** सांस्कृतिक प्रगति गणित के कुछ उन तथ्यों (विशेषकर खगोलशास्त्र से सम्बन्धित) के प्रति सदा आभारी रहेगी जिसने उसकी दिशा ही बदल दी। आज की वैज्ञानिक एवं तकनीकी प्रगति जो किसी भी वर्तमान संस्कृति का भाग है और

जिसका उपयोग मानव जीवन को अधिक सुखमय और समृ) बनाने में किया जा रहा है गणित से प्राप्त तथ्यों पर सदैव आश्रित रहेगी। इसलिए गणित की विषय वस्तु के चुनाव में इन सांस्कृतिक मूल्यों की अनदेखी नहीं करनी चाहिए।

iv. **गणित को अध्ययन से बालक के नैतिक विकास में** सहायता मिलती है। गणित एक ऐसा विषय है जो अपनी भावनाओं पर नियन्त्रण रखने का अभ्यास करता है। गणित अध्ययन अन्धी आस्था और निष्ठा में उचित व अनुचित की तलाश के लिए विवेक जाग्रत करता है। इसलिए गणित पाठ्यचर्या का निर्माण इस प्रकार करना होगा जिससे भावी नागरिकों में नैतिक विकास उत्पन्न किया जा सके। इसके अतिरिक्त विषय वस्तु के चुनाव में लचीलेपन के सिद्धान्त का भी समावेश होना चाहिए। समय और परिस्थितियों के साथ समाज में परिवर्तन आता है। जिससे शिक्षा के उद्देश्यों में परिवर्तन आना स्वाभाविक है। कोई भी पाठ्यचर्या सदैव स्थिर नहीं रहता। समय के साथ उसमें परिवर्तन आते रहते है। इसलिए भविष्यात्मक परिपेक्ष को ध्यान में रखते हुए उसकी विषय वस्तु को इतना लचीला बनाना चाहिए जिससे भावी परिवर्तन के साथ उसमें उपयुक्त और आवश्यक परिवर्तन लाया जा सके।

II. **पाठ्यचर्या की विषय वस्तु का संगठन व संचालन-** विषय वस्तु के चुनाव के बाद दूसरा महत्वपूर्ण प्रश्न उसको इस प्रकार संगठित तथा संचालित करने का है जिससे शैक्षिक उद्देश्यों को सफलता पूर्वक प्राप्त किया जा सके, जैसे प्रकरणों को किस क्रम में रखा जाय, उसे शिक्षा के किस स्तर पर आरम्भ किया जाए विभिन्न कक्षाओं में किस विधि से उसका विकास किया जाए उसे उसकी तैयारी और मूल्यांकन के लिए क्या किया जाए और एक समय में कितना पढ़ाया जाय उन सब का उत्तर पाठ्यचर्या के आयोजकों को मिलना चाहिए।

इसके लिए कई सुझाव दिये गये हैए जैसे-

1. तर्क के आधार पर प्रकरणों का चुनाव और क्रम
2. मनोवैज्ञानिक आधार पर उसकी विषय वस्तु में सरल से कठिन की ओर क्रमबद्धता और विभाजन
3. प्रत्येक प्रकरण सेए प्रारम्भिक शिक्षा से उच्च शिक्षा की ओर, मनोवैज्ञानिक आधार पर सरल से कठिन विषय वस्तुओं का चुनाव परन्तु गणितज्ञों के मत के अनुसार नहीं बालकों की शारीरिक मानसिक क्षमता के अनुसार
4. जीवन की समस्याओं से जोड़कर उसका प्रस्तुतीकरण, ये प्रकरण जीवन की विभिन्न समस्याओं के हल में सहायक कैसे हो सकते हैए उस पर प्रकाश डालते हुए उनका प्रस्तुतीकरण
5. विषय वस्तु की सामग्री को यथा सम्भव करके सीखने पर बल

6. छात्रों की बुद्धि स्तरए अभिरुचिए क्षमताए पूर्व। अनुभव, रूचियों में काफी व्यक्तिगत भिन्नता को देखते हुए उनके व्यक्तिगत सहायता तथा शिक्षण में उदाहरणों प्रश्नों इत्यादि में विविधता लाई जाये
7. शिक्षण में आगमन। निगमन विधियों का प्रयोग

1.5 गणित पाठ्यचर्या निर्माण के सिद्धांत (Principles of Desigining Curriculum पn Mathematics)

गणित में व्याप्त बुराइयों तथा वर्तमान में समाज की आवश्यकताओं के विहीन विषय। वस्तु को हटाकरए छात्र अध्यापक, समाज तथा देश की आवश्यकताओं के अनुकूल पाठ्यचर्या का निर्माण निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखकर किया जा सकता है-

- गणित का पाठ्यचर्या छात्र केन्द्रित होना चाहिए।
- गणित का पाठ्यचर्या क्रिया प्रधान होना चाहिए।
- विषय। वस्तु को मनोवैज्ञानिक तथा तार्किक ढंग से व्यवस्थित करना।
- व्यक्तिक्रम विभिन्नताओं को ध्यान में रखना।
- कठिनाई के स्तर को ध्यान में रखना।
- पाठ्यचर्या के निर्माण में अध्यापक की सहमति लेना।
- उद्देश्यों को आवश्यकतानुसार परिवर्तनीय बनाना।
- विषयों में सह सम्बन्ध दर्शाना।
- गणित का विज्ञान में अधिकतम प्रयोग करना।
- पाठ्यचर्या लचीला हो।
- पाठ्यचर्या रुचि तथा अभिरुचिपूर्ण हो।
- गणित में पहेलियों तथा मनोरंजनात्मक समस्याओं का समावेश हो।
- संस्कृति एवं सभ्यता के संरक्षण हेतु ज्ञान का सिद्धान्त।
- गणित का पाठ्यचर्या जीवन से सम्बन्धित होना चाहिए।

i. **गणित का पाठ्यचर्या छात्र केन्द्रित होना चाहिए (Mathematics Curriculum Should be Child Centered) -** गणित का पाठ्यचर्या छात्र केन्द्रित होना चाहिए अर्थात् छात्र की जिज्ञासा एवं रुचियों का ध्यान रखकर छात्र की आवश्यकतओं के अनुरूप पाठ्यचर्या

का निर्माण करना चाहिए। इसमें छात्र को गणित का ग्राहक होना चाहिए न कि गणित के ज्ञान को जबरन छात्रों के मस्तिष्क में ठूँसा जाये। पाठ्यचर्या निर्माण में छात्रों की रुचियों, आवश्यकताओं, प्रवृतीयों, क्षमताओं,बुद्धि इत्यादि पर ध्यान देना अति आवश्यक है। जैसे। माध्यमिक स्तर पर छात्र वैदिक गणित को अधिक जिज्ञासा से पढ़ना चाहता है तो ऐसी विषय। वस्तु पाठ्यचर्या में अवश्य सम्मिलित की जानी चाहिए।

ii. **गणित का पाठ्यचर्या क्रिया प्रधान होना (Curriculum Should be action based) -** गणित का पाठ्यचर्या क्रिया प्रधान होना चाहिए। इसके लिए प्रयोगात्मक कार्य अधिक से अधिक रखा जाय। गणित की वह विषय। वस्तु जो प्रायोगिक नहीं हो सकती हैए उन्हें खेल विधियों एवं सरलतम विधियों द्वारा छात्रों तक पहुँचाया जाये। इसके लिए सहायक सामग्री चार्ट, मॉडल, ग्राफ तथा अन्य बातों को अपनाकर इसका निर्माण एवं प्रयोग करना तथा प्रत्ययों को भली। भाँति समझाकर छात्रों के मन मस्तिष्क में बैठाना चाहिए। छोटे छात्रों को किलोग्रामए लीटर तथा मीटर आदि से स्वयं तौलना, नापना आदि करके ज्ञान देना अत्यन्त महत्वपूर्ण होता है। केवल स्लेट अथवा कापी पर हल न करवाकर छात्रों को वास्तविक नाप-तौल से भी अवगत कराना चाहिए। इस प्रकार की बातों को पाठ्यचर्या में सम्मिलित करना चाहिए। इन क्रिया। कलापों के माध्यम से छात्रों को क्रियाशील बनाया जा सकता है।

iii. **विषय-वस्तु को मनोवैज्ञानिक तथा तार्किक ढंग से व्यवस्थित करना (Subject Matter should be arranged according to Psychological way) -** गणित एक ऐसा विषय हैए जो तर्कों से ओत। प्रोत है। इसमें क्या- क्यों और केसे के उत्तर अवश्य मिलते हैं ? इसलिए गणित की विषयवस्तु के कठिनाई स्तर को ध्यान में रखकर व्यवस्थित करना चाहिए जो विषय वस्तु व्यवस्थित की जा रही है। वह किन। किन सिद्धान्तों पर आधारित है। वे सिद्धान्त छात्रों को पूर्ववत् ही पढ़ाये जाने चाहिए। छात्रों की आयु बदलने के साथ। साथ उसकी मनोवैज्ञानिक अर्थात् मानसिक तथा शारीरिक प्रवृतीयाँ भी बदलती रहती हैं।

iv. **व्यक्तिगत विभिन्नताओं को ध्यान में रखना (Consideration of personal thoughts)-** सभी छात्रों की बुद्धिलब्धि समान नहीं होती है। कुछ कम बुद्धि (पिछड़ा वर्ग) वाले तथा कुछ प्रतिभाशाली छात्र होते हैं। अतः दोनों प्रकार के छात्रों की प्रतिभाओं को ध्यान में रखकर कुछ सरल विषय। वस्तु तथा कुछ कठिन विषय। वस्तु रखनी चाहिएए जिससे कमजोर एवं प्रतिभावान् छात्र अपनी जिज्ञासाओं को सन्तुष्ट कर सकें। सामान्यतः कक्ष में विषय। वस्तु केवल सामान्य छात्रों को ध्यान में रखकर कम पढ़ायी जाती है। पिछड़े हुए छात्र तथा प्रतिभावान् छात्रों की ओर कम ध्यान दिया जाता है। अतः शिक्षण कार्य तथा पाठ्यचर्या के निर्माण में दोनों को ध्यान में रखना चाहिए।

v. **कठिनाई के स्तर को ध्यान में रखना रखना (Consideration of difficulty level)-** गणित में कुछ विषय। वस्तु एक ही पाठ पर बहुत आसान तथा उसी पाठ पर कठिन समस्याएँ हो सकती है। आसान विषय। वस्तु छोटे छात्रों हेतु छोटी कक्षाओं में रखी जा सकती हैं तथा उसी

पाठ में कठिन समस्याएँ बड़े छात्रों हेतु उच्च कक्षाओं में रखी जा सकती है। जैसे लाभ। हानि के प्रश्न कक्षा 4 से 5 में भी रखे जा सकते हैं तथा उसी पर कठिन समस्याएँ 9 व 10 में रखी जा सकती हैं।

vi. पाठ्यचर्या के निर्माण में अध्यापक की सहमति (**Consideration of Teacher's Consent in Curriculum Constructपion**) - अध्यापक शिक्षण क्षेत्र का एक सिपाही है। उसके अपने अनुभवए शिक्षण क्षेत्र के वास्तविक अनुभव हैं असलिए उसका परामर्श लेना अति आवश्यक है। इतना ही नहीं उसे पाठ्यचर्या निर्माणकर्ताओ के साथ एक अभिन्न सदस्य के रूप में स्वीकार करना चाहिए ताकि अपने अनुभवजन्य समस्याओं से अवगत कराता रहे तथा उनका समावेश पाठ्यचर्या में हो अथवा नहीं हो का विचारदित होता है।

vii. **उद्देश्यों को आवश्यकतानुसार परिवर्तनीय बनाना** (**Flexible Objectives according to Need**) - शिक्षा तथा विषयों के उद्देश्यए व्यक्तिए समाज तथा देश की आवश्यकतानुसार काल, परिस्थितियाँ , राजनैतिक उथल। पुथल के साथ बदलते रहते हैं। अतः इन परिवर्तनों के साथ पाठ्यचर्या में भी परिवर्तन करते रहना चाहिए बल्कि उसे समय। समय पर आधुनिकीकृत करते रहना चाहिए।

viii. **विषयों में सह सम्बन्ध दर्शाना** (**Expression of Correlation among Subject**) - गणित एक ऐसा विषय हैए जिसकी आवश्यकता प्रत्येक विषय को पड़ती है। जैसे। भूगोल, समाजशास्त्र, इतिहासए भौतिक, विज्ञान तथा रसायन विज्ञान आदि। इन सभी विषयों में सांख्यिकी के रूप में अथवा अति प्राथमिक सिद्धान्तों के रूप में गणित की उपयोगिता करनी पड़ती है। अतः गणित को प्राथमिक कक्षाओं से लेकर माध्यमिक स्तर तक अनिवार्य बनाना चाहिए। यद्यपि हाई स्कूल कक्षाओं का सदुपयोग कर सकें और अपने विषय को स्पष्ट बना सकें तो अति उत्तम होगा।

ix. **गणित का विज्ञान में अधिकतम प्रयोग करना** (**Maximum use of Mathematics in Science**)- वास्तव में गणित विज्ञान का मूलरूप है। विज्ञान व्यवहारिक ज्ञान प्रदर्शित करता हैए पर न्तु उसकी नींव गणित पर आधारित है। इसलिए एक अच्छे भवन का निर्माण बिना अच्छी नींव के नहीं हो सकता है। इसलिए गणित को भी उसी दृष्टि से विज्ञान में प्रयोग किया जाये ताकि देनोंका सामंजस्य एक। दूसरे का पूरक बन सके क्योंकि गणित के नियम एवं सिद्धान्त सर्वमान्य हैं।

x. **पाठ्यचर्या लचीला हो (Flexibility of Curriculum) -** गणित का पाठ्यचर्या लचीला होना चाहिए। ताकि छात्र व्यक्तिगत भिन्नताओं के आधार पर अपनी व्यक्तिगत रुचियोंए प्रवृतियोंए आवश्यकताओंए क्षमताओं के अनुसार सीख सकें। यदि पाठ्यचर्या कठोर होगा तो उसमें असफलताओं का कारण निहित होगा। इसमें शिक्ष मनोविज्ञान की मदद से यह दोष दूर किया जा सकता है तथा गणित के पाठ्यचर्या की आवयकताओं के अनुसार परिवर्तित किया जा सकता है।

xi. **पाठ्यचर्या रुचि तथा अभिरुचिपूर्ण हो (Interest and Aptitude) -** व्यक्ति विभिन्नताओं के आधार पर पाठ्यचर्या पाठ्यचर्या का निर्माण रुचि तथा अभिरुचि के आधार पर करना चाहिए। जैसे। छात्र कलाए विज्ञानए कामर्स तथा कृषि विषयों का चयन अपनी रुचियों तथा अभिरुचियों के आधार पर चयन करते है। इन विषयों के लिए गणित का पाठ्यचर्या भी भिन्न। भिन्न प्रकार का होना चाहिए। कला वर्ग के लिए तथा विज्ञान वर्ग के लिए गणित का पाठ्यचर्या अलग। अलग बनाया गया है। इसी प्रकार कृषि तथा कॉमर्स के लिए भी गणित के पाठ्यचर्या का निर्माण करना चाहिए और उसमें उसी प्रकार की समस्याएँ सम्मिलित करना चाहिए। जैसे। कृषि में कृषि सम्बन्धी गणित की समस्याओं को सम्मिलित किया जाये तथा इस बात का अन्य विषयों में भी ध्यान रखा जाना चाहिए।

xii. **गणित में पहेलियों तथा मनोरंजनात्मक समस्याओं का समावेश हो (Absorption of riddles and other Entertainment Activities in Mathematics Curriculum)** - गणित विषय को रुचिकर बनाने के लिए उसमें अनेक व्यवहारिक पहेलियों के सम्मिलित किया जाना चाहिए तथा कुछ मनोरंजनात्मक समस्याओं को स्थान दिया जाना चाहिए, जिससे छात्र पहेलियों का निर्माण तथा उन समस्याओं को हल करने के लिए जिज्ञासु हो सकें तथा समस्याओं के हल में कसरत हो सके। जैसे। 100 रुपये के 100 सिक्के एक- एक रुपये के हैं। उनमें सात थैलियाँ भरनी है और बन्द करनी हैं। अब कोई व्यक्ति 1 रुपये से 100 रुपये तक किसी संख्या के रूप में रुपये माँगता है तो बिना थैली खोले पूरी थैली उठाकर उन रुपयों का भुगतान कर सकता है तो बताओं प्रत्येक थैली में कितने रुपयों का भुगतान कर सकता है तो बताओ प्रत्येक थैली में कितने रुपये हैं?

xiii. **संस्कृति एवं सभ्यता के संरक्षण हेतु ज्ञान का सिद्धांत (Principle of Knowledge for the Conservation of Culture and Civilization)**- गणित के माध्यम से हमारी संस्कृति एवं सभ्यता का संरक्षण किया जा सकता है। प्राचीन गणित तथा यज्ञ की वेदियों के आधार पर रंखागणित की आकृतियों का निर्माणए क्षेत्रफल तथा अन्य प्रकार की गणनाएँ तथा हमारे महापुरुषों की जीवनियों, जिन्होंने गणित के क्षेत्र में तहलका पैदा कर दिया है। उनका ज्ञान जो विदेशी चुराकर अपने मूलरूप में प्रस्तुत करना चाहते हैं, जैसे -'पाइथागोरस प्रमें य'भारतीय गणितज्ञ ने सिद्ध की थी जिसे 'पाइथागोरस' के नाम से अब जाना जाता है। इसलिए अपनी संस्कृति के संरक्षण में गणित हमारी मदद कर सकता है।

xiv. **गणित का पाठ्यचर्या जीवन से सम्बन्धित होना चाहिए (Mathematical Curriculum should be life related)** - मनुष्य का जीवन बिना गणित के एक पग नहीं चल सकता है। इसका तात्पर्य है कि गणित हमारे जीवन का अभिन्न अंग है। अतः इसका पाठ्यचर्या इस दृष्टि से तैयार करना चाहिए ताकि गणित की विषय। वस्तु की उपयोगिता व्यक्ति के लिए अधिकतम हो सके। इसलिए छात्रों के व्यक्तित्व के अभिन्न पहलुओं तथा शारीरिक

मानसिक, राजनैतिक तथा नैतिक पक्ष के विकास के लिए पाठ्यचर्या में उनके जीवन से सम्बन्धित समस्त क्रियाओं का समावेश करना अति आवश्यक है।

उपरोक्त सिद्धान्तों के अतिरिक्त छात्रों की जनतन्त्रीय भावनाओं का विकास करना तथा उनमें परिश्रम के प्रति रुचि उत्पन्न करना तथा गणित में यथार्थता उत्पन्न करना अति आवश्यक है। ताकि, मौलिक, शुद्धता आदि गुण विकसित हो सकें।

हमारी शिक्षा व्यवस्था कई स्तरों में विभाजित हैए जो निम्नालिखित हैं।

i. प्राथमिक स्तर (पूर्व प्राथमिक कक्षा 1 से 5 तक) तथा उच्च प्राथमिक कक्षा 6, 7, 8 तक)
ii. माध्यमिक स्तर की शिक्षा।
iii. उच्च शिक्षा।

इन तीनों स्तर के छात्रों की मनोवैज्ञानिक रुचियाँ, अभिरुचियाँ, क्षमता तथा आयु भिन्न होती हैं। इसलिए इन स्तरों पर गणित का पाठ्यचर्या अलग। अलग होना चाहिए और शिक्षाविद् अथवा गणितज्ञ ऐसा करने को वचनबद्ध हैं। पाठ्यचर्या भी भिन्न-भिन्न बनाया गया है।

1.6 विद्यालयी गणित की दृष्टि या महत्व (Vision of School Mathematics)

युगों युगों से विद्यालय पाठ्यचर्या में गणित के महत्व को स्वीकारा जाता रहा है। ईसा से भी 400 वर्ष पूर्व प्लेटो (Plato) ने अपने दरवाजे पर यह लिखा रखा थाए श्जो गणित से अनभिज्ञ है उसे में रे दरवाजे में प्रवेश नहीं करना चाहिए उसके अनुसार जो व्यक्ति गणित के अध्ययन योग्य नहीं है उन्हें विद्यालय में प्रवेश नहीं देना चाहिए।

- नेपोलियन (Napoleon) की गणित के बारे में यह टिपणी भी उसके ऐतिहासिक महत्व दर्शाती है, "जब भी हम लोहा माप,विधुत के युग की ओर दृष्टि पात करते है तो हमें यह ज्ञात होता है कि गणित सदा अग्रणी रहा है। यदि इस रीढ की हड्डी को हटा दिया जाय तो हमारी भौतिक सभ्यता निश्चित ही समाप्त हो जायेगी। गणित के विकास के साथ राज्य की समृद्धि जुडी हुई है"

- बेकन (Bacon) के अनुसार "गणित सभी विज्ञानों की कुन्जी है। कोई विज्ञान ऐसा नहीं है जिससे गणित का सम्बन्ध न हो। जितनी प्रगति विज्ञान के कारण हुई है उसके मूल में गणित ही है। गणित को विज्ञान की आत्मा कहा जाता है"

- बरनार्ड शा (Bernard Shaw) के अनुसार तार्किक चिन्तन के लिए गणित एक शक्ति शाली माध्यम है

- इनके अलावा अधिकांश शिक्षा शास्त्रियों जैसे हरबर्ट (Herbert), फाबेल (Froebel)) पेस्टालोजी (Pestalozzi), में रिया मान्टेसरी (Maria Montessori), टी0 पी0 नन (T.P. Nun) इत्यादि ने विद्यालय के पाठ्यचर्या में गणित के महत्व की वकालत की है। इन लोगों के मत में बिना गणित के अध्ययन के व्यक्ति का बौद्धिक और सांस्कृतिक विकास सम्भव नहीं है। इसी प्रकार कोठारी आयोग ने वर्तमान शिक्षा में गणित के महत्वपूर्ण स्थान का उल्लेख इस प्रकार किया है।

"वैज्ञानिक दृष्टि अपनाने का मुख्य लक्षण वस्तुओं को मात्रात्मक दृष्टि से अभिव्यक्त करना है। इसलिए आधुनिक शिक्षा में गणित का स्थान अधिक महत्वपूर्ण हो जाता है। भौतिक विज्ञान की प्रगति में इसका महत्वपूर्ण हाथ है, साथ ही जैविक विज्ञानों के विकास में भी अधिकाधिक रूप से इसका प्रयोग किया जा रहा है। इस शताब्दी में स्वचालन विज्ञान और साइबरनेटिक्स के आगमन से नई वैज्ञानिक औद्योगिक क्रान्ति का जन्म हुआ है और इसलिए गणित के अध्ययन पर ध्यान देना और भी अनिवार्य हो गया है। इस विषय का उचित आधार स्कूलों में रखा जाना चाहिए।" यही कारण है कि 10 वीं तक की अनिवार्य शिक्षा में गणित का विशेष स्थान है। गणित एक कोशल विषय (Skilled Subject) है। नई शिक्षा नीति (1986) में गणित का प्रमुख स्थान है।

1.7 विभिन्न विद्यालयी अवस्थाओं के लिए गणित शिक्षा के पाठ्यचर्या विकल्प (Curriculum Choices at Different Stages of School Mathematics Education)

संसार के लगभग सभी विकसित एवं विकासशील देशों में गणित को विद्यालय पाठ्यचर्या में प्रमुख स्थान दिया है। अफ्रीका के लगभग सभी क्षेत्रों में सभी स्तरों पर गणित पाठ्यचर्या की सशक्त विशिष्टता है। लैटिन अमें रिका और करिब्बियन (Caribbean) क्षेत्र के सभी देशों में सभी स्तर पर गणित पढाई जाती हैए यद्यपि कहीं पर यह माध्यमिक शिक्षा में अंतिम चार वर्षो में कही अंतिम वर्षो में तो कहीं सभी माध्यमिक कक्षाओं में वैकल्पिक विषय के रूप में पढाई जाती है। एशिया और प्रशान्त महासागरीय क्षेत्र के सभी देशों में माध्यमिक शिक्षा के सभी स्तरों पर यह विद्यालय पाठ्यचर्या का महत्वपूर्ण भाग है और अधिकांश व्यवस्थाओं में इसका स्थान काफी ऊँचा है। यूरोपीय सभी देशों में तो सभी स्तरों के पाठ्यचर्या में इसका समावेश है।

भारत के भी अधिकांश राज्यों में माध्यमिक या उच्च प्राथमिक स्तर तक गणित अनिवार्य विषय के रूप में पढ़ाई जाती है। उन राज्यों में जहां छात्र मिडिल स्कूल या जूनियर हाई स्कूल के बाद तकनीकी शिक्षा में प्रवेश लेते है वहां विद्यालयों में गणित अनिवार्य विषय के रूप में पढ़ाई जाती है।

राष्ट्रीय स्तर के विद्यालयों में जैसे केन्द्रीय विद्यालयों और सेंट्रल बोर्ड ऑफ सेकण्डरी एजूकेशन (CBSE) का पाठ्यचर्या अपनाने वाले अन्य विद्यालयों में हाई स्कूल तक यह विद्यालय पाठ्यचर्या का अनिवार्य भाग है।

1.8 विद्यालयी गणित पाठ्यचर्या के महत्वपूर्ण पक्ष (Care Dreads of Concerns in School Mathematics)

यहां प्रश्न यह है कि विद्यालयी पाठ्यचर्या में गणित शिक्षण को इतना महत्व क्यों दिया जाय कि प्रत्येक छात्र को कम से कम मिडिल स्कूल तक उसका अध्ययन करना अनिवार्य हो। इसका उत्तर जीवन में गणित की उपयोगिता के संदर्भ में ही मिल सकता है। शिक्षक को इसकी जीवन में उपयोगिता की सफल वकालत कर सकेए जिससे उनमें गणित के प्रति रूचि पैदा हो। यह बहुत ही अधिक आवश्यक है क्योंकि गणित को बहुधा एक रूखा विषय समझा जाता है।

नेपोलियन ने शायद ठीक ही कहा था कि गणित के विकास बिना किसी राष्ट्र का विकास सम्भव नहीं। प्रजातान्त्रिक व्यवस्था में यह अवधारणा सटीक लगती है। जैसा हमने उद्देश्यों के अध्ययन में कहा था शिक्षा का अंतिम लक्ष्य शिक्षार्थी को रचनात्मक जीवन के लिए तैयार करना हैए इसके लिए पिछली बातों को फिर से दोहराते हुए भी उसमें

i. उस ज्ञान और उन कुशलताओं का विकास करना होगा जो छात्र के भावी व्यवहारिक जीवन में काम आयें
ii. ऐसी बौद्धिक आदतों और शक्ति का विकास करना होगा जो उसके जीवन को सरलए तर्कपूर्ण तथा अनुशासित और अधिक सफल बनाये जिससे उसमें आत्मविश्वास जागृत हो
iii. इसमें ऐसी वांछित अभिवृत्तियों (attitude) और आदर्शो का विकास करना होगा जो उसे अच्छा नागरिक और सामाजिक रूप से उपयोगी बनाये।

उपरोक्त इन सभी गुणों के विकास में गणित अहम भूमिका निभाती है जैसे अनपढ़ से लेकर उच्च शिक्षा प्राप्त, निम्न से लेकर उच्च वर्ग सभी प्रकार के लोग गणित की कम से कम आधारभूत क्रियाओं के बिना स्वतंत्र रूप से दिन प्रतिदिन की क्रिया नहीं कर सकते। प्रत्येक व्यक्ति किसी न किसी रूप में गणित का प्रयोग करता है। इन्जीनियर,व्यापारी,उद्योगपति, साहूकार / महाजन / पूंजीपति, योजना बनाने वाले या किसी व्यवसायिक संस्था के मालिक जो अपनी सफल क्रियाओं के लिए गणित पर आश्रित है, ही साधारण श्रमिक को भी अपने मजदूरी के पैसे गिनने होते हैं , बाजार से सामान खरीदना होता है, अपनी

आय के साथ अपने खर्चों का समायोजन करना होता है। जो भी कमाता और खर्च करता है उसे गणित का प्रयोग करना पड़ता है। गणित की प्रक्रियाएं मनुष्य की आवश्यकताओं के अनूकूल ही बनाई गई थी। मनुष्य बिना अपनी आवश्यकताओं की संतुष्टि के चैन से नहीं बैठ सकता। जीवन में व्यवस्था बनाने में व्यक्ति को समय, धन और सामाजिक क्रियाओ को सुसंगठित करना होगा नहीं तो जीवन अव्यवस्था और गड़बड़ी से भर जायेगा। इसके लिए प्रत्येक सामान्य व्यक्ति को भी गणित का ज्ञान आवश्यक है।

इसी प्रकार गणित मस्तिष्क को अनुशासित करती है। गणित के तर्क में कुछ ऐसी विशेषतायें होती है जो सीखने वाले के मस्तिष्क को अनुशासित करने में उपयुक्त है, शर्त यह है कि इन पर उपयुक्त बल दिया जाय और उनका बराबर प्रयोग किया जाए गणित की विशेषताएं इस प्रकार है।

i. **सरलता की विशेषता-** गणित हमें यह सिखाती है कि सुस्पष्ट तथ्य सदैव सरल भाषा में अभिव्यक्त (express) किये जाते है और आसानी से समझ में आते है इसलिए यदि हम चाहते है कि लोग हमारी बात समझ सकें तो हमें सरल या सुस्पष्ट भाषा का प्रयोग करना चाहिए

ii. **परिशुद्धता की विषेशता -** यथार्थ तर्क, चिन्तन और निर्णय (accurate, reasoning, thinking and judgment) गणित अध्ययन की आत्मा है गणित अध्ययन द्वारा इन विशेषताओं का अभ्यास करना आवश्यक है। अन्य विषयों में कभी कभी छात्र घुमावदार बातें करके अपनी अज्ञानता को छिपाना सम्भव हो सकता है परन्तु गणित में यह बाजीगरी कभी नहीं चल सकती। छात्र गणित से यर्थाथता का मूल्य सीख सकता है। और अपने जीवन में सिद्धान्त के रूप में ग्रहण कर सकता है। इससे वह अपनी यथार्थता द्वारा दूसरों को प्रभावित कर सकता है।

iii. **परिणामों की निश्चित्ता की विशेषता-** गणित में व्यक्तिनिष्ठता और वैयक्तिक त्रुटि (Personal error) के लिए कोई स्थान नहीं होता। उत्तर या तो सही है या गलत है। इनके अतिरिक्त अन्य कोई विकल्प नहीं है। इसी प्रकार अंकन में भी व्यक्ति। निष्ठता की कोई गुंजाइश नहीं है। छात्र और शिक्षक के बीच में मत भिन्नता (difference of opinion) की कोई सम्भावना नहीं होती। छात्र अपने स्वयं के प्रयत्नों से अन्य प्रक्रिया द्वारा अपने परिणामों का सत्यापन कर सकता है तथा अपनी कठिनाईयों को दूर कर सकता है। इस प्रकार का अभ्यास स्वःप्रयत्न के लिए विश्वास पैदा करता है जो जीवन में सफलता की कुंजी हैध्महामंत्र हैए तथा अपनी उपलब्धि के प्रति सुनिश्चित करता है।

iv. **मौलिकता की विशेषता-** गणित के अधिकांश कार्यो में मौलिक चिन्तन की आवश्यकता होती हैए रटन्त विद्या से इसमें सफलता मिलने की आषा बहुत कम होती है। अन्य विषयों में दूसरे के विचारों को प्रमुख स्थान दिया जाता है और छात्रों को उन्हें ग्रहण करना पडता है इसलिए इन विद्यार्थी विषयों में रटकर काम चला सकते हैए पर न्तु गणित में बिना मौलिक चिन्तन और प्रबुद्ध तर्क (Intelligent Reasoning) तथा आवश्यक गणितीय बुद्धि केए गणित विषयो में संतोष

जनक प्रगति नहीं हो सकती। जब कोई नई या भिन्न समस्या आती है तो हल करने की छात्र की मौलिकता ही काम आती है। इस प्रकार मौलिकता के अभ्यास से वह अपनी भावी जीवन में नवीन समस्याओं का अधिक विश्वास के साथ सामना कर सकेगा।

v. **समस्या-समाधान विधि को जीवन में उतारने की विशेषताऐं -** जिस प्रकार गणित की समस्याओं को हल करने में समस्या के प्रत्येक पहलू का विश्लेषण करते है फिर विभिन्न पहलुओं का संश्लेषण करके हल निकालते हैए उसी प्रकार छात्र अपनी भावी जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए इस प्रकार की विधि का प्रयोग करना सीख सकता है।

vi. **गणित अर्जित ज्ञान को नई स्थितियों में सफलतापूर्वक प्रयोग करने का साहस देती है।** गणित की कक्षा में विद्यार्थी को सीखे ज्ञान को नवीन परिस्थितियों में प्रयोग करने के लिए बहुत अधिक अवसर मिलते है जिससे उसके जीवन में भी इसी प्रकार के प्रयोग के लिए विश्वास और साहस पैदा हो सकता है।

