इकाई 1 प्रतिदर्श का परिचय व प्रकार (Introduction and Types of Sampling)

इकाई की रुपरेखा

1.16 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- नमूनाकरण की मूल आवधारणा की व्याख्या कर सकें।
- आंकडे एकत्रित करने की विधियों के प्रकार की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण विधियों के प्रकार की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण एवं गैर नमूनाकरण त्रुटियों की व्याख्या कर सकें।
- नमूनाकरण वितरण की अवधारणाओं का वर्णन कर सकें।

1.1 प्रस्तावना

जीवन के सभी क्षेत्रों के लिए (जैसे आर्थिक, सामाजिक और व्यापार)सांख्यिकीय जांच और संमकों के विश्लेषण की आवश्यकता दिन प्रतिदिन बढ़ रही है। सांख्यिकीय आंकडों को एकत्र करने के दो तरीके हैं: (1) जनगणना विधि और (2) नमूना विधि । जनगणना विधि के तहत, पूरी जानकारी के लिए संबंधित जॉच के दायरे या जनसंख्या इकाइयों को एकत्र किया जाता है जबकि नमूना विधि के तहत, इसके विपरीत समग्र की सभी इकाइयों के बारे में जानकारी एकत्रित करने की तुलना में केवल चयनित इकाइयों से संबंधित जानकारी एकत्र की जाती है। आधुनिक समय में नमूना विधि सांख्यिकीय जॉच का एक महत्वपूर्ण और लोकप्रिय तरीका है। आर्थिक और व्यापार की दुनिया के अलावा, इस विधि का व्यापक रूप से दैनिक जीवन में प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक घर पत्नी को स्वाद पकवान के एक छोटे से नमूने को चखने पर समग्र के सुगंध, नमक, मिर्च खुशबू आदि का पता चलता है। चिकित्सक मरीज के रक्त की जॉच रक्त की केवल एक या दो बूँद द्वारा कर सकता है। उसी तरह हम, दैनिक उपयोग की वस्तुओं जैसे गेहूँ, चाल, दाल आदि खरीदने से पहले इन चीजों के नमूनों को देखकर चीजों के गुणवत्ता के बारे में जानते हैं।

कारखानों में सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रक उत्पादन की कुछ इकाईयों का परीक्षण कर समग्र की गुणवत्ता का परीक्षण करता है। एक शिक्षक कुछ छात्रों से प्रश्न पूछकर अपने शिक्षण की प्रभावकारिता के बारे में जान लेता है। वास्तविकता में, शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र हो जहॉ नमूने विधि का प्रयोग नहीं किया जाता है।

1.2 नमूने की बुनियादी अवधारणाऐं

इससे पहले कि आप नमूने के पहलुओं का विस्तृत अध्ययन करें आप को नमूने से संबधित बुनियादी अवधारणाओ समझना चाहिए जो कि निम्नवत है:

1.2.1 समग्र

सांख्यिकी में समग्र का आशय संग्रहित (कुल) वस्तुऐं/चीजें जिसके बारे में आप जानकारी प्राप्त करते हैं । समग्र का आशय जॉच के तहत पूरे क्षेत्र से है जो ज्ञान की मांग करता है। उदाहरण के लिए यदि आप विद्यालय के 2,000 विद्यार्थियों के औसत मासिक व्यय के बारे मे ंसूचना चाहते हैं, तो उसके सीमित (ii) असीमित प्रकार है।

सीमित समग्र में वस्तुओं की संख्या निश्चित होती है जैसे कालेज में छात्रों या शिक्षकों की संख्या निश्चित है। दूसरी और असीति समग्र में, वस्तुओं की संख्या अनिश्चित होती है जैसे आसमान में तारों की संख्या, समुद्र में पानी की बूॅदें, पेड मे ंपत्नियों की संख्या, सिर पर बालों की संख्या ।

1.2.2 नमूना

समग्र के चयन का एक हिस्सा नमूना कहा जाता है। दूसरे शब्दों में समग्र से चयनित या वर्गीकृत इकाईयों को नमूना कहते हैं। वास्तव में, नमूना समग्र का वह हिस्सा है जिसे जॉच करने के उददेश्य से चयनित करते हैं। उदाहरण के लिए एक अन्वेषक एक कालेज के 2000 छात्रों में से 200 छात्र जो कि 2000 छात्रों का प्रतिनिधित्व करते हैं को चयनित करता है तो इन 200 छात्रों को एक नमूने के रूप मे ंकरार दिया जाएगा। इस प्रकार, नमूने का आशय समग्र से चयनित उन इकाईयों से है जो कि समग्र का प्रतिनिधित्व करते हैं।

1.3 संमकों को संग्रह करने की विधियॉ

संख्यिकी संमकों को संग्रह करने के दो तरीके निम्नवत हैं

1.3.1 **जनगणना विधि वह तरीका** है जिसमें जॉच के लिए जानकारी या संमक जो कि समग्र से सम्बन्धित है के प्रत्येक एवम् हर इकाई को एकत्रित करके एवम् उनके आधार पर निष्कर्ष तैयार किया जाता है। उदाहरण के लिए, (मासिक व्यय, औसत ऊॅचाई, औसत वजन इत्यादि) यदि कालेज के 2000 छा़त्रों के बारे में कुछ जानकारी एकत्र की जा रही है उस उद्देश्य में यदि आप कालेज प्रत्येक एवम् हर छात्र से प्रश्नमय करते हैं तो इस विधि को जनगणना विधि कहते हैं। इस उदाहरण में सम्पूर्ण कालेज या सभी 2000 छात्र समग्र समझे जायेंगे और व्यक्तिगत रूप से प्रतयेक छात्र समग्र इकाई कहलायेगा। भारत में जनगणना विधि या पूर्ण गणन विधि का उपयोग हर 10 वर्षों बाद किया जाता है।

1.3.1.1 जनगणना विधि के गुण

(i) **विश्वसनीय और सटीक संमक** : जनगणना विधि द्वारा प्राप्त ऑकडे अधिक विश्वसनीय एवं सटीक होते हैं क्योंकि इस विधि में संमकों को समग्र के प्रत्येक एवं हर इकाई से सम्पर्क कर एकत्रित किया जाता है।

(ii) **व्यापक जानकारी** : यह विधि समग्र के प्रत्येक इकाई के बारे में विस्तृत जानकारी देता है। उदाहरण के लिए, भारतीय जनगणना केवल व्यक्तिायों की संख्या के बारे मे ंज्ञान नहीं देता अपितु व्यक्तियों की आयु, व्यवसाय, आय, शिक्षा, वैवाहिक स्थिति के बारे में भी जानकारी देता है।

(iii) **उपयुक्तता** : यह विधि सीमित दायरे एवम्र विविध विशेषताओं वाले समग्र के लिए अधिक उपयुक्त है। इस विधि का उपयोग गहन अध्ययन मे ंभी वांछित है।

1.3.1.2 जनगणना विधि के दोष :

(i) **अधिक महंगा** : जनगणना विधि एक महंगी विधि है। समग्र के प्रत्येक इकाई से जानकारी एकत्र करने के लिए ज्यादा धन की आवश्यका होती है। यही कारण

है कि सरकार द्वारा इस विधि ज्यादातर उपयोग महत्वपूर्ण मुद्दों के लिए किया जाता है जैसे –जनगणना।

(ii) **ज्यादा समय का लगना :** इस विधि में ऑकडों के सग्रह में ज्यादा समय लगता है क्योंकि ऑकडे सम्रग के प्रत्येक एंव हर इकाई से संग्रहित किये जाते हैं इस कारण से सांख्यिकी निष्कर्ष बनाने मे ंदेरी होती है।

(iii) **अधिक श्रम का लगना:** ऑकडें संग्रहित करने की इस विधि मे ंबहुत ज्यादा परिश्रम लगता है। इसके लिए प्रगणक की बडी संख्या की आवश्यकता होती है।

(iv) विशिष्ट समस्याओं के लिए उपयुक्त नहीं : यह विधि कुछ विशिष्ट समस्या और अनंत समग्र के सम्बन्ध में उपयुक्त नहीं है। उदाहरण के लिए, अगर समग्र अनन्त है या समग्र की इकाईयॉ खराब या प्रकृति में बहुत जटिल हैं तो जनगणना विधि उपयुक्त नहीं हैं।

1.3.2 नमूना विधि :

नमूना विधि वह विधि है जिसमें समग्र से चयनित नमूना इकाईयों से ऑकडें एकत्रित कर समग्र के लिए निष्कर्ष निकाला जाता है। उदाहरण के लिए यदि कालेज के 2,000 छात्रों के मासिक व्यय का अध्ययन किया जाता है तो आप 2000 छात्रों से जानकारी एकत्र करने के बजाय कुछ चयनित छात्रों से जैसे 100 छात्रों से जानकारी एकत्र कर निष्कर्ष निकाल सकते हैं, तो इस विधि को नूना विधि कहा जायेगा।
नमूने विधि के आधार पर कालेज के सभी छात्रों के मासिक व्यय का ध्यान करना सम्भव है। नमूने विधि के तीन महत्वपूर्ण चरण हैं:

(i) नमूने का चयन करना (ii) नमूने से जानकारी एकत्र करना (iii) समग्र के लिए निष्कर्ष निकालना

1.3.2.1 नमूने विधि के गुण

(i) **कम खर्चीली** : यह विधि कम खर्चीली है। इस विधि मे ंधन एवं श्रम दोनों की बचत होती है क्येांकि इसमे ंसमग्र की कुछ इकाईयों का अध्ययन किया जाता है।

(ii) **समय की बचत** : इस विधि मे ंऑकडे जलदी से एकत्र किये जा सकते हैं क्योंकि ऑकडे समग्र की कुछ इकाईयों से प्रापत किये जाते हैं जिससे ज्यादा समय की बचत होती है।

(iii) **गहन अध्ययन** : नमूना विधि में इकाईयों की संख्या कम होती है जिससे समग्र का गहन अध्ययन किया जा सकता है।

(iv) **संगठनात्मक सुविधा** : इस विधि में अनुसंधान कार्य का आयोजन एवं कियान्वयन अधिक आसानी से किया जा सकता है। अधिक कुशल और सक्षम जॉचकर्ता नियुक्त किये जा सकते हैं।

(v) **अधिक विश्वसनीय परिणाम** : यदि समग्र से नमूनों का चयन इस तरह से किया जाता है कि चयनित नमूने सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधितव करते हैं, तो इससे उत्पन्न परिणाम अधिक सटीक एवं विश्वसनीय होंगें।

(vi) **अधिक विज्ञान संबंधी** :– नमूना विधि ज्यादा विज्ञान संबंधी है क्योंकि इसमें ऑकडों की पूछताछ अन्य नमूनों के साथ की जा सकती है।

(vii) **एकलौती विधि :** कुछ ऐसे क्षेत्र जहॉ पूछताछ जनगणना विधि से सम्भव नहीं है उन परिस्थितियों में केवल नमूना विधि ही ऑकडें एकत्रित करने के लिए उपयुक्त हैं । यदि समग्र अनन्त या बडे पैमाने पर या खराब होने की प्रकृति का है, तो केवल नमूना विधि का प्रयोग इस तरह के मामलों में किया जाता है।

1.3.2.2 नमूने विधि के दोष :

(i) **कम सटीकता** : नमूने विधि मे ंकम सटीकता होती है क्योंकि समग्र की प्रत्येक इकाई मे ंपूछताछ करने के बजाय इसमे ंकेवल चयनित इकाईयेां से आंशिक पूछताछ की जाती है।

(ii) **गलत निष्कर्ष** : यदि एक नमूना चयन की विधि निष्पक्ष या इयके चयन में सावधानी नहीं बरती गई है तो निश्चित रूप से परिणाम गुमराह करते हैं।

(iii) **कम विश्वसनीय** : जनगणना विधि की तुलना में, इस विधि मे ंअन्वेषक के पक्षपात की ज्यादा सम्भावना होती है, जो परिणाम को कम विश्वसनीय बनाता है।

(iv) **निर्दिष्ट ज्ञान की आवश्यकता** : यह एक जटिल विधि है जिसमें नमूने के चयन के लिए निर्दिष्ट ज्ञान की आवश्यकता होती है।

(v) **उपयुक्तता का अभावः** नमूना विधि समग्र के इकाईयों के मध्य विविधता के मामले में उपयुक्त नहीं है।।

1.3.3 जनगणना विधि एंव नमूना विधि में अन्तर :

जनगणना विधि एंव नमूना विधि के बीच मुख्य अन्तर निम्नवत है–

(i) **विस्तार :** जनगणना विधि मे ंसमग्र से सम्बन्धित सभी इकाईयों की जॉच की जाती है जबकि नमूना विधि में केवल कुछ इकाईयों से पूछताछ की जाती है।

(ii) **कीमत :** जनगणना विधि समय, धन एवम् श्रम की दृष्टि से कीमती है जबकि इन मामलों में नमूना विधि किफायती है।

(iii) **जॉच का क्षेत्र** : जॉच के लिए जनगणना विधि का प्रयोग सीमित क्षेत्र तक किया जाता है जबकि नमूने विधि का प्रयोग बढे क्षेत्र तक किया जाता है।

(iv) **समरूपता :** जनगणना विधि का प्रयोग वहॉ पर उपयोगी है जहॉ समग्र के इकाईयों मे ंविविधता होती है जबकि नमूना विधि का प्रयोग समग्र की इकाईयों मे ंसमरूपता होने पर किया जाता हे।

(v) **समग्र का प्रकार** : जनगणना विधि उन क्षेत्रों में ज्यादा उपयुक्त है जहॉ समग्र के प्रत्येक एवं सभी इकाईयों का अध्ययन आवश्यक है। इसके विपरीत, जब समग्र अननत या विशाल या पूर्ण गणन के परिणाम में नष्ट किया जा रहा है तो नमूना विधि को अधिक उपयुक्त माना जाता है।

1.4 नमूनाकरण विधियॉ :

दिये गए समग्र में से नमूना चयन की विधि को नमूनाकरण कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, नमूनाकरण संग्रहित सांख्यिकीय सामाग्री के चयन के उस भाग को

दर्शाता है जिसके बारे में समग्र की दृष्टि से जानकारी प्रापत की जाती है । विभिन्न आवश्यकताओं के अनुसार समग्र में से नमूना चयन की कई विधियॉ है :

1.4.1 प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1. सरल यादृच्छिक नमूनाकरण
2. स्तरीयकृत यादृच्छिक नमूनाकरण
3. कमबद्ध यादृच्छिक नमूनाकरण
4. बहुचरणीय यादृच्छिक नमूनाकरण
5. गुच्छीय नमूनाकरण

1.4.2 गैर–प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

1. आलोचनात्मक नमूनाकरण
2. नियतांश नमूनाकरण
3. विस्तृत नमूनाकरण

1.4.1 प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ

प्रायिकता नमूना विधियॉ समग्र में से नमूने चयन की ऐसी विधियॉ हैं जिसमें संस्कृति की सभी इकाईयों को समान अवसर देते हुए नमूने मे ंशामिल किया जताा है। प्रायिकता नमूनाकरण विधियों के विभिन्न रूप होते हैं, जो नीचे दिये गए है :

1. सरल यादृच्छिक नमूनाकरण : सरल यादृच्छिक नमूना वह पद्धति है जिसमें संस्कृति के प्रत्येक इकाई का नमूने में चयनित होने का समान अवसर होता है । कौन सा तत्व नमूने मे ंशामिल होगा और कौन सा नहीं। इस तरह के निर्णय जांचकर्ता द्वारा अपनी इच्छा से नहीं बनाये जाते बल्कि नमूनों का चयन संयोगवश होता है यादृच्छिक नमूना चयन की दो विधियॉ होती हैं :

(अ) लाटरी विधि :– लाटरी विधि :– इस विधि मे समग्र के प्रत्येक इकाई को कागज के एक टुकडे में नामित या कमांकित किया जाता है। इन पर्चीयों को मोडकर कलश या थैले में डाला जाता है। तद्पश्चात कई इकाईयों को एक नमूने मे शामिल करने के लिए कई पर्चीयों को किसी व्यक्ति द्वारा चुना जाता है।

(ब) यादृच्छिक अंकों की तालिका :– कुछ विशेषज्ञों ने यादृच्छिक अंक तालिकाओं का निर्माण किया है। ये तालिकाऐं नमूने के चयन मे ंसहायता करती है। इन सभी विभिन्न तालिकाओं मे ंटिपेट तालिका सबसे प्रसिद्ध एवं उपयोग में है। टिपेट ने 10400 संख्याओं की, 41600 संख्याओं के रूप द्वारा चार अंकों वाली तालिका का निर्माण किया है। इस विधि में, सबसे पहले, समग्र की सभी इकाई यों को कमिक रूप से लिखा जाता है। तद्प्श्चात नमूने के आकार के अनुसार टिपेट तालिका का प्रयोग करते हुए, अंकों का चयन किया जाता है। एक उदाहरण द्वारा, टिपेट तालिका की सहायता से, नमूना चयन को स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है :

टिपेट की तालिका का एक उदाहरण :

2952	6641	3992	9792	7979	5911
3170	5224	4167	9525	1545	1396

7203	4356	1300	2693	2370	7483
3408	2762	3563	6107	6913	7691
0560	5246	1112	9025	6008	8127

उदाहरण के लिए, मान लें कि 5000 इकाईयों मे ंसे 12 इकाईयों को चुना जाना है। इन इकाईयों को निर्धारित करने के लिए, टिपेट तालिका के लिए , पहले 5000 इकाईयों को 1 से 5000 तक कमबद्ध करना होगा और तब टिपेट तालिका से 12 अंकों का चयन प्रारम्भ से जो कि 5000 से कम होगा किया जायेगा। ये 12 अंक निम्नवत हैं :

2952	4156	4356	2370
3992	1545	1300	3408
3170	1396	2693	2762

इकाईयों की यह कम संख्या को नमूने मे ंशामिल किया जायेगा। यदि समग्र की इकाईयॉ 100 से कम हो, तब 4 अंक के यादृच्छिक संख्या को , 2 अंकों की संख्या में (छोटा) संक्षिप्त किया जायेगा, और तब इन दो अंकों की संख्या का चयन होगा। इसी तरह 60 इकाईयों मे ंसे यदि 6 इकाईयॉ चयनित करनी है, तो कम संख्या 29, 39, 31, 41, 15 और 13 को नमूने में शामिल किया जायेगा।

गुण : —

1. इस पद्धति (विधि) में निजी पूर्वाग्रह की कोई संभावना नहीं होती है। दूसरे शब्दों में, यह विधि व्यक्तिगत पूर्वाग्रह से युक्त होती है।
2. इस विधि के अन्तर्गतत, समग्र की प्रत्येक इकाई के चयन का अवसर एक समान होता है।
3. इस विधि के प्रयोग से समय, धन तथा श्रम की बचत होती है ।

दोष :

(i) यदि नमूने का आकार छोटा है, तो नमूना पर्याप्त रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।

(ii) यदि समग्र बहुत छोटा है, तो यह विधि उपयुक्त नहीं है।

(iii) यदि समग्र में कुछ वसतुऐं इतनी महत्वपूर्ण हैं कि नमूने में उनका शामिल किया जाना बहुत जरूरी है तो इस विधि का प्रयोग उचित नहीं होगा।

(iv) जब समग्र की इकाईयॉ विविध लक्षणों के साथ हो तो इस विधि का प्रयोग उचित नहीं हेागा ।

(ii) **स्तरीय यादृच्छिक नमूना :**

जब समग्र के इकाईयों मे ंसमरूपता के वजाय विविधता होती है तो इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि के अन्र्तगत समग्र के भी इकाईयों को पहले उनकी विशेषताओं के अनुसार अलग अलग हिस्सों में विभाजित किया जाता है। उसके बाद यादृच्छिक नमूने का उपयोग करके प्रत्येक परत से नमूना इकाई का चयन किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कालेज के 1500 छा्त्रों में 150 छात्रों का चयन करना है तो सबसे पहले कालेज के विद्यार्थियेां को कला, व्यवसाय एंव विज्ञान

विषय के आधार पर तीन वर्गों में विभाजित करना होगा । माना इन तीन संकायों में क्रमशः 500, 700, 300 छात्र हैं औ 10% नमूने लेने हे। तब यादृाच्छिक नमूना विधि के प्रयोग के आधार पर क्रमशः 50, 70 और 30 छात्र चयनति किये जा सकेंगें। इस तरह, इस विधि मे ंप्रत्येक कक्षा या वर्ग की आनुपातिक प्रतिनिधित्व की अवधारणा रहती है और समग्र की सभी इकाईयों को नमूने में चयनित किये जाने का बराबर का मौका मिलता है ।

गुण :

(i) इस विधि में इकाईयों के चयनित होने की ज्यादा सम्भावनाएं होती है।

(ii) तथ्यों के आधार पर विभिन्न स्तर पर इस विधि के तहत तुलनात्मक अध्ययन संभव है।

(iii) इस विधि में ज्यादा शुद्धता होती हैं।

दोष :

(i) इस विधि का सीमित दायरा है क्योंकि इस विधि को तभी अपनाया जा सकता है जब केवल समग्र और उसके विभिन्न तबको का ज्ञान हो ।

(ii) इस विधि में पूर्वाग्रह की संभावना हेा सकती है यदि समग्र ठीक से स्तरीकृत न हो ।

(iii) यदि समग्र आकार मे ंभीा बहुत छोटा हो तो इस स्तरीकृत करने में कठनाई होती है।

(iii) क्रमबद्ध यादृच्छिक नमूना :

इस विधि मे ंसमग्र के सभी इकाईयेां को क्रमबद्ध तरीके से व्यवस्थित ओर गिना जाता है और तब नमूना इकाई को बराबर के अन्तराल में चयनित किया जताा है। उदाहरण के लिए, यदि 50 छात्रों में से 5 को नमूने के लिए चयिनित कर रहे हैं तो 50 छात्रों को गिनकर क्रमबद्ध तरीके से व्यवस्थित किया जायेगा। पहले दस में से एक इकाई को यादृच्दिक तरीके से चयनित किया जायेगा। इसके बाद चयनित संख्या से प्रत्येक 10 वीं इकाई का चयन नमूना बनावट के लिए हेागा। यदि प्रथम चयनित अंक 5वीं इकाई है तो उसके बाद के अंक 15 वीं इकाई, 25 वीं इकाई, 35 वीं इकाई और 45वीं इकाई होंगें।

गुण :

(i) यह एक सरल विधि है। इसके द्वारा नमूने आसानी से प्रापत किये जा सकते हैं।

(ii) इस विधि द्वारा नमूना चयन में बहुत कम समय लगता है और परिणाम लगभग सटीक होता है।

दोष :

(i) इस विधि में, प्रत्येक इकाई को चयनित होने के बराबर मौके नहीं है क्योंकि केवल पहली इकाई का चयन यादृच्छिक नमूना विधि पर आधारित है।

(ii) यदि सभी इकाइयॉ लक्षणों में भिन्न हैं तो परिणाम उचित नहीं हेागें।

(IV) बहु–स्तरीय यादृच्छिक नमूनाः–

जब नमूना पद्धति विभिन्न स्तरों से गुजरती है, तो इसे बहुस्तरीय यादृच्छिक नमूना कहा जाता है। इस विधि मे ंसर्वप्रथम सम्पूर्ण समग्र को स्तरों या उप स्तरों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक स्तर पर कुछ इकाईयों का चयन यादृच्छिक नमूने के आधार पर किया जाता है । तद्पश्चात इन इकाईयों का उप विभाजन किया जाता है और फिर से यादृच्छिक नमूना विधि के आधार पर कुछ उप इकाइयों को चयनति किया जाता है। उदाहरण के लिए एक राज्य में प्रौढ शिक्षा के अध्ययन के उद्देश्य को जानने के लिए, सर्वप्रथम यादृच्छिक आधार कुछ जिलों को चयनित किया जायेगा। तद्पश्चात चयनित जिलों कसे कुछ तहसीलें और तहसीलों से कुछ वार्ड और वार्डों से कुछ परिवारों का चयन किया जायेगा जिनसे समस्या क विषय में पूछताछ की जा सकेगी।

गुण : (i) क्षेत्रीय आधार परसमग्र के अध्ययन की यह सर्वोत्तम विधि है। (ii) यह विधि उन समस्याओं के लिए उपयुक्त है जहॉ अकेले नमूने के आधार पर निर्णय नहीं लिया जा सकता है।

दोष :

(i) सही ढंग से सटीकता के स्तर का अनुमान लगाने के लिए इस विधि में कई परीक्षणों जिसमें अधिक समय एवं श्रम शामिल हैं की आवश्यकता होती है।

(ii) इस विधि में अनमानित सटीकता का स्तर पूर्व में ही तय हेाता है जोकि तर्क संगत प्रतीत नहीं होता है।

(V) गुच्छ नमूना :

इस विधि में सीधे समग्र को कई हिस्सों में विभाजित किया जाता है जिन्हें गुच्छ कहते हैं जिनमें से कुछ गुच्छों को यादृच्दिक आधार पर चयनित किया जाता है तब इन गुच्छों का पूर्ण रूप से गणना की जाती है । यह विधि सामान्यतया उद्योग जगत में ंप्रयोग की जाती है – जैसे भेषजीय उद्योग, एक मशीन जो कि प्रत्येक 100 के खेप में दवा की गोलियॉ बनाती है, तो गुणवत्ता निरीक्षण के लिए कुछ यादाृच्दिक खेपों को चयनित कर जॉच की जाती है।

1.4.2 गैर –प्रायिकता नमूनाकरण विधियॉ :–

गैर प्रायिकता नमूना विधियॉ वह विधियॉ हैं जिसमें इकाईयों का चयन प्रायिकता या संभाविता के आधार पर न होकर अन्वेषक के सुविधा या निर्णय के अनुसार होता है। इस तरह की विधियों में इकाईयों का चयन विशेष उद्देश्य के साथ एवमु अन्वेषक की सुविधानुसार हेाता है।

(1) **निर्णय नमूना** :– इस विधि के अन्तर्गत, नमूना इकाईयों का चयन पूरी तरह से अन्वेषक के निर्णय पर निर्भर करता है। दूसरे शब्दों में, अन्वेषक अपने (उसका/उसकी) निर्णय से पसन्द के नमूने का प्रयोग करता है और अध्ययन के अर्न्तगत समग्र से केवल उन नमूना इकाईयों को शामिल करता है जिनमें विशिष्ट लक्षण हैं।

उदाहरण के लिए यदि एक कक्षा के 80 छात्रों से 20 छात्रों का एक नमूना चयनित करना है जिससे 10 छात्रों की खर्चीली प्रवृत्ति का मनोविश्लेषण किया जा सके,

उन्वेषक उनहीं 20 छात्रों को चयनित करेगा जिनकी, उसका/उसकी राय कक्षा में उक्त अध्ययन पर प्रतिनिधित्व करेंगी।

गुण :–

(1) यह विधि कम खर्चीली है।

(2) यह विधि बहुत सरल और आसान है।

(3) इस विधि का प्रयोग उन क्षेत्रों में उपयोगी है जहॉ लगभग एक ही तरह की इकाईयॉ मौजूद हैं या कुछ इकाईयॉ आवष्यक हैं जिनहें नमूने से बाहर नहीं निकाला जा सकता है।

दोषः–

(1) इस विधि में अन्वेषक के स्वयं के पूर्वाग्रह का एक बडा मौका होता है।

(2) यह विधि बहुत सटीक एवं विश्वसनीय नहीं है।

(2) नियतांश नमूना :–

इस विधि में जॉचकर्ता कुछ मापदण्डों (कोटा) के अनुसार निश्चित कोटा आवंति करते हैं। उनहें अपेक्षित संख्या प्राप्त कर प्रतयेक कोटा को भरने के लिए निर्देश दिये जाते हैं। जानकारी एकत्र करने के लिए अन्वेषकों को व्यक्तियों या (नमूना इकाईयॉ) का चयन अपने निर्णय से कोटा के भीतर किया जाता है। जब सम्पूर्ण नियतांश के सभी या आंशिक प्रतिकियादाता उपलबध या सुगम्य नहीं होते है, तो नियतांश को नये प्रतिक्रियादाता के पूरक में पूर्ण कर लिया जाता है। नियतांष नमूना, निर्णय नमूना का एक प्रकार है।

गुण :– (1) इस विधि मे ंमहत्वपूर्ण इकाईयों को सम्मिलित करने का बडा मौका होता है।

(2) नियतांश की निर्धारित इकाईयों के कारण इस विधि में सांख्यिकी जॉच ज्यादा संगठित होती है।

दोष :– (1) प्रायिकता की पूर्वाग्रह पहले के तरह रहेगी। (2) इस विधि में नमूना त्रुटियों की ज्यादा सम्भावना हेाती है।

(3) सुविधा नमूना :–

इस गैर प्रायिकता नमूना मे ंअन्वेषक को सुविधानुसार पूर्ण रूप से नमूना पंसद करने की छूट दी जाती है। अन्वेषक कालेज विवरणिका के आधार पर अध्यापकों की सूची से पसंदित नमूना प्रापत करता है और (उसका/उसकी) अपने प्रकाशन के संदर्भ में जानकारी प्रापत करता है। यह विधि कम कीमती एवं सरल है लेकिन अवैज्ञानिक एवं अविश्वसनीय है। इस विधि का परिणाम गणनाओं पर ज्यादा निर्भर करता है। जहॉ पर समग्र को स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं किया जाता है या इकाइयों की सूची उपलब्ध नहीं है या नमूना इकाईयों की सूची उपलब्ध नहीं है या नमूना इकाईयॉ स्वयं में स्पष्ट नहीं है तो यह विधि नमूना चयन के लिए उपयुक्त है।

(4) विस्तृत नमूना :–

इस विधि मे ंनमूने का आकार समग्र के ही रूप में लगभग बडा लिया जाता है जैसे समग्र का 90% केवल उनहीं इकाईयों को छोड दिया जाता है जिनसे ऑकडे एकत्र करने में ज्यादा कठिनाई या लगभग असम्भव होते हैं। बहुत बडा नमूना आकार

होने के कारण इस विधि में बडे स्तर की सटीकता हेाती है। समस्या का विस्तृत अध्ययन सम्भव है। इस विधि के निष्कासन में भारी संसाधनों की जरूरत होती है।

1.5 नमूनाकरण और गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ

हालॉकि एक नमूने की पसंद अत्यन्त सावधानी से की जा कसती है, फिर भी निश्चित रूप से इसमें दाे तरह की त्रुटियॉ शामिल होती हैं:

(1) नमूना त्रुटियां (2) गैर नमूना त्रुटियां

ये त्रुटियॉ ऑकडों के संग्रह, प्रसंस्करण और विश्लेषण में घटित हो सकती हे। ऑकडों के नमूना वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेशता यह होती है कि समग्र से बडे आकार का यादृच्छिक नमूना ($n>30$) लिया गया हो जोकि सामान्य रूप से वितरित है या नहीं लेकिन ऑकडों का नमूना वितरण सामान्य वितरण के समीप होगा।

1.5.1 नमूनाकरण (त्रुटियॉ) :–

नमूना गलतियॉ वे हैं जो कि नमूना विधि के कारण पैदा हेाती है। नमूना गलतीयॉ निम्न कारणों की वजह से मुख्य रूप से उत्पन्न होती हैं:–

(1) नमूना विधि का गलत चयन

(2) नमूना एकत्रित होने की समस्याओं की वजह से एक नमूना इकाई को दूसरे नमूने इकाई के साथ प्रतिस्थापित करने से ।

(3) नमूने इकाईयों का गलत सीमांकन करने से

(4) समग्र के विभिन्न लक्षणों में परिवर्तनशीलता से भिन्नता ।

1.5.2 गैर नमूनाकरण त्रुटियॉ :–

गैर नमूना त्रुटियॉ वो है जो मानवीय कारकों से घटित होती हैं जो एक अन्वेशक से लेकर दूसरे अन्वेशक तक बदलती है।ये निम्न कारकों में से किसी एक कारक के वजह से उत्पन्न होती है :–

(i) खराब योजना।

(ii) नमूना इकाईयों का गलत चयन

(iii) कर्मचारी जो ऑकडे एकत्रित करते हैं उनमें प्रशिक्षण एवं अनुभव का अभाव

(iv) प्रतिक्रियादाता की तरफ से लापरवाही एवं गैर प्रतिक्रिया होने पर

(v) संकलन मेंत्रुटियॉ होने पर

(vi) गलत सांख्यिकी मापों की वजह से

(vii) गलत प्रश्नावली की बनावट से

(viii) नमूना निरीक्षण की जॉच अपूर्ण होने पर

1.6 नमूना वितरण के अवधारणाएँ

अब, आप नमूना वितरण की कुछ बुनियादी बातें समझेगें, जो कि इस प्रकार से हैः

1.6.1 नमूनाकरण वितरण :–

समग्र से चयनित एवं एक नमूने के परीक्षण का उद्‌देश्य समग्र के कुछ लक्षणों का आंकलन करना या अनुमान लगाना हेाता है। इस प्रक्रिया में नमूना वितरण के ज्ञान की अत्यधिक आवश्यकता हेाती है।

1.6.2 प्राचल/मापदण्ड :–

समग्र ऑकडों से किसी भी सांख्यिकी मापों की गणना करने को मापदण्ड कहा जाता है। इस प्रकार समग्र माध्य, समग्र मानक विचलन, समग्र परिवर्तनशलता, समग्र अनुपात इत्यादि मापदण्ड हैं। मापदण्डों को ग्रीक शब्द से प्रदर्शित किया जाता है जो कमशः μ, σ ,σ^2 और p है।

1.6.3 ऑकडा / सांख्यिकी :–

नमूना ऑकडों से किसी भी सांख्यिकी मापों द्वारा की गई गणना को सांख्यिकी कहते हैं। इस प्रकार नमूना माध्य, नमूना मानक विचलन, नमूना परिवर्तनशीलता नमूना अनुपात आदि सभी सांख्यिकी है, सांख्यिकी को रोमन शब्दों मे ंप्रदर्शित किया जाता है $\bar{x}$, s, s^2 और p है।

1.6.4 प्रतिस्थापना के साथ और इसके बिना नमूना :–

नमूना, समग्र से चयनित नमूने की एक विधि है। नमूना प्रतिस्थापना के साथ या इसके बिना भी किया जा सकता है। नमूना जहॉ समग्र से प्रत्येक इकाई को एक बार से ज्यादा चुन लिया जाता है तो उसे नमूना प्रतिस्थापना के साथ कहा जाता है। यदि प्रत्येक इकाई को एक बार से ज्यादा नहीं चुन सकते उेस नमूना प्रतिस्थापना के बाहर कहा जाता है। प्रतिस्थापना के साथ नमूना के संदर्भ में समग्र का आकार N होने पर n आकार के नमूनों की कुल सम्भावित संख्या N^n लेकिन यदि प्रतिसीापना के बाहर नमूने के लिए कल्पना कुल सम्भावित नमूनों की संख्या $NC_n =$ m होगी ।

1.7 ऑकडों का नमूनाकरण वितरण

नमूना वितरण सांख्यिकीय अनुमान के सैद्धान्तिक आधार का गठन करता है और इका व्यापार निर्णय लेने के लिए काफी महत्व है।

ऑकडों का नमूना वितरण आवृत्ति वितरण है जो एक ही आकार मे ंएक ही समग्र से तैयार की गई विभिन्न नमूनों से गणना कर विभिन्न मान्यता केसाथ निकाली जाती है। माना आप समग्र (N) से प्रतिस्थापना के साथ या बाहर n आकार के सभी सम्भावित नमूनों को निकालते हैं ।समग्र से निकले हुए सम्भावित प्रत्येक नमूने के लिए आप ऑकडों के लिए जैसे माध्य, माध्यिका, मानक विचालन परिवर्तनशीलता आदि की गणना करते हैं। तब आंकडों के सभी सम्भव मूल्यों को आवृत्ति विभाजन या प्राधिकता विभाजन में वर्गीकृत किया जाता है। इस तरह के ऑकडों के वितरण से प्रापत वितरण को नमूना वितरण कहते हैं। ऑकडों के प्रकृति के आधार पर आप द्वारा गणना किये हुए विभिन्न नमूना वितरण हो सकते हैं। जैसे यदि कोई विशेष ऑकडा जिसका नमूना माध्य ज्ञात किया जाता है तो वह वितरण माध्य का नमूना वितरण कहलायेगौ यदि आप प्रतयेक नमूने की परिवर्तनशीलता की गणना करते हैं तो इसे परिर्वतनशलता का नमूना वितरण कहते हैं। इसी तरह आप अनुपात, माध्यिका मानक विचलन आदि का नमूने वितरण की गणना कर सकेंगें।

1.8 ऑकडों की मानक त्रुटियॉ

ऑकडों के नमूने विवरण के मानक विचलन को ऑकडों का मानक त्रुटियॉ कहते हैं। जैसा कि विभिनन प्रकार के नमूना वितरण होते हैं, नमूना वितरण के प्रकृति

के आधार पर आपके पास विभिन्न प्रकार की मानक त्रुटियॉ हो सकती हैं नमूना वितरण के माध्य का मानक विचलन को माध्य की मानक त्रुटियॉ कहते हैं। माध्य की मानक त्रुटि नाप की सीमा है नमूना माध्य, समग्र माध्य से पृथक किया जाता है। इस प्रकार, मानक विचलन एवं माध्य मानक त्रुटि के बीच मूलभूत अन्तर यह है कि मानक विचलन जिसमें व्यक्तिगत इकाईयों की मापों की सीमा को मिलान केन्द्र के मूल्य से पृथक किया जाता है और माध्य मानक त्रुटि वह सीमा है जिसमें व्यक्तिगत नमूना माध्य को समग्र माध्य से पृथक किया जाता है। माध्य की मानक त्रुटियों की तरह आप के पास माध्यिका मानक त्रुटियॉ, मानक विचलन, अनुपात , परिवर्तनशीलता आदि हो सकते हैं।

मानक त्रुटि का उपयोग बडी संख्या में समस्याओं के लिए किया जताा है जिनका वर्णन निम्नवत किया जाता हैः–

1) नमूने की विश्वसनीयता के लिए :– मानक त्रुटि नमूने की विश्वसनीयता एवं यर्थाथता के बारे में एक धारणा देती है अर्थात अनुमानित मान प्रेषित मान से कितना ज्यादा भिनन है। ज्यादा मानक त्रुटि होने पर, अनुमानित एवं प्रेषित मानों के बीच में ज्यादा विचलन होता है और नमूने की विश्वसनीयता बहुत कम होती है। मानक त्रुटि बहुत कम होने पर अनुमानित एवं प्रेषित मानों के मध्य बहुत कम विचलन होता है और नमूने की विश्वसनीयता बहुत ज्यादा होती है।

2) परीक्षणों का महत्व :– मानक त्रुटियों का उपयोग छोटे एवं बडे नमूनों से प्राप्त विभिन्न परिणामों के परीक्षण के महत्व में भी किया जाता है यदि प्रेक्षित एवं अनुमानित मानों के मध्य अंतर मानक त्रुटि की तुलना मे ं1.96 से ज्यादा होता है तो आप 5% में परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं औश्र निष्कर्ष निकालते हैं कि नमूना व्यापक रूप में समग्र से भिन्न है। लेकिन यदि प्रेक्षित एवं अनुमानित मानों के मध्य अन्तर मानक त्रुटि तुलना में 2.58 से ज्यादा है तो आप शून्य परिकल्पना को 1% में अस्वीकार करते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि नमूना व्यापक रूप में समग्र से भिन्न होता है।

3) अज्ञात समग्र माध्य की विश्वास सीमाओं को निर्धारित करने के लिए :– मानक त्रुटि विश्वास सीमाओं के भीतर जिसमें विश्वास की निश्चित घात के अस्तित्व की अपेक्षा समग्र प्राचल से निर्धारित कर हमें सक्षम बनाती है।

बडें नमूने के लिए :

μ के 95% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x}$ –1.96 मानक त्रुटि और $\bar{x}$ + 1.96 मानक त्रुटि

μ के 99% विश्वास सीमाओं

$\bar{x}$ –2.58 मानक त्रुटि और $\bar{x}$ + 2.58 मानक त्रुटि

छोटे नमूने के लिए :

μ के 95% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x} \pm t_{0.05}$ मानक त्रुटि

μ के 99% विश्वास सीमाओं के लिए

$\bar{x} \pm t_{0.01}$ मानक त्रुटि

1.9 माध्यों का नमूना वितरण

यह ध्यान देना आवश्यक है कि नमूना वितरण का प्रयोग नमूना सिद्धान्त में व्यापक रूप से किया जाता है। प्रतिस्थाापना के साथ या के रहित N आकार समग्र जिसका माध्य μ और परिवर्तनशीलता σ^2 है से सभी सम्भव नमूने जिनका आकार n है निकालते हैं। समग्र से निकाले हुए प्रत्येक सभ समीव नमूनों के लिए आप प्रत्येक नमूने के माध्य $\bar{x}$ की गणना करते हैं। माध्य नमूना, नमूना के लिए परिवव्रित होगा। विभिनन नमूनों से प्राप्त समस्त सम्भव माध्यों की सूची को माध्यों का नमूना वितरण कहते हैं।

मध्यों के नमूना वितरण की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताऐं निम्नवत हैंः

(1) माध्यों के नमूना वितरण का माध्य समग्र माध्य (μ) के बराबर होता है।

लक्षणिक रूप से, $\mu\bar{x} = \mu$ or $E(\bar{x}) = \mu$ इस गुण को निम्नवत सिद्ध किया जा सकता हैः

N आकार के सीमित समग्र जिसका माध्य μ और परिवर्तनशलता σ^2 है से माना $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ n आकार का यादृाच्छिक नमूना (प्रतिस्थापना के साथ) प्रदर्शित करता है, तो

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_1 + \cdots x_n}{n}$$

$$E(\bar{x}) = E\left[\frac{\Sigma x}{n}\right] = E\left[\frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\{E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)\}$$

$$= \frac{1}{n}\{\mu + \mu + \mu + \cdots + \mu\} = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$$

इस प्रकार माध्यों के नमूना वितरण का माध्य समग्र माध्य के बराबर होता है।

(2) माध्यों के नमूना वितरण की मानक त्रुटि को इस तरीके से प्रापत किया जाता हैः

$$S.E._{\bar{x}} \ or \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{S.D. of\ Population}{\sqrt{Size\ of\ the\ sample}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ समग्र का नमूना वितरण

इस गुण को निम्नवत सिद्ध किया जा सकता हैः

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{\Sigma x}{n}\right) = Var\left(\frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}[Var(x_1) + Var(x_2) + \cdots Var(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}[\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots \sigma^2]$$

$$= \frac{1}{n^2} . n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

जहॉ σ^2 परिवर्तनशलता है, n नमूना आकार है।

क्योंकि , n>1, स्पष्टतः $\frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2 => v(\bar{x}) <$

समग्र परिवर्तनशीलता

$\therefore$ S.E.$\bar{x}$ or $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{var(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

इस सूत्र का प्रयोग तभी करते हें जब नमूना वितरण का ध्यान प्रतिस्थापना के साथ रखा जाता है ।

टिप्पणी : जब समग्र निश्चित है और नमूने प्रतिस्थापना के बगैर निकाले जाते है तब $S.E._{\bar{x}}$ को इस तरीके से प्राप्त करते हैं :

$$S.E._{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

(3) माध्यों का नमूना विवरणलगभग सामान्य विवरण माध्य μ और परिवर्तनशीलता σ^2 के साथ होता है,बर्शते बडा नमूना हो (n> 30)।

टिप्पणीयॉ : माध्यों के नमूना वितरण की प्रायिकता को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र काप्रयोग किया जाता है। $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

उदाहरण : 1.1 एक समग्र जिसमें तीन मानों 2, 5 और 8 शामिल हैं का विचार करें। समग्र से सभी सम्भव नमूनों जिनका आकार 2 हैं, निकालें .1 माध्यों के नमूना वितरण की रचना करें। साथ में वितरण का माध्य और मानक त्रुटि ज्ञात करें।

हल : समग्र मे ंतीन मान सम्मिलित हैं। प्रतिस्थापना के साथ निकाले गए सम्पूर्ण सम्भव नमूनों जिनका आकार 2 है $= N^n = 3^2 = 9$

सम्पूर्ण सम्भावित यादृयच्छिक नमूनों और उनका नमूना माध्य निम्न सारिणी मे ंप्रदर्शित किया जा रहा हैः

नमूना अंक	नमूना मान	नमूना माध्य $\bar{x}$
1	(2,2)	$\frac{1}{2}$ (2+2)=2
2	(5,2)	$\frac{1}{2}$ (5+2)=3.5
3	(8,2)	$\frac{1}{2}$ (8+2)=5
4	(2,5)	$\frac{1}{2}$ (2+5)=3.5
5	(5,5)	$\frac{1}{2}$ (5+5)=5
6	(8,5)	$\frac{1}{2}$ (8+5)=6.5

7	(2,8)	$\frac{1}{2}$(2+8)=5.0
8	(5,8)	$\frac{1}{2}$(5+8)=6.5
9	(8,8)	$\frac{1}{2}$(8+8)=8.0

सभी सम्भव 9 नमूनों के माध्यों के आधारपर माध्यों का नमूना वितरण नीचे दिया जा रहा है।

नमूना माध्य ($\bar{x}$)	आवृत्ति +	$f(\bar{x})$	d=$\bar{x}$ - $\mu_{\bar{x}}$	d^2	fd^2
2	1	2	-3	9	9
3.5	2	7	-1.5	2.25	4.50
5.0	3	15	0	0	0
6.5	2	13	1.5	2.25	4.50
8.0	1	8	+3	9.0	9.0
	$\varepsilon f = 9$	$\varepsilon f(\bar{x})$=45			ε fd^2=27

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f} = \frac{45}{9} = 5$$

माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = \frac{\Sigma f(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f} = \frac{27}{9} = 3$$

अतः मानक त्रुटि $S.E._{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{3} = 1.732$

उदाहरण 1.2:– निम्नलिखित समग्र से नमूने माध्यों का नमूना वितरण निर्मित करें :

समग्र इकाईः	1	2	3	4
प्रेषण	22	24	26	28

यदि समग्र से बिना प्रतिसीापना के आकार 2 का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है तो वितरण का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

ळलः समग्र में चार मान (22,24,26,28) शामिल हैं। बिना प्रतिसीापना के आकार 2 वाले सभी सम्भव नमूनों की संख्या ${}^4C_2$=6 होती है। सभी सम्भव यादृच्छिक नमूनों एवं उनके नमूना माध्यों को नीचे दिए गए तालिका मे ंप्रदर्शित किया जा रहा हैः

टिप्पणीयॉ

नमूना संख्या	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\bar{x}$**
1.	(22,24)	$\frac{1}{2}(22 + 24) = 23$
2.	(22,26)	$\frac{1}{2}(22 + 26) = 24$

3.	(22,28)	$\frac{1}{2}(22+28)=25$
4.	(24,26)	$\frac{1}{2}(24+26)=25$
5.	(24,28)	$\frac{1}{2}(24+28)=26$
6.	(26,28)	$\frac{1}{2}(26+28)=27$

बिना प्रतिस्थापना के आधारपर सभी 6 नमूनों का माध्य $(\bar{x})$, माध्यों के नमूना वितरण नीचे दिया गया है:

बिना प्रतिस्थापना के माध्यों का नमूना वितरण

नमूना माध्य $(\bar{x})$	आवृत्ति f	$f(\bar{x})$	$d=(\bar{x})-\mu_{\bar{x}}$	d^2	fd^2
23	1	23	-2	4	4
24	1	24	-1	1	1
25	2	50	0	0	0
26	1	26	1	1	1
27	1	27	2	4	4
	$\Sigma f=6$	$\Sigma f(\bar{x}) = 150$			$\Sigma fd^2=10$

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f}=\frac{150}{6}=25$$

मध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x})=\frac{\Sigma f(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f}=\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}}=\ \sigma_{\bar{x}}=\sqrt{Var(\bar{x})}=\sqrt{\frac{5}{3}}=1.29$$

विकल्पः माध्यों के नमूने वितरण को प्रायिकता के सम्बन्ध मे ंनिम्नवत भी लिखा जा सकता है:

नमूना माध्य $(\bar{x})$	23	24	25	26	27
प्रायिकता (p)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

क्योंकि 25 दो बार घटित होता है, $\frac{2}{6}$. दूसरे नमूनों के प्रत्येक माध्य में केवल घटित प्रायिकता $\frac{1}{6}$.है

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य

$$E(\bar{x}) = \Sigma p\bar{x} = \frac{1}{6} \times 23 + \frac{1}{6} \times 24 + \frac{2}{6} \times 25 + \frac{1}{6} \times 26 + \frac{1}{6} \times 27$$
$$= \frac{1}{6}.[23 + 24 + 50 + 26 + 27] = \frac{150}{6} = 25$$

माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})]^2$$
$$E(\bar{x}^2) = 23^2 \times \frac{1}{6} + 24^2 \times \frac{1}{6} + 25^2 \times \frac{2}{6} + 26^2 \times \frac{1}{6} + 27^2 \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}.[529 + 576 + 1250 + 676 + 729]$$
$$= \frac{3760}{6} = 626.17$$
$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})^2] = 626.17 - 625 = 1.67$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}} = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{1.67} = 1.29$$

उदाहरण 1.3 : एक समग्र मे ंचार अवयव 3,7,11 और 15 शामिल हैं। सभी सम्भव नमूने जिनका आकार दो है जो समग्र से प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाऐं, का संज्ञान लेते हुए ज्ञात कीजिए (i) समग्र माध्य μ (ii) समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 (iii) माध्यों के नमूने वितरण का माध्य (iv) माध्यों के नमूने वितरण की त्रुटियां iii) और (iv) से (i) और (ii) का प्रयोग करते हुए सत्यापित करें औरउपयुक्त सूत्र का प्रयोग करें ।

हलः

(i) μ = समग्र माध्य $= \frac{\Sigma X}{N} = \frac{3+7+11+15}{4} = \frac{36}{4} = 9$

(ii) $\sigma^2 =$ समग्र परिवर्तनशीलता $= \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N} = \frac{(-6)^2+(-2)^2+(2)^2+(6)^2}{4} = \frac{80}{4} = 20$

$$\therefore \quad \sigma = S.D. = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

(iii) सभी सम्भव यादृच्छिक नमूना जिनका आकार दो है प्रतिसापिना के साथ $N^n = 4^2 = 16$ है और उनका नमूना माध्य निम्नवत सारिणी मे ंदर्शाया गया हैः

नमूना संख्या	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\bar{x}$**	**नमूना संख्या**	**नमूना मान**	**नमूना माध्य $\bar{x}$**
1	(3,3)	3	9	(11,3)	7

2	(3,7)	5	10	(11,7)	9
3	(3,11)	7	11	(11,11)	11
4	(3,15)	9	12	(11,15)	13
5	(7,3)	5	13	(15,3)	9
6	(7,7)	7	14	(15,7)	11
7	(7,11)	9	15	(15,11)	13
8	(7,15)	11	16	(15,15)	15

बिना प्रतिस्थापना के आधार पर सभी 16 नमूनों का माध्य, $(\bar{x})$ नमूना वितरण को इस तरह से लिखा जा सकता है:

बिना प्रतिस्थापना के नमूने वितरण के माध्य

नमूना माध्य $(\bar{x})$	f	$f(\bar{x})$	$d = (\bar{x}) - \mu_{\bar{x}}$	d^2	fd^2
3	1	3	-6	36	36
5	2	10	-4	16	32
7	3	21	-2	4	12
9	4	36	0	0	0
11	3	33	+2	4	12
13	2	26	+4	16	32
15	1	15	+6	36	36
	$\Sigma f = 16$	$\Sigma f(\bar{x}) = 144$			$\Sigma fd^2 = 160$

नमूना वितरण के माध्यों का माध्य

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f(\bar{x})}{\Sigma f} = \frac{144}{16} = 9$$

मध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता

$$Var(\bar{x}) = \frac{\Sigma f(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2}{\Sigma f} = \frac{160}{16} = 10$$

अतः

$$S.E._{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{10}$$

सूत्र, $\mu_{\bar{x}} = \mu$ और $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, का प्रयोग करके, माध्यों के नमूना वितरण का माध्य $\mu_{\bar{x}} = \mu = 9$ और माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता $(\sigma_{\bar{x}})^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{20}{2} = 10.$ प्राप्त करते हैं अतः परिणामों (i) और (ii) को प्रयोग करके परिणामों (iii) और (iv) का सत्यापन किया है।

1.10 बडी संख्याओं का नियम एवं केन्द्रीय सीमा प्रमेय

बडी संख्याओं का नियम और केन्द्रीयसीमा प्रयोग दोनों आंकडों के विकास की नींव में उपयुक्त होते हैं।

1.10.1 बडी संख्याओं का नियम :–

बडी संख्याओं का नियम यह बताता है कि जैसे नमूना आकार बढता है, नमूना माध्य समग्र माध्य के और करीब होगा। इसकी आशा नहीं कर सकते कि यदि नमूना आकार पर्याप्त रूप से बढ रहा है तो नमूना माध्य समग्र माध्य के बराबर होगा। बडी संख्याओं के नियम की दो उलझाने होती है।
(1) नमूना आकार को बढाकर, नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच के अन्तर को कम किया जा सकता है और (2) एक नमूना माध्य की परिवर्तनशीलता को दूसरे नमूना माध्य (जो सामन आकार के हैं) को नमूना आकार बढाकर भी कम किया जाता है।

1.10.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय :–

इस विधि काप्रयोग व्यापक रूप से अनुमान एवं निष्कर्ष के क्षेत्र मे ंकिया जाता है। यह प्रमेय बताता हे कि यदि आप सिी समग्र से यादृच्छिक बडे आकार का नमूना n चयनित करते हो जिसका माध्य μऔर मानक विचलन σहै और प्रत्येक नमूने के माध्य की गणना करते हैं, तो माध्य का नमूना वितरण $\bar{x}$सामान्य वितरण जिसका माध्य μ और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ के समीप होता है। यदि समग्र अपने में सामान्य नहीं है तो ाी यह सत्य है। इस प्रमेय की उपयोगिता यह है कि इसमें बिना प्रतिबन्ध के यर्थाथ रूप में समग्र के वितरण तरीके की आवश्यकता होती है।

1.11 सारांश

कुल मिलकार सांख्यिकी ऑकडों को एकत्रित करने की दो विधियॉ होती हैंः (1) जनगणना विधि, और (2) नमूना विधि । वर्तमान में नमूना विधि सांख्यिकी पूछताछ की एक महत्वपूर्ण एवं चर्चित विधि है। अन्वेषक के द्वारा समय और धन की बचत के लिए विभिन्न नमूना विधियों का प्रयोग कर चुनिंदा नमूना लिया जाता है। इसलिए यह कहा जा कसता है कि नमूनाविधि जीवन के सभी क्षेत्रों मे ंअधिक उपयोगी है।

1.12 शब्दावली

गैर प्रायिकता नमूना विधियॉ :वह विधियॉ हैं जिसमें इकाईयों का चयन प्रायिकता या संभाविता के आधार पर न होकर अन्वेषक के सुविधा या निर्णय के अनुसार होता है।
समग्रः सांख्यिकी में समग्र का आशय संग्रहित (कुल) वस्तुऐं/चीजें जिसके बारे में आप जानकारी प्राप्त करते हैं ।

1.13 बोध प्रश्न

रिक्त स्थान भरें

1. ....के तहत, इसके विपरीत समग्र की सभी इकाइयों के बारे में जानकारी एकत्रित करने की तुलना में केवल चयनित इकाइयों से संबंधित जानकारी एकत्र की जाती है।
2. समग्र के चयन का एक हिस्से को .... कहा जाता है।

3. जनगणना विधि का प्रयोग वहॉ पर उपयोगी है जहॉ समग्र के इकाईयों मे ....होती है ।
4. ....विधि मे ंसर्वप्रथम सम्पूर्ण समग्र को स्तरों या उप स्तरों में विभाजित किया जाता है।
5. गैर नमूना त्रुटियॉ वो है जो .... कारकों से घटित होती हैं ।

1.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. नमूना विधि 2. नमूना 3. ंविविधता 4. बहुस्तरीय यादृच्छिक 5. मानवीय

1.15 स्वपरख प्रश्न

1. आंकडा एकत्रित करने के विधियों के साथ साथ इनके गुणों एवं दोषों को समझाइएं।
2. नमूना विधियों का वर्णन करें। संबंधित गुणों एवं दोषों की चर्चा भी करें।
3. नमूना एवं गैर नमूना त्रुटियों पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।
4. माध्यों के नमूने वितरण का वर्णन करें।
5. मानक विचलन एवं मानक त्रुटि में विभेद करें।
6. बढी संख्या के नियम एवं केन्द्रीय सीमा प्रमेय का वर्णन करें।
7. एक समग्र में निम्नलिखित अवयव 2,4,5,8 और 11 शामिल हैं। ज्ञात कीजिएः

(अ) जब बिना प्रतिसाीपना के नमूना वितरण किया जाता है, तो कितने विभिन्न प्रकार के आकार 3 के नमूने सम्भव हैं।

(ब) सभी सम्भव विभिन्न तरीके के नमूनों की सूची बताऐं।

(स) खण्ड (ब) में दिये गये प्रत्येक नमूनों के माध्यों की गणना करें।

(द) नमूना माध्य $\bar{x}$ के नमूना विवरण को ज्ञात करें।

(न) यदि सभी अवयव समान रूप से संभावित हैं, समग्र माध्य μ के मान की गणना करें।

उत्तर

7

(अ) बिना प्रतिस्थापना के निकाले गए कुल सम्भव आकार 3 के नमूनों की संख्या $5c_3 = 10$ है।

(ब) सभी सम्भव विभिन्न नमूनों और उनके नमूना माध्यों को निम्नलिखित तालिका में प्रदर्शित किया गया है।

नमूना संख्या	नमूना मान	नमूना माध्य $\bar{x}$
1.	(2,4,5)	$\frac{1}{3}(2+4+5) = 3.67$
2.	(2,4,8)	$\frac{1}{3}(2+4+8) = 4.67$
3.	(2,4,11)	$\frac{1}{3}(2+4+11) = 5.67$
4.	(2,5,8)	$\frac{1}{3}(2+5+8) = 5.0$
5.	(2,5,11)	$\frac{1}{3}(2+5+11) = 6.0$

6.	(2,8,11)	$\frac{1}{3}(2+8+11)=7.0$
7.	(4,5,8)	$\frac{1}{3}(4+5+8)=5.67$
8.	(4,5,11)	$\frac{1}{3}(4+5+11)=6.67$
9.	(4,8,11)	$\frac{1}{3}(4+8+11)=7.67$
10.	(5,8,11)	$\frac{1}{3}(5+8+11)=8.0$

(स) उपरोक्त तालिका में, आपके पास बिना प्रतिस्थापना के आकार 3 के 10 सम्भव नमूने हैं। क्योंकि 567 दो बार घटित होता है, इसके घटित होन की प्रायिकता $\frac{2}{10}$ है। अन्य, प्रत्येक नमूना माध्य में मान केवल एक बार $\frac{1}{10}$ की प्रायिकता के साथ घटित होता है।

(द) माध्यों का नमूना वितरण ($\boldsymbol{x}$) अथवा नमूने माध्य का प्रयिकता वितरण ($\boldsymbol{x}$) नीचे दिया जा रहा है

नमूना वितरण $\bar{x}$	3.67	4.67	5	5.67	6	6.67	6	7.67	8.0
प्रायिकता (p)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(घ) समग्र में मान (2,4,5,8,11) शामिल हैं। इसलिए, क्योंकि प्रत्येक मान समान रूप से संभावित हैं, प्रत्येक मान की घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ हैं।

नमूना माध्य $\bar{x}$	2	4	5	8	11
प्रायिकता (p)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

प्रायिकता माध्य $=\mu=2\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{5}+11\times\frac{1}{5}$

$$=\frac{1}{5}.[2+4+5+8+11]=\frac{30}{5}=6$$

1.16 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, ‘*Principles of Statistics*’ Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., ‘*Business Statistics*’ Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., ‘*Advanced Statistics*’ Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, ‘Basic Statistics’ World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, ‘Quantitative Methods in Management’.

इकाई–2 बिन्दु अनुमानक एवं अंतराल अनुमानक संरचना (Point Estimation and Interval Estimation)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- अनुमान की बुनियादी अवधारणाओं की व्याख्या कर सकें।
- अच्छे अनुमानों की विशेषताओं की व्याख्या कर सकें।
- अनुमानों के प्रकारों का वर्णन कर सकें।
- लक्ष्य आंकलनों की उपयोगिता का वर्णन कर सकें।
- अन्तर आंकलन की उपयोगिता का वर्णन कर सकें।

2.1 प्रस्तावना

रोजमर्रा की जिन्दगी में, नमूना ऑकडा से समग्र प्राचल के बारे मे ंआंकलन करने की आवश्यकता पडती है। उदाहरण के लिए, मान लो कि आप किसी विश्वविद्यालय के छात्रों द्वारा प्रतिदिन औसत मात्रा मे ंपिया हुआ कोका कौला को ज्ञात करने के इच्छुक हैं। सभी छात्रों के औसत मात्रा को ज्ञात करने पर कठनाई होती है। इस समस्या का हल निकालने के लिए, आप एक नमूना ले सकते हैं औसत कोका कौला के औसत मात्रा का पता लगायेंगें। तब इस नमूना माध्य का प्रयोग समग्र का औसत ज्ञात करने में करेंगें। वास्तव में, नमूना औसत के आधार पर आप समग्र औसत को अनुमानित कर सकते है।

आगणन का सिद्धान्त अज्ञात समग्र प्राचलों के अनुमानो ंके साथ (जैसे –समग्र माध्य और समग्र परिवर्तनशीलता) समरूपी ऑकडें नमूनों से (जैसे नमूने बाध्य, नमूने परिवर्तनशीलता) का वर्णन करता है।

2.2 सांख्यिकी आगणन की बुनियादी अवधारणाऐं

सांख्यिकी आगणन के अध्ययन मकें निम्नलिखित पदों का प्रयोग किया जाता हैः

2.2.1 आगणक एवं अनुमान

समग्र प्राचलों का अनुमान लगाने के लिए आप विभिन्न नमूना आंकडों का प्रयोग कर सकते हैं जो नमूना ऑकडे जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$, नमूना माध्यिका m, नमूना परिवर्तनशीलता S^2 इत्यादि जो अज्ञात समग्र प्राचलों जैसे समग्र माध्य μ, समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 आदि का अनुमान लगाते हैं उन्हें आगणक कहा जाता है और आगणक से वास्तविक मान लेने को अनुमानित कहा जाता है।

यदि θ (ठीटा पडें) समग्र पाचल θ का आगणक है।

टिप्पणीयॉ :– तथ्य अनुमान एवं अन्तराल अनुमान

2.2.2 समग्र प्राचल का अनुमान दो तरीको ंसे किया जा सकता है।

(1) तथ्य अनुमान :– ऑकडों का एक एकल मान जिसे अज्ञात समग्र प्राचल के अनुमान के लिए प्रयोग किया जाता है उसे तथ्य अनुमान कहते हैं। जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$,जिसे μ के तथ्य आगणन के लिए समग्र माध्य μ को अनुमानित करने मे ंप्रयोग कर सकते है। इसी तरह S^2 ऑकडा σ^2 का तथ्य आंगणक है जबकि S^2 के मान की गणना यादृच्छिक नमूने से करते है। तथ्य आंकलन वास्तविक अंक प्रणाली मे ंऔर जिसे तथ्य आंगणक कहते हैं एक एकल तथ्य है।

(2) अंतराल अनुमान :– एक अंतराल का अनुमान संभावित सीमा के भीतर प्राचल को संदर्भित करता है जो वास्तविक मान को असत्य ठहराने के लिए अपेक्षित है । इस तरह के विस्तार की दो चरम सीमाओं को विश्वस्त हो विश्वास सीमाऐं कहा जाता है और इस विस्तार को विश्वास अंतराल कहा जाता है।

इनका निर्धारण समग्र के नमूना अध्ययनों के आधार पर किया जाता है। इस प्रकार, नमूना अध्ययनों के आधार पर जब आप छात्रावास में रह रहे छा़त्रों की औसत मासिक व्यय का अनुमान लगाते हैं जो रू0 5,000 और रू0 6,000 के बीच है यह अन्तर अनुमान का एक उदाहरण होगा। और रू0 5,000 और रू0 6,000 की राशि छात्रों की वास्तविक व्यय के भीतर की चरम सीमाओं के अस्तित्व में होगी।

2.3 एक अच्छे आगणक की विशेषताऐं

समग्र प्राचल मे ंएक से ज्यादा आगणक हो सकते हैं, जैसे समग्र माध्य (μ) का अनुमान या तो नमूना माध्य ($\bar{x}$) या नमूना माध्यिका (m) या नमूना बहुलक के द्वारा किया जा सकता हे। इसी तरह, समग्र परिवर्तनशलता (σ^2) का अनुमान या तो नमूना परिवर्तनशीलता (s^2), नमूना मानक विचलन (s), नमूना माध्य विचलन द्वारा किया जा सकता है। इसलिए ,प्रापय आगणकों की संख्या के बाहर एक अच्छे आगणक को निर्धारित करना आनिवार्य होता है। एक अच्छा आगणक वह है जो प्राचल के सही सम्भव मानों के समीप होता हैं। अच्छे आगणक में निम्नलिखित लक्षण या विशेषताऐं होती हैं।

2.3.1 निष्पक्ष आगणक

निष्पक्ष आगणक को समग्र पाचल θ का निष्पक्ष आगणक कहा जायेगा यदि आगणक के नमूना वितरण का माध्य समग्र प्राचल θ के तुल्य एक समान है।

तथ्य आगणक और अन्तराल आगणक

टिप्पणीयॉ

लाक्षणिक रूप से , $\mu_{\hat{\theta}} = \theta$

गणितीय अपेक्षाओं के मामले में $\hat{\theta}$ एक निष्पक्ष आकलनकर्ता है यदि आकलनकर्ता का अपेक्षित मान प्राचल के अनुमानित मान के बराबर है।

लाक्षणिक रूप से , $E(\hat{\theta}) = \theta$

उदाहरण 2.1 :– नमूना माध्य $\bar{x}$, समग्र माध्य μ , का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है क्योंकि, माध्यों के नमूने वितरण का माध्य $\mu_{\bar{x}}$ या $E(\bar{x})$ समग्र माध्य μ के बराबर है।

लाक्षणिक रूप से , $\mu_{\bar{x}} = \mu$ या $E(\bar{x}) = \mu$

उदाहरण 2.2: नमूना परिवर्तनशीलता s^2 , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के झुकाव का एक आकलन कर्ता हे। क्येांकि नमूना वितरण की परिवर्तनशीलता समग्र परिवर्तनशलता के बराबर नहीं है।

लाक्षणिक रूप से $\mu_s^2 \neq \sigma^2 \; or \; E(s^2) \neq \sigma^2$

फिर भी , परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता (s^2) , समग्र परिवर्तनशीलता का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है, क्योंकि

$$E(\hat{s}^2) \neq \sigma^2 \qquad Where\ \hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} \times s^2$$

उदाहरण 2.3 :– नमूना अनुपात p समग्र अनुपात P का एक निष्पक्ष आकलन कर्ता है क्योंकि, नमूने वितरण का आनुपातिक माध्य, समग्र आनुपातिक माध्य के बराबर हे।

लाक्षणिक रूप से , $\mu_P = p$ or $E(p) = p$

2.3.2 समान आकलनकर्ता

एक आकलनकर्ता को एक समान कहेंगें, यदि नमूना आकार बढे तो आकलन कर्ता का दृष्टिकोण समग्र प्राचल है। दूसरे शब्दों में, एक आकलनकर्ता $\hat{\theta}$ को समग्र प्राचल θ का एक समान आकलनकर्ता कहेंगें यदि n बहुत बडा है तो $\hat{\theta}$ की प्रायिकता का दृष्टिकोण θ के लिए 1 है।

लाक्षणिक रूप से , $P(\hat{\theta} \to \theta) \to 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty$

टिप्पणी :– एक समान आकलनकर्ता की निष्पक्ष होने की जरूरत है। एक आकलनकर्ता के एक समान होने का पर्याप्त लक्षण यह है कि

(i) $E(\hat{\theta}) \to \theta$

(ii) $Var(\hat{\theta}) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$

उदाहरण 2.4 :– नमूना $\bar{x}$, समग्र माध्य μ का एक समान आकलन कर्ता है क्योंकि नमूने माध्य के अपेक्षित मान का दृष्टिकोण समग्र माध्य है और यदि नमूने का आकार पर्याप्त रूप से बढाये तो नमूने माध्य की परिवर्तनशीलता का दृष्टिकोण शून्य है।
लाक्षणिक रूप से ,

$$(i) E(\bar{x}) \to ì$$

$$(ii) Var\,(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad as \quad n \to \infty$$

उदाहरण 3.5 : नमूना माध्यिका भी समग्र माध्य का एक समान आकलनकर्ता है क्योंकि

$(i) E(m) \to ì$

$(ii) Var\,(m) \to 0 \quad as \quad n \to \infty$

2.3.3 सक्षम आकलनकर्ता :–

सक्षमता एक सापेक्ष शब्द है। आमतौर पर एक आकलनकर्ता की सक्षमता को दूसरे आकलनकर्ता द्वारा तुलना कर परिभाषित किया जाता है। मान लो कि आप θ के दो निष्पक्ष आकलनकार्त $\hat{\theta}1$ और $\hat{\theta}_2$ का संज्ञान ले रहे हैं। इनमे ंसे $\hat{\theta}1$ आकलन कर्ता को θ को सक्षम आकलनकार्त कहा जायेगा यदि $\hat{\theta}1$ की परिवर्तनशलता, $\hat{\theta}_2$ की परिवर्तनशीलता से कम है।

लाक्षणिक रूप से , $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$

तब $\hat{\theta}_1$ को एक सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है।

उदाहरण 2.6: नमूना माध्य ($\bar{x}$) नमूना माध्यिका (m) की तुलना में समग्र माध्य का एक निष्पक्ष और सक्षम आकलनकर्ता है क्योंकि माध्यों के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता माध्यिका के नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता की तुलना में कम होती हे।

दो निष्पक्ष आकलनकर्ताओं की सापेक्ष सक्षमता नीचे दी जा रही है:
आप जानते हैं कि

$$Var\,(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}, Var\,(m) = \frac{ð}{2} . \frac{ó^2}{n}$$

$$= \frac{Var(\bar{x})}{Var\,(m)} = \frac{\frac{ó^2}{n}}{\frac{ðó^2}{2n}} = \frac{2}{ð} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} = 0.64 \left[ð = \frac{22}{7}\right]$$

सक्षमता $Var\,(\bar{x}) = 0.64.Var\,(m)$

इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$ में नमूना माध्यिका की तुलना में 64% ज्यादा सक्षमता होती है। अतः नमूना माध्य, नमूना माध्यिका की तुलना में समग्र माध्य का ज्यादा सक्षम आकलनकर्ता है।

2.3.4 सक्षम आकलनकर्ता

एक अच्छे आगणक की अन्तिम विशेषता उसकी सक्षमता होनी चाहिएं। एक आकलनकर्ता $\hat{\theta}$ को θ का सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है यदि यह प्राचल के संदर्भ में, नमूने में सभी सूचनाओं को सम्मलित करता है। दूसरे शब्दों मे ंएक सक्षम आकलनकर्ता, समग्र के बारे मे ंनमूने मे ंउपस्थिति सभी सूचनाओं का प्रयोग करके उसे प्रस्तुत करता है। नमूना माध्य $\bar{x}$ को ससमग्र माध्य μ का एक सक्षम आकलनकर्ता कहा जाता है।

2.4 तथ्य आकलनकर्ता का उपयोग

अब आप तथ्य आकलनकर्ता के उपयोगों का अध्ययन करेंगें जो निम्नवत हैः

2.4.1 एकल नमूने की स्थिति में तथ्य आकलनकर्ता

जब अज्ञात समग्र से एक एकल स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना निकालते हैं तो उसे एकल नमूना कहते है। समग्र पाचल के तथ्य आकलनकर्ता की व्याख्या निम्न उदाहरणों से दी जा सकती है।

उदाहरण 2.7: एक गोले के व्यास (मोटाई) के 10 नामों के नमूने का माध्य $\bar{x} =$ 4. 38 इंच और परिवर्तनशीलता $=$ 0.06 इंच दी गई है। (अ) सच्चे/माध्य (अर्थात् समग्र माध्य) और (ब) सही परिवर्तनशीलता (अर्थात समग्र परिवर्तनशलता) के निष्पक्ष एवं सखम अनुमान ज्ञात कीजिए ।

हल : आप को n=10, $\bar{x}$=4.38, s^2=.06 इंच दिया गया है।

(अ) सही माध्य (μ) का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान $\bar{x} = 4.38$ होगा।

(ब) सही परिवर्तनशीलता σ^2 का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान :

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}.s^2 \text{ है।}$$

इसमें मानों को रखकर आप

$$\hat{s}^2 = \frac{10}{10-1} \times .06 = 1.11 \times 0.06 = .066 \text{ प्राप्त करते है।}$$

इस प्रकार $\mu = 4.38, ó^2 = 0.666.$

उदाहरण 2.8 : एक अज्ञात समग्र से निम्नलिखित पांच प्रेक्षण एक यादृच्छिक नमूने को गठित करते हैं: 6.33, 6.36, 6.32 औश्र 6.37 सेंटिमीटर (अ) सही माध्य का और (ब) सही परिवर्तनशीलता का निष्पक्ष और सक्षम अनुमान ज्ञात कीजिए ।

टिप्पणीयॉ (अ)

हल : सही माध्य (अर्थात् समग्र माध्य) का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानित मान दिया जा रहा है।

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37}{5} = \frac{31.75}{5} = 6.35$$

(ब) सही परिवर्तनशीलता (अर्थात समग्र परिवर्तनशीलता) का निष्पक्ष एव ंसक्षम अनुमान

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

जहॉ $\hat{s}^2$ =संशोधित नमूना परिवर्तनशीलता है

$$= \frac{(6.33 - 6.35)^2 (6.37 - 6.35)^2 (6.36 - 6.35)^2 (6.32 - 6.35)^2 (6.37 - 6.35)^2}{5 - 1}$$

$= \frac{.0022}{4} = .00055\, cm^2$ (वर्ग सेन्टीमीटर)

उदाहरण 2.9 : भार (किग्रा) के अनुसार वर्गीकृत निम्नलिखित ऑकडें एक विश्वविद्यालय के 100 छात्रों के यादृच्छिक नमूनों से संदर्भित हैः

भार (किग्रा)	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
छात्रों की संख्या	5	18	42	27	8

(अ) समग्र माध्य और (ब) समग्र परिवर्तनशीलता के निष्पक्ष और सक्षम अनुमानों को ज्ञात कीजिए।

Calculation of Mean and variance

Weight	No. of Students (f)	M.V. (m)	A=67, d=m-A	d'=d/3	fd'	fd'^2
60-62	5	61	-6	-2	-10	20
63-65	18	64	-3	-1	-18	18
66-68	42	67	0	0	0	0
69-71	27	70	+3	+1	+27	27
72-74	8	73	+6	+2	+16	32
	$n = 100$				$\sum fd' = 15$	$\sum fd'^2 = 97$

समग्र माध्य के निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानों के मानों की निम्नवत दिया जा रहा है।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times i$$

$$= 67 + \frac{15}{100} \times 3 = 67 + (0.45) = 67.45$$

(ब) समग्र माध्य का निष्पक्ष एवं अनुमानित मान निम्नवत है

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} . s^2$$

जहाँ

$$s^2 = \frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2 \times i^2$$

$$= \left[\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2\right] \times 3^2$$

$$= [0.97 - .0225] \times 9 = 8.5275$$

अब

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{100}{99} \times 8.5275 = 8.6136$$

इस प्रकार

$$\mu = 67.45, \sigma^2 = 8.6136$$

2.4.2 नमूना पुनरावृत्ति की घटना में तथ्य आंकलन

प्रतिस्थापना के साथ या बिना, समग्र से जब एक ही आकार के एक से ज्यादा यादृच्छिक नमूने निकाले जाते हैं तो उन्हें नमूना पुनरावृत्ति कहा जाता है। इसे निम्नलिखित उदाहरणों से समझा जा सकता है।

उदाहरण 2.10 : एक समग्र में पांच मान : 3,4,5,6 और 7 शामिल है। प्रतिस्थापना के बिना समग्र से आकार 3 के सभी समीव नमूनों की सूची बनाएं और प्रत्येक नमूने के माध्य $\bar{x}$ की गणना करें। वह नमूना माध्य समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है, की जॉच करें।

हल : समग्र मे ं5 मान : 3,4,5,6 और 7 शामिल है। प्रतिस्थापना के बिना आकार 3 के सभी सम्भव नमूनों की संख्या $5_{c_3} =$ 10 है जो निम्नलिखित तालिका में प्रदर्शित किए जा रहे हैं।

Sample No.	Sample Values	Sample Mean ($\bar{x}$)
1	(3,4,5)	$\frac{1}{3}$ $(3+4+5) = \frac{12}{3}4$
2	(3,4,6)	$\frac{1}{3}$ $(3+4+6) = \frac{13}{3}4.33$
3	(3,4,7)	$\frac{1}{3}$ $(3+4+7) = \frac{14}{3}4.67$
4	(3,5,6)	$\frac{1}{3}$ $(3+5+6) = \frac{14}{3}4.67$

5	(3,5,7)	$\frac{1}{3}\ (3+5+7)=\frac{15}{3}5.0$
6	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{16}{3}5.33$
7	(3,5,6)	$\frac{1}{3}\ (3+5+6)=\frac{15}{3}5.00$
8	(3,5,7)	$\frac{1}{3}\ (3+5+7)=\frac{16}{3}5.33$
9	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{17}{3}5.67$
10	(3,6,7)	$\frac{1}{3}\ (3+6+7)=\frac{18}{3}6.00$
Total	k=10	$\sum \bar{x}=50$

माध्यों के नमूने वितरण का माध्य = $\mu_{\bar{X}}=\sum\frac{\bar{x}}{k}=\frac{50}{10}=5.$

समग्र माध्य $(\mu)=\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$

इसलिए निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि $\mu_{\bar{x}}=\mu$ नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

उदाहरण 2.11 : एक परिकल्पित समग्र का विचार करें जिसमे ं3 मान 1,2 और 3 शामिल हैं। प्रतिस्थापना के साथ आकार आकर के सभी सम्भव नमूने निकालें। प्रत्येक नमूने के लिए माध्य $\bar{x}$ और परिवर्तनशीलता s^2 की गणना करें। समतुलय प्राचलों के लिए $\bar{x}$ और s^2 ये दो ऑकडे निष्पक्ष एवं सक्षम हैं , की जॉच करें।

हलः समग्र में तीन मान 1,2,3 शामिल है।। प्रतिसीापना के ससाथ आकार आकार आकार के सभी सम्भव नमूनों की संख्या $N^n=3^2=9$ जो निम्नवत दी गई है।

Sample No.	Sample Values	Sample Mean $(\bar{x})$	Sample Variance $s^2=\frac{1}{2}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2]$	Modified Sample Variance $\left(\hat{s}^2=\frac{n}{n-1}s^2\right)$
1	(1,1)	$\frac{1}{2}(1+1)=1.0$	$\frac{1}{2}[(1-1)^2+(1-1)^2]=0.00$	0.00
2	(1,2)	$\frac{1}{2}(1+2)=1.5$	$\frac{1}{2}[(1-1.5)^2+(2-1.5)^2]=0.25$	0.50
3	(1,3)	$\frac{1}{2}(1+3)=2.0$	$\frac{1}{2}[(1-2)^2+(3-2)^2]=1.0$	2.00
4	(2,1)	$\frac{1}{2}(2+1)=1.5$	$\frac{1}{2}[(2-1.5)^2+(1-1.5)^2]=0.25$	0.5

5	(2,3)	$\frac{1}{2}$ (2+2)=2.0	$\frac{1}{2}$ [(2-2)^2+(2-2)^2]=0.00	0.00
6	(2,3)	$\frac{1}{2}$ (2+2)=2.5	$\frac{1}{2}$ [(2-2.5)^2+(3-2.5)^2]=0.25	0.50
7	(3,1)	$\frac{1}{2}$ (3+1)=2.0	$\frac{1}{2}$ [(3-2)^2 +(1-2)^2] =1.00	2.00
8	(3,2)	$\frac{1}{2}$ (3+2)=2.5	$\frac{1}{2}$ [(3-2.5)^2 + (2-2.5)^2] =0.25	0.50
9.	(3.3)	$\frac{1}{2}$ (3+3)=3.0	$\frac{1}{2}$ [(3-3)^2 +(3-3)^2]=0.00	0.00
Total	k=9	$\sum(\bar{x}) = 18$		$\sum \hat{s}^2 = 6$

(अ) माध्यों के नमूने वितरण का माध्य =$\mu_{\bar{x}} = \sum \frac{\bar{x}}{k} = \frac{18}{9} = 2.$ यहॉ k = नमूनों की संख्या

क्योंकि $\mu_{\bar{x}} = \mu$,नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

(ब) नमूने वितरण की परिवर्तनशीलता का माध्य =$\mu_{s^2} = \sum \frac{s^2}{k} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

समग्र परिवर्तनशीलता $\sigma^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = \frac{2}{3}$

क्योंकि $\mu_{s^2} \neq \sigma^2$ नमूना परिवर्तनशीलता s^2 समग्र परिवर्तनशलता (σ^2) का एक निष्पक्ष आकलनकर्ता नहीं है। लेकिन, परिवर्तित नमूना परिवर्तनशलता $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}.s^2$ निष्पक्ष अनुमान को परिभाषित करेगा क्योंकि $ì_{\hat{s}^2} = \sum \frac{\hat{s}^2}{k} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3}$$

इस प्रकार $\mu_{\hat{s}^2} = \sigma^2$

क्योंकि $\mu_{s^2} = \mu^2$ परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता , समग्र का एक निष्पक्ष अनुमान है।

उदाहरण 2.12 : दर्शाऐं कि नमूना माध्य $\bar{x}$, समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।
या

एक स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना $x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n$ समग्र से जिसका माध्य μ है से निकाला जाता है। सिद्ध करें नमूना माध्य $\bar{x}$ का अपेक्षित मान समग्र माध्य μ के बराबर है।

हल : यादृच्छिक नमूना वह होता है जहॉ प्रत्येक नमूने के चयनित होने के बराबर मौके होते हैं आप आकार n के यादृच्छिक नमूने प्रापत कर सकते है। तब

$\mathrm{E}\,(\bar{x}) = \mathrm{E}\left[\frac{x_1+x_{2+}\,....+\,x_n}{n}\right],$

जहॉ x_1 नमूना प्रेक्षण हैं।

$= \frac{1}{n}\ [E(x_1) + E(x_2) + \cdots E(x_n)]$

9761309203

अब x_i (जो समग्र का एक सदस्य हैं) का अपेक्षित मानसमग्र माध्य μ हैं। इसलिए

$\mathrm{E}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\ [\mu + \cdots + \mu]$ क्योंकि $[\mathrm{E}(x_1) = (x_2) = E(x_n) = \ \mu] = \frac{1}{n}.[n\mu] = \mu$

क्योंकि $[\sum C = c_1 + c_2\ + \cdots c_n = nC]$

इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$ समग्र माध्य का एक निष्पक्ष अनुमान है।

2.5 अन्तराल आंकलन (या अन्तराल विश्वास)

अन्तराल आंकलन के सिद्धान्त में, आप एक अन्तराल या दो अंकों के भीतर जिसमें अज्ञात समग्र प्राचल के अपेक्षित मान का अस्तित्व प्रायिकता के साथ दर्शाते हुए ज्ञात कर सकते हैं।

दो नियत राशियों t_1 और t_2 के निर्धाणि मे ंअन्तराल आंकलन विधि इस तरीके से शामिल होती है कि $[t_1\ < \theta < t_2\,, t$ के दिये हुए मान के लिए $] =$ 1–∝ जहॉ ∝ एक सतर का महत्व है।

[t_1 और t_2] का अनतराल जिसके भीतर प्राचल θ के अपेक्षित अज्ञात मान का अस्तित्व हो को विश्वास अन्तराल कहते हैं और ज्ञात की गई सीमाऐं t_1 और t_2 को विश्वास सीमाऐं कहते हैं और 1–∝ को अनुमान का वांछित यर्थाथमापी आधारित विश्वास गुणांक कहते हैं। जैसे 2=0.5 (या 0.01) 95% (या 99%) विश्वास सीमाऐं देता है। अब, आप विश्वास सीमा (या अंतराल आंकलन) की पद्धति की स्थापना का या समग्र प्राचल की सीमाओं का अध्ययन करेंगें।

स्मग्र प्राचल θ के लिए नमूना आकडा t से संबन्धित विश्वास अनतराल या विश्वास सीमाओं की गणना के उद्‌देश्य से निम्नलिखित चरण आपकों सक्षम बनाते हैं।

(1) उपयुक्त नमूना आंकडा t की गणना करें या लें।

(2) मानक त्रुटि t नमूना आंकडे की मानक त्रुटि t ज्ञात करें और

(3) विश्वास स्तर का चयन करें ओर समरूपी दर्शाये गये विश्वास स्तर का आंकडों t के समीक्षात्मक मान को लिखें।

2.6 अन्तराल आंकलन के अनुप्रयोग

अनतराल आंकलन (या विश्वास अन्तराल) से संबन्धित अनुप्रयोगों को निम्नलिखित शीर्षकों के अर्न्तगत अध्ययन करते हैं।

2.6.1 बडे नमूनों ($n \geq 30$) के लिए अन्तराल आंकलन (या विश्वास अन्तराल)

बडें नमूनों के लिए आकलन अंतराल को और आगे निम्नलिखित शीर्षकों के अर्न्तगत विभाजित किया जा सकता है।

- विश्वास अंतराल या समग्र माध्य के लिए सीमाऐं
- विश्वास अंतराल या समग्र अनुपात के लिए सीमाऐं
- विश्वास अंतराल या समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं
- μ या p के अनुमान हेतु उचित नमूना आकार का निर्धारण

(1) विश्वास अंतराल या समग्र माध्य μ के लिए सीमाऐं जब ($n \geq 30$)

बडें नमूने की स्थिति में **($n \geq 30$)** की सीमाओं के निर्धारण मे ंसामान्य वितरण के प्रयोग की आवश्यकता होती है।

(1) μ के लिए (1–∝) 100% विश्वास सीमाऐं $\bar{x} \pm Z_{á/2}.S.E_x$ से दी जाती है।

टिप्पणीयॉ या $\bar{x} \pm Z_{á/2}.\frac{ó}{\sqrt{n}}$ जहॉ σ ज्ञात है।

या $\bar{x} \pm Z_{á/2}.\frac{s}{\sqrt{n}}$ σ अज्ञात है। (बडे नमूनों के लिए, $\sigma = s$)

(2) μ के लिए $(1 - á)$ 100% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} - Z_{á/2}\frac{ó}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{á/2}.\frac{ó}{\sqrt{n}}$$ जहॉ σ ज्ञात है।

or $$\bar{x} - Z_{á/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < ì < \bar{x} + Z_{á/2}.\frac{s}{\sqrt{n}}$$ जहॉ σ अज्ञात है।

विशेष रूप से, μ के लिए 95% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 1.96\frac{ó}{\sqrt{n}}$$ [बडें नमूनों के लिए $ó = s$]

इसी तरह μ के लिए 99% विश्वास सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 2.58\frac{ó}{\sqrt{n}}$$

कार्य विधि : समग्र माध्य μ के लिए विश्वास अंतराल के निर्माण हेतु निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

(1) $\bar{x}$ की गणना करें या $\bar{x}$ लें।

(2) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए $S.E._{\bar{x}}$

(a) $S.E._{\bar{x}} = \frac{ó}{\sqrt{n}}$,जब σ ज्ञात है।

(b) $S.E._{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, जब σ अज्ञात है।

आप $z_{\propto/2}$ का मान ज्ञात करेंगे तो इसके लिए

(3) वांछित विश्वास अंतराल या समतुल्य विश्वास स्तर चयनित करें।

(4) उपरोक्त वर्णित सूत्र में of $\bar{x}, S.E._{\bar{x}}$ and $Z_{\propto/2}$ और $Z_{\propto/2}$ के मानो ंको प्रतिस्थापित करें।

टिप्पणीयॉः (1) यदि समग्र S.D. अज्ञात है तो नमूना S.D.(S) को बडें नमूनों में प्रयोग किया जाता है।

2) $z_{\propto/2}$ के मानों (बडें नमूनों के लिए) को विभिन्न विश्वास स्तर पर निम्नवत दिया जा रहा हैः

विश्वास स्तर (1-α) 100%	90%	95%	96%	98%	99%	बिना किसी संदर्भ के विश्वास स्तर
Z-Value	± 1.64	± 1.96	± 2.06	± 2.33	± 2.58	± 3

टिप्पणी : जहॉं विश्वास अन्तराल का संदर्भ नहीं दिया गया हो तो आपको $z_{\propto/2} = 3$ लेना चाहिए। यह मान 99.73% विश्वास स्तर के समतुल्य है।

उदाहरण 2.13 : 100 प्रेक्षणों का यादृच्छिक नमूना, नमूना माध्य $\bar{x}$ =150 और नमूना परिवर्तनशीलता $s^2 = 400$ देता है। समग्र माध्य के एिल 95 प्रतिशत और 99 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें।

हलः आपकों $n = 100, \bar{x} = 150, s^2 = 400 \Rightarrow s = 20$ दिया गया है।

$S.E._{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ (बडे नमूनों के लिए $\sigma = s$)

$$= \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$

95% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान $= 1.96$

99% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान $= 2.58$

(अ) μ के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 1.96\, S.E._x$$

मानों को रखने, आप प्राप्त करेंगें

$$150 \pm 1.96 \times 2 = 150 \pm 3.92 = 153.92 \; or \; 146.08$$

इस प्रकार $146.08 < \mu < 153.92$

(ब) μ के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

$$\bar{x} \pm 2.58\, S.E._{\bar{x}}$$
$$= 150 \pm 2.58 \times 2$$
$$= 150 \pm 5.16$$
$$= 155.16 \; or \; 144.84$$

इस प्रकार $144.84 < \mu < 155.16$

उदाहण 2.14 : एक इस्पात कारखाने में 900 श्रमिकों के यादृच्छिक नमूने मे ंऔसत आयु 67 इंच, 5 इंच के मानक विचलन के साथ देखी गई ।

(अ) इस्पात कारखाने के सभी श्रमिकों की औसत ऊँचाई को 95 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल अनुमान पर प्रमाणित करें।
(ब) इस्पात कारखाने के सभी श्रमिकों की औसत ऊँचाई को 99 प्रतिशत विश्वसनीयता अंतराल अनुमान पर प्रमाणित करें।

हल : आपको $: n = 900, \bar{x} = 67, s = 5$ दिया जा रहा है।

$\text{S.E.}(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{900}} = 0.167$ (बडे नमूनों के लिए, $s = ó$)

95% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान है $= 1.96$

99% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{á/2}$ का मान है $= 2.58$

(अ) μ का 99% विश्वसनीयता अंतराल

$$\bar{x} \pm 1.96, S.E._{\bar{x}}$$

मानो ंको रखने पर, आप

$$67 \pm 1.96 \times (0.167)$$

$= 67 \pm 0.327 = 67.327$ to 66.673 प्राप्त करेंगें।

इस प्रकार , $66.673 < \mu < 67.327$

(ब) μ का 99% विश्वसनीयता अंतराल

$$\bar{x} \pm 2.58. S.E._{\bar{x}}$$

मानों को रखने पर, आप

$$= 67 \pm 2.58\ (0.167)$$
$$= 67 \pm 0.43$$
$$= 67.43\ to\ 66.57 \text{ प्राप्त करेंगें।}$$

इस तरह $66.57 < \mu < 67.43$

2. समग्र अनुपात p के लिए विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

यद्यपि नमूना वितरण अनुपातों के साथ द्विपद वितरण से संबंधित है लकिन, सामान्य वितरण निकटता का प्रयोग किया जा सकता है बर्शतें नमूना बडा है (जैसे $n \geq 30$) और np और $nq > 5$ (जब n नमूने का आकार है , p सफलता का अनुपात है और $q = 1 - p$)

(1) P के लिए $(1 - á)\ 100\%$ विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm Z_{á/2}. S.E.(p)$$

या $p \pm Z_{á/2}.\sqrt{\frac{PQ}{n}}$ जब P ज्ञात है।

या $p \pm Z_{á/2}.\sqrt{\frac{pq}{n}}$ जब P अज्ञात है।

दी जा रही है।

(2) P के लिए $(1-\acute{a})\ 100\%$ विश्वसनीयता अंतराल

$$p - Z_{\acute{a}/2}.\sqrt{\frac{pq}{n}} < P < p + Z_{\acute{a}/2}.\sqrt{\frac{pq}{n}}$$ दी जा रही है।

P के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 1.96.\sqrt{\frac{pq}{n}}$$ है।

P के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 2.58.\sqrt{\frac{pq}{n}}$$ है।

कार्यविधि :– समग्र अनुपात के विश्वसनीयता सीमाऐं या अंतराल के लिए निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण शामिल है।:–

(1) p की गणना करें या लें

(2) S.E.(p) की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा करें

$$S.E.(p) = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$ जब θ ज्ञात है।

$$S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ जब P अज्ञात हैं।

(3) आप $z_{\propto/2}$ का मान ज्ञात करेंगे तो इसके लिए वांछित विश्वसनीयता अंतराल या समतुल्य विश्वसनीयता स्तर चयनित करें।

(4) उपरोक्त वर्णित सूत्र में $p,\ S.E.(p)$ एवं $Z_{\propto/2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करें।

टिप्पणी :–

1) यदि समग्र अनुपात p अज्ञात है, तो बडे नमूनों मे ंनमूना अनुपात p का प्रयोग किया जाता है।

2) जब विश्वास अन्तराल का संदर्भ नहीं दिया गया है तो हमेशा 99.73% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z_{\propto/2} = 3$ लें।

उदाहरण 2.15 : एक सिक्के को 1200 बार उछालने पर, इसमें से 480 चित् और 720 पट निकले।

चित्तों के लिए 95% पर पर विश्वासनीयता अंतरात ज्ञात करें।

हलः आपको n=1200 , कुल चिट (np)=480 दिये गए है।

$p =$ चित्तों का नमूना अनुपात $\frac{480}{1200}$ =0.4

टिप्पणीयॉ चित्तों का समग्र अनुपात भी $= p = 0.50$

$$q = 1 - p = 1 - 0.50 = 0.50$$

$$S.E(p) = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$ (बडे नमूनों के लिए $q = p$)

$$= \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{1200}} = 0.0144$$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z_{\propto/2}$ का मान $= 1.96$

P के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल :

$p \pm 1.96\, S.E._p$ दिया जा रहा है।

इन मानों को उक्त में रखने पर

$$= 0.4 \pm 1.96 \times 0.0144$$
$$= 0.4 \pm 0.028$$
$$= 0.372\ to\ 0.428$$ प्राप्त करेंगें

इस प्रकार, $0.372 < P < 0.428$

उदाहरण 2.16 : एक बडें प्रेषित माल से 600 अन्नानासों का एक यादृच्छिक नमूना लिया गया था। उनमें 75 खराब पाये गये थे। प्रेषित माल में खराब अन्नानासों के अनुपात का आंकलन करें औश्र अनुमान की मानक त्रुटि बताऐं।

सीमाओं के भीतर जो प्रेषित माल में इक्कठे हुए खराब अन्नानासों के प्रतिशत का निर्धारण करें।

हल :

आपकों n=600, खराब अन्नानासों की संख्या (np)=75 दी गई है।

नमूना अनुपात

$$p = \frac{75}{600} = 0.125 = 12.5\%$$
$$q = 1 - 0.125 = 0.875$$
$$S.E._{(p)} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.125 \times 0.875}{600}} = 0.013$$

(P अज्ञात है।)

क्योंकि विश्वसनीयता स्तर वर्णित नहीं किया गया है तो आप इसके 99.73% विश्वसनीयता स्तर पर $Z_{\propto/2}$ का मान = 3

P के लिए 99.73% विश्वसनीयता सीमाऐं $p \pm 3 \times S.E._{\bar{x}}$ दी जा रही है।

उक्त में मानों को रखने पर, आप

$$= 0.125 \pm 3 \times 0.013$$
$$= 0.125 \pm 0.039$$
$$= 0.164 \pm 0.086$$ से प्राप्त करेंगें।

अतः आवश्यक प्रतिशत 16.4% और 8.6% के (मध्य) बीच है।

जब नमूनें को बिना प्रतिस्थापना के परिमित समग्र से निकाला जाता है, तो समग्र अनुपात p का विश्वसनीयता अनतराल या सीमाऐं :

इस घटना में $(1-\propto)100\%$ विश्वसनीयता अनतराल या सीमाऐं निम्नसूत्र से दी जाती है।,

$$p \pm Z_{\propto/2}.\sqrt{\frac{pq}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

जहॉ, $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} =$ परिमित समग्र शुद्धि गुणक है।

टिप्पणी : यदि N नमूना आकार n की तुलना में र्प्याप्त रूप से बडा है तो परिमित समग्र के शुद्धि गुणक को उपेक्षित किया जा सकता है।

उदाहरण 2.17 : 2,000 ग्राहकों के बहीखातों में से 600 नमूनों को प्रविश्टि एवं संतुलन की शुद्धता के परीक्षण के लिए लिया गया था जिसमें 45 गलतियॉ पायी गई थी । सीमाओं के भतर जिसमें त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या की अपेक्षा 95% स्तर पर की जा सकती है, निर्धारित करें।

हल : आपकों n = 600, N = 20,000 ,नमूना बहीखाते में गलतियों की संख्या (np)=45 दी गई है।

नमूना अनुपात $p = \frac{(np)}{n} = \frac{45}{600} = 0.075$

$$q = 1 - p = 1 - 0.075 = 0.925$$

क्योंकि N नमूना आकार n की तुलना में पर्याप्त रूप से बडा है, तो परिमित समग्र शुद्धि गुणक $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ को उपेक्षित किया जा सकता है।

अतः इसे परिमित (बडा) समग्र का एक नमूना समझे, p की मानक त्रुटि

$S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ द्वारा दी जा रही है।

टिप्पणीयॉ $= \sqrt{\frac{0.075 \times 0.928}{600}} = \sqrt{0.0001156} = 0.011$ (लगभग)

95% विश्वसनीयता स्तर पर $z\propto/_2$ का मान =1.96

समग्र p के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाओं को $p \pm 1.96\, S.E._{\bar{x}}$ द्वारा दिया जा रहा है। इन मानों को रखने पर, आप

$$= 0.075 \pm 1.96 \times 0.011$$
$$= 0.075 \pm 0.022 = (0.053, 0.097)$$

प्राप्त करते हैं।

अतः 2,000 समूह के त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या के घटित होने की अपेक्षा 20,000 x 0. 053 और 20,000 x 0.095 के मध्य है या 1060 और 1940 ।

टिप्पणी : यदि परिमित शुद्धि गुणक को उपेक्षित नहीं किया जाता है तब p की 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$p \pm 1.96.\sqrt{\frac{pq}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ है}$$

$$= 0.075 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.075 \times 0.925}{600}} \times \sqrt{\frac{20{,}000 - 600}{20{,}000 - 1}}$$

$$= 0.075 \pm 1.96 \times 0.0108$$

$$= 0.075 \pm 0.021168$$

$$= (0.0538, 0.096168)$$

अतः समूह में आवश्यक त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या 20,000 x 0.0538 और 20,000 x 0.096168 या 1076 और 1924 के मध्य होगी।

(3) समग्रों के मानक विचलन की विश्वसनीयता अन्तराल या सीमाऐं

समग्र के मानक क्विलन σ का विश्वसनीयता स्तर निर्धारण में मानक वितरण का प्रयोग आवश्यक है जब नमूना बडा $(n \geq 30)$ होता है।

(i) σ के लिए $(1 - \text{á})\ 100\%$ विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm Z_{\propto/2}.S.E._s$$

या

$$s \pm Z_{\propto/2}.\frac{\text{ó}}{\sqrt{2n}} \qquad \text{जब } \sigma \text{ ज्ञात है।}$$

या

$$s \pm Z_{\propto/2}.\frac{s}{\sqrt{2n}} \qquad \text{जब } \sigma \text{ अज्ञात है।}$$

(ii) σ के लिए $(1 - \text{á})\ 100\%$ विश्वसनीयता अन्तराल

$$s - Z_{\propto/2}.\frac{s}{\sqrt{2n}} < \sigma < s + Z_{\propto/2}.\frac{s}{\sqrt{2n}}$$

σ के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm 1.96\ .\frac{s}{\sqrt{2n}} \ \text{[बडे नमूने के लिए } s = \sigma\text{] है।}$$

σ के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं

$$s \pm 2.5 \pm \frac{s}{\sqrt{2n}} \text{ है।}$$

कार्य विधि : σ के विश्वसनीयता सीमाओं के निर्माण मे ंनिम्नलिखित चरण शामिल हैं:

(i) S की गणना करें या s लें।

(ii) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए S.E.(s) की गणना करें

$$S.E.(S) = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \text{ या } S.E.(S) = \frac{s}{\sqrt{2n}}$$

(iii) वांछित विश्वसनीयता स्तर चयनित करें और $z\propto/_2$ के समतुल्य विश्वसनीयता स्तर का मान ।

(iv) उपरोक्त वर्णित सूत्र में $s, z\propto/_2$ और n के मानों को प्रतिस्थापित करें।

(4) μ या p के आंकलन हेतु नमूने आकार का निर्धारण

ज्ञात नमूना आकार के लिए मान्यताओं के आधार पर आपने विश्वसनीयता अन्तरालों की गणना की है। अब आप जब नमूना आकार अज्ञात है, विश्वसनीयता स्तर की गणना करने में निपुण होंगें।

समग्र माध्य के आंकलन के लिए नमूना आकार :

समग्र माध्य आंकलन के लिए, नमूने आकार के निर्धारण हेतु निम्नलिखित तीन कारक ज्ञात होने चाहिए।

टिप्पणीयॉ :

I. वांछित विश्वसनीयता स्तर और Z का समतुल्य मान ।

II. अनुज्ञेय नमूना त्रुटि E

III. σ का मानक विचलन या σ का एक अनुमान (जैसे $\bar{s}$)

उपरोक्त कारकों को जानने के बाद , नमूना आकार n निम्नवत द्वारा दिया जाता है।

$$n = \left(\frac{Z.\sigma}{E}\right)^2$$

टिप्पणी :

(1) Z और E के मान पूर्वनिश्चित होते हैं।

(2) समग्र का मानक विचलन (S.D) व वास्तविक या अनुमानित हो सकता है।

उदाहरण 2.18 : एक सिगरेट उत्पादक (निर्माता), यादृच्छिक नमूनू का प्रयोग कर औसत, सम्बाकू यात्रा का अनुमान लगाना चाहता है। नमूने में त्रुटि 99 प्रतिशत विश्वसनीयता स्तर पर सच्चे माध्य की तुलना में एक मिलीग्राम से कम या ज्यादा नहीं होनी चाहिए। समग्र मानक विचलन 4 मिलीग्राम है। इन आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए कम्पनी को कितने नमूने आकार का प्रयोग करना चाहिए।

हलः आपको E=1 99% विश्वसनीयता स्तर पर $z\propto/_2$= 2.58 और $\sigma = 4$ दिया गया है। नमूना आकार सूत्र $n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2}$ है।

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करेंगे।

$$n = \frac{(2.58)^2\ (4)^2}{1^2} = 106.50\ or\ 107$$

अतः कम्पनी की अवश्यकताओं की पूर्ति के लिए आवश्यक नमूना आकार n=107 होना चाहिए।

(ब) समग्र अनुपात के आंकलन के लिए नमूना आकार :

समग्र अनुपात का अनुमान ज्ञात करने के लिए नमूना आकार हेतु निम्नलिखित तीन कारक ज्ञात होने चाहिए।

1) वांछित विश्वसनीयता स्तर और = का समतुल्य मान ।

2) अनुज्ञेय नमूना त्रुटि E ।

3) सफलता p का वास्तविक या अनुमानित सच्चा अनुपात ।

नमूना आकार $n = \frac{Z^2 \times PQ}{E^2}$ जहाँ , $Q = 1 - P$ से दिया जाता है।

टिप्पणी :

1. Z और E के मान पूर्वनिश्चित हैं।

2. समग्र अनुपात p का मान वास्तवकि या अनुमानित हो सकता है।

उदाहरण : 2.19 : एक व्यवसाय अधिकतम मान्य त्रुटि 0.5 के साथ और 98 प्रतिशत विश्वसनीयता स्तर पर उपभोक्ताओं के अनुपात को, जो इनके उत्पादों को पसंद करते हैं, को ज्ञात करना चाहता हें यदि प्रारम्भिक बिक्री सूचनाऐं दर्शाते हैं कि सभी उपभोक्ताओं में से 25 प्रतिशत व्यवसाय उत्पाद को पसंद करते हैं तो कितने बडे नमूने की आवश्यकता होगी

हलः आपको दिया गया हैः

$$E = 0.05, P = 0.25, Q = 1 - 0.25 = 0.75,$$

98% विश्वसनीयता स्तर के लिए $Z = 2.33$

नमूना आकार सूत्र

$$n = \frac{Z^2 \times PQ}{E^2}$$

इन मानों को उक्त सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर आप प्राप्त करेंगें।

$$n = \frac{(2.33)^2}{(0.05)^2}\ (0.25)(0.75)$$

$$= \frac{5.4289}{0.0025}\ (0.1875) = \frac{1.0179}{0.0025} = 407.16\ or\ 408$$

अतः आवश्यक नमूना आकार $n = 408$ होगा ।

2.6.2 छोटे नमूनों (n<30) के लिए अन्तराल

छोटे आकार के नमूनों (n<30) की स्थिति में विश्वसनीयता स्तरों का निर्धारण का अध्ययन दो शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता है।

(1) समग्र माध्य (n<30) के लिए विश्वसनीयता स्तर या सीमाऐं :

जब नमूनो ंका आकार छोटा (जैसे n<30) और σ (समग्र मानक विचलन) अज्ञात हैं तो समग्र माध्य μ के लिए वांछित विश्वसनीयता स्तर या सीमाऐं को t - वितरण का

प्रयोग कर प्राप्त किया जा सकता है। छोटे नमूनों की स्थिति में Z मानों के वदले में t मानों का प्रयोग करते हैं।

i. समग्र माध्य के लिए $(1-\propto)$ 100% विश्वसनीय अन्तराल के द्वारा दी जाती है: $\bar{x} \pm t_{á/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$ जहॉ , $\hat{s}$ = परिवर्तित नमूना $S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}}$ $or\ \hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s^2$

ii. μ के लिए $(1-á)$ 100% विश्वसनीय अन्तराल के द्वारा दी जाती है:

$$\bar{x} \pm t_{\propto/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < ì < \bar{x} \pm t_{\propto/2}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

μ के लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दिया जाता है।

$$\bar{x} \pm t_{0.025}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

μ के लिए 99% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दिया जाता है।

$$\bar{x} \pm t_{0.005}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

कार्य विधि : छोटे नमूनों (n<30) की स्थिति में विश्वसनीयता अंतराल या सीमाओं के निर्माण में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

i. $\bar{x}$ की गणना करें या $\bar{x}.$ लें।

ii. निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए परिवर्तित नमूने वितरण की गणना करें

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}.s^2}$$ जब, s दिया गया हो।

iii. d.o.f = v = n-1 सूत्र का प्रयोग करते हुए degree of freedom की गणना करें।

iv. दिये गये degrees of freedom के लिए वांछित विश्वसनीयता स्तर और दर्शायी गई समतुल्य विश्वसनीयता स्तर को चयनित करें। आपको $t_{\propto/2}$ का मान t तालिका से देखना चाहिए।

v. उपरोक्त वर्णित सूत्र में $\bar{x}, \hat{s}$ और $t_{\propto/2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करें।

उदाहरण 2.20 : 16 आकार के यादृच्छिक नमूनों का मानक विचलन 3 के साथ माध्य 50 है। 98 प्रतिशत विश्वसनीयता सीमाओं पर समग्र का माध्य प्रापत करें।

हलः आपको दिया गया है : $n = 16, \bar{x} = 50, s = 3 \Rightarrow s^2 = 9$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}.s^2} = \sqrt{\frac{16}{16-1} \times 9} = 3.098$$

Degrees of freedom $= v = n = 16 - 1 = 15$

98% विश्वसनीयता स्तर पर $\propto = 0.02$ *so that* $\frac{\propto}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$

t तालिका का प्रयोग करते हुए 15d.f के लिए $t_{0.01} = 2.602$

μ के लिए 98% विश्वसनीयता सीमाऐं के द्वारा दी जाती है

$$\bar{x} \pm t_{.01}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

इन मानों को उक्त सूत्र में रखने पर, आप प्राप्त करेंगें

$$= 50 \pm 2.602 \times \frac{3.098}{\sqrt{16}}$$

$$= 50 \pm 2.015$$

$$= 52.015 \text{ to } 47.985$$

उदाहरण 2.21 : सामान्य वितरण से एक 16 नमूनों का सादृच्छिक नमूना जिसका माध्य 53 और माध्य से विचलनो के वर्गों का योग 150 के बराबर , को दर्शाया गया है। समग्र के माध्य के लिए 95% और 99% विश्वसनीयता सीमाऐं प्रापत करे।

हल : आपको दिया जा रहा हैः

$$n = 16, \bar{x} = 53, \sum(x - x)^2 = 150$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$= \frac{150}{16-1} = \sqrt{\frac{150}{15}} = \sqrt{10} = 3.162$$

Degrees of freedom $= v = n - 1 = 16 - 1 = 15$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए $\propto = 0.05$

इसलिए $\frac{\propto}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

99% विश्वसनीयता स्तर के लिए $\propto = 0.01$

इसलिए $\frac{\propto}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$

15 d.f. के लिए $t_{0.025}$ का तालिका मान = 2.131

15 d.f. के लिए $t_{0.025}$ का तालिका मान = 2.947

(अ) समग्र माध्य μ के लिए 95ः विश्वसनीयता सीमाए हैंः

$$\bar{X} \pm t_{0.025}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करेंगें

$$= 53 \pm 2.31 \times \frac{3.162}{\sqrt{16}}$$
$$= 53 \pm 2.131 \times \frac{3.162}{4}$$
$$= 53 \pm 1.684$$
$$= 51.316\ to\ 54.684$$

इस प्रकार, $51.316 < ì < 54.684$

इस प्रकार $51.316 < \mu < 54.684$

(ब) समग्र माध्य μ के लिऐं 99% विश्वसनीयता सीमाए

$$\bar{x} \pm t_{0.005}.\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

मानों को रखने पर, आप प्राप्त करते हैं

$$= 53 \pm 2.947 \times \frac{3.162}{\sqrt{16}}$$
$$= 53 \pm 2.947 \times \frac{3.162}{4}$$
$$= 53 \pm 2.947 \times 0.7905$$
$$= 53 \pm 2.33$$
$$= 55.33\ and\ 50.67$$

इस प्रकार, $50.67 < \mu < 55.33.$

(2) समग्र परिवर्तनशीलता के लिए (जब n<30) विश्वसनीयता अंतराल या सीमाऐं

समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के विश्वसनीयता स्तर या सीमाओं के निर्धारण में x^2 (काई वर्ग) वितरण का प्रयोग आवश्यक है। यहॉ पर x^2 मानों का प्रयोग t मानों के बदले में होता है।

समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के $(1- \propto)\ 100\%$ विश्वसनीयता अन्तराल द्वारा दिया जाता हे।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{\propto/2}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{1-\propto/2}}$$

विशेष रूप से , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल है।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.025}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.975}}$$

इसी तरह , समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल है।

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.005}} < ó^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.995}}$$

कार्य विधि : परिवर्तनशीलता σ^2 के विश्वसनीयता स्तर के निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण शामिल हैं:

(1) सूत्र का प्रयोग करते हुए परिवर्तित नमूना परिवर्तनशीलता की गणना करें।

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \; \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

(2) वांछित विश्वसनीयता स्तर एवं दर्शायी गई समतुल्य विश्वसनीयता स्तर को चयनित करें , आपको विश्वसनीयता गुणांक $x^2_{\propto/2}$ और $x^2_{1-\propto/2}$ के मानों को निश्चित degree of freedom पर x^2 तालिका से लिखना चाहिए।

(3) $\hat{s}^2, x^2_{\propto/2}$ और $x \div^2_{1-\propto/2}$ को उपरोक्त वर्णित सूत्र में रखते हुए σ^2 के लिए विश्वसनीयता अंतराल को निर्मित करें।

उदाहरण 2.22 : आकार 15 के एक यादृच्छिक नमूने जिसका मानक विचलन s=2.5 है को सामान्य समग्र से चयनित किया जाता है। परिवर्तनशीलता σ^2 और मानक विचलन σ के लिए 95% विश्वसनीयता स्तर निर्मित कीजिए।

हल : आपको दिया जा रहा है:

$$n = 15, s = 2.5 \Longrightarrow s^2 = 6.25$$

$$\hat{s}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) s^2$$

$$= \frac{15}{15-1} \times 6.25 = 6.696$$

95% विश्वसनीयता स्तर के लिए

$\propto = 0.05$ so $\frac{\propto}{2} = 0.025$ and $1-\propto = 1 - 0.025 = 0.975.$

Degrees of freedom $(v) = n - 1 = 15 - 1 = 14$

$14\ d.f.$ के लिए $x^2_{0.025}$ का तालिका मान $= 26.1$

$14\ d.f.$ के लिए $x^2_{0.0975}$ का तालिका मान $= 5.63$

(अ) σ^2 के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल है

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.025}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{x^2_{0.975}}$$

मानों को रखने पर, आप प्राप्त करेंगें।

$$\frac{(15-1)\times 6.696}{26.1} < \sigma^2 < \frac{(15-1)\times 6.696}{5.63}$$

or $3.59 < \sigma^2 < 16.65$

(ब) σ के लिए 95% विश्वसनीयता अन्तराल है :

$$\sqrt{3.59} < \sigma < \sqrt{16.65}$$

या $$1.89 < \sigma < 4.08$$

2.7 सारांश

कभी कभी समग्र के बारे में आप किसी तरह का निष्कर्ष निकालने मे ंअसमर्थ रहेते हैं या सांख्यिकी पदों में समग्र परिणाम क्या है को प्रकट करने में आप असमर्थ हैं। उन परिस्थितियों में, नमूना ऑकडों के आधार पर समग्र प्राचल के बारे में अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है। इसे आंकलन का सिद्धान्त कहा जाता है। समग्र प्राचल के आंकलन के लिए नमूना ऑकडों का प्रयोग कियाजाता है और इस प्रकार के आंकलनों में निष्पक्ष, अनुरूप, सक्षम और यथेष्ट तरह के विशिष्ट लक्षण होने चाहिए।

2.8 शब्दावली

आगणक: समग्र प्राचलों का अनुमान लगाने के लिए आप विभिन्न नमूना आंकडों का प्रयोग करते हैं जो नमूना ऑकडे जैसे नमूना माध्य $\bar{x}$, नमूना माध्यिका m, नमूना परिवर्तनशीलता S^2 इत्यादि जो अज्ञात समग्र प्राचलों जैसे समग्र माध्य μ, समग्र परिवर्तनशीलता σ^2 आदि का अनुमान लगाते हैं, उन्हें आगणक कहा जाता है

2.9 बोध प्रश्न

रिक्त स्थान भरें

1. ऑकडों का एक एकल मान जिसे अज्ञात समग्र प्राचल के अनुमान के लिए प्रयोग किया जाता है उसे ....अनुमान कहते हैं।
2. जब अज्ञात समग्र से एक एकल स्वतन्त्र यादृच्छिक नमूना निकालते हैं तो उसे ....नमूना कहते है।

2.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. तथ्य 2. एकल

2.11 स्वपरख प्रश्न

1) समूहों के नमूने की मापें 8.3, 10.6, 9.7 , 8.8., 10.2 और 9.4 किलोग्राम ज्ञात की गई थी।
   (अ) समग्र माध्य
   (ब) समग्र परिवर्तनशीलता
   (स) नमूना मानक विचलन अनुमानित समग्र मानक विचलन की तुलना निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमानो से निर्धारित करें।

(2) 9 व्यक्तियों के एक यादृच्छिक नमूने में उनकी ऊॅचाईयॉ 45, 47, 50, 52, 48, 47, 49, 53 और 51 इंच हैं।
   (अ) सच्चा माध्य
   (ब) सच्ची परिवर्तनशीलता का निष्पक्ष एवं सक्षम अनुमान ज्ञात करें।

(3) एक कम्पनी द्वारा उत्पादित 10 टेलीविजन ट्यूबों के नमूनों ने औसत जीवन 1200 घंटे और 10 घंटे का मानक विचलन दर्शाया।

(अ) समग्र माध्य

(ब) समग्र परिवर्तनशीलता के निष्पक्षएवं सक्षम अनुमानों को ज्ञात करें।

(4) 144 प्रेक्षणों के एक यादृच्छिक नमूने का नमूना माध्य $\bar{x} = 160$ और नमूना परिवर्तनशीलता $s^2 = 100$ देता हे। समग्र माध्य के एिल 95$\%$ में विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें।

(5) 64 खेती क्षेत्रों के एक यादृच्छिक में नमूने से, 12 के मानक विचलन के साथ 45 हेक्टेएर का माध्‍ खेत्र पाया जाता है। माध्य क्षेत्र क लिए 95% और 99% पर विश्वसनीयता सीमाऐं क्या है ।

(6) 100 खेती क्षेत्रों के एक यादृच्दिक में नमूने से 50 के मानक विचलन के साथ 250 हेक्टेएर का माध्य क्षेत्र पाया गया। माध्य क्षे0 के 99% विश्वसनीयता अंतराल की गणना करें। विश्वसनीयता अंतराल की चौडाई को कैसे परिवर्तित किया जाता है यदि नमूने के आकार को 400 तक बढाया था।

(7) एक शहर के 300 परिवारों के यादृच्छिक नमूने ने दिखाया कि इन परिववारों मे ंसे 123 के पास धार्मिक पुस्तक रामायण थी। रामायण के साथ शहर के परिवारों के अनुपात के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल ज्ञात करें।

(8) एक शहर में 500 घरों के एक यादृच्छिक नमूने ने यह प्रकट किया था कि इनमें से 125 घरों के पास रंगीन TV Set थे। रंगीन TV के साथ शहर के घरों के लिए 98% विश्वसनीयता स्तर ज्ञात करें। (98% विश्वसनीयता स्तर के लिए Z का तालिक मान 2.33 हैं)

(9) एक नगर में, एक नए उत्पाद को प्रारम्भ करने के लिए 400 लोगों का एक नमूना बाजार सर्वेक्षण हेतु लिया गया था। जब उनसे बिक्री के लिए चर्चा की गई थी, उनमें से 80 लोगों ने उत्पाद खरीदा। नगर में जिन्होंने उत्पाद खरीदा होगा उनके लिए 95% विश्वसनीयता सीमाऐं ज्ञात करें।

(10) 10,000 ग्राहकों के बही खातों में से 400 नमूना बही खातों को उनकी प्रविष्टियों एवं संतुलन की शुद्धता को ऑकडे के लिए चयनित किया गया था। उसमें 40 गलतियॉ शामिल थी। सीमाओं का निर्धारण करें जिनके भीतर इन त्रुटिपूर्ण नमूनों की संख्या को 95% के विश्वसनीयता स्तर की अपेक्षा की जा सके।

(11) 100 मदों का एक नमूना 25 का मानक विचलन देता है। 95% विश्वसनीयता स्तर पर समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं तैयार करें।

(12) 100 मदों का एक नमूना 4700 का मानक विचलन देता है। 99% विश्वसनीयता स्तर पर समग्र मानक विचलन के लिए सीमाऐं तैयार करें।

(13) एक व्यवसाय 0.03 से अधिक की नहीं त्रुटि के साथ और उपभोक्ताओं के अनुपात के लिए 98% विश्वसनीयता स्तर जो घरेलू डिटरजेंट ब्रान्ड का पसंद करते हैं, का आंकलन करनाचाहता है। बिक्री परिणाम संकेत करते हैं

कि सभी उपभोक्ताओं में से लगभग 0.2. इस व्यवसाय के ब्रांड को पसंद करते हैं। आवश्यक नमूना आकार क्या है।

(14) मिस्टर X एक निश्चित कार्य को औसत समय में पूर्ण करने का निश्चय करता है। पिछले लिखित प्रमाण प्रदर्शित करते हैं कि समग्र मानक चिलन 10 दिन हे। नमूने आकार का निर्धारण करें यदि मिस्टर X 95% विश्वस्त है कि नमूना औसत , औसत से = 2 दिन रह सकता है।

(15) प्रभाव समय नापने के लिए, एक मनोंचिकित्सक 0.05 सेकण्ड के मानक विचलन का आंकलन करता है। मापने के लिए कितना बडा नमूना लेना चाहिए कि 95% विश्वसनीयता पर उसके आंकलन की त्रुटि 0.01 सेकेण्ड से अधिक की नहीं होगी।

(16) एक निश्चित ब्रान्ड के 9 सिगरटों का एक नमूने के एिल प्रेक्षण किया गया था। इसमें देखा गया कि 25 मिलीग्राम औसत तम्बाकू औसत मानक विचलन 2.8 मिलीग्राम है। इस विशेष ब्रान्ड के सिगरटों का सही औसत के लिए 99% विश्वसनीयता अंतराल निर्मित करें।

(17) एक वस्ती से 15 औरतों का एक यादृच्छिक नमूना उनके द्वारा अंगराज में मासिक 2 खर्च रू0 120 को रू0 40 के मानक विचलन के साथ दर्शाता है। वस्ती की औरतों द्वारा अंगराज मे ंसही औसत मासिक व्यय के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल को निर्मित करें।

(18) 5 व्यक्तियों की ऊॅचाईयों (इंच में) का एक नमूना निम्नवत था 63.3, 63.7, 63,6, 63,2 और 3.8 95ः समग्र परिवर्तनशीलता के लिए विश्वसनीयता अनतराल निर्मित करें।

1. [(a) 9.5, (b) 0.736 and (c) $\hat{s}$=σ=0.86, s=0.78]
2. [(a) 49.11 and (b) 6.91]
3. [(a) μ=1200 hrs. and (b) $\hat{s}^2$=111.11]
4. [$158.37 < \mu < 161.03$]
5. [(a) 47.94, 42.06, (b) 48.87, 41.63]
6. [(a) $237.1 < \mu < 262.9$(b) reduced to half]
7. [$0.355 < P < 0.465$]
8. [$0.205 < P < 0.295$]
9. [0.1608, 0.2392]
10. [(a) $0.071 < P < 0.129$ (b) $710 < x < 1290$]
11. [21.55, 28.46]
12. [5032.4, 4367.60]
13. [$n = 965$]
14. [$n = 96$]
15. [$n = 96$]
16. [$21.67 < \mu < 28.33$]
17. [$97.01 < \mu < 142.99$]
18. [$0.0240<\sigma<0.5537$]

2.12 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 3 प्रायिकता के दृष्टिकोण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- यादृच्छिक प्रयोग के अर्थ की व्याख्या कर सकें।
- यादृच्छिक प्रयोग में संभावना के महत्व का वर्णन कर सकें।
- एक घटना के लिए प्रतिदर्श समष्टि की व्याख्या कर सकें।
- विभिन्न प्रकार की घटनाओं जैसे पारस्परिक अपवर्जी, सांप्रदायिक घटनाएं, सर्वांगपूर्ण, स्वतंत्र और आश्रित घटनाओं में अंतर कर सकें।
- एक घटना के घटित होने की प्रायिकता और क्रमचय तथा संचय की सहायता से प्रायिकता प्रश्नों का हल कर सकें।

3.1 प्रस्तावना

रोजमर्रा की जिन्दगी में आप देखते हैं कि क्रिकेट मैच शुरू होने के पहले दोनों कप्तान सिक्का उछालते हैं। सिक्का उछालना एक प्रक्रिया है और चित या पट आना दो संभावित निष्कर्ष है। यह मानते हुए कि सिक्का खड़ा न गिरे। यदि आप एक पासा फेंकते ह। तो संभावित निष्कर्ष 1,2,3,4,5,6 में से कोई भी हो सकता है। एक प्रक्रिया जो परिणाम या निष्कर्ष दे उसे प्रयोग (Experiment) कहते हैं। सामान्यतः एक प्रयोग में का निष्कर्ष संभावित निष्कर्षों में से कोई एक होता है तथा यह संयोग की बात है कि प्रयोग करते समय कौन सा निष्कर्ष आयेगा। इस अध्याय में आप विभिन्न प्रयोग और उनके निष्कर्षों के बारे में पढ़ेंगे।

आपने आज बारिश हो सकती है या ''भारत यह मैच जीत सकता है'' या ''मैं इस पद के लिए चुना जा सकता हूँ'' अवसर इस प्रकार के वाक्यों का प्रयोग किया होगा। इस प्रकार के वाक्यों में अनिश्चितता का अंश है। आप इस अनिश्चितता को कैसे मापेंगे? गणित की एक शाखा जिसे प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability)

कहते हैं। इस प्रकार की अनिश्चितता को मापती है। किसी घटना घटित होने की अनिश्चितता का परिणाम मापने के लिए प्रायिकता सिद्धान्त का निर्माण किया गया है। प्रायिकता शब्द का कोषिक अर्थ है ''संभावित परन्तु अनिश्चित''। अतः जब एक सिक्के को उछालते हैं, चित आ सकता है परन्तु आता नहीं है। उसी प्रकार जब एक पासा को फेंकते है तो 6 आ सकता है या नहीं आ सकता।

3.2 यादृच्छिक प्रयोग

निम्नलिखित गतिविधियों पर ध्यान दें–

1. एक सिक्के को उछालें और निष्कर्ष को नोट करें। यहाँ पर दो संभावित निष्कर्ष हैं एक चित या पट।
2. एक पासा (fair die) को फेंकने पर 6 संभावित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं जो हैं 1,2,3,4,5,6 पासों का जो तल पर उपर होता है उसे परिणाम कहते हैं।
3. दो सिक्कों को एक साथ उछालें तथा संभावित निष्कर्षों को लिखें। यहाँ पर चार निम्नलिखित निष्कर्ष संभव हैं, HH, HT, TH, TT।
4. दो पासों को फेंके निम्नलिखित 36 संभावित निष्कर्ष प्राप्त होंगे–

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

उपर्युक्त प्रत्येक गतिविधि निम्नलिखित दो शर्तों को पूरा करती हैः

क. गतिविधि को एक ही जैसी परिस्थिति में कई बार दोहराया जा सकता है।

ख. चूँकि सभी संभावित निष्कर्षों के चुने जाने की संभावना बराबर हैं इसलिए किसी भी गतिविधि का निष्कर्ष पहले से नहीं बताया जा सकता है। अतः एक गतिविधि जो–

1. एक जैसी परिस्थिति में दोहराया जाए, तथा
2. जिसका निष्कर्ष पहले से न बताया जा सके को एक यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।

उदाहरण 3.1 : क्या अच्छी तरह से फेटे हुए ताश के पत्तों में से एक पत्ता निकालना एक यादृच्छिक प्रयोग है?