इनके अतिरिक्त गणित छात्रों में एकाग्रचित्तता, मितव्ययी जीवनए, (economical living) अभिव्यक्ति की क्षमता, तथा आत्मनिर्भरता जैसे गुणों के विकास कर सकती है।

यदि गणित को पढाने में उपरोक्त गुणो के विकास पर भी ध्यान दिया जाय तो छात्र न केवल अपने जीवन में सफल होगा बल्कि अपने आदर्श सफल जीवन से समाज का अच्छा नागरिक बनेगा तथा उसकी प्रगति और कल्याण में योगदान दे सकेगा।

इसके अलावा आधुनिक संस्कृति में प्रगति का आधार तकनीकी प्रगति है। कृषिए इन्जीनियरिगए औषधि विज्ञान उद्योग धन्धें, भवन निर्माण इत्यादि में प्रगति प्रोद्योगिकी (technology) के द्रुत विकास के कारण सम्भव हुई है और विकास में गणित की योग्यता से सम्पन्न व्यक्ति अहम् भूमिका निभाते हुए देश की प्रगति और कल्याण में बहुत अधिक सहायक हो सकते है। इस प्रकार गणित पार्श्व पुरोगामी (“playback–planner”) के रूप में हमारी संस्कृति की रूप रेखा बनाने में अहम् भूमिका निभाता है। यह कथन सत्य ही लगता है कि श्गणित सभ्यता का दर्पण है। गणित किसी राष्ट्र के विकास धुरी है। ब्रहाण्ड रचेता सर्वश्रेष्ठ गणितज्ञ है।

उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि गणित का विद्यालयी पाठ्यचर्या में अपना विशेष स्थान है जिससे उसको हटाना असम्भव लगता है, उल्टे उसका वर्चस्व बराबर बढता जा रहा है।

1.9 विभिन्न स्कूली अवस्थाओं के लिए गणित के विभिन्न प्रकरणों का शैक्षणिक विश्लेषण (Pedagogical Analysis of Various Topics in Mathematics of Various Levels of School)

गणित की विभिन्न शाखाओं को पाठ्यचर्या में एकीकृत करने के लिए कोठारी आयोग के कुछ सुझाव इस प्रकार है।

प्राथमिक स्तर पर - यहां यह गणितए अंकगणितए बीजगणित तथा ज्यामिति में विभक्त है। इस कारण संख्याओं द्वारा आधारभूत क्रियाओं (operations) की शिक्षा देने के लिए एक ही चीज को दोहराना पड़ता है। इसलिए यह सुझाव दिया गया है कि अंकगणित और बीजगणित को समन्वित कर दिया जाय और गणित के नियमों और सिद्धान्तों की तर्क संगत प्रणाली पर जोड दिया जाय। पाठ्यचर्या में संख्या प्रणाली का विकासए अंकन पद्धति और संख्या लेखन (notation and numeration) प्रणालियांए समीकरणए ग्राफ पठन सम्मिलित किये जाने चाहिए इसी प्रकार ज्यामिति के पाठयक्रम को भी अधिक युक्ति संगत आधार पर संगठित करना चाहिए।

माध्यमिक और उच्च माध्यमिक स्तर पर - यहां ये पर म्परागत रूप से गणितए अंकगणितए ज्यामिति और बीजगणितए त्रिकोणमितिए सांख्यिकीए फलन और निर्देषांक ज्यामिति में विभक्त है। इस प्रकार के पाठ्यचर्या को पुन: (revitalize)) अनुप्राणित और आधुनिकतम बनाने की आवश्यकता महसूस करते हुए आयोग का सुझाव है कि

i. अंकगणित का सारा पाठ्यचर्या और बीजगणित की आधारभूत क्रियाएं प्राथमिक स्तर के अन्त तक समाप्त की जा सकती है।
ii. पाठ्यचर्या से सरलीकरण, गुणन खण्ड महत्तम समापवर्तक, लघुत्तम समापवर्तक आदि जो विषय पुराने पड़ गये है उनको निकाल देने की आवश्यकता है
iii. त्रिकोणमिति को बीजगणित के साथ जोड़ा जा सकता है उसे अलग से पढाने की कोई आवश्यकता नहीं है।
    a. सर्वसमिकाओं (identities) त्रिकोणों के हल (solutions of triangles) ऊचाइयों और दूरियों (height and distance) की क्रिया कम कर देनी चाहिए।
    b. ज्यामिति पढाने का तरीका बदल देना चाहिए और स्वयं। तथ्य मूलक और व्यवस्थिति रीति अपनानी चाहिए। ज्यामिति के मूल शब्दों और संख्याओं की व्याख्या करते हुए "सेट" की भाषा का प्रयोग करना चाहिए। "सेट" की भाषा के माध्यम से अंक गणित बीजगणित और ज्यामिति में समन्वय स्थापित किया जा सकता है।
i. प्रमें यों और अभ्यास के प्रश्नों के हलों को रटने की परम्परा को समाप्त कर देना चाहिए।

ii. विषय के कठिन हिस्सों को धीरे धीरे अगली कक्षाओं में लेना चाहिए। यह एक अच्छी व्यवस्था होगी। प्राकरणिक (topical) व्यवस्था (arrangement) में उसके सरल और कठिन भाग एक साथ ले लिए जाते हैए यह अमनोवैज्ञानिक है।

1.10 सारांश

युगो युगो से विद्यालय पाठ्यचर्या में गणित के महत्व को स्वीकारा जाता रहा है। गणितज्ञों के अतिरिक्त प्लैटो जैसे दार्शनिकों तथा बरनार्ड शॉ जैसे लेखकों ने गणित के महत्व को किसी न किसी रूप में स्वीकारा है। कोठारी आयोग ने भी भौतिक तथा जैविक विज्ञानों में तेजी से बढती प्रगति तथा स्वचालन विज्ञान तथा साबरनेटिक्स के आगमन से नई औद्यौगिक क्रान्ति में सहयोग देने के लिए विद्यालय पाठ्यचर्या में गणित को अनिवार्य रूप से रखने की वकालत की है। विकसित देशों के अतिरिक्त अधिकांश विकासशील देशों में भी विद्यालय पाठ्यचर्या में गणित को काफी महत्व दिया जा रहा है। भारत में राष्ट्रीय स्तर के विद्यालयों तथा केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड से सम्बन्धित विद्यालयों में हाई स्कूल में यह अनिवार्य विषय है। पर न्तु कहीं कहीं यह केवल माध्यमिक कक्षाओ तक अनिवार्य है द्य इसको इतना महत्व देने के लिए कई तर्क दिये गये है जैसे

i. यह गणित व्यक्ति के व्यवहारिक जीवन में काम आने वाला सबसे अधिक महत्वपूर्ण ज्ञान है।
ii. गणित के अभ्यास के द्वारा व्यक्ति में ऐसी बौद्धिक आदतों और शक्ति का विकास किया जा सकता जो उसके जीवन को तर्क। पूर्णए सरलए अनुशासित और इसलिए अधिक सफल बनाने में सहायक हो।
iii. ये व्यक्ति में ऐसी वांछित अभिवृत्तियों का विकास कर सकती है जो उसे अच्छा नागरिक और सामाजिक दृष्टि से उपयोगी बनाये।

गणित का जीवन के साथ अभिव्यक्तियों तथा अन्य विषयों के साथ गहरा अनुबंध है। आज कोई भी विषय पूर्णतरू पृथक करके नहीं पढाया जा सकता है। और गणित के लिए यह विशेष रूप से महत्वपूर्ण हैए क्योंकि अमूर्त होते हुए भी यह मानव जीवन के नस नस में व्याप्त है। इसी प्रकार छात्र को भावी रचनात्मक जीवन के लिए तैयार करने वाले अन्य विद्यालयी विषयों से इसका गहरा सम्बन्ध है। अधिकांश भौतिक, जैविक तथा सामाजिक विज्ञानों को बिना गणित के ज्ञान के भली भांति अध्ययन नहीं किया जा सकता। भूगोल इतिहास यहां तक कि ड्राइंग और भाषा ऐसे विषयों के अध्ययन को भी यह काफी सुविधाजनक बना सकती है। गणित के उपविषय (अंकगीणत, बीजगणित, ज्यामिति इत्यादि) भी आपस में घनिष्ठ रूप से सम्बन्धित है।

इन उपरोक्त कारणों से गणित को एक एकाकी विषय के रूप में न पढा कर उसे जीवन की समस्याओं तथा अन्य विषयों से जोड़कर पढाने की सिफारिश की गई है। विभिन्न विषयों को अलग अलग न पढा कर उन्हें

किसी समस्या के हल में या किसी वातावरण या सामाजिक घटना की व्याख्या से एकीकृत किया जाना चाहिए। इस दिशा में कोठारी आयोग ने प्राथमिक एवं माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण से सम्बन्धित कुछ ठोस सुझाव दिये है। गणित पाठ्यचर्या की विशेषताएँ है बाल केन्द्रित(Child Centered) समुदाय केन्द्रित (Community Centered) समकेन्द्रित सृजनात्कता (Creativity Based) आधारित गतिविधि आधारित (Activity Based) समकलित (Integrated) तथा संसाधन आधारित (Re-source based) हो। संक्षेप में 4 CAIR के सात कारकों को ध्यान में रखकर गणित पाठयचर्या का निर्माण विद्यालयी शिक्षा के लिए किया जाना चाहिए।

1.11 संदर्भ ग्रंथ सूची

1. Kapoor J.N (1967); Some Aspects of school Mathematics, Arya Book Depot Naiwala, Karolbagh N. Delhi.
2. Kumar Sudhir (1997); Teaching of Mathematics Anmol Publications, Pvt Ltd. N. Delhi-2.
3. Sidhu, Kulbir Singh (1967); The Teaching of Mathematics, sterling Publishers (P) Ltd.Morigate, Delhi-6.
4. N.C.E.R.T. New Delhi (2000) "National Curriculum Framework for School Education.
5. N.C.E.R.T. New Delhi (2005) "National Curriculum Framework for School Education.
6. N.C.E.R.T. New Delhi (2005) Report of Position paper of Mathematics focus group "NCF 2005

1.12 निबंधात्मक प्रश्न

1. पाठ्यचर्या को परिभाषित कीजिए।
2. पाठ्यचर्या एवं पाठ्यवस्तु के अन्तर को स्पष्ट कीजिए।
3. गणित के पाठ्यचर्या निर्माण के उद्देश्यों को समझाइये।
4. गणित में पाठ्यचर्या निर्माण के सिद्धान्तों का वर्णन कीजिए।
5. विभिन्न विद्यालयी अवस्थाओं के लिए गणित शिक्षा के पाठ्यचर्या विकल्पों की चर्चा कीजिए।
6. विद्यालयी गणित पाठ्यचर्या के महत्वपूर्ण पक्षों का वर्णन कीजिए।

इकाई 2- राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित गणित पाठ्यक्रम की प्रवृतियाँ

Trends of NCERT Syllabi of Mathematics

2.1 प्रस्तावना
2.2 उद्देश्य
2.3 पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर व्यक्ति की रुचि या रुझान में परिवर्तन
  2.3.1 पाठ्यापुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामाग्री की ओर रुझान की आवश्यकता
  2.3.2 पाठ्यापुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामाग्री की ओर रुझान में हो रहे परिवर्तन को अपनाने में सावधानी
2.4 गणित विषय के पाठ्यक्रम निर्माणकर्ता के रुप में गणित शिक्षक
2.5 माध्यमिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर की कक्षाओं के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन
2.6 सारांश
2.7 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
2.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं सहयोगी ग्रंथ
2.9 निबंधात्मक प्रश्न

2.1 प्रस्तावना

शिक्षण-अधिगम एक गतिशील प्रक्रिया है। यह समाज में होनेवाले परिवर्तन के साथ-साथ परिवर्तित होते रहता है। वर्तमान समाज सूचना एवं संचार तकनीकी से सुसज्जित है। सामाजिक जीवन का हर एक पक्ष सूचना एवं संचार तकनीकी से प्रभावित है। शिक्षण-अधिगम सामाजिक जीवन का सार्वाधिक महत्वपूर्ण पक्ष है। तकनीकी एवं अन्य परिवर्तनों के प्रभाव में आकर इसमें व्यापक परिवर्तन हुआ है। यह परिवर्तन कई रुपों में परिलक्षित होता है। उदाहरणार्थ शिक्षण के उद्देश्य, अधिगम के उद्देश्य, शिक्षण-अधिगम सामग्री, शिक्षण-अधिगम की प्रक्रिया आदि प्रत्येक पक्ष में परिवर्तन हुआ है। शिक्षण प्रक्रिया में पहले जहाँ पाठ्यपुस्तकों का सार्वाधिक प्रयोग किया जाता था। अब शिक्षण-अधिगम सामग्री का प्रयोग होने लगा है।

शिक्षक एवं शिक्षार्थी दोनों ही शिक्षण-अधिगम सामग्रियों पर अपेक्षाकृत अधिक निर्भर रहने लगे हैं। प्रस्तुत इकाई की रचना वर्तमान शिक्षण प्रक्रिया के इसी प्रवृति को ध्यान में रखकर की गई है। इसके अलावा इस इकाई में पाठ्यक्रम निर्माणकर्ता के रुप में गणित शिक्षक की भूमिका, राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित गणित पाठ्यक्रम एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित गणित पाठ्यक्रम का तुलनात्मक अध्ययन भी प्रस्तुत किया जाएगा।

2.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

1. शिक्षकों एवं विद्यार्थियों के रुझान में पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर हो रहे परिवर्तन का वर्णन कर सकेंगे;
2. पाठ्यक्रम निर्माणकर्ता के रुप में गणित शिक्षक की भूमिका की व्याख्या कर सकेंगे; तथा
3. राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा माध्यमिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर की कक्षाओं के लिए विकसित गणित विषय के पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत कर सकेंगे।

2.3 पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर व्यक्ति की रुचि या रुझान में परिवर्तन

शिक्षण प्रक्रिया में पाठ्यपुस्तकों का महत्वपूर्ण स्थान है। पाठ्यवस्तु को विद्यार्थियों तक प्रसारित करने के लिए शिक्षकों द्वारा इसक सर्वाधिक प्रयोग किया जाता था। विद्यार्थी भी पाठ्यवस्तु का स्वाध्ययन करने के लिए पाठ्यपुस्तक का ही प्रयोग करते थे। लेकिन पीछले दो-तीन दशकों में शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में पाठ्यपुस्तक के महत्व में पर्याप्त कमी आयी है। शिक्षक एवं विद्यार्थी दोनों अब पाठ्यपुस्तक के बजाय शिक्षण-अधिगम सामग्री के प्रयोग पर अधिक बल देने लगे हैं। सूचना एवं संचार तकनीकी के विकास ने इस प्रवृति को और बलवती किया है। इस परिवर्तन के पीछे यह मान्यता कार्य करती है कि उन्मुक्त शिक्षण पद्धति, जिसमें कि सहायक सामग्रियों द्वारा शिक्षण-अधिगम होता है, पाठ्यपुस्तक द्वारा किए जाने वाले शिक्षण-अधिगम की तुलना में विद्यार्थियों में अधिक ज्ञान एवं कौशल का विकास करता है क्योंकि शिक्षक पाठ्यवस्तु को विविध प्रकार के शिक्षण सामग्री का प्रयोग करके पढ़ाता है एवं विद्यार्थी विविध शैक्षिक सामाग्री का प्रयोग करके पाठ्यवस्तु को समझते हैं जिससे उनके ज्ञान का पर्याप्त विस्तार होता है। फोले एवं मैकफी(2008) (Foley & McPhee, 2008) ने विज्ञान शिक्षण के संदर्भ में अपने शोध में पाया कि पाठ्यपुस्तक वैज्ञानिक सम्प्रत्ययों पर स्वामित्व स्थापित करने के लिए आवश्यक अनुसंधान आधारित प्रत्यक्ष अधिगम प्रदान करने में विफल है।

स्टैमबग एवं ट्रैंक (2010) के अनुसार, पाठ्यपुस्तक समय पर रुचिकर ढंग से सूचनाओं को प्रदान करने में सूचना तकनीकी के इस आधुनिक युग में अब सक्षम नहीं है क्योंकि अधिकंश पाठ्यपुस्तक अपने पारंपरिक प्रकृति के अनुरुप परिवर्तन का विरोध करते हैं एवं अत्यंत ही संस्थागत होते हैं। इसके इतर टेटेन (2010) ने बताया कि यह संभव है कि कई वर्षों बाद पाठ्यपुस्तकों का प्रयोग करने वाले समूह और उस समूह जिसके लिए पाठ्यपुस्तक की रचना की गई थी में अंतर हो जाए। अतः, यह आवश्यक है कि शिक्षकों द्वारा अनुदेशन के नए माध्यमों की खोज की जाए जिससे विविध प्रकार के संसाधनों का प्रयोग हो सके।

विद्यार्थी भी इस वास्तविकता से परिचित हो चुके हैं। उनमें से बहुत ने तो पाठ्यपुस्तक को पढ़ना भी छोड़ दिया क्योंकि उन्हें पता है कि वो कक्षाकक्ष में उन्हीं सब बातों की पुनरावृत्ति करने जा रहे हैं।

उपरोक्त विवेचन से यह बात स्पष्ट हो जाती है कि पीछले दो-तीन दशकों में शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में एक नई प्रवृत्ति का जन्म हुआ है जिसे हम शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में शामिल शिक्षकों एवं विद्यार्थियों के रुझान का पाठ्यपुस्तक से हटकर शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर प्रतिस्थापित होने के रुप में देख सकते हैं।

2.3.1 पाठ्यापुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामाग्री की ओर रुझान की आवश्यकता

इसकी आवश्यकता को हम निम्नलिखित विंदुओं के माध्यम से स्पष्ट कर सकते हैं:

1. विद्यार्थियों को किसी विषयवस्तु पर एक लेखक के आत्मनिष्ठ विचारों की जानकारी प्राप्त करने से रोकने के लिए
2. अधिगम में विद्यार्थीयों की सहभागिता बढ़ाने के लिए
3. विद्यार्थियों को इक्कसीवीं सदी के इस सूचना एवं संचार तकनीकी के दौर में वैश्विक स्तर पर सक्षम एवं दक्ष बनाने के लिए
4. विषयवस्तु पर स्वामित्व प्रदान करने के लिए

2.3.2 पाठ्यापुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामाग्री की ओर रुझान में हो रहे परिवर्तन को अपनाने में सावधानी

पाठ्यवस्तु से शिक्षण सामग्री की ओर गमन तो शुरु हो चुका है लेकिन जिस प्रकार से होना चाहिए उस प्रकार से नहीं हो रहा है। शिक्षक एवं विद्यार्थी दोनों में इस नई प्रवृत्ति को लेकर भ्रम व्याप्त है। शिक्षक एवं विद्यार्थी व्यक्तिगत स्तर पर तथा विद्यालयगत स्तर पर पाठ्यवस्तु के प्रसारण के एक माध्यम जो कि पाठ्यपुस्तक है से दूसरे माध्यम जो कि शिक्षण-सामग्री है से सीधे प्रतिस्थापित कर देते हैं। यह गलत है। पाठ्यवस्तु का मूल्यांकन किए बिना ऐसा करना लाभ प्रदान करने की बजाय नुकसानदायक हो सकता है। पाठ्यपुस्तक का मूल्यांकन कर उसके स्वरुप के अनुकूल शिक्षण-अधिगम सामग्री का चयन कर उसे संग्रहित एवं व्यवस्थित करना पड़ता है, जो अत्यधिक समय साध्य है। अतः, इसे पहले से करना पड़ता है

एवं इसके लिए नियोजन करने की आवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार यदि बिना नियोजन के पाठ्यपुस्तक को शिक्षण-सामग्री से प्रतिस्थापित किया जाय तो यह लाभकारी सिद्ध नहीं होगा।

निष्कर्षत: हम यह कह सकते हैं कि पीछले दो-तीन दशकों में शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में एक नवीन प्रवृत्ति पाठ्यपुस्तक की ओर से शिक्षक एवं विद्यार्थी के रुझान का शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर परिवर्तन का जन्म हुआ है। इस प्रवृत्ति का जन्म आवश्यक भी था क्योंकि सूचना एवं संचार तकनीकी के इस युग में पाठ्यपुस्तक विषयवस्तु के प्रसारण में विफल है। इस नवीन प्रवृति को अधिकांश शिक्षकों ने अपनाना शुरु कर दिया है लेकिन इसे अपनाने का उनका उपागम गलत है। अतः, इस क्षेत्र में अभी और कार्य करने की आवश्यकता है ताकि इस नवीन प्रवृति का भरपूर लाभ उठाया जा सके।

अभ्यास प्रश्न

1. पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर रुझान की आवश्यकता पर प्रकाश डालें।
2. पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर रुझान में हो रहे परिवर्तन को अपनाने में ली जानेवाली सावधानी क्या है?

2.4 गणित विषय के पाठ्यक्रम निर्माणकर्ता के रुप में गणित शिक्षक

पाठ्यक्रम निर्माण में शिक्षक की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। पाठ्यक्रम जिस विषय का होता है उस विषय का शिक्षक उसका आधार स्तंभ होता है। गणित शिक्षक की भी यही भूमिका है। गणित विषय के पाठ्यक्रम का वह आधार स्तंभ होता है। जॉनसन (2001) के अनुसार, पाठ्यक्रम निर्माण एक चुनौतीपूर्ण कार्य हो सकता है। अतः, इसके सभी उपभोक्ताओं का इसमें शामिल होना विशेषतः उन उपभोक्ताओं का जो विद्यार्थियों के साथ प्रत्यक्ष अंतर्क्रिया में शामिल होते हैं, का एक सफल पाठ्यक्रम के निर्माण एवं पुनरीक्षण में महत्वपूर्ण भूमिका होती है। यदि यह कहा जाय कि शिक्षक पाठ्यक्रम निर्माण के प्रक्रिया की धूरी होता है तो यह अतिशयोक्ति नहीं होगी। शिक्षक ही वह विंदु है जिसके ज्ञान, अनुभव एवं दक्षता के साथ पाठ्यक्रम निर्माण के प्रक्रिया की शुरुआत होती है। कार्ल (2009) ने इस संबंध में कहा है कि पाठ्यक्रम निर्माणकर्ता समूह को शिक्षक को वातावरण के उस घटक के रुप में समझना चाहिए जो कि पाठ्यक्रम को प्रभावित करता है। अतः, शिक्षक पाठ्यक्रम निर्माण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। शिक्षा से समाज की कुछ अपेक्षाएँ होती हैं जो पाठ्यक्रम को शिक्षण के उपरांत पूर्ण हुई मानी जाती है। पाठ्यक्रम का शिक्षण शिक्षक को करना पड़ता है। अर्थात समाज को शिक्षक से अपेक्षाएँ होती हैं। अब यदि पाठ्यक्रम निर्माण की प्रक्रिया में शिक्षक शामिल ही न हो तो वो समाज की अपेक्षाओं को पूरा कैसे कर पाएगा। यदि समाज की अपेक्षाएँ पूरी नहीं होंगी तो शिक्षा व्यवस्था पर से समाज का विश्वास उठ जाएगा। यदि समाज की अपेक्षाएँ पूरी नहीं होंगी तो शिक्षा व्यवस्था पर से समाज का विश्वास उठ जाएगा। इस नाते भी शिक्षक की भूमिका भी पाठ्यक्रम निर्माण में महत्वपूर्ण है।

चूँकि एक शिक्षक विद्यार्थियों को पाठ्यक्रम का लाभ पहुँचाने के लिए उनके साथ प्रत्यक्ष रुप से कार्य करता है। अतः, एक सशक्त पाठ्यक्रम निर्माण के लिए उसके प्रत्येक सोपान पर शिक्षक की भूमिका महत्वपूर्ण होती है।

शिक्षक अपने विद्यार्थियों की आवश्यकताओं को पाठ्यक्रम निर्माण में शामिल अन्य व्यक्तियों की तुलना में अधिक बेहतर ढंग से जानता है। अतः, वह पठ्यक्रम में शामिल किए जानेवाली सामग्रियों, क्रिया-कलापों, एवं कौशलों के प्रति विशिष्ट अंतर्दृष्टि प्रदान कर सकता है। विविध स्तरों के शिक्षक एक साथ मिलकर प्रत्येक स्तर पर विद्यार्थी द्वार धारित किए जानेवाले कौशलों की पहचान कर सकते हैं और यह सुनिश्चित कर सकते हैं कि पाठ्यक्रम विद्यार्थी को अगले कक्षा में प्रोन्नत करने के लिए वास्तव में तैयार करते हैं या नहीं।

उपरोक्त विवेचन से शिक्षक की भूमिका पाठ्यक्रम निर्माण की प्रक्रिया में स्पष्ट हो जती है। यह विवेचन सभी विषय के शिक्षकों एवं सभी विषय के पाठ्यक्रमों को ध्यान में रखकर किया गया है। यदि इसे गणित शिक्षक के संदर्भ में देखा जाय तो गणित विषय के पाठ्यक्रम निर्माण में गणित विषय के शिक्षक की भूमिका स्पष्ट हो जाती है।

अभ्यास प्रश्न

3. गणित पाठ्यक्रम के निर्माण में गणित शिक्षक की भूमिका को पाँच बिंदुओं में सूचीबद्ध करें।

2.5 माध्यमिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर की कक्षाओं के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन

पाठ्यक्रम का तुलनात्मक अध्ययन पाठ्यक्रम के मूल्यांकन की एक प्रविधि है। जब किसी प्रचलित पाठ्यक्रम का किसी मानक पाठ्यक्रम से तुलना की जाती है तो यह देखा जाता है कि प्रचलित पाठ्यक्रम में क्या कमी है। राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम मानक पाठ्यक्रम के रुप में जाने जाते हैं। इसलिए उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित गणित विषय के पाठ्यक्रम की तुलना राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित गणित विषय के पाठ्यक्रम के साथ की गई है ताकि उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित गणित विषय के पाठ्यक्रम की कमियों का पता लगाकर उन्हें और उन्नत बनाने के लिए प्रयास किया जा सके। इसके साथ ही राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित विषय के पाठ्यक्रम पर भी विचार व्यक्त किए गए हैं एवं उनकी विशेषताओं एवं सीमाओं को व्यक्त करने का प्रयास किए गए हैं। दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों के तुलनात्मक अध्ययन को निम्न तालिकाओं में दर्शाया गया है।

तालिका 1: 9वीं कक्षा के गणित विषय के लिए उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड एवं एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन

तुलना के बिंदु	उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित पाठ्यक्रम	एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रम
	कक्षा 9	
1. परीक्षण का समय	3 घंटा	3 घंटा
2. परीक्षण का पूर्णांक	80 अंक का सत्रांत मूल्यांकन + 20 अंक का आंतरिक मूल्यांकन	90 अंक का सत्रांत मूल्यांकन + 10 अंक का आंतरिक मूल्यांकन
3. कुल इकाइयों की संख्या	6	6
4. इकाइयों के नाम एवं परीक्षण के लिए उन्हें दिए गए भारांक	1. नम्बर सिस्टम - 06 2. बीज गणित - 20 3. नियामक ज्यामिति – 06 4. ज्यामिति - 22 5. क्षेत्रमिति – 14 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 12	1. नम्बर सिस्टम 2. बीज गणित 3. नियामक ज्यामिति 4. ज्यामिति 5. क्षेत्रमिति 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता
5. प्रत्येक मुख्य इकाई में शामिल उप इकाइयों की संख्या	1. नम्बर सिस्टम - 01 2. बीज गणित - 02 3. नियामक ज्यामिति – 01 4. ज्यामिति - 07 5. क्षेत्रमिति – 2 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 2	1. नम्बर सिस्टम 2. बीज गणित 3. नियामक ज्यामिति 4. ज्यामिति 5. क्षेत्रमिति 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता
6. आंतरिक मूल्यांकन के लिए कार्यक्रम एवं परीक्षण में उन्हें दिए गए भारांक	1. क्रिया-कलाप का मूल्यांकन – 10 2. परियोजना कार्य – 5 3. सतत मूल्यांकन – 5	1. क्रिया-कलाप का मूल्यांकन – 10 या 2. परियोजना कार्य – 5 3. सतत मूल्यांकन – 5

उपरोक्त तालिका में कक्षा 9 के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। तालिका के अध्ययन द्वारा निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं:

i. 9 वीं कक्षा के लिए दोनों संस्थानों द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।
ii. दोनों संस्थानों के पाठ्यक्रम में कुल 6-6 मुख्य इकाइयाँ शामिल हैं तथा इन इकाइयों को परीक्षण की दृष्टि से भारांक दिए गए हैं। दोनों संस्थानों द्वारा दिए गए भारांकों में अंतर है।
iii. प्रत्येक इकाई में कुछ उप इकाइयाँ सम्मिलित हैं जिनकी संख्या संस्थान के अनुसार परिवर्तित हो जाती है। यह परिवर्तन परीक्षण योजना के कारण है।
iv. पहली मुख्य इकाई जिसका शीर्षक 'नम्बर सिस्टम' है में पूर्व के कक्षा में पढ़ाए गए तथ्यों की पुनरावृति की गई है।

v. ज्यामिति को कक्षा के विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखते हुए काठिन्य स्तर के अनुसार थोड़ा विकसित किया गया है और इसमें रेखा, कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत आदि संप्रत्ययों से संबंधित प्रमें य को शामिल किया गया है।

vi. क्षेत्रमिति में क्षेत्रफल एवं आयतन के संप्रत्यय को साम्मिलित किया गया है।

vii. बीजगणित के तहत नवीन संप्रत्ययों को शामिल किया गया है।

viii. सांख्यिकी एवं प्रायिकता के संप्रत्यय को शामिल किया गया है।

ix. दोनों संस्थानों की परीक्षण योजनाओं में थोड़ा अंतर होने के कारण पाठ्यक्रम में थोड़ा अंतर दिखता है।

x. दोनों संस्थानों ने परीक्षण के लिए कुल समय 3 घंटे का दिया है।

xi. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड ने 80 अंकों के सत्रांत मूल्यांकन एवं 20 अंकों के आंतरिक मूल्यांकन की व्यवस्था की है। इसके विपरीत राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद ने 90 अंकों के सत्रांत मूल्यांकन एवं 10 अंकों के आंतरिक मूल्यांकन की व्यवस्था की है।

xii. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड वर्ष भर में एक ही सत्रांत परीक्षा की व्यवस्था करता है जबकि राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद वर्ष में दो सत्रांत परीक्षाओं की व्यवस्था करता है।

xiii. दो सत्रांत परीक्षाओं के कारण पाठ्यक्रम में शामिल मुख्य इकाइयों, उप इकाइयों एवं उनके भारांकों में थोड़ा अंतर दिखता है।

xiv. राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम को सत्रवार निम्नलिखित तालिका में प्रस्तुत किया गया है।

तालिका 2: 9वीं कक्षा के गणित विषय के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम में शामिल इकाइयों, उनके भारांक एवं प्रत्येक इकाई में शामिल उप-इकाइयों की संख्या का सत्रवार विवरण

सत्र	मुख्य इकाई एवं उसके भारांक	मुख्य इकाई में शामिल उप इकाई की संख्या
प्रथम	1. नंबर सिस्टम – 17 2. बीज गणित – 25 3. ज्यामिति - 37 4. नियामक ज्यामिति – 6 5. क्षेत्रमिति – 5	1. नंबर सिस्टम – 1 2. बीज गणित – 1 3. ज्यामिति - 3 4. नियामक ज्यामिति – 1 5. क्षेत्रमिति – 1
द्वितीय	1. बीजगणित - 16 2. ज्यामिति – 38 3. क्षेत्रमिति - 18 4. सांख्यिकि – 10 5. प्रायिकता – 8	1. बीजगणित - 1 2. ज्यामिति – 4 3. क्षेत्रमिति - 1 4. सांख्यिकि – 1 5. प्रायिकता – 1

उपरोक्त तालिका से यह स्पष्ट है कि अगर यदि राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम के सत्रवार विभाजन पर ध्यान न दिया जाय तो मुख्य इकाइयों में शामिल उप इकाइयों की संख्या बराबर है। इस प्रकार दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।

तालिका 3: 10वीं कक्षा के गणित विषय के लिए उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड एवं एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन

तुलना के बिंदु	**उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित पाठ्यक्रम**	**एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रम**
	कक्षा 10	
1. परीक्षण का समय	3 घंटा	3 घंटा
2. परीक्षण का पूर्णांक	80 अंक का सत्रांत मूल्यांकन + 20 अंक का आंतरिक मूल्यांकन	90 अंक का सत्रांत मूल्यांकन + 10 अंक का आंतरिक मूल्यांकन
3. कुल इकाइयों की संख्या	7	7
4. इकाइयों के नाम एवं परीक्षण के लिए उन्हें दिए गए भारांक	1. नम्बर सिस्टम - 04 2. बीज गणित - 20 3. त्रिकोणमिति - 12 4. नियामक ज्यामिति – 08 5. ज्यामिति - 16 6. क्षेत्रमिति – 10 7. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 10	1. नम्बर सिस्टम 2. बीज गणित 3. त्रिकोणमिति 4. नियामक ज्यामिति 5. ज्यामिति 6. क्षेत्रमिति 7. सांख्यिकी एवं प्रायिकता
5. प्रत्येक मुख्य इकाई में शामिल उप इकाइयों की संख्या	1. नम्बर सिस्टम - 01 2. बीज गणित - 04 3. त्रिकोणमिति - 03 4. नियामक ज्यामिति – 01 5. ज्यामिति - 03 6. क्षेत्रमिति – 02 7. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 02	1. नम्बर सिस्टम 2. बीज गणित 3. त्रिकोणमिति 4. नियामक ज्यामिति 5. ज्यामिति 6. क्षेत्रमिति 7. सांख्यिकी एवं प्रायिकता
6. आंतरिक मूल्यांकन के लिए कार्यक्रम एवं परीक्षण में उन्हें दिए गए भारांक	1. क्रिया-कलाप का मूल्यांकन – 10 2. परियोजना कार्य – 5 3. सतत मूल्यांकन – 5	1. क्रिया-कलाप का मूल्यांकन – 10 या 2. परियोजना कार्य – 5 3. सतत मूल्यांकन – 5

उपरोक्त तालिका में कक्षा 10 के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। तालिका के अध्ययन द्वारा निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं:

i. 10 वीं कक्षा के लिए दोनों संस्थानों द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।

ii. दोनों संस्थानों के पाठ्यक्रम में कुल 7-7 मुख्य इकाइयाँ शामिल हैं तथा इन इकाइयों को परीक्षण की दृष्टि से भारांक दिए गए हैं। दोनों संस्थानों द्वारा दिए गए भारांकों में अंतर है।

iii. प्रत्येक इकाई में कुछ उप इकाइयाँ सम्मिलित हैं जिनकी संख्या संस्थान के अनुसार परिवर्तित हो जाती है। यह परिवर्तन परीक्षण योजना के कारण है।

iv. पहली मुख्य इकाई जिसका शीर्षक 'नम्बर सिस्टम' है में संप्रत्ययों को काठिन्य स्तर के आधार पर आगे विकसित किया गया है।

v. ज्यामिति को कक्षा के विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखते हुए काठिन्य स्तर के अनुसार थोड़ा विकसित किया गया है।

vi. क्षेत्रमिति में क्षेत्रफल एवं आयतन के संप्रत्यय को और विकसित रुप में सम्मिलित किया गया है।

vii. बीजगणित के तहत नवीन संप्रत्ययों को शामिल किया गया है।

viii. सांख्यिकी एवं प्रायिकता के संप्रत्यय को शामिल किया गया है।

ix. त्रिकोणमिति को भी इसमें शामिल किया गया है।

x. दोनों संस्थानों की परीक्षण योजनाओं में थोड़ा अंतर होने के कारण पाठ्यक्रम में थोड़ा अंतर दिखता है।

xi. दोनों संस्थानों ने परीक्षण के लिए कुल समय 3 घंटे का दिया है।

xii. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड ने 80 अंकों के सत्रांत मूल्यांकन एवं 20 अंकों के आंतरिक मूल्यांकन की व्यवस्था की है। इसके विपरीत राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद ने 90 अंकों के सत्रांत मूल्यांकन एवं 10 अंकों के आंतरिक मूल्यांकन की व्यवस्था की है।

xiii. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड वर्ष भर में एक ही सत्रांत परीक्षा की व्यवस्था करता है जबकि राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद वर्ष में दो सत्रांत परीक्षाओं की व्यवस्था करता है।

xiv. दो सत्रांत परीक्षाओं के कारण पाठ्यक्रम में शामिल मुख्य इकाइयों, उप इकाइयों एवं उनके भारांकों में थोड़ा अंतर दिखता है।

xv. राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम को सत्रवार निम्नलिखित तालिका में प्रस्तुत किया गया है।

तालिका 4: 10वीं कक्षा के गणित विषय के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम में शामिल इकाइयों, उनके भारांक एवं प्रत्येक इकाई में शामिल उपइकाइयों की संख्या का सत्रवार विवरण

सत्र	मुख्य इकाई एवं उसके भारांक	मुख्य इकाई में शामिल उप इकाई की संख्या
प्रथम	1. नंबर सिस्टम – 11 2. बीज गणित – 23 3. ज्यामिति - 17 4. त्रिकोणमिति - 22 5. सांख्यिकि – 17	1. नंबर सिस्टम – 1 2. बीज गणित – 2 3. ज्यामिति - 1 4. त्रिकोणमिति - 2 5. सांख्यिकि – 1
द्वितीय	1. बीजगणित - 23 2. ज्यामिति – 17 3. त्रिकोण्मिति – 8 4. प्रायिकता – 8 5. नियामक ज्यामिति – 11 6. क्षेत्रमिति – 23	1. बीजगणित - 2 2. ज्यामिति – 2 3. त्रिकोण्मिति – 1 4. प्रायिकता – 1 5. नियामक ज्यामिति – 1 6. क्षेत्रमिति – 2

उपरोक्त तालिका से पुनः यह स्पष्ट होता है कि अगर राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम के सत्रवार विभाजन को नज़रांदाज़ कर दिया जाय तो मुख्य इकाइयों में शामिल उप इकाइयों की संख्या बराबर हो जाएगी। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।

तालिका 5: 11वीं कक्षा के गणित विषय के लिए उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड एवं एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन

तुलना के बिंदु	उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित पाठ्यक्रम	एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रम
	कक्षा 11	
1. परीक्षण का समय	3 घंटा	3 घंटा
2. परीक्षण का पूर्णांक	100 अंक का सत्रांत मूल्यांकन	100 अंक का सत्रांत मूल्यांकन
3. कुल इकाइयों की संख्या	6	6
4. इकाइयों के नाम एवं परीक्षण के लिए उन्हें दिए गए भारांक	1. समुच्चय एवं फलन (सेट ऐण्ड फंग्शन) - 29 2. बीज गणित - 37 3. नियामक ज्यामिति – 13 4. कलन - 6 5. गणितीय तर्कणा – 3 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 12	1. समुच्चय एवं फलन (सेट ऐण्ड फंग्शन) - 29 2. बीज गणित - 37 3. नियामक ज्यामिति – 13 4. कलन - 6 5. गणितीय तर्कणा – 3 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 12
5. प्रत्येक मुख्य इकाई में शामिल उप इकाइयों की	1. समुच्चय एवं फलन (सेट ऐण्ड फंग्शन) - 03	1. समुच्चय एवं फलन (सेट ऐण्ड फंग्शन) - 03

संख्या	2. बीज गणित - 06 3. नियामक ज्यामिति – 03 4. कलन - 1 5. गणितीय तर्कणा – 1 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 2	2. बीज गणित - 06 3. नियामक ज्यामिति – 03 4. कलन - 1 5. गणितीय तर्कणा – 1 6. सांख्यिकी एवं प्रायिकता – 2
6. आंतरिक मूल्यांकन के लिए कार्यक्रम एवं परीक्षण में उन्हें दिए गए भारांक	नहीं है।	नहीं है।

उपरोक्त तालिका में कक्षा 11 के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। तालिका के अध्ययन द्वारा निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं:

i. 11 वीं कक्षा के लिए दोनों संस्थानों द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।
ii. दोनों संस्थानों के पाठ्यक्रम में कुल 6-6 मुख्य इकाइयाँ शामिल हैं तथा इन इकाइयों को परीक्षण की दृष्टि से भारांक दिए गए हैं। दोनों संस्थानों द्वारा दिए गए भारांकों में भी समानता है।
iii. प्रत्येक इकाई में कुछ उप इकाइयाँ सम्मिलित हैं जिनकी संख्या भी समान है।
iv. पहली मुख्य इकाई जिसका शीर्षक 'समुच्चय एवं फलन' है में समुच्चय एवं फलन के प्रारंभिक संप्रत्ययों को शामिल किया गया है तथा काठिन्य स्तर के अनुसार उन्हें विकसित भी किया गया है।
v. नियामक ज्यामिति को कक्षा के विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखते हुए काठिन्य स्तर के अनुसार थोड़ा विकसित किया गया है।
vi. अंकगणितीय तर्कणा नाम से एक नए संप्रत्यय को शामिल किया गया है।
vii. कलन के संप्रत्यय को शामिल किया गया है।
viii. सांख्यिकी एवं प्रायिकता के संप्रत्यय को काठिन्य स्तर के अनुसार विकसित किया गया है।
ix. दोनों संस्थानों की परीक्षण योजनाओं में भी कोई अंतर नहीं है।
x. दोनों संस्थानों ने परीक्षण के लिए कुल समय 3 घंटे का दिया है।
xi. दोनों संस्थानों ने 100 अंकों के सत्रांत परीक्षण की व्यवस्था की है।
xii. आंतरिक मूल्यांकन की कोई व्यवस्था नहीं है।

इस प्रकार 11वीं कक्षा के गणित विषय के लिए दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।

तालिका 6: 10वीं कक्षा के गणित विषय के लिए उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड एवं एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन

तुलना के बिंदु	उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित पाठ्यक्रम	एनसीईआरटी द्वारा विकसित पाठ्यक्रम
	कक्षा 12	
1. परीक्षण का समय	3 घंटा	3 घंटा
2. परीक्षण का पूर्णांक	100 अंक का सत्रांत मूल्यांकन	100 अंक का सत्रांत मूल्यांकन
3. कुल इकाइयों की संख्या	6	6
4. इकाइयों के नाम एवं परीक्षण के लिए उन्हें दिए गए भारांक	1. रिलेशन ऐण्ड फंग्शन्स - 10 2. बीज गणित - 13 3. कलन – 44 4. सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिती - 17 5. लिनियर प्रोग्रामिंग – 6 6. प्रायिकता – 10	1. रिलेशन ऐण्ड फंग्शन्स - 10 2. बीज गणित - 13 3. कलन – 44 4. सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिती - 17 5. लिनियर प्रोग्रामिंग – 6 6. प्रायिकता – 10
5. प्रत्येक मुख्य इकाई में शामिल उप इकाइयों की संख्या	1. रिलेशन ऐण्ड फंग्शन्स - 02 2. बीज गणित - 02 3. कलन – 05 4. सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिती - 02 5. लिनियर प्रोग्रामिंग – 1 6. प्रायिकता – 1	1. रिलेशन ऐण्ड फंग्शन्स - 02 2. बीज गणित - 02 3. कलन – 05 4. सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिती - 02 5. लिनियर प्रोग्रामिंग – 1 6. प्रायिकता – 1
6. आंतरिक मूल्यांकन के लिए कार्यक्रम एवं परीक्षण में उन्हें दिए गए भारांक	नहीं है।	नहीं है।

उपरोक्त तालिका में कक्षा 12 के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं अनुसंधान परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। तालिका के अध्ययन द्वारा निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं:

i. 12 वीं कक्षा के लिए दोनों संस्थानों द्वारा गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।
ii. दोनों संस्थानों के पाठ्यक्रम में कुल 6-6 मुख्य इकाइयाँ शामिल हैं तथा इन इकाइयों को परीक्षण की दृष्टि से भारांक दिए गए हैं। दोनों संस्थानों द्वारा दिए गए भारांकों में भी समानता है।

iii. प्रत्येक इकाई में कुछ उप इकाइयाँ सम्मिलित हैं जिनकी संख्या भी समान है।
iv. पहली मुख्य इकाई जिसका शीर्षक 'रिंलेशन ऐण्ड फंग्शंस है' में फलन के प्रारंभिक संप्रत्ययों को शामिल किया गया है तथा काठिन्य स्तर के अनुसार उन्हें विकसित भी किया गया है।
v. बीजगणित को कक्षा के विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखते हुए काठिन्य स्तर के अनुसार थोड़ा विकसित किया गया है।
vi. 'सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति' के नाम से एक नए संप्रत्यय को शामिल किया गया है।
vii. कलन के संप्रत्यय को शामिल किया गया है।
viii. प्रायिकता के संप्रत्यय को काठिन्य स्तर के अनुसार विकसित किया गया है।
ix. लिनियर प्रोग्रामिंग को शामिल किया गया है।
x. दोनों संस्थानों की परीक्षण योजनाओं में भी कोई अंतर नहीं है।
xi. दोनों संस्थानों ने परीक्षण के लिए कुल समय 3 घंटे का दिया है।
xii. दोनों संस्थानों ने 100 अंकों के सत्रांत परीक्षण की व्यवस्था की है।
xiii. आंतरिक मूल्यांकन की कोई व्यवस्था नहीं है।

अतः, दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रम एक समान है।

उपरोक्त विवेचन एवं तालिकाओं के आधार पर यह स्पष्ट हो जाता है कि इन दोनों संस्थाओं द्वारा माध्यामिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर की कक्षाओं के लिए विकसित गणित विषय का पाठ्यक्रम एक समान है। माध्यमिक कक्षाओं के पाठ्यक्रम में जो दृष्टिगोचर होता है वह वास्तव में परीक्षण की योजना का अंतर है। यह भी कहा जा सकता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा विकसित पाठ्यक्रम को मानक मानते हुए उताराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड ने उसी पाठ्यक्रम को अपना लिया है। पाठ्यक्रम में सभी अनिवार्य एवं नवीन पाठ्यवस्तु को शामिल किया गया है। पाठ्यक्रम प्रगतिशील है। अर्थात कक्षा में प्रोन्नति के साथ-साथ पाठ्यक्रम में शामिल इकाइयों एवं उप इकाइयों या यूँ कह लें कि पाठ्यवस्तु में भी प्रोन्नति होती जाती है। प्रन्नोति क्रमिक है। ऐसा नहीं है कि दो क्रमिक कक्षाओं के पाठ्यक्रम के पाठ्यवस्तुओं में बहुत बड़ी खाई बन गई हो। हाँ यह अवश्य है कि माध्यमिक स्तर की कक्षा के लिए दोनों संस्थाओं द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों में से किसी में भी व्यावसायिक गणित या अंकगणित को स्थान नहीं दिया गया है। व्यावसायिक गणित का उच्चस्तरीय ज्ञान दैनिक जीवन के लिए बहुत आवश्यक है। अतः, माध्यमिक स्तर की कक्षाओं तक पाठ्यक्रम में इसे अवश्य शामिल किया जाना चाहिए।

अभ्यास प्रश्न

4. एनसीईआरटी द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम के परीक्षण का पूर्णांक ____है?

5. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम के परीक्षण का पूर्णांक_____है?
6. उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम में आंतरिक परीक्षण का पूर्णांक_____ है?
7. एनसीईआरटी द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम में आंतरिक परीक्षण का पूर्णांक_____है?
8. एनसीईआरटी एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड दोनों संस्थाओं द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों में _____एवं_____इकाइयाँ हैं।
9. एनसीईआरटी द्वारा कक्षा 10 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम में कुल कितनी इकाइयाँ हैं।
10. क्या एनसीईआरटी एवं उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड दोनों संस्थाओं द्वारा कक्षा 9 के गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रमों में आंतरिक मूल्यांकन की व्यवस्था है?
11. गणितीय तर्कणा को किस कक्षा एवं किस बोर्ड के गणित विषय के पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है।
12. सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिती को किस कक्षा एवं किस बोर्ड के गणित विषय के पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है।

2.6 सारांश

प्रस्तुत इकाई की शुरुआत शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में विकसित एक नवीन प्रवृत्ति, जिसे कि पाठ्यपुस्तक से शिक्षण सामग्री की ओर व्यक्ति के रुचि या रुझान में परिवर्तन के रुप में देखा जा सकता है, पर चर्चा के साथ की गई है। यह चर्चा प्रशिक्षु शिक्षकों के लिए बहुत उपयोगी है क्योंकि वो स्वयं इस परिवर्तन के साक्षी है। यह परिवर्तन क्यों हो रहा है और इस परिवर्तन को अपनाने में किन सावधानियों का ध्यान रखना आवश्यक है इस बात की भी चर्चा की गई है जो प्रशिक्षु शिक्षकों को इस नवीन प्रवृत्ति को अपनाने में सहायता करेगी। इसके पश्चात गणित के पाठ्यक्रम के निर्माण या विकास में गणित शिक्षक की क्या भूमिका है इसे भी स्पष्ट किया गया है। प्रशिक्षु शिक्षक एक दिन स्वयं गणित शिक्षक बनेंगे अतः, उन्हें अपने उत्तरदायित्वों एवं भूमिकाओं का ज्ञान होना चाहिए। इकाई के अंत में माध्यमिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर की कक्षाओं के लिए राष्ट्रीय शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित गणित विषय के पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। इस तुलनात्मक अध्ययन से पाठ्यक्रम की प्रवृत्तियों, उनकी विशेषताओं एवं उनकी सीमाओं को जानने में सहायता मिलेगी। इस प्रकार प्रस्तुत इकाई गणित विषय के शिक्षकों एवं प्रशिक्षु शिक्षकों के लिए बहुत उपयोगी है।

2.7 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. इस प्रश्न के उत्तर के लिए इस इकाई का खंड 2.3.1 देखें।
2. इस प्रश्न के उत्तर के लिए इस इकाई का खंड 2.3.2 देखें।
3. इस प्रश्न के उत्तर के लिए इस इकाई का खंड 2.4 देखें।
4. 90
5. 80
6. 20
7. 10
8. 6, 6
9. 7
10. हाँ
11. 11वीं
12. 12वीं

2.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं सहयोगी ग्रंथ

1. Carl, A. (2009). Teacher empowerment through curriculum development theory into practice. Juta&Company Ltd.
2. DeRose, J. (2009). Back to the future with textbooks: Using textbook passages from the past to help teach historiography. *The History Teacher, 42*(2). Long Beach, CA: The Society for History Education.
3. Falknor, J. (2010). *Instruction of reading comprehension strategies in literature textbooks*. Retrieved from ProQuest's website: http://udini.proquest.com/view/instruction-of-reading-goid:840627294/
4. Foley, B., & McPhee, C. (2008). *Students' attitudes towards science in classes using hands-on or textbook based curriculum*. Washington, DC: American Educational Research Association.
5. Johnson, J. A. (2001, August 28). Curriculum revision that works. In principles of effective change. Retrieved March 10, 2014 .
6. Stambaugh, J., & Trank, C. (2010). Not so simple: Integrating new research into textbooks. *Academy of Management Learning and Education, 9*(4) 663–681. Briarcliff Manor, NY: Academy of Management.

7. Teten, R. (2010). When in Rome, do as Jon Stewart does: Using America: The book as a textbook for introductory-level classes in American politics. *Journal of Political Science Education, 6*(2) 163–187. London: Routledge.

2.9 निबंधात्मक प्रश्न

1. 'पाठ्यपुस्तक से शिक्षण-अधिगम सामग्री की ओर व्यक्ति के रुझान में परिवर्तन' पर निबंध लिखें।
2. गणित शिक्षक की गणित विषय के पाठ्यक्रम निर्माण में क्या भूमिका है? सविस्तार चर्चा करें।
3. किसी भी विषय के पाठ्यक्रम का समीक्षात्मक अध्ययन करने के लिए किन-किन विंदुओं को ध्यान में रखना आवश्यक है?
4. आठवीं कक्षा के गणित विषय के लिए राज्य शैक्षिक शोध एवं प्रशिक्षण परिषद तथा उत्तराखंड राज्य शिक्षा बोर्ड द्वारा विकसित पाठ्यक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत करें।

इकाई 3 - गणित शिक्षण की विभिन्न विधियाँ तथा कौशल

Methods and Strategies of Teaching Mathematics

3.1 प्रस्तावना
3.2 उद्देश्य
3.3 गणित शिक्षण की विभिन्न विधियाँ
3.4 गणित में मौखिक एवं लिखित कार्य
3.5 गणित शिक्षण में मस्तिष्क
3.6 गणित में कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन
3.7 सारांश
3.8 संदर्भ ग्रंथ सूची
3.9 निबंधात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना

जैसा कि अभी तक आपने जाना कि गणित एक सरल एवं रोचक विषय है, और गणित का शिक्षण एक प्रसन्नतादायक कार्य है परन्तु कई बार यह देखा जाता है कि गणित विद्यार्थियों के लिए एक अत्यंत ही बोझिल, नीरस और उबाऊ विषय बन जाता है और विद्यार्थी इस से डरने लगते हैं। जब गणित विद्यार्थियों के लिए उबाऊ हो जाता है और विद्यार्थी उसमें रूचि लेना बंद कर देते हैं, विद्यार्थियों की गणित के प्रति यह अरुचि अंततः गणित की कक्षा को शिक्षक के लिए भी एक उबाऊ एवं बोझिल कार्य बना देती है फलतः शिक्षक एवं विद्यार्थी दोनों के लिए गणित शिक्षण कठिन हो जाता है जो विद्यार्थियों के समस्त अधिगम को प्रभावित करता है। कई बार गणित से विद्यार्थियों में इस कदर भय व्याप्त हो जाता है कि विद्यार्थी गणित से जैसे भी हो छुटकारा चाहने लगते हैं। आखिर विद्यार्थी गणित से क्यूँ भागने लगते हैं? इसका सबसे बड़ा कारण है: गणित शिक्षण की प्रक्रिया वैज्ञानिक एवं विकासात्मक मनोविज्ञान के अनुसार न होना एवं गणित शिक्षक द्वारा गणित शिक्षण की प्रायोगिक विशिष्ट विधियों का प्रयोग न करना। गणित की प्रकृति विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान एवं मानविकी आदि से भिन्न है इसलिए गणित शिक्षण की विधियाँ भी इन विषयों से भिन्न हैं। आइये जानें कि गणित शिक्षण की विभिन्न विशिष्ट विधियाँ कौन कौन सी हैं इनके लाभ और इनकी सीमायें क्या हैं और कौन-सी विधि किस परिस्थिति एवं गणित के किस अवयव के अध्यन के लिए उपयुक्त है?

3.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

1. गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों को बता पाने में
2. व्याख्यान विधि उसके गुण एवं उसकी सीमायें बता पाने में
3. आगमन एवं निगमन विधि, उसके गुण एवं उसकी सीमायें बता पाने में
4. संश्लेषण एवं विश्लेषण विधि उसके गुण एवं उसकी सीमायें बता पाने में
5. समस्या समाधान विधि उसके गुण एवं उसकी सीमायें बता पाने में
6. परियोजना विधि उसके गुण एवं उसकी सीमायें बता पाने में
7. गणित में मौखिक कार्य एवं उसके महत्त्व पर चर्चा कर पाने में
8. गणित में लिखित कार्य एवं उसके महत्त्व पर चर्चा कर पाने में
9. गणित में ड्रिल एवं अभ्यास का महत्व बता पाने में
10. गणित शिक्षण में ब्रेन स्टॉर्मिंग के उद्देश्य एवं महत्व की व्याख्या कर पाने में
11. गणित शिक्षण में कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन की उपयोगिता की व्याख्य कर पाने में
12. उपरोक्त सभी विधियों का आवश्यकतानुसार शिक्षण के दौरान उपयोग कर पाने में

3.3 गणित शिक्षण की विभिन्न विधियाँ

जैसा कि ऊपर कहा गया गणित की प्रकृति विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान एवं मानविकी आदि से भिन्न है इसलिए गणित शिक्षण की विधियाँ भी इन विषयों से भिन्न हैं। गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों में प्रमुख विधियाँ निम्नांकित हैं:

- व्याख्यान विधि (Lecture Method)
- आगमन एवं निगमन विधि (Inductive-Deductive Method)
- संश्लेषण एवं विश्लेषण विधि (Analytic-Synthetic Method)
- समस्या समाधान विधि (Problem Solving Method)
- परियोजना विधि (Project Method)

उपरोक्त सभी विधियों की अपनी अपनी विशेषताएं और अपनी अपनी सीमायें हैं। प्रत्येक विधि प्रत्येक पाठ के लिए उपयुक्त नहीं हो सकती अतः एक अच्छे गणित शिक्षक को चाहिए कि पढाये जाने वाले पाठ के अनुरूप सर्वाधिक उपयुक्त विधि / विधियों का चयन करे ताकि गणित शिक्षण प्रभावी हो सके और गणित की कक्षा एक रुचिकर कक्षा हो। आइये हम एक एक कर के उपरोक्त सभी विधियों पर चर्चा करें।

i. **व्याख्यान विधि (Lecture Method) -** व्याख्यान विधि एक पारंपरिक शिक्षण विधि है जिसमें मुख्यतः भाषा (लिखित या मौखिक) के द्वारा आवश्यक सूचनायें प्रदान की जाती है इसलिय इसे चाक और वार्ता (Chalk and talk) विधि भी कहा जाता हैं। इस विधि में अभ्व्यक्ति, शिक्षण एवं अधिगम मुख्यतः शिक्षक द्वारा बोले या लिखे गए शब्दों पर निर्भर होती है। इसमें शिक्षक एक सक्रिय भूमिका में होता है और विद्यार्थी अपेक्षा कृत निष्क्रिय श्रोता होते हैं । यह एक शिक्षक केन्द्रित शिक्षण विधि है जिसमें विचारों का प्रवाह एक तरफा होता है। शिक्षक प्रायः अपने विषयवस्तु पर वार्ता तैयार करके लाता है और छात्रों के सम्मुख प्रस्तुत करता है जिसे छात्र सुनकर समझने का प्रयत्न करते हैं।उदाहरण के लिए समुच्चय को परिभाषित करते हुए एक शिक्षक व्याख्या कर सकता है: "वस्तुओं के एक सुपरिभाषित समूह को समुच्चय कहते हैं अर्थात कोई भी समूह समुच्चय नहीं हो सकता बल्कि सिर्फ वह समूह समुच्चय कहा जायेगा जिसमें उसके अवयव एक दुसरे से किसी निश्चित नियम से बंधें हों जैसे सम संख्याओं का समूह, विषम संख्याओं का समूह, विद्यालय में पांचवीं कक्षा में पढनेवाले विद्यार्थियों का समूह आदि समुच्चय के उदहारण हैं"।

व्याख्यान विधि गणित अथवा विज्ञान विषयों के शिक्षण में ज्यादा प्रभावी नहीं है परन्तु कुछ विशेष परिस्थितियों में गणित शिक्षण में इसका उपयोग सावधानी पूर्वक, अन्य प्रभावी विधियों के साथ समन्वय रखते हुए किया जा सकता है। व्याख्यान विधि गणित शिक्षण के दौरान निम्नांकित परिस्थितियों में उपयोग किया जा सकता है

- नये विषय वस्तु की प्रस्तावना में,
- अमूर्त (Abstract) अवधारणाओं की व्याख्या में,
- वाद विवाद का आरम्भ करने में,
- अवधारणाओं के संक्षेपीकरण एवं पुनरावलोकन (review) में एवं
- व्याख्या करने, प्रमें य सिद्ध करने तथा लम्बी, जटिल समस्या को हल करने में।

व्याख्यान विधि के गुण

- जब कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अत्यधिक हो तब व्याख्यान विधि का सीमित प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि कक्षा के सभी छात्र शिक्षक की वार्ता सुनते है और सभी को सुनने और सीखने का समान अवसर मिलता है।
- यह विधि आर्थिक और समय की दृष्टि से काफी किफायती (Cost Effective) भी है।
- शिक्षक के लिए सुविधाजनक हैं क्योकि इसमें विद्यार्थियों को को व्यक्तिगत सहायता नहीं देनी पडती तथा साथ ही शिक्षक अपनी गति से शिक्षण कर के वृहत पाठ्यक्रम को भी जल्दी पूरा कर सकता है।

- यह सूचनाओं के आदान-प्रदान की पुरानी एवं पारंपरिक विधि है।
- इसमें शिक्षक योजनाबद्ध तरीके से विचारों को उनके स्वाभाविक क्रम में रख सकता है।
- व्याख्यान विधि गणित के प्रति विद्यार्थियों की रुची जागृत करने एवं गणित अध्ययन के लिए उन्हें प्रेरित करने में अत्यंत प्रभावी सिद्ध हो सकता है। शिक्षक अपनी वार्ता से गणित की जीवन में उपयोगिता बताकर/अच्छे उदाहरण देकर काफी रोचक और प्रेरणादायक बना सकता है। इस विधि से अधिक विषय वस्तु को कम समय में पढाया जा सकता है।

व्याख्यान विधि की कमियां

- गणित का प्रमुख उद्देश्य विद्यार्थियों में तार्किक चिन्तन का विकास करना है जो छात्रों को बिना स्वयं चिन्तन किये, विषय वस्तु को सिर्फ शिक्षक से सुन कर नहीं प्राप्त किया जा सकता है।
- यह एक शिक्षक केन्द्रित विधि है विद्यार्थी केन्द्रित विधि नहीं जबकि वर्तमान शिक्षा विद्यार्थी केन्द्रित शिक्षा है जिसमें शिक्षण, छात्रों की आवश्यकताओं, क्षमताओं एवं सीमाओं के अनुसार उनकी स्वयं की सक्रिय भागीदारी के साथ होना चाहिए।
- **व्याख्यान विधि** विद्यार्थियों को स्वयं करके सीखने, स्वयं प्रयोग करने तथा सक्रिय रूप से शिक्षण में भागीदार होनें का अवसर नहीं प्रदान करता।
- इस विधि में छात्र निष्क्रिय रहते हैं, इसलिए व्याख्यान से उसका ध्यान हट सकता है, और कक्षा नीरस हो सकती है यह विधि मनोवैज्ञानिक नहीं है।
- गणित शिक्षण की यह व्याख्यान विधि अधिगम सिद्धान्तो के अनुकूल नहीं है।
- यह विधि दिव्यांग जनों (Specially Abled Children) के लिए उपयुक्त नहीं है।
- यह विधि एक तरफा (Unipolar) है जिसमें अध्यापक सक्रिय और विद्यार्थी निष्क्रिय भूमिका में होते हैं।

ii. आगमनात्मक तथा निगमनात्मक विधियां (Inductive-Deduvtive Method) - आगमन एवं निगमन विधि गणित एवं विज्ञान शिक्षण की एक महत्वपूर्ण विधि है।

आगमनात्मक विधि

यह विधि आगमन के सिद्धांत पर आधारित है, जिसमें छात्र मूर्त (concrete) से अमूर्त (abstract), विशिष्ट से सामान्य (general) की ओर सीखते हैं। इस विधि के द्वारा किसी समस्या को हल करने के लिए पहले से ज्ञात तथ्यों या नियमों का सहारा नहीं लिया जाता है बल्कि विद्यार्थियों को कुछ उदाहरण प्रस्तुत किये जाते हैं, जिससे वह अपनी सूझबूझ तथा तर्कशक्ति का प्रयोग करते हुए इन उदाहरणों के मूर्त तथ्यों (concrete facts) का सामान्यीकरण करते हुए किसी नियम या सिद्धान्त तक पहुँचते हैं। इस प्रकार यह विधि पर्याप्त संख्या में स्थूल

उदाहरणों से कोई फार्मूला, नियम सा सिद्धान्त निकालने की विधि है। यह आगमन पर आधारित है जिसमें कई स्थितियों में किसी को सत्य प्रमाणित करके किसी सामान्य नियम का प्रतिपादन किया जाता है। तर्क यह है कि यदि उन उदाहरणों में यह सत्य है, तो इस प्रकार की सभी स्थितियों में भी सत्य है।

उदाहरण -

छात्रों को विभिन्न प्रकार के (समकोण, समद्विबाहु, साधारण) गत्ते पर बने त्रिभुजों को देकर उनके कोणें, का योग प्राप्त करने को कहें, उनसे प्राप्त परिणामों को श्यामू पट्ट पर लिखें। अवलोकन करने में सहायता करते हुए सभी छात्रों, से निष्कर्ष निकलवाये कि त्रिभुजों के कोणों का योग 180° होता है। सामान्यीकरण के रूप में उन्हें यह समझने में सहायता दीजिए कि " किसी भी त्रिभुज में तीनों कोणो का योग 180° है"

1. $(a+b) \times (a-b)$ को गुणा करवा कर $a^2 - b^2$, प्राप्त करायें।
   इसी प्रकार $(b+c)(b-c)$ को गुणा करके $b^2 - c^2$ प्राप्त करायें।
   सामान्यीकरण के रूप में $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ की पहचान करायें।
   अधिकतर गणित सूत्रों की स्थापना आगमन विधि से की जाती है।