हल : क. चँकि एक पत्ता निकालने से पहले ताश के पत्तों की गड्डी को अच्छी तरह फेंटा जा सकता है,

अतः इस प्रक्रिया को कई बार दोहराया जा सकता है।

ख. 52 पत्तों मे से कोई भी पत्ता निकाला जा सकता है। अतः निष्कर्ष को पहले से नहीं बताया जा सकता।

अतः यह प्रक्रिया एक यादृच्छिक प्रयोग है।

उदाहरण 3.2 : सिद्ध करें 00 कुर्सियों में से एक कुर्सी चुनना एक यादृच्छिक प्रयोग है।

हल : क. इस प्रयोग को एक समान परिस्थितियों में दोहराया जा सकता है।
ख. हर कुर्सी के चुने जाने की संभावना बराबर है।

अतः निष्कर्ष पूर्व निर्धारित नहीं है। इसलिए यह एक यादृच्छिक प्रयोग है।

क्या आप इस प्रकार की अन्य गतिविधियों के बारे में सोच सकते हैं जहाँ संभावना प्रकृति है।

आइए अब कुछ क्रियाओं की चर्चा करें जो कि यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

1. अवनि का जन्मः चँकि किसी व्यक्ति के जन्म की प्रक्रिया दोहरायी नहीं जा सकती अतः यह एक यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

2. कैलकुलेटर पर 4 तथा 8 का गुणा करना : चँकि कैलकुलेटर पर इस प्रक्रिया को कई बार दोहराया जा सकता है परन्तु परिणाम हमेशा 32 हो जायेगा। अतः यह यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

3.3 प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)

जब एक पासा फेंकते है तो संभावित निष्कर्ष क्या हो सकते हैं? पासा फेंकने पर निश्चित रूप से कोई एक भाग (हिस्सा) सबसे उपरी सतह पर होगा। अतः प्रत्येक सतह पर लिखा हुआ अंक (number; 1-c) ही संभावित निष्कर्ष है।

सभी संभावित निष्कर्षों का समुच्चय (Set) S इस प्रकार से लिख सकते हैं–

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

इसी प्रकार जब एक सिक्के को उछालते हैं तो संभावित निष्कर्ष चित (Head) या पट (Tail) होगा। अतः संभावित निष्कर्षों का समुच्चय S होगा।

$S = \{H, T\}$

किसी प्रयोग (Experiment) के संभावित निष्कर्षों का समुच्चय S जो कि निम्न शर्तों को पूरा करें।

1. समुच्चय (Set) का प्रत्येक (Element) प्रयोग (Experiment) के संभावित निष्कर्ष को दर्शाये।
2. किसी Trial का परिणाम समुच्चय S के सिर्फ एक तत्वों (Elements) हो तो ऐसे समुच्चय S को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं तथा इसके तत्वों (Elements) को प्रतिदर्श तत्व (Sample points) कहते हैं। प्रतिदर्श समष्टि को S से प्रदर्शित किया जा सकता है।

उदाहरण 3.3 : दो सिक्कों को उछालने की क्रिया (Experiment) का प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) लिखें।

हल : माना कि H चित तथा T पट को दर्शाता है

$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

नोट– यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाए तो समष्टि प्रतिदर्श को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं।

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

उदाहरण 3.4 : एक सिक्का तथा पासा को एक साथ फेंकने की प्रक्रिया का प्रतिदर्श समष्टि लिखें।

हल : एक सिक्का उछालने पर संभावित परिणाम है चित H या पट T।

एक पासा फेंकने पर संभावित निष्कर्ष है– 1,2,3,4,5 तथा 6

माना कि H = 0 T = 1

S = {(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (5,0), (5,1), (6,0), (6,1)}

n(S) = 6×2 = 12

n(S) = 2×2×2 = 8

उदाहरण 3.5 : ऐसे परिवारों का चयन करें जिनके सिर्फ 3 बच्चे हैं। प्रथम, द्वितीय और तृतीय बच्चे का लिंग पूछने ही प्रयोग है। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखें।

हल : एक बच्चे का लिंग बालक (Boy = B) अथवा बालिका (Girl = G) हो सकता है अतः

S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG}

उपरोक्त तरह से प्रतिदर्श समष्टि लिखने का लाभ यह है कि निम्न प्रकार के प्रश्नों क्या दूसरी सन्तान लड़की/कन्या/बालिका थी? या कितने परिवारों में पहली सन्ता बालक है इत्यादि का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है।

3.4 विभिन्न पदों की व्याख्या

3.4.1 घटना (Event)

सिक्के उछालने का एक प्रयोग करते है। इस प्रयोग में Head आने में हमारी दिलचस्पी है। अतः परिणाम में Head आना एक घटना है।

एक पासा फेंकने के प्रयोग में सम संख्या आने में हमारी दिलचस्पी है। अतः 2,4 तथा 6 परिणाम घटना का निर्माण करते हैं। हमने देखा है जब किसी प्रयोग को एक समान परिस्थितियों में कई बार दोहराया जाता है तो हर बार एक ही परिणाम प्राप्त होगा और ये संभावित परिणाम प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) का निर्माण करते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि के कुछ परिणाम/निष्कर्ष एक निर्दिष्ट विवरण को पूरा करते हैं, जिन्हें हम घटना कहते हैं। प्रायः घटना को A, B, C इत्यादि (अंग्रेजी के बड़े अक्षरों) शब्दों से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 3.6 : माना कि E तीन सिक्कों को एक साथ उछालने की घटना को दर्शाता है। सभी संभावित परिणाम तथा घटनाओं की सूची बनाओ जब–

1. Head की संख्या Tail की संख्या से अधिक हो।
2. जब दो Head आए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि S

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8$

माना कि E_1 Head की संख्या की संख्या Tail से अधिक होने की घटना दर्शाता है तथा E_2 जब दो Head आने की घटना को दर्शाता है। अतः

$E_1 = \{ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5\}$

तथा $E_2 = \{ w_2 \quad w_3 \quad w_5\}$

3.4.2 **Equally Likely Events** (समान रूप से संभावित घटनाएं)

यदि किसी भी कारणवश हम एक परिणाम पर दूसरे दूसरे परिणाम को वरीयता नहीं दे सकते तो Trial के ऐसे परिणामों को समान संभावित (Equally likely) कहते हैं।

उदाहरण : 1. एक निष्पक्ष सिक्के को उछालने पर चित या पट प्राप्त करना समान संभावित घटनाएं हैं।

2. एक पांसे फेंकने के प्रयोग में सभी छः तलों के समान रूप से उपरी तल पर आने में संभावित हैं।

3. एक अच्छी तरह से फेंटी हुई 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालने के लिए 52 पत्ते समान रूप से संभावित है।

3.4.3 पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं–

यदि किसी एक घटना के घटित होने पर बाकी सारी घटनाएं नहीं घटित होंगी तो ऐसी घटनाओं को परस्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं। अर्थात् एक ही Trial में दो या दो से अधिक घटनाएं एक साथ घटित नहीं हो सकती।

उदाहरण : 1. एक पांसे फेंकने में 1 से 6 तक अंकित सभी 6 तल परस्पर अनन्य घटनाएं है। अर्थात् यदि कोई भी एक तल उपर आता है तो बाकी सारे तल उस Trial में उपर नहीं आ सकते।

2. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दोनों सिक्कों पर Tail आने की घटना तथा कम से कम एक Head आने की घटना परस्पर अनन्य घटनाएं हैं।

गणितीय भाषा में यदि घटनाओं का Intersection प्रतिछेदन Null set है (अर्थात् खाली) तो ऐसी घटनाओं को परस्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं।

3.4.4 सर्वांगपूर्ण घटनाएं–

यदि सारे पासे ऐसी घटनाओं का संग्रह है जिनकी विशेषता यह है कि घटनाओं के संग्रह में से ही कोई घटना घटित होगी तो ऐसी घटनाओं के संग्रह को संपूर्ण घटनाएं कहते हैं।

उदाहरण के लिए जब एक पांसे को फेंकते हैं तो सम संख्या आने की घटना तथा विषय संख्या आने की घटना संपूर्ण घटनाएं हैं। या जब दो सिक्कों को उछालते हैं तो कम से कम एक Head आने की घटना तथा कम से कम एक Tail आने की घटना को संपूर्ण घटना कहते हैं।

गणितीय भाषा में घटनाओं के संग्रह को संपूर्ण घटना कहेंगे यदि सभी घटनाओं का Union (U set Theory) संग्रहण संपूर्ण प्रतिदर्श समष्टि हो।

3.4.5 स्वतंत्र तथा निर्भर आश्रित घटनाएं

एक घटनाओं के सेट को स्वतंत्र घटना कहेंगे यदि किसी एक के घटित होन पर बाकी घटनाओं पर कोई प्रभाव/असर नही होगा। जबकि दूसरी तरफ, यदि एक घटना के घटित होने पर दूसरी घटनाओं के घटित होने पर प्रभाव पड़ता है तो ऐसी घटनाओं को निर्भर/ परतंत्र घटनाएं कहते हैं।

उदाहरण : 1. एक सिक्के को उछालने पर पहले टॉस पर Head आने की घटना दूसरे, तीसरे और आगे आने वाली टॉसों में Head आने की घटना से स्वतंत्र है।
2. यदि एक अच्छी तरह से फेंटे हुए ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालें और दूसरा पत्ता निकालने से पहले उसे वापस गड्डी में रख दें तो दूसरे पत्ता निकालने का परिणाम पहले बार पत्ता निकालने पर आए परिणाम से स्वतंत्र है। परन्तु यदि पहली बार में निकाले गये पत्ते को वापस गड्डी में न रखें तो दूसरी बार में निकाला गया पत्ता पहले बार में निकाले पत्ते पर निर्भर करेगा। (क्योंकि पहली बार में निकला पत्ता दूसरी बार नहीं निकल सकता)।

3.5 घटनाएं तथा उनकी प्रायिकता

पिछले भाग में हमने सीखा कि कैसे पता करें कोई क्रिया यादृच्छिक प्रयोग है या नहीं। प्रायिकता का अध्ययन यादृच्छिक प्रयोग दर्शाता है। अतः अंक से आगे यादृच्छिक प्रयोग की जगह सिर्फ प्रयोग शब्द का इस्तेमाल करेंगे। इसके पहले भाग में हमने विभिनन प्रकार के घटनाओं जैसे समान रूप से संभावित, परस्पर अनन्य, संपूर्ण, स्वतंत्र तथा निर्भर घटनाएं को उदाहरण सहित परिभाषित किया।

जब हम कोई प्रयोग करते हैं तो हम यह जानने के इच्छुक होते हैं कि कोई निर्धारित घटना घटित होने की क्या संभावना है। आइए कुछ उदाहरण की सहायता से समझते हैं।

एक निष्पक्ष सिक्का उछालने पर Head आने की क्या संभावना है। यहाँ पर दो Head व Tail नाम की समान संभावित परिणाम है। रोजमर्रा की जिन्दगी में हम कहते हैं कि एक सिक्के पर Head आने की संभावना 2 में से 1 है। तकनीकी भाषा में हम कहते हैं Head आने की प्रायिकता 1/2 है।

इसी प्रकार, एक पांसे फेंकने के प्रयोग में 6 समान रूप से संभावित परिणाम है जो 1,2,3,4,5 और 6 है। जिस तल पर 1 अंकित है उसके उपरी तल पर आने की संभावना 6 में से 1 है। अतः 1 आने की प्रायिकता 1/6 है।

उपरी प्रयोग में, माना कि जब पांसा फेंकते है तो उपरी तल पर सम संख्या की प्रायिकता जानने में इच्छुक है। अतः 2, 4 और 6 आने पर सम आने की घटना की संभावना 6 में से 3 है। इसलिए सम संख्या आने की प्रायिकता 3/6 या 1/2 है।

संपूर्णतया, यदि एक प्रयोग जिसमें 'n' संपूर्ण, परस्पर अनन्य, समान रूप से संभावी परिणाम हों तथा उसमें से 'm' परिणाम घटना के घटित होने के पक्ष में हो तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता p, को ऐसे ज्ञात कर सकते हैं।

p = अनुकूल परिणाम की संख्या/संभावित परिणामों की कुल संख्या

या

$$p = m/n \qquad \text{----------} \ (i)$$

चूंकि, घटना A के घटिन न होने के अनुकूल परिणामों की संख्या n-m है, अतः A के घटित न होने की प्रायिकता q, को निम्न तरह से ज्ञात कर सकते हैं,

$$q + \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$= 1- p$ ((i) देखें $p + q = 1$)

नोट : p तथा q गैर नकारात्मक है तथा 1 से अधिक नहीं हो सकते।

i.e. = $0 \leq p \leq 1$; $0 \leq q \leq 1$

अतः किसी भी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0 तथा 1 के बीच होती है। (0 तथा 1 को समावेशित किए हुए)।

नोट : **1.** किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p को सफलता की प्रायिकता कहते हैं तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता q को असफलता की प्रायिकता कहते हैं।

2. असंभव घटना (impossible event) के घटित होने की प्रायिकता 'O' (Zero) हैं तथा निश्चित घटना (sure event) के घटित होने की प्रायिकता '1' (One) है। यदि P(A) = 1, तो घटना A निश्चित रूप से घटित होगी। और यदि P(A) = 0, तो घटना निश्चित रूप से घटित नहीं होगी अर्थात् घटना असंभव है।

3. किसी घटना के कुल अनुकूल परिणामों की संख्या (m) कुल संभावित परिणामों की संख्या (n) से अधिक नहीं हो सकती।

उदाहरण 3.7 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पांसा 6 प्रकार से गिर सकता है जिसमें से केवल एवं घटना (5 आने) के घटित होने के अनुकूल है।

$\therefore$ P(5) = 1/6

उदाहरण 3.8 : एक सिक्के को एक बार उछालने पर Head आने की प्रायिकता क्या है?

हल : सिक्का गिरने पर या तो Head (H) या Tail (T) उपर आयेगा। अतः कुल संभावित परिणाम दो है तथा उनमें से 1 घटना के अनुकूल है।

अतः P (H) = 1/2

उदाहरण 3.9 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

हल : एक पांसा फेंकने पर 6 संभावित परिणाम हो सकते हैं। जिनमें से 2,3 तथा 5 घटना के अनुकूल है।

अतः P (अभाज्य संख्या) = 3/6 = 1/2

उदाहरण 3.10 : एक पांसे को एक बार फेंकने पर 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 7 से कम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पांसा फेंकने पर 6 संभावित परिणाम हैं 1,2,3,4,5 तथा 6। और उनमें से किसी भी तल पर 7 अंकित नहीं है।

$\therefore$ P(7) = 0 /6 = 0

चँकि सभी तलों पर अंकित अंक 7 से कम है।

अतः $P(\leq 7) = 6/6 = 1$

उदाहरण 3.11 : एक साथ 2 सिक्के उछालने पर

1. दो Head आने की 2. केवल एक Head आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : यहां संभावित परिणाम हैं HH, HT, TH, TT ।

अतः कुल संभावित परिणाम की संख्या = 4

1. दो Head आने की अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

(i.e. HH)

$\therefore$ P(HH) = 1/4

2. केवल एक Head आने की घटना के दो अनुकूल परिणाम हैं (HT तथा TH)

अतः P (1 Head) = 2/4 = 1/2

उदाहरण 3.12 : एक साथ दो पांसें फेंकने पर योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संभावित परिणाम की संख्या $6 \times 6 = 36$ है। जो निम्न तरह से लिख सकते हैं।

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

योग 9 निम्न तरह से ज्ञात कर सकते हैं।

$3 + 6 = 9$

$4 + 5 = 9$

$5 + 4 = 9$

$6 + 3 = 9$

अतः (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) घटना के अनुकूल परिणाम है और अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है।

अतः P (योग 9) = 4/36 या 1/9

उदाहरण 3.13 : एक बैग जिसमें 10 लाल, 4 नीली तथा 6 काली गेंदे हैं एक गेंद (अकस्मात् यादृच्छिक) निकालो। 1. एक काली 2. एक नीली 3. काली गेंद न निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल गेंदों की संख्या 20 (10+4+6 = 20) है। अतः कुल संभावित परिणामों की संख्या 20। (यादृच्छिक गेंदे निकालने से सभी समान रूप से संभावित परिणाम है।)

1. लाल गेंदों की संख्या 10

$\therefore$ P (लाल गेंद) = 10/20 = 1/2

2. नीली गेंदों की संख्या = 4

$\therefore$ P (नीली गेंद) = 4/20 = 1/5

3. काली गेंद के अलावा गेंदों की संख्या = 10 + 4 = 14

$\therefore$ P (न काली गेंद) = 14/20 = 7/10

उदाहरण 3.14 : एक अच्छी तरह से फेंटी हुई ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक तरह से निकालिए। यदि रानी आने की घटना है तथा 4 से अधिक तथा 10 से कम वाला पत्ता आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : अच्छी तरह से फेंटे हुई ताश की गड्डी होने के कारण हर पत्ता समान रूप से संभावी है।

अतः कुल संभावी परिणामों की संख्या 52 है।

1. एक गड्डी में 4 रानी होती है।

अतः P (A) = 4/52 = 1/13

2. 4 से अधिकत था 10 से कम वाले पत्ते हैं 5,6,7,8 तथा 9। चूंकि हर कार्ड 4 तरह ईंट, पान, चिड़ी तथा हुकुम में उपलब्ध है। अतः कुल अनुकूल परिणामों की संख्या = 5×4 = 20

$\therefore$ P (B) = 20/52

उदाहरण 3.15 : एक यादृच्छिक रूप से चुने हुए अधिवर्ष (leap year) में 53 रविवार होने की संभावना ज्ञात करें।

हलः एक अधिवर्ष में 366 दिन होते हैं जिस में 52 हफ्तें तथा 2 दिन होते हैं। ये दो अधिक दिन निम्न प्रकार से हो सकते हैं–

1. रविवार तथा सोमवार
2. सोमवार तथा मंगलवार
3. मंगलवार तथा बुधवार
4. बुधवार तथा बृहस्पतिवार
5. बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार
6. शुक्रवार तथा शनिवार
7. शनिवार तथा रविवार

अतः उपर लिखी 7 में से 2 परिणाम 1. तथा 7. घटना के अनुकूल है।

अतः P (53 रविवार) = 2/7

3.6 क्रमचय तथा संयोजन द्वारा प्रायिकता

पिछले भाग में हमने किसी घटना के कुल संभावित परिणाम तथा घटना के अनुकूल परिणामों की गणना करके घटना की प्रायिकता ज्ञात की। परन्तु यह तभी संभव है जब परिणामों की संख्या कम हो अन्यथा यह प्रक्रिया मुश्किल और इसमें बहुत समय लगेगा। साधारणतया आपको सभी परिणामों की सूची की आवश्यकता नहीं होती परन्तु कुल संभावित परिणामों की संख्या तथा अनुकूल परिणामों की संख्या

आवश्यकता होती है। बहुत सी परिस्थितियों में यह क्रमचय तथा संयोजन के ज्ञान की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। जो कि आप पहले ही पढ़ चुके हैं।

उदाहरण 3.16: एक बैग/थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंद है। एक सफेद तथा एक नीली एक साथ गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : कुल गेंद की संख्या = 3+6+7 = 16

16 गेंद में से 2 गेंद 7_{C2} तरह से निकाली जा सकती है।

अतः संपूर्ण घटनाओं की संख्या = $16_{C2} = \frac{16\times15}{2}$ = 120

6 सफेद गेंद में से 1 गेंद 6_{C1} तरह से तथा 7 नीली गेंदों से 1 गेंद 7_{C1} तरह से निकाली जा सकती है। चूंकि प्रत्येक का पहला मामला प्रत्येक के दूसरे मामले से जुड़ा हुआ है। इसलिए अनुकूल परिणामों की संख्या = $6_{C1} \times 7_{C1} = 6\times7 = 42$

प्रायिकता = 42/120 = 7/20

उदाहरण 3.17 : एक थैला जिसमें 5 लाल तथा 4 काली गेंदें हो, दो लाल गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें, जब

1. प्रतिस्थापन (पहली गेंद वापस थैले में रख दी जाए)
2. बिना प्रतिस्थापन

हल : 1. कुल गेंदों की संख्या दोनों बार निकालने पर 5+4 = 9 है।

अतः (Fundamental Principle of counting) गणना के मूलभूत सिद्धान्त से, कुल संभावित परिणाम की संख्या 9 × 9 = 81

इसी प्रकार, अनुकूल परिणामों की संख्या = 5 × 5 = 25

$\therefore$ प्रायिकता (दो लाल गेंद) = 25/81

2. कुल संभावित परिणामों की संख्या बराबर 9 में से 2 गेंद निकालने के तरीके

$$= 9C_2 = \frac{9\times8}{2} = 36$$

अनुकूल परिणामों की संख्या बराबर है 5 में से 2 लाल गेंद निकालने के तरीके

$$= 5C_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$$

$\therefore$ P (दो लाल गेंद) = 10/36 = 5/18

उदाहरण 3.18 : 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से यादृच्छिक 6 पत्ते निकाले जाते हैं उनमें 3 लाख तथा 3 काले पत्तो होने की प्रायिकता बताइए।

हल : 52 पत्तों में से 6 पत्ते $5C_6$ तरह से निकाले जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल संभावित परिणाम = $52C_6$

चूंकि ताश की गड्डी में 26 पत्ते लाल तथा 26 पत्ते काले होते हैं अतः

3 लाल पत्ते $26C_3$ तरह से तथा 3 काले पत्ते $26C_3$ तरह से निकाले जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल अनुकूल परिणाम = $26C_3 \times 26C_3$

$$\therefore \text{ वांछित प्रायिकता } = \frac{26C_3 \times 26C_3}{56C_6} = \frac{13000}{39151}$$

उदाहरण 3.19ः 3 आदमी, 2 औरत तथा 4 बच्चों के एक समूह से 4 लोगों को यादृच्छिक तरह से चुनते हैं उनमें से दो बच्चे होने की प्रायिकता 10/21 है सिद्ध करो।

हल : समूह में कुल लोगों की संख्या = 3+2+4 = 9

4 लोग चुने जाने पर यदि दो बच्चे हों तो बाकी 2 लोग, 3 आदमी तथा 2 औरत अर्थात् 5 लोग में से होंगे।

4 बच्चों में से 2 बच्चे $4C_2 = 6$ तरह से चुने जा सकते हैं।

बाकी दो लोग 5 में से $5C_2 = 10$ तरह से चुने जा सकते हैं।

9 में से 4 लोग $9C_4 = 126$ तरह से चुने जा सकते हैं।

$$\therefore \text{ वांछित प्रायिकता } = \frac{4C_2 \times 5C_2}{9C4} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{10}{21}$$

उदाहरण 3.20 : 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से 3 पत्ते निकाले जाते हैं। उनके राजा, रानी तथा गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : 52 में से 3 पत्ते $5C_3$ तरह से चुने जा सकते हैं चूंकि सभी समान संभावी हैं।

अतः संपूर्ण संभावों की संख्या = $52C_3$

ताश की गड्डी में 4 राजा, 4 रानी तथा 4 गुलाम होते हैं। 1 राजा, 1 रानी तथा 1 गुलाम $4C_1$ तरह से निकाला जा सकता है। चूंकि ये सभी स्वतंत्र घटनाएं है अतः अनुकूल परिणामों की संख्या = $4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1$

$$\therefore \text{ वांछित प्रायिकता } = \frac{4C_1 \times 4C_1 \times 4C_1}{52C_3} = \frac{16}{5525}$$

उदाहरण 3.21ः 1 से 25 तक अंकित 25 टिकटों में से एक टिकट निकालो। निकाले टिकट के 5 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : 1 से 25 में 5 के गुणक हैं 5,10,15,20 तथा 25।

अर्थात् संभावित परिणाम की संख्या = 25

अनुकूल परिणाम की संख्या = 5

$$\therefore \text{ वांछित प्रायिकता } = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

3.7 सारांश

एक क्रिया जिसका परिणाम या निष्कर्ष आए प्रयोग कहते हैं। एक क्रिया जिसको एक समान परिस्थितियों में कई बार दोहराया जा सके तथा क्रिया का परिणाम अनुमान लगाने योग्य न हो तो ऐसी क्रिया को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं। यादृच्छिक प्रयोग के कुल संभावित परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि तथा समुच्चय के प्रत्येक तत्व को प्रतिदर्श समंकन बिंदु कहते हैं। प्रतिदर्श समष्टि के कुछ

परिणाम एक निर्धारित स्थिति को परिपूर्ण करते हैं जिसे घटना कहते हैं। जब एक घटना को किसी भी कारणवश दूसरी घटना पर वरीयता नहीं दे सकते तो ऐसी घटनाओं को समान संभावी घटना कहते हैं। यदि एक घटना के घटित होने पर दूसरे घटना न घटित हो तो ऐसी घटनाओं को परम्पर अनन्य घटनाएं कहते हैं एक Trial (एक के प्रयोग को एक बार करने की क्रिया) में कुल संभावित परिणामों को संपूर्ण घटना कहते हैं। यदि एक घटना के घटित होने से बाकी घटनाओं के घटित होने पर कोई प्रभाव न पड़े तो ऐसे घटनाओं के समूह को स्वतंत्र घटनाएं कहते हैं अन्यथा इन्हें परतंत्र/निर्भर घटनाएं कहेंगे।

3.8 शब्दावली

घटना : प्रतिदर्श समष्टि के कुछ परिणाम/निष्कर्ष एक निर्दिष्ट विवरण को पूरा करते हैं, जिन्हें हम घटना कहते हैं।

समान रूप से संभावित घटनाएं: यदि किसी भी कारणवश हम एक परिणाम पर दूसरे दूसरे परिणाम को वरीयता नहीं दे सकते ।

3.9 बोध प्रश्न

सत्य/असत्य

1. A तथा B परस्पर अनन्य है।
2. A तथा B परस्पर अनन्य तथ संपूर्ण है।
3. A तथा C परस्पर अनन्य हैं।
4. C तथा D परस्पर अनन्य तथा संपूर्ण है।

3.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य

3.11 स्वपरख प्रश्न

1. एक स्कूल से बिना किसी प्रभाव के एक विद्यार्थी चुनने की क्रिया एक यादृच्छिक प्रयोग है सिद्ध करो।
2. एक कैलकुलेटर से दो संख्या जोड़ना यादृच्छिक प्रयोग नहीं है। सिद्ध करो।
3. एक साथ 3 सिक्के उछालने का प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
4. एक सिक्का तथा एक पासा एक साथ फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
5. दो पांसे एक साथ फेंकने पर दोनों पांसों पर उपरी तल पर 6 आए। क्या दोनों घटनाएं परस्पर अनन्य घटनाएं हैं या नहीं?
6. दो पांसे एक साथ फेंकिए। A, B, C तथा D घटनाएं हैं:
   अ. पहले पांसे पर सम संख्या आए
   ब. पहले पांसे पर विषम संख्या आए
   स. दोनों पांसों के उपरी तल पर आए अंकों को योग 7 से कम हो।
   द. दोनों पांसों के अंकों का योग 7 से ज्यादा हो
7. एक थैले में 6 लाल, 4 सफेद तथा 5 नील गेंद हैं इसमें से एक गेंद निकाली जाती है। इसके प्रतिदर्श समष्टि में कितने प्रतिदर्श बिन्दु हैं?

8. एक साथ दो पांसे फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि तथा प्रतिदर्श बिन्दु लिखो।
9. माना कि सिर्फ 2 बच्चों वाले सभी परिवारों को आप चुनते हैं लोगों से उनके पहले तथा दूसरे बच्चे का लिंग पूछने से प्रयोग होता है। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखो।
10. एक पांसे को एक बार फेंकने पर 3 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
11. एक सिक्के को एक बार उछालने पर Tail (पट्ट) आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
12. एक पांसा फेंकने पर 3 से अधिक अंक आने की प्रायिकता बताओ।
13. एक साथ दो सिक्के उछालने पर कम से कम एक Tail आने की प्रायिकता बताओ।
14. एक थैला जिसमें 15 लाल तथा 10 नीली गेंदे हो एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता बताइए निकलने वाली गेंद 1. लाल 2. नीली हो।
15. दो पांसे फेंकने पर योग 1. 6 2. 8 3. 10 4. 12 आने की प्रायिकता बताओ।
16. दो पांसे फेंकने पर उपरी तल पर आए अंको का योग 3 या 4 से विभक्त होने की प्रायिकता बताओ।
17. दो पांसे फेंकने पर दोनों के उपरी तल पर आने वाले अंकों का योग 10 से अधिक होने की प्रायिकता बताओ।
18. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके लाल होने की प्रायिकता बताओ।
19. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से एक कार्ड निकालने पर उसके 1. हुकुम 2. राजा 3. हुकुम का राजा होने की प्रायिकता बताओ।
20. एक साथ दो पांसें फेंकने पर प्रायिकता ज्ञात करो जब
    1. योग एक अभाज्य संख्या हो।
    2. दोनों पांसों पर एक ही अंक आए।
    3. एक पांसे पर 2 का गुणक तथा दूसरे पर 3 का गुणक आए।
21. तीन सिक्कों को एक साथ उछालो। निम्नलिखित घटनाओं का प्रायिकता ज्ञात करो।
    1. एक भी Head न आए
    2. कम से कम एक Head आए
    3. सभी Head आए।
22. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंदे हैं। दो गेंद निकालने पर दोनों सफेद गेंद आने की प्रायिकता बताओ।
23. एक थैले में 5 लाल तथा 8 नीली गेंद हैं। दो गेंद निकालने पर नीली और लाल आने की प्रायिकता बताओ।
24. एक थैले में 20 सफेद तथा 30 काली गेंद है। दो गेंद निकालने पर सफेद गेंद होने की प्रायिकता ज्ञात करो जब
    1. प्रतिस्थापन 2. बिना प्रतिस्थापन

25. एक ताश की गड्डी से 3 पत्ते निकलने पर तीनों के गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
26. एक 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी से दो पत्ते निकालने पर सिद्ध कीजिए 2 इक्के निकालने की प्रायिकता 1/221
27. एक स्कूल के 10 उत्कृष्ट बच्चों के एक समूह में 6 लड़के तथा 4 लड़कियाँ हैं। वाद–विवाद प्रतियोगिता के लिए इन में से 3 बच्चे चुनना हैं प्रायिकता ज्ञात करें जब
    1. एक लड़का दो लड़की
    2. सभी लड़के
    3. सभी लड़कियाँ हों।
28. 1 से 21 तक अंकित 21 टिकटों में से 3 टिकट निकालने पर उनके अंक A P (Arithmatic progression) में होने की प्रायिकता बताओ।
29. 1 से 8 तक अंकित कार्डों में से 2 कार्ड निकालो। दोनों कार्डों के अंकों का योग विषम संख्या होने की प्रायिकता बताओ।
30. 6 लड़कों तथा 8 लड़कियों के समूह में से 5 खिलाड़ियों को चुनना है। 2 लड़के तथा 3 लड़कियों के चयनित होने की प्रायिकता बताओ।
31. प्रथम 200 धनात्मक पूर्णांक में से एक पूर्णांक चुनने पर उसके 6 या 8 से विभक्त होने की प्रायिकता बताओ।

स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. दोनों विशेषताएं हैं।
2. परिणाम अनुमान लगाने योग्य है।
3. S : {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
4. H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6
5. नहीं
6. 15
7.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

8. {MM, MF, FM, FF}
9. 1/6
10. 1/2
11. 1/2
12. 3/4
13. (i) 3/5 (ii) 2/5

14. (i) 3/5 (ii) 5/36 (iii) 1/12 (iv) 1/36
15. 5/9
16. 1/12
17. 1/2
18. (i) 1/4 (ii) 1/13 (iii) 1/52
19. (i) 5/12 (ii) 1/6 (iii) 11/36
20. (i) 1/8 (ii) 7/8 (iii) 1/8
21. 1/8
22. 20/39
23. (a) 4/25 (b) 38/245
24. 1/5525
25. सिद्ध
26. (i) 3/10 (ii) 1/6 (iii) 1/30
27. 10/133
28. 4/7
29. 60/143
30. 1/4

3.12 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, ‘*Principles of Statistics*’ Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., ‘*Business Statistics*’ Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., ‘*Advanced Statistics*’ Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, ‘Basic Statistics’ World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, ‘Quantitative Methods in Management’.

इकाई 4 प्रायिकता सिद्धान्त/प्रमेय

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- प्रायिकता के योग प्रमेय की व्याख्या कर सकें।
- प्रायिकता के गुणन प्रमेय की व्याख्या कर सकें।
- प्रायिकता में बर्नाली प्रमेय के उपयोग का वर्णन कर सकें।
- बेज प्रमेय की सहायता से प्रश्नों का हल कर सकें।

4.1 प्रस्तावना

इसके पहले का अध्याय के अध्ययन के उपरान्त आप प्रायिकता के विभिन्न पहलू तथा शब्दावली को समझने योग्य हो गये होंगे। आज बारिश हो सकती है। तथा वह आज पहुँच सकता है। इन दोनों वाक्यों में घटित होना निश्चित नहीं है। दूसरे शब्दों में इन दोनों ही वाक्यों में अनिश्चितता का भाव/अंश है। अनिश्चितता का गणितीय मापन प्रायिकता सिद्धान्त द्वारा दिया गया है। प्रायिकता सिद्धान्त का उद्देश्य अनिश्चितता मापन के तरीके प्रदान करना है। प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति अनिश्चितता के अध्ययन जैसे पत्तों का खेल, सिक्कों को उछालना, पांसा फेंकना इत्यादि से हुई है। परन्तु आज के समय में निर्णय लेने की समस्याओं (decision making problems) के समाधान में इसका विशेष महत्व है।

4.2 योग प्रमेय

प्रायिकता के योग प्रमेय को आप निम्न तरह/तरीके से समझ सकते हैं।

4.2.1 पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय

योग प्रमेय कहता है कि यदि A तथा B दो पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं है तो A या B के घटित होने की प्रायिकता सिर्फ A तथा B के घटित होने की प्रायिकता का योग के बराबर होगा।

सांकेतिक भाषा में,

P (A या B) = P(A) + P(B)

या

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

साधारणीकरण—

इस प्रमेय को तीन या उससे अधिक पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए बढ़ाया जा सकता है। यदि A, B तथा C तीन पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं तो

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

उदाहरण 4.1: 52 पत्तों में से 1 पत्ता निकालने पर उसके राजा अथवा रानी होनी की प्रायिकता बताइए।

हल : 52 पत्तों में 4 राजा तथा 4 रानी होते हैं। 1 पत्ता निकालने पर उसके राजा होने की प्रायिकता P(K) = 4/52

तथा

निकाले पत्ते के रानी होने की प्रायिकता P(Q) = 4/52

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः निकाले पत्ते के राजा या रानी होने की प्रायिकता

P(K या Q) = P(K) + P(Q)

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

उदाहरण 4.2 : एक निवेश सलाहकार भविष्यवाणी करता है कि

हलः माना कि A स्टॉक दाम के बढ़ने की घटना है तथा B स्टॉक स्थिर रहने की घटना है। तो

P(A) = 1/3 and P(B) = 1/4

P (स्टॉक दाम बढ़ने या स्थिर रहने) = $P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

P (स्टॉक दाम घटेगा) = $1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

उदाहरण 4.3 : 3 घटनाओं A, B तथा C में से केवल एक घटना घटित हो सकती है।

हल : घटना A के घटित होने की प्रायिकता, P(A) = 3/5

घटना B के घटित होने की प्रायिकता, P(B) = 3/7

चूंकि A, B तथा C पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं।

P(A या B या C) = P(A)+P(B)+P(C) = 1

$$1 = \left(\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{7} + P(C)$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) = P(C) = \frac{6}{35}$$

उदाहरण 4.4 : एक ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। निकाले गये पत्ते के ईंट का इक्का या चिड़ी होने की प्रायिकता बताओ।

हल : चिड़ी का पत्ता निकालने की प्रायिकता

P(A) = 13/52

ईंट का इक्का निकालने की प्रायिकता P(B) = 1/52

चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं अतः

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{14}{52}$$

$$= \frac{7}{26}$$

उदाहरण 4.5: एक साथ 2 पांसे फेंकने पर योग 7 या 9 आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 2 पांसे फेंकने पर 6×6= 36 संभावित परिणाम हो सकते हैं जो निम्नलिखित हैं।

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

योग 7 निम्न 6 तरह से प्राप्त किया जा सकता है।

(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2,5) (1,6)

योग 9 निम्न 4 तरह से प्राप्त किया जा सकता है।

(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)

योग 7 ज्ञात करने की प्रायिकता P(A) = 6/36 = 1/6

योग 9 ज्ञात करने की प्रायिकता, P(B) = 4/36 = 1/9

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं, अतः योग 7 या 9 प्राप्त करने की प्रायिकता–

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

उदाहरण 4.6 : एक थैले में 4 लाल, 5 काली, 3 पीली और 11 हरी गेंदे हैं। एक गेंद प्रायिकता ज्ञात करो कि निकाली गई गेंद

1. लाल, काली या पीली हो।
2. लाल, काली, पीली या हरी हो।

हल : कुल गेंदों की संख्या = 4R+5B +3Y+11G = 23

लाल गेंद आने की प्रायिकता, P(A) = 4/23

काली गेंद आने की प्रायिकता, P(B) = 5/23

पीली गेंद आने की प्रायिकता, P(C) = 3/23

हरी गेंद आने की प्रायिकता, P(D) = 11/23

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः

1. लाल, काली या पीली गेंद आने की प्रायिकता

P(A या B या C) = P(A) + P(B) +P(C)

$$= \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} = \frac{12}{23}$$

2. लाल, काली, पीली या हरी गेंद आने की प्रायिकता

P(A या B या C या D) = P(A) + P(B) +P(C)+ P(D)

$$= \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} + \frac{11}{23}$$

$$= \frac{23}{23} = 1$$

उदाहरण 4.7 : यदि एक जोड़े पांसे फेंके जाए तो प्रायिकता ज्ञात करें

1. योग न तो 7 है न 11
2. न तो दोनों पांसे पर एक ही संख्या आए और न ही योग 9 आए।

हल : यहाँ पर 36 संभावित परिणाम हैं जो निम्न हैं।

1. योग 7 निम्न 6 तरह से आ सकता है—

(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2,5) (1,6)

योग 11 निम्न 2 तरह से प्राप्त कर सकते हैं—

(6,5) (5,6)

योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता, P(A) 6/36

योग 11 प्राप्त करने की प्रायिकता, P(B) = 2/36

चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं, अतः योग 7 या 11 आने की प्रायिकता

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

योग न तो 7 और न ही 11 होने की प्रायिकता

= 1- P(A या B)

$$= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2. दोनों ही पांसो में एक समान अंक निम्न 6 तरह से आ सकता है

(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

योग 9 निम्न 4 तरह से आ सकता हैः

(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)

दोनों पासों में एक समान अंक आने की प्रायिकता, P(A) = 6/36

योग 9 आने की प्रायिकता, P(B) = 4/36

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं, अतः जोड़ा आने या योग 9 आने की प्रायिकता

P(A या B) = P(A) + P(B)

$$=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

अतः न तो जोड़ा आए न ही योग 9 आने की प्रायिकता

= 1- P(A या B)

$$=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$

उदाहरण 4.8ः एक थैले में 11 लाल और 14 सफेद गेंदें हैं। दो गेंद निकालने पर उनके एक ही रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 25 में से 2 गेंद निकालने के कुल तरीके = $25C_2$

11 लाल गेंदों से 2 लाल गेंद निकालने के कुल तरीके = $11C_2$

14 सफेद गेंदों में से 2 सफेद गेंद निकालने के कुल तरीके = $14C_2$

यहाँ पर दो दशाएँ हैं

1. दोनों गेंद लाल हों

दोनों गेंद लाल आने की प्रायिकता = $11C_2/25C_2$

2. दोनों गेंद सफेद हों

दोनों गेंद सफेद आने की प्रायिकता = $14C_2/25C_2$

चूंकि दशाएं 1. और 2. पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः

P (दोनों गेंद एक रंग की हो) = P(2R or 2W)

= P(2R) + P(2W)

$$=\frac{11C_2}{25C_2}+\frac{14C_2}{25C_2}$$

$$=\frac{11}{60}+\frac{91}{300}=\frac{55+91}{300}=\frac{146}{300}$$

$$=\frac{73}{150}$$

उदाहरण 4.9 : A और B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं। P(A) = 0.3 तथा P(B) = p और P(A+B) = 0.5 p का मान ज्ञात करो।

हल : चूंकि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं तो

P(A+B) = P(A) + P(B)

$0.5 = 0.3 + p$

$\Rightarrow$ $p = 0.5 - 0.3 = 0.2$

4.2.2 अपारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए योग प्रमेय—

जब घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी न हों तो उपर वर्णित योग प्रमेय उपयुक्त नहीं होगा। उदाहरण के लिए एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता 13/52 है तथा एक राजा निकालने की प्रायिकता 4/52 है, चूंकि ये घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं नहीं है अतः एक हुकुम का पत्ता या राजा वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता दोनों घटनाओं की एकाकी प्रायिकता जोड़कर नहीं निकाल सकते क्योंकि पत्ता राजा भी हो सकता है और हुकुम भी हो सकता है।

जब घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी न हो तो योग प्रमेय में संशोधन करना आवश्यक है।

संशोधित योग प्रमेय कहता है कि यदि A तथा B पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं न हों तो A या B या दोनों के घटित होने की प्रायिकता A के घटित होने की प्रायिकता तथा B के घटित होने की प्रायिकता ऋण का योग और A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता को घटाकर बराबर होगा।

सांकेतिक भाषा में,

P (A या B या दोनों) = P(A) + P(B) - P(AB)

इस फार्मूले में हम P(A और B)= P(AB) को घटाते हैं अर्थात् P(A)+P(B) के घटित होने पर जिन घटनाओं की प्रायिकता को दो बार गिना गया है। अतः प्रमेय को इस प्रकार संशोधित किया गया है कि A तथा B को पारस्परिक अपवर्जी प्रस्तुत किया जा सके।

निम्नलिखित चित्र से इसे दर्शाया/समझाया जा सकता है।

साधारणीकरण (Generalization)

इस प्रमेय को तीन या अधिक घटनाओं के लिए विस्तृत/बढ़ाया जा सकता है। अतः

P(A या B या C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)

निम्नलिखित उदाहरण संशोधित योग प्रमेय के उपयोग को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 4.10 : एक अच्छी तरह फेंटी हुई ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालिए। पत्ते के राजा या हुकुम होने की प्रायिकता क्या है?

हल : एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(A) = 13/52

राजा वाला पत्ता निकालने के प्रायिकता, P(B) = 4/52

चूंकि राजा के पत्तों में से एक हुकुम का पत्ता हो सकता है अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

हुकुम के राजा निकालने की प्रायिकता, P(AB)= 1/52

अतः हुकुम या राजा निकालने की प्रायिकता

P(A या B या दोनों) = P(A)+P(B) - P(AB)

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$
$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उदाहरण 4.11 : एक थैले में 1 से 30 तक अंकित 30 गेंदें हैं। एक गेंद दैव दर्शन से निकाला जाता है। निकाली गई गेंद पर अंकित नंबर 5 या 6 का गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : गेंद के 5 के गुणक होने की प्रायिकता

(5,10,15,20,25,30) ' P(A) = 6/30

गेंद के 6 के गुणक होने की प्रायिकता

(6, 12, 18, 24, 30) ' P(B) = 5/30

चूंकि 30, 5 तथा 6 दोनों का गुणक है अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P(A तथा B) = 1/30

अतः गेंद के 5 या 6 के गुणक होने की प्रायिकता

P (A या B) = P(A) + P(B) - P(A B)

$$\frac{6}{30} + \frac{5}{30} - \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 4.12: 1 से 150 तक की संख्याओं में से एक संख्या निकाली जाती है। उसके 3 या 5 से विभाजित होने की प्रायिकता बताओ।

हल : संख्या के 3 से विभाजित होने वाले की प्रायिकता

(3, 6, 9, ... 147, 150) ; P(A) = 50/150

संख्या के 5 से विभाजित होने की प्रायिकता

(5,10,15, ... 145, 150) ; P(B) = 30/150

चूंकि (15,30,45, ...135, 150) = 10 संख्याएं दोनों में हैं अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P (A या B) = 10/150

3 या 5 से विभाजित होने की प्रायिकता

P (A या B) = P(A) + P(B) - P(A B)

$$= \frac{50}{150} + \frac{30}{150} - \frac{10}{150}$$
$$= \frac{70}{150} = \frac{7}{15}$$

उदाहरण 4.13 : एक पत्तों की गड्डी से दैव दर्शन द्वारा एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता बताओ 1. पत्ता राजा या रानी हो 2. पत्ता या तो राजा हो या काला पत्ता हो।

हल : 1. राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता P(K) = 4/52

रानी पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(Q) = 4/52

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः पत्ते के राजा अथवा रानी होने की प्रायिकता

P(K या Q) = P(K) + P(Q)

2. राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(A) = 4/52

काला पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(B) = 26/52

चूंकि काले राजा दोनों घटनाओं में Common है। अतः घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं है।

P (काला राजा) = 2/52

अतः पत्ते के राजा या काला पत्ता होने की प्रायिकता

P (राजा या काला पत्ता) P(राजा) + P(काला पत्ता) – P(काला राजा)

$$= \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52}$$

$$= \frac{28}{52}$$

उदाहरण 4.14 : एक चार्टर्ड एकाउन्टेंट ने दो फर्मों X तथा Y में एक नौकरी के लिए आवेदन किया। उसने उसके फर्म X में चयनित होने की प्रायिकता 7/10 तथा Y फर्म में अस्वीकृत होने की प्रायिकता 5/10 अनुमान लगाया तथा उसके दोनों फर्मों में चयनित होने की प्रायिकता 4/10 है। उसके फर्म में चयनित होने की प्रायिकता बताओ।

हलः P(फर्म X में चयनित होना) = 7/10

P(फर्म Y में चयन) = P(फर्म Y में अस्वीकृत)

$$= 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10}$$

P(X तथा Y में चयन) = 4/10

P(एक फर्म में चयन) = P(X) + P(Y) - P(XY)

$$= \frac{7}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

4.3 गुणन प्रमेय

अब आप प्रायिकता के गुणन प्रमेय का दो आयामों के अंतर्गत अध्ययन करेंगे।

4.3.1 स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय–

गुणन प्रमेय कहता है यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएं हों तो A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता उनकी एकाकी प्रायिकता के गुणन के बराबर होगी। सांकेतिक भाषा में,

P(AB) = P(A) × P(B)

साधारणीकरण : इस प्रमेय को तीन या उससे अधिक घटनाओं के लिए विस्तारित किया जा सकता है। यदि A, B तथा C तीन स्वतंत्र घटनाएं हो, तो

P(ABC) = P(A)× P(B) × P(C)

उदाहरण 4.15: A एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। 3 चित आने की प्रायिकता बताओ।

हलः पहले टॉस में चित आने की प्रायिकता P(A) = 1/2

दूसरे टॉस में चित आने की प्रायिकता, P(B) = 1/2
तीसरे टॉस में चित आने की प्रायिकता, P(C) = 1/2
चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः 3 चित आने की प्रायिकता,

$$P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 4.16 : 52 पत्तों की गड्डी से दो पत्ते दैव निदर्शन द्वारा निकाले जाते हैं एक के बाद दूसरा जबकि पहला पुनः गड्डी में शामिल कर दिया जाता है। दोनों पत्तों के राजा होने की प्रायिकता बताओ।

हल : राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(A) = 4/52
रिप्लेसमेंट के उपरांत राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता, P(B) = 4/52
चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः दो राजा निकालने की प्रायिकता,

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

उदाहरण 4.17: एक थैले में 5 सफेद और 3 काली गेंदें हैं दैव निदर्शन से दो गेंदे एक के बाद एक प्रतिस्थापन के बाद निकाली जाती है। दोनों गेंदे काली होने की प्रायिकता बताओ।

हल : पहली बार में काली गेंद निकालने की प्रायिकता, P(A) = 3/8
दूसरी बार में काली गेंद निकालने की प्रायिकता, P(B) = 3/8
चूंकि दोनों घटनाएं स्वतंत्र हैं अतः दोनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता,

P(2B) = P(प्रथम काली) × P(द्वितीय काली)

$$= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

उदाहरण 4.18 : एक विद्युत उपकरण तीन घटकों A, B तथा C से मिलकर बना है। एक निर्धारित समय में घटक A के खराब होने की प्रायिकता 0.01 है, B तथा C के खराब होने की प्रायिकता क्रमशः 0.02 तथा 0.05 है। यह मानते हुए कि तीनों घटक स्वतंत्र रूप से काम करते हैं, निश्चित अवधि में उपकरण के सफलतापूर्वक काम करने की प्रायिकता बताओ।

हल : माना कि खराब घटक क्रमशः तथा द्वारा दर्शाते हैं।

P(A) = 0.01, P(B) = 0.02, P(C)= 0.05

घटकों के खराब होने की प्रायिकता
P(A) = 1-P(A) = 1-0.01 = 0.99
P(B) = 1-P(B) = 1-0.02 = 0.98
P(C) = 1-P(C) = 1-0.05 = 0.9
उपकरण के सफलतापूर्वक काम करने की प्रायिकता

$$P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$
$$= 0.99 \times 0.98 \times 0.95$$
$$= 0.092162 = 0.092 \text{ (Approx.)}$$

4.3.1.1 n स्वतंत्र घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

यदि आपके पास n स्वतंत्र घटनाएं $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ हो तथा उनके घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ हो, तो स्वतंत्र घटनाओं $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

P(कम से कम एक घटना घटित होना)

= 1 - P(किसी घटना का घटित न होना)

$= 1- [(1- p_1) \quad (1- p_2) \quad (1- p_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (1- p_n)$

उदाहरण 4.19 : तीन विद्यार्थियों A, B तथा C को एक सांख्यिकी की समस्या/प्रश्न हल करने के लिए दी जाती है तथा उनको इसको हल कर लेने का संयोग 1/2, 1/3 तथा 1/4 है। समस्या हल कर लेने की प्रायिकता बताइये।

हल : A के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, $P(A) = 1/2$

B के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, $P(B) = 1/3$

C के समस्या हल कर लेने की प्रायिकता, $P(C) = 1/4$

A के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, $P(\bar{A}) = 1- 1/2 = 1/2$

B के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, $P(B) = 1- 1/3 = 2/3$

C के समस्या हल न कर लेने की प्रायिकता, $P(\bar{A}) = 1- 1/4 = 3/4$

चँकि सभी घटनाएं स्वतंत्र हैं, अतः

P(कोई भी समस्या हल नहीं कर पाया) $= P(A) \times P(B) \times P(C)$

$= 1/2 \times 1/3 \times 1/4 = 1/4$

P(समस्या हल हो जाए) = 1 - P(कोई समस्या हल न कर पाए)

$= 1- 1/4 = 3/4$

उदाहरण 4.20: एक अभ्यर्थी X ने 3 पदों के लिए साक्षात्कार दिया। प्रथम पद के लिए 3 अभ्यर्थी, द्वितीय के लिए 4 तथा तृतीय के लिए 2 अभ्यर्थी थे। X के चयनित होने की प्रायिकता बताओ।

हल : प्रथम पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(A) = 1/3$

द्वितीय पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(B) = 1/4$

तृतीय पद के लिए चयनित होने की प्रायिकता, $P(C) = 1/2$

प्रथम पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(A) = 1 - 1/3= 2/3$

द्वितीय पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(B) = 1- 1/4= 3/4$

तृतीय पद के लिए चयनित न होने की प्रायिकता, $P(C) = 1- 1/2= 1/4$

चँकि सभी घटनाएं स्वतंत्र है अतः X के चयनित न होने की प्रायिकता

के कम से कम एक पद पर चयनित होने की प्रायिकता

उदाहरण 4.21 : एक पांसे को 6 बार फेंकने पर कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता बताओ।

हलः कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता

= 1 – एक बार 6 न आने की प्रायिकता

पहले बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

दूसरी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

तीसरी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

चौथी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

पांचवी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

छठी बार में 6 न आने की प्रायिकता = 5/6

चँकि घटनाएं स्वतंत्र है, अतः किसी भी बार 6 के न आने की प्रायिकता

$= P(\bar{I}), P(\bar{I}\,\bar{I}), P(\bar{I}\,\bar{I}\,\bar{I}), P(\bar{I}V), P(V), P(V\,\bar{I})$

$= 5/6, 5/6, 5/6, 5/6, 5/6, 5/6$

$= (5/6)^6$

अतः कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता = $1- (5/6)^6$

उदाहरण 4.22: x वर्षीय एक आदमी की किसी वर्ष में मृत्यु हो जाती है। x वर्षीय आदमियों $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ में से x की मृत्यु सबसे पहले होने की प्रायिकता बताओ।

हल :

x वर्षीय एक आदमी के किसी वर्ष में मृत्यु होने की प्रायिकता = p

अतः x वर्षीय आदमी के किसी वर्ष में मृत्यु न होने की प्रायिकता = 1- p

n में से किसी भी आदमी की उस वर्ष में मृत्यु न होने की प्रायिकता,

$p= (1-p), (1-p), (1-p).......... n$

$= (1-p)^n$

उस वर्ष में कम से कम एक आदमी की मृत्यु होने की प्रायिकता,

= 1- P(किसी की मृत्यु न हो)

$= [(1- (1 - p)^n]$

n आदमियों में से A_1 की मृत्यु की प्रायिकता = 1/n

अतः वांछित प्रायिकता = $1/n\ [(1- (1 - p)^n]$

उदाहरण 4.23 : A तथा B दो स्वतंत्र गवाह हैं A के सत्य बोलने की प्रायिकता x है और B के सत्य बोलने की प्रायिकता y है। A तथा B कथन सहमत हैं। कथन के सत्य होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : दिया गया है, $P(A) = x$ $P(B)= y$

$P(A) = 1-x$ $P(B) = 1-y$

A तथा B सहमत होंगे जब 1. दोनों सत्य बोंले 2. दोनों असत्य बोलें।

A तथा B के सत्य बोलने की प्रायिकता = $P(A). P(B) = xy$

A तथा B के असत्य बोलने की प्रायिकता = $P(A). P(B) = (1-x) (1-y)$

अतः दोनों के सहमत होने के cases की संख्या = $xy + (1-x) (1-y)$

P (कथन के सत्य) = सत्य कहने के cases की संख्या / कुल cases की संख्या

$$= \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

4.3.1.2 सशर्त (शर्तयुक्त प्रायिकता)

यदि घटनाएं आश्रित हों तो उपर वर्णित गुणन प्रमेय उपयुक्त नहीं होगा। आश्रित घटनाएं वो हैं जिसमें एक से घटित होने के दूसरे घटनाओं की प्रायिकता प्रभावित हो। घटना B के घटित होने की प्रायिकता जब A पहले ही घटित हो चुका हो को B की शर्त युक्त प्रायिकता कहते हैं। इसे P(B/A) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसी तरह शर्तयुक्त A जब B पहले घटित हो चुका है को P(A/B) द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

शर्तयुक्त प्रायिकता की परिभाषा–

यदि A तथा B आश्रित घटनाएं हो तो B की शर्तयुक्त प्रायिकता जब A पहले ही घटित हो चुका हो इस प्रकार परिभाषित करते हैं और

P(B/A) = P(AB)/P(A), P(A)> 0

इसी प्रकार A की शर्तयुक्त प्रायिकता given B को परिभाषित करते हैं तथा

P(A/B) = P(AB)/P(B), P(B)> 0

4.3.2 आश्रित घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय या सशर्त प्रायिकता के संदर्भ में गुणन प्रमेय–

जब घटनाएं स्वतंत्र न हों अर्थात् आश्रित घटनाएं हो तो गुणन प्रमेय को संशोधित करने की आवश्यकता है। संशोधित गुणन प्रमेय कहता है कि यदि A और B दो आश्रित घटनाएं हो तो उनके एक साथ घटित होने की प्रायिकता (समसामयिक प्रायिकता) बराबर होगी एक घटना की प्रायिकता और दूसरी घटना की सशर्त प्रायिकता के गुणन के बराबर।

सांकेतिक भाषा में,

P(A B) = P(A) . P(B/A)

या P(A B) = P(B). P(A/B)

जहां P(B/A) = B की सशर्त प्रायिकता given A

P(A/B) = A की सशर्त प्रायिकता given B

उदाहरण 4.24 : एक थैले में 10 सफेद और 5 काली गेंदे हैं। दैव निदर्शन द्वारा दो गेंदों बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। दोनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता बताओ।

हल : प्रथम प्रयास में काली गेंद निकालने की प्रायिकताए P(A) = $\frac{5}{10+5} = \frac{5}{15}$

पहले प्रयास में काली गेंद निकालते और बिना प्रतिस्थापन दूसरी काली गेंद निकालने की प्रायिकता = P(B/A) = $\frac{4}{10+4} = \frac{4}{14}$

चँकि घटनाएं आश्रित है अतः दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता

P(A B) = P(A) . P(B/A)

$$= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

उदाहरण 4.25: तीन लगातार प्रयासों में बिना प्रतिस्थापन क्रमशः राजा, रानी और गुलाम के पत्ते निकालने की प्रायिकता बताओ।

हल : राजा निकालने की प्रायिकता = 4/52

एक रानी निकालने की प्रायिकता जब एक राजा पहले ही निकाला जा सकता है,

P(B/A) = 4/51

एक राजा और रानी निकालने के बाद गुलाम आने की प्रायिकता,

P(C/AB) = $\frac{4}{50}$

चँकि घटनाएं आश्रित है अतः एक राजा, एक रानी और गुलाम निकालने की प्रायिकता, P(ABC) = $\frac{4}{52}\times\frac{4}{51}\times\frac{4}{50}=\frac{8}{16575}$

उदाहरण 4.26: चार पत्ते बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। उन सबके इक्के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः प्रथम प्रयास में एक इक्का निकालने की प्रायिकता = 4/52

पहले इक्के के बाद दूसरे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 3/51

पहले तथा दूसरे इक्के के बाद तीसरे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 2/50

पहले, दूसरे, तीसरे इक्के के बाद चौथे बार में इक्का आने की प्रायिकता = 1/49

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं, अतः वांछित प्रायिकता

P(I इक्का × II इक्का × III इक्का × IV इक्का) = $\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}=\frac{1}{270725}$

उदाहरण 4.27: एक बैग में 5 सफेद और 8 लाल गेंद है। दो बार 3 गेंद इस प्रकार निकाली जाती है कि 1. दूसरी निकासी के पहले गेंद प्रतिस्थापित कर दी जाती है। और 2. दूसरी निकासी के पहले गेंद प्रतिस्थापित नहीं कि जाती। दोनों परिस्थितियों पहली निकासी में 3 सफेद और दूसरी निकासी में 3 लाल गेंद आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः 1. जब गेंदों का प्रतिस्थापन किया गया है बैग में कुल गेंदों कीसंख्या= 8+5=13

13 में से 3 गेंद $13C_3$ तरह से निकाली जा सकती है।

5 सफेद में से 3 सफेद गेंद $5C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

3 सफेद गेंद की प्रायिकता, P(3W) = $\frac{5C_3}{13C_3}$

चूंकि पहली निकासी के बाद गेंदों का प्रतिस्थापन हुआ है अतः बैग में 13 गेंद है तो 8 लाल में से 3 लाल गेंद $8C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

$\therefore$ 3 लाल गेंद की प्रायिकता = P(3R) = $\frac{8C_3}{13C_3}$

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः वांछित प्रायिकता

P(3W and 3R) = P(3W) × P(3R)

$$= \frac{5C_3}{13C_3} \times \frac{8C_3}{13C_3} = \frac{10}{286} \times \frac{56}{286}$$
$$= \frac{140}{20449}$$

2. जब दूसरी निकासी से पहे गेंदों का प्रतिस्थापन न किया गया हो

बैग में कुल गेंदों की संख्या = 8 + 5 = 13

13 में से 3 गेंद $13C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

5 सफेद में से 3 सफेद गेंद $5C_3$ तरह से निकाल सकते हैं।

3 सफेद गेंद आने की प्रायिकता = $\frac{5C_3}{13C_3}$

प्रथम निकासी के बाद 10 गेंदें बची हैं, 10 में से 3 गेंद $10C_3$ तरह से निकाली जा सकती है।

8 लाल में से 3 लाल गेंद तरह से निकाली जा सकती है।

3 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = $\frac{8C_3}{10C_3}$

चूंकि दोनों घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

$$\text{P(3W and 3R)} = \frac{5C_3}{13C_3} \times \frac{8C_3}{10C_3}$$
$$= \frac{5}{143} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{429}$$

उदाहरण 4.28 : एक बैग, जिसमें 5 सफेद और 3 लाल गेंद है, चार गेंदे एक के बाद एक करके बिना प्रतिस्थापन निकाली जाती है। प्रायिकता बताओ।

1. सफेद और लाल गेंद एक के बादएक आएगी।
2. लाल और सफेद गेंद वैकल्पिक रूप से आएगी।

हल : 1. 1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता= 5/8

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 3/7

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 4/6

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 2/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

P (1W 1R 1W 1R) = $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{14}$

2. 1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 3/8

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 5/7

1 लाल गेंद निकालने की प्रायिकता = 2/6

1 सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता = 4/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः वांछित प्रायिकता

P(1R 1W 1R 1W) = $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{14}$

4.4 योग तथा गुणन प्रमेय का संयुक्त प्रयोग

प्रायिकता के अन्तर्गत कुछ समस्याएं हैं जहॉ दोनों योग तथा गुणन प्रमेय का एक साथ उपयोग होता है। ऐसी परिस्थितियों में सबसे पहले आप गुणन प्रमेय लागू करेंगे और उसके बाद अंततः योग प्रमेय उपयोग करेंगे।

उदाहरण 4.29: A 80% प्रतिशत मामलों सत्य बोलता है और B 90% कितने प्रतिशत मामलों में एक ही तथ्य को बताने में दोनों में विरोधाभास है।

हलः माना कि A तथा B की सत्य बोलने की प्रायिकता क्रमशः A तथा B है।

$$P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5},\ P(A)=1-P(A)=\frac{1-4}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(B)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10},\ P(B)=1-P(B)=\frac{1-2}{10}=\frac{1}{10}$$

उनमें विरोधाभास तभी होगा जब तक सत्य बोले और दूसरा असत्य। अतः निम्न 2 संभावनाएं हैं

1. A सत्य बोले और B असत्य
2. B सत्य बोले और A असत्य

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

1. I संभावना की प्रायिकता = $P(A).P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$
2. II संभावना की प्रायिकता = $P(A).P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{50}$

चूंकि दोनों घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछति प्रायिकता = $\frac{4}{50}+\frac{9}{10}=\frac{13}{50}=26\%$

उदाहरण 4.30 : एक थैले में 5 सफेद और 4 काली बेंदे हैं थैले से एक गेंद निकाली जाती है और पुनः थैले में प्रतिस्थापित करने के उपरांत दूसरी गेंद निकालते हैं। दोनों गेंदों के अलग–अलग रंग के होने की प्रायिकता बताओ अर्थात् एक सफेद और एक काली?

हलः यहाँ पर दो संभावनाएं हैं:

1. पहली बार सफेद और दूसरी बार काली गेंद निकालते हैं।
2. पहली बार काली और दूसरी बार सफेद गेंद निकालते हैं।

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से–

1. प्रथम केस की प्रायिकता = $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{81}$
2. द्वितीय केस की प्रायिकता= $\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{20}{81}$

चूंकि घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी है अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता– $=\frac{20}{81}+\frac{20}{81}=\frac{40}{81}$

उदाहरण 4.31: एक थैले में 5 सफेद और 3 लाल गेंदें हैं और क्रमशः 4 गेंद बिना प्रतिस्थापन निकाली जाती है। उनके alternatively अलग होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : अल्टरनेटिवली 4 रंग हो सकते हैं।

1. सफेद, लाल, सफेद, लाल (1W 1R 1W 1R)
2. लाल, सफेद, लाल, सफेद (1R 1W 1R 1W)

1. सफेद गेंद से शुरूआत हो

पहली गेंद सफेद होने की प्रायिकता = 5/8

पहली गेंद लाल होने की प्रायिकता = 3/7

पहली गेंद सफेद होने की प्रायिकता = 4/6

पहली गेंद लाल होने की प्रायिकता = 2/5

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

P(1W 1R 1W 1R) = $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{14}$

चूंकि 1. तथा 2. पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं है अतः योग प्रमेय द्वारा

वांछित प्रायिकता = $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

उदाहरण 4.32 :

हल : माना कि सम संख्या आने की प्रायिकता च तथा विषम संख्या आने की प्रायिकता q है।

सम संख्या : विषम संख्या : : 2 :।

p = p (सम) = 2/3 ; q = p (विषम) = 1/3

यहाँ पर दो पारस्परिक संभावनाएं है जिसमें दो संख्याओं का योग सम हो सकते हैः

1. पहले बार फेंकने पर विषम संख्या आए और दूसरी बार फेंकने पर विषय संख्या आए।
2. पहल बार फेंकने पर सम संख्या आए और दूसरी बार फेंकने पर सम संख्या आए।

चूंकि घटनाएं आश्रित हैं अतः गुणन प्रमेय की सहायता

1. I केस की प्रायिकता = $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

2. II केस की प्रायिकता = $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

चूंकि संभावनाएं पारस्परिक अपवर्जी है अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता = $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

उदाहरण 4.33: कारीगरों के तीन समूह में 3 आदमी और 1 औरत, 2 आदमी और 2 औरत और 1 आदमी और 3 औरत हैं। प्रत्येक समूह से दैव निदर्शन द्वारा एक कारीगर चुना जाता है। चुने गये कारीगरों के समूह में 1 आदमी और 2 और होने की प्रायिकता बताओ।

हल : यहाँ पर 3 संभावनाएं हो सकती हैं

1. पहले समूह से 1 आदमी और दूसरे व तीसरे समूह से एक–एक और चुनी जाए।
2. दूसरे समूह से एक आदमी तथा पहले और तीसरे समूह से एक–एक औरत चुनी जाए।
3. तीसरे समूह से एक आदमी तथा पहले व दूसरे समूह से एक–एक औरत चुनी जाए।

चूंकि घटनाएं स्वतंत्र है अतः गुणन प्रमेय की सहायता से

1. प्रथम केस की प्रायिकता = $\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$
2. द्वितीय केस की प्रायिकता = $\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{64}$
3. तृतीय केस की प्रायिकता = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{64}$

चूंकि संभावनाएं पारस्परिक अपवर्जी हैं अतः योग प्रमेय की सहायता से

वांछित प्रायिकता = $\frac{18}{64}+\frac{6}{64}+\frac{2}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}$

4.5 प्रायिकता सिद्धान्त में बर्नाली प्रमेय का उपयोग

प्रायिकता समस्याओं के समाधान में बर्नाली प्रमेय बहुत उपयोगी है। यह प्रमेय कहता है कि यदि एक घटना या परख या प्रयोग के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात हो तो इसके 1,2,3........r बार घटित होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

$$P(r)=n_{C_r}\ p^r\ q^{n-r} \qquad ; \qquad r=1,2,3,.........n$$

जहां

P(r) = n परख में r सफलता की प्रायिकता

p = सफलता की प्रायिकता या एक परख में घटना के घटित होने की प्रायिकता

q = असफलता की प्रायिकता या एक परख में घटना के घटित न होने की प्रायिकता

n = कुल परखों की संख्या

निम्नलिखित उदाहरण इस प्रमेय के उपयोग को दर्शाते हैं।

उदाहरण 4.34 : तीन सिक्के एक साथ (समसामयिक) उछाते जाते हैं। एक साथ दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : चूंकि दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात करना है अतः बर्नाली प्रमेय की सहायता से यह आसान होगा। इस प्रमेय के अनुसार

$$P(r) = n_{C_r}\ p^r\ q^{n-r}$$

दिया गया है n = 3, r = 2, p= सिक्के के एक उछाल पर चित आने की प्रायिकता = 1/2

$$P(2H) = ^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= \frac{3!}{(3-2).!2!} \times \frac{1}{8} = 3\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

उदाहरण 4.35: एक सेना की टुकड़ी में 3/5 सैनिक विवाहित/शादीशुदा है और बाकी के 2/5 सैनिक अविवाहित है। 5 सैनिकों की पंक्ति में 4 सैनिकों के विवाहित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : यहाँ पर n= 5, r= 4; p = विवाहित सैनिक होने की प्रायिकता = 3/5

q = 1-p = 1-3/5 = 2/5

P(4 विवाहित सैनिक) = $= ^5C_4\left(\frac{B}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1$

$$= \frac{5!}{4!1!}\ \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5} \times \frac{2}{5} = \frac{162}{625}$$

उदारहण 4.36 : यदि एक परिवार में 3 बच्चे हो तो परिवार में 1 लड़की होने की प्रायिकता बताओ।

हल : दिया गया है, n= 3, r = 1

p = लड़की होने की प्रायिकता = 1/2

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(r=1) = P(1G) = ^3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

उदाहरण 4.37: इंग्लैण्ड के खिलाफ भारत के क्रिकेट मैच जीतने की प्रायिकता 1/3 है। यदि भारत और इंग्लैण्ड के बीच 3 टेस्ट मैच खेले जाने हो तो प्रायिकता ज्ञात करो 1. भारत तीनों मैच हार जाए 2. भारत कम से कम एक मैच जीत जाए।

हल : n = 3

p = मैच जीतने की प्रायिकता = 1/3

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

1. P (सभी मैच हार जाए) = $P(o) = ^3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

2. P (कम से कम एक मैच जीत जाए)

= 1-P (एक भी मैच न जीते)

$$=1-{}^{3}C_{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

4.6 बेज प्रमेय

बेज प्रमेय का नामकरण ब्रिटिश गणितज्ञ थॉमस बेज के आधार पर किया गया है और यह 1763 में मुद्रित हुआ। बेज प्रमेय की सहायता से स्वयंसिद्ध प्रायिकताएं (prior probabilities) कुछ न्यादर्श जानकारी की सहायता से संशोधित करके प्रतिबंधी प्रायिकताएं प्राप्त की जाती है। इस प्रमेय को विपरीत प्रायिकता प्रमेय भी कहते हैं। माना कि एक फैक्ट्री में A_1 तथा A_2 दो मशीनों द्वारा माल तैयार किया जाता है। माना कि A_1 और A_2 मशीन क्रमशः कुल माल का 70% तथा 30% माल तैयार करती है और क्रमशः 5% तथा 3% की दर से खराब बोल्ट बनाती है। माना कि कुल तैयार माल से एक item समान चुना जाता है और यह खराब पाया जाता है और अब हम यह जानना चाहते हैं कि ये माल, सामान A_1 तथा A_2 मशीन द्वारा बनाये जाने की क्या प्रायिकता है तो यह बेज प्रमेय की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। माना कि एक थैले 6 काली और 4 सफेद गेंदें हैं। दूसरे थैले में 45 काली और 6 सफेद गेंद हैं। एक थैले से दैव निदर्शन द्वारा एक गेंद निकालने पर वह काली पायी जाती है यदि आप यह जानना चाहते हैं कि वह गेंद पहल या दूसरे थैले से आयी है तो इसे बेज प्रमेय को उपयोग करके निकाल/ज्ञात कर सकते हैं।

बेज प्रमेय का कथन :

यदि A_1 तथा A_2 परस्पर अपवर्जी और सर्वांगपूर्ण घटनाएं हो तथा B एक ऐसी घटना हो जो कि A_1 तथा A_2 के जोड़े के साथ घटित हो तो A_1 तथा A_2 शर्तयुक्त/सशर्त प्रायिकता जबकि B घटित हो चुका हो इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_2).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)}$$

इसी तरह

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)}$$

साधारणीकरणः

बेज प्रमेय को तीन या अधिक घटनाओं के लिए विस्तृत कर सकते हैं। यदि तथा तीन पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हो तथा एक ऐसी घटना हो जो तथा के संयोजन के साथ घटित हो तो

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+P(A_3).P(B/A_3)}$$

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+P(A_3).P(B/A_3)}$$

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3).P(B/A_3)}{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+P(A_3).P(B/A_3)}$$

उदाहरण 4.38 : एक बोल्ट फैक्ट्री में A, B तथा C मशीनें कुल माल का क्रमशः 25%, 35% तथा 40% तैयार करती है। तैयार माल से क्रमशः 5, 4 तथा 2 प्रतिशत बोल्ट खराब हो जाते हैं। दैव निदर्शन से एक बौल्ट निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है। इसके मशीन C से तैयार होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि A, B तथा C मशीनों द्वारा तैयार बोल्ट को निकालने की घटना क्रमशः A, B, तथा C है और D बोल्ट के खराब होने की घटना दर्शाता है।

दी गई सूचना का आधार पर

P(A) = 35% = 25/100 = 0.25

P(B) = 35% = 35/100 = 0.35

P(C) = 40% = 40/100 = 0.40

सशर्त प्रायिकता

P(D/A) 5% = 5/100 = 0.05

P(D/B) = 4% = 4/100 = 0.04

P(D/C) = 2% = 2/200= 0.02

नीचे दिए गए तालिका/टेबल में दी गई जानकारी रखने पर

घटना	**स्वयंसिद्ध प्रायिकता**	**सशर्त प्रायिकता**	**संधि प्रायिकता**
A	P(A) = 0.25	P(D/A) = 0.05	0.25 × 0.05
B	P(B) = 0.35	P(D/B) = 0.04	0.35 × 0.04
C	P(C) = 0.40	P(D/C) = 0.02	0.40 ×0.02

हमें ज्ञात करना है कि खराब बोल्ट मशीन द्वारा तैयार किया गया है अर्थात् P(C/D)

P(C/D) = $\frac{\text{मशीन C की सन्धि प्रायिकता}}{\text{तीनों मशीनों की संधि प्रायिकता का योग}}$

$$=\frac{0.40\times0.02}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02}$$

$$=\frac{0.008}{0.0125+0.014+0.008}=\frac{0.008}{0.0345}$$

$$=0.2318 \;\; or \;\; 23.18\%$$

उदाहरण 4.39: एक स्टील पाईप बनाने वाली फर्म अपने तीन प्लांटों से क्रमशः 500, 1000 तथा 2000 इकाई का निर्माण करती है। पूर्व अनुभव के अनुसार तीनों प्लांटों द्वारा खराब माल बनाने का अंश क्रमशः 0.005, 0.008 और 0.010 है। दिन भर में बनाए गए सभी माल में से एक पाईप चुना जाता है और वह खराब निकलता है। उसके पहले प्लांट द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : मानाकि E_1, E_2 तथा E_3 प्लांट्स I, II तथा III से स्टील पाइप चुनने की घटनाएं है तथा D पाइप के खराब होने की प्रायिकता है।

दी गई जानकारी : सशर्त प्रायिकताएं हैं:

$$P(E_1) = \frac{500}{500+1000+2000} = \frac{1}{7} \qquad P(D/E_1) = 0.005$$

$$P(E_2) = \frac{1000}{5+1000+2000} = \frac{2}{7} \qquad P(D/E_2) = 0.008$$

$$P(E_3) = \frac{2000}{500+1000+2000} = \frac{4}{7} \qquad P(D/E_3) = 0.010$$

दी गई जानकारी को टेबल में रखने पर

घटना 1	स्वयंसिद्ध प्रायिकता 2	प्रतिबंधी प्रायिकता 3	संधि प्रायिकता 2×3
E_1	$P(E_1)= 1/7$	$P(D/E_1) = 0.005$	$1/7 \times 0.005$
E_2	$P(E_2)= 2/7$	$P(D/E_2) = 0.008$	$2/7 \times 0.008$
E_3	$P(E_3)= 4/7$	$P(D/E_3) = 0.010$	$4/7 \times 0.010$

आपको ज्ञात करना है अर्थात् खराब पाइप के प्लांट I द्वारा बनाये जाने की प्रायिकता

$$P(E_1/D) = \frac{\text{I प्लांट की संधि प्रायिकता}}{\text{तीनों मशीनों की संधि प्रायिकता का योग}}$$

$$= \frac{\frac{1}{7}\times 0.05}{\frac{1}{7}\times 0.005+\frac{2}{7}\times 0.008+\frac{4}{7}\times 0.010}$$

$$= \frac{0.005}{0.005+0.008+0.010} = \frac{0.005}{0.061}$$

$$= \frac{5}{61}$$

उदाहरण 4.40: एक कंपनी के अध्यक्ष पद के लिए तीन अभ्यर्थी A, B तथा C ने आवेदन किया। उनके चयनित होने की प्रायिकता अनुपात क्रमशः 4:5:3 है। यदि A का चयन हो जाता है तो उसके कंपनी में इंटरनेट ट्रेनिंग को लागू कराने की प्रायिकता 0.30 है। इसी तरह B तथा C की प्रायिकता क्रमशः 0.50 तथा 0.60 है। कंपनी के इंटरनेट ट्रेनिंग को लागू कराने की प्रायिकता क्या है? और अध्यक्ष B के इंटरनेट ट्रेडिंग का परिचय कराने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हलः माना कि A, B तथा C के कंपनी का अध्यक्ष चुने जाने की घटना क्रमशः A_1, A_2 तथा A_3 है तथा माना कि E कंपनी में इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करने की घटना है। अतः

$$P(A_1) = \frac{4}{4+5+3} = \frac{4}{12}, \qquad P(A_2) = \frac{5}{4+5+3} = \frac{5}{12}$$

$$P(A_3) = \frac{3}{4+5+3} = \frac{3}{12}, \qquad P(E/A_1) = 0.30$$

$$P(E/A_2) = 0.50, \qquad P(E/A_3) = 0.60$$

दी गयी जानकारी को टेबल में रखने पर

घटना 1	स्वयंसिद्ध प्रायिकता 2	प्रतिबंधी प्रायिकता 3	संधि प्रायिकता 2 × 3
A_1	$P(A_1) = 4/12$	$P(E/A_1) = 0.30$	$4/12 \times 0.30$
A_2	$P(A_2) = 5/12$	$P(E/A_1) = 0.50$	$5/12 \times 0.50$
A_3	$P(A_3) = 3/12$	$P(E/A_1) = 0.60$	$34/12 \times 0.60$

1. P (कंपनी इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करता है।)

$P(E) = P(A_1\,E$ या $A_2\,E$ या $A_3\,E)$

$= P(A_1\,E) + P(A_2\,E) + P(A_3\,E)$

$= P(A_1)\,.\,P(E/A_1) + P(A_2).\,P(E/A_2) + P(A_3)\,.\,P(E/A_3)$

$$= \frac{4}{12} \times 0.30 + \frac{5}{12} \times 0.50 + \frac{3}{12} \times 0.60$$

$$= \frac{55}{120} = \frac{11}{24}$$

2. आपको ($P(A_2/E)$) ज्ञात करना है अर्थात् इंटरनेट ट्रेडिंग अध्यक्ष B द्वारा लागू किया जाए।

बेज प्रमेय की सहायता से

P (अध्यक्ष B इंटरनेट ट्रेडिंग लागू करे)

B की संधि प्रायि

संधि प्रायिकता व $P(A_2/E) =$

$$= \frac{\frac{5}{12} \times 0.50}{\frac{4}{12} \times 0.30 + \frac{5}{12} \times 0.50 + \frac{3}{12} + 0.60}$$

$$= \quad = \frac{\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}} = \frac{5}{11}$$

4.7 सारांश

प्रायिकता का योग प्रमेय पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए उपयोग करते हैं न कि अपारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के लिए। प्रायिकता का गुण प्रमेय स्वतंत्र तथा आश्रित घटनाओं के लिए उपयोग करते हैं। अतः इसे सशर्त प्रायिकता में भी उपयोग कर सकते हैं। एक परख या घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करने में बर्नाली प्रमेय बहुत उपयोगी है और बेज प्रमेय का उपयोग प्रायिकता समस्याओं के समाधान में उपयोगी है। (स्वयंसिद्ध प्रायिकता और प्रतिबंधी प्रायिका की सहायता से)

4.8 शब्दावली

पारस्परिक अपवर्जी घटनाएः दो घटनाएँ उस समय परस्पर अपवर्जी होती हैं जब वे एक ही समय घटित नहीं हो सकती हैं

4.9 बोध प्रश्न

1. ....वो हैं जिसमें एक से घटित होने के दूसरे घटनाओं की प्रायिकता प्रभावित हो।
2. .... = P(A) × P(B)
3. बेज प्रमेय का नामकरण ब्रिटिश गणितज्ञ .... के आधार पर किया।

4.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. आश्रित घटनाएं 2. P(AB) 3. थॉमस बेज

4.11 स्वपरख प्रश्न

1. 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके पान अथवा चिड़ी की रानी होने की प्रायिकता बताओ।
2. 25 छात्रों की कक्षा में प्रत्येक छात्र को 1 से 25 तक रोल नं0 दिया गया है। एक प्रश्न का उत्तर देने के लिए एक छात्र को दैव निदर्शन द्वारा चुना जाता है। चुने गये छात्र के रोल नं0 का 5 या 7 से गुणक होने की प्रायिकता बताइए?
3. एक थैले में 63 लाल, 6 सफेद, 4 नीली तथा 7 पीली गेंदें हैं। एक गेंद निकालने पर उसके सफेद या पीली होने की प्रायिकता बताओ।
4. एक साथ तीन पांसे फेंकने पर योग 17 या 18 आने की प्रायिकता बताओ।
5. एक साथ 2 पांसे फेंकने पर योग 9 या 11 आने की प्रायिकता बताओ।
6. एक पत्तों की गड्डी में से पान या राजा पत्ता निकालने की प्रायिकता बताओ।
7. एक थैले में 1 से 50 से अंकित 50 गेंदें हैं। दैव निदर्शन से एक गेंद निकालने पर उसके 5 या 7 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
8. एक कांट्रैक्टर के मरम्मत कांट्रेक्ट हासिल करने की प्रायिकता 2/3 है तथा बिजली कांट्रैक्ट हासिल न कर पाने की प्रायिकता 5/9 है। कम से कम एक कांट्रैक्ट हासिल करने की प्रायिकता 4/5 है। दोनों कांट्रैक्ट हासिल करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

9. एक छात्र दो फर्मों X तथा Y में नौकरी के लिए आवेदन करता है। X फर्म में चयनित होने की प्रायिकता 0.7 है तथा Y फर्म में 0.5। दोनों फर्मों में उसका अभ्यर्थन निरस्त होने की प्रायिकता 0.6 है। किसी एक फर्म में चयनित होने की प्रायिकता बताओ।
10. एक कक्षा के 3 पेपरों A, B तथा C की परीक्षा का परिणाम दिया गया है। यह अनुमान लगाया जाता है कि 40 प्रतिशत विद्यार्थी पेपर A में फेल हुए, 30 प्रतिशत पेपर B में फेल हुए तथा 25 प्रतिशत पेपर C में फेल हुए, 15 प्रतिशत पेपर A तथा B दोनों में फेल हुए, 12 प्रतिशत पेपर B तथा C में फेल हुए, 10 प्रतिशत पेपर A तथा C में फेल हुए तथा 3 प्रतिशत सभी पेपरों में फेल हुए। दैव निदर्शन से चयनित छात्र के कम से कम एक पेपर में चयनित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
11. एक सिक्के को 3 बार उछालने पर 3 पट आने की प्रायिकता बताओ।
12. 3 वायुयान बाम्बे से लंदन की उड़ान भरते हैं। उनके सुरक्षित तरीके से पहुँचने के अनुकूल स्थिति 2:1, 3:1 तथा 4:1 है। उन सभी के सुरक्षित पहुँचने की प्रायिकता बताओ।
13. एक पद के 2 स्थानों पर साक्षात्कार के लिए एक पति और पत्नी आवेदन करते हैं पति के चयन की प्रायिकता 4/5 है और पत्नी की चयन प्रायिकता 3/4 है। प्रायिकता बताओ जब
    1. दोनों का चयन हो
    2. दोनों में से किसी का भी चयन न हो
    3. केवल पत्नी का चयन हो।
14. मोहन के ड्राइविंग टेस्ट पास करने की अनुकूल स्थिति 3:5 है तथा राम के लिए उसी टेस्ट को पास करने की अनुकूल स्थिति 3:2 है। दोनों के टेस्ट पास करने की प्रायिकता क्या है?
15. एक विश्वविद्यालय को सांख्यिकी का पेपर जांचने के लिए परीक्षण नियुक्त करना है। 40 परीक्षकों के पैनल में 10 महिला हैं, उनमें से 30 हिन्दी जानती हैं तथा 5 पी.एचडी. हैं। हिन्दी जानने वाली पीएचडी धारी महिला के परीक्षक चुने जाने की प्रायिकता बताओ।
16. सांख्यिकी की एक समस्या 4 विद्यार्थियों को दी जाती है। उनके समस्या हल करने का संयोग क्रमशः 1/2, 1/3, 1/4 तथा 1/5 है। समस्या के हल हो जाने की प्रायिकता बताओ।
17. A तथा B ने सायं 5 से 7 के बीच दुर्गा मंदिर पर मिलने का निर्णय लिया और साथ ही शर्त रखी कि कोई भी 30 मिनट से ज्यादा इंतजार नहीं करेगा। उनके मिलने की प्रायिकता बताओ।
18. एक लड़के को छात्रवृत्ति प्राप्त करने की प्रायिकता 0.90 है तथा लड़की के लिए प्रायिकता 0.80 है। उनमें से कम से कम एक को छात्रवृत्ति प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

19. एक पांसे को 3 बार फेंकने पर कम से कम एक बार 6 आने की प्रायिकता बताओ।
20. एक थैले में 6 सफेद तथा 4 काली गेंदे हैं। एक के बाद एक बिना प्रतिस्थापन के 2 गेंद निकालने पर उन दोनों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
21. एक थैले में 7 लाल, 5 सफेद तथा 4 नीली गेंदे हैं। एक के बाद एक करके तीन गेंद निकाली जाती है उनके लाल, सफेद और नीले क्रम में निकाले जाने की प्रायिकता बताओ जब प्रतिस्थापन न किया गया हो।
22. एक बादशाह और एक इक्का इसी क्रम में निकालने की प्रायिकता ज्ञात करो जब पहला कार्ड प्रतिस्थापित न किया गया हो।
23. एक बक्से में 1,2,3,4,5,6,7,8 तथा 10 अंकित 8 टिकट हैं। दैव निदर्शन से एक टिकट निकाल कर उसे अलग रख दिया जाता है। पुनः एक कार्ड निकाला जाता है। दोनों टिकटों पर सम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
24. एक थैले में 5 सफेद तथा 4 काली गेंदे हैं। बिना प्रतिस्थापन के 4 गेंदे निकाली जाती है। सफेद तथा काली गेंदें एक के बाद एक निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें।
25. A के सत्य बोलने की अनुकूल स्थिति 3:2 तथा B के सत्य बोलने की अनुकूल स्थिति 5:3 है। कितने प्रतिशत केसों में उनके जवाब एक दूसरे से विपरीत होंगे।
26. एक बक्से में 10 सफेद और 5 काली गेंदे हैं बिना प्रतिस्थापन के 4 गेंद निकाले जाने पर उनके क्रमशः भिन्न रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
27. दो थैले हैं। एक थैले में 4 सफेद तथा 2 काली गेंद हैं। दूसरे थैले में 5 सफेद तथा 4 काली गेंद हैं। एक थैले से दूसरे थैले में 2 गेंद विस्थापित की जाती है। दूसरे थैले से एक गेंद निकालने पर उसके सफेद होने की प्रायिकता बताओ।
28. एक पर्स में 2 चांदी तथा 4 तांबे के सिक्के हैं। एक दूसरे पर्स में 4 चांदी तथा 3 तांबे के सिक्के हैं। यदि दोनों पर्स से दैव निदर्शन द्वारा एक सिक्का निकालने पर उसके चांदी का होने की क्या प्रायिकता है।
29. A के सत्य बोलने की स्थिति 3:2 तथा B के सत्य बोलने की स्थिति 5:3 है। कितने प्रतिशत मामलों में तथ्यों को बताने पर विरोधाभास की स्थिति होगी?
30. एक जहाज के पोर्ट पर सुरक्षित पहुँचने की संभावना 9/10 है। 5 में से 4 जहाज के पोर्ट पर सुरक्षित पहुँचने की प्रायिकता बताओ।
31. एक सिक्के को 5 बार फेंकने पर 3 चित आने की प्रायिकता बताओ।
32. यदि तीन सिक्कों को एक साथ फेंका जाए तो उनके एक जैसे गिरने की प्रायिकता बताओ।
33. 8 सिक्कों को एक साथ उछालने पर 6 चित तथा 2 पट आने की प्रायिकता बताओ।

34. एक सिक्के को 5 बार फेंकने पर कम से कम एक बार चित आने की प्रायिकता बताओ।

35. एक फैक्ट्री में दो मशीन हैं। मशीन 1 कुल उत्पादन का 30 प्रतिशत तथा मशीन 2 70 प्रतिशत माल निर्मित करती है। मशीन 1 तथा मशीन 2 द्वारा क्रमशः 5 प्रतिशत तथा 1 प्रतिशत माल खराब होता है। यदि एक खराब माल चुना जाए तो उसके मशीन 1 द्वारा निर्मित होने की प्राथमिकता बताइए।

36. रूम नं0 1 में 4 लड़के तथा 2 लड़कियाँ तथा रूम नं0 2 में 4 लड़के तथा 3 लड़कियाँ हैं। दोनों में से किसी रूम की एक लड़की बहुत जोर से हसती है। उस हँसने वाली लड़की के रूम नं0 2 के होने की प्राथमिकता बताओ।

37. एक पर्स में 3 एक रूपये के सिक्के हैं तथा चार 50 पैसे के सिक्के हैं। पर्सों में से किसी पर्स से एक रूपये के एक सिक्के को निकाला जाता है। उसके पहले पर्स से निकाले जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

38. एक समान दो बक्सों में क्रमशः 4 सफेद तथा 3 लाल गेंद और 3 सफेद तथा 7 लाल गेंद हैं। एक बक्सा दैव निदर्शन द्वारा चुना जाता है और एक गेंद भी निकाली जाती है। यदि चुनी गई गेंद सफेद हो तो उसके पहले बक्से से निकाले जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।

39. एक स्टील पाइप का निर्माण करने वाली कंपनी 3 प्लांटों से प्रतिदिन क्रमशः 250, 350 तथा 400 यूनिट उत्पादन होता है। पूर्व अनुभव के अनुसार इन प्लांटों द्वारा खराब माल का उत्पादन करने का अंश क्रमशः 0.05, 0.04 तथा 0.02 है। यदि दिन भर के कुल उत्पादन से एक पाइप चुनने पर उसके खराब होने पर उसके पहली प्लांट से निर्मित होने की प्रायिकता बताओ।

स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1.	14/52	2.	8/25
3.	13/20	4.	1/54
5.	1/54	6.	4/13
7.	8/25	8.	14/15
9.	0.8	10.	0.39
11.	1/8	12.	2/5
3.	3/5, 1/20, 3/20	14.	9/40
15.	3/128	16.	4/5
17.	7/16	18.	0.98
19.	91/216		
20.	1/3	21.	1/24
23.	4/663	23.	5/14
24.	5/63	25.	19/40
26	10/91	27.	19/33
28.	19/21	29.	47.5%
30.	59049/100000	31.	5/16
32.	1/4	33.	28/256

34.	31/32	35.	15/22
36.	9/17	37.	27/55
38.	40/61	39.	25/69

4.12 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *'Business Statistics'* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., '*Advanced Statistics*' Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 5 द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- वास्तविक आवृति वितरण की व्याख्या कर सकें।
- सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण की व्याख्या कर सकें।
- द्विपद प्रायिकता वितरण की व्याख्या कर सकें।
- प्वॉयसन वितरण एवं उनके उपयोग का वर्णन कर सकें।

5.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी में विभिन्न तरह के वितरणों का अध्ययन किया जाता है। वे प्रमुखतया दो श्रणी में वर्गीकृत किये गये हैं। पहला वास्तविक आवृत्ति वितरण तथा दूसरा सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण। पहला वितरण वास्तविक Observations समंकों था घटना/प्रयोग पर आधारित है तथा जबकि दूसरा न तो वास्तविक समंकों या प्रयोग पर आधारित है और न ही उससे जनित है।

5.2 वास्तविक आवृत्ति वितरण

वास्तविक आवृत्ति वितरण उन आवृत्ति वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंक या प्रयोग से प्राप्त किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, किसी कक्षा के 70 विद्यार्थियों को प्राप्त हुए अंकों का वास्तविक वितरण निम्न प्रकार है :

अंक	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
विद्यार्थियों की संख्या	5	15	20	25	5

वास्तविक आवृत्ति वितरणों का विश्लेषण सामान्यतया विभिन्न सांख्यिकीय उपकरणों जैसे औसत, अपकिरण तथा विषमता इत्यादि की सहायता से करते हैं।

5.3 सैद्धान्तिक या प्रायिकता वितरण

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंकों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं होते परन्तु निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त किए जा सकते हैं। सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या प्रत्याशित आवृत्ति वितरण कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि 4 सिक्कों को 160 बार टास किया जाए तथा चित आने की घटना को सफलता मानी जाए तो प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर प्रत्याशित आवृत्ति वितरण निम्न प्रकार से है :

सफलता की संख्या	**प्रायिकता**	**प्रत्याशित आवृत्ति**
(X)	**(p)**	**Expected frequency**
0	1/16	160×1/16 = 10
1	4/16	160×4/16 = 10
2	6/16	160×6/16 = 10
3	4/16	160×4/16 = 10
4	1/16	160×1/16 = 10
योग	$\Sigma p = 1$	160

अतः सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण वास्तविक अवलोकन पर आधारित नहीं है जबकि निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय निकाला जाता है।

5.4 सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के उपयोग

सैद्धान्तिक वितरण के उपयोग निम्न है :

1. दिये गये वितरण की प्रकृति के विश्लेषण में सैद्धान्तिक वितरण उपयोगी है।
2. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण से प्राप्त प्रत्याशित आवृत्तियाँ तार्किक निर्णय लेने में सहायक है।
3. वास्तविक और प्रत्याशित आवृत्तियों की तुलना करने में सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण सहायक है तथा दोनों के बीच का अंतर सार्थक है या अथवा यह अंतर सभी अन्य कारण से है।
4. भविष्यवाणी, प्रक्षेपण तथा पूर्वानुमान में सैद्धान्तिक वितरण सहायक है।
5. सैद्धान्तिक वितरण कई व्यावसायिक तथा अन्य समस्याओं को हल करने में सहायक है। प्वॉयसन वितरण गुणवत्ता नियंत्रण से संबंधित महत्वपूर्ण निर्णय लेने में सहायक है।

6. ऐसी परिस्थितियों में जब वास्तविक प्रयोग कर पाना संभव न हो अथवा वास्तविक अवलोकन प्राप्त करने में बहुत पैसा लगता हो तो अवलोकित आवृत्ति वितरण के स्थान पर सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण का उपयोग किया जाता है।

5.5 सैद्धान्तिक तथा प्रायिकता वितरण के प्रकार

सैद्धान्तिक वितरण के प्रमुख प्रकार :

अ. प्रायिकता वितरण

1. द्विपद वितरण
2. प्वॉयसन वितरण

ब. सतत प्रायिकता वितरण

1. सामान्य वितरण

इस अध्याय में आप सिर्फ द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण का अध्ययन करेंगे। सामान्य वितरण पर अगले अध्याय में चर्चा करेंगे।

5.6 द्विपद वितरण

द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है। इस वितरण की खोज स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नाली ने की। इसका प्रयोग ऐसी परिस्थितियों में करते हैं जब प्रयोग का परिणाम सफलता अथवा असफलता आए। द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जो कि दो संभावितों सफलता तथा असफलता की प्रायिकता बताता है।

5.6.1 द्विपद वितरण की परिभाषा :

द्विपद वितरण को निम्न प्रायिकता फंक्शन से परिभाषित करते हैं

$P(X = x) = {}^nC_x\ Q^{n-x}\ p^x$

जहाँ P =सफलता की प्रायिकता

q = असफलता की प्रायिकता= 1-p

n= परखों की संख्या

P(X = x) = n परखों में x सफलता की प्रायिकता

द्विपद वितरण के प्रायिकता फंक्शन में X के भिन्न मान –2 रखने पर 0,1,2, … …………n सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता निम्न है

सफलता की संख्या (X)	सफलता की प्रायिकता P (X = x)
0	${}^nC_0\, q^{n-0} p^0 = q^n$
1	${}^nC_1\, q^{n-1} p = nq^{n+1} p$
2	${}^nC_2\, q^{n-2} p^2 = \frac{n(n-1)}{2\times1} q^{n-2} p^2$
….	${}^nC_2\, q^{n-2} p^2 = \frac{n(n-1)}{2\times1} q^{n-1} p$

X	${}^{n}C_{2}\, q^{n-x}\, p^{x}$
N	${}^{n}C_{n}\, q^{n-n}\, p^{n} = p^{n}$

5.6.2 द्विपद वितरण लागू करने की मान्यताएँ/परिस्थितियाँ

द्विपद वितरण का प्रयोग केवल निम्न परिस्थितियों में ही कर सकते हैं :

1. परखों की निश्चित संख्या–

यादृच्छिक प्रयोगों की पुनरावृत्ति एक निश्चित संख्या में होती है। अन्य शब्दों में परख की संख्या 'n' निश्चित एवं स्थिर होती है।

2. पारस्परिक अपवर्जी परिणाम–

प्रत्येक परख के दो पारस्परिक अपवर्जी परिणाम–सफलता या असफलता होते हैं। उदाहरण के लिए यदि एक सिक्के को उछाला जाए तो या चित आएगा या पट।

3. प्रत्येक परख में सफलता की प्रायिकता स्थिर है–

सफलता की प्रायिकता जिसे p से प्रदर्शित करते हैं, प्रत्येक परख में स्थिर होती है। दूसरे शब्दों में, सफलता की प्रायिकता प्रत्येक परख में स्थिर रहती है। उदाहरण के तौर पर, एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता बराबर रहती है। अतः $p = p(H) = 1/2$।

4. परख स्वतंत्र है–

द्विपद वितरण में परख स्वतंत्र होते हैं अर्थात् एक परख के परिणाम का अन्य परख के परिणामों पर कोई प्रभाव नहीं डालता।

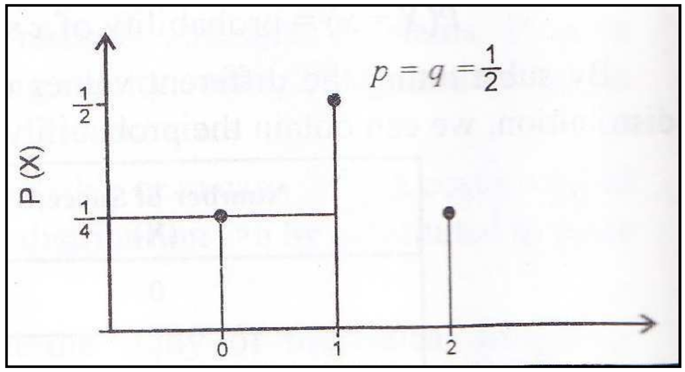
5.6.3 द्विपद वितरण की विशेषताएँ

द्विपद वितरण की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित है :

1. द्विपद वितरण एक सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण है जो कि बीजगणित के द्विपद प्रमेय पर आधारित है।
2. **असतत प्रायिकता वितरण–**द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जिसमें सफलता की संख्या 0, 1, 2, ... n पूर्ण संख्या में दी जाती है।
3. **पंक्ति आरेखः** द्विपद वितरण एक पंक्ति आरेख की सहायता से भी प्रदर्शित कर सकते हैं। सफलता की संख्या (X) को X-अक्ष पर तथा सफलता की प्रायिकता (p) को y-अक्ष पर दर्शाते हैं। निम्नलिखित पंक्ति आरेख एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त होता है।

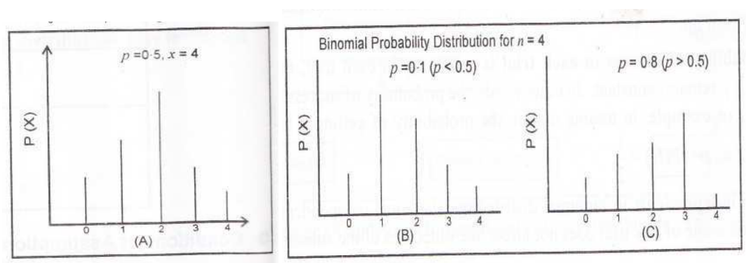
चित की संख्या (X)	प्रायिकता P (X = x)
0	${}^{2}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
1	${}^{2}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

2	${}^2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



4. **द्विपद वितरण का आकार** –द्विपद वितरण का आकार p तथा q के मान पर निर्भर करता है।

   1. यदि $p = q = 1/2$ तो द्विपद वितरण सममित है। (symmetrical) (चित्र A देखें)
   2. जब $p \neq 1/2$, तब द्विपद वितरण असममित है (asymmetrical)। यदि $p < q$ अर्थात् $(p < 1/2)$ तो वितरण धनात्मक में विषमता पायी जाती है और $p > q$ अर्थात् $(p < 1/2)$ तो वितरण में ऋणात्मक विषमता पाई जाती है। चित्र (B) तथा (c) देखें



5. **प्रमुख पाचाल (Main Parameters):**

   द्विपद वितरण के दो प्राचाल है n तथा p। इन दो प्राचालों की मदद से पूरा वितरण ज्ञात कर सकते हैं।

6. **द्विपद वितरण के स्थिर (Constants) :**

   द्विपद वितरण के स्थिर निम्न सूत्र के आधार पर प्राप्त किया जा सकता है।

   माध्यम $(X) = np$

   प्रसरण = $\sigma^2 = npq$

   प्रमाप विचलन = S.D. = $\sqrt{npq}$

संवेग विषमता गुणांक = $\sqrt{\beta_1} = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$

संवेग पृथुशीर्षत्व गुणांक = $\sqrt{\beta_2} = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

7. **उपयोग** :यह उन क्षेत्रों में उपयोगी है जहाँ निष्कर्ष सफलता और असफलता में वर्गीकृत किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, सिक्कों के प्रयोग पांसा फेंकने, मदों/किसी कंपनी द्वारा चीजों का निर्माण इत्यादि में उपयोगी है।

5.7 द्विपद वितरण के उपयोग

अब आप द्विपद वितरण के उपयोग का इस प्रकार अध्ययन करेंगे :

अ. द्विपद वितरण सूत्र का उपयोग :

जब किसी समस्या से संबंधित घटना के घटित होने की प्रायिकता आपको ज्ञात हो अर्थात् p तथा q का मान ज्ञान हो तो n परख में से x सफलता घटित होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

$p\,[X = x] = {}^nC_x\ p^x\ q^{n-x}$

उदाहरण 5.1 : एक सिक्के को तीन बार उछालें जाने पर प्रायिकता ज्ञात करें।

1. पूर्णतया 2 चित
2. कम से कम 2 चित
3. अधिकतम 2 चित

हल : माना कि चित आने की प्रायिकता = p = 1/2

q = पट आने की प्रायिकता = 1/2

और n = 3, $p\,[X = x] = {}^nC_x\ q^{n-x}\ p^x$

(i) p(2H) = $^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(ii) P(कम से कम 2 चित) = P(2H) + P(3H)

$$= {}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(iii) P (अधिकतम 2 चित) = P(0H) + P(1H) + P(2H)

= 1-P(3H)

$$=1-{}^{3}C_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+{}^{3}C_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$=1-1\times\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

उदाहरण 5.2 : चार सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात करें जब

1. एक भी चित न आए
2. एक भी पट न आए
3. केवल दो चित आए

हल : माना कि चित आने की प्रायिकता = p = 1/2

पट आने की प्रायिकता = q= 1-p = 1-1/2 = 1/2

n = 4, $P(X=x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}\, q^{n-x}$

$$(i)P(0H)={}^{4}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=1\times\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

$$(ii)P(0T)=P(4H)^{4}C_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\times\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

$$(iii)P(2H)={}^{4}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=6\times\frac{1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

उदाहरण 5.3 : एक बम के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता 1/5 है। एक पुल को ध्वस्त/उड़ाने के लिए 2 बम काफी है। यदि 6 बम फेंके जाए तो पुल के ध्वस्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि p = बम के लक्ष्य भेदने की प्रायिकता

q = लक्ष्य न भेदने की प्रायिकता

यहाँ पर

p = 1/5, q= 4/5 q= 1-p

n=6, $P(X=x) = {}^{n}C_{x}\, q^{n-x}\, p^{x}$

यदि दो या उससे अधिक बम पुल से टकराने पर पुल ध्वस्त हो जाएगा।

चूंकि वांछित प्रायिकता = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)

= 1- [P(0) + P(1)]

$$= \left[{}^6C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^0 + {}^6C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \right]$$

$$= 1 - \left[1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6 + 6\frac{(4)^5}{(5)^6} \right] = 1 - \frac{4^6 + 6 \times 4^5}{5^6}$$

$$= 1 - \frac{10240}{15625} = \frac{15625 - 10240}{15625} = \frac{5385}{15625}$$

$$= 0.345$$

उदाहरण 5.4: एक कंपनी में कर्मचारियों के व्यावसायिक बीमारी से ग्रस्त होने का आपतन (incidence) 20% है। दैव दर्शन से चुने गये कर्मचारियों में से 4 या अधिक कर्मचारियों के बीमारी से ग्रस्त होने की प्रायिकता बताओ।

हल : माना कि p = कर्मचारी के बीमारी ग्रस्त होने की प्रायिकता

चूंकि p = 20/100 = 4/5

q = 1-1/5 = 4/5

n= 6

$P(X=x) = {}^nC_x \, q^{n-x} \, p^x$

वांछित प्रायिकता= P(4) + P(5) + P(6)

$$= {}^6C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^4 + {}^6C_5 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$= 15 \times \frac{16}{15625} + 6 \times \frac{4}{15625} + \frac{1}{15625}$$

$$= \frac{240 + 24 + 1}{15625} = \frac{265}{15625} = \frac{53}{3125}$$

$$= 0.01696$$

उदाहरण 5.5 : 1000 परिवारों में जिसमें प्रत्येक के 4 बच्चे हों तो

1. कम से कम एक लड़का
2. अधिकतम 2 लड़की
3. होने का प्रतिशत ज्ञात करो। मनो लड़का तथा लड़की की बराबर प्रायिकता हो।

हल : माना कि p = लड़का की प्रायिकता= 1/2

q = लड़की की प्रायिकता = 1/2

n = 4, N= 1000

1. कम से कम एक लड़का

p (कम से कम एक लड़का) = P(1B) + P(2B)+P(3B)+P(4B)

= 1-P(0B)

$$=1-{}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

कम से कम एक लड़के वाले परिवारों का प्रतिशत = 15/16 ×100 = 93.75%

2. अधिकतम 2 लड़की = P(0G) + P(1G) + P(2G)

= P(4B) + P(3B) + P(2B)

$$={}^4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16}$$

ऐसे परिवारों का प्रतिशत= 11/16 ×100= 68.75%

उदाहरण 5.6 : एक जोड़े पांसे को 7 बार फेंका जाए यदि लोग 7 आने को सफलता माना जाए तो प्रायिकता ज्ञात करें जब

1. एक भी सफलता न हो
2. 6 सफलता हो
3. कम से कम 6 सफलता हो।

36 परिणामों में से योग 7 निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)

हलः माना कि p = योग प्राप्त करने की प्रायिकता = 6/36 = 1/6

$$\therefore q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$=7$$

$$P(X=x)={}^nC_x\quad q^{n-x}\quad p^x$$

1. P(0 सफलता) = ${}^7C_0\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right)^0=\left(\frac{5}{6}\right)^7$

2. सफलता $={}^7C_6\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^6=35\left(\frac{5}{6}\right)^7$

3. कम से कम 6 सफलता = P(6) + P(7)

$$={}^7C_6\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^6+{}^7C_7\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^7$$

$$=35\left(\frac{1}{6}\right)^7+\left(\frac{1}{6}\right)^7$$

$$=36.\left(\frac{1}{6}\right)^7$$

ब. X तथा σ से n, p और q प्राप्त करना

यदि आपके पास द्विपद वितरण का माध्य (X) तथा प्रसरण (σ2) या प्रमाप विचलन (σ) का मान ज्ञात हो आप n, p तथा q का मान ज्ञात कर सकते हैं। निम्नलिखित उदाहरण इस प्रकिया को समझाएगा।

उदाहरण 5.7 : एक द्विपद वितरण का माध्य 20 तथा प्रमाप विचलन 4 है। n, p तथा q का मान ज्ञात करो।

हल : द्विपद वितरण में, माध्य = np

प्रमाप विचलन, SD = √npq

$$X = np = 20 \qquad (1)$$

$$= \sigma = \sqrt{npq} = 4 \qquad (2)$$

दोनों तरह वर्ग करने पर,

$\Rightarrow$ σ= npq = 16 (3)

3. को 2 से विभाजित करने पर

$$\frac{npq}{np} = \frac{16}{20}$$

$\Rightarrow$ q = 16/20 = 4/5

$$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

p का मान 1. में रखने पर

$$n \times \frac{1}{5} = 20$$

$$= n = 100$$

अतः n = 100 , p = 1/5 तथा q= 4/5

उदाहरण 5.8: एक द्विपद वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो जब

P(X=3) = 16, P(X = 7) तथा n = 10

हल :

$$P(X = 3) = {}^{10}C_3 q^{10-3} p^3 = {}^{10}C_3 q^7 p^3$$

$$P(X = 7) = {}^{10}C_7 q^{10-7} p^7 = {}^{10}C_7 q^3 p^7$$

प्रश्नानुसार

$${}^{10}C_3 q^7 p^3 = {}^{10}C_7 q^3 p^7$$

$\Rightarrow q^7 p^3 = 16p^3 q^7 \qquad ({}^{10}C_3 = {}^{10}C_7)$

$\Rightarrow q^4 = 16p^4$

$\Rightarrow q^4 = (2p)^4$

$\Rightarrow$ q = 2p

द्विपद वितरण में

p+q = 1 $\Rightarrow$ p+2p =1 $\Rightarrow$ p = 1/3

$\therefore$ q = 1-p = 1- 1/3 = 2/3

$\therefore$ माध्य = NP = 10/3

प्रमाप विचलन, $SD = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{10}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{20}}{3}$

उदाहरण 5.9 : एक द्विपद वितरण जिसका माध्य 6 तथा प्रसरण 2 हो तो 5 सफलता आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : द्विपद वितरण में

माध्य = np = 6 (1)

प्रसरण = npq = 2 (2)

2. को 1. सये विभाजित करने पर

$$\frac{npq}{np} = \frac{2}{6}$$

$$\therefore q = \frac{1}{3}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

p का मान 1. में रखने पर

$$n \times \frac{2}{3} = 6$$

$$\Rightarrow n = 9$$

यहाँ पर, n = 9, p= 2/3, q 1/3

अतः $P(X = 5) = {}^{9}C_{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

$$= 126 \times \frac{32}{19683} = 0.2048$$

स. X तथा σ का मान ज्ञात करना जब n, p तथा q का मान ज्ञात हो।

उदाहरण 5.10: यदि दोषयुक्त बोल्ट की प्रायिकता 0.1 हो तो 1. माध्य तिाि 2. प्रमाप विचलन 500 में से दोषयुक्त बोल्ट के वितरण का 1. माध्य तथा 2. प्रमाप विचलन ज्ञात करें। विषमता तथा पृथुशीर्षत्व गुणांक प्राप्त करें।

हल : दिया गया है,

p = 0.1; q = 1- 0.1 = 0.9 n= 500

1. माध्य $= np = 500 \times 0.1 = 500 \times \frac{1}{10} = 50$

2. प्रमाप विचलन $= \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0.1 \times 0.9}$

3. विषमता गुणांक $= \left(\sqrt{\beta_1}\right) = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0.9-0.1}{500 \times 0.1 \times 0.9}$

$$= \frac{0.8}{6.70} = 0.119$$

4. पृथुशीर्षत्व गुणांक $= \left(\sqrt{\beta_2}\right) = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

$$= 3 + \frac{1-6(0.1)(0.9)}{500 \times 0.1 \times 0.9}$$

$$= 3.010$$

उदाहरण 5.11: एक सिक्के को 100 बार टॉस करने पर चित आने की संख्या के वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

हलः n= 100, P(H) = p= 1/2, q = 1/2

∴ माध्य = np = 100 × 1/2 = 50

प्रमाप विचलन = $= \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

द. द्विपद वितरण को फिट करना–

वास्तविक डाटा/अवलोकन पर द्विपद वितरण निम्नलिखित प्रक्रिया से फिट करते हैं।

1. दी गई जानकारी के आधार पर p तथा q का मान ज्ञात करो।
2. n तथा N का मान नोट करो, जहां n एक प्रयोग के परखों की संख्या है तथा N सभी प्रयोगों के सभी परखों की कुल संख्या है।
3. दिये गये प्रयोग से आने वाले सभी संभावित सफलताओं की संख्या की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. इन प्रायिकताओं को N से गुणा करने पर आप वांछित प्रत्याशित आवृत्ति प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 5.12 : 4 सिक्कों को 160 बार उछालने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

चित की संख्या	0	1	2	3	4
आवृत्ति	17	52	54	31	6

सिक्कों को निष्पक्ष मानते हुए द्विपद वितरण फिट कीजिए।

हल : माना कि सिक्के निष्पक्ष है तो चित आने की प्रायिकता (p) तथा पट आने की प्रायिकता (q) 1/2 तथा 1/2 है।

यदि n = 4, N = 160

अतः 0,1,2,3,4 चित आने की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात करते हैं

$P(X=x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करने के लिए प्रायिकता को N से गुणा करो।

प्रत्याशित प्रायिकता इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

चित की संख्यां (n)	प्रत्याशित आवृत्ति $N\, {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$
0	$160 \times {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 10$
1	$160 \times {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 40$
2	$160 \times {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 60$
3	$160 \times {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 40$
4	$160 \times {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10$

उदाहरण 5.13 : 4 बच्चों वाले 800 परिवारों के एक सर्वे में निम्नलिखित वितरण प्राप्त हुआ?