आगमन विधि के गुण

- यह विधि विभिन्न तथ्यों एवं सूत्रों को समझने में अत्यंत सहायक है। जब बहुत से सरल उदाहरणों के द्वारा किसी सिद्धान्त का सामान्यीकरण किया जाता है तो उसे समझने में आसानी होती है।
- यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है क्योंकि इसमें छात्रों की रूचि आरम्भ से अन्त तक बनी रहती है।
- यह विधि वास्तविक अवलोकन, चिन्तन एवं प्रयोग पर आधारित है इसलिए यह उनके लिए रुचिकर है एवं उनका आत्मविश्वास जागृत करती है।
- यह एक विद्यार्थी केन्द्रित विधि है।
- यह तर्क आधारित विधि है, इसलिए गणित जैसे विषय के लिए बहुत उपयुक्त है: विशेषकर शिक्षण के आरम्भिक स्तर पर, लगभग सभी शिक्षण आगमन विधि से ही होते हैं।
- यह विधि बालक में अनुसंधान करने की प्रवृत्ति का विकास करती है।
- यह विधि बालक की मानसिक योग्यता, क्षमता तथा भावनात्मक योग्यता और एकाग्रता जैसे मनौवैज्ञानिक गुणों काविकास करती है।

आगमन विधि की कमियां

- इस विधि का उपयोग सीमित है। सभी प्रकार के गणितीय सिद्धांतों के लिए यह उपयुक्त नहीं है। जटिल सूत्रों को इस विधि के द्वारा स्थापित नही किया जा सकता है।

- इस विधि से सामान्यीकरण करने में अधिक समय लगता है।
- इस विधि द्वारा प्राप्त नियमों की विश्वसनीयता उदाहरणों की संख्या पर निर्भर करती है, इसलिए केवल कुछ विशिष्ट उदाहरणों के आधार पर प्राप्त नियमों के गलत होने की सम्भावना भी हो सकती है।
- इस विधि से नियम प्राप्त किये जा सकते है। अभ्यास का कार्य नहीं कराया जा सकता, इसलिए बिना निगमन विधि यह अधूरी है।
- इस विधि में समय अधिक लगता है इस कारण गणित का पाठ्यकम पूरा नहीं हो सकता।

निगमन विधि (Deductive Method) - निगमन विधि की प्रक्रिया आगमन विधि के विपरीत है। इसमें हम सामान्य (General) से विशिष्ट (Specific) की ओर, अमूर्त(Abstract) से मूर्त(Concrete) की ओर चलते है। वस्तुतः यह आगमन विधि की पूरक विधि है और इसका प्रयोग करके आगमन विधि द्वारा स्थापित सिद्धांतों का सत्यापन किया जाता है। जैसा आरम्भ में कहा गया है गणित शिक्षण के दौरान आगमन या निगमन विधि का अकेले प्रयोग न करके, दोनों का संतुलित प्रयोग शिक्षण को प्रभावी बनाता है। निगमन की विधि अत्यंत प्राचीन विधि है जिसमें एक दिए गए गणितीय सूत्र/ सिद्धांत को पहले स्वीकार कर लिया जाता है और बाद में विभिन्न विशिष्ट उदाहरणों के द्वारा उसकी पुष्टि की जाती है।

निगमन विधि के गुण

- यह विधि संक्षिप्त और समय की दृष्टि से किफायती है। दिये हुए नियम के आधार पर समस्याओं को हल करना अपेक्षाकृत सरल है।
- गणितीय अभ्यास एवं पुनरावलोकन के लिए यह विधि काफी उपयोगी है। निगमन विधि के द्वारा विविध नियमों के प्रयोग का उपयुक्त अभ्यास कराया जा सकता है।
- यह विधि विभिन्न बौद्धिक स्तर के विद्यार्थियों के लिए उपयुक्त है। सामान्य छात्रों को सामान्य तथा प्रतिभावान छात्रों को कठिन प्रश्नों द्वारा अभ्यास कराया जा सकता है।
- आगमन एवं निगमन विधी एक दूसरे के पूरक हैं।इनका प्रयोग एक दुसरे के साथ ही किया जाना चाहिए।
- आगमन-निगमन विधि का समन्वित प्रयोग सभी कक्षाओं के लिए गणित शिक्षण के लिए उपयुक्त है।

निगमन विधि की कमियां

- प्रारम्भिक गणित के स्तर पर अमूर्त सूत्र/ सिद्धांतों (abstract formula) को समझना बहुत कठिन होता है, यदि उन्हें कई मूर्त (concrete) उदाहरणों से स्पष्ट न किया जाय,अतः आरंभिक स्तर पर गणित शिक्षण के लिए उपयोगी नहीं है।
- यह स्मरण आधारित (cramming based) विधि है जिसमें विद्यार्थियों की तार्किक क्षमता के विकसित होने के कम अवसर प्राप्त होते हैं तथा साथ ही उन्हें सूत्र की संकल्पना / व्युत्पत्ति को समझने में कठिनाई होती है।
- यह विधि मनोवैज्ञानिक विधि नहीं है यदि इसका प्रयोग आगमन विधि के साथ ण किया जाये

वस्तुतः आगमनात्मक तथा निगमन विधियों के अपने अपने गुण दोष है परन्तु यदि दोनों को समन्वित प्रयोग किया जाये तो दोनों की काफी कमियां दूर हो सकती है और छात्र के लिए गणित शिक्षण न केवल अधिक तर्क संगत होगा रूचिकर भी होगा। यह दोनों विधियां एक दूसरे के पूरक हैं। गणित शिक्षण में हमें आगमनात्मक विधि से आरम्भ करना चाहिये फिर उसे निगमन विधि से अभ्यास कराना चाहिए। इससे न केवल गति और परिशुद्धता बढ़ेगी, गणित विषय पर पकड भी बढेगी। आगमनात्मक विधि से गणित को समझे और निगमन विधि से उसका अनुप्रयोग करें। आगमनात्मक-निगमनिक विधियों का संयोजन ही गणित शिक्षण में सबसे अच्छे परिणाम ला सकता है। गणित अध्यापक को दोनो विधियों का समायोजन करके अर्थात आगमन-निगमन विधि का अनुप्रयोग गणित शिक्षण के लिए करना उपयुक्त है।

आगमन एवं निगमन विधियों की तुलना		
	आगमन विधि	**निगमन विधि**
1	विशिष्ट से सामन्य की ओर	सामान्य से विशिष्ट की ओर
2	यथार्थ से अमूर्त की ओर	अमूर्त्त से यथार्थ की ओर
3	विद्यार्थियों को सक्रिय रखने वाला एवं उनकी तार्किक चिंतन की क्षमता बढ़ानेवाला	सूत्रों पर आधारित गणितीय समस्याओं में दक्ष बनाने वाला
4	प्रत्यक्ष अनुभवों से आरम्भ होकर सामान्यीकरण की ओर ले जाने वाला	नियम एवं सिद्धांतों से आरम्भ होकर अभ्यास और प्रयोग के अवसर प्रदान करनेवाला
5	सिद्धांत एवं सूत्रों की व्युत्पत्ति की समझ प्रदान करने वाला	सिद्धांतों एवं सूत्रों की व्युत्पत्ति की बजाए उनके अभ्यास पर जोर देनेवाला
6	विद्यार्थियों की अन्वेषण क्षमता बढ़ानेवाला	पूर्व में प्राप्त सिद्धांतों एवं ज्ञान के बीच सम्बन्ध स्थापित करने वाला

iii. विश्लेषणात्मक-संश्लेषणात्मक विधियां (Analytic–Synthetic Method)

आगमन एवं निगमण विधि की तरह ही यह दोनों विधिया भी एकसाथ प्रयोग जाती हैं आइये सबसे पहले हम इन विधियों की कार्यप्रणाली को अलग अलग देखें।

विश्लेषणात्मक विधि (Analytic Method)- विश्लेषण शब्द का अर्थ है किसी वस्तु को उसके अवयवों में बाँटकर उसका अध्ययन करना अर्थात दी गयी समस्या को उसके छोटे छोटे अवयों में बांटकर उसका अध्ययन करना। यह किसी समस्या का हल ढूंढने की एक उत्तम विधि है। इस विधि द्वारा ज्ञात की सहायता से अज्ञात का पता लगाया जाता है। इस विधि दिये गए जटिल तथ्यों तार्किक विश्लेषण करके समस्या का हल प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण: सिद्ध करना है कि $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

विश्लेषण : बांई तरफ को दाहनी तरफ के बराबर सिद्ध करना है

अर्थात $\tan\theta$ को $\sec\theta$ रूप में परिवर्तित करना है, या

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ के रूप में परिवर्तित करना है

इस रूप में $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

बाई और $\frac{\sin^2\sin^2\theta}{\sin^2\sin^2\theta} + 1 = \frac{\sin^2\sin^2\theta + \cos^2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ होता

इस लिए बाई ओर $= \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

अंत में $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$, या, $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

विश्लेषण विधि के गुण (Merits of Analytic Method)

1. समस्या समाधान आसान: इस विधि में समस्या को उसके छोटे छोटे अवयवों में बांटकर अध्ययन करते हैं जो समस्या की जटिलता को न्यून कर देता है।
2. तार्किक चिंतन का विकास:यह विधि विद्यार्थियों के तार्किक चिंतन के विकास में सहायक होती है जो गणित का एक प्रमुख लक्ष्य है।
3. करके सीखने पर आधारित: इस विधि में छात्रों को प्रारम्भ से अन्त तक की सारी प्रकिया से स्वयं गुजरना होता है जो उन्हें विषय वस्तु को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है।
4. अपेक्षाकृत स्थायी ज्ञान
5. विद्यार्थी केंद्रित: यह विधि विद्यार्थी केन्द्रित विधि है।
6. विद्यार्थियों में खोज की भावना के विकास में सहायक।

विश्लेषण विधि की सीमायें (Demerits of Analystic Method)

1. यह एक लम्बी विधि है, इसमें समय एवं श्रम अधिक लगता है।
2. यह विधि छोटे बालकों तथा सामान्य से कम बुद्धि वाले छात्रों के लिए उपयोगी नहीं है।
3. इस विधि से गति और परिशुद्धता प्राप्त करना कठिन है।
4. गणित में सभी प्रकार की समस्याओं में इसका प्रयोग नहीं हो सकता। यह जटिल समस्याओं के लिए अधिक उपयोगी है ।

संश्लेषण विधि (Synthetic Method)

यह शिक्षण विधि विश्लेषण विधि के बिल्कुल विपरीत है, संश्लेषण का शब्द कोशीय अर्थ है "अलग-अलग वस्तुओं अथवा घटकों को एकत्र करने की प्रकिया" इस विधि में ज्ञात से अज्ञात की ओर बढ़ने में समस्यां अलग अलग भागों को इकट्ठा करते है। यह, कुछ चीजें जो ज्ञात है उनसे आरम्भ करता है और फिर उन्हें कथन के अज्ञात भाग से जोड़ता है। यह उपलब्ध या ज्ञात आकड़ों से आरम्भ करता है और फिर इन्हें परिणाम से जोड़ता है। इस प्रकार इसकी प्रकिया में सूचनाओं के ज्ञात टुकडो को इस प्रकार से रखा जाता है कि उनमें कोई अज्ञात सूचना प्रकट हो सके। यहां परिकल्पना से निष्कर्ष की ओर बढते है।

संश्लेषण विधि के गुण (Merits of Synthetic Method)

- यह एक सरल एवं संक्षिप्त विधि है।
- किसी गणित सम्बन्धी हल को क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करने में यह विधि उपयोगी है।
- अधिकांश छात्रों के लिये विधि उपयुक्त है।
- अधिकांश गणित के प्रसंगों को पढ़ने के लिए यह विधि उपयुक्त है।

संश्लेषण विधि के दोष (Limitations of Synthetic Method)

- यह विधि विद्यार्थियों के मन में उत्पन्न विभिन्न जिज्ञासाओं का समाधान नहीं करता है। संश्लेषण में उत्पन्न प्रश्नों के संतोषजनक उत्तर के बिना विद्यार्थी नयी समस्या को हल करने में कठिनाई महसूस करता है।
- केवल संश्लेषण विधि सम्पूर्ण समझ नहीं प्रदान करती, इसलिए इस विधि में खोज और चिन्तन की बहुत कम गुंजाइश होती है।
- यह एक अमनोवैज्ञानिक विधि है।
- इसमें विद्यार्थियों में खोज प्रवृत्ति का विकास नहीं हो पाता।

विश्लेषण और संश्लेषण विधियां एक दूसरे की पूरक हैं जिन्हें शिक्षण के दौरान एक साथ प्रयोग किया जाना चाहिए

विश्लेषण विधि, संश्लेषण विधि संयोजन के बिना प्रयोग करने पर प्रभावी नहीं है। वस्तुतः एक जटिल गणितीय समस्या को विश्लेषण विधि के द्वारा उसके छोटे छोटे अवयवों में बांटकर अध्ययन किया जाता है और उनका समाधान करने का प्रयास किया जाता है तत्पश्चात सभी संश्लेषण के माध्यम से सभी अवयवों को तार्किक रूप से जोड़कर समस्या के सम्पूर्ण समाधान तक पहुंचा जाता है।

iv. **प्रोजेक्ट विधि (Project Method)-** प्रोजेक्ट विधि के जन्मदाता के रूप में किल्पैट्रिक को जाना जाता है। यह विधि जॉन डीवी के प्रयोजनवाद (Pragmatic) के दर्शन पर आधारित है। यह एक विद्यार्थी केन्द्रित अत्यंत प्रभावी शिक्षण विधि है जिसकी सहायता से सभी विषयों की शिक्षा दी जा सकती है। आइये आगे बढ़ने से पहले प्रोजेक्ट शब्द का अर्थ समझने का प्रयास करें। विभिन्न शिक्षाशास्त्रियों परियोजना को अलग अलग तरीके से परिभाषित करने का प्रयास किया है।

- किलपैक्ट्रिक (Kilpatrick, 1921) के अनुसार "प्रोजेक्ट वह उद्देश्यपूर्ण कार्य है जिसे लगन के साथ सामाजिक वातावरण में किया जाता है"।
- स्टीवेनसन (Stevenson, 1922) के अनुसार, "प्रोजेक्ट एक समस्यामूलक कार्य है जिसे स्वाभाविक परिस्थितियों में पूर्ण किया जाता है"।

इन परिभाषाओं के विश्लेषण के आधार पर कहा जा सकता है कि प्रोजेक्ट, विद्यार्थियों के वास्तविक जीवन से संबंधित किसी समस्या का हल खोज निकालने के लिए किया जानेवाला वह सुनियोजित कार्य है जिसे प्राकृतिक रूप से समाजिक वातावरण में पूरा किया जाता है। वस्तुतः परियोजना विधि यह "कर के सीखने" (Learning by Doing) के सिद्धान्त पर आधारित है अतः गणित शिक्षण के लिए अत्यंत प्रभावी है। शिक्षण के दौरान लिए गए प्रोजेक्ट व्यक्तिगत भी हो सकते हैं और सामूहिक भी परियोजना /। व्यक्तिगत प्रोजेक्ट जिसे केवल एक विद्यार्थी पूरा करता है और सामूहिक प्रोजेक्ट जिसे विद्यार्थियों के एक समूह को मिल कर पूरा करना होता है।

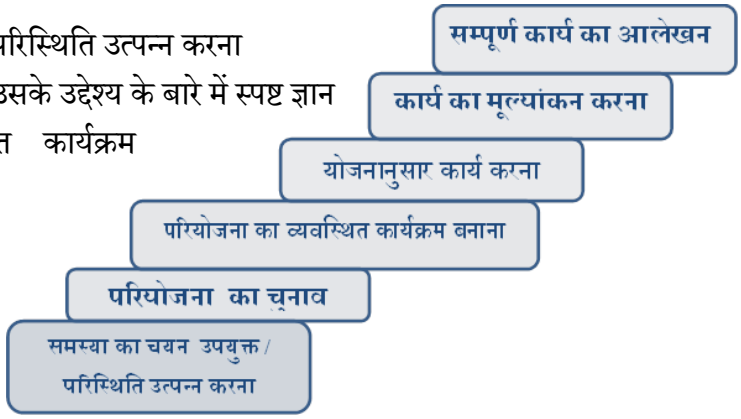
परियोजना विधि की आधारभूत मान्यताएं (Basic Principles of Project Method): परियोजना विधि एक मनोवैज्ञानिक विधि है जो सीखने के सिद्धांतों पर आधारित है इसकी महत्वपूर्ण मान्यताएं निम्नांकित हैं:

- कार्य को कर के सीखना ज्यादा प्रभावी है।
- जीवन की वास्तविक परिस्थितियों में सीखा गया ज्ञान स्थायी होता है।
- किसी कार्य को सामूहिक रूप से करके सीखना प्रसन्नतापूर्ण होता है और सीखने के विभिन्न अवसर प्रदान करता है।
- परियोजना विधि थोर्नडाइक के अधिगम के तीनों नियमों तत्परता का नियम, अभ्यास का नियम एवं प्रभाव

परियोजना विधि के चरण (Steps involved in Project Method):

परियोजना विधि के चरण निम्नलिखित हैं :

1. समस्या का चयन / उपयुक्त परिस्थिति उत्पन्न करना
2. परियोजना का चुनाव और उसके उद्देश्य के बारे में स्पष्ट ज्ञान
3. परियोजना का व्यवस्थित कार्यक्रम बनाना
4. योजनानुसार कार्य करना
5. कार्य का मूल्यांकन करना
6. सम्पूर्ण कार्य का आलेखन



परियोजना विधि के चरण

परियोजना प्रोजेक्ट विधि के गुण (Merits of Project Method)

- परियोजना विधि मनोवैज्ञानिक सिद्धांतों पर आधारित है
- यह एक विद्यार्थी केन्द्रित विधि है जिसमें विद्यार्थियों की स्वाभाविक रूचियों, मनोवृत्तियों और चेष्टाओं का पूरा पूरा ध्यान रखा जाता है।
- परियोजना विधि विद्यार्थियों को कार्य करने की स्वतंत्रता देकर उनकी जिज्ञासा, रचनात्मकता एवं खोज प्रवृत्ति को बढ़ावा देता है।
- परियोजना विधि से विद्यार्थी अपने वास्तविक जीवन की समस्याओं को सुलझाने का प्रशिक्षण लेते हैं तथा प्राप्त ज्ञान को जीवन में उपयोग करना सीखते हैं।
- परियोजना विधि में समूह में काम करते हुए विद्यार्थी गणित तो सीखते ही हैं साथ ही यह उनमें जनतांत्रिक भावनाओं एवं उत्तरदायित्व की भावना, सहिष्णुता, धैर्य, कर्तव्यनिष्ठता, पारस्परिक प्रेम एवं सहयोग की भावना आदि सामाजिक गुणों का विकास भी होता है।
- इस विधि में विद्यार्थी की सक्रिय भागीदारी एवं प्रत्यक्ष अनुभवों एवं क्रियाओं द्वारा ज्ञान प्राप्त करते के कारण स्पष्ट एवं स्थायी ज्ञान प्राप्त होता है।
- परियोजना विधि विद्यार्थियों की अन्वेषण प्रवृती का विकास करता है।

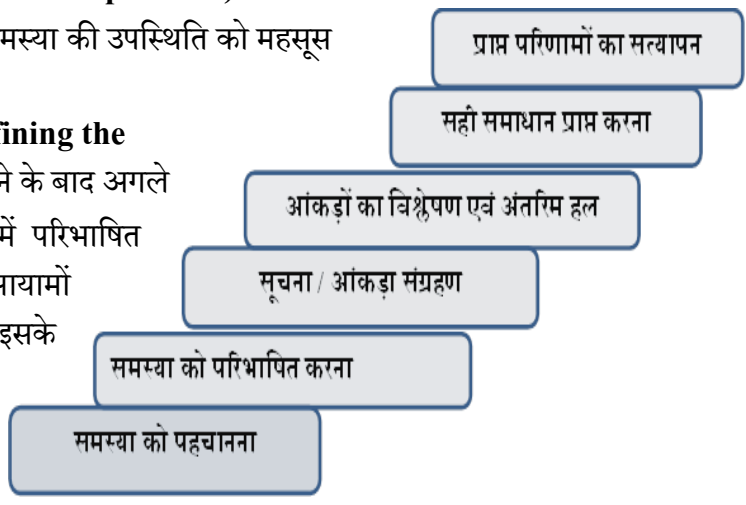
प्रोजेक्ट व्यूह रचना के दोष एवं सीमाएं - (Demerits and Limitations of Project Strategy)

- परियोजना विधि से प्रायः गणित शिक्षण में क्रमबद्ध ज्ञान देना सम्भव नहीं हो पाता।
- सभी उपविषय,विशेषकर अमूर्त गणितीय संकल्पनाएँ परियोजना विधि से नहीं पढाये जा सकते।
- परियोजना विधि से शिक्षण हेतु समय, धन एवं श्रम बहुत अधिक लगता है।
- विद्यार्थियों को पर्याप्त अभ्यास कार्य करने का अवसर नहीं मिल पाता है।
- व्यावहारिक अनुभव के कुछ अवसर से परिकलन योग्यता में अपेक्षित उन्नति प्राप्त करने में सक्षम नहीं हैं।
- वर्तमान परीक्षा प्रणाली में इस व्यूह रचना को कोई स्थान नहीं दिया गया है।

v. **समस्या-समाधान विधि (Problem-Solving Method) -** गणित की समस्या समाधान विधि एक मनोवैज्ञानिक एवं वैज्ञानिक (Psychological and Scientific) शिक्षण विधि है जिसमें छात्र को "करके सीखने" (Learning by doing) के अवसर उपलव्य होते है। यह विधि विद्यार्थियों विभिन्न गणितीय समस्याओं का समाधान करने हेतु प्रशिक्षित करती है। इसमें विद्यार्थी को किसी दी हुई समस्या का हल ढूंढना होता है, जिसको वह कुछ निश्चित तार्किक चरणबद्ध क्रियाओं द्वारा ढूंढता है। यह गणितीय समस्या मानसिक या भौतिक हो सकती है।

समस्या समाधान विधि के चरण (Steps of Problem Solving Method)

1. **समस्या को पहचानना (Identification of problem):** समस्या समाधान विधि में सर्वप्रथम विद्यार्थी समस्या की उपस्थिति को महसूस करता है एवं उसे चिन्हित करता है।
2. **समस्या को परिभाषित करना (Defining the problem):** समस्या को चिन्हित करने के बाद अगले चरण में समस्या को व्यावहारिक रूप में परिभाषित किया जाता है ताकि उसके विभिन्न आयामों और विशेषताओं को समझा जा सके। इसके लिए समस्या का विश्लेषण किया जाता है जैसे कौन सी सूचना दी हुई है और उन सूचनाओं के आधार पर क्या ज्ञात किया जाना है?



3. **सम्बद्ध आंकाडो का संकलन (Data Collection):** समस्या समाधान विधि के अगले चरण में उन सूचनाओं/ आंकड़ों को एकत्र एवं व्यवस्थित किया जाता है जो समस्या समाधान में सहायक हो सकते हैं।
4. **आंकडों के विश्लेषण (Analysis of Data)** के आधार पर उनसे कोई अंतरिम हल (Possible solutions) प्रतिपादित करना। इस चरण में प्राप्त आंकदोंका विश्लेषण कर के संभव समध प्राप्त करने के प्रयास किये जाते हैं।
5. **चिन्तन प्रकिया द्वारा इस अंतरिम हल से सही हल प्राप्त करना (Accurate Solution):** समस्या समाधान विधि के इस चरण में समस्या का सबसे उपयुक्त हल तार्किक चिंतन के द्वारा प्राप्त किया जाता है।
6. **परिणामों का सत्यापन करना (Verification of Solution):** समस्या समाधान विधि के सबसे आखिरी चरण में प्राप्त हल का सत्यापन किया जाता है।

उदाहरण - उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण की लम्बाई 5 सेमी और एक भुजा 3 सेमी है।

चरण 1: समस्या की पहचान - आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना

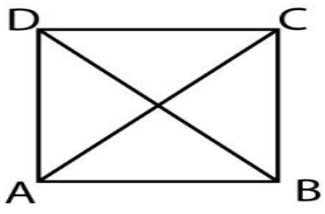
चरण 2: समस्या को व्यावहारिक रूप से परिभाषित करना: उस आयत का क्षेत्रफल निकलना जिसकी एक भुजा 3 सेमी है और विकर्ण 5 सेमी है

चरण 3: सम्बद्ध आंकाडो का संकलन (Data Collection): हमारे पास उपलब्ध है

- विकर्ण की लम्बाई 5 सेमी
- एक भुजा 3 सेमी

चरण 4 आंकडों के विश्लेषण (Analysis of Data)

- आयत का क्षेत्रफल =लम्बाई X चौड़ाई
- अतः उपलब्ध आंकड़ों से यधि दूसरी भुजा का मान ज्ञात कर लिया जाय तो आयात का क्षेत्रफल निकला जा सकता है
- विश्लेषण – आयत की आमने सामने की भुजायें बराबर होती हैं..... (i)
- सभी कोण समकोण (90^0) होते है..... (ii)
- दोनों विकर्ण की लम्बाई बराबर होती है अतः DB=AC
- दिया है AD=3 सेमी
- त्रिभुज ADB में, AD=3 सेमी, DB=5 सेमी



- $AB^2= DB^2-AD^2=25-9=16$
- AB=+4 एवं -4
- संभव हल= लम्बाई X चौड़ाई = 3X(-4) या 3X4
- समाधान: -12 वर्ग सेमी या 12 वर्ग सेमी

5. चिन्तन प्रकिया द्वारा इस अंतरिम हल से सही हल प्राप्त करना (Accurate Solution चूँकि लम्बाई और क्षेत्रफल नकारात्मक नहीं हो सकते अतः सही हल 12
6. सत्यापन (Verification): आयात का क्षेत्रफल=लम्बाई X चौड़ाई =3X4=12 वर्ग सेमी.

समस्या समाधान विधि के गुण (Merits of Problem Solving Method)

- यह विधि विद्यार्थियों की गणितीय समस्याओं के समाधान की योग्यता बढाता है एवं उनमें स्वतंत्र रूप से तार्किक चिन्तन करने और पूर्वानुमान लगाने को प्रोत्साहित करती है।
- यह विधि दैनिक जीवन की समस्याओं को भी हल करने में सहायक हो सकता है।
- इससे विद्यार्थियों का आत्म विश्वास बढ़ता है।
- यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है।
- इस विधि से प्राप्त ज्ञान स्थायी होता है।
- यह विधि छात्रों को सूचनाओं प्रसंस्करण (information processing) में विद्यार्थियों को प्रशिक्षित करती है।
- यह विधि विद्यार्थियों के अन्वेषण की प्रवृति बढाती है।

समस्या समाधान विधि की सीमायें(Limitations of Problem Solving Method)

- इस विधि में समय अधिक लगता है।
- इस विधि से गणित के सभी सभी पाठों का शिक्षण संभव नहीं है।
- समस्या समाधान विधि सभी छात्रों के लिए उपयुक्त नहीं है।
- यह विधि छोटी कक्षाओं के लिए ज्यादा उपयुक्त नहीं है।

vi. गणित शिक्षण में अभ्यास कार्य (Drill work in Mathematics Teaching) - गणित शिक्षण में अभ्यास कार्य (Drill work in Mathematics Teaching) -अभ्यास कार्य शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में एक बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान रखता है विशेषकर गणित शिक्षण में।

अभ्यास के द्वारा ही विद्यार्थी की गणितीय दक्षता बढ़ाई जा सकती है। इसका प्रयोग पाठ्य सामग्री की भलीभांति पुनरावृत्ति करने एवं दक्षता हासिल करने में विद्यार्थी की मदद करता है। जो भी गणितीय ज्ञान एवं कौशल विद्यार्थियों को कक्षा में प्रदान किया जाता वह अभ्यास के माध्यम से ही चिरस्थायी हो सकती है और उसमें विद्यार्थी दक्ष हो सकता है।

महत्व एवं उपयोगिता (Importance and Uses) -

- नियमित अभ्यास के बिना गणितीय अधिगम संभव नहीं है
- गणित अच्छे से जानने एवं समझने में के लिए भी अभ्यास कार्य अत्यंत आवश्यक है।
- अभ्यास को कौशल अर्जन की कुंजी कहते है क्योंकि यह विभिन्न प्रकार की गणितीय कुशलताओं यथा गणना कौशल समस्या समाधान, आरेखीय कौशल आदि को अर्जित करने में सहायक है।
- अभ्यास कार्य दैनिक जीवन की परिस्थितियों में उस प्राप्त गणितीय ज्ञान का प्रयोग करने अर्थात ज्ञान का सामान्यीकरण करने में प्रभावी है।
- गणित संबंधी विभिन्न कौशलों, का भलीभांति अभ्यास करके, उन्हें सिखाने में भी सहायता करता है।
- अभ्यास के द्वारा अर्जित अनुभव से विद्यार्थियों में आवश्यक समस्या समाधान योग्यता का विकास होता है।

गणित में अभ्यास कार्य की सीमाएं (Limitations of Drill and Practice in Mathematics)

- कई बार अभ्यास कार्य को शिक्षक शिक्षण अधिगम परिणामों के मूल्यांकन का साधन बना लेते हैं या इसे बच्चों को सजा देने के रूप में प्रयोग करते हैं।
- अभ्यास कार्य हेतु शिक्षक की सजगता आवश्यक है। अभ्यास कार्य के दौरान विद्यार्थियों की गलतियों को सुधारना एक आवश्यक परन्तु श्रमसाध्य कार्य है।
- गणित अभ्यास कार्य के उपयुक्त प्रयोग के लिए शिक्षक को कक्षा के सभी विद्यार्थियों पर व्यक्तिगत ध्यान देने की आवश्यकता होती है जो कई बार बड़ी कक्षाओं में संभव नहीं हो पाता।
- अभ्यास कार्य हेतु पर्याप्त समय की आवश्यकता होती है जिसके लिए कक्षा का सीमित समय अपर्याप्त है और प्रायः अभ्यास कार्य गृह कार्य के रूप में हे संभव हो पाता है।

गणित शिक्षण में प्रभावी अभ्यास कार्य में शिक्षक की भूमिका

गणित शिक्षण में प्रभावी अभ्यास कार्य के लिए शिक्षक को निम्नाकित पर समुचित ध्यान देना चाहिए:

- अभ्यास कार्य भी की अवधि छोटी राखी जाए अन्यथा विद्यार्थ्यों में गनित के प्रति अरूचि उत्पन्न होने लगती है और गणित उनके लिए एक बोझिल कार्य हो जाता है।
- अभ्यास कार्य में परिवर्तन और विविधिता के सिद्धान्त का अनुसरण किया जाना चाहिए और इसके लिए शिक्षक को भिन्न भिन्न प्रकार के क्रियाकलापों को अभ्यास हेतु प्रयोग करना चाहिए ताकि यह रुचिकर बना रहे।
- अभ्यास कार्य कराने में व्यक्तिगत भिन्नता को भी ध्यान में रखा जाना चाहिए। जाने वाले अभ्यास कार्य के कठिनाई स्तर एवं विद्यार्थियों की योग्यता को ध्यान में रखना समीचीन है।
- प्रभावी अभ्यास कार्य के लिए विद्यार्थियों की सक्रिय भागीदारी सुनिश्चित किया जाना चाहिये।
- अभ्यास कार्य स्मृति आधारित न होकर, विद्यार्थियों के सोचने, तर्क करने तथा समस्या समाधान का अवसर प्रदान करने वाला होना चाहिए।
- अभ्यास कार्य का पर्याप्त एवं नियमित निरीक्षण किया जाना चाहिए।
- अभ्यास कार्य में विद्यार्थियों की प्रगति का आवधिक मूल्यांकन करते रहना चाहिए।

3.4 गणित शिक्षण में गणित में मौखिक एवं लिखित कार्य (Oral and Written Work in Maathematics)

गणित में मौखिक कार्य (Oral Work in Mathematics) : जब हम बिना कागज और पेन्सिल के सिर्फ अपने चिंतन एवं तर्क शक्ति का प्रयोग करते हुए गणित की किसी समस्या का हल करते हैं तो यह गणित का मौखिक कार्य कहलाता है।दूसरे शब्दों में इसे मानसिक गणना भी कह सकते हैं। अपने दैनिक जीवन में प्रायः हम मानसिक गणना का कार्य करते हैं ।दैनन्दिन में किये जाने वाले अधिकांश खरीद विक्रय मौखिक कार्य से ही सम्पादित होते हैं। गणित में मौखिक कार्य के लाभ निम्नांकित हैं :

- गणित के मूलभूत सिद्धान्तों (विशेषकर अंक गणित) का अभ्यास सरलता से मौखिक रूप में किया जा सकता है।
- गणित की समस्याओं के शीघ्र समाधान में सहायक।
- समय एवं श्रम की बचत ।
- कल्पना शक्ति और स्मृति के विकास में सहायक ।
- प्राप्त गणितीय ज्ञान के सामान्यीकरण में सहायक।
- अध्येता के आत्मविश्वास में वृद्धि ।
- कक्षा में गणित शिक्षण का वातावरण तैयार करने में सहायक ।

- गणित के दैनिक जीवन में उपयोग एवं उसका महत्व समझने में सहायक।

गणित में लिखित कार्य (Written Work in Mathematics) : गणित से सम्बंधित वे कार्य जिनके लिए कागज एवं पेंसिल का होना अत्यावश्यक है, जिन्हें मौखिक रूप से नहीं किया जा सकता या किया जाना कठिन है वे कार्य लिखित कार्य कहलाते हैं। वस्तुतः गणित एक ऐसा विषय है जिसमें निरंतर अभ्यास की महती आवश्यकता है। यदि सामान्य अंकगणित के सरल प्रश्नों को छोड़ दें तो अधिकांश गणितीय अभ्यास कार्य के लिए लिखित कार्य महत्वपूर्ण है। गणित के जटिल प्रश्नों के हल के लिए लिखित कार्य अति आवश्यक है। गणित में लिखित कार्य के लाभ निम्नलिखित हैं:

- गणित के प्रश्नों को लिखित रूप से हल करने से छात्रों को उसकी प्रक्रिया एवं क्रम का ज्ञान होता है और वे प्रश्नों को क्रमबद्ध ढंग से करना सीख लेते हैं।
- लिखित रूप से गणित के प्रश्नों को हल करने से छात्रों के गणित संबंधी कार्यों में शुद्धता आती है।
- लिखित रूप में किये गये गणितीय कार्य त्रुटियों को जानने एवम उसमें संशोधन करने का अवसर प्रदान करता है।
- गणितीय दक्षता एवं शुद्धता के लिए लिखित कार्य आवश्यक है वस्तुतः गणित मी लिखित कार्य कर के पर्याप्त अभ्यास करने के बाद ही मौखिक कार्य में शुद्धता एवं गति आ सकती है।
- लिखित कार्य का एक बड़ा लाभ यह भी है कि लिखित कार्यों के द्वारा विद्यार्थियों की प्रगति का रिकॉर्ड रखा जा सकता है।
- लिखित कार्य के जरिये अभिभावकों को भी छात्रों की प्रगति के बारे में ज्ञान मिलता है, और वे भी अपने बच्चें की त्रुटियों का पता लगाकर उन्हें प्रेरित कर सकते हैं।

3.5 गणित शिक्षण में मस्तिष्क उद्वेलन (Brain Storming in Teaching of Mathematics)

मस्तिष्क उद्वेलन (Brain Storming)

अर्थ (Meaning) – मस्तिष्क उद्वेलन का सामान्य अर्थ है मस्तिष्क में वैचारिक उत्तेजना पैदा करना अर्थात मस्तिष्क में किसी वस्तु/ व्यक्ति/ प्रक्रिया /संप्रत्यय के बारे में अनगिनत तात्कालिक विचार उत्पन्न करना। यह एक सामूहिक एवं सहभागी क्रिया कलाप है जिसे विद्यार्थियों के छोटे छोटे समूह बनाकर प्रयोग किया जा सकता है। शिक्षण की प्राविधि के रूप में इसे अलेक्स ऑस्बोर्न (Alex Osburn) ने स्थापित किया यह वस्तुतः एक रचनात्मक समस्या समाधान विधि (Creative Problem Solving Method) है। अलेक्स ऑस्बोर्न ने अपनी रचना एप्लाइड इमें जीनेशन (Applied Imagination) 1953 में प्रकाशित किया जिसमें उन्होंने रचनात्मक समस्या समाधान विधि के बारे में बताया। ऑसबोर्न

के अनुसार इस का उपयोग किसी परिस्थिति विशेष या समस्या समाधान के संदर्भ में समूह के सदस्यों के विचार जानने हेतु किया जाता है। सदस्यों को समस्या से सम्बंधित तात्कालिक विचार अभिव्यक्ति की स्वतंत्रता होती है। मष्तिष्क उद्वेलन विशेष रूप से उच्च संज्ञानात्मक योग्यताओं (Higher cognitive abilities) के विकास एवं सृजनात्मक चिंतन के विकास में अत्यंत सहायक है।

मस्तिष्क उद्वेलन के सामान्य नियम

- समूह का आकार छोटा होना चाहिए।
- किसी प्रकार की आलोचना निषेध रखें ।
- विचार अभिव्यक्ति की स्वतंत्रता।
- विचारों की अधिक मात्रा एवं विविधता को प्रोत्साहन।
- प्रथम भाग में संकलित नोट्स का पुनरीक्षण किया जय ताकि वैचारिक दुहराव से बचें।
- अभिव्यक्त विचारों के नोट्स लिए जाएँ।
- सत्र को बहुत ज्यादा संरचित न किया जाय।

मस्तिष्क उद्वेलन गुण (Merits of Brain Storming)

मस्तिष्क उद्वेलन व्यूह रचना निम्न दृष्टि से अच्छी मानी जाती है:

- विद्यार्थियों की सक्रीय भागीदारी
- समस्या समाधान योग्यता को प्रोत्साहन
- रचनात्मकता को बढ़ावा
- रचनात्मक चिंतन को प्रोत्साहन
- समस्या के नवीन एवं मौलिक हल की सम्भावना
- समूह भावना एवं पारस्परिक सहयोग को बढ़ावा

मस्तिष्क उद्वेलन की सीमाएं (Limitations of Brain Storming):

समस्त विशेषताओं के बावजूद मस्तिष्क उद्वेलन विधि की अपनी कुछ सीमायें हैं:

- समस्या का समाधान खोजने हेतु समूह के सभी सदस्य एक जैसी रूचि रखते हों सामान तत्परता दिखाएं ये कई बार कठिन होता है।
- यह एक समय साध्य कार्य है साथ ही इसके लिए शिक्षक को इसका विशेषज्ञ होना आवशयक है।

- समस्या समाधान हेतु आवश्यक मानसिक स्तर, ज्ञान एवं कौशलों में समूह के सदस्यों में समानता होनी चाहिए जिसे प्राप्त करना कठिन है।
- विभिन्न विचारों के सैलाब से एक मत से उपयुक्त समाधान तक पहुंचना भी एक दुष्कर कार्य है।
- समूह के सदस्यों के बीच वैचारिक मतभेद व्यवधान उत्पन्न कर सकते हैं।

3.6 गणित में कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन (Computer Based Learning)

वर्तमान युग तकनीक का युग है और तकनीक में भी विशेषकर कंप्यूटर एवं अन्य इसप्रकार की मशीनों का है। कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन का सामान्य अर्थ है शिक्षण अधिगम की वह प्रक्रिया जिसमें कंप्यूटर की महत्वपूर्ण भूमिका हो। वर्तमान समय में कंप्यूटर शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया में एक आवश्यक उपकरण है साथ ही विद्यार्थी के स्वगति से अधिगम के लिए भी उपयुक्त है। आधुनिक समय में विद्यार्थी ज्ञान के लिए सिर्फ शिक्षक पर निर्भर न होकर कई स्रोतों से एक साथ ज्ञान प्राप्त करता है जिसमें कंप्यूटर और इन्टरनेट का प्रयोग प्रमुख है। कंप्यूटर समर्थित अधिगम का उपयुक्त प्रयोग गणित शिक्षण की प्रभाविता को बढ़ा देता है। कमप्यूटर समर्थित अनुदेशन का बहुतायत से प्रयोग अभिक्रमित अनुदेशन में किया जाता है जिसके प्रतिपादक मूलतः महान मनोवैज्ञानिक स्किनर को माना जाता है। बाद के अनुसंधानों में अभिक्रमित अनुदेशन के कई प्रकार सामने आये। स्किनर द्वरा प्रतिपादित मूल अभिक्रमित अनुदेशन को रेखीय अभिक्रमित अनुदेशन माना गया और नार्मन इ क्राउडर द्वारा विकसित अभिक्रमित अनुदेशन शाखीय अभिक्रमित अनुदेशन के रूप में जाना गया। अभिक्रमित अनुदेशन के तीसरे प्रकार का प्रतिपादन प्रोफेसर गिल्बर्ट ने किया जिसे उन्होंने मैथेटिक्स (Mathetics) का नाम दिया। हालाँकि गिल्बर्ट द्वारा दिया गया मैथेटिक्स (Mathetics) न तो ज्यादा लोकप्रिय हो सका और न ही उसपर बाद में अनुसन्धान किये गए अतः शिक्षण अधिगम में उसका प्रयोग ज्यादा लोकप्रिय नहीं हो सका। बी एफ स्किनर द्वारा मूलतः प्रतिपादित अभिक्रमित अनुदेशन पुनर्बलन के उनके प्रयोगों एवं सिद्धांतों पर आधारित है जिसके प्रमुख सिद्धांत निम्नांकित हैं:

i. छोटे पदों का सिद्धांत (Principle of small steps)
ii. तत्परता अनुक्रिया सिद्धांत (Principle of active response)
iii. तत्कालीन जांच का सिद्धांत (Principle of immediate confirmation)
iv. स्व-गति का सिद्धांत (Principle of self pacing)
v. छात्र परीक्षण का सिद्धांत (Principle of student testing)

उपरोक्त सिद्धांतों का पालन करते हुए अनुदेशन के छोटे छोटे फ्रेम तैयार किये जाते हैं जिनपर विद्यार्थी सक्रिय अनुक्रिया करते हुए स्वयं एवं स्व-गति से सीखता है उसके सही अनुक्रिया पर उसे उपयुक्त पुनर्बलन देकर आगे बढ़ने दिया जाता है गलत अनुक्रिया पर उसे तत्काल प्रतिपुष्टि दी जाती है तत्पश्चात

पुनः सही अनुक्रिया के बाद उसे अनुदेशन के अगले चरण पर स्थानांतरित किया जाता है और यह क्रम विद्यार्थी के सम्बंधित इकाई के अधिगम के अंत तक जारी रहता है।

कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन के लाभ (Merits of Computer Based Learning):

- विद्यार्थियों के लिए रुचिकर
- जटिल गणितीय संकल्पनाओं की व्याख्या में सहायक
- गणित में अभ्यास के लिए उपयुक्त
- विद्यार्थियों के स्व-अधिगम में सहायक
- बहुसंवेदी उपागम
- विविधता एवं वैयक्तिक भिन्नताओं पर आधारित
- शिक्षक के समय की बचत
- विद्यार्थियों के मूल्याङ्कन एवं उनका रिकॉर्ड रखने में सहायक
- नैदानिक शिक्षण में सहायक

कंप्यूटर समर्थित अनुदेशन की सीमायें (Limitations of Computer Based Learning):

- अपेक्षाकृत महंगे उपकरण
- शिक्षक को तकनीक मैत्रीपूर्ण (Techno-Friendly) होना आवश्यक
- सर्वसुलभ नहीं विशेषकर ग्रामीण क्षेत्रीं में
- ज्यादा प्रयोग से स्वास्थ्य सम्बन्धी समस्याएं

3.7 सारांश

गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों में प्रमुख विधियाँ निम्नांकित हैं:व्याख्यान विधि (Lecture Method), आगमन एवं निगमन विधि (Inductive-Deductive Method) , संश्लेषण एवं विश्लेषण विधि (Analytic-Synthetic Method), समस्या समाधान विधि (Problem Solving Method) एवं परियोजना विधि (Project Method)। अभ्यास कार्य गणित शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में एक बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान रखता है। अभ्यास के द्वारा ही विद्यार्थी की गणितीय दक्षता बढ़ाई जा सकती है। इसका प्रयोग पाठ्य सामग्री की भलीभांति पुनरावृत्ति करने एवं दक्षता हासिल करने में विद्यार्थी की मदद करता है। मष्तिष्क उद्वेलन का गणित शिक्षण में प्रयोग विशेष रूप से उच्च संज्ञानात्मक योग्यताओं (Higher cognitive abilities) के विकास एवं सृजनात्मक चिंतन के विकास में अत्यंत सहायक है। वर्तमान

समय कंप्यूटर आधारित अधिगम गणित शिक्षण के लिए महत्वपूर्ण है क्योंकि शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया में कंप्यूटर सिस्टम एक आवश्यक उपकरण है साथ ही विद्यार्थी के स्वगति से अधिगम के लिए भी उपयुक्त है।

3.8 सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

1. Chambers P. (2008) Teaching of Mathematics, Sage South Asia
2. Kulshreshtha S. (2013) Teachingof Mathematics
3. Mangal SK, (2016) Teaching of Mathematics, Tandon Publishers, Ludhiyana
4. Mangal SK. (2013) Education Technology, Prentice Hall of India

3.9 निबंधात्मक प्रश्न

1. गणित शिक्षण की व्याख्यान विधि, उसके गुण एवं दोषों की व्याख्या करें।
2. गणित शिक्षण की आगमन निगमन विधि की सोदाहरण व्याख्या करें।
3. गणित शिक्षण के संश्लेषण एवं विश्लेषण विधि एवं उसके अच्छाइयों एवं सीमाओं का वर्णन करें।
4. गणित शिक्षण के समस्या समाधान विधि से आप क्या समझते हैं? समस्या समाधान विधि के सोपान, उसके गुण एवं सीमाओं का वर्णन करें।
5. गणित शिक्षण के परियोजना विधि से आप क्या समझते हैं? परियोजना विधि के सोपान, उसके गुण एवं सीमाओं का वर्णन करें।
6. मस्तिष्क उद्वेलन से आप क्या समझते हैं? मस्तिस्क उद्वेलन का प्रयोग करने के क्या लाभ हैं?
7. गणित शिक्षण में ड्रिल एवं अभ्यास के महत्व की चर्चा करें।
8. गणित शिक्षण में कंप्यूटर आधारित अनुदेशन का महत्व बताइए।

इकाई 4- गणित विषय में शिक्षणशास्त्रीय बदलाव
(Pedagogical Shift in Mathematics)

4.1 प्रस्तावना
4.2 उद्देश्य
4.3 पियाजे , वाइगोत्सकी और ब्रूनर के परिपेक्ष्य की समीक्षा
4.4 गणित शिक्षण तथा विज्ञानं शिक्षण के बीच अंतर,
4.5 गणित शिक्षण का 5 Es (संलग्न ,अन्वेषण, व्याख्या, विस्तार और मूल्यांकन),
4.6 सहयोगी अधिगम उपागम
4.7 समस्या समाधान उपागम
4.8 संप्रत्य / संकल्पना मानचित्रण
4.9 आनुभविक अधिगम
4.10 सारांश
4.11 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
4.12 निबंधात्मक प्रश्न
4.13 संदर्भ ग्रन्थ सूची

4.1 प्रस्तावना

शिक्षण एवं अधिगम में बहुत से कारक शामिल होते हैं। विद्यार्थी अपने लक्ष्यों की ओर बढ़ते हुए नया ज्ञान, आचार और कौशल को समाहित करता हुआ सीख्ने के अनुभवों में विस्तार करता है । शिक्षण कार्य का नियोजन एवं क्रियान्वयन सम्यक अधिगम के उद्देश्य से किया जाता है । परम्परागत शिक्षण व्यवहारवादी दृष्टिकोण से सम्बन्ध रखता है जो यह मानता है की अधिगम को प्रभावित करने वाले कारक वाह्य वातावरण में पुरस्कार एवं दंड के रूप में मौजूद हैजबकिसंरचनात्मक शिक्षण ज्ञान को सीखने की प्रक्रिया में की गई रचना के रूप में देखता है।

वर्तमान इकाई में हम गणित शिक्षण और अधिगम की व्यावहारवादी दृष्टिकोण से संरचनावादी दृष्टिकोण में स्थानांतरण पर चर्चा करते हुए पियाजे , व्योगोस्त्की और ब्रूनर के परिपेक्ष्य की समीक्षा करेंगे ।गणित शिक्षण तथा विज्ञानं शिक्षण के बीच अंतर को जानेंगे तथा गणित शिक्षण का 5 Es (संलग्न ,अन्वेषण, व्याख्या, विस्तार और मूल्यांकन), सहयोगी अधिगम उपागम, समस्या समाधान उपागम ; संप्रत्य / संकल्पना मानचित्रण; आनुभविक अधिगम का विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे।

4.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप:-

1. पियाजे , वाइगोत्सकी और ब्रूनर के परिपेक्ष्य की समीक्षा कर सकेंगे;
2. गणित शिक्षण तथा विज्ञानं शिक्षण के बीच अंतर की चर्चा कर सकेंगे;
3. गणित शिक्षण का 5Es (संलग्न अन्वेषण, समझा, व्यापक और मूल्यांकन) की व्याख्या कर सकेंगे;
4. सहयोगी अधिगम उपागमका विश्लेषण कर सकेंगे;
5. समस्या समाधान उपागम को अपने शब्दों में ब्यक्त कर सकेंगे;
6. संप्रत्य / संकल्पना मानचित्रण की व्याख्या के सकेंगे;
7. आनुभविक अधिगमको बता सकेंगे;
8. गणित शिक्षण के विविध उपागमों का अपने शिक्षण कार्य में प्रयोग कर सकेंगे।

4.3 पियाजे , वाइगोत्सकी और ब्रूनर के परिपेक्ष्य की समीक्षा

गणित अपनी अमूर्त प्रकृति के कारण एक कठिन विषय के रूप में माना जाता हैजिसके कारण विद्यार्थी इस विषय से भयभीत रहते है। हाल के वर्षों में गणित को विद्यार्थियों को कैसे रोचक ढंग से पढ़ाया जाय इस पर अलग अलग दृष्टिकोण पर काफी विचार किया गया ।गणित शिक्षण की पारंपरिक विधि में गणित को प्रत्यक्ष अनुदेशन, तथ्यों और प्रक्रियाओं के रटने पर ज़ोर देते हुएरूढ़िवादी तरीके से पढ़ाया जाता था। हाल ही में गणितशिक्षण में विद्यार्थियों की सक्रिय सहभागिता पर ज़ोर देते हुए उन्हें स्वयं ज्ञान के सृजन करने वाला माना गया। दूसरे शब्दों में कहे तो गणित शिक्षण और अधिगम की व्यावहारवादी दृष्टिकोण से संरचनावादी दृष्टिकोण में स्थानांतरण शुरूहुआ।स्किनर और वाटसन व्यवहारवाद के दो प्रमुख समर्थक थे। व्यवहारवादियों के अनुसार, सभी व्यवहार बाहरी उत्तेजनाओं को एक व्यक्ति की प्रतिक्रियाओं का परिणाम है। अर्थात बाहरी वातावरण सीखने के लिए योगदान करता है। इस तरह से विद्यार्थी के अधिगम पर बाह्य परिस्थितियों जैसे पुरस्कार और दंड का प्रभाव प्रबल होता है। यह वस्तुनिष्ठ अवलोकित व्यवहार पर मुख्य रूप से केंद्रित है और अधिगम मानसिक गतिविधियों की भूमिका को अधिक महत्व नहीं देता है। व्यवहारवादियों की मान्यताओं के विपरीत संरचनावादीअधिगम को अर्थ की खोज के रूप देखते है। पियाजे , वाय्गोस्त्की और ब्रूनर रचनावाद के प्रमुख समर्थकों में है जो की यह मानते हैं की ज्ञान को निर्माण शिक्षार्थी द्वारा किया जाता है।

जीन पियाजे (1896-1980 ,स्विटजरलैंड के मनोवैज्ञानिक एवं दार्शनिक, 1950 के दशक में एक मॉडल दिये जो संज्ञानात्मक विकास या बौद्धिक विकास की अवस्थाओं से सम्बंधित है इनके अनुसार व्यक्ति अपने वातावरण एवं परिवेश के साथ मानसिक शक्तियों का प्रयोग करते हुए सीखता है।पियाजे के अनुसार विकास की प्रक्रिया में अधिगमकर्ता की बौद्धिक संरचना में परिवर्तन होता है और यह जीव की संरचना और वातावरण की संरचना के आपस में प्रतिक्रिया के फलस्वरूप होता है। पियाजे के अनुसार बच्चा

एक वैज्ञानिक है और यही बात पियाजे के सिद्धांत का आधारवाक्य है। इनके अनुसार अधिगमकर्ता का संज्ञानात्मक विकास क्रमिक है जो कि क्रमबद्ध स्तरों पर स्वयं में गुणात्मक परिवर्तनों को स्पष्ट करता है ।यद्यपि अधिगमकर्ता की निपुणता का विकास प्रत्येक स्तर पर उसके पिछले स्तर के आधार पर ही चित्रित होती है अर्थात विकास के पिछला स्तर ही नए स्तर का विकास की आधारशिला होती है अर्थात पिछले स्तर का विकास नई दक्षता के लिए के लिए आधारशिला का कार्य करती है। साथ ही ये विशेषतायें उन विशेषताओं से भिन्न होती हैं जो कि बालक के पिछले स्तर पर प्रदर्शित और प्रामाणित की हैं। पियाजे का मानना था कि शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चों को यह सीखना होना चाहिए कि वो किस प्रकार सीख सकते हैं और शिक्षा को अधिगम कर्ता को सीखने की तरफ प्रेरित करना चाहिए न कि उन्हें रटने पर जोर देना चाहिए। कही बातों को भरना चाहिए। एक शिक्षक को कक्षा में कई प्रकार के विद्यार्थी मिलते हैं । एक विद्यार्थी स्वयं में भी अपने संज्ञानात्मक विकास और विषय ज्ञान में बाकि शिक्षार्थियों से काफी भिन्न होता है। एक शिक्षक के यह जानना चाहिए कि ऐसा विद्यार्थियों की चिंतन योग्यताओं की कमी के कारण है या फिर उसे सामान्य तथ्य ही नहीं पता हैं। इसके लिए शिक्षक को अधिगमकर्ता पर तब ध्यान देना चाहिए कि वह किस प्रकार से समस्या को समाधानित करने का प्रयास कर रहे हैं। वह किसी एक पहलु पर ध्यान दे रहे हैं या फिर पूरी समस्या पर, किस प्रकार की तार्किकता का प्रयोग कर रहे हैं। पियाजे के अनुसार अधिगम कर्ता स्वयं अपनी समझ का निर्माण करें। सीखना एक रचनात्मक प्रक्रिया है ।इसमें केवल भौतिक रूप से हेर-फेर कर के ही ना सीखाया जाए बल्कि मानसिक हेर-फेर भी किया जाए।

लिव सिमनोविच वाइगोत्सकी (1896-1934) ने संज्ञानात्मक विकास का सामाजिक दृष्टिकोण प्रस्तुत किया। इनके अनुसार बच्चे का संज्ञानात्मक विकास में उसके सांस्कृतिक संबन्धें के बीच संवाद का महत्त्वपूर्ण स्थान है। वाइगोत्सकी भी संरचनावादी थे तथा यह मानते थे कि बच्चे ज्ञान का निर्माण करते है। किन्तु इनके अनुसार संज्ञानात्मक विकास में भाषा के साथ-साथ सामाजिक-सांस्कृतिक संदर्भ भी महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। यह मानते हैं कि भाषा संज्ञानात्मक विकास का महत्त्वपूर्ण उपकरण है तथा प्रारम्भ से ही बच्चे अपने कार्यों के नियोजन एवं समस्या समाधान में भाषा प्रयोग करने लग जाते है। पियाजे के सिद्धांत के भिन्न वाइगोत्सकी मानते हैं की अधिगम व विकास सांस्कृतिक व सामाजिक वातावरण की मध्यस्थता का प्रतिफल है। वाइगोत्सकी ने संभावित विकास का क्षेत्र का संप्रत्यय दिया जो की उस अंतर को बताता है जो की बच्चे के बिना किसी सहायता के सम्पादित कार्य तथा किसी बड़े या अधिक कुशल साथी की सहायता से सम्पादित कार्य में होता है। उनके अनुसार बच्चे के विकास को सामाजिक एवं सांस्कृतिक गतिविधियों से अलग नहीं किया जा सकता उसका प्रत्येक क्षेत्र का विकास इन गतिविधियों में अन्तर्निहित होता है। इस प्रकार वाइगोत्सकी का सिद्धांत सामाजिक निर्मितिवाद है। व्यक्ति में सभी मानसिक या बौद्धिक क्रियाएँ पहले बाहरी समाज में घटित होती हैं और बच्चे समाजिक एवं सांस्कृतिक अन्त: क्रियाओं द्वारा बच्चे अपनी संस्कृति में सोचने और व्यवहार करना सीखते हैं अत: बच्चे के सम्पूर्ण विकास में सामाजिक वातावरण के विभिन्न , अंगों जैसे- परिवार, समुदाय, दोस्त तथा विद्यालय की भूमिका महत्वपूर्ण है।

जेरोम ब्रूनर (1915 – 2016) अमेरिकी मनोवैज्ञानिक, ने मानव के संज्ञानात्मक विकास का प्रारूप दिया जिसे संज्ञानात्मक अधिगम सिद्धांत के नाम से जाना जाता है इन्होनें अपने माडल में बताया की मनुष्य अपने वातावरण से सामंजस्य कैसे स्थापित करता है। ब्रूनर शिक्षण को एक ऐसी सक्रिय प्रक्रिया मानते है जिसमें सीखने वाला अपने पूर्व व वर्तमान ज्ञान के आधार पर नए विचार या अवधारणाओं को रचता है। सीखने वाला सूचनाओं को चुनकर उनका रूपांतरण करता है, प्रस्थापनाएं बनाता है, निर्णय लेता है और ऐसा करते समय वह एक ज्ञानात्मक ढांचे पर भरोसा करता है।इनके अनुसार शिक्षक और शिक्षार्थी को सक्रिय संवाद की स्थिति में होनी चाहिए बूरनर के सिद्धान्त में प्रतिनिधित्व महत्वपूर्ण स्थान है। व्यक्ति अपने अनुभवों को भविष्य में आने वाली घटनाओं के लिए कैसे संरक्षित करता है यह उन नियमों को बताता है। व्यक्ति विशेष इसके द्वारा अपने वातावरण का प्रतिनिधित्व करता है।ब्रूनर (1966) के अनुसार निर्देशन के सिद्धांत चार प्रमुख पक्षों पर केन्द्रित होनी चाहिए जो की निम्नवत हैं :

i. अधिगम की ओर अभिवृत्त,
ii. किसी भी ज्ञान को कैसे पुनर्संरचित किया जाए जिससे कि सीखने वाला उसे सबसे आसानी से आत्मसात कर सके,
iii. शिक्षण सामग्री को प्रस्तुत करने का सबसे प्रभावी क्रम,
iv. पुरस्कार और दंड का स्वरूप,

ब्रूनर के अनुसार दिशा-निर्देश अनुभवों और उन संदर्भों से जुड़े होने चाहिए जिससे विद्यार्थी सीखने को तत्पर हो सके।

अभ्यास प्रश्न

1. गणित अपनी _____प्रकृति के कारण एक कठिन विषय के रूप में माना जाता है।
2. _____व्यवहारवाद के दो प्रमुख समर्थक थे।
3. _____के अनुसार विद्यार्थी के अधिगम पर बाह्य परिस्थितियों का प्रभाव प्रबल होता है।
4. _____अधिगम को अर्थ की खोज के रूप देखते है।
5. _____के अनुसार भाषा संज्ञानात्मक विकास का महत्त्वपूर्ण औजार है।
6. ब्रूनर के निर्देशन के सिद्धांत बताईये।

4.4 गणित शिक्षण तथा विज्ञान शिक्षण के बीच अंतर (Difference between teaching of mathematics and teaching of science)

किसी भी विषय की शिक्षण विधि उस विषय की प्रकृति पर निर्भर करती है। विज्ञान और गणित की शिक्षण विधियों में अंतर जानने से पूर्व यह आवश्यक है की हम पहले इन विषयों की प्रकृति को जाने।गणित विषय की प्रकृति में अवधारणाओं की अमूर्तता, सर्पिलाकर क्रमबद्धता और सार्वभौमिकता हैं।

गणित ऐसी विद्याओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमाणों, रूपों और उनके आपसी रिश्तों, गुण, स्वभाव इत्यादि का अध्ययन करती हैं।गणितीय ज्ञान का निर्माण स्वयंसिद्ध मान्यताओं, परिभाषाओं, नियमों और पहले से सिद्ध की गई बातों की सहायता से तर्क करते हुए ही किया जाता है। उदाहरणत: त्रिभुज के तीनों अन्त : कोणों का योग 180 डिग्री होता है इसे किसी प्रयोगशाला में प्रयोग करके नहीं बताया जा सकता है। यह ज्ञान संसार के सभी स्थानों पर एक-सा रहेगा वातावरण का कोई प्रभाव दिखलाई नहीं पड़ता है।

विज्ञान एक व्यवस्थित, सुसंगठित , क्रमबद्ध एवं व्यवहार का ज्ञान है । अवलोकन के विभिन्न आधारों एवं ज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों में प्रयोग दोनों अर्थो को विज्ञान समाहित करता है ।इसको जानने के लिए प्रेक्षण या अवलोकन कुशलता का विकास किया जाना चाहिए। अवलोकन ही विज्ञान की एक अत्यन्त मूलभूत प्रक्रिया है।प् विज्ञान की प्रक्रियाओं का उद्देश्य है किसी परिघटना को समझना, किसी प्रश्न का उत्तर खोजना, किसी सिद्धान्त का प्रतिपादन करना या किसी भी वस्तु के बारे में नई जानकारी खोजना। एन.सी.एफ.2005 में दिए गए वर्णन के अनुसार, वैज्ञानिक पद्धति आपस में सम्बन्धित कई गतिविधियों को मिलाकर बनती है। जैसे कि: निरीक्षण, देखे गए तथ्यों में समानताओं और समरूपी संरचनाओं की खोज करना, अवधारणाएँ बनाना, स्थितियों के गुणात्मक और गणितीय प्रारूप गढ़ना, तार्किक ढंग से उनके निष्कर्ष निकालना, और प्रेक्षणों तथा नियंत्रित प्रयोगों के द्वारा सिद्धान्तों के सच-झूठ होने की पुष्टि करना, और इस तरह अन्त में प्राकृतिक संसार पर लागू होने वाले सिद्धान्तों , धारणाओं तथा नियमों पर पहुँचना। विज्ञान के नियम अचल शाश्वत सत्यों की तरह नहीं देखे जाने चाहिए। यहाँ तक कि, सर्वाधिक स्थापित और सार्वभौमिक वैज्ञानिक नियम भी तात्कालिक ही माने जाने चाहिए जो नए प्रेक्षणों, प्रयोगों और विश्लेषणों के माध्यम से संशोधित किए जा सकते हैं।

क्र.सं.	विज्ञान शिक्षण	गणित शिक्षण
1.	परिकल्पना-आधारित निगमन का उपयोग करता है। इसका मतलब है कि हम पहले कोई पैटर्न देखते हैं और आगमन की प्रक्रिया से सामान्यीकरण तक पहुँचते हैं।	गणित एक अमूर्त और निगमनात्मक प्रणाली है गणित विषय के ज्ञान निर्माण में निगमनात्मक तर्क शामिल
2.	यह reason और Empirical पर आधारित है	इसमें तर्क प्रमुखता से प्रयुक्त होता है
3.	अवलोकन विज्ञान अध्ययन का प्रथम एवं महत्वपूर्ण अंग है।	इसमें आवश्यक नहीं है
4.	यह logical के साथ Positivism है	यह logical है
5.	यह प्रयोग आधारित है अत: इसमें प्रयोग शाला का प्रयोग अतिआवश्यक है ।	इसमें भी प्रयोगशाला का उपयोग हो सकता है परन्तु एक आवश्यक घटक के रूप में नहीं होता है ।

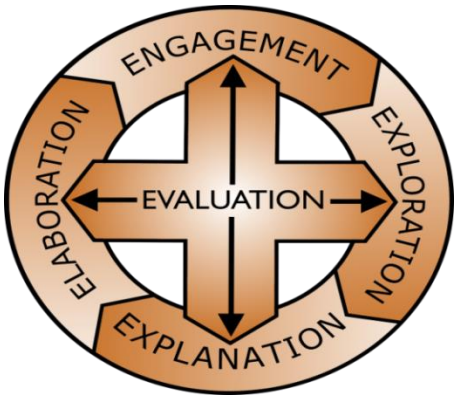
अभ्यास प्रश्न

7. किसी भी विषय की शिक्षण विधि उस विषय की _____पर निर्भर करती है।
8. _____परिकल्पना-आधारित निगमन का उपयोग करता है।
9. _____ वैज्ञानिक नियम भी तात्कालिक ही माने जाने चाहिए