लड़कों की संख्या	0	1	2	3	4
परिवारों की संख्या	42	178	290	226	64

एक लड़का तथा लड़की के जन्म की प्रायिकता बराबर होने की परिकल्पना के आधार पर द्विपद वितरण फिट करो।

हल : माना कि लड़का तथा लड़की के जन्म की प्रायिकता बराबर है तो लड़के के जन्म की प्रायिकता, p = 1/2

q = 1- 1/2 = 1/2

यहाँ पर n = , N= 800

0,1,2,3, तथा 4 लड़के होने की प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं।

$P(X\text{-}x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$

P(x) को N से गुणा करने पर प्रत्याशित आवृत्ति प्राप्त होती है। अर्थात् N. P(x)

ये इस प्रकार दी जाती हैः

लड़कों की संख्या (n)	प्रत्याशित आवृत्ति $N\, {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x$
0	$800 \times {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 800 \times \frac{1}{16} = 50$

1	$800\times {}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 800\times\frac{4}{16} = 200$
2	$800\times {}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 800\times\frac{6}{16} = 300$
3	$800\times {}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 800\times\frac{4}{16} = 200$
4	$800\times {}^4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 800\times\frac{1}{16} = 50$

5.8 प्वॉयसन वितरण

प्वॉयसन वितरण एक असतत् प्रायिकता वितरण है और सांख्यिकीय कार्यों में इसका बहुत प्रयोग होता है। 1837 में फ्रेंच गणितज्ञ डा0 सिमन डेनिस प्वॉयसन ने इस वितरण का विकास किया तथा उनके नाम पर इस वितरण का नाम रखा गया। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग उन स्थितियों में करते हैं जब किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत छोटी हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ हो। उदाहरण के लिए, एक निर्माण करने वाली कंपनी में दोषयुक्त मद की प्रायिकता बहुत कम है, एक वर्ष में भूकंप आने की प्रायिकता बहुत कम है, रोड/रास्ता/सड़क पर होने वाले दुर्घटना की प्रायिकता बहुत कम है। ये सभी ऐसी घटनाओं के उदाहरण है जब घटना के होने की प्रायिकता बहुत कम है।

5.8.1 द्विपद वितरण का सीमित रूप में प्वॉयसन वितरण

निम्नलिखित परिस्थितियों में द्विपद वितरण के सीमित रूप में प्वॉयसन वितरण को प्राप्त किया जाता है :

1. n परखों की संख्या अंतत रूप से बड़ी हो, अर्थात् $n \rightarrow \infty$
2. p, सफलता की प्रायिकता बहुत कम हो तथा q असफलता की प्रायिकता बहुत अधिक हो अर्थात् $p\rightarrow 0,\ q\rightarrow 1$
3. सफलता की औसत संख्या (np) एक धनात्मक निश्चित संख्या (m) के बराबर है अर्थात् np = m जहाँ m वितरण का प्राचाल (parameter) है।

5.8.2 प्वॉयसन वितरण की परिभाषा :

द्विपद समीकरण से

$$ {}^nC_x = \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x} $$

चूंकि np = m $\Rightarrow$ p= m/n अतः q = 1-m/n

$$= \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{n^x\ x!} n^x p^x q^{n-x}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).......\left(1-\frac{x-1}{n}\right) q^{n-x} \frac{(np)^x}{x!}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).......\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x} \frac{m^x}{x!}$$

जब $n \to \infty = e^{-m} \dfrac{m^x}{x!} = e^{-m} \dfrac{m^x}{x!}$

प्वॉयसन वितरण निम्नलिखित प्रायिकता फंक्शन से परिभाषित और प्रदर्शित किया जाता है

$$P(X = x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

जहाँ P(X= x) = x सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता

m = np = वितरण का प्राचाल

e = 2.7183

उपरोक्त प्रायिकता वितरण में के विभिन्न मान रखने पर सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं :

सफलता की संख्या (X)	प्रत्याशित P (x)
0	$e^{-m} \dfrac{m^0}{0!} = e^{-m}$
1	$e^{-m} \dfrac{m^1}{0!} = me^{-m}$
2	$e^{-m} \dfrac{m^2}{2!} = \dfrac{m^2}{2} e^{-m}$
3	$e^{-m} \dfrac{m^3}{3!} = \dfrac{m^3}{3} e^{-m}$
...	
x	$e^{-m} \dfrac{m^x}{x!}$

5.9 प्वॉयसन वितरण की विशेषताएँ

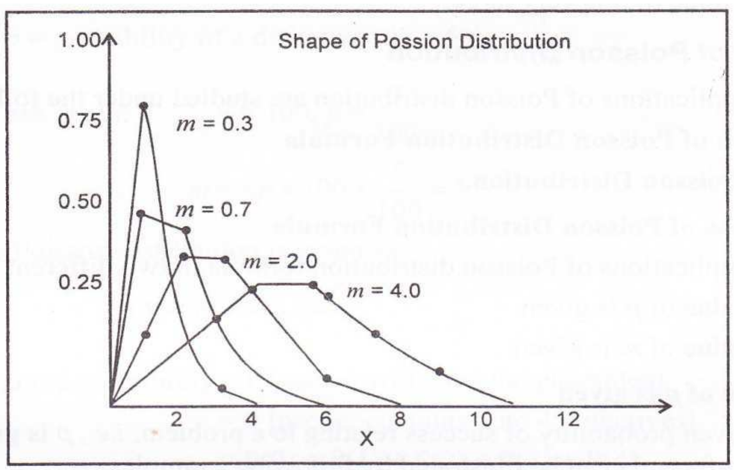
प्वॉयसन वितरण की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित हैं :

1. **असतत प्रायिकता वितरण :**
प्वॉयसन वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है जहाँ पर सफलताओं की संख्या पूर्ण संख्या जैसे 0,1,2............ इत्यादि के रूप में हैं।

2. **p तथा q का मान :**
प्वॉयसन वितरण उन स्थितियों में प्रयोग करते हैं जहाँ घटना के घटित होने की प्रायिकता करते हैं जहाँ है अर्थात् ($p \to 0$) तथा घटना के घटित न होने की प्रायिकता बहुत अधिक हो अर्थात् ($q \to 0$) तथा n का मान अनन्त रूप से बड़ा हो।

3. **प्रमुख प्राचाल :**
इसका बस एक ही प्राचाल है और उसका मान np के बराबर है अर्थात् m = np। इस प्राचाल की सहायता से पूरा वितरण जाना जा सकता है।

4. **प्वॉयसन वितरण का आकार :**
प्वॉयसन वितरण हमेशा धनात्मक विषम है लेकिन m का मान बढ़ने से विषमता घटती है। m का मान बढ़ाने पर वितरण दायीं और खिसकता है और विषमता स्तर गिरता है। जो कि निम्नलिखित चित्र द्वारा दर्शाया जाता है :



5. **प्वॉयसन वितरण के स्थिर :**
प्वॉयसन वितरण के निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

माध्य = X = np

विषमता गुणांक संवेग = $\sqrt{\beta} = 1/\sqrt{m}$

प्रसरण = $\sigma^2 = m$

प्रमाप विचलन = SD = $\sigma = \sqrt{m}$

पृथुशीर्षत्व गुणांक संवेग = $\beta_2 = 3 + 1/m$

6. **माध्य तथा प्रसरण की बराबरी :**
प्वॉयसन वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसका माध्य और प्रसरण बराबर है अर्थात् $X = \sigma^2$ अथवा माध्य प्रसरण।

5.10 प्वॉसन वितरण की महत्ता

प्वॉयसन वितरण निम्नलिखित क्षेत्रों में बहुतायत उपयोग होता है :

1. इसका प्रयोग सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण में दोषयुक्त मदों की गणना करना।
2. बायोलाजी में, बैक्टीरिया की संख्या की गणना करना।
3. इन्श्योरेन्स में, कारणों की गणना में समस्या।
4. एक टाइप किए गए पेज पर टाइपिंग के दौरान होने की गलतियों की संख्या की गणना।
5. एक टाउन में आने वाली फोन काल की संख्या।
6. एक ब्लेड बनाने वाली कंपनी के एक लॉट में दोषयुक्त ब्लेड की संख्या की गणना करना।
7. एक टाउन में एक क्रासिंग पर रोड दुर्घटना में होने वाली मौतों की संख्या।
8. एक वर्ष में लर्क्स प्वाइंट पर होने वाली आत्महत्या की संख्या।

साधारणतया प्वॉयसन वितरण का उपयोग दुर्लभ घटनाओं में होता है जहाँ सफलता की प्रायिकता (p) बहुत कम है और n का मान बहुत अधिक है।

5.11 प्वॉयसन वितरण के उपयोग

प्वॉयसन वितरण के उपयोग का अध्ययन इस प्रकार है :

अ. प्वॉयसन वितरण सूत्र का प्रयोग :

आप प्वॉयसन वितरण सूत्र के उपयोग का अध्ययन निम्न दो अलग तरह की परिस्थितियों में कर सकते हैं : 1. जब p का मान ज्ञात हो तथा 2. जब m का मान ज्ञात हो।

1. जब p का मान ज्ञात हो :

उदाहरण 5.14 : यह ज्ञात है कि एक पेंच का निर्माण करने वाली कंपनी में 2% पेंच दोषयुक्त निर्मित होते हैं। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करते हुए 100 पेंच वाले एक पैकेट में 1. एक भी दोषयुक्त पेंच न हो 2. एक दोषयुक्त पेंच हो तथा 3. दो या उससे अधिक दोषयुक्त पेंच होने की प्रायिकता ज्ञात करो। (दिया है = 0.135)

हल : माना कि p = पेंच के दोषयुक्त होने की प्रायिकता = 2% = 2/100

p = 2/100 ; n = 100

चूंकि m = np = 100 × 2/100 = 2

प्वॉयसन वितरण इस प्रकार

$$P(X=x) = P(X=0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!}$$

$$= e^{-2} = 0.135 \qquad (e^{-2} = 0.135)$$

2. P (एक दोषयुक्त) = P(X=1) = $\frac{e^{-2}2^{1}}{1!}$

$$= e^{-2} \times 2 = (0.135\ ) \times 2 = 0.270$$

3. P(दो या उससे अधिक दोषयुक्त) = 1-[P(0) + P(1)]

= 1-[0.135 + 0.270] = 1-0.405 = 0.595

उदाहरण 5.15 : एक पिन का निर्माण करने वाला जानता है कि औसतन उसके 5% उत्पाद दोषयुक्त है। वह 100 पिन का पैकेट बनाकर उन्हें बेचता है और विश्वास दिलाता है कि पैकेट में 4 से अधिक दोषयुक्त पिन नहीं है। पैकेट के विश्वसनीय गुणवत्ता पर खरा उतरने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : माना कि p = दोषयुक्त पिन की प्रायिकता = 5% = 5/100

दिया है n = 100, p= 5/100

चूंकि m = np = 100 × 5/100 = 5

प्वॉयसन वितरण

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$$

वांछित प्रायिकता = P[पैकेट गुणवत्ता पर खरा उतरे]

= P[पैकेट में अधिकतम 4 दोषयुक्त]

= P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)

$$=e^{-5}\frac{5^0}{0!}+e^{-5}\frac{5^1}{1!}+e^{-5}\frac{5^2}{2!}+e^{-5}\frac{5^3}{3!}+e^{-5}\frac{5^4}{4!}$$

$$=e^{-5}\left(\frac{5}{1}+\frac{25}{2}+\frac{125}{6}+\frac{625}{24}\right)$$

$$=0.0067\times 65.374=0.438$$

2. जब m का मान ज्ञात हो

उदाहरण 5.16 : दोपहर 2 से 4 के बीच किसी कंपनी के स्विच बोर्ड पर औसतन 2.5 फोन काल प्रति मिनट आता है। प्रायिकता ज्ञात करो जब एक मिनट में 1. एक भी फोन कॉल न आए 2. पूर्णतया 3 काल 3. कम से कम 2 काल।

(दिया है $e^{-2} = 0.1353$, $e^{-5} = 0.6065$)

हल : यह प्वॉयसन वितरण की समस्या है।

$P(X=x)\ e^{-m}\ m^x / x!$ where X = 1,2,3.....

औसतन फोन काल की संख्या = X = m = 2.5

प्वॉयसन वितरण $P(X=x) = e^{-m}\ m^x / x!$

1. P(एक भी फोन काल न आए) = P(x=0)

$= e^{-2.5}\ (2.5)^0 / 0! \quad = e^{-2.5}$

$= e^{-2}\ .e^{-0.5} \quad (e^{-2} = 0.1353,\ e^{-0.5} = 0.6065)$

= 0.1353 × 0.6065 = 0.0821

अतः एक मिनट में एक भी फोन काल न आने की प्रायिकता = 0.0821

2. पूर्णतया 3 काल = $P(X=3) = e^{-2.5}\ (2.5)^3 / 3!$

$= (0.0821)\ (2.5)^3 / 3\times2\times1 = 0.2138$

3. P(कम से कम 2 काल आए)= $1-[P(X=0) + P(X=1)]$

$= 1- [e^{-2.5} + (2.5)\ e^{-2.5}]$

$= 1- [e^{-2.5}\ [1+2.5] = 1- [(0.0821)\ (3.5)]$

$= 1- 0.28735 = 0.71265$

उदाहरण 5.17 : पूर्व अनुभव के आधार पर ज्ञात है कि एक कंपनी में औसतन औद्योगिक दुर्घटना की संख्या प्रति मासिक 4 है। एक महीने में 4 से कम दुर्घटना होने की प्रायिकता ज्ञात करो। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करके उत्तर की व्याख्या करो। (दिया गया है $e^{-4} = 0.0183$)

हल : औसत दुर्घटना की संख्या = $X = m= 4$

$P(X) = e^{-m}\ m^x/x!$

$P(0) = e^{-m}\ m^0 / 0! = e^{-m} = e^{-4}$

$P(1) = e^{-m}\ m^1 / 1! = e^{-m}.m = 4e^{-4}$

$P(2) = e^{-m}\ m^2 / 2! = m^2/ 2!\ e^{-m} = (4)^2/2!.\ e^{-4}$

$P(3) = e^{-m}\ m^3 / 3! = m^3/ 3!\ e^{-m} = (4)^3/3!.\ e^{-4}$

4 से कम दुर्घटना होने की प्रायिकता

$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$= e^{-4}\ [1 + 4 + 4^2/2! + 4^3 /3!]$

$= 0.0183\ [1 + 4 + 8 + 10.67]$ $(e^{-4}= 0.0183)$

$= 0.0183 \times 23.67 = 0.4332$

अतः 4 से कम दुर्घटना की प्रायिकता 0.4332 या 43.32% ।

उदाहरण 5.18 : एक प्वॉयसन प्रायिकता वितरण जिसमें घटना के घटित होने का औसत प्रति समयकाल 2 है।

1. उचित प्वॉयसन प्रायिकता फंक्शन लिखें।
2. 3 समयकाल में औसतन घटित होने की प्रायिकता बताओ।
3. 3 समयकाल में 6 घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : 1 समयकाल में औसतन घटित होने की संख्या = $m = 2$

1. प्वॉयसन प्रायिकता फंक्शन = $P(X=x) = (e^{-2}\ 2^X)/ X!$
2. 3 समयकाल में औसत घटनाओं की संख्या = $2\times3= 6$
3. $P[X=6] = e^{-6}\ (6)^6 / 6! = 0.1575$

5.12 प्वॉयसन वितरण को फिट करना

अवलोकित डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं:

1. सर्वप्रथम वास्तविक आवृत्ति से माध्य (X) की गणना निम्न सूत्र से करें।

   $X = \Sigma fx / n$

   आप माध्य के इस मान को प्वॉयसन वितरण का प्राचाल की तरह उपयोग करेंगे अर्थात् $x = m$

2. e^{-m} का मान प्राप्त करें। यदि e^{-m} का मान प्रश्न में न दिया गया हो तो निम्न सूत्र से ज्ञात करें :
   e^{-m} = reciprocal [antilog (m ×0.4343)]
3. 0,1,2,3, या x सफलता की प्रायिकता निम्न प्वॉयसन प्रायिकता वितरण सूत्र से गणना करते हैं।
   $P(X=x) = e^{-m}\, m^{X} /x!$
4. प्रत्याशित या सैद्धान्तिक आवृत्ति प्राप्त करने के लिए उपर निकाली गई प्रायिकता को N (कुल आवृत्ति) आप मध्य से गुणा करें। अतः

सफलता की संख्या X	प्रायिकता P(X)	प्रत्याशित प्रायिकता fe (X)
0	$P(0) = e^{-m}\dfrac{m0}{0!} = e^{-m}$	$N.P(0) = Ne^{-m}$
1	$P(1) = e^{-m}\dfrac{m1}{1!} = me^{-m}$	$N.P(1) = Ne^{-m}.m$
2	$P(2) = e^{-m}\dfrac{m^2}{2!} = e^{-m}\dfrac{m^2}{2!}$	$N.P(2) = Ne^{-m}\dfrac{m^2}{2!}$
...		
x	$P(x) = e^{-m}\dfrac{m^x}{x!}$	$N.P(x) = Ne^{-m}\dfrac{m^x}{x!}$

वैकल्पिक प्रक्रिया :

प्रत्याशित आवृत्तियों को निम्न प्रकार से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं :

1. सर्वप्रथम गणना करें Fe(0) = N. P(0) = N. e^{-m}
2. अन्य प्रत्याशित आवृत्तियों को निम्न प्रकार से गणना कर सकते हैं :
   fe(0) = N. P(0) = N e^{-m}
   fe(1) = m/1 . fe(0)
   fe(2) = m/2 fe(1)
   fe(3) = m/3 fe(2)
   fe(4) = m/4 fe(3) और इसी तरह

उदाहरण 5.19 : निम्न डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करें तथा सैद्धान्तिक आवृत्ति की गणना करें।

मृत्यु	0	1	2	3	4
आवृत्ति	109	65	22	3	1

उपरी वितरण का माध्य तथा प्रसरण का मान ज्ञात करें (दिया है $e^{-0.61}$ = 0.5432)

हल : प्वॉयसन वितरण को फिट करना।

मृत्यु (x)	आवृत्ति (f)	fx
0	109	0
1	65	65
2	22	44
3	3	9
4	1	4
	Σf= 200	Σfx = 122

X = Σfx / Σf = 122/200 = 0.61

m= 0.61

अब आप $e^{-0.61}$ का मान या तो तालिका से या निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं :

e^{-m} = Rec. [Antilog (m × 0.4343]

m = 0.61 का मान रखने पर,

$e^{-0.61}$ = Rec [Antilog (0.61 × 0.4343]

= Rec [Antilog (026492]

= Rec [1.841] = 0.5432

अब P(0) = $e^{-0.61}$. $(0.61)^0$ /0!

= $e^{-0.61}$ = 0.5432

प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना :

fe(0) = N P(0) = 200 × (0.5432) = 108.64 ≈ 109

fe(1) = fe(0) × m/1 = 108.64 × 0.61/1 = 66.22 ≈ 66

fe(2) = fe(1) × m/2 = 66.27 × 0.61/2 = 20.21 ≈ 20

fe(3) = fe(2) × m/3 = 20.21× 0.61/3 = 4.11 ≈ 4

fe(4) = fe(3) × m/4 = 4× 0.61/4 = 0.61 ≈ 1

अतः

X	0	1	2	3	4
fe	109	66	20	4	1

माध्यम = X = प्रसरण σ^2 = 0.61

उदाहरण 5.19 : एक पुस्तक के प्रथम 50 पन्नों की प्रूफरीडिंग के समय औसतन प्रति 5 पन्ना 3 गलती/ऋटि पाई जाती है। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 1000 पन्नों वाली पुस्तक में 0,1,2,3,..... त्रुटियों वाले पन्नों की संख्या ज्ञात करें।

हल : त्रुटियों की औसत संख्या = m = 3/5 = 0.6

जहाँ $P(0) = e - m\dfrac{m^0}{0!} = e^{-0.6}.\dfrac{(0.6)^0}{0!} = e^{-0.6} = 0.5488$

$$P(1) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^1}{1!} = \frac{0.5488 \times 0.6}{1} = 0.32928$$

$$P(2) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^2}{2!} = \frac{0.5488 \times 0.36}{2 \times 1} = 0.098784$$

$$P(3) = e^{-0.6}\frac{(0.6)^3}{3!} = \frac{0.5488 \times 0.216}{3 \times 2 \times 1} = 0.0197568$$

$$P(x > 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$= 1 - [0.5488 + 0.32928 + 0.098784 + 0.197568]$$

$$= 1 - [0.9966208]$$

$$= 0.0033792$$

प्वॉयसन वितरण को फिट करना

X	P(X)	fe(x) = n. P(x)
0	0.5488	1000 × 0.5488 = 548.8 ≈ 549
1	0.32928	1000 × 0.32928 = 329.28 ≈ 329
2	0.098784	1000 × 0.098784 = 98.74 ≈ 98
3	0.0197568	1000 × 0.0197568 = 19.7568 ≈ 20
3 से अधिक	0.0033792	1000 × 0.0033792 = 3.37 ≈ 3
		n = 1000

5.13 सारांश

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं किया जाता बल्कि निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त करते हैं। सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या प्रत्याशित आवृत्ति वितरण कहते हैं। सैद्धान्तिक वितरण के प्रमुख प्रकार हैं 1. द्विपद वितरण 2. प्वॉयसन वितरण तथा 3. सामान्य वितरण। द्विपद वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है बर्नाली ने की। इसका प्रयोग ऐसी स्थितियों में करते हैं जब प्रयोग दो संभावितों सफलता और असफलता में निष्कर्षित हो। प्वॉयसन वितरण एक असतत प्रायिकता वितरण है और फ्रेंच गणितज्ञ डॉ0 सिमन डेनिस प्वॉयसन ने इसका विकास किया। प्वॉयसन वितरण को उन परिस्थितियों में प्रयोग करते हैं जब घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत म हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ है।

5.14 शब्दावली

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण: उन वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंकों या प्रयोगों से प्राप्त नहीं होते परन्तु निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय विधि से प्राप्त किए जा सकते हैं।

5.15 बोध प्रश्न

1. .... उन आवृत्ति वितरणों को कहते हैं जो वास्तविक समंक या प्रयोग से प्राप्त किये जाते हैं।

2. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण को प्रायिकता वितरण या ....कहते हैं।
3. द्विपद वितरण की खोज स्विस गणितज्ञ ....ने की।
4. .... का प्रयोग उन स्थितियों में करते हैं जब किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता बहुत छोटी हो अर्थात् घटना बहुत दुर्लभ हो।

5.16 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.	वास्तविक आवृत्ति वितरण	2.	प्रत्याशित आवृत्ति वितरण
3.	जेम्स बर्नाली	4.	प्वॉयसन वितरण

5.17 स्वपरख प्रश्न

1. एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। चार या उससे अधिक चित आने की प्रायिकता ज्ञात करें।
2. एक पांसा को 4 बार फेंका जाता है। 2 से अधिक आने पर उसे सफलता माना जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो।
   अ. पूर्णतया 1 सफलता
   ब. 3 से कम सफलता
   स. 3 से अधिक सफलता
3. 5 स्वतंत्र परख वाले द्विपद वितरण में 1 तथा 2 सफलता की प्रायिकता 0. 4096 तथा 0.2048 हैं वितरण के प्राचाल p का मान ज्ञात करो।
4. एक बर्फवाली फैक्टरी में जाड़े में कर्मचारियों के सर्दी होने का संवेग 20 प्रतिशत है। 5 में से 4 या अधिक मजदूरों के सर्दी होने की प्रायिकता बताओ।
5. एक प्रयोग जितनी बार फेल होता है उसके दुगुनी बार सफल होता है। 6 परखों में कम से कम 5 सफलता की प्रायिकता बताओ।
6. द्विपद वितरण का माध्य और प्रमाप विचलन क्रमशः 2 तथा 1 हैं n, p तथा q का मान ज्ञात करो।
7. द्विपद वितरण जिसका माध्य 2 तथा प्रसरण 3/2 हो उसके 3 सफलता की प्रायिकता ज्ञात करो।
8. एक असतत दैव चर (random variable) का माध्य 6 तथा प्रसरण 2 है। यदि यह द्विपद वितरण है तो $5 \leq x \leq 7$ की प्रायिकता ज्ञात करो।
9. यदि दोषयुक्त बोल्ट की प्रायिकता 10 प्रतिशत है। ज्ञात करो 1. माध्य 2. प्रमाप विचलन 3. संवेग विषमता गुणांक 4. संवेग पृथुशीर्षत्व गुणांक कुल 400 बोल्ट में दोषयुक्त बोल्ट का वितरण ज्ञात करो।
10. एक निष्पक्ष सिक्क को दस बार उछाला जाता है। इसका माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।
11. 5 पांसों को एक 96 बार फेंका जाता है। 4,5 या 6 आने वाले पांसों की संख्या ही प्रयोग है।

4,5,6 आने वाले पांसों की संख्या	0	1	2	3	4	5

आवृत्ति	2	8	22	35	24	5

द्विपद वितरण फिट करो तथा प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करो।

12. चार सिक्कों को 200 बार उछाला जाता है। उछालने पर 0,1,2,3 तथा 4 चित इस प्रकार पाए गए :

चित की संख्या	0	1	2	3	4
आवृत्ति	15	35	90	40	20

13. एक मशीन द्वारा निर्मित बोल्ट का परीक्षण 7 बोल्ट के निदर्शन लेकर किया गया। कुल 128 निदर्श परीक्षण के लिए गए। 128 निदर्शों में पाए गए दोषयुक्त बोल्ट की संख्या इस प्रकार है।

दोषयुक्त बोल्ट की संख्या 128 निदर्श में	0	1	2	3	4	5	6	7
निदर्श की संख्या	7	6	19	35	30	23	7	1

द्विपद वितरण फिट करो और प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो (यदि मशीन के दोषयुक्त होने की प्रायिकता 1/2 है)। फिट किए गए वितरण का माध्य और प्रसरण ज्ञात करो।

14. 5 सिक्कों को 128 बार उछाला जाता है। 3 या अधिक चित आने की प्रायिकता बताओ और 3 या अधिक चित की प्रत्याशित प्रायिकता ज्ञात करो।

15. दिया गया है एक बल्ब बनाने वाली कंपनी तैयार बल्क में 3 प्रतिशत दोषयुक्त बल्क बनाती है। प्वॉयसन वितरण की सहायता हसे 100 बल्ब वाले निदर्श में प्रायिकता ज्ञात करो जब
    अ. एक भी दोषयुक्त न हो
    ब. पूर्णतया एक दोषयुक्त हो $(e^{-3} = 0.04979)$

16. 200 बल्ब वाले बक्से में 5 बल्क के दोषयुक्त होने की प्रायिकता बताओ जब यह दिया गया हो कि 2 प्रतिशत बल्क दोषयुक्त हैं। (आप प्वॉयसन वितरण का उपयोग कर सकते हैं) $(e^{-4} = 0.0183)$

17. माना कि 80 जन्मों में एक जन्म जुड़वा होता है। एक दिन में 30 जन्मों पर 2 या अधिक जुड़वा जन्म की प्रायिकता ज्ञात करो।

18. पिन का निर्माण करने जानता है औसतन 2 प्रतिशत पिन दोषयुक्त हैं वह 200 पिन एक बक्से में बेचता है और 3 से अधिक पिन दोषयुक्त न होने की गारंटी देता है। बक्से के गारंटी पर खरा न उतरने की प्रायिकता ज्ञात करो। $(e^{-4} = 0.0183)$

19. ब्लेड का निर्माण करने वाली एक कंपनी के 1/5 भाग दोषयुक्त ब्लेड का निर्माण करती है।

10 ब्लेड के सेट के रूप में पैकेट बेचा जाता है। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 100000 पैकेट में एक भी दोषयुक्त न हो, सिर्फ एक दोषयुक्त और दो दोषयुक्त ब्लेड होने की सन्निकट संख्या ज्ञात करो। $(e^{-0.02} = 0.9802)$

20. माना कि एक निर्मित उत्पाद के परीक्षण में प्रति यूनिट उत्पाद में 4 दोषयुक्त उत्पाद पाए जाते हैं। प्वॉयसन वितरण की सहायता से 2 दोषयुक्त उत्पाद पाए जाने की प्रायिकता ज्ञात करो। ($e^4 = 0.0183$)

21. एक वर्ष में टैक्सी ड्राइवरों द्वारा होने वाले दुर्घटना प्वॉयसन वितरण जिसका माध्य 3 है। का अनुसरण करता है। 1000 टैक्सी ड्राइवरों में ड्राइवरों की संख्या ज्ञात करो जिनसे एक वर्ष में
अ. एक भी दुर्घटना न हुई हो और
ब. तीन से अधिक दुर्घटना हुई है।
($e^{-1} = 0.3679$, $e^{-2} = 0.1353$, $e^{-3} = 0.0498$)

22. एक टीवी कंपनी ने अनुमान लगाया कि प्रतिदिन टीवी की मरम्मत करने के लिए औसतन 1.5 इंजीनियर की मांग है। प्वॉयसन वितरण को मानते हुए वह दो इंजीनियर नियुक्त करता है। एक वर्ष में कितने दिन दोनों इंजीनियर के पास काम न होने का समानुपात ज्ञात करो। ($e^{-1} = 0.3678$, $e^{-0.5} = 0.6065$)

23. एक टेलीविजन इक्सचेंज में औसतन 4 कॉल प्रति मिनट आती है। प्वॉयसन वितरण के आधार पर प्रायिकता ज्ञात करो 1. 2 या कम कॉल प्रति मिनट 2. प्रति मिनट 4 कॉल 3. 4 काल से अधिक प्रति मिनट ($e^{-4} = 0.08$, $e^{-4} = 0.0183$)

24. एक पुस्तक में प्रति पन्ना निम्न त्रुटि पायी गईं।

त्र‍ुटि प्रति पन्ना	0	1	2	3	4
पन्नों की संख्या	211	90	19	5	0

25. 100 कार रेडियो का परीक्षण किया गया और प्रति रेडियो सेट दोषों की संख्या इस प्रकार सूचीबद्ध किया गया।

दोषों की संख्या	0	1	2	3
रेडियो सेट की संख्या	79	18	2	1

प्रति रेडियो सेट औसत दोषों की संख्या का अनुमान लगाओ और 0,1,2,3 की प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

26. निम्न डाटा पर प्वॉयसन वितरण फिट करो और सैद्धान्तिक आवृत्ति ज्ञात करो।

मृत्यु	0	1	2	3	4
आवृत्ति	122	60	15	2	1

($e^{-0.5} = 0.60657$)

27. 96 वर्षों में एक उच्च न्यायालय में न्यायाधीश की रिक्तियों की संख्या नीचे दी गई है।

28. सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण से आप क्या समझते हैं?

29. द्विपद तथा सामान्य वितरण की विशेषताएं बताओ।

30. द्विपद वितरण क्या है? किन परिस्थितियों में द्विपद वितरण का प्रयोग होता है चर्चा करें।

31. प्वॉयसन वितरण क्या है? प्वॉयसन वितरण की विशेषताएं बताओ।

32. द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण की प्रमुख विशेषताओं पर चर्चा करें।

33. प्वॉयसन वितरण क्या है? यह कहाँ पर प्रयुक्त किया जा सकता है उदाहरण दो।

स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. 11/32
2. अ. 0.0988 ब. 0.4074 स. 0.1975
3. $p = 0.2$
4. 0.0067
5. 256/719
6. $n = 4, \; p = 1/2, \; q = 1/2$
7. 0.2076
8. 0.712
9. $X = 40, \; \sigma^2 = 36, \; \sqrt{\beta_1} = 0.133, \; \sqrt{\beta_2} = 3.013$
10. $X = 5, \; = \sigma = \sqrt{2.5}$
11. 3, 15, 30, 15, 3
12. 12.5, 50, 75, 50, 12.5
13. 1, 7, 21, 35, 21, 7, 1 ; $x = 3.5, \; \sigma^2 = 1.75$
14. अ. 16/32, ब. 64
15. अ. 0.05 ब. 0.15
16. 0.784
17. 0.055
18. 0.567
19. 98020, 1960.4, 19.604
20. 0.146624
21. अ. 50 ब. 353
22. अ. 0.2231 ब. 0.1913
23. अ. 0.2379 ब. 0.6283 स. 0.3717
24. 209.40, 92.14, 20.27, 2.97, 0.33
25. m = 0.25, 77.88, 19.47, 2.43, 0.21
26. 121.3, 60.65, 15.16, 2.53, 0.32
27. 58.22, 29.11, 7.278, 1.21, $x = \sigma^2 = 0.5$

5.18 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, ‘*Principles of Statistics’* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., ‘*Business Statistics’* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., ‘*Advanced Statistics*’ Sahitya Bhawan Publications, Agra.

4. Goon, Gupta and Dasgupta, 'Basic Statistics' World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, 'Quantitative Methods in Management'.

इकाई 6 घातांकी, बीटा, और सामान्य वितरण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- घातांकी वितरण की व्याख्या कर सकें।
- बीटा वितरण की व्याख्या कर सकें।
- सामान्य प्रायिकता वितरण एवं उनके प्रयोग का वर्णन कर सकें।

6.1 प्रस्तावना

प्रायिकता सिद्धांत और सांख्यिकी में, घातांकी, बीटा, और सामान्य वितरण सतत वितरण परिवार का हिस्सा है। सामान्य वितरण बहुत ही महत्वपूर्ण तथा बहुतायत उपयोगी सतत प्रायिकता वितरण है। इसका प्रयोग प्रमुखतया सतत दैव चरों जैसे लंबाई, भार/ वजन और छात्रों के एक समूह के बुद्धिमत्ता के बयवहार का अध्ययन करने में होता है।

6.2 घातांकी वितरण

घातांकी वितरण दो घटनाओं के मध्य के समय को प्वायन प्रक्रिया के रूप में प्रदर्शित करता है अर्थात् एक ऐसी प्रक्रिया जिसमें घटनाएं स्वतंत्र तथा सतत रूप से एक निश्चित औसत दर से घटित होती है। यह गुणोत्तर वितरण (Geometric Distribution) का सतत रूप है।

6.2.1 घातांकी वितरण की विशेषताएं

घातांकी वितरण की विशेषताएं निम्नलिखित हैं:

(अ) **प्रायिकता घनत्व फलन (probability density function (pdf))**

घातांकी वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

वैकल्पिक रूप में इसे Heaviside step function, H(x) की सहयता से इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda} H(x)$$

यहां पर $\lambda>0$ वितरण का प्राचाल है और प्रायः इसे प्राचाल दर कहते हैं। यह वितरण $[0,\infty)$ अंतराल पर आधारित होता है। यदि एक दैव चर X इस वितरण को लागू करता है तो हम कहते हैं $X \sim Exp(\lambda)$

(ब) **संचयी वितरण फलन**

संचयी वितरण फलन को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

वैकल्पिक रूप में इसे Heaviside step function] H(x) की सहयता से इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$F(x; \lambda) = (1-e^{-\lambda})H(x)$$

(स) **वैकल्पिक प्रचालीकरण**

वैकल्पिक प्राचालीकरण का अर्थ है घातांकी वितरण के प्रायिकता घनत्व फलन को इस प्रकार पारिभाषित करना

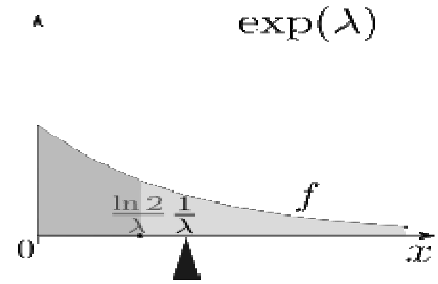
$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

जहां स्केल $\beta>0$ प्राचाल है और यह प्राचाल दर λ का reciprocal है। इस विशिष्टीकरण में, β उत्तर जीविता (survival) प्राचाल कहलाता है जब दैव चर X किसी बायोलाजिकल या मेकैनिकल प्रक्रिया में जीवित रहने कि समयावधि को प्रदर्शित करे और $X \sim Exp(\beta)$ तो $E(X) = \beta$। अतरू प्रक्रिया के जीवित रहने की प्रत्याशित अवधि β इकाई समय है। जब दो घटनाओं के मध्य समय की चर्चा करते हैं तो प्राचाल दर, λ, प्राचालीकरण का उपयोग करते हैं और इसका माध्य $\beta = \lambda^{-1}$ होता है।

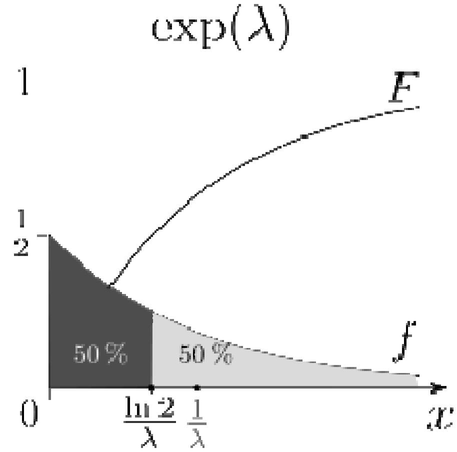
6.2.2 घातांकी वितरण के गुण

घातांकी वितरण **के गुण** निम्न हैं:

(अ) **माध्य, प्रसरण, संवेग तथा माध्यिका**



इसका माध्य प्रायिकता भार केन्द्र (probability mass centre) है जो कि संवेग है (first moment preimage) (पूर्वचित्र)



$F^{-1}(1/2)$ माध्यिका है।

माध्य अथवा घातांकी वितरित दैव चर का प्रत्याशित मान जिसका प्रचाल दर λ है, इस प्रकार है

$$E(X) = 1/\lambda$$

ऊपर वर्णित उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि यदि आप औसतन 2 फोन काल प्रति घंटा करते हैं तो आपको प्रत्येक काल के लिए औसतन आधा घंटा इंतजार करना पड़ता है।

X का प्रसरण, $Var(X) = 1/\lambda^2$

X का संवेग जब n = 1,2,3,……

$m[X] = \ln 2/(\lambda) < E(X)$

जहां पर ln प्राकृतिक लागरिथम (natural logarithm) है। अतः माध्य तथा माध्यिका का वास्तविक अंतर, माध्य – माध्यिका inequality के अंतर्गत

$E[X] - m[X] = (1-\ln 2)/\lambda < 1/\lambda = SD$

(ब) स्मृति विभ्रम Memory lessness

घातांकी वितरण की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि स्मृति विभ्रम। इसका अर्थ यह है कि यदि एक दैव चर (Random variable) T घातांकी वितरित है तो सशर्त प्रायिकता

$$P [T > s+t \mid T > s] = P(T > t) \; s, t \geq 0$$

इसका अर्थ है कि इंतजार करने की सशर्त प्रायिकता उदाहरणार्थ प्रथम आगमन से पहले 10 सेकेंड से अधिक की प्रतीक्षा करने की सशर्त प्रायिकता जब दिया गया है कि पहला आगमन 30 सेकेंड तक नहीं हुआ है, शुरुआती प्रायिकता कि प्रथम आगमन के लिए 10 सेकेंड से अधिक की प्रतीक्षा करने के बराबर है। अतः यदि आप 30 सेकेंड प्रतीक्षा करने के बाद भी प्रथम आगमन नहीं होता ($T>30$) तो पहले आगमन के लिए 10 सेकेंड और इंतजार करने की प्रायिकता ($T>30+10$) शुरुआती प्रायिकता जो कि प्रथम आगमन के लिए 10 सेकेंड से अधिक ($T>10$) का इंतजार करना के बराबर होगी।

वास्तव में, $P(T>40|T>30) = P(T>10)$ का अर्थ यह नहीं है कि घटनाएं $T>40$ तथा $T>30$ स्वतंत्र हैं। सारांशः स्मृति विभ्रम प्रथम आगमन होने तक इंतजार करने का समय का प्रायिकता वितरणका स्मृति विभ्रम का अर्थ है

(सही) $P(T>40|T>30) = P(T>10)$

इसका अर्थ यह नहीं है कि

(गलत) $P(T>40|T>30) = P(T>40)$

वे स्वतत्र हो सकते हैं। ये घटनाएं स्वतत्र नहीं हैं। घातांकी वितरण तथा गुणोत्तर वितरण में ही स्मृति विभ्रम विशेषता होती है।

घातांकी वितरण ही सिर्फ एक ऐसा सतत प्रायिकता वितरण है जिसका असफलता दर (failure rate) स्थिर (constant) है।

(स) चतुर्थांश

घातांकी वितरण का चतुर्थांश फलन (quartile function) विपरीत संचयी वितरण फलन (inverse cumulative distribution function)

$$F^{-1} (p;\lambda) = - \ln(1-p)/\lambda \quad 0 \leq p < 1$$

अतः चतुर्थांश निम्न हैंः

प्रथम चतुर्थांश $= Ln(4/3)/\lambda$

माध्यिका$= \ln(2)/\lambda$

तृतीय चतुर्थांश$= \ln(4)/\lambda$

6.3 बीटा वितरण (Beta distribution)

बीटा वितरण एक सतत प्रायिकता वितरण है जो कि अंतराल (0,1) पर पारिभाषित है और जिसके दो धनात्मक आकार प्राचाल (shape parameter) α तथा β हैं। इसका प्रयोग समानुपातों के सांख्यिकीय माडलिंग (statistical modelling) में होता है जहां समानुपातों का मान या यॉग के बराबर नहीं होता। एक दैव चर जो गासियन (Gaussian) वितरित हो तो उसके तथा एक और स्वतंत्र गासियन चर, जिसका स्केल प्राचाल पहले चर के बराबर तथा संभवतः अलग आकार प्राचाल हो, के योग से भाग देने पर प्राप्त अनुपात का वितरण का एक सैद्दांतिक उदाहरण है।

6.3.1 विशेषताएं charateristics:

बीटा वितरण की विशेषताएं निम्नलिखित हैंः

(अ) प्रायिकता घनत्व फलन

बीटा वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

जहां पर $\Gamma(z)$ गामा फलन है। बीटा फलन *B* पूरी प्रायिकता जुड़कर करं होने के लिए सामान्यीकरणधारित है। एक दैव चर जो कि बीटा वितरित है और जिसका प्रचाल α और β है को

$X \sim Be(\alpha,\beta)$

द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(ब) संचयी वितरण फलन

संचयी वितरण फलन को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं

$F(x;\alpha,\beta) = B_x(\alpha,\beta)/B(\alpha,\beta) = I_x(\alpha,\beta)$

जहां पर B_X (α,β) अधूरा बीटा फलन(incomplete Beta function) है और I_X (α,β) निरंतर बीटा फलन(regularized incomplete Beta function) है।

6.3.2 गुण

बीटा वितरण के गुण ˙ निम्नलिखित हैं:

बीटा वितरित दैव चर X जिसका प्राचाल $\alpha>1$ तथा $\beta>1$ का बहुलक

बहुलक $=(\alpha-1)/(\alpha+\beta-2)$

प्रत्याशित मान, माध्य तथा प्रसरण(द्वितीय केन्द्रीय संवेग)

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

सभी परिस्थितियों में, $Var(X)<1/4$

विषमता:

$$\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{[\mathrm{E}(X-\mu)^2]^{3/2}} = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\sqrt{\alpha\beta}}.$$

$$\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^4}{[\mathrm{E}(X-\mu)^2]^2} - 3 = \frac{6[\alpha^3-\alpha^2(2\beta-1)+\beta^2(\beta+1)-2\alpha\beta(\beta+2}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$$

या

$$\frac{6[(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta+1)-\alpha\beta(\alpha+\beta+2)]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}.$$

समान्यतया, k^{th} कच्चा संवेग (raw moment)

$$\mathrm{E}(X^k)=\frac{\mathrm{B}(\alpha+k,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}=\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+\beta)_k}$$

जहां पर $(x)_k$ पोसोम्बर चिन्ह(Pochhammer symbol) है जो कि rising factorial को प्रदर्शित करता है। इसे recursive form में इस प्रकार लिख सकते हैं

$E(X^k)=(\alpha+k-1)/(\alpha+\beta+k-1)\, E(X^{k-1})$

हम यह भी दिखा सकते हैं

$E(\log X)=\psi(\alpha)-\psi(\alpha+\beta)$

और

$E(X^{-1})=(\alpha+\beta-1)/(\alpha-1)$

(स) सूचना की मात्रा Quantities of Information

दो बीटा वितरित दैव चर $X\sim Be(\alpha,\beta)$ और $Y\sim Be(\alpha',\beta')$ हैं तो X का differential entropy है

h(X)=

डिगामा फलन (Digamma function) कहां है?

क्रास इन्ट्रापी (cross entropy) है

$$H(X,Y)=\ln \mathrm{B}(\alpha',\beta')-(\alpha'-1)\psi(\alpha)-(\beta'-1)\psi(\beta)+(\alpha'+\beta'-2)\psi(\alpha+\beta).$$

6.4 सामान्य प्रायिकता वितरण

सामान्य प्रायिकता वितरण की खोज अंग्रेजी गणितज्ञ अब्राहम डिमोरे ने 1733 में की थी। परन्तु बाद में लाप्लास और कार्ल गास ने इसे पुनः खोजा और उपयोग किया। कार्ल गास के नाम पर सामान्य वितरण को गासियन वितरण भी कहते हैं। निम्न निश्चित परिस्थितियों में सामान्य वितरण को द्विपद वितरण का सन्निकट समझा जा सकता है:

(i) परखों(trial) की संख्या, (n), बहुत अधिक हो अर्थात् $n\rightarrow\infty$

(ii) p तथा q में से कोई भी बहुत छोटा न हो।

सामान्य वितरण का प्रायिकता घनत्व फलन इस प्रकार पारिभाषित करते हैं

$$P\,(X=x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma}\right)^2}\quad -\infty<X<+\infty$$

जहां पर $\overline{X}$ = माध्य, σ= प्रमाप विचलन, e= नेचुरल लागिरथम का बेस=2.7183, π= 3.1415

सामान्य वितरण का`जंदकंतक दवतउंस अंतपंजम (SNV) फार्म निम्न है:

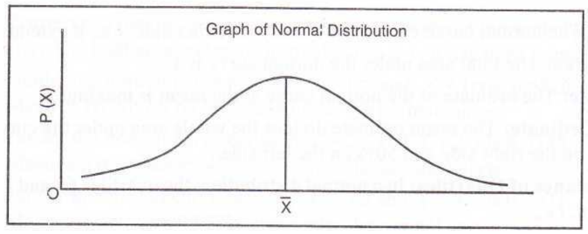
$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Z^2}$ $\quad -\infty < Z < \infty$ where Z = $\frac{X - \overline{X}}{\sigma}$

जहां पर $Z = (X - \overline{X})/\sigma$

Z का माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन σ=1 है। अर्थात्वो सामान्य वितरण है जिसका माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन σ इकाई है।

6.4.1 सामान्य वितरण वक्र

सामान्य वितरण के वक्र को सामान्य वितरण वक्र कहते है। सामान्य वक्र सामान्य वितरण का चित्रीय प्रदर्शन है। निम्न चित्र सामान्य वक्र दर्शाता है:



सामान्य वक्र का आकार माध्य ($\overline{X}$) के मान तथा प्रमाप विचलन (σ) पर निर्भर करता है। माध्य तथा प्रमाप विचलन के भिन्न–2 मानों के लिए सामान्य वक्र का आकार भिन्न होगा।

6.4.2 सामान्य वितरण की मान्यताएं

सामान्य वितरण निम्न मान्यताओं पर आधारित होता है

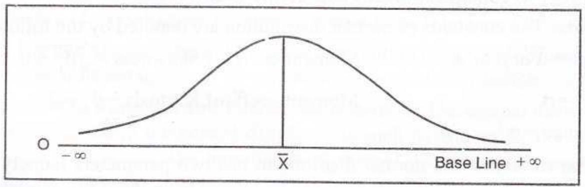
1. **स्वतंत्र कारण**–घटनाओं को प्रभावित करने वाले कारण एक दूसरे से स्वतंत्र होने चाहिए।
2. **विषमता की परिस्थिति** –कारणीय ताकतों का क्रियान्वयन इस प्रकार है कि माध्य से विचलन किसी भी दिशा में संख्या तथा आकार में बराबर हो।
3. **विभिन्न कारण**–कारणीयताकत बहुतायत तथा करीब–करीब बराबर वजन या महत्व हो।

6.4.3 सामान्य वितरण/सामान्य वक्र की चारित्रिक विशेषताएं

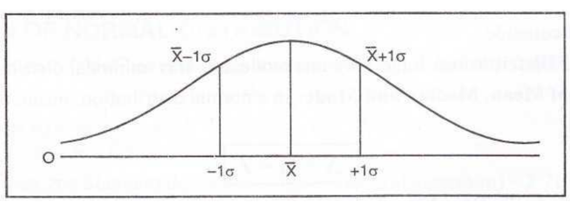
1. **पूर्णतया सममितीय तथा घंटाकार आकार**–सामान्य वक्र माध्य के प्रति पूर्णतया सममित तथा घंटाकार आकार का है। अर्थात यदि हम वक्र को इसके लम्बवत् अक्ष के तहत मोड़ें तो दोनों आधे भाग एक दूसरे पर मेल खाएंगे।
2. **एक बहुलक वितरण**–इसमें सिर्फ एक ही बहुलक होता है। अर्थात् एक बहुलक वितरण है।
3. **माध्य, माध्यिका तथा बहुलक की समानता**–सामान्य वितरण में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक बराबर/समान होते हैं अर्थात्

$$\overline{X} = M = Z$$

4. **बेस लाइन से स्पर्शोन्मुखी**–सामान्य वक्र बेस लाइन सेदोनों तरफ स्पर्शोन्मुखी है अर्थात् इसकी प्रवृत्ति बेस लाइन से छू जाने की है किन्तु यह कभी छूती नहीं है। यह निम्न चित्र से पूर्णतया साफ है।



5. **प्रसार/विस्तार** (Range)–सामान्य वितरण का प्रसार दोनों ही तरफ अनन्त तक है अर्थात् $-\infty$ से $+\infty$ तक।
6. **पूर्ण क्षेत्रफल**–सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 1 है।
7. **ordinate**–सामान्य वक्र का कोटि (**ordinate**) माध्य के सापेक्ष उच्चतम है।
8. **माध्य कोटि**– माध्य कोटि पूरे क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। अर्थात् 50%बायीं तरफ तथा 50%दायीं तरफ ।
9. **चतुर्थांश का समान दूरी पर होना**–सामान्य वितरण में चतुर्थांश Q_1तथाQ_3 माध्यिका से समान दूरी पर है। अर्थात$Q_3 - M = M - Q_1$
10. चतुर्थांश विचलन; QD) – सामान्य वितरण में, चतुर्थांश विचलन प्रमापविचलन का 2/3 है अर्थात्
    QD=2/3 SD
11. **मध्य विचलन**(MD)– सामान्य वितरण में, माध्य विचलनप्रमाप विचलन का 4/5 है अर्थात MD= 4/5 SD
12. Point of inflextion: -सामान्य वितरण में दो Point of inflextion है (अर्थात् वह बिन्दु जहाँ पर वक्र अपनी वक्रता बदलता है) और वह बिन्दु $\overline{X}-1\sigma$ तथा $\overline{X}+1\sigma$ अन्य शब्दों में inflextion बिन्दु $\overline{X}\pm 1\sigma$ अर्थात $\overline{X}-1\sigma$तथा Xbar+1σपर होता है। यह निम्न चित्र से साफ है।



13. **सतत प्रायिकता वितरण**–सामान्य वितरण सतत चरों का वितरण है। अतः इसे सतत प्रायिकता वितरण कहते हैं।
14. **धारित**(constant)–सामान्य वितरण के धारित निम्न चिह्नों से प्रदर्शित करते हैं। माध्य $= \overline{X}$ या μया m
    विषमता गुणांक संवेग=$\sqrt{\beta_1}=0$
    प्रमाप विचलन $= \sigma$
    प्रथुशीर्षत्व गुणांक संवेग $=\sqrt{\beta_2}=3$
    प्रसरण $= \sigma$

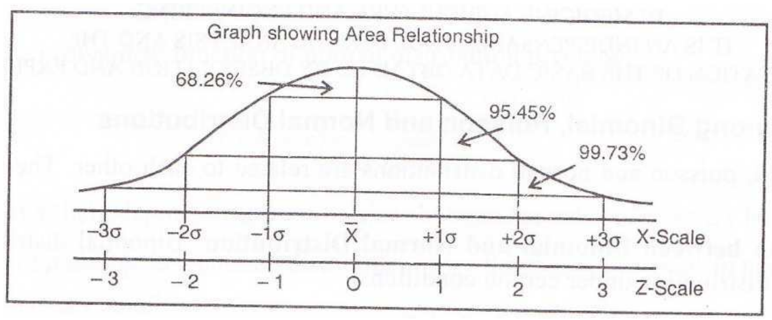
15. **प्रमुख प्राचाल**–सामान्य वितरण के दो प्राचल हैं माध्य($\overline{X}$)तथा प्रमाप विचलन (σ) इन दो प्राचालों की सहायता से हम पूरा वितरण ज्ञात कर सकते हैं।
16. **क्षेत्रफल विशेषता**–सामान्य वक्र की सबसे प्रमुख विशेषताओं में से एक विशेषता इसकी क्षेत्रफल विशेषता है। वक्र के नीचे का पूरा क्षेत्रफल 1 होता है। यह पाया जाता है कि:

    (अ) $\overline{X}$-1σ तथा $\overline{X}+1\sigma$के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.6826 है अर्थात माध्य $\pm$ 1σवक्र के कुल क्षेत्रफल का 68.26% क्षेत्रफल धारण करता है।

    (ब) $\overline{X}$-2σ तथा $\overline{X}+2\sigma$ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल$0.9545$0. 9973 अर्थात माध्य$\pm$ 2σवक्र के कुल क्षेत्रफल का 95.45% भाग रहता है।

    (स) $\overline{X}$-2σ तथा $\overline{X}+2\sigma$ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.9973 है अर्थात माध्य $\pm$ 3σ वक्र के कुल क्षेत्रफल का 99.73% भाग रहता है।

    निम्नलिखित चित्र क्षेत्रफल विशेषता को दर्शाता है–



6.4.4 सामान्य वितरण का महत्व–

संख्यिकीय समीक्षा में सामान्य वितरण का बहुत महत्व है। यह नवीन सांख्यिकी का आधार है। निम्न सामान्य वितरण के उपयोग तथा महत्व को चिह्नांकित करते हैं:

1. **प्राकृतिक घटनाओं का अध्ययन**–सभी प्राकृतिक घटनाएं सामान्य वितरण की चारित्रिक विशेषताएंधारण करते हैं जैसे एक पेड़ की पत्तियों की लम्बाई,जन्म दर तथा मृत्यु दर इत्यादि। सामान्य वितरण प्राकृतिक घटनाओं के अध्ययन में बहुतायत उपयोग होता है।

2- **निदर्शन सिद्धान्त का आधार**–सामान्य वितरण का निदर्शन सिद्धान्त में भी बहुत महत्वपूर्ण है। सामान्य वितरण की सहायता से हम यह परीक्षण कर सकते हैं कि ब्रह्मांड Universe से चुने गए निदर्श ब्रह्मांड को पूर्णतः प्रदर्शित करते हैं या नहीं।

3- **सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण**–यह टालरेंस या स्पेस्फिक जिसके मध्य उत्पाद की गुणवत्ता होती है, जानने में मदद करता है। उत्पाद की गुणवता Specification limits के मध्य ही स्वीकार्य है।

4. **वृहद प्रतिदर्श परीक्षणः**–सामान्य वितरण का प्रयोग वृहद प्रतिदर्श परीक्षण में भी होता है। वृहद प्रतिदर्श परीक्षण सामान्य वितरण की विशेषताओं पर आधारित है।

5. **द्विपद तथा प्वायसनवितरण का सन्निकटीकरणः**
सामान्य वितरण कई सैद्धांतिक वितरणों जैसे द्विपद, प्वायसन इत्यादि का अच्छा सन्निकटीकरण है। जैसे अवलोकनों की संख्या बढ़ती है प्वायसन, द्विपद इत्यादि से संबंधित समस्याओं को हल करने में सामान्य वितरण का महत्व बढ़ता है।

6. **प्रो योडेन** ने सामान्य वक्र के आकार के आधार पर सामान्य वितरण का महत्व बताया है जो कि नीचे दर्शाया गया हैः

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY. IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE, AGRICULTURAL AND ENGINEERING
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT.