4.5 गणित शिक्षण का 5 Es (संलग्न ,अन्वेषण, व्याख्या, विस्तार और मूल्यांकन),

5Es योजना शिक्षण के रचनात्मकता सिद्धांत पर आधारित है। इस पर आधारित पाठ्य-योजना रचनात्मक, निर्देशात्मक प्रारूप पर आधारित है जिसमें योजना के खंड और गतिविधि को इस तरह से संयोजित किया जाता है कि विद्यार्थी लगातार अपने मौजूदा ज्ञान के साथ नए ज्ञान को समाहित करता जाये ।प्रत्येक 5 E, शिक्षण के चरणों को बताते हैं और हरेक चरण अंग्रेजी के E अक्षर से शुरू होता है- Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate ये 5 E शिक्षकों और छात्रों को एक ही किस्म की गतिविधियों से जोड़ते हैं जिससे वे अपने मौजूदा ज्ञान के ऊपर नए ज्ञान की निर्मिति करते हैं, अर्थ का सृजन करते हैं और किसी अवधारणा की अपनी समझ का निरंतर मूल्यांकन कर सकते है। 5 Esके पांच पद निम्नवत हैं।

i. **संलग्नता (Engage):** इस चरण में विद्यार्थी की पूर्व और वर्तमान के अनुभवों को जोड़ा जाता है। इसमें गतिविधियों का ढांचा तैयार किया जाता है और छात्रों के विचारों पर मौजूदा गतिविधियों के संदर्भ में ध्यान केंद्रित किया जाता है। सिखाये जाने वाले कौशलों, प्रक्रियाओं और अवधारणाओं के साथ विद्यार्थियों को मानसिक रूप से संलग्न आवश्यक शर्त है।
ii. **अन्वेषण (Explore):** इसमें छात्र विषय का और गहन अन्वेषण करते हैं। इस चरण में उन्हें कोई निर्देश जारी नहीं किया जाता। विद्यार्थियों को अपने तरीके से चीजों को समझने का मौका मिलता है और उन्हें कुछ दिशा की बस जरूरत होती है और अध्यापक जरूरी सवाल पूछ कर, उनके संवाद को सुन कर यह सुनिश्चित कर लेता है कि वे अपने काम में लगे रहें।
iii. **व्याख्या (Explain)-** इस चरण में विद्यार्थी सीखे हुए अवधारणाओं की व्याख्या करने में सहायता करता है वे अपनी समझ को शब्दों में व्यक्त करता हैं और कौशल को प्रस्तुत करता हैं। इस चरण में शिक्षक को औपचारिक शब्दावली, परिभाषा, अवधारणा, प्रक्रिया, कौशल इत्यादि से विद्यार्थियों का परिचय करवाता है।



iv. **विस्तार (Elaborate):** इस चरण में विद्यार्थी

अपने अभ्यास कार्य को बढाता है। यह चरण विद्यार्थी को सही समय प्रदान कर्ता है की वे अपने प्रोजेक्ट, काम को प्रस्तुत करें या मूल्यांकन के लिए जमा करें।

v. **मूल्यांकन (Evaluate):** इस स्तर पर शिक्षक विद्यार्थी द्वारा सीखे हुए संप्रत्ययों का मूल्यांकन करता है। यह चरण विद्यार्थियों को आत्म-मूल्यांकन, समूह-मूल्यांकन आदि के लिए प्रेरित करता है।

अभ्यास प्रश्न

10. 5Es योजना शिक्षण के _____सिद्धांत पर आधारित है।
11. _____में विद्यार्थी की गतिविधियों में अतीत और वर्तमान के सीखने के अनुभवों को जोड़ा जाता है
12. _____में छात्र विषय का और गहन अन्वेषण करते हैं।

4.6 सहयोगी अधिगम उपागम (Collaborative Learning Approach)

सहकारी शिक्षण आधुनिक अनुसंधान के इतिहास की एक बड़ी सफलता है ।सहयोगी अधिगम का उद्देश्य कक्षा –कक्ष की गतिविधियाँ में सैद्धांतिक ओर सामाजिक अधिगम को सम्मिलित करना है। कक्षा में सभी विद्यार्थियों को सीखने के अवसरों को बढ़ाने के लिए दूसरे की सहायता करनी चाहिए। सहयोगी अधिगम उपागम विद्यार्थियों में निम्न गुणों का विकास करती है :

i. **प्रेरणा:** विद्यार्थी एक दूसरे को सीखने में मदद करते हैं, क्योंकि ऐसा करना स्वयं उनके हित में है। इसका चौतरफा प्रयास बढ़ाने पर प्रभाव पड़ता है, जिसके फलस्वरूप शिक्षण में अधिक सफलता हासिल होती है और उसके कारण चुनौतीपूर्ण अवधारणाओं को हल करने के लिए अधिक प्रेरणा मिलती है।

ii. **सामाजिक एकजुटता:** विद्यार्थी अपने साथियों की मदद इसलिए करते हैं कि वे एक ही समूह का हिस्सा हैं और उनके लिए समूह की सफलता मायने रखती है।

iii. **वैयक्तिकरण:** यदि किसी विशेष विद्यार्थी को परेशानी हो रही हो, तो इस बात की संभावना है कि समूह में कोई और उसकी मदद करे। जहाँ समूह अच्छी तरह संरचित हों, वहाँ हमेशा वही लोग मदद नहीं करते या मदद प्राप्त नहीं करते।

iv. **संज्ञानात्मक विस्तार:** विचार–विमर्श में

योगदान देने वाले लोगों को विचारों के माध्यम से सोचने के लिए और स्वयं अपने तथा दूसरों को उन्हें स्पष्ट करने के लिए मजबूर किया जाता है।

यदि किसी बड़ी कक्षा में विद्यार्थियों को अपेक्षित मदद पाना हो, तो उन्हें एक दूसरे की मदद करने के लिए उपलब्ध होना चाहिए। विद्यार्थियों द्वारा एक दूसरे को पढ़ाना आश्चर्यजनक रूप से प्रभावी हो सकता है। एक अध्ययन में विद्यार्थियों ने अपने शिक्षक से वैयक्तिक रूप से पढ़ाए जाने पर जितना सीखा लगभग उतना ही साथी द्वारा पढ़ाए जाने पर भी सीखा, संभवतः इसका कारण यह हो कि उन्हें साथी द्वारा प्रश्न पूछे जाने पर कम भय महसूस होता है ।छोटे-छोटे समूहों में छात्र अकादमिक कार्यों पर काम करके अपने और अपने साथियों को सीखने में मदद करते हैं। अपने काम और सीखने के प्रति प्रत्येक छात्र निजी तौर पर जवाबदेह होता है।सिलटाला (२०१०) ने सहयोगी अधिगम के लिए 5 बुनियादी और आवश्यक तत्वों का विश्लेषण किया है जो की निम्नवत हैं-

i. **सकारात्मक अन्योन्याश्रय(Positive Interdependence):** इसका तात्पर्य है की विद्यार्थियों को समूह में सक्रिय रहना चाहिए और उनके समूह के भीतर आगे बढने का प्रयास करना चाहिए। समूह के प्रत्येक सदस्य को एक कार्य जिम्मेदारी सोपा जाती है जिससे की वे जिम्मेदार बने। उन्हें अपने और अपने समूह पर विश्वास करना चाहिए।
ii. **प्रोत्साहक बातचीत(Promotive Interaction):** सदस्यों को एक दूसरे की सफलता पर बढ़ावा देने चाहिए। विद्यार्थियों को एक-दूसरे को समझाने मे सहायता करना चाहिए और कार्य के पूरा होनेतक उसका साथ देना चाहिए।
iii. **व्यक्तिगत और समूह जवाबदेही(Individual and group accountability):** अध्ययन के समय प्रत्येक छात्र को सामग्री के स्वामित्व का प्रदर्शन करना होगाप्रत्येक छात्र उनके सीखने और काम के लिए वह स्वयं जवाबदेह है
iv. **सामाजिक कौशल(Social Skills):** विद्यार्थियों कोसामाजिक कौशल सिखाया जाना चाहिए जिससे उनमें प्रभावी संचार, समूह भावना, नेतृत्व, संघर्ष-प्रबंधन कौशल इत्यादि कौशलों का विकास हो सके।
v. **समूह प्रसंस्करण (Group processing):** समूह प्रसंस्करण तब होता है जब समूह के सदस्यों में इस विषय पर विचार करते हैं की समूह का कौन सदस्य मददगार थे इस बात का निर्णय करते हैं किन कार्यों को जारी रखना या परिवर्तन करना है समूह प्रसंस्करण का उद्देश्य सदस्यों के समूह को लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए आवश्यक प्रक्रियाओं को आगे ले जाने के साथ उसकी प्रभावशीलता में सुधार करना है।

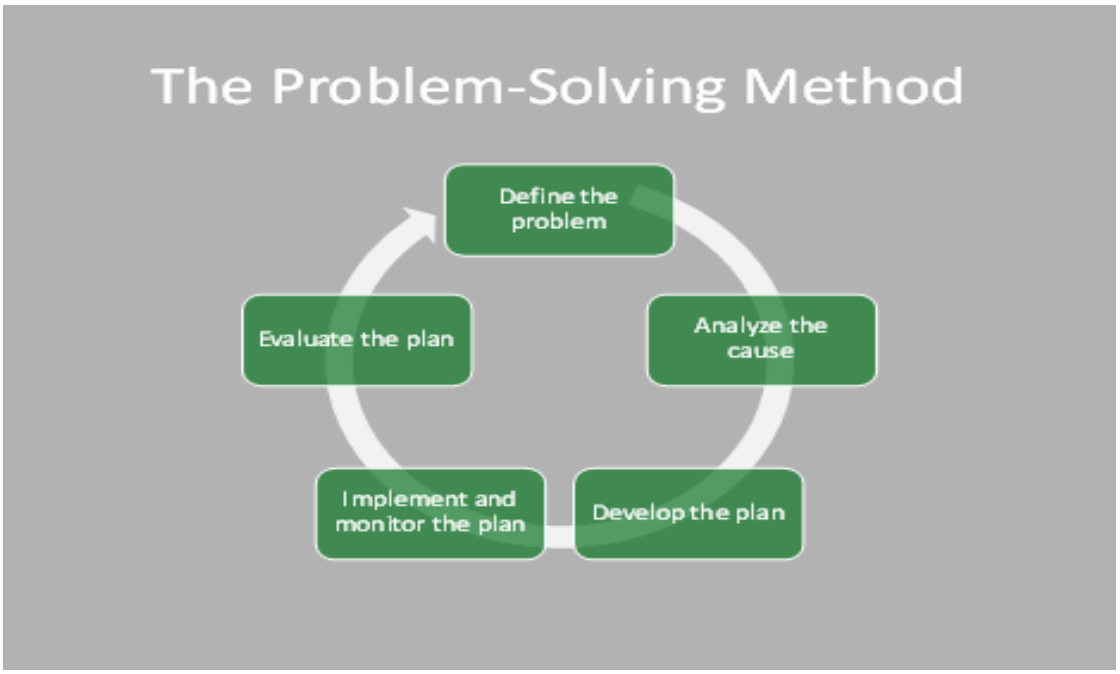
अभ्यास प्रश्न

13. सिलटाल ने सहकारी सीखने के लिए _____बुनियादी और आवश्यक तत्वों का विश्लेषण किया है

14. _____का तात्पर्य है की विद्यार्थियों को समूह में सक्रिय रहना चाहिए और उनके समूह के भीतर आगे बढने का प्रयास करना चाहिए।

4.7 समस्या समाधान उपागम(Problem Solving Approach)

समस्या समाधान विधिगणित अध्यापन की यह प्राचीनतम विधि है ।अध्यापक इस विधि में विधार्थियों के समक्ष समस्यायों को प्रस्तुत करता हैं तथा विधार्थी सीखे हुए सिद्धांतों, प्रत्ययों की सहायता से कक्षा में समस्या हल करते हैं ।इस विधि से छात्रों में समस्या का विश्लेषण करने की योग्यता का विकास होता हैं ।इससे सही चिंतन तथा तर्क करने की आदत का विकास होता है । उच्च गणित के अध्ययन में यह विधि सहायक हैं । समस्या के द्वारा विधार्थियों को जीवन से संबंधित परिस्थितियों की सही जानकारी दे सकते हैं । समस्या समाधान विधि विधार्थियों में विचार तथा निर्णय शक्ति का विकास करती हैं । इस विधि में छात्र सामुहिक निर्णय लेना सीखते हैं । छात्रों में वैज्ञानिक ढंग से चिंतन करने की क्षमता का विकास होता हैं । यह विधि स्वाध्याय का विकास करती हैं तथा प्रशिक्षण प्रदान करती है । यह विधि छात्रों की भावी योजनाओं के समस्याओं को हल करने का प्रशिक्षण देती हैं यह ह्युरिस्टिक विधि की तरह है जो काम करो और सीखो के सिद्धांत पर आधारित है । इस विधि से छात्रों में समस्या हल करने की क्षमता विकसित होती है । यह विधि छात्रों में चिंतन तथा तर्कशक्ति का विकास करती हैं ।



समस्या समाधान विधि के चरण --

i. समस्या विधि का चयन - अध्यापक व विद्यार्थियों मिलकर समस्या का चयन करते हैं।
ii. समस्या चयन का कारण - विद्यार्थियों बताया जाता है कि समस्या का चयन क्यों किया गया है ?
iii. समस्या को पूर्ण करना - समस्त विद्यार्थियों अध्यापक के मार्गदर्शन में समस्या के समाधान हेतू कार्य करते है।
iv. समस्या को हल करना - अंत मेंविद्यार्थियों समस्या का हल खोज लेते है, यह हल प्रामाणिक या परिलक्षित लक्ष्यों पर आधारित होता हैं।
v. हर या समाधान का प्रयोग - विद्यार्थियों प्रामाणिक समाधान का प्रयोग करते हैं।

समस्या समाधान विधि के दोष जीवन पर आधारित समस्याओं का निर्माण प्रत्येक अध्यापक के लिए संभव नहीं हैं। बीज गणित तथा ज्यामिति ऐसे अनेक उप विषय हैं जिसमें जीवन से संबंधित समस्यायों का निर्माण संभव नही हैं समस्या समाधान विधि का प्रयोग छोटी कक्षाओं के लिए नहीं किया जा सकता हैं। इस विधि में जरूरी नहीं है कि विधार्थियों द्वारा निकाले गए परिणाम संतोषजनक हो। इस विधि का प्रयोग कुशल अध्यापक ही कर सकते हैं, सामान्य स्तर के अध्यापक नहीं। इस विधि में पर्याप्त समय लगता हैं।

अभ्यास प्रश्न

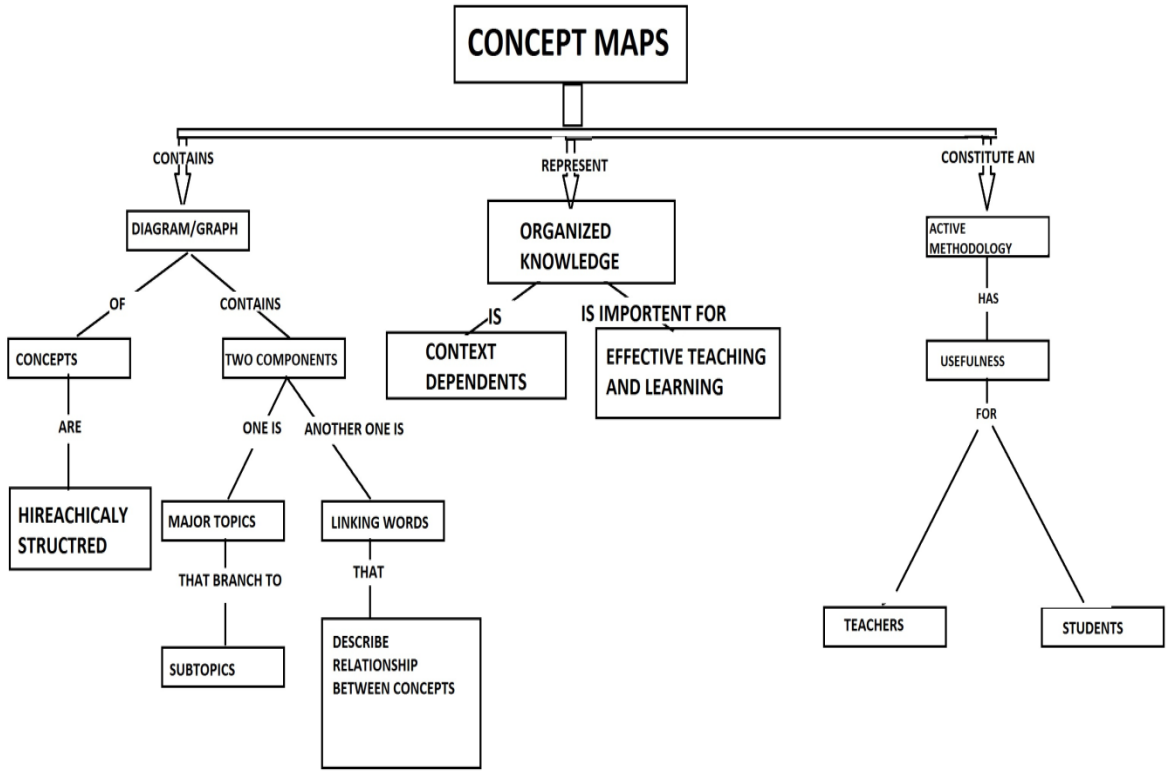
15. समस्या समाधान विधि के चरण बताईये

4.8 संप्रत्य / संकल्पना मानचित्रण (Concept Mapping)

संकल्पना मानचित्र गणितीय संबंध देखने में सहायता करने वाला एक अच्छा उपकरण है । लाक्षणिक रूप से, यह संकल्पना को (एक नोड के रूप में) निरूपित करने वाली शब्दों या वाक्यांशों की एक श्रृंखला और उसे एक अन्य संकल्पना से जोड़कर दोनों के बीच संबंध अभिव्यक्त करने वाली एक रेखा होती है। यह विद्यार्थियों द्वारा अन्वेषण और उनकी समझ की समीक्षा करने के लिए एक अच्छा उपकरण व रणनीति है। इसे विद्यार्थियों के ज्ञान और उनके मन की भ्रांतियों को पता करने के लिए एक आकलन उपकरण के तौर पर भी उपयोग किया जा सकता है। संप्रत्य मानचित्रण की संकल्पना की शूरुआत जोसेफ डी नोवाक तथा उनके सहयोगियों ने लगभग 1970 के दशक में किया था। संकल्पना मानचित्र को किसी विशेष प्रकरण से संबद्ध संकल्पनाओं के बीच के संबंध के बारे में किसी व्यक्ति के ज्ञान का निरूपण माना जा सकता है (नोवाक व गोविन, 1984)।यह एक पूरक तकनीक है, जो विचारों के संगठन और अवधारणाओं के बीच के सम्बन्ध स्थापित करती है। इसको सार्थक अधिगम के एक उपकरण के रूप प्रयोग किया जाता है । यह अवधारणाओं के बीच संबंधों को एक चित्र द्वारा

दर्शाता है। अवधारणा नक्शा आम तौर पर विचारों एवम् जानकारियों को श्रेणीबद्ध संरचना में तीर के माध्यम से जोड़ता है। अवधारणाओं के बीच संबंधों को वाक्यांशों से जोड़ केव्यक्त करता है। एक अवधारणा नक्शे में, प्रत्येक शब्द या वाक्यांश दूसरे को जोड़ता हैऔर मूल विचार से शब्द, या वाक्यांश जुड़ा होता है। अवधारणाओं को सामान्य से विशिष्ट में क्रमबद्ध किए बिना भी अवधारणा मानचित्रण का उपयोग कर सकते हैं। छोटे विद्यार्थियों के लिए कम और ऐसे शब्दों का उपयोग किया जाए जो विषय से निकट रूप से जुड़े हुए हों । अवधारणाओं को एक तीर से जोड़ा जाता है और शब्द, उस जुड़ाव के बारे में समझाते हैं। तीर की दिशा बताती है कि वाक्य किस दिशा में पढ़ा जाना चाहिए।बिर्बिली (2006) ने उद्धरित किया है की अवधारणा नक्शा विद्यार्थियों को मुख्य संप्रत्ययों का बोध मुख्य संप्रत्ययों की पहचान और उनके बीच संबंधों को दिखाने में सहायता करता है। संप्रत्यय मानचित्र व्यक्ति कैसे सोचता इसको चिन्हित करता है और विषयों के बीच संबंधों को देखते हैं। यह संज्ञानात्मक संरचना का चित्रण है जो की पदानुक्रम और संप्रत्ययों के बीच अंतर्संबंध को दर्शाता है ।

स्रोत: IGNOU (2016) Learning and Teaching (BES 123), New Delhi



यह विद्यार्थियों को निम्नलिखित तरीके से सहायता करता है

i. पहले से जो विचार वो रखते हैं उनके बीच सम्बन्ध को समझने में।
ii. उनके पूर्व ज्ञान को नये ज्ञान से जोड़ने में।
iii. विचारों को तार्किक क्रम मेंसंयोजित करना।

इसलिए यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि अवधारणा चित्र शिक्षक को निम्नलिखित तरीके में मदद करता है:

- अवधारणामानचित्र शिक्षकों की क्षमता छात्रों के विविध समूहों के लिए अर्थ सृजन के लिए विविध विधियों को तैयार करता है।
- यह शिक्षकों को यह जानने का अवसर प्रदान करता है की विद्यार्थियों कैसे ज्ञान को अलग ढंग से व्यवस्थित कर सकते हैं।
- संप्रत्यय मानचित्र उचित शिक्षण सामग्री के चयन में सहायता प्रदान करता है।

- मानचित्रण विषय वस्तु में एकीकृत, सतत और तार्किक में अनुक्रम के विकास में सहायता करता है।
- संप्रत्यय मानचित्र की सहायता से विषय वस्तु को के सांगत , अर्थपूर्ण और रुचिकर बनाया जा सकता है।
- अवधारणा नक्शे सीखने के समग्र शैली में मदद करता है।
- संकल्पना मानचित्रण अमूर्त ज्ञान को मूर्त ढांचे के रूप प्रस्तुत करने में सहायता करता है।

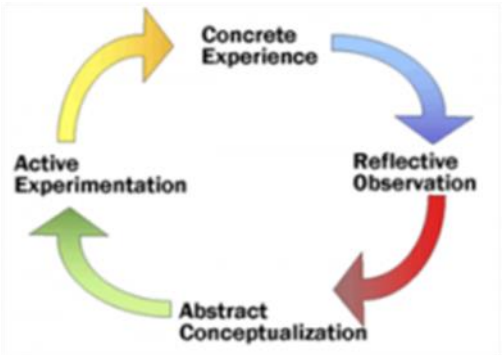
अभ्यास प्रश्न

16. _____ गणितीय संबंध देखने में सहायता करने वाला एक अच्छा उपकरण है
17. संप्रत्य मानचित्रण की संकल्पना की शूरुआत_____ने लगभग 1970 के दशक में किया था।

4.9 अनुभवात्मक अधिगम (Experiential learning)

अनुभवात्मक अधिगम का अर्थ है क्रिया ,अन्वेषण , अनुभव , सृजन ,खोज तथा अपने आस पास के वातावरण में अंत: क्रिया के द्वारा सीखना। अनुभवात्मक अधिगम प्रथम/मौलिक अनुभव के माध्यम से शिक्षित करने का एक माध्यम है। कौशल, ज्ञान, और अनुभवजो की पारंपरिक शैक्षिककक्षाओं के बाहर अर्जित होते है। अनुभवात्मक अधिगम में अनुभव सीखने की प्रक्रिया में केंद्रीय भूमिका पर होता है ।यह एक ऐसी प्रक्रिया है जहाँ अनुभवों को आत्मसात करने और उनके रूपांतरण के परिणामस्वरूप ज्ञान का सृजन होता है।अनुभवात्मक ज्ञान व्यावहारिक ज्ञान पर ज़ोर देता है तथा सीखने वाले की आवश्यकता को संबोधित करता है।यह चार मुख्य तत्व है जो सीखने के अनुभव के दौरान एक सतत चक्र में काम पर आधारित है:

- मूर्त अनुभव (Concrete experience)
- चिंतनशील अवलोकन (Reflective observation)
- अमूर्त अवधारणा (Abstract conceptualization)
- सक्रिय प्रयोग (Active experimentation)



कोल्ब के अनुसार अनुभवों से वास्तविक ज्ञान हासिल करने

के लिए, शिक्षार्थी के पास चार क्षमताए होना चाहिए:

- शिक्षार्थी सक्रिय रूप से अनुभव में शामिल होने के लिए तैयार होना चाहिए।
- शिक्षार्थी अनुभव पर चिंतन मनन करने के लिए सक्षम होना चाहिए।
- शिक्षार्थी के पास अनुभवों को संप्रत्ययीकरण और विश्लेषणात्मक कौशल का उपयोग करने क्षमता होनी चाहिए।
- शिक्षार्थी के पास निर्णय लेने तथा समस्या समाधान का कौशल होना चाहिए ताकि अनुभव से प्राप्त नए विचारों का उपयोग हो सके ।

अभ्यास प्रश्न

18. अनुभवात्मक अधिगम _____ के माध्यम से शिक्षित करने का एक माध्यम है।
19. उन चार मुख्य तत्व जो सीखने के अनुभव के दौरान एक सतत चक्र में काम पर आधारित है का नाम बताये।

4.8 सारांश

गणित शिक्षण की पारंपरिक विधि में गणित को प्रत्यक्ष अनुदेशन, तथ्यों और प्रक्रियाओं के रटने पर ज़ोर देते हुए रूढ़िवादी तरीके से पढ़ाया जाता था। हाल ही में गणित शिक्षण में विद्यार्थियों की सक्रिय सहभागिता पर ज़ोर देते हुए उन्हें स्वयं ज्ञान के सृजन करने वाला माना गया । दूसरे शब्दों में कहे तो गणित शिक्षण और अधिगम की व्यावहारवादी दृष्टिकोण से संरचनावादी दृष्टिकोण में स्थानांतरण शुरू हुआ। स्किनर और वाटसन व्यवहारवाद के दो प्रमुख समर्थक थे। व्यवहारवादियों के अनुसार, सभी व्यवहार बाहरी उत्तेजनाओं को एक व्यक्ति की प्रतिक्रियाओं का परिणाम है। अर्थात बाहरी वातावरण सीखने के लिए योगदान करता है । जीन पियाजे , स्विटजरलैंड के मनोवैज्ञानिक एवं दार्शनिक, के अनुसार व्यक्ति अपने वातावरण एवं परिवेश के साथ मानसिक शक्तियों का प्रयोग करते हुए सीखता है और सीखना उस समय ज्यादा अर्थपूर्ण होता है जब वह विद्यार्थी की रुचि और जिज्ञासा के अनुरूप हो। इनका मानना है की मानव शिशु शुरूआत में संज्ञानी जीव नहीं होता वह अपनी बोधात्मक और गत्यात्मक गतिविधियों के द्वारा मनोवैज्ञानिक ढांचे, अनुभवों से सीखने के संगठित तरीके से खुद को अपने पर्यावरण के अनुसार ढाल पाता है। लिव सिमनोविच वाइगोत्सकी (1896-1934) ने संज्ञानात्मक विकास को सामाजिक दृष्टिकोण प्रदान कर्ता है। इनके अनुसार संज्ञानात्मक विकास के लिए व्यक्ति तथा समाज एवं सांस्कृतिक संबन्धें के बीच संवाद महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है है । वाइगोत्सकी भी यह मानते थे कि बच्चे ज्ञान का निर्माण करते है। किन्तु इनके अनुसार संज्ञानात्मक विकास सामाजिक-सांस्कृतिक संदर्भ में होता है। ब्रूनर शिक्षण को एक ऐसी सक्रिय प्रक्रिया मानते है जिसमें सीखने वाला अपने पूर्व व वर्तमान ज्ञान के आधार पर नए विचार या अवधारणाओं को रचता है। सीखने वाला सूचनाओं को चुनकर उनका रूपांतरण करता

है, प्रस्थापनाएं बनाता है, निर्णय लेता है और ऐसा करते समय वह एक ज्ञानात्मक ढांचे पर भरोसा करता है।इनके अनुसार शिक्षक और शिक्षार्थी को सक्रिय संवाद की स्थिति में होनी चाहिए। ब्रूनर के अनुसार दिशा-निर्देश अनुभवों और उन संदर्भों से जुड़े होने चाहिए जिससे बच्चा सीखने को तत्पर हो ,दिशा-निर्देश संरचित होने चाहिए ताकि ये बच्चों को आससानी से समझ में आ सकें तथा दिशा-निर्देश ऐसे होने चाहिए जिनके आधार पर अनुमान लगाए जा सकें और रिक्त स्थानों को भरा जा सके अर्थात प्रदत्त सूचना का अतिक्रमण संभव हो सके।

5Es योजना शिक्षण के रचनात्मकता सिद्धांत पर आधारित है। इस पर आधारित पाठ्य-योजना रचनात्मक, निर्देशात्मक प्रारूप पर आधारित है जिसमें योजना के खंड और गतिविधि को इस तरह से संयोजित किया जाता है कि विद्यार्थी लगातार अपने मौजूदा ज्ञान के साथ नए ज्ञान को समाहित करता जाये ।प्रत्येक 5 E, शिक्षण के चरणों को बताते हैं और हरेक चरण अंग्रेजी के E अक्षर से शुरू होता है- Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate ये 5 E शिक्षकों और छात्रों को एक ही किस्म की गतिविधियों से जोड़ते हैं जिससे वे अपने मौजूदा ज्ञान के ऊपर नए ज्ञान की निर्मिति करते हैं, अर्थ का सृजन करते हैं और किसी अवधारणा की अपनी समझ का निरंतर मूल्यांकन कर सकते है।

सहयोगी अधिगम का उद्देश्य कक्षा –कक्ष की गतिविधियाँ में सैद्धांतिक ओर सामाजिक अधिगम को सम्मिलित करना है। कक्षा में सभी विद्यार्थियों को सीखने के अवसरों को बढ़ाने के लिए दूसरे की सहायता करनी चाहिए।

समस्या समाधान विधि गणित अध्यापन की यह प्राचीनतम विधि है । अध्यापक इस विधि में विधार्थियों के समक्ष समस्यायों को प्रस्तुत करता हैं तथा विधार्थी सीखे हुए सिद्धांतों, प्रत्ययों की सहायता से कक्षा में समस्या हल करते हैं । इस विधि से छात्रों में समस्या का विश्लेषण करने की योग्यता का विकास होता हैं । समस्या समाधान विधि के चरण --1. समस्या विधि का चयन, 2. समस्या चयन का कारण, 3. समस्या को पूर्ण करना ,4. समस्या को हल करना 5. हर या समाधान का प्रयोग

संकल्पना मानचित्र गणितीय संबंध देखने में सहायता करने वाला एक अच्छा उपकरण है । लाक्षणिक रूप से, यह संकल्पना को (एक नोड के रूप में) निरूपित करने वाली शब्दों या वाक्यांशों की एक श्रृंखला और उसे एक अन्य संकल्पना से जोड़कर दोनों के बीच संबंध अभिव्यक्त करने वाली एक रेखा होती है। यह विद्यार्थियों द्वारा अन्वेषण और उनकी समझ की समीक्षा करने के लिए एक अच्छा उपकरण व रणनीति है। इसे विद्यार्थियों के ज्ञान और उनके मन की भ्रांतियों को पता करने के लिए एक आकलन उपकरण के तौर पर भी उपयोग किया जा सकता है।

4.9 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. अमूर्त

2. स्किनर और वाटसन
3. व्यहारवादियों
4. संरचनावादी
5. वाइगोत्सकी
6. ब्रूनर के चार प्रमुख निर्देशन के सिद्धांत निम्नलिखित है।
    i. सीखने की ओर झुकाव,
    ii. किसी भी ज्ञान की इकाई को किस तरीके से पुनर्संरचित किया जाए जिससे कि सीखने वाला उसे सबसे आसानी से आत्मसात कर सके,
    iii. शिक्षण सामग्री को प्रस्तुत करने का सबसे प्रभावी क्रम,
    iv. पुरस्कार और दंड का स्वरूप,
7. प्रकृति
8. विज्ञान
9. सार्वभौमिक
10. रचनात्मकता
11. संलग्नता चरण
12. अन्वेषण
13. 5
14. सकारात्मक अन्योन्याश्रय
15. समस्या समाधान विधि के चरण निम्नलिखित है -
    i. समस्याविधिकाचयन - अध्यापकवविद्यार्थियोंमिलकरसमस्याकाचयनकरतेहैं।
    ii. समस्या चयन का कारण - विद्यार्थियों बताया जाता है कि समस्या का चयन क्यों किया गया है ?
    iii. समस्या को पूर्ण करना - समस्त विद्यार्थियों अध्यापक के मार्गदर्शन में समस्या के समाधान हेतू कार्य करते है।
    iv. समस्या को हल करना - अंत में विद्यार्थियों समस्या का हल खोज लेते है, यह हल प्रामाणिक या परिलक्षित लक्ष्यों पर आधारित होता हैं।
    v. हर या समाधान का प्रयोग - विद्यार्थियों प्रामाणिक समाधान का प्रयोग करते हैं।
16. संकल्पना मानचित्र
17. जोसेफ डी नोवाक तथा उनके सहयोगियों
18. प्रथम/मौलिक अनुभव
19. चार मुख्य तत्व जो सीखने के अनुभव के दौरान एक सतत चक्र में काम पर आधारित है वो इस प्रकार है:
    - मूर्त अनुभव (Concrete experience)

- चिंतनशील अवलोकन (Reflective observation)
- अमूर्त अवधारणा (Abstract conceptualization)
- सक्रिय प्रयोग (Active experimentation)

4.10 संदर्भ ग्रन्थ सूची

1. Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., and N. Landes. 2006. The BSCS 5E instructional model: origins, effectiveness, and applications. Colorado Springs: BSCS. http://www.bscs.org/curriculumdevelopment/features/bscs5es.html
2. Birbili, M (2006). "Mapping Knowledge: Concept Maps in Early Childhood Education," in Early Childhood Research & Practice 8,2
3. Encyclopedia of psychology.(4 vol.). (1994). 2nd ed. New York: Wiley. The most comprehensive encyclopedia of general psychology available.
4. Graham, G. (2005). Behaviorism. In E. N. Zalta (Ed.), The Stanford encyclopedia of philosophy (Fall 2007 ed.). Retrieved from http://plato.standford.edu/entries/behaviorism/ VandenBos, G. R. (Ed.).(2007). APA dictionary of psychology. Washington, DC: American Psychological Association.
5. IGNOU (2016) Learning and Teaching (BES 123), New Delhi
6. National Council of Educational Research and Training (2005) National Curriculum Framework (NCF). New Delhi: NCERT.
7. National Council of Educational Research and Training (2009) National Curriculum Framework for Teacher Education (NCFTE). New Delhi: NCERT.
8. Siltala, R. (2010). Innovativity and cooperative learning in business life and teaching.University of Turku.