6.4.5 द्विपद(BD), प्वायसन (PD) तथा सामान्य वितरण (ND) में संबंध–

द्विपद प्वायसन तथा सामान्य वितरण एक दूसरे से संबंधित हैं। संबंध नीचे दर्शाया गया हैः

अ. द्विपद तथा सामान्य वितरण के मध्य संबंध

द्विपद वितरण निम्न परिस्थितियों में सामान्य वितरण की ओर उन्मुख होता हैः

1. n अनंत की ओर उन्मुख हो अर्थात्
2. p तथा qमें से कोई भी बहुत छोटा न हो।

ब. प्वायसन और सामान्य वितरण के मध्य संबंध

जब प्वायसन वितरण का प्राचाल 'm' बहुत बड़ा हो जाता है अर्थात् $m \to \infty$तो प्वायसन वितरण सामान्य वितरण की ओर उन्मुख हो जाता है।

6.4.6 सामान्य तथ द्विपद वितरण में अंतर

सामान्य तथा द्विपद वितरण में निम्नलिखित अंतर होते हैंः–

1. **प्रकृति**– द्विपद वितरण असतत प्रायिकता है जबकि सामान्य वितरण सतत प्रायिक वितरण है।
2. **प्रायिकता फलन**– द्विपद वितरण का प्रायिकता फलन निम्न प्रकार से है–

$$P(X = x) = {}^{n}C_{x} q^{n-x}.p^{x}$$

सामान्य वितरण का प्रायिकता फलन

$$P\ (X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma}\right)^2}$$

3. **N का मान**–द्विपद वितरण में परखों की संख्या निश्चित होती है जबकि सामान्य वितरण में अनंत के निकट होता है अर्थात् $n \rightarrow \infty$

   प्राचल– द्विपद वितरण के दो प्राचल हैं, n तथा p जबकि सामान्य वितरण के भी दो प्राचल हैं $\overline{X}$ तथा σ

4. **आकार**– सामान्य वितरण सममित तथा असममित हो सकता है। वह तथा के मान पर निर्भर करता है जबकि दूसरी तरफ सामान्य वितरण हमेंशा सममित होता है।

6.5 सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल का मापन

सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल को मापने के लिए निम्न कदम उठाए जाते हैं

1. सर्वप्रथम दिए गए सामान्य चर को standard normal variate में बदलते हैं। बदलीकरण का सूत्र निम्न है:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$

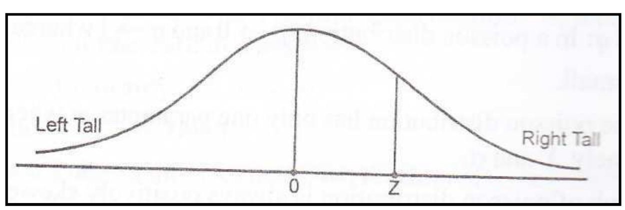
उदाहरण के लिए, यदि $\overline{X}$ =30, σ=5तथा X 35 हो तो 35 के सापेक्ष standard normal variate होगाः

$$Z= (35-30)/5 =1$$

अतः 35 का बदलीकरण 1 होगा

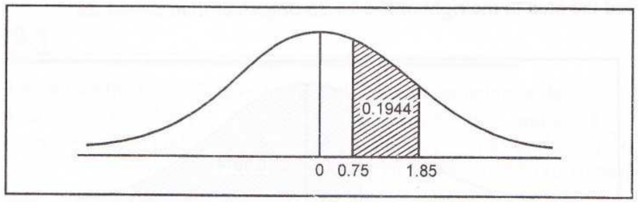
2) तब किसी निश्चित मान के लिए क्षेत्रफल अध्याय के अंत में दिए गए क्षेत्रफल तालिका से प्राप्त किया जा सकता है।

अध्याय के अंत में दी गयी तालिका 0 से Z के मध्य का क्षेत्रफल दर्शाती है जो कि निम्न चित्र से दर्शाया गया हैः



उदाहरण 6.1 Z=0.75तथा Z=1.85के मध्य सामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हलः

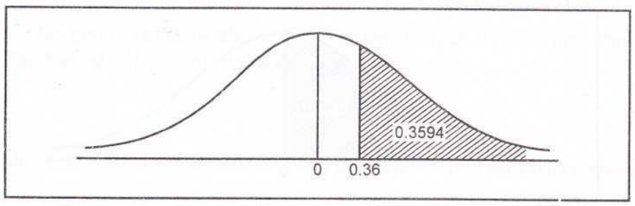


वांछित क्षेत्रफल = (Z=0से Z=1.85के मध्य क्षेत्रफल)- (Z=0 से Z=0.75 के मध्य क्षेत्रफल)

= 0.4678 – 0.2734 = 0.1944

उदाहरण 6.2 : Z= +0.36 के दायें का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हलः



वांछित क्षेत्रफल

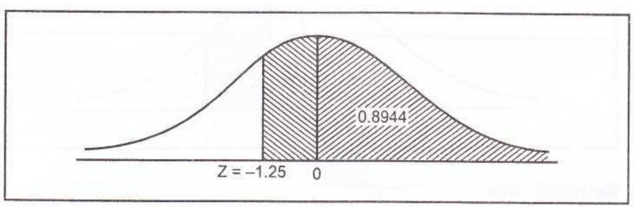
=(Z=0 के मध्य क्षेत्रफल)- (Z=0 से Z= 0.36 के मध्य क्षेत्रफल

= 0.5000 - 0.1406

= 0.3594

उदाहरण 6.3 : Z= -1.25 के दायीं ओर या Z= -1.25 से अधिक का क्षेत्रफल ज्ञात करो

हल



वांछित क्षेत्रफल = (Z=-1.25 तथा Z= 0 के मध्य क्षेत्रफल के दायीं ओर का क्षेत्रफल

= 0.3944 + 0.5000

= 0.8944

6.6 सामान्य वितरण का उपयोग

अब आप सामान्य वितरण के उपयोंगों का अध्ययन करेंगे।

6.6.1 सामान्य चर के Xbar तथा σका मान ज्ञात होने/दिए जाने पर क्षेत्रफल ज्ञात करना

सामान्य वितरण के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सामान्य चर को Z चर में बदलना पड़ता है। उदाहरण के लिए यदि $\overline{X}$ =30,σ =5 तथा X =35 हो तो standard normal variate इस प्रकार बदला जाएगाः

Z= (35-30)/5 =1

जहाँ $Z = (X-\overline{X})/\sigma$

अतः X=35 के लिए standard normal variate =1 है।

Z बदलीकरण के पश्चात सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल वाले तालिका लेते हैं।

उदाहरण 6.4: 1000 परीक्षार्थियों पर किए गए अभिक्षमता परीक्षण करने पर पता चलता है कि औसत स्कोर 42 तथा स्कोर का प्रमाप विचलन 24 है। स्कोर के लिए सामान्य वितरण मानते हुए ज्ञात कीजिए 1) 60 से अधिक स्कोर पाने वाले परीक्षार्थियों की संख्या तथा 2) 30 से 66 के मध्य स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या

हलः दिया है $\overline{X} = 42, \sigma = 24, N = 1000$

1) 60 से अधिक

Z=60 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)

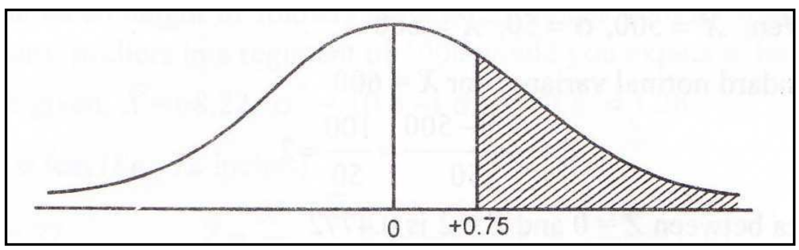
$= (X-\overline{X})/\sigma$

$= (60-42)/24$

$= 18/24$

$= 3/4$

$= 0.75$



वांछित प्रायिकता =

(Z=0 के दायीं ओर क्षेत्रफल) - (Z=0 **तथा** Z=0.75 के मध्य क्षेत्रफल)

= 0.5000- 0.2734 = 0.2266

अर्थात् 60 से अधिक स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या =1000 x 0.2266 =222.6

या 227

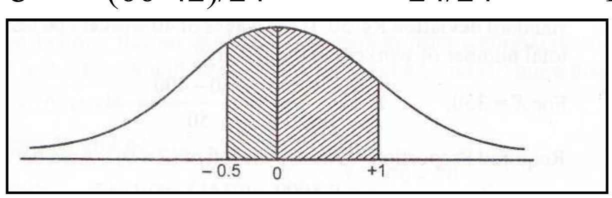
2) 30 तथा 66 के मध्य

Z_1= 30 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)

$= (X-\overline{X})/\sigma = (30-42)/24 = -12/24 = -0.5$

Z_2 = 66 के सापेक्ष standard normal variate (SNV)

$= (X-\overline{X})/\sigma = (66-42)/24 = 24/24 = +1$



वांछित क्षेत्रफल

=(Z= -0.5 से Z= 0 के मध्य क्षेत्रफल)+(Z=0 तथा Z= =1 के मध्य क्षेत्रफल)

=0.1915 + 0.3413 = 0.5328

अतः 30 तथा 66 के मध्य स्कोर करने वाले परीक्षार्थियों की संख्या=1000 x 0.5328 = 532.8 या 533

उदाहरण 6.5 : सैनिकों की औसत लम्बाई 68.22 इंच तथा प्रसरण 10.8 है। 1000 सैनिकों वाली टुकड़ी में 6 फीट से अधिक लम्बे सैनिकों की संख्या बताओ।

हलः दिया है $\overline{X}$ = 68.22, σ^2= 10.8 या$\sigma=\sqrt{10.8}$ = 3.28

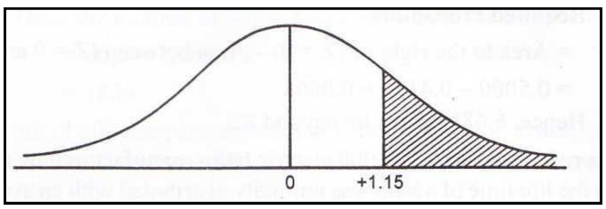
6 फीट से अधिक (अर्थात्72 इंच से अधिक)

X=72 के लिए, Z = (X - $\overline{X}$)/σ = (72-68.22)/3.28 = 3.78/3.28 = 1.15

वांछित क्षेत्रफल=

(Z=0 के दायीं ओर क्षेत्रफल) - (Z=0**तथा** Z=1.15 के मध्य क्षेत्रफल)

= 0.5000- 0.3749 = 0.12251



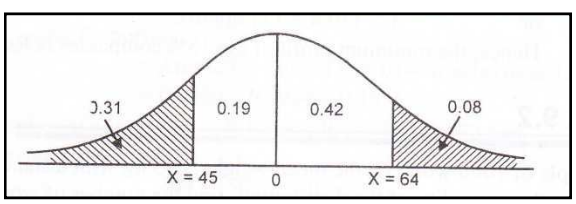
अतः 6 फीट अधिक लम्बाई वाले सैनिकों की प्रत्याशित संख्या= 1000x 0.1251 = 125. ≈125

6.6.2 सामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल ज्ञात होने पर माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करना

जब सामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात हो तो माध्य तथा प्रमाप विचलन का मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 6.6 : एक साममन्य वितरण में 31% मद के नीचे तथा 8% मद 64 से ऊपर हैं। $\overline{X}$ तथा σका मान ज्ञात करो।

हलः



Z=(X- $\overline{X}$)/σ

तालिका से Z=0.5 -0.3 के सापेक्ष Z का मान

= 0.19 क्षेत्रफल

= -0.5

$\therefore$ $-0.5 = (45-\overline{X})/\sigma$

या, $-0.5\sigma = 45-\overline{X}$

$\overline{X} -0.5\sigma = 45$ (i)

Z=0.5-0.08 के सापेक्ष Z का मान

= 0.42 क्षेत्रफल = +1.41 (तालिका स)

$\therefore 1.41 = (64-\overline{X})/\sigma$

या $1.41\sigma = 64-\overline{X}$

या $\overline{X} + 1.41\sigma = 64$ (तालिका से)

दोनों समीकरणों को हल करने पर

$\overline{X} -0.5\sigma = 45$

$\overline{X} +1.41\sigma = 64$

\- - -

$-1.91\sigma = -19$

$\sigma = 10$

σका मान समीकरण 1) पर रखने पर

$\overline{X} -0.5 (10) = 45$

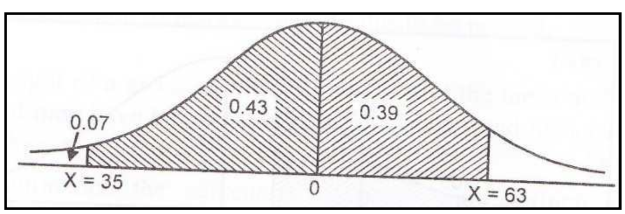
$\overline{X} -5=45$

या, $\overline{X} =50$

$\therefore \overline{X} = 50, \sigma =10$

उदाहरण 6.7 : एक वितरण पूर्णतया 7% मद 35 से कम हैं तथा 89% मद 63 से कम/नीचे हैं। वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

हलः 0.43 क्षेत्रफल के सापेक्ष Z का मान =1.48



$\therefore 1.48 = (35-\overline{X})/\sigma$

या $-1.48\sigma = 35-\overline{X}$

या $\overline{X} -1.48\sigma = 35$ (i)

0.39 क्षेत्रफल के सापेक्ष Z का मान =+1.23

$1.23 = (63-\overline{X})/\sigma$

$$1.23\sigma = 63 - \overline{X}$$

$$\overline{X} + 1.23\sigma = 63 \qquad \text{(ii)}$$

दोनों समीकरण हल करने पर

$$\overline{X} - 1.48\sigma = 35$$

$$\overline{X} + 1.23\sigma = 63$$

$$-2.71\sigma = -28$$

$$\sigma = 28/2.71$$

$$= 10.33$$

σका मान समीकरण 1) पर रखने पर

$$\overline{X} - 1.48(10.33) = 35$$

$$\overline{X} - 15.3 = 35$$

$$\overline{X} = 50.3$$

अतः $\overline{X} = 50.3, \sigma = 10.33$

6.6.3 उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग में उच्चतम तथा न्यूनतम स्कोर ज्ञात करना।

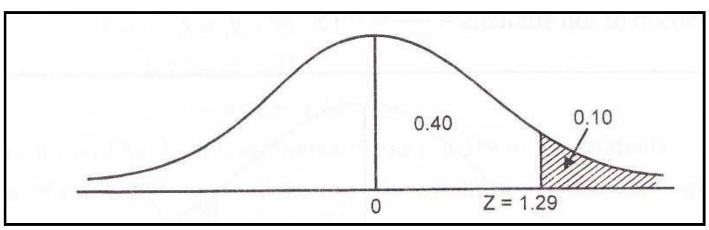
जब $\overline{X}$, σतथा उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग का समानुपात ज्ञात हो तब आप उच्चतम तथा न्यूनतम वर्ग में उच्चतम तथा न्यूनतम स्कोर ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 6.8 : 5000 कर्मचारियों का भाड़ा सामान्य रूप से वितरित है जिसका माध्य रू 2000 तथा प्रमाप विचलन रू 120 है। ऊपर से 500 सबसे धनी कर्मचारियों के लिए न्यूनतम भाड़ा क्या है?

हलः दिया है $N=5000$, $\overline{X} = 2000$, $\sigma=120$

सबसे धनी कर्मचारियों का अनुपात $= 500/5000 = 1/10 = 0.10$

0.40 क्षेत्रफल के सापेक्ष का मान = 1.29



हम जानते हैं $Z= (\overline{X})/\sigma$

$$\overline{X} - 2000 = 154.8$$

$$\overline{X} = 2154.8$$

अतः सबसे धनी 500 कर्मचारियों के लिए न्यूनतम भाड़ा रू 2154.8 है।

उदाहरण 6.9 एक परीक्षण के अंक/ मार्कस सामान्य रूप से वितरित हैं जिसका माध्य 75 तथा प्रमाप विचलन 5 है। यदि ऊपर से 5 प्रतिशत छात्र ग्रेड ए प्राप्त करें तथा नीचे 25 प्रतिशत ग्रेड एफ तो ए का न्यूनतम तथा एफ का अधिकतम अंक ज्ञात करें।

हलः दिया है $\overline{X} = 75, \sigma=5$

$Z=(X-\overline{X})/\sigma$

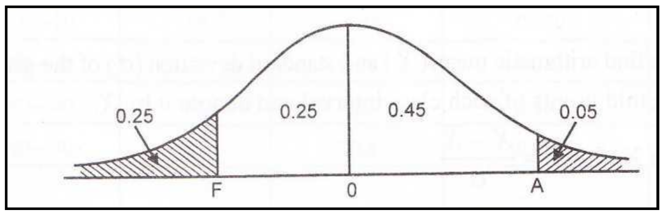
0.5-0.25 के सापेक्ष Zका मान = 0.25 क्षेत्रफल

= -0.68 (तलिका से)

$\therefore$ -0.68 = (X-75)/5

या,-0.68x5= X-75

X = 71.6 या 72



अतः नीचे से 25 प्रतिशत छात्रों का उच्चम अंक 72 होगा।

(0.05-0.05)= 0.45 क्षेत्रफल के सापेक्ष Zका मान

= 1.65 (तालिका से)

$\therefore$ 1.65 = (X-75)/5

या,1.65x5= X-75

या,8.25 = X-75

या,X=83.25 या83

अतः ऊपर से 5 प्रतिशत छात्रों का न्युनतम अंक 83 है।

6.7 सामान्य वक्र को फिट करना

सामान्य वक्र को फिट करने के दो तरीके हैं:

6.7.1 कोटि विधि तरीका

इस विधि में SNV के कोटि का उपयोग करते हैं। इस विधि में निम्नलिखित चरण होते हैं:

(i). सर्वप्रथम दिए गए वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन का मान ज्ञात करो।

(ii). प्रत्येक वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु ज्ञात करो तथा इसे से प्रदशित करो।

(iii). प्रत्येक Xके लिए $Z=(X-\overline{X})/\sigma$ज्ञात करो।

(iv). कोटि तालिका से Zके प्रत्येक मान के लिए कोटि का मान ज्ञात करो।

(v). इन प्रत्येक मानों को N x i/σ से गुणा करो तथा प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

यहाँ पर N = मदों की संख्या

i=वर्ग अंतराल की लम्बाई

σ =प्रमाप विचलन

उदाहरण 6.10 निम्नलिखित डाटा पर कोटि विधि से सामान्य वक्र फिट करो।

चर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	3	5	8	3	1

हलः सामान्य वक्र फिट करने के लिए $\overline{X}$ तथा σ ज्ञात करो

$\overline{X}$ तथा σ को ज्ञात करना

चर	F	MV (X)	d	d'=d/i	fd'	fd'²
0-10	3	5	-20	-2	-6	12
10-20	5	15	-10	-1	-5	5
20-30	8	25	0	0	0	
30-40	3	35	+10	1	+3	3
40-50	1	45	+20	2	+2	4
	N=20				∑fd'=-6	∑fd'²=24

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times i = 25 + \frac{-6}{20} \times 10 = 22$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{24}{20} - \left(\frac{-6}{20}\right)^2} \times 10 = 10.53$$

$\overline{X}$ तथा σका मान ज्ञात करने के पश्चात निम्न प्रक्रिया अपनाओ—

चर (1)	f (2)	MV (X) (3)	Z=(X- $\overline{X}$)/σ (4)	कोटि तालिका से कोटि का मान (5)	fe=कोटि x Nx i/σ (6)
0-10	3	5	-1.61	0.1092	2.07=2
10-20	5	15	-0.66	0.3209	6.09=6
20-30	8	25	0.28	0.3836	7.28=7
30-40	3	35	1.28	0.1872	3.55=4
40-50	1	45	2.18	0.0371	0.7046=1
					N=20

6.7.2 क्षेत्रफल विधि

इस विधि में SNV के अन्तर्गत क्षेत्रफल तालिका का उपयोग करते हैं। इस विधि में निम्न चरण होते हैं–

(i). सर्वप्रथम दिए गए वितरण का $\overline{X}$ तथा σ ज्ञात करो।

(ii). प्रत्येक वर्ग अन्तराल की न्यून सीमा को लिखो तथा इसे X से प्रदर्शित करो।

(iii). प्रत्येक न्यून वर्ग सीमा,X, के लिए $Z=(X-\overline{X})/\sigma$ज्ञात करो।

(iv). Zके प्रत्येक मान के लिए क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।(क्षेत्रफल तालिका से)

(v). इसके बाद प्रत्येक दो लगातार मानों के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात करो। इनके चिन्ह समान हैं और जब Z में भिन्न चिन्ह हों तो उनको जोड़ो।

(vi). इन प्रत्येक मानों में N से गुणा करके प्रत्याशित आवृत्ति ज्ञात करो।

उदाहरण 6.11 : निम्न डाटा पर सामान्य वक्र फिट करो।

चर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	3	5	8	3	1

हल : ऊपर के उदाहरण से हम प्राप्त करते हैं कि $\overline{X}=22, \sigma=10.53$ तथा N=20

$\overline{X}$ तथा σ का मान ज्ञात करने के पश्चात हम निम्न विधि अपनाते हैंः

चर (1)	न्यून वर्ग सीमा (2)	$Z=(X-\overline{X})/\sigma$ (3)	0 से Z का क्षेत्रफल (4)	प्रत्येक वर्ग अंतराल का क्षेत्रफल (5)	fe=क्षेत्रफल x N (6)
0-10	0	-2.09	0.4817	0.1088	2.17≈2
10-20	10	-1.14	0.3729	0.2975	5.95≈6
20-30	20	-0.19	0.0753	0.3518	7.036≈7
30-40	30	0.76	0.2764	0.1800	3.6≈4
40-50	40	1.71	0.4564	0.0397	0.794≈1
50-60	50	2.66	0.4961		
					N=20

6.8 सारांश

प्वायसन प्रक्रिया में दो घटनाओं के मध्य समय को घातांकी वितरण से वर्णन करते हैं। अर्थात एक प्रक्रिया जिसमें घटनाएं औसत दर से सतत तथा स्वतंत्र रूप से घटित होती हैं। यह गुणोत्तर वितरण का सतत रूप है। बीटा वितरण भी सतत प्रायिकता वितरण है जो कि अंतराल (0,1) पर परिभाषित है तथा इसके दो आकार प्राचल हैं तथा। बीटा वितरण का प्रयोग उन अनुपातों की सांख्यिकीय माडलिंग में करते हैं जहाँ पर अनुपात 0 या 1 न हो। सामान्य वितरण एक बहुत महत्वपूर्ण तथा बहुतायत उपयोग होने वाला वितरण है इसका उपयोग मुख्यतः सतत दैव चरों जैसे

वजन, लम्बाई, तथा छात्रों के समूह का बुद्धिमत्ता इत्यादि के व्यवहार के अध्ययन में होता है।

6.9 शब्दावली

घातांकी वितरणः एक ऐसी प्रक्रिया जिसमें घटनाएं स्वतंत्र तथा सतत रूप से एक निश्चित औसत दर से घटित होती है।

6.10 बोध प्रश्न

1. द्विपद वितरण असतत प्रायिकता है जबकि सामान्य वितरण .... प्रायिकता वितरण है।
2. सामान्य प्रायिकता वितरण की खोज अंग्रेजी गणितज्ञ ....ने 1733 में की थी।
3. सामान्य वितरण का प्रसार दोनों ही तरफ .... तक है ।
4. $\overline{X}-2\sigma$ तथा $\overline{X}+2\sigma$ के मध्य सामान्य वक्र का क्षेत्रफल ....है ।

6.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. सतत 2. अब्राहम डिमोरे 3. अनन्त 4. 0.9973

6.12 स्वपरख प्रश्न

1. सामान्य वक्र के अंतर्गत तालिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित स्थितियों में क्षेत्रफल ज्ञात करोः
   (i). Z=0तथा Z=1.3के मध्य।
   (ii). Z=0.75 तथा Z=0के मध्य।
   (iii). Z=-0.56 तथा Z=2.45 के मध्य।
   (iv). Z=0.85 तथा Z=1.96 के मध्य।
2. 1000 मजदूरों के प्रतिदर्श में औसत वजन 45 किग्रा तथा प्रताप विचलन 15 किग्रा है। सामान्य वितरण मानते हुए 40 तथा 60 किग्रा के मध्य वजन वाले मजदूरों की संख्या बताइए।
3. सामान्य वितरण जिसका माध्य 5 तथा SD = 3 हो से एक मद दैव निदर्शन द्वारा चुने जाने पर उसके 2.57 तथा 4.34 के मध्य होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. एक सामान्य वितरण का माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 है। X_1= 9.6 तथा X_2= 13.8 के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
5. एक सामान्य वितरण जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 हो X_1=6 तथा X_2= 18 के मध्य वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करो।
6. एक परीक्षा में परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंक सामान्य वितरित है। यदि 10 प्रतिशत ने 40 से कम अंक प्राप्त किए हों तथा 15 प्रतिशत ने 80 से अधिक अंक प्राप्त किए हों तो अंको का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

7. एक परीक्षा में 15 प्रतिशत उम्मीदवार विशिष्टता के साथ उत्तीर्ण हुए जबकि 25 प्रतिशत फेल हो गए। हमें यह ज्ञात है कि 100 में से 40 से कम अंक प्राप्त करने पर उम्मीदवार फेल हो जाता है तथा विशिष्टता प्राप्त करने के लिए 75 से अधिक अंक प्राप्त करना होता है। अंकों को सामान्य वितरित मानते हुए उनके वितरण का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

8. दिया गया है कि 84 प्रतिशत आदमियों की लम्बाई 65.2 इंच से कम है तथा 68 प्रतिशत आदमियों की लम्बाई 65.2 इंच 62.8 के मध्य है। आदमियों के समूह के लम्बाई को सामान्य वितरित मानते हुए उसका माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात करो।

9. एक परीक्षा में उत्तीर्ण तथा विशिष्टता का प्रतिशत क्रमशः 46 तथा 9 है। उम्मीदवारों द्वारा प्राप्त औसत अंक तथा उनका प्रमाप विचलन ज्ञात करो। जब न्यूनतम उत्तीर्ण अंक तथा विशिष्टता अंक क्रमशः 40 तथा 75 है। (मानो कि अंकों का वितरण सामान्य है।)

10. 500 मजदूरों की मासिक आय सामान्य वितरित है जिसकामाध्य रू 2000 तथा प्रमाप विचलन रू 200 है। सबसे अमीर मजदूरों की न्यूनतम आय बताओ।

11. 5000 व्यक्तियों के एक समूह की आय सामान्य वितरित है जिसका माध्य रू 100 तथा प्रमाप विचलन रू 75 है। 200 सबसे गरीब आदमियों की अधिकतम आय बताओ। ($Z=0$ से $Z=1.75$ तक के सामान्य वक्र का क्षेत्रफल 0.46 है।)

12. एक कक्षा के विद्यार्थियों के अंक सामान्य वितरित हैं जिसका $\overline{X}=6.7$ तथा $SD=1.2$ है। अंकों को सामान्य वितरित मानते हुए कक्षा के निचले 10 प्रतिशत विद्यार्थियों का अधिकतम अंक बताओ।

13. 1000 छात्रों पर किए गए एक बुद्धिमत्ता परीक्षण का औसत स्कोर 42 तथा प्रमाप विचलन 24 है। यदि ऊपरी 10 प्रतिशत छात्र ग्रेड ए प्राप्त करते हैं तो ए ग्रेड प्राप्त करने के लिए न्यूनतम अंक/स्कोर क्या है?

14.

(i). सामान्य वक्र को फिट करने के दो विधियों के नाम बताओ।

(ii). निम्नलिखित डाटा पर कोटि विधि से सामान्य वक्र फिट करो।

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f:	5	8	12	8	7

15. क्षेत्रफल विधि से निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करो।

वर्ग अंतराल	10.5-20.5	20.5-30.5	30.5-40.5	40.5-50.5	50.5-60.5	60.5-70.5	70.5-80.5
f:	12	28	40	60	32	20	8

16. निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करें।

माध्यबिन्दु	61	64	67	70	73
f:	5	8	42	27	8

17. निम्नलिखित डाटा पर सामान्य वक्र फिट करें।

ऊँचाई (सेमी)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	5	8	42	27	8

दिया है $\overline{X}$ =67.45 cm,σ=2.92 cm, N=100

स्वपरख प्रश्नों के उत्तर

1. अ) 0.4032 ब) 0.2734 स)0.7052 द)0.1727
2. 471
3. 0.2039
4. 70.08 प्रतिशत
5. 99.74 प्रतिशत

6- [=62.15, =17.16]

7- [53.79, =20.46]

8- [=64, =1.2]

9- [=37.18, =28.22]

10- 2,134Rs

11- Rs 768.75

12- 5.164 या5

13- 72.73 या73

14- f=3,9,14,10,4

15- f=9,26,45,54,40,20,6

16- f=4,20,41,28,7

17- f=4,20,41,28,7

6.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *‘Principles of Statistics’* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Gupta S. P. & Gupta M. P., *‘Business Statistics’* Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Shukla S. M. & Sahai S. P., ‘*Advanced Statistics*’ Sahitya Bhawan Publications, Agra.
4. Goon, Gupta and Dasgupta, ‘Basic Statistics’ World Press Limited – Calcutta.
5. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
6. Srivastava, Shenoy and Guptha, ‘Quantitative Methods in Management’.

इकाई 7 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया (Procedure of Testing a Hypothesis)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- परिकल्पना के परीक्षण के विभिन्न तरीकों को समझ सकें।
- परिकल्पना के परीक्षण के अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकें।

7.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय जॉच में, विचाराधीन वस्तुओं की कुलता को समग्र कहा जाता है। एक समग्र जिसमें वस्तुओं/चीजों/इकाईयों की परिमित संख्या होती है उसे परिमित समग्र कहा जाता है। एक समग्र जिसमें वस्तुओं/चीजों/इकाईयों की अपरिमित संख्या होती है उसे अपरिमित समग्र कहा जाता हैं । समग्र से संबंधित इकाईयों में विशेषताऐं जैसे ऊँचाई, वजन आदि शामिल है। इस प्रकार, सांख्यिकीय जॉच में हम छात्रों की ऊँचाईयों का जो एक विद्यालय में अध्ययन करते हैं, का हवाला दे सकते हैं। दूसरी परिस्थिति में हम आमों के वजनों का जो एक पेड में व्यस्क हो रहें हैं का हवाला दे सकते हैं। जब समग्र विशाल है, सांख्यिकीय जॉच करते समय, हम समग्र में प्रत्येक इकाई के साथ संपर्क करने में सक्षम नहीं हो सकते है। इसलिए, जॉच नमूने पर आधारित हो सकती है (समग्र का एक प्रतिनिधि भाग) इस परिस्थिति में जॉच को नमूना सर्वेक्षण कहा जाता है।

मान लीजिए 'N' आकार के समग्र से 'n' इकाईयों को चयनित करना है आकार 'n' मके एक नमूने से ये चयनित इकाईयॉ समग्र के एक नमूने से निकाली जातीा हे, यदि इकाईयों का चयन निश्चित पूर्व निर्धारित प्रायिकताओं के अनुसार होता है, इस तरह के नमूने को यादृच्छिक नमूना कहा जाता हे। यदि सभी इकाईयों के लिए प्रायिकताऐं समान हैं, तो चयन सरल यादृच्दिक नमूनाकरण कहलाता है।

समग्र मे ंचर राशि के लिए, मान लीजिए हम जैसे माध्य, मानक विचलन आदि स्थिर राशि ज्ञात करते हैं तो इन स्थिर राशियों को समग्र का प्राचल कहा जाता है। दसरी

तरफ, यदि हम नमूने का माध्य, मानक विचलन आदि ज्ञात करते हैं, उन्हें सांख्यिकीय कहा जाता है। प्राचलन समग्र की एक सांख्यिकीय स्थिर राशि है। आंकडा नमूनों मानो का एक फलन है।

इस प्रकार, एक विद्यालय के छा़त्रों की माध्य ऊँचाई एक प्राचल है। जबकि विद्यालय के 50 यादृच्छिक चयनित छात्रों की माध्य ऊँचाई एक ऑकडा है।

समग्र का सांख्यिकीय वितरण एक प्राचल (पायसन वितरण) के द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। या इसका निर्धारण एक से ज्यादा प्राचलों द्वारा किया जा सकता है जैसे सामान्य वितरण मे ंदो प्राचल माध्य एवं मानक विचलन होते हैं, द्विपद वितरण मे ंदो प्राचल n एवं p होते हैं समग्र प्राचल के सभी स्वीकार्य मानो ंका समूह (समुच्चय) प्राचल अतंराल कहलाता हैः यदि एक प्राचल अकेले समग्र के सांख्यिकीय वितरण के वर्णन के लिए पर्याप्त है तो प्राचल अंतराल एक आयामी है। दूसरी तरफ, यदि दो प्राचल समग्र का वर्णन करते हैं तो प्राचल अंतराल द्वि आयामी है और इसी तरह।

7.2 नमूने का वितरण एवं मानक त्रुटि

मान लीजिऐ एक समग्र से 'n' आकार का एक नमूना लिया जाता है और नमूना माध्य $\bar{x}$ की गणना की जाती है। समग्र मे ंसे समान आकार के इस तरह के बहत से नमूने लिये जा सकते हे। 'n' आकार के सभी नमूनों का समुच्चय जिसे समग्र में से लिया जा सकता है, नमूना अंतराल कहा जाता है। प्रत्येक नमूने के लिए $\bar{x}$ की गणना की जा सकती है। इसलिए $\bar{x}$ के बहुत मान हो सकते हैं मान लीजिए प्राचल अंतराल में, $\bar{x}$ के इन विभिन्न मानो ंको आवृत्ति वितरण के रूप में सारणीबद्ध किया गया हो, तो परिणामी वितरण को $\bar{x}$ का नमूने का वितरण कहा जाता है। इस नमूने के वितरण का मानक विचलन मानक त्रुटि (S.E) कहलाता है।

समान आकार के विभिन्न नमूनों के लिए ऑकडों के मानों का वितरण आंकडों का नमूना वितरण कहलाता है।

ऑकडों की मानक त्रुटि, ऑकडों के नमूने वितरण का मानक विचलन है। अन्य आंकडों का नमूना वितरण जैसे नमूना माध्यिका भी लिखा जा सकता है।

इन प्रत्येक परिस्थिति मे ंसमतुल्य मानक विचलन मानक त्रुटि (S.E) होगा!

एक समग्र जिसका माध्य (μ) एवं मानक विचलन (σ) है का ध्यान करें। चर्चाऐं आरामदायक होंगी, इसलिए यहॉ हम अपने को केवल बडे समग्र तक सीमित करते हैं तब $\bar{x}$ का नमूना वितरण का माध्य μ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है। जो कि $E(\bar{x}) = \mu$ और $\text{S.E}(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है।

यदि समग्र से आकार n_1 का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है जिसका माध्य μ_1 है और मानक विचलन σ_1 है। दूसरे , समग्र से यदि n_2 आकार का यादृच्छिक नमूना भी लिया जाता है जिसका माध्य μ_2 और मानक विचलन σ_2 है यदि $\overline{x_1}$ पहले नमूने का माध्य हो और $\overline{x_2}$ दूसरे नमूने का माध्य हो तो

$$E(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = (\mu_1 - \mu_2) \; and \; S.E.(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = \sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}$$

मानक त्रुटि या अनुपात

समग्र में, मान लीजिए इकाईयों का द्विपालिक वर्गीकरण (दो वर्गों मे ंवर्गीकरण) उन इकाईयों के रूप में संभव है जो एक गुण रखते हैं और जो गुण नहीं रखते हैं उदाहरण के लिए:

(i) गॉव के लोगों का वर्गीकरण जैसे शिक्षित एवं अशिक्षित

(ii) विद्यालय के छा़त्रों का वर्गीकरणजैस गरीब एवं अमीर

(iii) फलों का वर्गीकरण जैसे पका एवं कच्चा

(iv) कर्मचारियों का वर्गीकरण जैसे संतुष्ट एवं असंतुष्ट

(v) ग्राहकों का वर्गीकरण

समग्र में यदि p इकाईयों का अनुपात है जो विशेषता (गुण) रखता है। इस तरह के समग्र में से, मान लीजिए एक n आकार का यादृच्छिक नमूना लिया जाता है। यदि x इन n इकाईयों के वर्ग से सम्बन्धित है जो इस गुण को रखते हैं।

तब, $p = \frac{x}{n}$ गुण का एक नमूना अनुपात है।

यहॉ, $p = \frac{x}{n}$ माध्य $E(p) = p$

और मानक त्रुटि $S.E.(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

जहॉ $Q = 1 - p$

यदि एक आकार n_1 का सहज गुण यादृच्छिक नमूना एक समग्र से p_1 अनुपात के साथ लिया जाता है। यदि x_1 इकाईयों मे ंनमूना सहजगुण रखता है। तब, नमूना अनुपात $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$ है। यदि एक आकार n_2 का सहजगुण यादृच्छिक नमूना समग्र से p_2 अनुपात के साथलिया जाता है। यदि x_2 इकाईयो ं में नमूना सहजगुण रखता है। तब नमूना अनुपात $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$ है। यहॉ नमूना अनुपातों के माध्य मे ंअन्तर $E(p_1 - p_2) = (p_1 - p_2)$ और मानक त्रुटि $S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$ जहॉ $Q_1 = 1 - P_1$ और $Q_2 = 1 - P_2$.

यहॉ यदि $P_1 = P_2 = P$

तब मानक त्रुटि $\sqrt{PQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n2}\right]}$ है।

इस प्राकर, कुछ ऑकडों के माध्यों एवं मानक त्रुटियॉ निम्नवत है।

ऑकडा	माध्य	मानक त्रुटि

$\bar{x}$ (*Sample mean*)	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ (*difference of means*)	$\mu_1 - \mu_2$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
P (*Sample mean*)	P	$\sqrt{\frac{PQ}{n}}$
$P_1 - P_2$ (*difference of proportions*)	$P_1 = P_2$	$\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$
$P_1 - P_2$ (*when* $P_1 = P_2 = P$)	0	$\sqrt{pQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}$

मानक त्रुटि की उपयोगिता

मानक त्रुटि आंकडे की परिवर्तनशीलता की माप है। यह आंकलन एवं परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए उपयोगी है।

(i) आंकलन के सिद्धान्त में, मानक त्रुटि का प्रयोग एक अनुमानक के रूप में ऑकडों की दक्षता एवं तालमेल को निर्धारित करना है।

(ii) आंकलन अंतराल में, मानक त्रुटि का प्रयोग विश्वसनीयता अंतरालों को लिखना है।

(iii) परिकल्पनाओं के परीक्षण में, परीक्षण की मानक त्रुटि का उपयोग ऑकडे परीक्षण के विवरण को मानकीकृत करने के लिए किया जाता है।

सांख्यिकीय अनुमानः सांख्यिकीय अनुमान सांख्यिकी की वह शाखा है जो समग्र से लिये गये नमूनों का उपयोग करते हुए समग्र के सांख्यिकीय प्रकृति के बारे मे ंनिर्णय लेने के सिद्धान्त और तकनीकों से संबंधित है। सांख्यिकीय अनुमानो ंकी दो शाखाऐं होती है, वो हैं, (1) अनुमान के सिद्धान्त (2) अनुमानों का परीक्षण

7.3 अनुमान के सिद्धान्त

सांख्यिकीय में, हम प्रायः ऐसी स्थिति में आते हैं जहॉ हम समग्र के एक प्राचल के संभावित मूल्य के बारे मे ंबात करेंगें। मान लीजिए एक बागवानी अनुसंधान केंद्र ने केले का संकर किस्म विकसित किया है। केन्द्र हमसे इस तरह के केले के औसत वजन को जानना चाहता है। इस उद्देश्य के लिए, कुल केले यादृच्छिक चुने जाते हैं और उनके माध्य वजन की गणना की जाती है। यह माध्य वजन (नमूना माध्य) संभावित समग्र माध्य के रूप में प्रस्तावित है। इस प्रकार नमूना माध्य $\bar{x}$,समग्र माध्य μ का एक अनुमानक है। एक विशिष्ट नमूने के लिए मान लीजिए नमूना माध्य वजन 84 ग्राम है, $\bar{x}$ के इस विशिष्ट मान समग्र माध्य का आंकलन कहा जाता है। अज्ञात प्राचल का अनुमानक एक आंकडा है जो उस प्राचल के संभावित मान को

निर्दिष्ट करता है। अनुमान विशिष्ट नमूने के लिए अनुमानक का एक विशिष्ट मान है। अनुमानक एक आंकडा है, जबकि अनुमान (आंकलन) एक संख्यात्मक मान है।
अनुमान (आंकलन) समग्र से लिये हुए नमूने के सांख्यिकीय का प्रयोग करते हुए समग्र प्राचल के संम्भावित मान के लिए अपनाई गई विधियों और तकनीकों से सम्बन्धित है। आंकडों के दो प्रकार होते हैं वो हैं, (1) बिन्दु आंकलन (2) अंतराल आंकलन
बिन्दु आंकलन (अनुमान) :– एक अज्ञात प्राचल का अनुमान लगाते समय, यदि एक एकल मान अनुमान के रूप में प्रस्तावित होता है, तो इस तरह के अनुमान को बिन्दु अनुमान कहते हैं इस प्रकार, नमूना माध्य $\bar{x}$ =84 ग्राम है के आधार पर यदि हम निष्कर्ष निकालें कि समग्र माध्य 84 ग्राम है यह बिन्दु आंकलन है। यहॉ $\bar{x}$ एक समग्र माध्य μ का बिन्दु आंकलन है। निर्दिष्ट मान 84 ग्राम μ का बिन्दु आंकलन है। आम तौर पर n_1 का बिन्दु आंकलन n_1 को $\frac{\wedge}{\mu}$ द्वारा प्रदर्शित कियाजाता है। इसलिए

$$\frac{\wedge}{\mu} = \bar{x}$$

अन्तराल आंकलन :– अंतराल आंकलन में, अज्ञात प्राचल के अनुमान के रूप में हम एक एकल मान का प्रस्ताव करते हैं। अधिकांश स्थितियों में प्रस्तावित मूल्य प्राचल के वास्तविक मूल्य की संभावना नहीं होंती है। इसके बजाय, यदि हम बिन्दु अनुमान के आसपास एक छोटे से अंतराल का प्रस्ताव करते हैं, तो प्राचल को शामिल करने की संभावना अंतराल, हमारा प्रस्ताव मजबूत होगा। यह अंतराल जिसमें प्राचल को शामिल करने की संभावना है अंतराल अनुमान कहा जाता है। अंतराल आंकलन में, एक अंतराल (T_1 से T_2) जिसमें प्राचल को शामिल करने की संभावना है प्राचल के अनुमानक के रूप मे ंप्रस्तावित है। अंतराल (T_1 से T_2) को विश्वसनीयता अंतराल कहा जाता है। विश्वास अंतराल में प्राचल के सम्मिलित होन की संभावना को विश्वास गुंणांक कहा जाता है। विश्वास अंतराल की सीमा T_1 और T_2 को विश्वास सीमा कहा जाता है। ये सीमाऐं सम्बन्धित बिन्दु अनुमानक (सांख्यिकी) के नमूनाकरण वितरण पर आधारित है।

विश्वास अंतराल में प्राचल शामिल होने की संम्भावना को विश्वास गुणांक कहा जाता है। इसे $(1-\alpha)$है। अन्तराल अनुमान में, हम विभिन्न विश्वास गुणंकों के विश्वास अंतराल लिख सकते हैं, जैसे $95\%, 99\%$ इत्यादि।
उदाहरण :– हम केले के वनज के बारे मे ंपहले उर्वधृत उदाहरण पर गौर करते हैं। यहॉ, केलों का अज्ञात माध्य वजन (समग्र माध्य μ) का अनुमान नमूना आकार $n = 100$ के प्रयोग से लगाया गया है। जिसके लिए नमूना माध्य $\bar{x} = 84$ ग्राम है। यदि समग्र मानक विचलन $\sigma = 5$ ग्राम है तो केले का वजन सामान्य रूप से वितरित किया जाता है। तब , $\bar{x}$
माध्य 84 ग्राम और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{100}$

1. $\bar{x} = 84$ ग्राम μ का एक बिन्दु अनुमानक है। इसलिए, हम कहते हैं कि केलों का माध्य वनज 84 ग्राम है।
2. μ के लिए 95% विश्वसनीयता अंतराल

$$(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

जो $$(84 - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}, 84 + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}).$$ है।

इसलिए 95% विश्वसनीयता के साथ हम कहते हैं कि कैलों का माध्य वजन 83.02 एवं 84.98 ग्राम के मध्य है।

3. μ के लिए 99% विश्वसनीयता $(\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

जो $$(84 - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}, 84 + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}).$$

जो (81.62 , 85.29) है। इसलिए, 99ः विश्वसनीयता के साथ हम कहते हैं कि कैलों का माध्य वजन 81.61 और 85.29 ग्राम के मध्य है।

टिप्पणी –1 हम जानते हैं कि द्विपद समग्र मे ंमाध्य np एक अनुमानक है इसलिए p का अनुमानक

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{3.38}{7} = 0.48$$

टिप्पणी –2 पायसन समग्र में माध्य का अनुमानक $\hat{\lambda} = \bar{x} = 0.2$

टिप्पणी –3 पायसन समग्र में माध्य n_1 का अनुमानक $\hat{\lambda} = \bar{x} = 1.2$ है।

7.4 परिकल्पनाओं का परीक्षण

अनुमानों का परीक्षण समग्र से लिऐ गये नमूनों का उपयोग करके समग्र के प्राचल के संबंध मे ंअनुमानों की वैधता के सत्यापन के साथ संबंधित हैं मान लीजिए हम मानते हैं कि x शहर के निवासी की औसत आय रू0 50 प्रतिदिन हे। इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए, x शहर के कुछ निवासीयों को यादृच्छिक तरीके से चयनित किया गया और उनकी औसत दैनिक आय ज्ञात की गई। यदि यह नमूना माध्य रू0 50 के करीब है तो हम यह निष्कर्ष निकालते है कि x शहर के निवासी की औसत आय 50 रूपये है इस प्रकार यदि नमूना माध्य रू0 50.60 है, चूँकि यह मान रू0 50 के करीब है, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि x शहर के निवासी की औसत आय रू0 50 प्रतिदिन है। दूसरी और यदि नमूना माध्य रू0 68.60 है चूँकि

यह मान रू0 18 से दूर है, तो हम यह निष्कर्ष निकालते हैं, कि x शहर के एक निवासी की औसत आय रू0 50 से भिन्न है।

सांख्यिकीय परिकल्पना :– एक सांख्यिकीय परिकल्पना समग्र के सांख्यिकीय विवतरण के संबंध मे ंएक अभिप्राय है। यह समग्र के मापदंडों के बारे में बयान है।

सांख्यिकीय परिकल्पना को H द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण

1) H : समग्र का माध्य $\mu = 25$ ।

2) H : समग्र सामान्य रूप से माध्य $\mu = 25$ और मानक विचलन $\sigma = 2$ के साथ वितरित है।

एक अनुमान जो पूरी तरह से समग्र के सांख्यिकीय वितरण को निर्दिष्ट करती हे, सरल परिकल्पना कहा जाता है यह एक ऐसी अवधारणा है जो समग्र के सभी मापदंडों को निर्दिष्ट करता है। H : समग्र का माध्य $\mu = 25$ के साथ सामान्य रूप से वितरण एक सरल परिकल्पना है।

एक परीक्षण प्रक्रिया की शुरूआत करने के लिए, एक परिकल्पना बना दी जाती है, इस परिकल्पना की वैद्यता का परीक्षण किया जाता है यदि परिकल्पना सही पायी जाती है तो इसे स्वीकार किया जाता है। दूसरी ओर, यह गलत पायी जाती है तो इसे अस्वीकार कर दिया जाता है। परिकल्पना संम्भव नकारों की जॉच की जा जिसमे ंरही है, शून्य परिकल्पना कहा जाता हे। शून्य परिकल्पना को μ_0 से प्रदर्शित किया जाता है यदि शून्य परिकल्पना को गलत पाया जाताहै, तो एक और अवधारणा जो शून्य अवधारणा के विपरीत है, जब शून्य परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है , दूसरी परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है उसे वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं। वैकल्पिक परिकल्पना को H_1 से प्रदर्शित करते है।

मान लीजिए एक शून्य परिकल्पना $H_\sigma : \mu = 1oo$ है(औसत मजदूरी 100 रू0 है) परिस्थितियों के आधार पर वैकल्पिक परिकल्पना निम्न में से कोई भी हो सकती है।

$H_1 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से भिन्न हो)

$H_2 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से ज्यादा हो)

$H_3 : \neq$ रू0 100 (औसत मजदूरी 100 रूपये से कम हो)

परीक्षण प्रकिया :– एक शून्य परिकल्पना के परीक्षण के एिल सांख्यिकीय प्रकिया के चरण इस प्रकार हैः–

1) शून्य परिकल्पना की स्थापना
2) वैकल्पिक परिकल्पना की स्थापना
3) परीक्षण ऑकडों और शून्य वितरण की पहचान करना
4) Critical क्षेत्र की पहचान करना
5) यादृच्छिक नमूने को लेना औरवास्तव में इसके परीक्षण का आयोजन करना।
6) निर्णय लेना (अनुमान देना)

1) **शून्य परिकल्पना की स्थापना :–** संभव अस्वीकृति के लिए परीक्षण किया जा रहा है जो परिकल्पना शून्य अवधारणा है। शून्य परिकल्पना मे ंयह हो सकता है कि

- प्राचल किसी दिए गए मान के बराबर है। ($\mu = \mu_0$)
- दो समग्र के एिल प्राचल बराबर है। ($\mu_1 = \mu_2$)
- अन्तर नगण्य है। (सार्थक नहीं है)
- वितरण उपयुक्त है।
- विशेषताऐं स्वतन्त्र है, और इसी तरह।

2) वैकल्पिक परिकल्पना की स्थापना :–

परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है, जब शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है, वैकल्पिक परिकल्पना कहते है। यह हो सकता है कि :

- प्राचल दिए गए मान के बराबर नहीं है। ($\mu \neq \mu_0$)
- प्राचल दिए गए मान से अधिक है। ($\mu > \mu_0$)
- दो समग्रो के लिए प्राचल समान नहीं है। ($\mu_1 \neq \mu_2$)
- पहले समग्र का प्राचल दूसरे समग्र के प्राचल से कम है ($\mu_1 = \mu_2$)
- अतंर अर्थपूर्ण है।
- वितरण समुचित नहीं है।
- विशेषताऐं निर्भर है। (स्वतन्त्र नहीं)

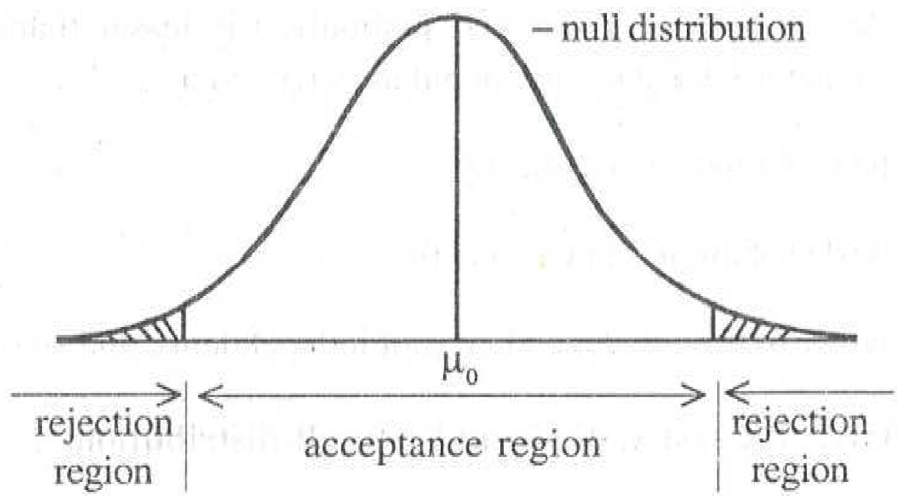
3) परीक्षण ऑकडों और शून्य वितरण की पहचान करना :–

परीक्षण ऑकडे वे ऑकडे हैं जिनके वितरण के आधार पर परीक्षण किया जाता है। H_0 के अंतर्गत परीक्षण ऑकडों के सांख्यिकीय वितरण को शून्य वितरण कहा जाता है। $H_0 : \mu = \mu_0$ (*mean is euqual to* μ_0) के परीक्षण के लिए, सांख्यिकीय परीक्षण $\bar{x}$ नमूना माध्य है। H_o के अर्न्तगत $\bar{x}$ का वितरण $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ है। यह $\bar{x}$ शून्य वितरण है हालॉकि सुविधा के लिए, मानकीकृत रूप Z= $\frac{x-\mu_0}{\sigma_m}$ समझा जा सकता है जिसमे ंशून्य N(0,1) वितरण है।

4) Critical (अस्वीकृत) क्षेत्र की पहचान करना :–

परीक्षण ऑकडों के उन मानों का समूह जो शून्य अवधारणा के लिए अस्वीकृति का नेतृत्व करता है, को अस्वीकृति क्षेत्र कहा जाता है। परीक्षण ऑकडों के उन मानों का समूह जो शून्य अवधारणा की स्वीकृति का नूतृत्व करता हे, स्वीकृति क्षेत्र कहा जाता है।

स्वीकृति क्षेत्र की सीमांकन सीमा को स्वीकृति मान कहा जाता है स्वीकृति क्षेत्र ऐसा बना हुआ है कि जब H_6 सही हो, इसकी अस्वीकृति की संभावना एक छोटा सा पूर्व निर्धारित मान है इस पूर्व निर्धारित मान को महत्व का स्तर कहा जाता है।



महत्व का स्तर एक पूर्व निर्धारित ऊॅपरी सीमाा है जो कि वास्तव मे ंसही है जब शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति की संभावना हेाती है। महत्व का स्तर $\propto$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। आमतौर पर $\propto$ का पूर्व निर्धारित मान 0.05 या 0.01 होगा। दूसरे शब्दों में , यह 5% या 1% होगा ।

परीक्षण की प्रकृति औरवैकल्पिक परिकल्पना की प्रकृति के आधार पर , Critical क्षेत्र का एक हिस्सा हो सकता हे या इसके दो भाग हो सकते है। यदि Critical क्षेत्र मे ंएक भाग है तो परीक्षण को एकतरफा परीक्षण कहते है। यदि Critical क्षेत्र के दो भाग होत हैं, तो उसे दो तरफा परीक्षण कहते हैं।

5) यादृच्छिक नमूने को लेना और वास्तव में इसके परीक्षण का आयोजन करना :–

आकार 'n' का एक यादृच्छिक नमूना समग्र से लिया जाता है। ऑकडे परीक्षण के मान की गणना नमूना मान से की जातीा है। यदि परिकलित मान (प्रेक्षित मान) Critical क्षेत्र को सम्बन्धित है, H_1 के पक्ष मे ंH_0 अस्वीकार होगी दूसरी ओर यदि परिकलित मान स्वीकृति से सम्बन्धित होता है तो H_0 स्वीकार होगी।

6) निर्णय लेना (अनुमान देना) :–

अंतिम निर्णय (अनुमान, निष्कर्ष) की घोषणा की जाती है

निर्णय

(अ) नई दवा पुनाने की तुलना मे ंअधिक प्रभावी है।

(ब) नर नवजात शिशुओं के बीच नवजात जन्मोत्तर वृद्धि समान होती है, जैसे कि नर शिशुओं में हो सकता हे।

प्रथम एवं द्वितीयक प्रकार की त्रुटियॉ

जब एक वैकल्पिक परिकल्पना के विरूद्ध एक शून्य परिकल्पना का पीरक्षण करते हें, निम्न परिस्थितियों मे ंएक सामने आती हैं

क्र0सं0	वास्तविक तथ्य	नमूने के आधार पर निर्णय		त्रुटि

1	H_0 सत्य है।	स्वीकार H_0	सही निर्णय	---
2	H_0 सत्य है।	अस्वीकार H_0	गलत निर्णय	Type I
3	H_0 असत्य है।	स्वीकार H_0	गलत निर्णय	Type II
4	H_0 असत्य है।	अस्वीकार H_0	सही निर्णय	---

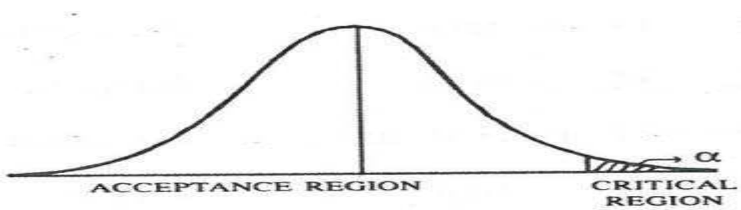
यहाँ परिस्थितियों (2) और (3) में, गलत फैसले आते है। इन गलत निर्णयों को क्रमशः पहली तरह की त्रुटि (I प्रकार त्रुटि) और दूसरी तरह की त्रुटि (II प्रकार त्रुटि) कहा जाता हे। इस प्रकार

- पहली तरह की त्रुटि वासतव मे ंसही है जब शून्य अवधारणा के अस्वीकार करने का बेहद गलत निर्णय लिया जाता है।
- द्वितीयक प्रकार की त्रुटि मे ंगलत अनुमानों को स्वीकार करने का गलत निर्णय लिया जाता है, जब यह वास्तव मे ंसत्य है। पहले तरह की त्रुटि होने की संभावना $\propto$ हे। यह पीरक्षण का एक आकार है।

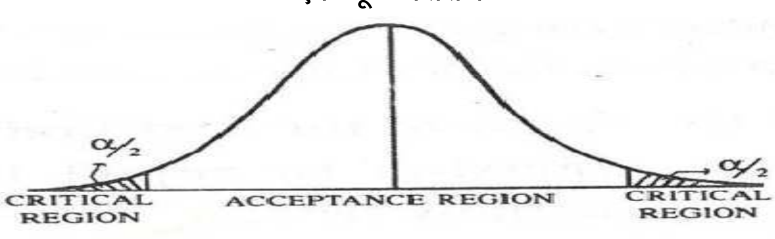
दूसरी तरह की त्रुटि की संभावना के घटित होन को B द्वारा प्रदर्शित करते हैं (1-B) के मान को परीक्षण का घात कहा जाता है।

परीक्षण की घात H_0 को अस्वीकार करने की संभावना है जब यह सत्य नहीं है। जबकि परीक्षण, महत्व का स्तर $\propto$ अग्रिम में तय किया जाता है। फिर महत्वपूर्ण क्षेत्र इस तरह निर्धारित किया जाता है कि (1-B) की अधिकतम हो इस प्रकार Critical मान महत्व के स्तर पर आधारित होता है।

एक पूंछ और दो पूंछ परीक्षण (एक तरफा और दो तरफा परीक्षण)



एक पूंछ परीक्षण



दो पूंछ परीक्षण

दूसरी आर, यदि Critical क्षेत्र परीक्षण ऑकडों के शून्य वितरण की पूँछ पर माना जाता हे, तो परीक्षण दो पुच्छिक परीक्षण (दो तरफा परीक्षण) है। दो पूँछ के मामले में H_0 का मान μ से कम σ से ज्यादा हो सकता है। एक पुच्छीय परीक्षण में $\mu > \mu_0$ या $\mu < \mu_0$ या दिशाऐं दी जाती है।

निम्नलिखित मे ंसे कुछ एक पुच्छीय परीक्षण हैं :–

- परीक्षण $\mu_0{:}\mu = \mu_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu > \mu_0$
- परीक्षण $\mu_0{:}\mu_1 = \mu_2$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu_1 > \mu_2$
- Goodness of Fit के लिए परीक्षण
- आकस्मिकता तालिका मे ंविशेषताओं की आबादी के लिए परीक्षण

कुछ निम्नलिखित दो पुच्छीय परीक्षण हे।

- परीक्षण $\mu_0{:}\mu = \mu_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu \neq \mu_0$
- परीक्षण $\mu_0{:}\mu_1 = \mu_2$ के विपरीत $\mu_1{:}\mu_1 \neq \mu_2$
- परीक्षण $\mu_0{:}\sigma = \sigma_0$ के विपरीत $\mu_1{:}\sigma > \sigma_0$

उदाहरण 1:– पिछला अनुभव कहता है कि काजू गिरी मे ं1.2 ग्राम वजन का मानक विचलन है। 40 माध्य वजन के यादृच्छिक चुने गिरी (दानों) के लिए माध्य त्रुटियॉ ज्ञात कीजिए।

हल :– यहॉ, σ = 1.2 ग्राम और n = 40

नमूना माध्य की मानक त्रुटि $S.E(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= \frac{12}{\sqrt{40}}$ = 0.1897 ग्राम है।