4.11 निबन्धनात्मक प्रश्न

1. पियाजे, व्योगोस्त्की और ब्रूनर का शिक्षण में योगदान की समीक्षा कीजिए।
2. गणित शिक्षण तथा विज्ञानशिक्षण के बीच अंतर बताओ

3. गणित शिक्षण का 5 Es का प्रयोग करते हुए एक पाठ योजना तैयार कीजिए।
4. सहयोगी अधिगम उपागम का विश्लेषण कीजिए।
5. समस्या समाधान उपागम को अपने शब्दों में में लिखिए।
6. संकल्पना मानचित्रको समझाते हुए अपनी पसंद के किसी प्रकरण की संकल्प मानचित्र तैयार कीजिए।
7. आनुभविक अधिगम से आप क्या समझते हैं ? इसकी विशेषताओं की विवेचना कीजिए।
8. गणित शिक्षण के विविध उपागमों की चर्चा कीजिए।

इकाई 5 - गणित शिक्षा में नवाचार और शिक्षक की भूमिका

Recent Trends in Mathematics Education and the Role of Teacher

5.1 प्रस्तावना
5.2 उद्देश्य
5.3 आई० सी० टी और गणित शिक्षा
5.4 गणित शिक्षा और समावेशीकरण
5.5 स्व: अध्ययन का सुगमीकरण
5.6 गणित में सम्प्रेषण
5.7 शिक्षार्थियों में सम्प्रेषण कौशल का विकास

5.1 प्रस्तावना

शिक्षा, समाज की एक पीढ़ी द्वारा आगामी पीढ़ी को ज्ञान के हस्तांतरण का प्रयास है। इस विचार से शिक्षा एक संस्था के रूप में काम करती है, जो व्यक्ति विशेष को समाज से जोड़ने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है तथा समाज में संस्कृति की निरंतरता को बनाए रखती है। जैसे-जैसे समय में बदलाव आता गया, शिक्षा के स्वरुप में भी आधारभूत परिवर्तन होता गया। समय के साथ साथ सीखने-सिखाने की प्रक्रिया और शिक्षा प्रणाली का स्वरुप भी भी बदलता रहा है। शिक्षा के इस बदलते स्वरुप में भारत ने हमें शा से ही शिक्षा को उच्च महत्व दिया है। चाहे वो प्राचीन भारत में विकसित हुई वैदिक शिक्षा प्रणाली हो या उसके बाद के कालखंड में स्थापित तक्षशिला और नालंदा विश्वविद्यालय या आधुनिक काल का विभिन्न सुविधाओ से परिपूर्ण स्मार्ट क्लासेस और हाई–टेक विश्वविद्यालय जिसने शिक्षा व्यवस्था को पूरी तरह से बदल दिया है। बहुत सारे आधुनिक उपकरण और शिक्षण- अधिगम संसाधन ने शिक्षण अधिगम प्रक्रिया को बहुत आसान बना दिया है।

प्रारम्भ से ही शिक्षा का मुख्य लक्ष्य युवा पीढ़ी का शारीरिक, मानसिक व बौद्धिक विकास करना रहा है| इसके अलावा शिक्षा का एक और महत्वपूर्ण उद्देश्य व्यक्ति के भीतर विद्यमान गुणों को विकसित करना और उसे पूर्णत: प्रदान करना भी। प्राचीन भारत में शिक्षा का परम लक्ष्य विद्यार्थियों के अंदर अच्छे संस्कार पैदा करना तथा इस संसार या दूसरे संसार में जीवन के लिए बेहतर तैयारी करना था। प्राचीन काल में ऋषि-मुनि अपने आश्रम में विद्यार्थियों को शिक्षा प्रदान करते थे और शिक्षा प्राप्ति हेतु दूर-दूर से विद्यार्थी

उनके गुरुकुल में आते थे, चाहे वह किसी राजा का पुत्र हो अथवा रंक का, एक साथ आश्रम में रहकर भिक्षाटन और गुरु की सेवा करते हुए शिक्षा प्राप्त करते थे। गुरुकुल प्रणाली ने गुरु और शिष्य के बीच संबंध को बढावा दिया और इसने एक अध्यापक केन्द्रित शिक्षा प्रणाली स्थापित की जिसमें छात्र को कठोर अनुशासन में रहना होता था और अपने शिक्षक के प्रति उसे कुछ दायित्वों के अधीन रहकर सीखना होता था। लेकिन जैसे जैसे समय बदलता गया वैसे वैसे शिक्षा के क्षेत्र में भी महत्वपूर्ण बदलाव देखने को मिले। फिर इसी समय के बदलते चक्र में गुरुकुल का स्थान आधुनिक स्कूल-कालेजों ने ले लिया, नित होते नए तकनीकी आविष्कारों ने लोगों के जीवन स्तर में काफी परिवर्तन लाया। इससे शिक्षा का क्षेत्र भी अछूता नहीं रहा। पढने-लिखने के संसाधनों का अभूतपूर्व विकास हुआ। स्कूल और कालेज जो ज्ञान का केंद्र थे, नित नये संसाधनों से संपन्न होने लगे। भव्य भवन, संपन्न पुस्तकालय, आधुनिक प्रयोगशालाएं, कुशल व समर्पित शिक्षक, ये सब शिक्षा के एक नए स्वरुप के उदाहरण बने।

आज ई-लर्निंग का जमाना है, जिसमें शैक्षिक गतिविधिया तथा सीखने की प्रक्रिया केवल कक्षाओं तक सीमित नहीं है और इसलिए शिक्षा प्रणाली केवल औपचारिक स्कूल अथवा विश्वविद्यालय प्रांगण तक सीमित नहीं रही। शैक्षणिक प्रक्रिया अब केवल कक्षा आधारित पाठ्यक्रम के आदान-प्रदान से ही संचालित नहीं होती, बल्कि यह कार्य इलेक्ट्रॉनिक और प्रिंट मीडिया के साथ-साथ, सूचना और संचार प्रौद्योगिकी (आई.सी.टी.) के बेहतर विकल्प जैसे कि- सोशल मीडिया, यू-टयूब चैनल और ई-लर्निंग पोर्टल आदि की मदद से घर बैठे भी हो रहा है। नए ज्ञान के सृजन और अनुप्रयोग की तीव्र गति, विशेषकर आईसीटी ने लोगो के जीवन को आसन बना दिया है। इस इकाई में हम गणितीय संदर्भ में शिक्षण-अधिगम की इसी प्रक्रिया के बदलते स्वरुप के बारे में जानेंगे।

5.2. उद्देश्य

1. गणित शिक्षण में आई.सी.टी. संसाधन की क्षमता और उपयोगिता स्पष्ट कराना बढ़ावा देना।
2. गणित के संदर्भ में विभिन्न प्रकार के सोशल मीडिया माध्यम का प्रयोग व उपयोगिता से अवगत कराना।
3. शिक्षण व प्रशिक्षण के लिए वर्त्तमान पाठ्यक्रम के संवर्द्धन के लिए सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उपकरणों जैसे की कंप्यूटर इन्टरनेट विभिन्न मोबाइल एप्स का की भूमिका स्पष्ट कराना।
4. गणित की समावेशी कक्षा में शिक्षक की भूमिका स्पष्ट कराना।
5. सूचना व संचार प्रौद्योगिकी के माध्यम से दिव्यांग छात्र-छात्राओं के लिए प्रभावी शिक्षण वातावरण उपलब्ध कराना।
6. गणित की समावेशी कक्षा में शिक्षण वातावरण को प्रभावी बनाने में आई.सी.टी की भूमिका स्पष्ट कराना।
7. स्व:अध्ययन के संवर्द्धन के लिए सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उपकरणों से जुड़ी कुशलता में कुशल बनाना।

8. स्व:अध्ययन को सुगम, सरल, रोचक, सफल व सार्वभौमिक बनाने हेतु सुझाव देना।
9. गणितीय सम्प्रेषण के उद्देश्य, तत्व, बाधक तत्व, कमियाँ पर प्रकाश डालना।
10. गणित विषय/ गणित कक्षा में सम्प्रेषण कौशल का विकास कराना।

5.3. आई.सी.टी. और गणित शिक्षा

सूचना और संचार की प्रौद्योगिकी, जिसे आम तौर पर आई.सी.टी. कहा जाता है, जिसके अंतर्गत वे सभी साधन शामिल हैं जिनका प्रयोग सूचना एवं सम्प्रेषण का संचालन करने के लिए किया जाता है। इसके अंतर्गत दूरसंचार, प्रसारण मीडिया और सभी प्रकार के ऑडियो और वीडियो प्रक्रमण एवं प्रेषण शामिल है। इसकी सफलता के लिए इन्टरनेट सहित अलग-अलग उपकरणों की एक बड़ी श्रृंखला शामिल होती है जैसे: कंप्यूटर, लैपटॉप, मोबाइल फोन, स्मार्टफोन, टैबलेट, प्रोजेक्टर, प्रिंटर, स्कैनर, डिजिटल कैमरे और इसी तरह के अन्य उपकरण। भविष्य में, ऐसी संभावना है कि अधिकांश कक्षाएं मोबाइल फोन और टैबलेट या परंपरागत डेस्कटॉप या लैपटॉप की मदद से आसानी से उपलब्ध होंगे और इस कारण इस उभरते हुए परिदृश्य के अनुसार अपनी जागरूकता बढ़ाने और सीखने के अवसर तलाशने के लिए सूचना और प्रौद्योगिकी का बेहतर इस्तेमाल कैसे किया जाये? इस बारे में जानने का प्रयास करेंगे, जिससे इन प्रौद्योगिकियों का बेहतर से बेहतर इस्तेमाल किया जा सके।

आधुनिक युग में कंप्यूटर और इन्टरनेट की क्रांति ने शिक्षा जगत का पूरा परिदृश्य ही बदल कर रख दिया है। इसने मानव जीवन के हर पहलू को न केवल प्रभावित किया है, बल्कि देखा जाये तो कार्य-व्यापार के भी हर क्षेत्र में अपनी पैठ बना ली है। दुनिया एक छोटे से गावं में सिमट गयी है, जहाँ दूरियां कोई मायने नहीं रखती। एक देश का आदमी दूसरे में बैठे लोगो के साथ जानकारी का आदान प्रदान घर बैठे आसानी से कर रहे है। अपने सम्बन्धी या मित्रों से बातें करना या फिर घर बैठे अनेकानेक कार्य करने की सुविधा उपलब्ध हो गयी है।

इतना ही नहीं आज के दौर में पढने-लिखने और मनचाही शिक्षा प्राप्त करने की भी सारी सुविधाएँ इस ग्लोबल विलेज में घर बैठे संभव हो गया है। कक्षा आधारित शिक्षण का स्थान अब ई-लर्निंग पोर्टल ने ले लिया है। हमारे पास कोई प्रश्न है, तो इसका उत्तर चंद सेकंडो में विभिन्न ई- लर्निंग पोर्टल या गूगल की मदद से प्राप्त किया जा सकता है। अपने मनपसंद कोर्स कहाँ से करे? इंटरनेट पर हर प्रश्न का जवाब उपलब्ध है। जैसे-जैसे तकनीक उन्नत होती जा रही है, वैसे वैसे सुविधाएँ धीरे-धीरे आम लोगों तक पहुँच रही है।

मनमाफिक शिक्षा हासिल करने के लिए ई-लर्निंग अथवा ऑनलाइन पढाई का क्रेज धीरे-धीरे बढ़ता जा रहा है. सुविधाएँ सीमित होने के कारण भले ही यह प्रणाली अभी आम पहुँच से कुछ दूर है, लेकिन इसकी पहल बहुत तेजी से बढ़ रही है। अब जाने-माने अनेक प्रतिष्ठित संस्थान कई तरह के ऑनलाइन कोर्स चला रहे हैं जहाँ इन्टरनेट के द्वारा विभिन्न विषयों की पढाई होती है। वहीँ समस्याओं का समाधान भी होता है। इन संस्थानों में इग्नू से लेकर जामिया मिलिया इस्लामिया और कई निजी शिक्षण संस्थान हैं, जिनके शैक्षिक पोर्टल शिक्षार्थियों को अपनी शिक्षा का लाभ पहुंचा रहे हैं। कई ऐसे छात्र हैं जो पढाई करने के

लिए दूर-दराज के शहरों में नहीं जा सकते जिसके अनेक कारण हो सकते हैं। उन छात्रों के लिए ऑनलाइन कोर्स एक बेहतर विकल्प साबित हो रहा है।

शिक्षा जगत में ट्यूशन की भी एक परंपरा बनी हुई है जिसका अपना एक खासा बड़ा बाज़ार है। आजकल तो शहरों में ट्यूशन और कोचिंग के नाम पर मोटी फीस ली जा रही है। उनकी फीस इतनी भारी-भरकम होती है कि एक आम अभिभावक के लिए ट्यूशन फीस जमा कर पाना मुश्किल हो रहा है। ऐसे में ई-ट्यूटर एक वरदान बनकर सामने आया है जिसके ऑनलाइन या ऑफलाइन कोर्स खासे सस्ते या नि:शुल्क हैं।

ऑनलाइन क्षेत्र की हलचल अपने देश में खासकर दूर-दराज के गाँवों और कस्बाई इलाकों में अभी धीरे-धीरे विस्तार पकड़ रही है। बहुत से लोग अभी इसके आदी नहीं हुए हैं। इंटरनेट का उपयोग अभी ज्यादातर कोई रिजल्ट देखने अथवा सूचना पाने या फिर ई-में ल इत्यादि करने के लिए कर लिया जाता है। सच पूछा जाये तो ये एक बानगी भर है, पूरा किस्सा तो अभी बाकी है.....

कंप्यूटर का एक छोटा रूप मोबाइल भी है। एक समय था जब मोबाइल आम आदमी की पहुँच से दूर था। अब यह हर आम और खास व्यक्ति की जेब में मौजूद है। एक तरफ इंटरनेट पर जहाँ नित नए स्कूल और कालेजों का उदय हो रहा है वहीँ मोबाइल भी अब इससे अछूता नहीं रहा है। अब मोबाइल के द्वारा भी शिक्षा देने कि पहल हो रही है। शैक्षिक कंटेंट्स मोबाइल हैण्डसेटों के अनुरूप बनाये जा रहे हैं।

टेक्नोलॉजी के बढ़ते रफ़्तार ने लोगों की सोच को मीलों पीछे छोड़ दिया है। यदि हमें आगे रहना है तो समय के इस बदलते स्वरुप को पहचानना होगा और अपने आप को इसके अनुरूप ढालने के लिए तैयार रहना होगा।

गणित शिक्षण में आईसीटी का प्रयोग

कंप्यूटर विद्यार्थियों को गणितीय समस्याओ का हल पता लगाने, विभिन्न प्रश्नों का परिणाम ढूंढने, परिणामों की व्याख्या करने, परिस्थितियों का विश्लेषण करने, और साथ ही तेज़ और विश्वसनीय प्रतिक्रिया प्राप्त करने के लिए बेहतर और विश्वसनीय अवसर प्रदान करता है। आई.सी.टी. की उपलब्धता ने गणित शिक्षण और सीखने की प्रकृति को आसन बना दिया है। इन्टरनेट के साथ साथ साथ डिजिटल उपकरणों की एक श्रेणी मौजूद है जो विद्यार्थियों को समस्या का हल ढूंढने में बहुत मदद कर रहा है। स्प्रैडशीट्स और डेटाबेस का उपयोग करके किसी भी डेटा को एकत्र करने और उचित जोड़तोड़ कर आकर्षक रूप में प्रदर्शित करने की अवसर उपलब्ध करता है। मल्टीमीडिया सॉफ्टवेयर प्रोग्राम अध्ययन की विशिष्ट इकाइयों पर ध्यान केंद्रित करता है, जिसमें छात्रों को सीखने के लिए गतिशीलता, प्रदान की जा सकती है । आईसीटी का उचित उपयोग गणित शिक्षण और अन्य शिक्षा को आसान बनती है। इसके कई विशिष्ट रूप हैं जिनमें गणित शिक्षण के लिए आईसीटी का उपयोग किया जा सकता है, इसके अंतर्गत कैलकुलेटर, स्प्रेडशीट, डेटाबेस और ऑनलाइन इंटरैक्टिव संसाधन शामिल हैं। कक्षाओं के दौरान ज्ञान, कौशल और समझ को उपयुक्त बनाने हेतु स्प्रेडशीट, डाटाबेस, या विभिन्न ग्राफिकल सॉफ्टवेर की मदद

से इसे बेहतर ढंग से प्रस्तुत करने में मदद लिया जा सकता है। गणित शिक्षण में आई.सी.टी. का उचित उपयोग, गणित की अवधारनाओ को सीखने एवं सीखाने की प्रक्रिया को आसान बना दिया है। आज इन्टरनेट पर गणितीय अवधारणाओं की जानकारी बेहद ही रोचक ढंग से विभिन्न वेबसाइट पर उपलब्ध है.....जैसे:- http://www.mathisfun.com/; http://www.educationworld.com/; http://www.nctm.org/ आदि।

जिनका प्रयोग कर, छात्र गणित की विभिन्न अवधारणा को आसानी से समझ सकते है। आई.सी.टी. के प्रयोग से गणितीय अवधारणाओं को विजुअल प्रदान करने और सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा आसन, रोचक एवं प्रभावशाली बनाया जा सकता है। आई.सी.टी. गणित के छात्रों को यह जानने में भी मदद करता है कि उन्हें क्या और कैसे सीखा जाये। यह गणितीय अवधारनाओ को अधिक मनोरंजक बनाकर विद्यार्थियों के आत्मविश्वास और प्रेरणा के रूप में बेहतर विकल्प के तौर पर इस्तेमाल किया जा सकता है। इसके आलावा जब छात्र आई.सी.टी. का उपयोग करते हैं, तो विद्यार्थियों के व्यवहार और सीखने की गतिविधियों में शामिल होने से वे अपने स्वयं के सीखने की अधिक जिम्मेदारी ग्रहण करते हैं। वे अधिक स्वतंत्र और प्रभावी ढंग से काम करते हैं। शिक्षक और शिक्षार्थियों के प्रदर्शन के बीच एक अधिक सहयोगी दृष्टिकोण के कारण यह नियोजन और काम की तैयारी में शिक्षकों की दक्षता में भी वृद्धि करता है। उन्हें जानकारी तक पहुंच प्रदान करने और सोचने-समझने में उनकी सहायता करता है तथा पैटर्न या व्यवहार को और अधिक स्पष्ट रूप से देखने के लिए उन्हें सक्षम करता है।

- आई.सी.टी. अक्सर विभिन्न सोशल मीडिया और वेबसाइटों की मदद से प्रश्नों को पूछने और उसका विश्वसनीय उत्तर तेजी से प्राप्त करने का विकल्प प्रदान करता है। इससे छात्रों को अपने प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है।
- कंप्यूटर और कैलकुलेटर की गति छात्रों को गणितीय समस्याओं की खोज करने हेतु कई उदाहरण तैयार करने में सक्षम बनाता है। यह उनके पैटर्न के अवलोकन और सामान्यीकरण के निर्माण और निष्कर्ष तक पहुचने में मदद करता है।
- कंप्यूटर आसानी से लिंक किए जाने वाले सूत्रों, संख्याओं और आलेखों के तालिकाओं को सक्षम करता है। एक प्रतिनिधित्व को बदलना और दूसरों में परिवर्तन देखने से छात्रों को उनके बीच के संबंधों को समझने में मदद मिलती है।
- सोशल मीडिया गणित में चर्चा को प्रोत्साहित कर सकता है जो अलग-अलग तरीकों की तुलना और उन पर चर्चा कर सही निष्कर्ष तक पहुचने में मदद मिलती है ।
- यू-ट्यूब एक ऐसा पोर्टल है जंहा पर गणित से जुडी तमाम तरह की वीडियो उपलब्ध है, जिसे देखा और साझा किया जा सकता है, यू-टूयूब इंटरफेस को आसानी से उपयोग करने के लिए यू-ट्यूब ने यह संभव बनाया है कि कोइ भी वीडियो पोस्ट करने के कुछ ही मिनटो में लाखो लोग

देख सकते हैं। यूट्यूब ने विविध विषयो के साथ गणित से जुड़ी वीडियो की अपलोडिंग को महत्वपूर्ण स्थान दिया है।

- इन विडियो को देख कर शिक्षण और सीखने के विभिन्न पहलु को आसानी से समझा जा सकता है। यू-ट्यूब विडियो जो की गणितीय अवधारणाओ के ऊपर निर्मित है का उपयोग करने से गणितीय तथ्यों, कौशल और अवधारणाओं को और अधिक प्रभावी ढंग से पढ़ाने में मदद मिलेगी। इनके प्रयोग से विद्यार्थियों के ज्ञान को बढ़ाने में मदद मिलेगी, उन्हें गणितीय कौशल का अभ्यास करने और उन्हें सुदृढ़ करने का मौका मिलेगा, और उनके गणितीय समझ में सुधार होगा।
- सूचना और संचार प्रौद्योगिकी की सहायता से छात्र अब ई-पुस्तकें, परीक्षा के नमूने वाले प्रश्न पत्र, पिछले वर्षो के प्रश्न पत्र आदि देखने के साथ साथ अपने मेंटोर, गणित विशेषज्ञों, शोधकर्ताओं, और साथियों से दुनिया के किसी भी कोने में बैठ कर आसानी से संपर्क कर अपनी समस्याओ का समाधान पा सकते है।

5.4. समावेशी शिक्षा और गणित

शिक्षा का समावेशीकरण यह बताता है कि विशेष शैक्षणिक आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए एक सामान्य छात्र और एक दिव्यांग छात्र को समान शिक्षा प्राप्ति के अवसर मिलने चाहिए। इसमें एक सामान्य छात्र एक दिव्यांग छात्र के साथ विद्यालय में एक साथ पढाई कर सके। विकलांग विद्यार्थियों (जिन्हें आजकल दिव्यांग विद्यार्थी कहा जाता है) को सामान्य बच्चों के साथ बिठाकर सामान्य रूप से पढ़ाना है, ताकि सामान्य बच्चों और विशिष्ट आवश्यकताओं वाले बच्चों में कोई भेदभाव न रहे तथा दोनों तरह के विद्यार्थी एक-दूसरे को ठीक ढंग से समझते हुए आपसी सहयोग से पठन-पाठन के कार्य को कर सकें।

पहले समावेशी शिक्षा की परिकल्पना सिर्फ विशेष छात्रों के लिए की गई थी लेकिन आधुनिक काल में इस सिद्धांत को विस्तृत दृष्टिकोण में अपनी कक्षा में व्यवहार में लाने की सिफारिश करता है। समावेशी शिक्षा या एकीकरण के सिद्धांत की ऐतिहासिक जड़ें कनाडा और अमें रिका से जुड़ीं हैं। प्राचीन शिक्षा पद्धति की जगह नई शिक्षा नीति का प्रयोग आधुनिक समय में होने लगा है। समावेशी शिक्षा विशेष विद्यालय या कक्षा को स्वीकार नहीं करता। अशक्त और विकलांग बच्चों को भी सामान्य बच्चों की तरह ही शैक्षिक गतिविधियों में भाग लेने का अधिकार प्रदान करता है।

i. **समावेशी शिक्षा का लक्ष्य -** समावेशी शिक्षा का एक व्यापक लक्ष्य यह है कि एक साथ शिक्षित होने के अवसर को इस तरह से दिया जाए ताकि भविष्य में समाज के अन्दर विशिष्ट आवश्यकता वाले/ दिव्यांग व्यक्तियों के सरोकारों को आम लोग बेहतर ढंग से समझ सकें तथा उनमें उनके प्रति अपेक्षित संवेदनशीलता का विकास हो सके।

ii. **गणित की कक्षा में समावेशी शिक्षा -**गणित की कक्षा में समावेशी शिक्षा की अवधारणा के अनुसार शिक्षा का एकमात्र उद्देश्य बालक की शक्तियों का विकास है। वैयक्तिक भिन्नता के अनुरूप शिक्षण प्रक्रिया में भी अंतर रखकर इस उद्देश्य को पूरा किया जा सकता है। समावेशी शिक्षा कहती है कि शिक्षा का उद्देश्य ऐसा वातावरण तैयार करना होना चाहिए, जिसमें प्रत्येक बालक को सामाजिक विकास का पर्याप्त अवसर मिले।

समावेशी शिक्षा का उद्देश्य जनतंत्रीय मूल्यों की स्थापना करना है। यह हमें यह बताता है की बालक में जनतंत्रीय मूल्यों का विकास कैसे किया जाना चाहिए?

iii. **गणित की समावेशी कक्षा में शिक्षक की भूमिका -** गणित की कक्षा में समावेशी शिक्षा की परिकल्पना को सच करने हेतु शिक्षण विधि को अधिक व्यावहारिक बनाने की जरुरत है। इसके अंतर्गत छात्रो की रूचि, क्षमता और उसकी आवश्यकता को विशेष ध्यान देने की जरुरत है। शिक्षक को बालक की स्वाभाविक रुचियों को समझ कर उसके लिए उपयोगी कार्यों की व्यवस्था करनी चाहिए। बालक को स्वयं कार्यक्रम बनाने का अवसर देना चाहिए जिससे वे अपनी रूचि के अनुसार कार्यक्रम बना सकेंगे। गणित की कक्षा में बालक को ऐसे कार्य देने चाहिए जिससे उनमें स्फूर्ति, आत्मविश्वास, आत्मनिर्भरता तथा मौलिकता का विकास हो सके।

- सीखने के ऐसे माहौल को तैयार करें जो सभी छात्रों के लिए आवश्यक और सहायक हों।
- समुदाय भावना को बढ़ाने के लिए गणितीय खेलों का आयोजन।
- विद्यार्थियों को समस्या समाधान में शामिल करना।
- सम्बंधित विचारों का कक्षा में आदान-प्रदान करना।
- छात्रों में समुदाय की भावना बढ़ाने के लिए कार्यक्रम तैयार करना।
- छात्रों को शिक्षक की भूमिका निभाने का अवसर देना।
- विभिन्न क्रियाकलापों के लिए छात्रों का दल बनाना।
- प्रिय और मधुर वातावरण का निर्माण करना।
- बच्चों के लिए लक्ष्य-निर्धारण हेतु अभिभावकों का सहयोग लेना।
- विशेष प्रशिक्षित शिक्षकों की सेवा लेना।
- गणित और वास्तविक दुनिया के बीच कनेक्शन स्थापित करने में सहायता के लिए अंतःविषय विषयों के आसपास पाठ इकाइयां का योजना तैयार करना।
- गणित की गतिविधियों को पूरा करने के लिए छात्रों को अधिक समय देना।
- विभिन्न आवश्यकता वाले छात्रो के बीच सहयोग भावना को प्रोत्साहित करना जिससे कि छात्र अपने गणितीय समस्या को सुलझाने के कौशल को सुधार सकें।

- समस्या हल करने के स्पष्ट निर्देश छात्रों को प्रदान करें।
- माता-पिता को शामिल करें ताकि शिक्षकों को परिवार में चुनौतियों से अवगत कराया जा सके और उनके साथ पूर्ण रूप से गणितीय समाधान हेतु एक बेहतर विकल्प विकसित हो सके।
- नियमित शिक्षकों और विशेष शिक्षकों को जिम्मेदारी का एक समान हिस्सा लेकर प्रभावी ढंग से काम करना एवं जिम्मेदारियों को अच्छी सह-शिक्षण या टीम शिक्षण के माध्यम से साझा करना।
- हम सभी जानते है की गणित शिक्षण वस्तुतः अंको, प्रतिबिंब और विभिन्न अवधारनाओ से जुड़ा हुआ है। इसलिए गणित शिक्षण में ज्यादा ध्यान छात्रों को समस्या का समाधान करने के लिए तार्किक क्षमता विकसित करने का अवसर देना चाहिए।
- गणित का उपयोग समस्याओं को हल करने के लिए और चयनित रणनीतियों और विधियों का आकलन करने के लिए, गणितीय अवधारणाओं और उनके अंतर्संबंधों का उपयोग करना और उनका विश्लेषण करना।
- गणना करने और नियमित कार्यों को हल करने, गणितीय तर्कों को लागू करने और उनका पालन करने के लिए उपयुक्त गणितीय तरीकों का उपयोग करना और चर्चा करने के लिए अवसर प्रदान करना चाहिए।

iv. **समावेशी कक्षा कैसे बनाये -** छात्रों को एक समान सीखने के अनुभव प्रदान करने के लिए, शिक्षकों को अपने छात्र की क्षमताओं और सीखने की शैलियों में अंतर के लिए तैयार रहना चाहिए। छात्र की जरूरतों, शिक्षक के ज्ञान के स्तर और स्कूल कर्मियों के समर्थन के आधार पर कक्षा में कई तरह के अवसर प्रदान किया जा सकते है। विभिन्न चार्ट, संगीत, किताबें, रंगमंच की सामग्री, वीडियो या पोस्टर का उपयोग करें। समूह पाठ के लिए छात्रों को समूहीकृत किया जाना चाहिए, छात्र छोटे- छोटे समूहों में काम करेंगे तो आपसी सहभागिता बढ़ेगी और सीखने की प्रक्रिया आसान होगी। नई पाठ्यपुस्तकों, वेब साइटों, ऑन लाइन शिक्षण पोर्टलो और विशेषज्ञों की राय और विचार को कक्षा में प्रस्तुत करे।

v. **कक्षा परिवेश-** कक्षा का बेहतर माहौल, सीखने को प्रोत्साहित करता है। इसलिए शिक्षक को शिक्षण विधियों के रूप में कक्षा के वातावरण को सहयोग और स्वीकृति को बढ़ावा देना चाहिए, जो सभी विद्यार्थियों को सीखने के लिए सहकारिता में मदद के लिए अनुकूल हो। कक्षाएं जो भावनात्मक कल्याण को प्रोत्साहित करती हैं। सीखने और भावनात्मक विकास दोनों के लिए एक बेहतर अवसर प्रदान कर सकता हैं। पारस्परिक सम्मान के माहौल का सृजन करने में सहायता करना चाहिए, जहां छात्रों को सवाल पूछने और उनके विचारों और भावनाओं को व्यक्त करने में आराम महसूस हो। इसके लिए कक्षा के डिजाइन, कक्षा प्रक्रियाओं और कक्षा रणनीतियों के बीच परस्पर संबंध का निर्माण करने पर विचार करना चाहिए। इन क्षेत्रों से जुड़े कुछ रणनीतियों को लागू करना, समुदाय की एक मजबूत भावना को विकसित करने और

दिव्यांग छात्रों के साथ सामान्य छात्रों के बीच सकारात्मक बातचीत और सहकारी शिक्षा को प्रोत्साहित करने में सहायता करना चाहिए।

vi. **आई सी टी कैसे गणित की कक्षा को समावेशी बनाने के लिए मदद कर सकता है**?

आज के आधुनिक युग में प्रौद्योगिकी, शिक्षा जगत को आसान बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रही है। यह न केवल छात्रों को बदलती दुनिया के साथ तालमें ल बिठाने की अनुमति देता है, बल्कि यह विशेष जरूरतों वाले शिक्षार्थियों के लिए पाठ्यक्रम की पहुंच प्रदान करता है। चाहे वह कंप्यूटर/ संगणक, आईपैड, ऑडियो / विज़ुअल उपकरण या सहायक उपकरण हो, ये सभी प्रौद्योगिकी गणित की कक्षा को समावेशी बनाने के लिए विभिन्न भूमिका निभा सकती है। विभीन्न शैक्षिक सॉफ़्टवेयर एवं यू-ट्यूब वीडियो, विशेष आवश्यकताओं वाले बच्चों को सुलभ पाठ्यक्रम प्रदान कर सकता है, और पाठों को अलग व बेहतर ढंग से प्रस्तुत करने में मदद कर सकता है। छात्रों को अत्यधिक आकर्षक तकनीकी अपील और कई तरह के लर्निंग रिसोर्सेज उपलब्ध कराने में सहायता करता है। कुछ उदाहरणों के तौर पर शेड्यूल, पोस्टर, नंबर लाइन, चार्ट, डायग्राम, डिजिटल ग्राफिक प्रदर्शन और विभिन्न प्रकार के काग़ज़ जैसे पंक्तिवाला, सादे या ग्राफ। दृश्य सहयोगी एक स्मार्ट बोर्ड, टीवी या आईपैड भी हो सकता है जो समावेशी शिक्षा की परिकल्पना को सच साबित करने में मदद पंहुचा सकती है।

सारांश के रूप में हम कह सकते हैं कि समावेशी शिक्षा में शिक्षक को भी महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है. इसके अनुसार शिक्षक समाज का सेवक है । उसे विद्यालय में ऐसा वातावरण बनाना पड़ता है, जिसमें पलकर बालक के सामाजिक व्यक्तित्व का विकास हो सके और जनतंत्र के योग्य नागरिक बन सके । विद्यालय में स्वतंत्रता और समानता के मूल्य को बनाये रखने के लिए शिक्षक को कभी भी बालकों से बड़ा नही समझना चाहिए । आज्ञा और उपदेशों के द्वारा अपने विचारों और प्रवृत्तियों को बालकों पर लादने का प्रयास नहीं करना चाहिए ।

5.5 स्व: अध्ययन को सुगम बनाना

शिक्षा जीवन पर्यन्त चलने वाली प्रक्रिया है। यह विकास का मूलाधार है। स्व: अध्ययन, अभ्यास का दूसरा नाम है। अभ्यास गणित की आत्मा है। नए ज्ञान की प्राप्ति में स्व: अध्ययन की महत्पूर्ण भूमिका रही है । स्व:-अध्ययन विभिन्न तरह की नियम, सूत्र, सिद्धांत, प्रतीक, सूचना और ज्ञान को जानने और समझने की प्रक्रिया है । स्व:अध्ययन अर्थात् पुस्तकों में रुचि रखने वाला व्यक्ति स्वयं को कभी भी एकाकी महसूस नहीं करता है । मुसीबत व परीक्षा की घड़ी में ज्ञान ही उसका परम विश्वसनीय मित्र होता हैं । इस प्रकार अध्ययन से प्राप्त ज्ञान अधिक हर्षोल्लास व रोमांच का अनुभव करता है । अध्ययन की अभिरुचि से ही मनुष्य रामानुजन, पेथोगोरस, अबुल कलाम, आर्यभट्ट कालिदास, मिल्टन व शेक्सपियर जैसे महान गणितज्ञ तथा लेखकों के महान कार्य का आनंद उठा सकता है । अध्ययन में रस प्राप्त करने वाला व्यक्ति देश-विदेश में होने वाली घटनाओं की जानकारी प्राप्त कर सकता है। अच्छी पुस्तकों का अध्ययन मनुष्य

को सही राह दिखाती हैं तथा उसे कुसंगति से बचाती हैं। मनुष्य में अध्ययन की प्रवृत्ति उसे अकेलापन से दूर हटाती है। अच्छी पुस्तकों का अध्ययन उसे एक सच्चे मित्र की तरह साथ देता है तथा कठिनाइयाँ व मुसीबतें आने पर उसे उन विपत्तियों का सामना करने की शक्ति एवं सामर्थ्य प्रदान करता है। दूसरे शब्दों में, अध्ययनशील व्यक्ति स्वयं को सदैव गौरवान्वित महसूस करता है और समाज भी उसे पूर्ण प्रतिष्ठा प्रदान करता है।

कई छात्र अपने कक्षा-आधारित शिक्षा को पूर्ण करने के लिए घर पर अध्ययन करते हैं। हालांकि, स्व:अध्ययन का उपयोग एक नया कौशल या एक पूरी तरह से नई अवधारणा नही है। किसी भी अवधारणा को सीखने के लिए इसका प्रयोग सदियों से किया जा रहा है। परन्तु जहाँ एक ओर शिक्षा के स्वरुप में बदलाव आया है, वहीं अध्ययन अध्यापन के स्वरुप में भी परिवर्तन आया है। वैज्ञानिक आविष्कारों से प्रत्येक क्षेत्र में युगान्तकारी परिवर्तन हुए है। शिक्षा का क्षेत्र भी इनसे अछूता नहीं रहा।

सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकियों की बढ़ती हुई संख्या और एक विस्तृत वैश्वीकरण के दौर में स्व-अध्ययन का स्वरुप बदला है। आज के दौर में अध्ययन सिर्फ कक्षा-कक्ष तक ही आधारित नहीं रहा। विज्ञान के बढ़ते चरण ने शिक्षा की दशा व दिशा दोनों ही परिवर्तित किये है।

स्व: अध्ययन, शिक्षा का एक नवाचारी अध्ययन प्रक्रिया के रूप में उभरा है जो औपचारिक शिक्षा प्रणाली के दायरे में रहकर या स्वतंत्र रूप से सीखने के अवसर प्रदान करता है या सीखने के अवसरों को औपचारिक शिक्षा पद्धति की सीमाओं के परे ले जाता है। स्व: अध्ययन, शिक्षा की वह प्रणाली है जिसमें शिक्षक तथा शिक्षु को स्थान-विशेष अथवा समय-विशेष पर मौजूद होने की आवश्यकता नहीं होती। यह प्रणाली, अध्यापन तथा शिक्षण के तौर-तरीकों तथा समय-निर्धारण के साथ-साथ औपचारिक कक्षा-कक्ष से स्वतंत्र है ।

स्व: अध्ययन की विशेषताएँ

- यह कम खर्चीली समय की बचत और सर्वसुलभ है।
- विजुअल क्लासरूम लर्निंग, इंटरैक्टिव ऑनसाइट लर्निंग और वीडियो कांफ्रेंसिंग के ज़रिए विद्यार्थी देश के किसी भी गाँव क़स्बा या शहर में रहकर घर बैठे पढ़ाई कर सकते हैं।
- विद्यार्थी अपनी आवश्यकता के अनुसार अपने पढ़ने की समय-तालिका बना सकते हैं।
- सभी विषय वस्तु के लिए पुस्तके या ऑनलाइन वीडियो, इन्टरनेट पर उपलब्ध है।
- सूचना क्रांति और इन्टरनेट के कारण स्व: अध्ययन आसान एवं प्रासंगिक हो गयी है।
- स्व:अध्ययन में विद्यार्थी को नियमित तौर पर किसी संस्थान में जाकर पढ़ाई करने की जरूरत नहीं होती।

स्व अध्ययन में आने वाली प्रमुख चीजें हैं-

- अन्तःक्रियात्मक (इंटरैक्टिव) अधिगम
- अधिगम का लचीलापन
- अध्ययन के स्थान, समय, गति में लचीलापन
- अध्ययन की विधि में लचीलापन
- पाठ्यक्रम के चयन एवं मिश्रण में लचीलापन

सीखने और सिखाने में जितने कम प्रतिबन्ध होते हैं, शिक्षा उतनी ही अधिक मुक्त कही जायेगी। मुक्त अधिगम का उद्देश्य सामाजिक और शैक्षिक असमताओं को मिटाना है तथा ऐसे अवसर प्रदान करना है, जो पारम्परिक विद्यालयों/विश्वविद्यालयों द्वारा नही प्रदान किये जाते।

स्व:अध्ययन को आसन, रोचक, सफल व सार्वभौमिक बनाने हेतु सुझाव-

1. इंटरनेट संसाधन की मदद से स्व-अध्ययन को किसी भी समय और कहीं भी सीखने की दिशा में विशेष रूप से विकसित की जा रही जा रही वेबसाइटों की मदद ली जा सकती है
2. इसमें कही कोई शंका नही कि स्व:अध्ययन पूर्णतः स्व: अनुशासन से बंधा हुआ है। अतः बिना अनुशासन का पालन किये इसका लाभ उठा पाना थोडा मुश्किल हो सकता है, लेकिन लगातार प्रयास से समय के साथ यह आसान हो जाता है। स्व: अध्ययन, जब सही ढंग से किया जाय तो यह एक बहुत ही प्रभावी शिक्षण उपकरण है।
3. गणित की सभी अअवधार्नाये को बेहतर ढंग से समझाने हेतु विभिन्न ई-लर्निंग पोर्टल और यू-ट्यूब चैनल पर विडियो उपलब्ध हैं और कई ऑनलाइन व्याख्यान, क्विज़ और परीक्षाएं शामिल हैं, जो छात्रों को बेहतर ढंग से समझा पाने में समर्थ है उसका ज्यादा से ज्यदा उपयोग करने हेतु प्रोत्साहित करे/
4. घर पर अध्ययन करते समय स्कूल में पढ़ाए गए अवधारणा को बेहतर समझ एवं मजबूती प्रदान करने के लिए अभ्यास प्रश्नों के माध्यम से वर्कशीट को बढ़ावा दे।
5. घर पर अध्ययन करने के विभिन्न शैक्षणिक एप्लिकेशन गूगल प्ले स्टोर पर उपलब्ध हैं। जो आप अपने फोन के माध्यम से एक्सेस कर सकते हैं। ये सारे ऐप्स, गणित, अंग्रेजी और अन्य पाठ्यक्रमों की अवधारणा को सीखने के बेहतर अवसर उपलब्ध करवाता है। इसके सकारात्मक प्रयोग को बढ़ावा दे।
6. छात्र-छात्राओं की समस्याओं का इलेक्ट्रानिक माध्यमों द्वारा सम्प्रेषण स्थापित कर समस्या समाधान भी किया जाय, जिससे स्व:अध्ययन की गुणवता औपचारिक शिक्षा के गुणवत्ता के सामान कसौटी पर खरा उतरें।

7. छात्रों को बेहतर ढंग से विषय वास्तु की अवधारणा को समझाने के लिए यूट्यूब पर शैक्षिक वीडियो देखने को प्रोत्साहित करें। कई ट्यूटोरियल वीडियो हैं जो लोगों को नए कौशल, या विषय गत अवधारणा को सिखाने के उद्देश्य से हैं, जिसका लक्ष्य छात्रों को स्कूल में जो कुछ भी सीखाया गया है, उसका बेहतर समझ प्रदान करना है।
8. छात्रों को विषय-वस्तु आधारित शिक्षा को पूर्ण करने के लिए घर पर सर्वोत्तम अध्ययन सामग्री प्रदान की जानी चाहिए।
9. छात्रो को संबंधित विषय से जुड़ी पुस्तके और लेख उपलब्ध करवाए, जिस पर चर्चा की जा रही है। चाहे यह किसी पाठ्यक्रम के संबंध हो, या उनकी रुचि के अनुरूप हो ।
10. टेलीकांन्फ्रेसिंग विडियोकांन्फ्रेसिंग का प्रयोग करके शिक्षक-छात्र सम्पर्क कर विभिन्न अवधारणाओं पर विचार करे ।
11. विद्यालय में जो कुछ भी पढाया जा रहा है, और जिस विषय पर चर्चा की जा रही है, इसके बारे में या अन्य किसी विषय या समस्या से जुडी प्रश्नों को ईमें ल या सोशल मीडिया के माध्यम से शिक्षक के साथ एक वार्तालाप कर इसका समाधान प्राप्त किया जा सकता है या समझा जा सकता है। यह छात्रों को अधिक से अधिक जानने और समझने के प्रयास को प्रोत्साहित करेगा ।
12. शिक्षण प्रक्रिया में सूचना प्रौद्योगिकी का भरपूर प्रयोग किया जाय। साथ में तकनीकी माध्यमों को ज्यदा से ज्यादा इस्तेमाल किया जाए ।
13. स्व:अध्ययन को "सूचना प्रौद्योगिकी क्रान्ति'' द्वारा ''ज्ञान का विस्फोट'' जैसी संकल्पना को साकार किया जाय। और आईसीटी का ज्यादा से ज्यादा प्रयोग कर सिखने-सीखने की प्रक्रिया को सुलभ बनाया जाय ।
14. स्व:अध्ययन को सुविधाजनक बनाने का एक तरीका यह भी है कि तकनीक का ज्यादा से ज्यादा उपयोग किया जाए । आधुनिक सूचना और प्रौद्योगिकी के सभी साधन जैसे कि ऑडियो विजुअल एड्स और शैक्षिक संसाधन जो शिक्षकों और छात्रों को सहायता करते हैं। इनका अधिक से अधिक प्रयोग को प्रोत्साहन दिया जाए इससे छात्र का मानसिक क्षमता बढ़ता है/
15. स्व-ध्ययन के नाते, बड़े पैमाने पर खुले ऑनलाइन पाठ्यक्रम, इंटरनेट, विश्वकोषों, और अधिक महाविद्यालयों और विश्वविद्यालयों को ऑनलाइन पाठ्यक्रम प्रदान करने से छात्रो के लिए, स्व-अध्ययन आसन और बेहतर हो सकेंगे।

5.6 गणित में सम्प्रेषण

सम्प्रेषण का अर्थ है किसी विचार या सन्देश को एक स्थान से दूसरे स्थान पर प्रेषित करने वाले द्वारा भेजना तथा प्राप्त करने वाले द्वारा प्राप्त करना । संप्रेषण एक पक्षीय व्यव्हार न होकर द्विपक्षीय या बहुपक्षीय व्यव्हार होता है । अर्थात यंहा विचारो का एक तरफ़ा हस्तांतरण नही होता अपितु यह एक सहयोगात्मक

प्रक्रिया है। जिसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों को अपने भावो विचारो को को आदान-प्रदान करने का पूरा अवसर मिलता है। सम्प्रेषण के द्वारा शिक्षक व् शिक्षार्थी अपने ज्ञान, सूचनाओ, विचारो, धारणाओं, अनुभवों तथा भावनाओ का आदान प्रदान करते है। जिससे उनके अर्थ व उपयोग को भली भांति समझा जा सके।

गणित की कक्षा में सम्प्रेषण से अभिप्राय है कि शिक्षक और छात्र की पारस्परिक अंतःक्रिया के द्वारा छात्रो के समझ और ज्ञान में वृद्धि हो। अर्थात सम्प्रेषण तभी सफल होगा जब दोनों सहयोगात्मक प्रकिया में हिसा लें। यह एक ऐसा माध्यम है जिसमें एक व्यक्ति दूसरे को इस प्रकार प्रभावित कर सके ताकि निर्धारित उद्देश्य की प्राप्ति हो सके। सम्प्रेषण एक ऐसा माध्यम है जिसमें विचारो का आदान-प्रदान होता है। जिसमें दोनों सहयोगियों में परस्पर लाभ होता है। हर रोज़ सम्प्रेषण में इस्तेमाल की जाने वाली भाषा के विपरीत, गणित की भाषा सटीक और संक्षिप्त है। गणित में प्रत्येक शब्द और वाक्यांश का एक निश्चित अर्थ है जो यह आश्वस्त करने के लिए समझना चाहिए कि छात्र पूरी तरह से गणितीय अवधारणा को समझता है। इसलिए, गणित में इस्तेमाल होने वाले प्रमुख शब्दों और शब्दों को जानने के लिए यह आवश्यक है कि गणित में सम्प्रेषण का प्रभावशाली हो।

सम्प्रेषण के तत्व

- **सम्प्रेषण स्रोत :** व्यक्ति समूह जिसमें विचारो का आदान परदान होता है.
- **सम्प्रेषण सामग्री:** सम्प्रेषणकरता के विचार अथवा भाव
- **सम्प्रेषण का माध्यम :** शाव्दिक और सांकेतिक
- **प्राप्तकर्ता :** विचारों को प्राप्त करने वाला
- **अनुक्रियात्मक सामग्री: विषय वस्तु**, **प्रसंग**, **मज़मून**, **प्रकरण**, **थीम**, **मुद्दा** आदि।

सम्प्रेषण के उद्देश्य

- अवधारणाओं को ज्यादा से आसन और चित्रित रूप में छात्रो के समक्ष रखना।
- उपयोगी लेखन के कौशल का विकास करना।
- कक्षा सम्प्रेषण में सहायक तत्व।
- पाठ को वोधगम्य बनाना।
- शिक्षको और छात्रो को इस योग्य बनाना कि वे अपनी बात को एक दुसरे तक पहुचने में सक्षम हो सके।
- शिक्षको के शिक्षण तथा शिक्षार्थियों के अधिगम में गुणवत्ता लाना।
- शिक्षण अधिगम प्रक्रिया को प्रभावशाली बनाना।

- समूह को विषय वस्तु से स्पष्ट या सरल ढंग से परिचित करना।
- समूह को संवोधित करने के कौशल का विकास।
- सम्प्रेषण को प्रभावशाली बनाने के लिए उपयुक्त सम्प्रेषण परिसथितियों तथा बातावरण का महत्वपूर्ण स्थान होता है। मिसाल के तौर पर- पर्याप्त रौशनी का होना; उचित मात्रा में फर्नीचर; गर्मी से वचने के लिए पंखें; मनोविज्ञानिक वातावरण; प्रभावी व्यक्तित्व तथा शिक्षण शैली आदि।

कक्षा सम्प्रेषण में बाधक तत्व

- शोर, अभिप्रेरणा, शून्य वातावरण, रूचि का आभाव; उत्साह में कमी; प्रवल सम्प्रेषण बिधि का अभाव आदि।

सम्प्रेषण सामग्री में कमियाँ

सम्प्रेषण माध्यम की कमियाँ. सम्प्रेषण प्राप्तिकर्ता सम्वन्धी कमियाँ. वातावरण सम्वन्धी कमियाँ.

- एक विद्यार्थी को पढ़ना, लिखना, सुनना और बोलना, और गणितीय समस्या को हल करने की क्षमता और प्रभावी ढंग से संवाद करने के अवसर को ज्यादा से ज्यादा प्रदान करनी चाहिए।
- कुशल रूप से सीखने के लिए और गणित की अवधारणा को बेहतर समझ प्रदान करने के लिए गणित में सम्प्रेषण महत्वपूर्ण है।
- गणितीय सम्प्रेषण गणित के बारे में लिखने और बोलने वाले छात्रों के लिए संसाधनों का एक विकासशील संग्रह है, यह अवधारणाओं और समस्याओं के बीच संबंधों के बारे में तार्किक रूप से सोचने की क्षमता को भी संदर्भित करता है।
- गैर भाषाई पृष्ठभूमि या गैर अंग्रेजी भाषाई पृष्ठभूमि वाले छात्रों को गणित वर्ग के प्रति अनुकूल अनुभव करने के लिए विशेष सहायता प्रदान करनी चाहिए। यद्यपि, कुछ छात्र हो सकते हैं, जो अंग्रेजी में कुशल नहीं हों। उन परिस्थितियों में शिक्षकों को छात्रों को उनकी अपनी स्थानीय भाषा में खुद को अभिव्यक्त करने के लिए अवसर देनी चाहिए
- समस्या सुलझाने वाली गतिविधियों का प्रयोग छात्रों के तर्कशक्ति को विकसित करने के लिए किया जा सकता है। गणितीय समस्याओं को हल करने की रणनीतियों को पढ़ने और प्रतिबिंबित करने के लिए हैंडआउट प्रदान किया जाना चाहिए।
- सम्प्रेषण के माध्यम से, विचार प्रतिबिंब, परिशोधन, और इससे जुड़ी जानकारीआसन और अधिक स्पष्ट हो जाता हैं जब छात्रों को गणितीय अवधारणाओं के बारे में सोचने और तर्क देने के लिए अवसर दी जाती है तो कक्षा-कक्ष में गणितीय सम्प्रेषण को ज्यादा से ज्यादा बढ़ावा मिलता है। इस पूरी प्रक्रिया में उन्हें शामिल करने से वे सीखते हैं कि अपनी समझ को कैसे

अभिव्यक्त करें। जो छात्र चर्चाओं में शामिल होते हैं, वे गणित में सम्प्रेषण का एक महत्वपूर्ण हिस्सा हो सकता है। यदि छात्र स्वाभाविक रूप से गणित के बारे में बात नहीं कर पाते हो तो शिक्षकों को उन्हें अनिवार्य रूप से ऐसा करने में मदद चाहिए।

- सम्प्रेषण छात्रों और साथ ही शिक्षकों को समस्या समझने और समाधान खोजने में मदद करता है, सम्प्रेषण नियोजन की नींव के रूप में कार्य करता है। सीखने के परिणाम प्राप्त करने के लिए सभी आवश्यक सूचनाओं का आदान प्रदान शिक्षार्थियों के साथथ शिक्षकों के बीच भी सा- किया जाना चाहिए।

5.7 गणित में सम्प्रेषण का विकास करना

सम्प्रेषण शिक्षा में सर्वोपरि है चाहे वह छात्र से शिक्षक, छात्र से छात्र, शिक्षक को शिक्षक, माता-पितासे शिक्षक, शिक्षक से शिक्षक या माता-पिता से प्रशासक या इसके विपरीत। सम्प्रेषण अगर प्रभावी होगा तो छात्र और शिक्षक दोनों को इसका लाभ मिलेगा। सम्प्रेषण अधिगम को आसान और सुगम्य बनाता है, छात्रों को लक्ष्य प्राप्त करने में मदद करता है, विस्तृत अधिगम के लिए अवसर बढ़ाता है, छात्र और शिक्षक के बीच संबंध को मजबूत करता है, और एक समग्र और सकारात्मक अनुभव प्रदान करता है।

i. **कक्षा कक्ष में छात्रों के आत्म सम्मान को बढ़ावा देना** - सामान्य तौर पर छात्र, शिक्षक और अन्य सहपाठियों के बीच एक आदर्श छात्र के रूप में जाना जाने के लिए उत्सुक रहता है अपना नाम दूसरों से सुनना चाहता हैं। अगर एक शिक्षक एक छात्र की राय में रुचि दिखाता है, तो वह छात्र महसूस करेगा कि उनके विचार या विचारों की सराहना की जाती है। इससे आत्मसम्मान और विश्वास बढ़ता है। एक छात्र के कक्षा में बोलने की अधिक अधिक संभावना और अन्य भागीदारी को प्रोत्साहित करना पूरी कक्षा के लिए सीखने की बेहतर अवसर प्रदान कर सकता है।

ii. **कक्षा प्रदर्शन-** वे शिक्षक जो छात्र सम्प्रेषण और कक्षा भागीदारी को महत्त्व देते हैं, वे समग्र कक्षा के प्रदर्शन में सुधार को ध्यान देंगे। एक शिक्षक एक व्याख्यान की प्रभावशीलता का पता छात्र प्रतिक्रिया से लगा सकता है। सवाल पूछ कर, एक शिक्षक यह निर्धारित कर सकता है कि क्या छात्र प्रदान की गई जानकारी को बरकरार रख पाए थे। अगर कक्षा में चुप्पी या कोई अन्य प्रतिक्रिया की कमी यह बताती है की छात्रों को व्याख्यान समझने में परेशानी हो रही है। गणितीय सिद्धांतों के नाम उनके प्रयोग और उससे जुड़ी जानकारी को छात्रो तक पहुचाना । गणितीय पैटर्नों के बारे में टिप्पणियां करने के लिए छात्रों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए सीखने का माहौल तैयार किया जाना चाहिए कि छात्रों को अपने समस्याओ के ऊपर खुलकर बात करने की कोशिश कर सके

iii. **आई.सी.टी. के उपयोग-** मोबाइल, व्हाट्सअप, ब्लॉग, फेसबुक, ईमें ल के माध्यम से शिक्षकों, छात्रों और अभिभावकों के साथ जुड़ें, विभिन्न वेबसाइटों पर प्रासंगिक जानकारी और संसाधनों के बारे में छात्रो के बीच चर्चा करें। शिक्षकों, अभिभावकों, छात्रों से जुड़ने और संवाद करने के लिए सभी स्तरों पर सोशल मीडिया का उपयोग करें।

iv. **अनुपस्थित छात्रों तक पहुंच -** ऑनलाइन संसाधन, कक्षाओं के वीडियो रिकॉर्डिंग, वीडियो कॉन्फ्रेंसिंग, और अधिक घर या अस्पताल से जुड़े छात्रों को कक्षा का हिस्सा बना सकते हैं और उनसे जुड़े रह सकते हैं। इसके अलावा, ये संसाधन माता-पिता और स्कूलों जुड़ने में मदद कर सकते हैं। सकते हैं। टेक्नोलॉजी शिक्षकों को विषयों पर शोध, संसाधन ढूंढने और एक दूसरे से सीखने और साझा करने के लिए अन्य शिक्षकों से जुड़ने में मदद कर सकती है।

v. **दृश्य या ठोस सामग्रियों का उपयोग -** हर रोज़ सम्प्रेषण में इस्तेमाल की जाने वाली भाषा के विपरीत, गणित की भाषा सटीक और संक्षिप्त है। गणित में प्रत्येक शब्द और वाक्यांश का एक निश्चित अर्थ है जो यह आश्वस्त करने के लिए समझना चाहिए कि छात्र पूरी तरह से गणितीय अवधारणा को समझता है। इसलिए, गणित में इस्तेमाल होने वाले प्रमुख शब्दों और शब्दों को जानने के लिए छात्रों के लिए यह आवश्यक है। छात्रों को शब्दों और परिभाषाओं को पढ़ने, उनके बारे में प्रश्न पूछने, वाक्यों में उनका उपयोग करने, और यदि संभव हो तो, दृश्य या ठोस सामग्रियों का उपयोग करने के बारे में खुलकर बात कर सके। गणित की भाषा विभिन्न तरीकों से समझी जा सकती है, जैसे प्रदर्शन, दृश्य सामग्री, और ऑडियो सामग्री का उपयोग कर।

vi. **भाषा की स्वतंत्रता -** छात्रों के लिए एक दूसरे के साथ गणित के बारे में बात करने के लिए अवसर प्रदान करें, उनकी मूल भाषा के साथ ही साथ अंग्रेजी या कोई अन्य भाषा का भी प्रयोग किया जाये। गणित की शिक्षा को इस तरह से संरचित किया जाना चाहिए ताकि छात्रों को उनकी मूल भाषा का उपयोग करने की स्वतंत्रता हो। शिक्षक पूरी कक्षा को ऐसे तरीके से डिज़ाइन कर सकता है जो सभी छात्रों को भागीदारी के लिए प्रोत्साहित करता हो।

vii. **समस्या पर चर्चा -** गणितीय कार्यों के दौरान छात्र की समस्या हल करने के प्रयासों में सहायता की जा सकती है। उदाहरण के लिए, इन्हें ऐसे प्रश्नों पर चर्चा करने के लिए नियमित रूप से प्रोत्साहित किया जा सकता है:

- समस्या में महत्वपूर्ण तथ्य या शर्त क्या हैं?
- क्या आपको समस्या में दी गई जानकारी की आवश्यकता नहीं है?
- जब समस्या आये तो क्या और कैसे सवाल पूछा जाना चाहिए?
- वर्णन करें कि आपने समस्या का हल कैसे किया।

- क्या आपको लगता है कि आपके पास सही जवाब है?क्यों? क्यों नहीं?
- जब आप इस समस्या को हल कर रहे थे तो आपको कैसा लगा?
- समस्या पर काम करने के बाद आपको कैसा महसूस होता है?

इस तरह की गतिविधियों का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों को समस्याओं को सुलझाने के दौरान मौखिक रूप से प्रक्रियाओं का उपयोग करने का मौका देना है।

viii. **मुख्य बिंदुओं पर प्रतिबिंब -** एक पाठ के दौरान, सीमित अंग्रेजी दक्षता वाले छात्र कक्षा चर्चा का ट्रैक खो सकते हैं। इसलिए, यह महत्वपूर्ण है कि शिक्षक अक्सर चर्चा को सारांशित करे और पाठ के मुख्य बिंदुओं को उजागर करे। ऐसा करने के एक सहायक साधन आरेख और सूचियों के उपयोग के माध्यम से है। छात्रों को अपने स्वयं के शब्दों, मौखिक या लिखित में, सबक में प्रस्तुत मुख्य विचारों को समझाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। एक छात्र, जो अंग्रेजी में स्पष्टीकरण नहीं दे सकता है, उसे अपनी मूल भाषा का उपयोग करने की अनुमति दी जानी चाहिए। दूसरा छात्र अंग्रेजी में स्पष्टीकरण का अनुवाद कर सकता है ताकि सभी समझ सकें।

ix. **गतिविधि आधारित कक्षा -** गणित में संचार विकसित करने में सहायता के लिए विशिष्ट कक्षा की गतिविधियों का उपयोग किया जा सकता है। छात्रों को गतिविधि पर प्रतिक्रिया करने का मौका दिया जाना चाहिए। गतिविधि प्रकृति में सुखद होना चाहिए यदि ऐसा है तो छात्र खुद को बेहतर अभिव्यक्त करने में सक्षम होंगे क्योंकि उन्हें अधिक सुविधा होगी। अन्य शिक्षकों को उनकी भूमिका को एक गहरी स्तर पर सीखने में मदद करने में से एक के रूप में देखते हैं। नए विचारों और अवधारणाओं को समझने के लिए ताकि वे एक कार्यस्थल में उन्हें लागू कर सकें। किसी भी तरह से, यदि वे अपने छात्रों के साथ अच्छी तरह से संवाद करते हैं, तो ये शिक्षक बेहतर काम करेंगे । संचार को और अधिक प्रभावी बनाने के लिए शिक्षक की भूमिका का नवीनीकरण होना आवश्यक है ।

5.8 सारांश

1. गणित शिक्षण में आई.सी.टी. संसाधन की क्षमता और उपयोगिता स्पष्ट कराना बढ़ावा देना । कंप्यूटर, लैपटॉप, मोबाइल फोन, स्मार्टफोन, टैबलेट, प्रोजेक्टर, प्रिंटर, स्कैनर, डिजिटल कैमरे और इसी तरह के अन्य उपकरण। भविष्य में, ऐसी संभावना है कि अधिकांश कक्षाएं मोबाइल फोन और टैबलेट या परंपरागत डेस्कटॉप या लैपटॉप की मदद से आसानी से उपलब्ध होंगे और इस कारण इस उभरते हुए परिदृश्य के अनुसार अपनी जागरूकता बढ़ाने और सीखने के अवसर तलाशने के लिए सूचना और प्रौद्योगिकी का बेहतर इस्तेमाल गणित शिक्षण

2. गणित के संदर्भ में विभिन्न प्रकार के सोशल मीडिया माध्यम का प्रयोग व उपयोगिता से अवगत कराना।
3. शिक्षण व प्रशिक्षण के लिए वर्त्तमान पाठ्यक्रम के संवर्द्धन के लिए सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उपकरणों जैसे की कंप्यूटर इन्टरनेट विभिन्न मोबाइल एप्स का की भूमिका स्पष्ट कराना।
4. गणित की समावेशी कक्षा में शिक्षक की भूमिका स्पष्ट कराना।
5. सूचना व संचार प्रौद्योगिकी के माध्यम से दिव्यांग छात्र-छात्राओं के लिए प्रभावी शिक्षण वातावरण उपलब्ध कराना।
6. गणित की समावेशी कक्षा में शिक्षण वातावरण को प्रभावी बनाने में आई.सी.टी की भूमिका स्पष्ट कराना।
7. स्व:अध्ययन के संवर्द्धन के लिए सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उपकरणों से जुड़ी कुशलता में कुशल बनाना।
8. स्व:अध्ययन को सुगम, सरल, रोचक, सफल व सार्वभौमिक बनाने हेतु सुझाव देना।
9. गणितीय सम्प्रेषण के उद्देश्य, तत्व, बाधक तत्व, कमियाँ पर प्रकाश डालना।
10. गणित विषय/ गणित कक्षा में सम्प्रेषण कौशल का विकास कराना।

Sources

1. http://www.techlearning.com/blogentry/8716
2. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1705977/
3. http://www.techlearning.com/blogentry/8716
4. http://www.education.gov.gy/web/index.php/teachers/tips-for-teaching/item/1570-importance-of-communicating-in-the-classroom