उदाहरण 2 :– एक कालेज के लडकों के वजन का माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 47 किलोग्राम एवं 31 किलोग्राम है। उसी कालेज के लडकियों क`वजन का माध्य एवं मानक विचलन 45 किलोग्राम एवं 2.8 किलोग्राम है। कालेज मे ंसे 16 लडके एवं 9 लडकियॉ यादृच्छिक चयनित की जाती हे।

(i) 16 चयनित लडकों के माध्य वजन का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

(ii) 9 चयनित लउकियों के माध्य वजन का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

(iii) चयनित लडकों के औसत वनज एवं चयनित लडकियों के औसत वजन के अन्तर का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल :– यहॉ

μ_1 =47 किग्रा	$\sigma_1 =$ 3.1 किग्रा	$n_1 = 16$
μ_2 =45 किग्रा	$\sigma_{12} =$ 2.8 किग्रा	$n_2 = 9$

यदि $\overline{x_1}$ चयनित लडको ंका माध्य वजन है।

$\overline{x_2}$ चयनित लडकियों का माध्य वजन है।

(1) माध्य = E $(\overline{x_1}) = \mu_1 = 47$ किग्रा

S.E. $(\overline{x_1})\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{3.1}{\sqrt{16}} = 0.775$ किग्रा

(2) माध्य = E $(\overline{x_2}) = \mu_2 = 45$ किग्रा

S.E. $(\overline{x_2})\ \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = \frac{2.8}{\sqrt{9}} = 0.993$ किग्रा

(3) माध्य $= (\overline{x_1} - \overline{x_2}) = \mu_1 - \mu_2$

47–45 = 2 किग्रा

$$S..E.(\overline{x_1} - \overline{x_2}) = \sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}} + = \sqrt{\frac{(3.1)^2}{16}} + \frac{(2.8)^2}{9} = 1.213\,kgs$$

एक नमूना जॉच, परिणाम पैदा करता है, और इन परिणामों के साथ, समग्र के लिए निर्णय बनाये जाते हैं लेकिन ऐसे निर्णयों मे ंअनिश्चितता का एक तत्व शामिल है, जो गलत फैसले का कारण है। परिकल्पना एक ऐसी धारणा है जो समग्र प्राचल के बारे मे ंसत्य या असत्य भी हो सकती है ंउदाहरण के लिए, सिक्के को 300 बार उछालने पर कोई 190 चिट और 110 बार पट प्राप्त कर सकता है। इस उदाहरण पर, हम यह जांचने में रूचि रखते हैं कि क्या सिक्का निष्पक्ष हे या नहीं। इसलिए, हम इसका मूल्यांकन करने के लिए एक परीक्षण आयोजित कर सकते हैं कि क्या अंतर नमूनाकरण के कारण है। एक महत्वपूर्ण परीक्षण के कियान्वयन की प्रक्रिया निम्नानुसार है।

अवधारणा का निर्माण – हमारी धारणा को सत्यापित करने के लिए जो नमूना अध्ययन पर आधारित है, हम ऑकडे एकत्र करते हैं और नमूना मान और समग्र मान के बीच के अंतर को पता करते है। यदि इनमें कोई अंतर नहीं है या यदि अंतर बहुत छोटा है, तो हमारा अनुमानित मान सही है, सामान्यतया दो अवधारणाओं का निर्माण किया जाना चाहिए और मगर एक परिकल्पना सही है, तो दूसरे को अस्वीकार करेंगें।

(अ) शून्य परिकल्पना :– यह अंतर के महत्व का परीक्षण करने के लिए बहुत उपयोगी उपकरण है। समग्र से सम्बन्धित किसी भी परिकल्पना को सांख्यिकीय अवधारणा कहा जाता है। सांख्यिकीय परीक्षण की प्रक्रिया में, समग्र से प्राप्त नमूने पर आधारित अवधारणा को अस्वीकार या स्वीकार किया जाता है। सांख्यिकीयविद् अवलोकन के माध्यम से परिकल्पना की जॉच करते हैं और संभावित देते हैं। सरल परिकल्पना से पता चलता है कि नमूना मान और अध्ययन के तहत समग्र मान किसी तरह या अंतर प्रदर्शित नहीं करते हें परिकल्पना हमने कल्पित की है, वह शून्य अवधारणा है, इसका अर्थ है कि न मूना के माध्य और समग्र माध्य के बीच वास्तवकि अंतर शून्य है कम से कम अंतर होना महत्वहीन है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति का अर्थ है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच का वास्तविक अंतर काफी महत्वपूर्ण है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति से पता चलता है कि समय पर वैकल्पिक परिकल्पना।

उदाहरण के लिए :–

(1) एक विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई 155 सेन्टीमीटर है।

(2) एक व्यवसाय की औसत दैनिक बिकी रू0 1,50,000 है।

(3) किसी विशेष गांव के निवासी की औसत आय 100 रूपये है। इन सभी बयानों को नमूना परीक्षणो ंके आधार पर सत्यापित करना होागा।सामान्यतया एक परिकल्पना में कहा जाता है कि नमूना माध्य एवं समग्र माध्य के बीच कोई अंतर नहीं हैं या $\mu = \mu_0$ शून्य परिकल्पना को μ_0 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(ब) वैकल्पिक परिकल्पना :– μ_0 की अस्वीकृति वैकल्पिक परिकल्पना की स्वीकृति की ओर जाता है, जिसे H_1 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जैसे :–

$H_0 = \mu = 155$ (शून्य परिकल्पना)

$H_1 = \mu \neq 155$ या $\mu > 155$ या $\mu < 155$ (वैकल्पिक परिकल्पना)

ज्ब दो अवधारणाओं को स्थापित किया जाता है, तो शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति एक नमूना अध्ययन पर आधारित होती है। इस प्रकार यह दो गलत निष्कर्ष की ओर जाता है। (1) H_0 को अस्वीकृत करते हुए जब H_0 सत्य है (2) H_0 को अस्वीकृत करते हुए जब H_0 असत्य है । इसे निम्नलिखित तालिका मे ंवर्णित किया जा सकता है।

	नमूने में से निर्णय	
	H_0 स्वीकार	H_0 अस्वीकार
H_0 सत्य	सही	गलत Type I त्रुटि
H_0 असत्य (H_1सत्य)	गलत Type II त्रुटि	सही

फिर से लिखते हुए

H_0 अस्वीकृत जब यह सत्य है(Type I त्रुटि) $= \propto$

H_0 स्वीकृत जब यह असत्य है (Type II त्रुटि) $= \beta$

H_0 स्वीकृत जब यह सत्य है (सही निर्णय)

H_0 अस्वीकृत जब यह असत्य है (गलत निर्णय)

स्तर का महत्व :– टाइप I त्रुटि करने की अधिकतम संभावना, जिसे हमने एक परीक्षण मे ंनिर्दिष्ट किया है, को महत्व का स्तर कहा जाता है।

सामान्यतया सांख्यिकीय आंकडों के परीक्षण के लिए 50% महत्व या स्तर निर्धारित किया जाता है। इसका अर्थ है कि हम एक अवधारणा को स्वीकार करने मे ं95% तक विश्वस्त हो सकतें हैं या हम 5% गलत हो सकते है।

महत्वपूर्ण क्षेत्र :– भिन्नता की सीमा में दो क्षेत्र हैं स्वीकृत क्षेत्र और मत्वपूर्ण क्षेत्र या अस्वीकृति क्षेत्र अगर नमूना आंकडा महत्वपूर्ण क्षेत्र में पडते हैं तो हमें शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करना पडता है, क्योंकि इससे गलत निर्णय होता हे। हम H_1 के लिए जाते हैं, यदि नमूना आंकडों का परिकलित माना अस्वीकृत क्षेत्र में होता है।

एक पुच्छ एवं दो पुच्छ परीक्षण :– एक सामान्य चक्र के तहत अस्वीकृत (महत्वपूर्ण) क्षेत्र, जैसा कि पहले कहा गया है दो तरह से विभाजित किया जा सकता है।

(अ) वक्र के नीचे दोनो ंतरफ

(ब) वक्र के नीचे एक तरफ, या तो दायी पूंछ पर या बांए पूंछ पर

निर्णय या निष्कर्ष निकालना :– आखिरकार हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए निष्कर्ष पर आते हैं, यदि निर्णय परिकलित मान के आधार पर है चाहे वह स्वीकृति क्षेत्र या अस्वीकृत क्षेत्र है।

मानक त्रुटि :– नमूना वितरण के मान विचलन को मनक त्रुटि कहते हैं उदाहरण के लिए $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{\overline{x_3}}$...............इत्यादि सभी नमूनों के माध्यों को समग्र से लिया गया है। इन सभी माध्यों के मानक विचलन माध्य की मानक त्रुटि है। इसके लिए सूत्र $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है।

उपयोगिता :– (i) यह परिकल्पना के परीक्षण मे ंउपयेागी साधन है। हम परिकल्पना को 5: स्तर के महत्व पर जांच सकते हैं, जिसका अर्थ है कि यदि प्रेक्षित मान एवं अपेक्षित मान के बीच में अंतर $\pm 1.96\, S.E$ से अधिक है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार नहीं की जाती है और किसी को वैकल्पिक परिकल्पना के लिए जाना पडता है। स्तर का महत्व 1% भी हो सकता है। सामान्यतया, परिकल्पना स्वीकार की जाती है यदि अंतर 3 S.E से कम है। 5% स्तर का महत्व प्रचलित है।

2. नमूने के विश्वसनीयता की जांच की जा सकती हे।

3. मापदंडों (प्राचलों) का मान सीमा के साथ निर्धारित किया जा सकता है।

उदाहरण 3 :– A शहर में, 32% मतदाताओं ने राजनैतिक पार्टी X के लिए मत दिया। शहर 13 में, 29% मतदाताओं ने X राजनैतिक पार्टी के लिए मत दिया

(i) शहर A मे ंसे 70 यादृच्छिक रूप से चुने हुए मतदाताओं मे ंसे यदि p_1 उन मतदाताओं का अनुपात है जिन्होंने X राजनैतिक दल के लिए मतदान किया, p_1 के लिए माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

(ii)शहर B में से 60 यादृच्छिक रूप से चुने हुए मतदाताओं में से, यदि p_2 एन मतदाताओं का अनुपात है जिन्होने X राजनैतिक दल के लिए मतदान किया, p_2 के लिए माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

(iii) $(p_1 - p_2)$ का माध्य एवं मानक त्रुटि ज्ञात करें।

हल :–

यहॉ , $p_1 = \frac{32}{100} = 0.32 \text{ and } p_2 = \frac{29}{100} = 0.29$

$n_1 = 70 \text{ and } n_2 = 60$

$$(i)\ Mean = E(p_1) = p_1. = 0.32$$

$$S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.32 \times 0.68}{70}} = 0.05575$$

$$(ii)\ Mean = E(p_2) = p_2. = 0.29$$

$$S..E.(p_2) = \sqrt{\frac{P_2Q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.29\times 0.71}{60}} = 0.05858$$

$$(iii)\ Mean = E(p_1 - p_2) = p_1 - p_2. = 0.32 - 0.29 = 0.03$$

$$S..E.(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.323\times 0.68}{70}} + \frac{0.29\times 0.71}{60}$$

$$= 0.08087$$

उदाहरण 4 :एक समाज मे ंमहिलाओं का अनुपात 0.48 है। जिसमें से 64 सदस्यों को यादृच्छिक तरीके चयनित किया गया, यदि p_1 महिलाओं का अनुपात है। दूसरे चयन मे ंजिसने 86 सदस्य चयनित किये गये हो उसमे ं p_2 महिलाओं का अनुपात है।
ज्ञात कीजिए :–

(i) p_1 की मानक त्रुटि

(ii) p_2 की मानक त्रुटि

(iii) $(p_1 - p_2)$ के अंतर की मानक त्रुटि

हल :–

यहॉ $p_1 = p_2 = 0.48 = p$ (माना)

$n_1 = 64$ और $n_2 = 86$

$$(i)\ S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{PQ}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.42\times 0.52}{64}} = 0.06245$$

$$(i)\ S..E.(p_1) = \sqrt{\frac{PQ}{n_1}} = \sqrt{\frac{0.48\times 0.52}{86}} = 0.05387$$

$$S..E.(p_1 - p_2) = \sqrt{PQ\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}$$

$$= \sqrt{0.48\times 0.52\left[\frac{1}{64} + \frac{1}{86}\right]}$$

$$= \sqrt{0.48 \times 0.52\left[\frac{86+64}{64 \times 86}\right]}$$

$= 0.08248$

उदाहरण 5 :– विभिन्न बीजों के लिए आवश्यक औसत अंकुरण समय का अनुमान लगाना जरूरी हैं दस यादृच्छिक रूप से चयनित बीज दिखाये जा रहे हैं और अंकुरण का समय नीचे दिया जा रहा है।

समय (दिन) 28,32,27,38,30,31,30,30,27 और 33 नमूना माध्य को समग्र माध्य के अनुमानक के रूप में लेते हुए औरसत अंकुरण समय का औसत माध्य बताऐं।

हल :– नमूना माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$$\frac{28 + 32 + 27 + 38 + 30 + 31 + 30 + 30 + 27 + 33}{10}$$

$= \frac{306}{10} = 31$दिन (लगभग)

इस प्रकार औसत अंकुरण समय का अनुमान 31 दिन है इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि औसतन 31 दिनों मे ंबीज की विविधता अंकुरित होती है।

उदाहरण 6 :– पत्नीयों की अपेक्षा औसतन, पति कितने लम्बे हैं जानने के लिए 8 जोडों को यादृच्छिक तरीके से लिया जाता है। प्रत्येक मामले में पति और पत्नीयों की ऊॅचाईयों को मापा जाता है और उनका अंतर निम्नानुसार दर्ज होता है।

जोडा	1	2	3	4	5	6	7	8
अंतर (सेन्टीमीटर में)	5	7	12	23	6	-4	10	9

नमूना माध्य $\bar{x}$ का अनुमानक के रूपम` ंप्रयोग करते हुए समग्र माध्य μ को अनुमानित करें।

हल : –

अनुमानित $\mu = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$= \frac{5+7+12+23+6+4+10+9}{8} = \frac{68}{8} = 8.5$ सेन्टीमीटर

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि पति अपनी पत्नियों से औसतन 8.5 सेन्टीमीटर लम्बे हैं।

उदाहरण 7 5– एक बेकरी का मालिक शहर मे ंकके की औसत दैनिक मांग का अनुमान लगाना चाहता है। 156 दिनों में, सवेक्षण ने लिम्नलिखित मांग का खुलासा किया।

मांग (केक)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
दिन	13	43	70	27	3

औसत मांग का अनुमान लगाऐं।

हल :–

मांग	दिन **(f)**	मध्य मान **(x)**	**f.x.**
120-130	13	125	1625
130-140	43	135	5805
140-150	70	145	10150
150-160	27	155	4185
160-170	3	165	495
Total	156	-	22260

$\bar{x}$ का अनुमान $= \frac{\sum fx}{N} = \frac{22260}{156} = 143$ (लगभग)

इस प्रकार औसत मांग को अनुमान 143 केक/प्रतिदिन है।

निर्णय लेने के लिए परिकल्पना परीक्षण मे ंउचित वितरण का प्रयोग :–

किस स्तर के महत्व का उपयोग करना है, तय करने के लिए, परिकल्पना परीक्षण में हमारा अगला कार्य उचित संभाव्यता वितरण को निर्धारित करना है। हमारे पास सामान्य वितरण और t वितरण के बीच एक विकल्प है। उचित वितरण को चुनने के लिए नियम, उन इकाईयों मे ंसमान है जो हमें आकलन के आधार पर मिला था। नीचे दी गई सारणी का सारांश है कि मध्यों को परीक्षण करने मे ंसामान्य और t वितरण का उपयोग किया जाता है। बाद में इस अध्याय, में हम अनुपातों के बारे मे ंपरीक्षण परिकल्पना के लिए उपयुक्त वितरण की जांच करेंगे। एक नियम को याद रखे जब एक माध्य के मान पर विचार किया जाए । अनुमान में, जब भी समग्र आकार परिमित है, परिमित जनसंख्या गुणक का उपयोग करें, नमूनाकरण प्रविस्थापन के बिना किया जाता है और नमूनाकरण प्रविस्थापन के बिना किया जाता है औश्र नमूना समग्र से 5% अधिक होता है।

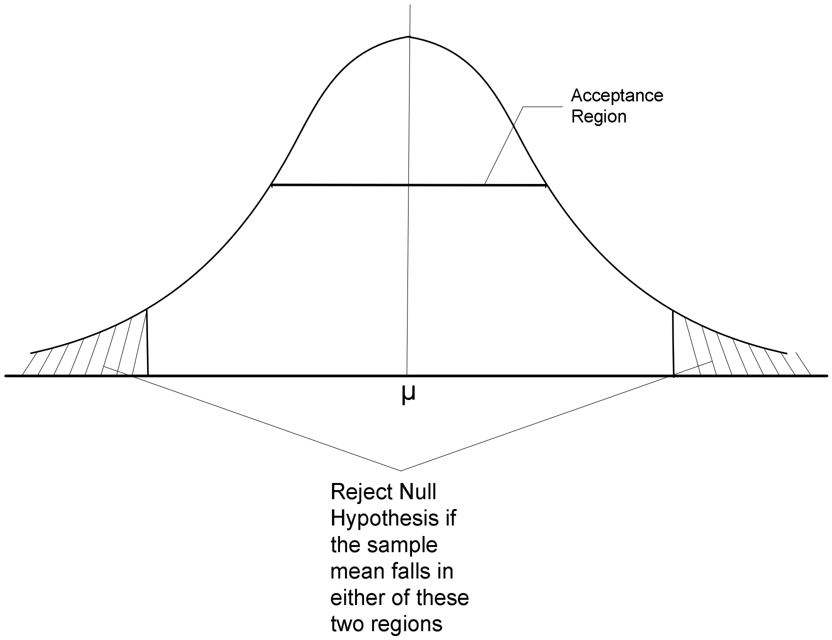
माध्यों के बारे मे ंपरीक्षण परिकल्पना में सामान्य और t वितरण का उपयोग करने के लिए शर्तें		
	जब समग्र मानक विचलन ज्ञात हो	जब समग्र मानक विचलन अज्ञात हो
नमूना आकार n 30 से ज्यादा हो	सामान्य वितरण, Z तालिका	सामान्य वितरण, Z तालिका
नमूना आकार n 30 है या उससे कम और समग्र लगभग सामान्य है	सामान्य वितरण, Z तालिक	t वितरण , t तालिका

दो पुच्छीय परीक्षण और एक पुच्छीय परीक्षण

दो पुच्छीय परीक्षण :–

दो पुच्छीय परीक्षण में, शून्य परकिल्पना को खारिज कर दिया जाता है यदि नमूना माध्य अनुमानित समग्र माध्य से अर्थपूर्ण रूप मे ंज्यादा या कम होता है इस प्रकार दो

पुच्छीय परीक्षण में, दो अस्वीकृति क्षेत्र होत हैं इसे नीचे दिए गए चित्र मे ंदिखाया गया है:–



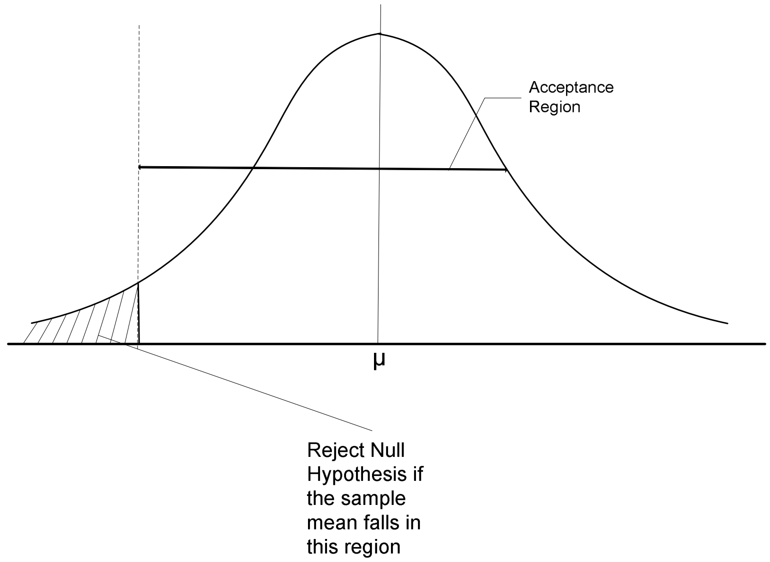
जब शून्य परिकल्पना $\mu = \mu_{Ho}$ है (जहॉ μ_{Ho} कोई विनिर्दिष्ट मान है।) और वैकल्पिक परिकल्पना $\mu \neq \mu_{Ho}$ है द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त होता है।

मान लें कि प्रकाश बल्ब का निर्माता $\mu = \mu_{Ho} = 1000$ घन्टे के औसत जीवन के साथ बल्ब बनाना चाहता है। यदि जीवनकाल छोटा होता है, वह प्रतिर्स्पधा में अपने ग्राहकों नुकसान । यदि जीवनकाल अधिक हेाता है, तो उसमें उच्च उत्पादन कीमत अधिक लगेगी क्योंकि तन्तु अतिशय प्रगाए कीमत होगी।

क्या उसकी उत्पादन प्रक्रिया सही तरीके से काम कर रही है को देखने के लिए परिकल्पना के परीक्षण $\mu_0 \mu = 1000$ के लिए, वह उत्पादन का एक नमूना लेता है। क्योंकि वह किसी भी स्थिति में 1000 घन्टे से आगे नहीं हटना चाहता है, उचित वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 \colon \mu = 1000$ है और वह द्विपुच्छीय परीक्षण प्रयोग करता है। इसका अर्थ है कि ,वह शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करता है, यदि नमूने मे ंबल्बों का औसत जीवन या तो 1000 घन्टे से बहुत अधिक हो या 1000 घन्टे से बहुत कम हो।

यद्यपि इन परिस्थितियों में द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त नहीं हेाता है, और हमें एक पुच्छीय परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए। थोक व्यापारी मामले में विचार करते हैं कि वह प्रकाश बल्ब के निर्माता के उपरोक्त वर्णन से प्रकाश बल्ब खरीदता है । थोक व्यापारी प्रकाश बल्ब का बढा ढेर खरीदता है बल्ब के ढेरों को तब तक स्वीाकर नहीं करना चाहित है जब तक उनका औसत जीवन कम से कम 1000 घन्टा या न्यूनतम 1000 घन्टा हो। प्रत्येक शिपमेंट के आने पर, थोक व्यापारी यह तय करने के लिए एक नमूने का परीक्षण करता है कि क्या शिपमेंट को स्वीाकर करना चाहिए। कम्पनी

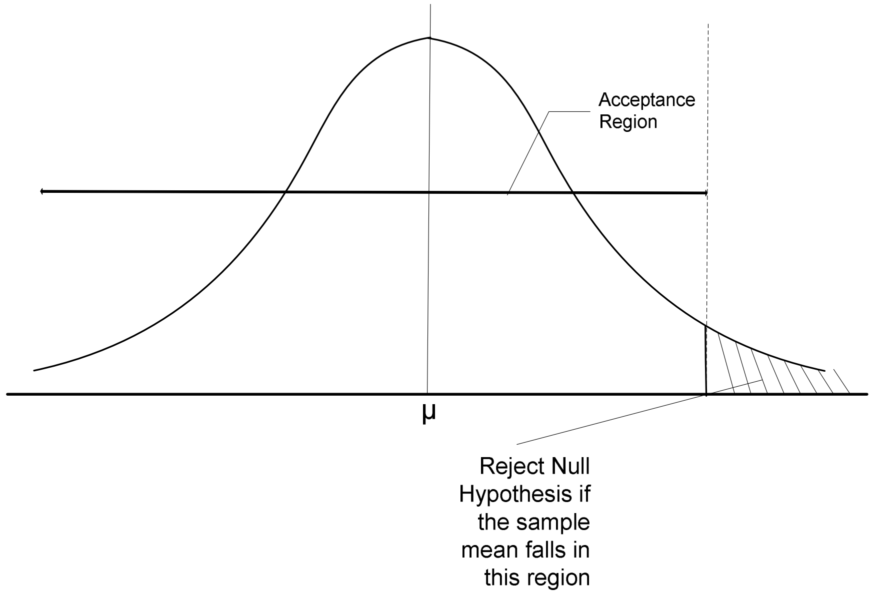
शिपमेंट को तभी अस्वीकार करेगी यदि कम्पनी महसूस करती है कि इनका औसत जीवन 1000 घन्टे से कम हो। यदि कम्पनी महसूस करती है कि बल्ब अपेक्षित की तुलना (औसत जीवन 1000 घन्टे से ज्यादा) में बेहतर है, यह निश्चित रूप से शिपमेंट को अस्वीकार नहीं करेगो अधिक लम्बे जीवन मे ंकोई अतिरिक्त कीमत नहीं होती है। इसलिए थोक व्यापारी की परिकल्पनाऐं $\mu_0 : \mu = 1000$ घन्टे और $\mu_0 : \mu < 1000$ घन्टे है। यह H_0 को तभी अस्वीकार करती है यदि नमूना बल्बों का औसत जीवन 1000 घन्टों से उल्लेखनीय ढंग से कम होता है। इस परिस्थिति को निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जाता है। इस चित्र से , हम देख सकते हैं कि इस परीक्षण को क्यों बायॉ पुच्छीय परीक्षण (या एक निचला पुच्छीय परीक्षण) कहा जाता है।



यदि नमूना माध्य इस क्षेत्र में आता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार करते हैं।

सामान्य रूप में, यदि परिकल्पनाऐं $\mu_0 : \mu = \mu H_0$ और H_1: $\mu < \mu_{Ho}$ हो तो बायें पुच्छीय (निचला पुच्छीय) परीक्षण प्रयोग होता है। इस तरह की परिस्थिति में, यह नमूना साक्ष्य नमूना माध्य के साथ उल्लेखनीय ढंग से अनुमानित समग्र माध्य से कम है जो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करते हुए वैकल्पिक परिकल्पना के पक्ष की और जाता है। दूसरे शब्दों में, अस्वीकृत क्षेत्र नमूना माध्य के वितरण में निचला पुच्छीय (बायीं पुच्छीय) होता है, और इसलिए इसे बायी पुच्दीय परीक्षण कहते हैं।

एक बायी पुच्छीय परीक्षण दो प्रकार के एक पुच्छीय परीक्षणाों मे से एक हैं सम्भवतः अब तक अनुमान लगाया जाता है, परीक्षण दायीं पुच्छीय परीक्षण (या एक ऊपरी पुच्छीय परीक्षण) है। एक ऊपरी पुच्छीय परीक्षण प्रयोग किया जाता है जब परिकल्पनाऐं Ho: $\mu = \mu_{Ho}$ और H_1: $\mu > \mu_{\mathbf{Ho}}$ हों। केवल नमूना माध्य के मानों जो कि अनुमानित समग्र माध्य से अधिक हैं वैकल्पिक परिकल्पना के पक्ष में शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करने का कारण होगा। इसे ऊपरी पुच्छीय परीक्षण कहा जाता है क्योंकि अस्वीकृत क्षेत्र नमूना माध्य के वितरण के ऊपरी पुच्छीय है।



यह आपको फिर से याद दिलाना है कि , परिकल्पना परीक्षण के प्रत्येक उदाहरण में, नमूना सूचना के आधार पर जब हम शून्य परिकल्पना को स्वीाकर करते हैं, तो हम वास्तव मे कहते हैं कि इसमें कोई सांख्यिकी साक्ष्य नहीं है जिससे इसे अस्वीकार कर दिया जाये। हम यह नहीं कह रहे होते हैं कि शून्य परिकल्पना सत्य है। शून्य परिकल्पना को सिद्ध करने के लिए एक ही तरीका समग्र प्राचल को जानना है और जो नमूनाकरण के साथ सम्भव नहीं होता है। इस प्रकार, हम शून्य परिकल्पना स्वीकार करते हैं और व्यवहार करते हैं कि यह सच है क्योंकि हमें इसे अस्वीकार करने के लिए कोई साक्ष्य नहीं मिल सकते हैं।

परिकल्पना परीक्षण में अवधारणाऐं

- दो पुच्छीय, ऊपरी पुच्छीय या निचला पुच्छीय परीक्षण के प्रयोग के निर्धारण के लिए नमूना परिणामों का प्रयोग न करें।
- किसी भी तरह के आंकडों के संग्रह से पहले, निर्णयकर्ता द्वारा यह मानना है कि उसे क्या पता लगाना है तब परीक्षण के रूप को निर्धारित किया जाता है।

7.5 सारांश

परिकल्पना परीक्षण अवधारणा के साथ आरम्भ होती है, जिसे एक परिकल्पना कहा जाता है, जो समग्र प्राचल के बारे मे होती है । तब हम नमूना आंकडा एकत्र करते हैं, जिससे नमूना सांख्यिकी की रचना होती है, और इस जानकारी को निर्धारित करने के लिए कितनी संभावना है कि हमारा अनुमानित समग्र प्राचल सही है। हम मान लेते हैं कि समग्र माध्य के लिए निश्चित मान है। हमारी अवधारणा की वैद्यता के परीक्षण के लिए हम नमूना आंकडा एकत्र करते हैं और परिकल्पित मान एवं नमूना माध्य का वास्तविक मान के मध्य अन्तर निर्धारित करते हैं। तब हम निर्णय लेते है, कि

क्या अंतर उल्लेखनीय ढंग से है। छोटा सा अंतर, माध्य के लिए हमारे परिकल्पित मान के सही होने की ज्यादा संभावना होती है। ज्यादा अंतर होने पर संभावना कम की ओर अग्रसर होती है। दुर्भाग्यवश, परिकल्पित समग्र प्राचल और वास्तविक आंकडे के बीच अंतर प्रायः न तो बहुत बडे हैं जिन्हें हम स्वतः अपनी परिकल्पना में अस्वीकार करते हैं न तो इतने छोटे हेाते हैं कि हम उसे शीध्रता से स्वीकार करते हैं। इसलिए परिकल्पना परीक्षण में, सबसे ज्यादा उल्लेखनीय वास्तविक जीवन निर्णयों के रूप में,स स्पष्ट रूप से समाधान अपवाद हैं, न कि नियम। पूर्वानुमान में, जब कभी समग्र का आकार निश्चित हैं, निश्चित समग्र गुणक का प्रयोग करते हैं, नमूनाकरण बिना प्रतिस्थापन के साथ किया जाता है, और नमूना समग्र का 5 प्रतिशत से अधिक होता है।

7.6 शब्दावली

परिकल्पना : एक शर्त जिसमें से कुछ इस प्रकार है, यह एक भ्रान्ति है।

सरल परिकल्पना : एक परिकल्पना जो सटीक वितरण निर्दिष्ट करता है।

7.7 बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित परिस्थितियों में, निर्दिष्ट करें कि कौन सा प्रायिकता वितरण परिकल्पना परीक्षण में प्रयोग हेाता है :

   (अ) $H_o: \mu = 27, H_1: \mu \neq 27, \bar{x} = 33,$ नमूना $\sigma = 4, n = 25$

   (ब) $H_o: \mu = 98.6, H_1: \mu > 98.6, \bar{x} = 99.1, \sigma = 1.5, n = 50$

   (स) $H_o: \mu = 3.5, H_1: \mu < 3.5, \bar{x} = 2.8,$ नमूना $\sigma = 0.6, n = 18$

   (द) $H_o: \mu = 382, H_1: \mu \neq 382, \bar{x} = 363, \sigma = 68, n = 12$

   (घ) $H_o: \mu = 57, H_1: \mu > 57, \bar{x} = 65,$ नमूना $\sigma = 12, n = 42$

2. भारत में सिनेमाघरों के मालिकों को पता है कि एक हिट फिल्म चलाने के लिए प्रत्येक शहर में औसतन 84 दिन, 10 दिनों के मानक विचलन के साथ फिल्म प्रदर्शित होती थी। एक विशेष फिल्म वितरक समग्र के साथ अपने क्षेत्र में फिल्म की लोकप्रियता की तुलना में रूचि रखता है। उसने यादृच्छिक रूप से 75 सिनेमाघरों को यादृच्छिक रूप से क्षेत्र में चुना है और पाया कि फिल्म 81.5 दिन तक चली।

   I. परीक्षण के लिए उपयुक्त परिकल्पनाएँ लिखें की क्या, समग्र और वितरक के क्षेत्र में सिनेमाघरों के मध्य उल्लेखनीय अन्तर हैं ?

   II. 1ः महत्व के स्तर पर, इन परिकल्पनाओं का परीक्षण करें ।

7.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

इसका अर्थ है अस्वीकृत क्षेत्र दोनों पुच्छों के अर्न्तगत 0.01 है और स्वीकृत क्षेत्र 0.99 है। इसलिए स्वीकृत क्षेत्र का आधा भाग $\frac{0.99}{2} = .4950$ है और Z

का मान 2.58 इसलिए, स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं z = ± 2.58 or $\bar{x} = \mu_{Ho} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} = 84 \pm 2.58 x \frac{10}{\sqrt{75}}$

निचली सीमा 81.02 और ऊपरी सीमा 86.98 के रूप में हैं।

क्योंकि अवलोकित मान स्वीकृत क्षेत्र में, है, हम शून्य परिकल्पना H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। फिल्म के चलने की अवधि दूसरे सिनेमाघरों के समान है। या दूसरे रूप में :

अवलोकित Z मान $\bar{x} - \frac{\mu_{H_\circ}}{SE}$ है जहॉ SE = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{81.4-84}{(1.155)}$

= – 2.17 स्वीकृत Z क्षेत्र ± z = ± 2.58 है।

7.9 स्वपरख प्रश्न

1. (अ) 24 df के साथ t (स्वतन्त्रता की श्रेणियॉ)

   (ब) Z या सामान्य वितरण : दायीं पुच्छीय परीक्षण

   (स)17 df के साथ t

   (द) Z या सामान्य वितरण द्वि पुच्छीय परीक्षण

   (घ) इस परिस्थिति में वास्तविक 41 d.f के साथ t चूँकि 41 df यहॉ नहीं है हम सामान्य वितरण परीक्षण तालिका प्रयोग करते हैं।

2. निम्नलिखित आंकडे दिये गए है :

   σ = 10 दिन , n = 75सिनेमाघर $\bar{x}$ = 81.5

   Ho: μ = 84 दिन H_1: $\mu \neq$ 84 दिन α = 0.01

3. माइक्रोसाफट ने पिछले साथ अनुमान लगाया था कि 35 प्रतिशत सम्भावित साफटवेयर ग्राहक, नऐ OS विंडोज विस्टा की खरीद की प्रतीक्षा की योजना बना रहे थे, जब तक एक नवीनीकरण जारी न किया गया हो। जनता को आश्वस्त करने के लिए विज्ञापन अभियान के पश्चात माइक्रोसाफट ने 3000 ग्राहकों का सर्वेक्षण किया और पाया कि 950 ग्राहक अभी भी संदेहपूर्ण है। 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर क्या कम्पनी यह निष्कर्ष निकाल सकती है कि संदेहपूर्ण लोगों का अनुपात कम हुआ था। (शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। Z वितरण का प्रयोग करें।)

7.10 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकी – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड–कलकत्ता ।
2. व्यावसायिक आंकडों के बुनियादी सिद्धान्त, संचेती और कपूर ।
3. प्रबंधन मे ंमात्रात्मक विधियॉ – श्रीवासतव, शेनायॅ और गुप्ता ।
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता ।

इकाई 8 गुणों का साथर्कता परीक्षण (Significance Test in Attributes)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- परिकल्पना के परीक्षण के विभिन्न तरीकों को समझ सकें।
- विशेषताओं के महत्व के परीक्षण का वर्णन कर सकें।
- महत्व सृजन फलन को समझ सकें।

8.1 प्रस्तावना

आंकडों के औद्योगिक अनुप्रयोग प्रायः समग्र और समग्र प्राचलों के बारें में निर्णय लेने से संबंधित हैं। उदाहरण के लिए दो प्रक्रियाओं के लिए क्या बेहतर है के बारे मे निर्णय था किसी विशेष मशीन के उत्पादन को बंद करना है क्योंकि यह एक दोषपूर्ण घटकों की आर्थिक रूप से अस्वीकार्य संख्या पैदा कर रहा है । प्रायः समग्र के निर्धारित माध्य या मानक विचलन पर आधारित होता है, की गणना समग्र में से नमूना आंकडों का प्रयोग किया जाता है। इन निर्णयों तक पहुचनें में, कुछ मान्यताओं का निर्माण किया जाता है, जो सत्य या असत्य भी हो सकता है। बनाई गई धारणाऐं सांख्यिकीय अनुमान या सिर्फ परिकल्पना कहलाती है और आमतौर पर समग्र की संभावना वितरण के बारे में बयान से संबंधित है।

8.2 परिकल्पना का परीक्षण

एक नमूना जांच परिणाम उत्पन्न करता है, और इन परिणामों के साथ निर्णय समग्र पर बनाये जाते हैं । लेकिन ऐसे फैसलों में गलत निर्णय लेने के कारण अनिश्चितता का एक तत्व शामिल है, परिकल्पना एक ऐसी धारणा है जो समग्र प्राचल के बारे में सत्य या असत्य भी हो सकती है।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को 300 बार उछालने पर कोई 190 चिट और 110 पट प्राप्त कर सकता है। इस उदाहरण पर हम यह जांचने में रूचि रखते हैं कि क्या सिक्का निष्पक्ष है या नहीं इसलिए हम इसका मूल्यांकन करने के लिए एक परीक्षण आयोजित कर सकते हैं कि अन्तर नमूनाकरण के कारण है। एक महत्व के परीक्षण करने की प्रक्रिया निम्नानुसार हैः

अवधारणा का निर्माण :– हमारी अवधारणा को सत्यापित करने के लिए जो नमूना अध्ययन पर आधारित है, हम नमूना मान और समग्र मान के बीच का अंतर जानने के लिए हम आंकडे एकत्र करत हैं। यदि कोई अंतर नहीं है या यदि अंतर बहुत छोटा है, तो हमारा अनुमानित मान सही है, आमतौर पर दो अनुमानों का निर्माण किया जाना चाहिए और यदि एक परिकल्पना सही है, तो दूसरे को अस्वीकार करेंगें।

(अ) शून्य परिकल्पना : यह अंतर के महत्व के परीक्षण करने के लिए बहुत उपयोगी उपकरण है। समग्र से संबंधित कोई भी परिकल्पना को एक सांख्यिकीय परिकल्पना कहा जाता है। सांख्यिकीय परीक्षण की प्रक्रिया में, समग्र से प्राप्त नमूने के आधार पर अवधारणा को अस्वीकार या स्वीकार किया जाता है। सांख्यिकविद् अवलोकन के माााध्यम से परिकल्पना की जांच करते हैं और एक संभावित बयान देते हैं सरल परिकल्पना से पता चलता है कि नमूने का मान और अध्ययन के तहत समग्र के मान में कोई अंतर नहीं दिखता है। हम जिस परिकल्पना को ग्रहण करते हैं उसे शून्य परिकल्पना कहा जाता है । इसका अर्थ है कि नमूने के माध्य और समग्र के माध्य के बीच वास्तविक अंतर शून्य है, न्यूनतम पाया गया अन्तर महत्वहीन है। शून्य परिकल्पनपा की अस्वीकृति का अर्थ है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच वास्तविक अंतर शून्य है। शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति प्रदर्शित करती है कि निर्णय सही है।

उदाहरण के लिए :

(1) एक विश्वविद्यालय के छात्रों की औसत ऊॅचाई 155 सेमी है।

(2) एक फर्म की औसत दैनिक बिक्री 1500 रूपये हैं।

(3) किसी विशेष गांव की औसत आय 100 रूपये है।

इन सभी बयानों को नमूना परीक्षणों के आधार पर सत्यापित करना होगा। आमतौर पर एक परिकल्पना में कहा जाता है कि नमूना माध्य और समग्र माध्य के बीच कोई अंतर नहीं है। एक सांख्यिकीय अनुमान एक शून्य परिकल्पना है यदि इसे स्वीकार किया जाता है। शून्य परिकल्पना को μ_0 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(ब) वैकल्पिक परिकल्पना :

μ_0 की अस्वीकृति वैकल्पिक परिकल्पना की स्वीकृति की ओर जाता है, जिसे H_1 द्वारा दर्शाया गया है। उदाहरण के लिए , $H_0 = \mu = 155$ (शून्य परिकल्पना)

$\mu_1 = \mu \neq 155$ अर्थात $\mu > 155$ या $\mu < 155$ (वैकल्पिक परिकल्पना)

जब दो अवधारणाओं को स्थापित किया जाता है, तो शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति एक नमूना अध्ययन पर आधारित होती है। इस प्रकार यह दो गलत निष्कर्षों के ओर जाता है अर्थात

(1) μ_0 अस्वीकृत, जब H_0 सत्य है।

(2) H_0 स्वीकृत, जब H_0 असत्य है। इसे निमनलिखित तालिका में व्यक्त किया जा सकता है।

	नमूने में से निर्णय	
	H_0 स्वीकृत	μ_0 अस्वीकृत
μ_0 सत्य	सही	गलत (I प्रकार की त्रुटि
μ_0 गलत (H_1 सही)	गलत (II प्रकार की त्रुटि	सही

फिर से लिखते हुए

H_0 अस्वीकार जब यह सत्य है (I प्रकार की त्रुटि)=$\propto$

μ_o स्वीकार जब यह गलत है (II प्रकार की त्रुटि)= B

μ_o स्वीकार जब यह सत्य है (सही निर्णय)

μ_o अस्वीकार जब यह गलत है (सही निर्णय)

महत्व का स्तर

I प्रकार की त्रुटि करने की अधिकतम संभावना, जिसे हमने एक परीक्षण में निर्दिष्ट किया है, को महत्व का स्तर कहा जाता हे। सामान्य तथा सांख्यिकीय परीक्षणों में 5 प्रतिशत महत्व का स्तर तय किया जाता है। इसका अर्थ है कि हम एक अवधारणा को स्वीकार करने पर 95 प्रतिशत विश्वस्त हो सकते हैं या हम 5 प्रतिशत गलत हो सकते हैं।

महत्वपूर्ण क्षेत्र : विविधता की सीमा में दो क्षेत्र हैं :– स्वीकृति क्षेत्र और महत्वपूर्ण क्षेत्र या अस्वीकृति क्षेत्र । यदि नमूना आंकडे महत्वपूर्ण क्षेत्र में आते हैं तो हमें परिकल्पना को अस्वीकार करना पडता है, क्योंकि इससे गलत निर्णय होता है। हम H_1 के लिए जाते हैं, यदि सरल आंकडों का गणित मान अस्वीकृत खेत्र में होता है।

एक पुच्छीय और द्विपुच्छीय परीक्षण :

एक सामान्य वक्र के अन्तर्गत महत्वपूर्ण क्षेत्र , जैसा कि पहले बताया गया है, दो तरह से विभाजित किया जा सकता है।

(अ) वक्र के नीचे दोनों तरफ

(ब) वक्र के नीचे एक तरफ, और दोनों या तो दाई पूंछ पर या बाएं पूंछ पर है।

निर्णय या निष्कर्ष पर पहुॅचना :

अनत में हम इस निष्कर्ष मे ंआते हैं कि या तो शून्य परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है या अस्वीकार किया जाता है। यह निर्णय गणना मान के आधार पर है चाहे वह स्वीकृति क्षेत्र में है या अस्वीकृत क्षेत्र में है।

8.3 मानक त्रुटि

नमूनाकरण वितरण के मानक विचलन को मानक त्रुटि कहा जाता है। उदाहरण के लिए $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ...$ इत्यादि समग्र से लिए हुए सभी नमूनों के माध्य है। इन सभी माध्यों का मानक विचलन माध्य की मानक त्रुटि होती है। इसके लिए सूत्र $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. है।

उपयोगिता :–

1. यह परिकल्पना के परीक्षण में एक उपयोगी उपकरण है। हम 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण की जांच कर सकते हैं, जिसका अर्थ है, यदि अवकलित और अपेक्षित माध्यों के मध्य अंतर 1.96 S.E ज्यादा है तो परिकलपना स्वीकृत नहीं होती है और उसे वैकल्पिक परिकल्पना की और जाना पडता है। महत्व का स्तर 1 प्रतिशत हो सकता है। सामान्यतः परिकल्पना स्वीकृत होती है यदि अन्तर 3 S.E से कम है, 5 प्रतिशत स्तर लोकप्रिय है।
2. एक नमूने की विश्वसनीयता ज्ञात हो सकती है।
3. प्राचलों के मान सीमाओं के साथ निर्धारित किये जा सकते हैं।

अब हम विभिन्न स्थितियों पर लागू होने वाले महत्व के विभिन्न परीक्षणों पर चर्चा करते हैं । वो हैः–

1. विशेषताओं के लिए महत्व का परीक्षण
2. चरों के लिए महत्व का परीक्षण

8.4 विशेषताओं के लिए महत्व का परीक्षण

विशेषताओं का नमूनाकरण एक समग्र से नमूनों के चित्रण के रूप में माना जा सकता है जिनके सदस्यों मे एक विशिष्ट विशेषता की उपस्थिति या अनुपस्थिति होती है। उदाहरण के लिए, अंधे (विशेषता) के अध्ययन में, एक नमूना तैयार किया जा सकता है और इसके सदस्यों को अंधे हैं या नही के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। विशेषता की उपस्थिति का p द्वारा प्रतिनिधित्व किया जा सकता है और विशेषता की अनुपस्थिति को q द्वारा प्रतिनिधित्व किया जा सकता है। इस प्रकार, 1000 लोगों में, 25 अंधे हैं और शेष अंधे नहीं हैं। दूसरे शब्दों मे $p = \frac{25}{1000}$ या 0.025 और $q = 0.975$ विभिन्न प्रकार के महतव के परीक्षण का अध्ययन निम्नलिखित प्रमुखों के अन्तर्गत किया जा सकता है।

(अ) सफलता की संख्या का परीक्षण

यह द्विपद वितरण का अनुसरण करता है। सूत्रः सफलता की संख्या का

S.E. = $\sqrt{npq}$

$n =$ नमूना आकार

$p =$ प्रत्येक परीक्ष्ज्ञण में सफलता कीसंभावना

$q = (1 - p)$ अर्थात विफलता की संभावना

उदाहरण –1 1,00,000 टेनिस के खेप से 400 गेंदों को यादृच्छिक चयनित गेंदों किया गये और जॉच की गई। यह पाया गया कि इनमें से 20 दोषपूर्ण थे। कितने

दोषपूर्ण गेंदों को आप 95 प्रतिशत विश्वसनीयता के स्तर पर सम्पूर्ण खेप में उचित रूप से उम्मीद कर सकते हैं।

हल : यहाँ

$$p = \frac{20}{400} = 0.05$$

q = 0.95

$$\overline{X} = np = 1,00,000 \times (0.05) = 5,000$$

$$S.E. = \sqrt{npq} = \sqrt{1,00,000 \times .05 \times .95}$$

$$= \sqrt{4750} = 68.9$$

95% विश्वसनीयता सीमाऐं हैं

$5,000 \pm 1.96 \times 68.9 = 5,000 \pm 135.044$ (या)

5135 और 4.865

उदाहरण –2 राजस्थान के एक गांव के 500 लोगों के नमूने में, 280 लोग चावल खाने वाले और बाकी गेहूँ खाने वाले पाए गये, क्या हम यह मान सकते हैं कि दोनों खाद्य पदार्थ समान लोकप्रिय है।

हल :– हम यह परिकलपना करते हैं कि खाद्य पदार्थ समान रूप से लोकप्रिय है।

तब, गेहूँ खाने वालों और चावल खाने वालों की अपेक्षित आवृत्तियॉ 250:250 है।

$$S.E. = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 11.18$$

वास्तविक और प्रेक्षित के मध्य अंतर $= 280 - 250 = 30$

$$\frac{\text{Difference}}{\text{S.E.}} = \frac{30}{11.18} = 2.68$$

1% स्तर पर अंतर $2.58\, S.E$ से ज्यादा है।

यह नमूनाकरण उतार चढाव के कारण नहीं है।

इसलिए हम मान सकते हैं कि दोनों खाद्य पदार्थ समान रूप से लोकप्रिय नहीं है।

उदाहरण –3 एक सिक्के को 400 बार उछाला जाता है और जिसमें 216 बार चिट आता है। इस बात पर चर्चा करें कि क्या सिक्का निष्पक्ष है, और इस उद्देश्य के लिए सैद्धांतिक सिद्धान्तों का संक्षेप मे वर्णन करें।

हल :– निष्पक्ष सिक्के में चिट आने की संभावना उछालों $= \frac{1}{2}$

400 में अपेक्षित चिटों की संख्या $= 200$

लेकिन प्रेक्षित चिटों की संख्या $= 216$

$$S.E. = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

वास्तविकता से विचलन = 216 – 200 = 16

$$Z=\frac{Difference}{S.E.}=\frac{16}{10}=1.6$$

चूँकि प्रेक्षित विचलन $S.E$ का 1.6 गुना है, जोकि 1.96 S.E., (5% स्तर), से कम है, यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि शून्य परिकलपना स्वीकार्य है। इसलिए, सिक्का निष्पक्ष है।

(ब) सफलता के अनुपातों का परीक्षण

प्रत्येक नमूने में सफलता की संख्या लेने के बजाय, सफलता का एक हिस्सा अर्थात $p=\frac{1}{n}$ अभिलिखित है। हिस्से की स्थिति में मानक त्रुटि की गणना निम्नवत की जाती है।

$$S.E.=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

जहॉ $q=1-p$

उदाहरण –4 500 अनानासों का यादृच्छिक नमूना एक बडे खेप में से लिया गया था और जिसमें 65 खराब पाये गए। दिखाऐं कि खराब अनानासों की इन नमूनों में मानक त्रुटि 0.015 आकार की है, औश्र निष्कर्ष निकाले कि खेप में खराब अनानास का प्रतिशत लगभग 8.5 और 17.5 के बीच में होता है।

हल : यहॉ

$$p=\frac{65}{500}=0.13,$$

$$q = 1 - 0.13 = 0.87$$

$$S.E.=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0.13\times0.87}{500}}$$

$$=\sqrt{\frac{0.1131}{500}}$$

$$=\sqrt{.000226}=0.015$$

खेप में खराब अनानासों की प्रतिशत सीमाऐं हैं :

$$(0.13\pm3S.E.)\times100=(0.13\pm3\times0.015)100$$

$$=(.13\pm.045)\,100$$

$$=(13\pm4.5)=17.5 \text{ और } 8.5$$

टिप्पणी $3\,S.E$ सीमाऐं लगभग निश्चित हैं।

उदाहरण 5 :– सेब के एक थोक व्यापारी का दावा है कि उसके द्वारा उपलब्ध कराये गऐ सेब में केवल 4 प्रतिशत सेब दोषपूर्ण होते हैं। 600 सेबों का यादृच्छिक नमूने मे 36 सेब दोषपूर्ण थे। थोक व्यापारी के दावे का परीक्षण करें।

हल :–

S.E. = $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

$$=\sqrt{\frac{.96\times .04}{600}}=0.008$$

95% विश्वसनीयता सीमाऐं = $p \pm 1.96$ S.E.

$$= p \pm 1.96 \times 0.008$$
$$= .96 \pm 0.01568$$
$$= 0.94432 \text{ to } = .97568$$

600 सेबों में से, अच्छे सेब $0.94432 \times 600 = 566.59$ से $0.97568 \times 600 = 585.4$ या 567 से 585 के बीच मे हो सकते हैं। इसलिए अपेक्षित दोषपूर्ण सेबों की संख्या 15 से 30 सेबों के बीच संभावित है। उसका दावा है कि दोषपूर्ण सेब 4 प्रतिशत है। लेकिन वास्तविक दोषपूर्ण संख्या 36 है। इसलिए उसका दावा स्वीकार नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 6 :– एक बडे शहर से यादृच्छिक चयनित 600 लोगों का एक नमूने आकार दर्शाता है कि नमूने में पुरूषों का प्रतिशत 53 है। यह माना जाता है कि शहर में कुल आबादी के लिए पुरूषों का अनुपात $\frac{1}{2}$ है। जांच करें कि इस विश्वास की पुष्टि अवलोकन द्वारा की गई है या नहीं।

हल :– शून्य परिकल्पना यह है कि कुल जनसंख्या पुरूषों की संख्या $\frac{1}{2}$ या 0.5 है।

प्रेक्षित मान = 0.53

$$S.E.=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{600}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{600}}=\sqrt{\frac{1}{2400}}=0.02$$

$$S.E.=\frac{0.53-0.05}{S.E.}=\frac{(0.53-0.5)}{0.02}=1.5$$

चूॅकि z, 1.96 से कम है, 5% विश्वसनीयता के स्तर पर अंतर महत्वपूर्ण नहीं है औश्र नमूनाकरण उतार–चढाव के कारण उत्पन्न हो सकता है। इसलिए शून्य परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जा सकता है। विश्वसनीयताा की पुष्टि है।

(स) अनुपातों मे अंतर का परीक्षण :–

हम विभिन्न समग्रों से दो नमूने लेते हैं और यह सत्यापित करते हैं कि सफलता का अनुपात महत्वपूर्ण है या नहीं ।

सूत्र

$$S.E.(p_1-p_2)=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

यदि S.E. $(p_1 - p_2) < 1.96$

अंतर यादृच्छिक नमूनाकरण उतार चढाव के कारण माना जाता है।

उदाहरण –7 एक कारखाने मे ंएक हजार लेखों की जांच की जाती है और 3 प्रतिशत दोषपूर्ण पाये जाते हैं। दूसेर कारखाने से पन्द्रह सौ समान लेखों की जांच की जाती है केवल 2 प्रतिशत लेख दोषपूर्ण पाये जाते हैं । क्या यह उचित रूप से निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि पहले कारखाने का उत्पाद दूसरे से हल्का है।

हल : आइए हम शून्य परिकल्पना तैयार करें :–

$H_0 : p_1 = p_2$

$$p_1 = \frac{30}{1000} = 0.03$$

$$p_2 = \frac{30}{1500} = 0.02$$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{(1000 \times 0.03) + (1500 \times 0.02)}{1000 + 1500} = \frac{(30 + 30)}{2500} = 0.024$$

$$S.E. = \sqrt{0.024 \times 0.976\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1500}\right)}$$

$$= 0.006$$

$$Z = \frac{0.03 - 0.02}{0.006} = 1.67$$

95% विश्वसनीयता के स्तर पर $z = 1.96,$ अंतर महत्वपूर्ण नहीं है। शून्य परिकल्पना जो कि $p_1 = p_2$ स्वीकार्य है।

उदाहरण –8 एक मशीन 500 के एक नमूने मे ं16 अपूर्ण वस्तु बनाती है। मशीन की मरम्मत के बाद , यह 100 के एक खेप मे ं3 अपूर्ण वस्तु बनाता है। क्या मशीन में सुधार हुआ है।

हल :–

$p_1 = \frac{16}{500} = 0.032$ (पहले नमूने में)

$p_2 = \frac{3}{100} = 0.03$ (दूसरे नमूने में)

कल्पना करते हैं कि मरम्मत के बाद भी मशीन में सुधार नहीं हुआ है या $p_1 = p_2$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$p = \frac{500 \times 0.032 + 100 \times 0.3}{500 + 100}$$

$$=\frac{16+3}{600}=0.03$$

q = 1 – 0.03 = 0.97

$$S.E.(p_1-p_2)=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$=\sqrt{(0.03)(0.97)\left(\frac{1}{500}\right)+\left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$=\sqrt{(0.03)(0.97)[0.002+0.01]}$$

= 0.0187

$$Z=\frac{0.032-0.03}{0.0187}=\frac{0.002}{0.0187}=0.106$$

चूॅकि (1% स्तर) पर अंतर $2.58\, S.E$ से कम है, प्रयोग का परिणाम परिकल्पना का सर्मथन करता है। इसलिए हम निष्कर्ष निकालते है कि मरम्मत के बाद भी मशीन में सुधार नहीं हुआ है।

उदाहरण –9 A शहर 1000 लोगों के यादृच्छिक नमूनों में, 400 लोग गेहॅू के उपभोक्ता पाए गए। B शहर के 800 लोगों के नमूने में, 400 लोग गेहॅू के उपभोक्ता पाए गए। क्या इन आंकडों से शहर A और शहर B के बीच एक महत्वपूर्ण अंतर का पता चलता है, जहॉ तक गेहॅू उपभोक्ताओं का अनुपात है।

हल :– आइए हम इस परिकल्पना को मान लें कि दोनों शहरों में, गेहॅू की खपत के अनुपात के बीच कोई अनतर नहीं हैं।

$H_0: p_1 = p_2$

$$p_1=\frac{400}{1000}=0.4,\ p_2=\frac{400}{800}=0.5$$

$$p=\frac{(1000\times0.4)+(800\times0.5)}{1000+800}$$

$$=\frac{4}{9}\qquad \therefore q=\frac{5}{9}$$

$$S.E.(p_1-p_2)=\sqrt{\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{800}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{20}{81}\times\frac{9}{4000}}\ =0.024$$

$$p_1-p_2=0.4-0.5=0.1$$

$$\frac{\text{Difference}}{\text{S.E.}}=\frac{0.1}{0.024}=4.17$$

चूॅकि अंतर $2.58\, S.E.$ से (1% स्तर) पर ज्यादा है, नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण ऐसा नहीं हो सका। इसलिए आंकडे शहर A और शहर B के बीच महत्वपूर्ण अंतर को दर्शाते हैं, जहॉ तक गेहॅू उपभोक्ताओं के अनुपात का सम्बन्ध है।

10.5 महत्व सृजन फलन

मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है अर्थात x नमूना अंतराल में से वास्तविक संख्याओं का एक फलन है, यादृच्छिक चर x की विभिन्न विशेषताओं की गणना में, अर्थात $E(x)$ या $V(x)$, हम x की प्रायिकता वितरण के साथ सीधे काम करते हैं। [संभाव्यता वितरण फलन द्वारा दिया जाता है या तो संभाव्यता वितरण फलन निरंतर स्थिति में, या बिन्दु संभाव्यता $p(x_i) = P(X = x_i)$ असतत् स्थिति में।] R के उपसमुच्च S के लिए प्रयोगात्मक मानों को लेते हुए X यादृच्छिक चर है। X का महत्व सृजन फलन Mx द्वारा परिभाषित होता है।

$M_x(t) = E[\exp(tx)]$ t के लिए R में

टिप्पणी : चूँकि exp(tx) गैर ऋणात्मक यादृच्छिक चर है, $M_x(t)$ किसी t के लिए एक वास्तविक संख्या या धनात्मक अनन्त आस्तित्व में है।

1. दर्शाये कि यदि x एक असतत् वितरण सघनता फलन f के साथ है। तो

$$M_x(t) = \sum_{x \in s} e^{tx} f(x)$$

2. दर्शाये कि यदि x सतत् वितरण सघनता फलन f के साथ है, तो

$$M_x(t) = \int_s e^{tx} f(x) dx$$

चूँकि चर घांतांकी फलन धनात्मक है, x का महत्व सजृन फलन हमेशा अस्तित्व में होता है, या तो वासतविक संख्या के रूप मे या धनात्मक अनन्त के रूप में।

उदाहरण –10 मान लीजिए x एक समान रूप से अंतराल [a,b] में वितरित है इसलिए

$$\text{m.g.f } M_x(t) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)t}\left[e^{bt} - e^{at}\right], t \neq 0$$

द्वारा किया जाता है।

टिप्पणी : m.g.f स्वतन्त्र चरों की संख्या के योग का गुणनफल उनका m.g.f

$$E\left\{e^{t(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)}\right\} = E\left(e^{tx_1}\right).E\left(e^{tx_2}\right).E\left(e^{tx_3}\right)\ldots$$

द्विपद वितरण का m.g.f

हम जानते हैं कि द्विपद वितरण की स्थिति ${}^nC_x p^x q^{n-x}$ में x सफलता की तुलनात्मक आवृत्ति है। इसलिए m.g.f मूल के बारे दिया जायेगा।

$$M_0(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\,{}^nC_x\,p^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}^nC_x \left(pe^t\right)^x q^{nx}$$

$= (q+pe^t)^n$

$$= \left[q+p\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+...\right)\right]^n = \left[1+pt+\frac{pt^2}{2!}+...\right]^n$$

$$M_0(t) = \left[1+pt+\frac{pt^2}{2!}+...\right]^n$$

हम यह भी जाते हैं कि इस वितरण में माध्य $m=np$ द्वारा निकाला जाता है और

$M_a(t) = e^{-at} M_0(t)$

m.g.f. माध्य के बारे निकाला जाता है।

$M_m(t) = e^{-mt} M_0(t)$ जहॉ $m = np$

$= e^{-npt}(q+pe^t)^n$

$= [qe^{-pt}+pe^{qt}]^n$

पायसन वितरण का m.g.f.

हम जानते हैं कि पायसन वितरण की स्थिति में x की सफलता की प्रायिकता वितरण $e^{-m}\frac{m^x}{x!}$ के द्वारा दी जाती है।

m.g.f. मूल के बारे में द्वारा निकाला जाता है।

$$M_0(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{e^{-m}m^x}{x!}\right)$$

$$M_0(t) = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(me^t\right)^x}{x!} = e^{-m}e^{me^t}$$

$$e^t = \mu'_2 = \sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}^n C_x p^x q^{n-x}$$

या $M_0(t) = e^{m(e^t-1)}$

हम यह भी जानते हैं कि इस वितरण में माध्य m होता है , और जहॉ

$M_a(t) = e^{-at} M_0(t)$

माध्य के बारे में m.g.f निकाला जायेगा

$M_m(t) = e^{-mt}M_0(t)$

$_{m}(t) = e^{m\left(e^{t}-1-t\right)}$

उदाहरण – 11 दर्शायें कि यदि x_1 और x_2 पायसन वितरण के साथ m_1 और m_2 कमशः प्राचल के साि दो स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हैं, तब $x_1 + x_2$ का योग पायसन वितरण के साथ प्राचल $m_1 + m_2$ के साथ एक यादृच्छिक चर है।

हल : यदि $M_1(t)$ और $M_2(t)$ X_1 और X_2 के m.g.f. हैं, तब

$M_1(t) = e^{m_1(e^t-1)}$ और $M_2(t) = e^{m_2(e^t-1)}$

हम यह भी जानते हैं कि स्वतन्त्र संख्या के चरों का योग m.g.f.का गुणनफल है।

$(X_1 + X_2)$ का m.g.f.जहॉ X_1 , X_2 स्वतंन्त्र चर है।

= X_1 और X_2 के गुणनफल का m.g.f

$= M_1(t)\times M_2(t)$

$= e^{m_1(e^t-1)} \times e^{m_2(e^t-1)}$

$= e^{(m_1+m_2)(e^t-1)}$

= पायसन वितरण का (m_1+m_2) प्राचल के साथ m.g.f

अतः सिद्ध

सामान्य वितरण का m.g.f

सामान्य वितरण की स्थिति में हम जानते हैं कि मूल के माध्य के साथ प्रायिकता फलन निकाला जाता है।

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$M_0(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

$$M_0(t) = e^{mt+(1/6)t^2\sigma^2}$$

माध्य m के सन्दर्भ में m.g.f.

$$M_m(t) = e^{-mt} M_0(t)$$

$$= e^{-mt}\{ e^{mt+(1/2)t^2\sigma^2} \}$$

$$M_m(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

उदाहरण – 12 सिद्ध करें कि यदि x_1 और x_2 माध्य m_1 और m_2 के साथ और विचलन कमशः $\sigma_1^2 \text{and} \sigma_2^2$ के साथ स्वतन्त्र सामान्य चर हैं, तब चर (X_1+X_2) भी

सामान्य चर माध्य (m_1+m_2) और $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ के साथ है।

हल :– यदि $M_1(t)$ और $M_2(t)$ मूल से X_1 और X_2 के m.g.f. है।

$$M_1(t)=e^{m_1t+\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2} \quad \text{और} \quad M_2(t)=e^{m_2t+\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2}$$

और हम यह भी जानते ळैं कि स्वतत्र संख्या के चरों का योग m.g.f का गुणनफल होता है।

(X_1+X_2) का m.g.f. जहॉ X_1 एवं X_2 स्वतन्त्र चर है।

= m.g.f. के X_1 और X_2 गुणनफल

$= M_1(t)\times M_2(t)$

$$= e^{m_1t+\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2} \times e^{m_2t+\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2}$$

$$= e^{(m_1+m_2)(t)+\frac{1}{2}t^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}$$

= सामान्य चर का m.g.f. माध्य (m_1+m_2) और विचलन $\sigma_1^2+\sigma_2^2$. के साथ

यादृच्छिक चरों का फलन

यादृच्छिक चर स्थिति का कार्य प्रायः व्यवस्था विश्लेषण मे उत्पन्न होता है जहॉ व्यवस्था की कुछ विशेषताओं का ज्ञान, इनपुट के ज्ञान के साथ, आउटपुट में व्यवहार के कुछ अनुमान की अनुमति देगा। उदाहरण के लिएए इनपुट यादृच्छिक चर x और इसकी सघनता f(x) ज्ञात है और इनपुट आउटपुट व्यवहार की विशेषता $Y = \phi(x)$ द्वारा दी जाती है।

ळम यादृच्छिक चर y की सघनता की गणना करने में रूचि रखते हैं। ध्यान दें किसी दिए गए यादृच्छिक चर x और फलन ϕ के लिए, y एक यादृच्दिक चर की परिभाषा को संतुष्ट नहीं कर सकता। लेकिन यदि हम मानते हैं कि ϕ सतत है, तब $Y = \phi(x)$ यादृच्छिक चर होगा।

उदाहरण – 13 यदि $Y = \phi(x) = X^2$ उदाहरण के रूप में निश्चित शारीरिक प्रयोग मे मापन त्रुटि को पदर्शित करेंगा और तब Y त्रुटि का वर्ग होगा ध्यान दें कि $F_Y(y) = 0 \;\; y \leq 0$ के लिए $y > 0$ के लिए

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Y की सधनता के अवकलन द्वारा है :

$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]$, y>0

= 0

उदाहरण 14 :– यदि $x(o,1)$ में एक समान रूप से वितरित है। हम दर्शाते हैं कि $Y = -\lambda^{-1}\text{In}(1 - X)$ के पास $\lambda > 0$ प्राचल के साथ चरघातांकी वितरण है। अवलोकन है कि Y एक गैर ऋणात्मक यादृच्छिक चर है जो दर्शाता है $F_y(y) = 0$ $y \le 0$ के लिए $y > 0$ के लिए , हमारे पास :

$F_y(y) = P(Y\le y) = P[-\lambda^{-1}\text{In}(1 - X) \le y]$

$= P[\text{In}(1 - X)\ge -\lambda y]$

$= P[(1 - X) \ge e^{-\lambda y}]$

चूँकि e^x x का बढता हुआ फलन है

$= P(X\le 1 - e^{-\lambda y})$

$= F_x(1 - e^{-\lambda y})$

लेकिन चूँकि $x(0,1)$ पर एकसमान है, $F_x(x) = x, 0 \le x \le 1$ इस प्रकार है:

$F_y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$

इसलिए Y प्राचल λ के साथ चर घातांकी वितरण है।

नमूनाकरण सिद्धान्त :– यदि आंकडे केवल समग्र के एक हिस्से से एकत्र किये जाते हैं अर्थात् समग्र की कुछ ही इकाईयों से, इसे नमूनाकरण के विशिष्ट समग्र (लोगों, विर्निमित वस्तुतओं आदि) जिसके बारे मे हम हर एक वस्तु पर ध्यान दिए बिना कुछ अनुमान बनाना चाहते हैं। इस प्रकार हम नमूने में अर्थात् हम कुछ विशिष्ट वस्तुओं पर विचार करने की कोशिश करते हैं, जिससे हम पूरे समग्र की विशेषता जिसकी कुछ समझ है, कुछ जानकारी निकालने की आशा करते हैं। मान लीजिए कि हम एक संख्या के साथ परिमित आबादी के प्रत्येक सदस्य को लगातार वर्गीकृत करते हैं, ताकि सामान्यता के नुकसान के बिना एक समग्र जो N वस्तुओं को शामिल करता है जिसे 1,2,……….,N से प्रदर्शित किया जा सकता है। अब नीचे वर्णित किये गए वस्तुओं में n वस्तु चुनते है। निम्नलिखित यादृच्छिक चरों को परिभाषित करें।

X_i = प्राप्त समग्र मान जब i^{th} चुना जाता है $i = 1,2\ldots,n$

यादृच्छिक चरों $X_1, X_2, \ldots,X_n$ की संभावना वितरण स्पष्टः हम नमूनाकरण के बारे मे ंकैसे जानते हैं पर निर्भर करता है। यदि हम प्रतिस्थापना के साथ नमूना लेते हैं, प्रत्येक समय में वस्तु को यादृच्छिक चुनते हुए, यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \ldots,X_n$ स्वतन्त्र_है और एक समान रूप से वितरित होते हैं। जो कि प्रत्येक X_i, i=1,2, ..., n के लिए हमारे पास है।

$P(X_i=j) = 1/N, j = 1,2\ldots N$

इसके सिवाय उनकी संयुक्त संभावना वितरण द्वारा दिया जाता है :

$$P[X_i=j_1,\ldots,X_n=j_n]= \frac{1}{N(N-1)(N-2)..(N-n+1)}$$

जहॉं $j_1,\ldots.j_n$ $(1,2\ldots N)$ में से कोई n मान है।

नमूना निकालने की विधियॉं

नमूना निकालने की कुछ विधियॉं निम्नलिखित हैं:

1. सरल यादृच्दिक नमूनाकरण
2. स्तरीय यादृच्छिक नमूनाकरण

बिन्दु अनुमान

यदि x प्रायिकता वितरण $f(x)$ के साथ एक यादृच्दिक चर है, जिसे अज्ञात प्राचल द्वारा अवगत कराया गया है और यदि $X_1,X_2,\ldots X_n$ में से n आकार के यादृच्छिक नमूने हैं, आंकडे $\hat{\theta}=h(X_1,X_2,\ldots X_n)$ को θ का बिन्दु अनुमानक कहा जाता है। घ्यान दें कि $\hat{\theta}$ यादृच्दिक चर है क्योंकि यह यादृच्छिक चर का एक फलन है। नमूना चयन होने के पश्चात, $\hat{\theta}$ एक विशेष संख्यात्मक मान लेता ह $\hat{\theta}$ को θ का बिन्दु अनुमानक कहते हैं। सामान्यतयाः कुछ समग्र प्राचल θ का बिन्दु अनुमानक $\hat{\theta}$ आंकडे $\hat{\theta}$ का एक संख्यात्मक मान हे।

आंकडा $\hat{\theta}$ को बिन्दु अनुमानक कहा जाता है।

निष्पक्ष अनुमानक

बिन्दु अनुमानक $\hat{\theta}$ प्राचल θ के लिए एक निष्पक्ष अनुमानक है यदि $E(\hat{\theta}) = \theta$

यदि अनुमानक निष्पक्ष नहीं है, तब अन्तर $E(\hat{\theta}) - \theta$ को अनुमानक $\hat{\theta}$ का पक्षपाती कहा जाता है।

जब अनुमानक निष्पक्ष है, तब पक्षपाती शून्य है अर्थात् $E(\hat{\theta}) - \theta = 0$

उदाहरण 15 :– मान लीजिए X माध्य μ और विचलन σ^2 के साथ एक यादृच्छिक चर है और $X_1,X_2,\ldots Xn$ समग्र में से n आकार के यादृच्छिक नमूना X द्वारा प्रदर्शित है। दर्शायें कि नमूना माध्य $\overline{X}$ और नमूना विचलन S^2 क्रमशः μ और σ^2 के निष्पक्ष अनुमानक हैं।

हल : सबसे पहले नमूना माध्य समझे हम जानते हैं कि $E(\overline{X}) = \mu$ इसलिए , नमूना माध्य $\overline{X}$ समग्र माध्य μ का एक निष्पक्ष अनुमानक है। अब नमूना विचलन समझे । हमारे पास

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 + \overline{X^2} - 2\overline{X}X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right) - nE\left(\overline{X^2}\right)\right]$$

चूँकि $E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$ और $E(\overline{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n$, हमारे पास

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mu^2 + \sigma^2\right) - n\left(\mu^2 + \sigma^2/n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2$$

इसलिए, नमूना विचलन S^2 समग्र विचलन σ^2 का एक निष्पक्ष अनुमानक है।

बिन्दु अनुमानक का विचलन :– यदि हम समझे θ के सभी निष्पक्ष अनुमानक, जिसका सबसे छोटा विचलन का मान (MUVE) न्यूनतम विचरण निष्पक्ष आकलनकर्ता कहलाता है। यदि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ माध्य μ और विचलन σ^2 के साथ सामान्य वितरण में से आकार n के यादृच्छिक नमूने हैं, नमूना माध्य $\overline{X}$ μ के लिए MUVE है।

8.6 सारांश

इस इकाई मे हमने अध्ययन किया है कि एक सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण आंकडों का उपयोग करके निर्णय लेने की एक विधि है, चाहें वह नियंत्रित प्रयोग से हो या अवलोकन अध्ययन (नियंत्रित प्रयोग से न हो)। सांख्यिकीय में, एक परिणाम सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण कहलाता है, अगर इसके एक पूर्व निर्धारित सीमा संभावना के अनुसार अकेले मौके में होने की संभावना नहीं है, महत्व स्तर वाक्यांश ''महत्व का परीक्षण'' रोनाल्ड फिशर द्वारा दिया गया था। ''इस तरह के गंभीर परीक्षण को महत्व का परीक्षण कहा जा सकता है, और जब ऐसे परीक्षण उपलब्ध होते हैं तो हमें पता चल जायेगा कि कोई दूसरा नमूना है या जो पहले से काफी अलग नहीं है।'' अन्वेषण संबंधी आंकडा विश्लेषण के विपरीत, कभी कभी परिकल्पना परीक्षण को पुष्टिक आंकडा विशलेषण कहा जाता है। आवृत्ति की संभावना में, इन निर्णयों को लगभग शून्य परिकल्पना वाले परीक्षणों का उपयोग करके लगभग हमेशा बनाया जाता

है। ये ऐसे परीक्षण हैं जो इस प्रश्न का उत्तर देते हैं कि शून्य परिकल्पना सही है, परीक्षण आंकडों के लिए एक मान का निरीक्षण करने की संभावना क्या है जो वास्तव मे प्रेक्षित मान के रूप मे कम से कम चरम हो ? अधिक औपचारिक रूप में, वे इस प्रश्न के उत्तर का प्रतिनिधित्व करते हैं, जो एक प्रयोग करने से पहले सामने आते हैं, प्रयोग के परिणामों से गलत अस्वीकृति की पूर्व निर्दिष्ट संभावना के लिए शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति हो सकती है। परिकल्पना परीक्षण का एक उपयोग यह तय करना है कि पारंपरिक ज्ञान पर संदेह डालने के लिए प्रायोगिक परिणामों के पर्याप्त जानकारी है या नहीं। बायिसियन परिकल्पना के परीक्षण के लिए दृष्टिकोण पिछली संभावना पर परिकल्पना की अस्वीकृति का आधार है। आंकडों के आधार पर निर्णय लेने के लिए अन्य दृष्टिकोण निर्णय सिद्धानत और अनुकूल निर्णय के माध्यम उपलब्ध है। महत्वपूर्ण क्षेत्र एक परिकलपना परीक्षण के सभी परिणामों का समुच्चय है, जिसे वैकल्पिक परिकलपना के पक्ष में खारिज कर दिया जाता हे। महत्वपूर्ण क्षेत्र को आमतौर पर शब्द c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

8.7 शब्दावली

अनुमानक :– गुणों के नमूनों का दिया हुआ मान जो आवश्यक अर्थ खोजने के लिए उपयोग किया जाता है।

ऊपरी सीमा :– दिये गए समग्र मे ऊपरी मान ।

8.8 बोध प्रश्न

1. थाम्पसन प्रेस की परिकल्पना है कि इसकी नवीनतम बेब आफसेट प्रेस का औसत जीवन 14,500 घंटे है। वो जानते हैं कि प्रेस का SD 2,100 घंटे है। 25 प्रेसों के एक नमूने मे से , कम्पनी ने 13,000 घंटे नमूना माध्य ज्ञात किया। 0.01 महत्व के स्तर पर, क्या कम्पनी ने निष्कर्ष निकालना चाहिए कि प्रेस का औसत जीवन 14,500 घंटे की तुलना में कम है।
2. फिल्म की जांच होने पर भारत में रंगमंच मालिकों को पता है कि एक हिट फिल्म प्रत्येक शहर मे 10 दिनों के मानक विचलन के साथ औसतन 84 दिनों तक चलती है। एक विशेष फिल्म वितरक को जनसंख्या के साथ अपने क्षेत्र में फिल्म की लोकप्रियता की तुलना करने में दिलचस्पी थी। उसने उस क्षेत्र के 75 थियेटरों को यादृच्छिक तरीके से चुना और पाया कि एक लोकप्रिय फिल्म 81.5 दिनों तक चलती है।
   (अ) परीक्षण के लिए उचित परिकलपनाओं का संज्ञान लेते हुए बताऐं कि क्या वितरकों के क्षेत्र मे थिएटर और आबादी के बीच महत्वपूर्ण अन्तर है।
   (ब) 1% महत्व के स्तर पर, इन अनुमानों का परीक्षण करें।

8.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. यहॉ परिकलपनाऐं निम्नानुसार लिखी जा सकती है।

H_o: $\mu = 14500$ और H_1: $\mu < 14500$ और महत्वपूर्ण स्तर $\alpha = 0.01$

$\alpha = 0.01$ के लिए z क्षेत्र में निचलास्वीकृत क्षेत्र $z = -2.33$ या
(तालिका से z का मान 2.33 होने की संभावना 0.4901है, स्वीकृति बाऐं पुच्छीय क्षेत्र के).

$$\bar{x} = \frac{\mu H_\circ - 2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{145000 - 2.33(2100)}{5}$$

= 13521.4 hours

चूँकि नमूना माध्य $\bar{x}$ अनुमानित मान से कहीं कम है, शून्य अवधारणा को अस्वीकार कर दिया जाता है।

निम्नलिखित आंकडों को देखते हुए $\sigma = 10$ दिन $n = 75$ सिनेमाघर $\bar{x} = 81.5$
Ho: $\mu = 84$ दिन H_1: $\mu \neq 84$ दिन $\alpha = 0.01$ इसका अर्थ है कि दोनों पूंछों के तहत अस्वीकृत क्षेत्र 0.01 है और स्वीकृत क्षेत्र 0.99 है।

इसमें स्वीकृत क्षेत्र का हिस्सा आधा $\frac{0.99}{2}$ = .4950 है , Z का मान 2.58 है।
इसलिए स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं हैं।

$$z = \pm 2.58 \text{ or } \bar{x} = \mu_{Ho} \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} = 84 \pm 2.58 x \frac{10}{\sqrt{75}}$$

= 81.02 निचली सीमा और 86.98 ऊपरी सीमा

क्योंकि पर्यवेक्षक का मान स्वीकृति क्षेत्र में है, इसलिए हम रिक्त परिकल्पना H_0 को अस्वीकार नहीं करते हैं। फिल्म के चलने की लम्बाई अन्य सिनेमाघर के समान है।
दूसरे शब्दों में :

Z का प्रेक्षित मान है $\bar{x} - \frac{\mu_{H_\circ}}{SE}$

जहॉं $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{81.4-84}{(1.155)}$

Z का स्वीकृत क्षेत्र है $\pm z = \pm 2.58$

8.10 स्वपरख प्रश्न

1. अनुपात में अन्तर के परीक्षण से आप क्या समझते हैं ?
2. महत्व सृजन फलन पर टिप्पणी लिखें ?
3. मानक त्रुटि से आप क्या समझते हैं ?

8.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दास गुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकी की बुनियादी बातें – संचेती और कापोर
3. प्रबन्धन मे मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनॉय और गुप्ता
4. व्यावसायि सांख्यिकी – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 9 चरों का साथर्कता परीक्षण (बड़े प्रतिदर्श) (Significance Test in Variables (Large Samples)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- बडे नमूनों के लिए महत्व के परीक्षण को प्रयोग में ला सकें।
- महत्वपूर्ण परीक्षण के आधार पर एक दिये हुए आंकडे का विश्लेषण कर सकें।

9.1 प्रस्तावना

परिकल्पना परीक्षण, आंकडे परीक्षण के नमूना वितरण पर आधारित होती है, और इसलिए महत्वपूर्ण (Critical) क्षेत्र को परिभाषित करने के लिए नमूना वितरण को जानना आवश्यक है। यहॉं, नमूना वितरण उनमे से एक हो सकता है, जिनका पहले के अध्यायों में चर्चा की गई है या उनमें से भिन्न हो सकता है। बडें नमूनों के लिए $n > 30$ परीक्षण संबंधित नमूना वितरण पर आधारित होगा। यद्यपि, बडे नमूनों $n > 30$ के लिए अधिकांश नमूना वितरण सामान्य वितरण की ओर अग्रसर हेाता है, और इसलिए, परीक्षण सामान्य वितरण पर आधारित हो सकता है। आइए हम कुछ नमूना परीक्षणों पर विचार करते हैं जो सामान्य वितरण पर आधारित है।

9.2 माध्य के लिए परीक्षण

मान लें कि समग्र के लिए माध्य (μ) अज्ञात है। हम परीक्षण करना चाहते हैं कि दिये हुए मान का माध्य μ_0 है।

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = \mu_0$ है।

एक बडे यादृच्छिक नमूने के आकार के लिए $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\mu/\sqrt{n}} \quad N(0,1)$ है और इसलिए,

आंकडा परीक्षण $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\mu/\sqrt{n}}$ है।

वैकल्पिक परिकलपना निम्न में से कोई भी हो सकती है।

1. $\mu_0 : \mu = \mu_0$ यहॉं , परीक्षण दो पुच्छीय है।

2. $H_1: \mu > \mu_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय है ऊपरी पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
3. $H_1: \mu < \mu_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय, निचले पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
4. दो माध्यों के बीच अन्तर के लिए परीक्षण $\mu_0: \mu_1 < \mu_2$ वैकल्पिक परिकल्पना निम्न मे ंसे एक हो सकती है।
   1) $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।
   2) $H_1: \mu_1 > \mu_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , ऊपरी पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
   3) $H_1: \mu_1 < \mu_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय, निचले पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

   छो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान की स्थिति में, महत्वपूर्ण $-k\propto_{/2}$और $k\propto_{/2}$ है। ऊपरी पूॅछ परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $k_\propto$ है। निचले पुच्छीय परीक्षण में, यह मान $k_\propto$ है।

   ध्यान दें : यहॉ, यदि μ_1और μ_2 अज्ञात हो, आंकडा परीक्षण

   $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}}$ जहॉ s_1, s_2 नमूना मानक विचलन है।

   अनुपात के लिए परीक्षण :– मान लीजिए कि समग्र मे ंकिसी विशेषता का अनुपात ज्ञात नहीं है, हम जानना चाहते है कि क्या अनुपात का दिया हुआ मान p_0 है।

   शून्य परिकल्पना $\mu_o: p = p_0$ (समग्र p_0) है।

   वैकल्पिक परिकल्पना निम्न मे ंसे कोई एक हो सकती है।
   1) $H_1: p \neq p_0$ यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।
   2) $H_1: p > p_0$ यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय, ऊपरी पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
   3) $H_1: p < p_0$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय निचले पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

   समग्र से n आकार के बडे यादृच्छिक नमूने में, यदि x इकाई विशेषता रखते हैं तब, नमूना अनुपात $p = \frac{x}{n}$ है।

   और इसलिए , μ_0 के अन्तर्गत $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$ N(0,1) है। और यही आंकडा परीक्षण है।

दो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-k\propto/_2$ और $k\propto/_2$ है। निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति मे ंयह $-k_\propto$ है।

अनुपातों की समानता के लिए परीक्षण

मान लीजिए निश्चित विशेषता के लिए दो समग्र अज्ञात अनुपातों p_1 और p_2 के साथ है। हम परीक्षण करना चाहते हैं कि अनुपात समान है। शून्य परिकल्पना $\mu_0: p_1 = p_2$ (समग्र अनुपात समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना निम्नमे ंसे कोई एक हो सकती है।

1. $H_1: p_1 \neq p_2$, यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $H_1: p_1 > p_2$, यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , ऊपरी पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।
3. $H_1: p_1 < p_2$ यहॉ, परीक्षण एक पुच्छीय , निचले पूॅछ पर महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ है।

μ_0 के अर्न्तगत यदि p सामान्य अनुपात है। यदि पहले समग्र मे ंसे n_1 आकार का बडा यादृच्छिक नमूना लिया जाता है ंn_1 की इन इकाईयों के बीच, यदि x_1 इकाईयॉ विशेषता रखती है तो नमूना अनुपात $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$ हैं ।

यदि दूसरे समग्र से n_2 आकार का बडा यृाच्छिक नमूना भी लिया जाता है। n_2 की इन इकाईयों के बीच, यदि x_2 इकाईयॉ विशेषता रखती है तो नमूना अनुपात $Z = \frac{p_1 - p_2}{pQ\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}$ N(0,1) है। और यही आंकडा परीक्षण है। सामान्यता, सार्वजनिक अनुपात p ज्ञात नहीं होगा और इसलिए, इसका अनुमान नमूनों मे ंसे किया जाता है।

अनुमान $\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ है।

इसलिए , आंकडा परीक्षण $Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$ है।

दो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2}$ और $K_{\alpha/2}$ है। ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में महत्वपूर्ण मान $k_\propto$ है। निचले पुच्छीय परीक्ष्ज्ञण की स्थिति में यह मान $-k_\propto$ है।

उदाहरण –1

'मंदाकिनी मिल्क' 500 मिलीलीटर के प्रत्येक पाउच में दूध बेचता है। दूध को एक मशीन द्वारा पाउच मे ंभरा जाता है जिसके लिए भरने का मानक विचलन 5 मिलीलीटर है। तीन अलग अलग संभावित स्थितियॉ हैं :–

(अ) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या मशीन 500 मिलीलीटर दूध औसतन भर रही है । इसका अर्थ है कि मशीन ठीक से व्यवस्थित है।

(ब) ग्राहकों से शिकायत है कि पाउच मे ंं500 मिलीलीटर से कम दूध की मात्रा है।

(स) प्रबंध चाहता है कि औसतन दूध 500 मिलीलीटर से ज्यादा नहीं होना चाहिए।

(द) मान लीजिए कि ऊपर की स्थितियों मे ंसे कोई एक स्थिति घटित होती है और हमें किसी निष्कर्ष मे ंपहुॅचने कि आवश्यकता है। भरे हुए पाउचों के बीच 72 यादृच्छिक तरीके से उठाऐं जाते हैं और उनकी मात्रा को मापा जाता है। इन मापों का माध्य 501.1 मिलीलीटर पाया गया। आपका निष्कर्ष क्या है? (5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें)

हल : यहॉ $\mu_0 = 500$ मिलीलीटर , $\sigma = 5$ मिलीलीटर , n=72, $\bar{x}$ =501.1 मिलीलीटर $\propto = 0.05$ मिलीलीटर

(अ) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य $\mu = 500$ मिलीलीटर है या नहीं और, इसलिए, शून्य परकिल्पना $\mu_0 = \mu \neq 500$ मिलीलीटर है। (मशीन ठीक से व्यवस्थित है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_0 = \mu \neq 500$ (मशीन ठीक से व्यवस्थित नहीं है।),

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1)

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है, क्योंकि $\mu_0 : \mu \neq 500$ मिलीलीटर

दिये हुए नमूने के लिए 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2}$ $= -1.96$ और $K_{\alpha/2} = 1.96$

Z के सही मान के लिए $Z_{obs} = \frac{\bar{x}\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1-500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

$Z_{obs} = 1.87$ एक मान (–1.96,1.96) के अन्तराल में है, μ_0 स्वीकार्य है। क्योंकि

निष्कर्ष : माध्य 500 मिलीलीटर है इसका अर्थ है कि मशीन ठीक से व्यवस्थित है।

(ब) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य 500 मिलीलीटर से कम है, और इसलिए, शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 500$ (माध्य 500 मिलीलीटर है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_0 : \mu < 500$ मिलीलीटर है। (माध्य 500 मिलीलीटर से कम है)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण निचला पुच्छ है क्योंकि $\mu_0 : \mu < 500$ मिलीलीटर

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-K_{\alpha/2}$ $= -1.645$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र Z=-1.645 है। $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1-500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

$Z_{obs} = 1.87 > 1.645,$ यह 500 मिलीलीटर से कम नहीं है।

(स) यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या समग्र माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है और इसलिए, शून्य परिकलपना $\mu_0 : \mu = 500$ मिलीलीटर (माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है)।

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ , परीक्षण ऊपरी पुच्छ है क्योंकि $\mu_1 : \mu > 500$ मिलीलीटर ।

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 1.645$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र $Z > 1.645$ है। $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{501.1 - 500}{\frac{5}{\sqrt{72}}} = 1.87$

चूॅकि Zobs +1.87>1645, μ_0 अस्वीकार्य हैं ।

निष्कर्ष :– माध्य 500 मिलीलीटर से ज्यादा है। इसलिए औसत भरान 500 मिलीलीटर से ज्यादा है।

उदाहरण है :– 2 एक फर्म प्रतिरोधक बनाती है। उने प्रतिरोधों का मानक विचलन 0. 02 ओम ज्ञात किया गया। क्या उनका औसत प्रतिरोधक 1.39 ओम है का परीक्षण आवश्यक है। 64 प्रतिरोधकों का एक यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य 1.39 ओम है लिया जाता है। इस नमूने के आधार पर , क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सम्पूर्ण समूह का औसत प्रतिरोधक 1.4 ओम है।

हल : यहॉ, $\mu_0 = 1.4$ ओम , $\sigma = 0.02$ ओम , n=64 , $\bar{x} = 1.39$ ओम

महत्व का स्तर अंकित नहीं किया गया है इन परिस्थितियों मे ंहम $\propto = 5\%$ मान सकते हैं। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 1.4$ ओम (माध्य प्रतिरोधक 1.4 ओम है)

वैकल्पिक परिकलपना $\mu_0 : \mu \neq 1.4$ ओम (माध्य प्रतिरोधक 1.4 ओम के समान नहीं है)

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय हे।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k_{\propto/2} = -1.96$ है।

$Zobs = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1.39 - 1.4}{\frac{0.02}{64}} = -4$ चूकि Zobs = -4 का मान अन्तराल (-1.96,1.96) से बाहर है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : प्रतिरोधकों का औसत प्रतिरोधक 1.4 ओम के बराबर नहीं है।

उदाहरण 3 : इस परिकल्पना की जांच करना आवश्यक है कि औसतन, 1 पंजाबी 180 सेन्टीमीटर लम्बे होते हैं। इसके लिए, 50 पंजाबी यदृच्छया चयनित किये और उनकी ऊॅचाई मापी गई। यदि औसत ऊॅचाई 181.1 सेमी0 है और मानक विचलन 3.3 सेमी0 है 1 आपका निष्कर्ष है? (महत्व का स्तर 1% उपयोग करें।)

हल : यहॉं, $\mu_0 = 180$ सेमी0, $n = 50$, $\bar{x} = 181.1$ सेमी0 , $\sigma = 3.3$सेमी0 और $\propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 180$सेमी0 (पंजाबियों की औसत ऊॅचाई 180 सेमी0 है)

वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 : \mu > 180$सेमी0 (औसत ऊॅचाई 180 सेमी0 से ज्यादा है)

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉं, परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है और महत्वपूर्ण क्षेत्र

Z > 2.33 है ।

$Zobs = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{181.1-180}{\frac{3.3}{\sqrt{50}}} = 2.36$ चूकि Zobs = 2.36, 2.33 से ज्यादा है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : औसतन पंजाबी 180 सेमी0 से लम्बे हैं।

उदाहरण 4 : समग्र में से 836 माध्य के साथ, 225 प्रेक्षणों वाला यादृच्छिक नमूना लिया गया है, नमूने के लिए माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 840.5 और 45 है।

1 % महत्व के स्तर पर, परीक्षण करें कि क्या नमूना माध्य, समग्र माध्य से उल्लेलखनीय ढंग से भिन्न है ?

हल : यहॉं, $\mu_0 = 836, n = 225, \bar{x} = 840.5, \sigma = 45$ और $\propto = 0.01$

शून्य परिकलपना $\mu_0 : \mu = 836$ (नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न नहीं है।)

वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_0 : \mu \neq 836$ (नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न है)

μ_0 के अन्तर्गत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0,1) है

यहॉं, परीक्षण दो पुच्छीय हैं

10% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k{\propto}/_2 = -2.58$ और $k{\propto}/_2 = 2.58$

$Zobs = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{840.5-836}{\frac{45}{\sqrt{50}}} = \frac{4.5}{6.33} = 0.1579$ चूकि Z_{obs} = 1.5, मान अंतराल (–2.58,2.58) से बाहर है, μ_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– नमूना माध्य समग्र माध्य से उल्लेखनीय ढंग से भिन्न नहीं है।

उदाहरण 5 : यह ज्ञात हे कि लडकों के IQ का मानक विचलन 10 और लडकियों के IQ का मानक विचलन 12 है। 200 यादृच्छिक चयनित लडकों का माध्य 99 और 300 यादृच्छिक चयनित लडकियों का माध्य 97 है।

I. क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि औसतन लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान हो सकता है?

II. क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि औसतन लडकों का IQ लडकियों के IQ से ज्यादा हो सकता है ?

हल :– यहॉ, $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 12$, $n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $\overline{x_1} = 99$, $\overline{x_2} = 97$,

चूॅकि $\propto$ अंकित नहीं किया गया है, हम $\propto = 5\% = 0.05$ ले सकते हैं

i. शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = \mu_2$ (लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान है) वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 : \mu_1 = \mu_2$ (लडकों एवं लडकियों का IQ एक समान नहीं है।)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \dfrac{\overline{x_1} - x_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} isN(0,1)$

$$Z_{obs} = \frac{\overline{x_1} - x_2}{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}} = \frac{99 - 97}{\sqrt{\dfrac{10^2}{200} + \dfrac{12^2}{300}}} = 2.02$$

चूॅकि Zobs=2.02 का मान अन्तराल (–1.96, 1.96)से बाहर है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : लडकें एवं लडकियों का IQ एक समान है।

ii यहॉ वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ (लडकों का IQ लडकियों से ज्यादा है।) यहॉ, परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $k_\propto = 1.645$ है। चूॅकि Z_{obs}=2.02, 1.645 से ज्यादा है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– लडकों का IQ लडकियों के IQ से ज्यादा है।

उदाहरण –6 : एक बाग से 1000 सेवों को यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य वजन 187 ग्राम एवं मानक विचलन 8 ग्राम है। दूसरे बाग से 800 सेवों का यादृच्छिक नमूना जिसका माध्य वजन 188.4 ग्राम एवं मानक विचलन 10 ग्राम है । परिकल्पना का परीक्षण करें कि दोनों बागों के सेवों का औसत वजन एक समान है।

यहॉ $n_1 = 1000$, $\overline{x_1} = 187$ग्राम $\sigma_1 = 8$ ग्राम

$n_2 = 800$, $\overline{x_2} = 188.4$ग्राम $\sigma_1 = 10$ ग्राम

शून्य परिकल्पना $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$ (माध्य एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $\mu_1 \neq \mu_1 \neq \mu_2$ (माध्य एक समान नहीं है)

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = 1.96$ और $k_{\propto/2} = 1.96$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} = \frac{187 - 188.4}{\sqrt{\frac{8^2}{1000} + \frac{10^2}{800}}} = -3.22$$

चूँकि Z_{obs} = -3.22 मान अंतराल (-1.96,1.96) के बाहर है, μ_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : दो बागों के सेवों का औसत माध्य वजन एक समान नहीं है ।

उदाहरण 7 : किसी बीमारी से ग्रसित यादृच्छिक चयनित मरीजों के समूह का प्रकुंचक रक्तचाप अध्ययन मे ंएवं दूसरे समूह मे ं36 व्यक्तियों जो कि किसी बीमारी से ग्रसित नहीं है, निम्नलिखित परिणाम निकाले

	ग्रसित	गैर ग्रसित
नमूना आकार	36	36
माध्य प्रकुंचक चाप	178	141
मानक विचलन	24	12

परीक्षण करें कि क्या बीमारी से ग्रसित मरीजों का औसत प्रकुंचक, गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है। परीक्षण 1% महत्व के स्तर पर करें।

हल : यहाँ $n_1 = 36 \quad \overline{x_1} = 178 \quad \sigma_1 = 24$

$n_2 = 36 \quad \overline{x_2} = 141 \quad \sigma_2 = 12$ और $\propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$(औसत प्रकुंचक रक्तचाप दोनों समूहों का एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 = \mu_1 > \mu_2$ (औसत प्रकुंचक रक्तचाप बीमारी से ग्रसित मरीजों का गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

यहाँ परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

1: महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} = \frac{178 - 141}{\sqrt{\frac{24^2}{36} + \frac{12^2}{36}}} = -8.27$$

चूँकि $Z_{obs} = 8.27$, 2.33 से ज्यादा है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : औसत प्रंकुचक रक्तचाप बीमारी से ग्रसित मरीजों का, गैर ग्रसित व्यक्तियों से ज्यादा है।

उदाहरण 8 : लडके एवं लडकियों के दो समूहों के बुद्धि परीक्षण मे ंनिम्नलिखित परिणाम निकले :

	माध्य अंक	मानक विचलन	नमूना आकार
लडकें	70	20	250
लडकियॉं	75	15	150

क्या हम 1% महत्व के स्तर पर यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि लडकियों के औसत अंक लडकों से ज्यादा है ।

हल : यहॉं $n_1 = 250 \quad \overline{x_1} = 70 \quad \sigma_1 = 20$

$n_2 = 150 \quad \overline{x_2} = 75 \quad \sigma_2 = 15$ और $\propto = 1\% = 0.01$

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (माध्य एक समान है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_0 = \mu_1 < \mu_2$ (लडको के औसत अंक, लडकियों के औसत अंक से है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

परीक्षण एक पुच्छीय है – लडकों के औसत अंक लडकियों से कम है।

1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -2.33$ है।

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = \frac{70-75}{\sqrt{\frac{20^2}{250} + \frac{15^2}{150}}} = -2.84$$

चूॅंकि $Z_{obs} = 2.84$, -2.33 से कम है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : लडकों के औसत अंक लडकियों से कम है या लडकियों के औसत अंक, लडकों से ज्यादा है।

उदाहरण 9 : एनाजेसिक (दर्द निवारक) की कुछ खुराक जब 32 महिलाा रोगियों को दी जाती है तो दर्द निवारण की औसत अवधि 3.5 घन्टे थी। वहीं खुराक जब 36 पुरूष रोगियों को दी जाती है तो दर्द निवारण की औसत अवधि 4 घंटे थी। पिछले अनुभवों से , यह ज्ञात है कि दर्द राहत की अवधि का मानक विचलन 0.5 घंटे हैं। यह परीक्षण करें कि औसतन, पुरूषों और महिलाओं में दर्द निवारण की अवधि एक समान है।

हल : यहॉं, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ घंटे $n_1 = 32$ $\overline{x_1} = 3.5$ घंटे $n_2 = 36$ और $\overline{x_2} = 4$ घंटे चूॅंकि $\propto$ अंकित नहीं किया गया है, हम $\propto = 5\% = 0.05$ समझ लेते हैं

शून्य परिकल्पना

$H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषो एंव महिलाओं में एक समान है) है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$ (औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषों एवं महिलाओं में एक समान नहीं है) है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।

5ः महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k\propto/_2 = -1.96$ और $k\propto/_2 = 1.96$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} = \frac{3.5 - 4}{\sqrt{\frac{(0.5)^2}{32} + \frac{(0.5)^2}{36}}} = -33.88$$

चूॅकि Zobs = 33.88 मान अन्तराल (–1.96, 1.96)के मान से ज्यादा है, H_0 अस्वीाकार्य है।

निष्कर्ष : औसत दर्द निवारण की अवधि पुरूषों एवं महिलाओं में एक समान नहीं है।

उदाहरण 10 : बैंड R कलम का निर्माण करने वाले कहना है कि बैंगलौर के कालेज के छात्रों का अनुपात जो R कलम का प्रयोग करते हैं, 0.3 से अधिक है इस विवाद का परीक्षण करने के लिए, 40 छात्रों को यादृच्छिक तरीके से चुना गया और इस संबंध में पूछताछ की गई। इन 40 छात्रों मे ंसे 10 ब्रांड R कलम का उपयोग करने के लिए पाए गए। 0.05 महत्व के स्तर पर, जांच करें कि निर्माताओं का तर्क स्वीकार्य है या नहीं ।

हल : यहॉ $p_0 = 0.3,\ n = 40,\ x = 10$ और $\propto = 0.05$

और इसलिए, नमूना अनुपात $p = \frac{x}{n} = \frac{10}{40} = 0.25$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p = 0.3$ (ब्रान्ड R के कलम का प्रयोग करने वालों का अनुपात 0.3 है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_0 = p > 0.3$ (ब्रान्उ R के कलम का प्रयोग न करने वालों का अनुपात 0.3 है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.25 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3*0.7}{40}}} = -0.69$

Zobs = -0.69, 1.645 से कम है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : ब्रान्ड R के कलम का प्रयोग करने वालों का अनुपात 0.3 है और यह 0.3 ज्यादा नहीं है।

उदाहरण –11 : इस पुस्तक के लेखक का मानना है कि कर्नाटक के पीयूसी के 90% से ज्यादा छात्र, राजमोहन द्वारा रचित सांख्यिकी पुस्तक का उल्लेख करते हैं पूरे कर्नाटक से 225 सांख्यिकी छात्रों के यादृच्छिक निरीक्षण के लिए लिया जाता है, उनमें से 93.1% उवन्त पुस्तक को दर्शाते हैं। क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 1% महत्व के स्तर पर लेखक की राय मान्य है।

हल : यहॉ $P_0 = \frac{90}{100} = 0.9,\ n = 225, \quad p = \frac{93.1}{100} = 0.931,$

$\propto = 0.01$ शून्य परिकल्पना $\mu_0 : p = 0.9$ (यह पुस्तक 90% छात्रों द्वारा उल्लेखित है)है।

$H_1 : P > 0.9$ (यह पुस्तक 90% से ज्यादा छात्रों द्वारा उल्लेखित है)है।

μ_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ , परीक्षण ऊपरी पुच्छ है।

1% महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $k_{\propto} = 2.33$ है।

$$Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0Q_0}{n}}} = \frac{0.931-0.9}{\sqrt{\frac{0.9*0.1}{225}}} = -1.55$$

Zobs = -1.55, 2.33 से कम है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : पुस्तक को 90% छात्रों द्वारा नहीं अपितु 90% से अधिक छात्रों द्वारा संदर्भित किया जाता है। इस प्रकार, लेखक की राय मान्य नहीं है।

उदाहरण 12 : यह सत्यापित करना आवश्यक है कि क्या एक सिक्का पक्षपाती है। सिक्के को 32 बार उछाला जाता है और परिणाम लिखे जाते हैं। 32 में से 19 परिणामों मे ंचित घटित हेाता है। क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सिक्का पक्षपाती है।

हल :– हम जानते हैं कि निष्पक्ष सिक्के के लिए चित आने की प्रायिकता 0.5 है।

इसलिए, हम परीक्षण करते हैं कि क्या $p = 0.5$

इस प्रकार $p_0 = 0.5, \quad n = 32, \quad x = 19$

इसलिए, $p = \frac{x}{n} = \frac{19}{32} = 05938$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : p = 0.5$ (सिक्का निष्पक्ष है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_0 : p \neq 0.5$ (सिक्का पक्षपाती है)

H_0 के अन्तर्गत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -1.96$ और $k_{\propto/2} = 1.96$ है।

$$Zobs = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0Q_0}{n}}} = \frac{0.5938-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{32}}} = 1.06$$

Zobs = 1.06 मान, अन्तराल (-1.96,1.96) में है, हम μ_0 स्वीकार्य करते हैं

निष्कर्ष : सिक्का निष्पक्ष है।

उदाहरण 13 :– प्रायिकता सिद्धान्त के अनुसार, एक ऐसे परिवार जिसमें दो बच्चे हैं और दोनों ही लडके हैं कि प्रायिकता 0.25 है और इलाके में जहॉ 136 परिवारों में

प्रत्येक में दो बच्चे हैं। जिनमें से 46 परिवारों मे 2 लडके हैं। क्या यह जानकारी सिद्धान्त की पुष्टि करती है। (1% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें)

हल :– यहॉ, $p_0 = 0.25, \quad n = 136, \quad x = 46\,, \quad \propto = 0.01$

इसलिए $p = \frac{x}{n} = \frac{46}{136} = 0.3382$

शून्य परिकल्पना $H_0 : p = 0.25$ (दो लडकों के साथ परविारों का अनुपात 0.25 है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 : p \neq 0.25$ (अनुपात 0.25 में से भिन्न है)है।

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।

1% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto/2} = -2.58$ और $k_{\propto/2} = 2.58$ है।

$$Zobs = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.3382 - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25 * 0.75}{136}}} = 2.375$$

चूॅकि Zobs = 2.375 मान, अन्तराल (-2.58,2.58) में है, हम H_0 स्वीकार्य करते हैं

निष्कर्ष : 2 लडके के साथ परिवारों का अनुपात 0.25 है।

उदाहरण 14 :– यह परीक्षण करना आवश्यक है कि क्या छात्रों के बीच सिगरेट के घुएं का अनुपात व्याख्याताओं के बीच में कम है। 60 यादृच्छिक चुने गए छात्रों मे 2 धूम्रपान करने वाले थे। 17 यादृच्छिक चुने गए व्याख्याताओं में से 5 धूम्रपान करने वाले थे। आपका निष्कर्ष क्या होगा ?

हल :– यहॉ $n_1 = 60, \quad x_1 = 2, \quad p_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{2}{60} = 0.0333$

$$n_2 = 17, \quad x_2 = 5, \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{5}{17} = 0.2941$$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p_1 = p_2$ (छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों एवं व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात समान है)है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = p_1 < p_2$ है (छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात, व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों के अनुपात से कम है।)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण निचला पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $-k_{\propto} = -2.33$ है चूॅकि सार्वजनिक अनुपात p अज्ञात है, इसका आंकलन दिये हुए आंकडे से करते हैं। आंकलन है

$\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} = \frac{2+5}{60+17} = 0.0909$

$Zobs = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{0.0333-0.2941}{\sqrt{0.0909*}0.9091\left[\frac{1}{60}+\frac{1}{17}\right]} = \frac{-0.2608}{\sqrt{\frac{0.0909*0.9091}{60*17}}}$

$= -3.302$

चूँकि Zobs = -3.302 मान -2.33 से कम है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : छात्रों के बीच धूम्रपान करने वालों का अनुपात व्याख्याताओं के बीच धूम्रपान करने वालों के अनुपात से कम है।

उदाहरण 15 :– एक घंटे की अवधि के दौरान बैंगलौर मे मैसूर बैंक जंक्शन को पार कर चुके 326 स्कूटरों मे से 143 ब्रांड बी स्कूटर थे। एक घंटे की अवधि के दौरान पुणे मे शिवाजी मूर्ति जंक्शन को पर कर चुके 213 स्कूटरों में, 137 ब्रांड की स्कूटर थे। बैंगलौर की सडकों पर ब्रांड बी स्कूटर का अनुपात पुणे के अनुपात से भिन्न है।

हल :– यहॉ $n_1 = 326, \quad x_1 = 143, \quad p_1 \frac{x_1}{n_1} = \frac{143}{326} = 0.4387$

$$n_2 = 213, \; x_2 = 137\,, \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{137}{213} = 0.6432$$

शून्य परिकल्पना

$H_0 = p_1 = p_2$ है(बैंगलौर एवं पुणे की सडकों पर ब्रांड बी स्कूटर का अनुपात एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना

$H_1 = p_1 < p_2$ है (बैंगलौर एवं पुणे की सडकों पर ब्राड बी स्कूटर का अनुपात भिन्न है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}}$

$= \frac{0.4387-0.6332}{\sqrt{0.5195*0.4805\left[\frac{1}{326}+\frac{1}{213}\right]}} = -4.646$

Zobs = -4.646 मान अन्तराल (-1.96, 1.96) से बाहर है। H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : बैंगलौर की सडकों में ब्रांड B स्कूटरों का अनुपात , पूणे की सडकों में ब्रांड B स्कूटरों के अनुपात से भिन्न है।

उदाहरण 16 :– निम्नलिखित आंकडों से, परीक्षण करें क्या दो नमूनों के अनुपातों के बीच अन्तर उल्लेखनीय है।

	आकार	**अनुपात**
नमूना -I	1,000	0.02
नमूना -II	1,200	0.01

हल : यहॉ $n_1 = 1000, \quad n_2 = 1200, \quad p_1 = 0.02, \quad p_2 = 0.01$

इसलिए , $\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{100*0.02+1200*0.01}{1000+1200} = 0.0146$

शून्य परिकल्पना $H_0 = p_1 = p_2$ है (अनुपात एक समान है)

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 = p_1 \neq p_2$ (अनुपात भिन्न है)

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}}$ N(0,1) है।

यहॉ परीक्षण दो पुच्छीय है।

5: महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k{\propto}/_2 = -1.96$ और $k{\propto}/_2 = 1.96$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} = \frac{0.02-0.01}{\sqrt{0.0146*0.9854\left[\frac{1}{1000}+\frac{1}{1200}\right]}} = 1.9471$$

चूॅकि Zobs=1.9471 मान अन्तर (01.96,1.96) के बीच है। H_0 स्वीकार्य हैं।

निष्कर्ष : अनुपात एक समान हैं।

उदाहरण 17 :– यह परीक्षण करना आवश्यक है कि क्या एक सिक्का पक्षपाती है।

(अ) मान लीजिए सिक्का 40 बार उछाला जाता है औरचिट के परिणामस्वरूप सिक्के का अनुपात 0.4 है। निष्कर्ष क्या है।

(ब) मान लीजिए सिक्के को 100 बार उछाला जाता हे और चिट के परिणामस्वरूप सिक्के का अनुपात 0.4 है। निष्कर्ष क्या है।

हल :– दोनों परिस्थितियों में, हमारे पास $H_0: P = 0.5$ (सिक्का निष्पक्ष है)

$H_1: P \neq 0.5$ (सिक्का पक्षपाती है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}}$ N(0,1) है।

यहॉ, परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-k{\propto}/_2 = -1.96$ और $k{\propto}/_2 = 1.96$

(अ) यहॉ, n=40 और p=0.4 , $Zobs = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.4-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{40}}}$ = -1.2649

चूॅकि Zobs = -1.2649 मान अन्तराल (-1.96,1.96) के बीच है। H_o स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : सिक्का निष्पक्ष है।

(ब) यहॉ, n=100, p=0.4 अतः Zobs = $\frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 Q_0}{n}}} = \frac{0.04-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{100}}}$ = -2

चूॅकि Zobs = -2 मान अन्तराल (-1.96,1.96) के बाहर है। H_o अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष : सिक्का पक्षपाती है।

ध्यान दें :– परिस्थिति (अ) और परिस्थिति (ब) में अनुपात (0,4) एक समान है। इसके बावजूद निर्णय एक समान नही है। क्योंकि बडे n के लिए, SE छोटा है।

9.3 बडे नमूने

बडे एवं छोटे नमूनों मे ंभेद करना बहुत कठिन है। यदि नमूना आकार 30 से बडा है या n>30, तब उन नमूनों को बडा नमूना कहा जा सकता है।

बडे एवं छोटे नमूने के बीच अन्तर महत्व के परीक्षण के प्रयोग से है, क्योंकि हम दो नमूनों के लिए जा धारणाऐं बनाते हैं वो एक समान नहीं हेाती है। बडे नमूनों के लिए अवधारणाऐं हैंः

1. आंकडों का यादृच्छिक नमूना वितरण लगभग सामान्य हो ।
2. नमूना मान पर्याप्त रूप से समग्र के करीब हो और इसका प्रयोग आंकलन की मानक त्रुटि की गणना में किया जा सके। बडे नमूनों की स्थिति में, जब हम आंकडों के महत्व का परीक्षण कर रहे हों तो मानक त्रुटि की संकल्पना प्रयोग हेाती है। विभिन्न आंकडों के लिए मानक त्रुटि ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नवत है।

माध्य की मानक त्रुटि :– यह केवल नमूना त्रुटियों को मापता है। नमूना त्रुटि सिवाय समग्र के सभी भावात्मक जानकारी नमूने मे ंसे एक समग्र प्राचल के आंकलन में शामिल है।

(i) जब समग्र का मानक विचलन ज्ञात है, $S.E\bar{x} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}$ सूत्र है।

$S.E\bar{x} =$ माध्य की मानक त्रुटि

$\sigma_p =$ समग्र का मानक विचलन

$n =$ नमूनों में प्रेक्षणों की संख्या

(ii) जब समग्र का मानक विचलन अज्ञात है, हमें माध्य की मानक त्रुटि के लिए नमूने के मान विचलन सूत्र का प्रयोग करना है।

$S.E\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, σ नमूने का मानक विचलन

यदि नमूने एवं समग्र का मानक विचलन दिया हुआ हो, तो माध्य की मानक त्रुटि की गणना के लिए हमें समग्र के मानक विचलन का प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण –1 : निम्नलिखित आंकडे से माध्य के मानक त्रुटि की गणना करें, कोलकाता में दुर्गा पूजा के अवसर पर 100 फर्मों द्वारा देय राशि दिखाई गई है।

मध्य मान (रू0)	39	49	59	69	79	89	99
फर्म की संख्या	2	3	11	20	32	25	7

हल $S.E\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

मध्य मान (m)	f	$\frac{m-69}{10} = d^1$	fd^1	fd^{1^2}
69	2	-3	-6	18
49	3	-2	-6	12
59	11	-1	-11	11
69	20	0	0	0
79	32	+1	+32	32

89	25	+2	+50	100
99	7	+3	+21	63
	100		$\sum fd^1 = 80$	$\sum fd^{1^2} = 236$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{80}{100}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.36 - 0.64} \times 10 = \sqrt{1.72} \times 10$$

$$= 1.311 \times 10 = 13.11$$

$$S.E.\overline{X} = \frac{13.11}{\sqrt{100}} = \frac{13.11}{10} = 1.311$$

अनुपातों का परिकल्पना परीक्षण :–

अवधारणाऐं : अनुपात को शामिल करते हएु परिकल्पना परीक्षण में, हम नमूना वितरण के रूप में द्विपदीय वितरण का उपयोग करते है। हम द्विपदीय वितरण के सन्निकट के रूप में सामान्य वितरण का उपयोग कर सकते हैं जब तक np और nq कम से कम 5 हो।

उदाहरण 2 :– श्री X के पास एक हार्डवेयर स्टोर है और वह एक विशेष ब्रांड की कैंची बेचता है। वह उन सभी की तुलना करना चाहता है जो पूरे देश में उन सभी की तुलना करना चाहता है जो पूरे देश में बेचे गए हैं। वह अनुभव से जानता है कि पूरे देश में बेची गई कैंची के 15% को पहले वर्ष में मरम्मत की आवश्यकता हेाती है। उसने 120 ग्राहकों का नमूना लिया और पाया कि उनमें से केवल 22 को उन्हें खरीदने के पहले वर्ष में मरम्मत की आवश्यकता है। महत्व के 2% स्तर पर, क्या पर्याप्त प्रमाण हैं कि उसकी कैंची पूरी दुनिया में बेची गई उन लोगों की विश्वसनीयता में अलग हेाती है।

हल :– $n = 120,\quad H_0: p = 0.15,\qquad H_1: p \neq 0.15$ माध्य

$p = \frac{22}{120} = 0.1833,\qquad \propto = 2\%$ या 0.02

दोनों आधे हिस्से के अर्न्तगत स्वीकृत क्षेत्र 0.98 हैं और इसलिए एक आधे हिस्से के अर्न्तगत स्वीकृत क्षेत्र सामान्य क्षेत्र का 0.4950 है।

यह Z का 2.33 (महत्वपूर्ण मान) देता है। इसलिए स्वीकृत क्षेत्र की सीमाऐं

$$\pm Z = \pm \frac{p - p_{H_0}}{\sqrt{\frac{p_{H_0} q_{H_0}}{n}}} = \frac{0.1833 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 * 0.85}{120}}} = \pm 1.02$$

जैसा कि प्रेषित मान महत्वपूर्ण मान 2.33 से कम है। शून्य अवधारणा स्वीकार्य है। इसका अर्थ यह है कि श्री X की दुकान पर बेची जाने वाली कैंची पूरे देश मे ंबेची जाने वाली की तुलना मे ंविश्वसनीय नहीं है।

9.4 सारांश

संख्यिकी में, परिणाम को सांख्यिकी सार्थक कहा जाता है यदि मौके पर ऐसा होने की संभावना न घटित हो । सांख्यिकी सार्थक मुहावरे का आविष्कार रोनार्ड फिशर ने किया था। जैसा कि सांख्यिकी मे प्रयोग किया जाता है कि , सार्थक का अर्थ महत्वपूर्ण या अर्थपूर्ण नहीं है, जैसा कि रोजमर्रा की बातों में होता है। अनुसंधान विश्लेषकों का ध्यान केवल महत्वपूर्ण परिणामों पर केन्द्रित होता है जो महत्वपूर्ण प्रतिक्रिया तरीकों को दिखा सकते हैं। जो अलग अलग महत्व के परीक्षण के लिए थ्रेसहोल्ड व्यवस्थित कर सकते हैं। कई शोधकर्ताओं ने आग्रह किया कि महत्व के परीक्षणों को हमेशा प्रभाव के आकार के आंकडों के साथ होना चाहिए, जो आकार का अनुमान लगाते हैं और इस प्रकार का अंतर व्यवहारिक महत्व है।

सक्ष्यों की मात्रा को स्वीकार करने के लिए यह आवश्यक है कि एक घटना अविश्वसनीय संयोग द्वारा उत्पन्न हुई है जिसे महत्व का स्तर या महत्वपूर्ण P मान कहते हैं। पारंपरिक सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण में, P मान की प्रायिकता कम से कम चरम रूप में देखे गए आंकडों को देखते हुए कि शून्य परिकल्पना सही है। यदि ज्ञात किया हुआ P मान छोटा होता है तो यह कहा जा सकता है शून्य परिकल्पना या तो गलत है या एक असामान्य घटना घटित हुई है। P मान किसी दोहराए जाने वाले नमूनाकरण की व्याख्या नहीं करते हैं।

एक वैकल्पिक (फिर भी सम्बन्धित) सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण संरचना नाइमन पीयरसन वारकृटिस्ट स्कूल है जिसमें दोनो परिकल्पनाऐं शून्य एवं वैकल्पिक परिभाषित करना चाहिए और जांचना चाहिए कि प्रक्रिया का नमूनाकरण गुण दोहराएं अर्थात् एक शून्य अवधारणा को अस्वीकार करने का निर्णय तब किया जायेगा जब यह वास्तव में सत्य हो और इसे अस्वीकार नहीं किया जाना चाहिए था (इसे गलत सकारात्मक या I प्रकार की त्रुटि कहा जाता है) और संभावना होती है कि कोई निर्णय शून्य परिकल्पना के स्वीकार के लिए किया जायेगा t यह वास्तव मे गलत है (II प्रकार की त्रुटि) फिशरियन P मान दार्शनिक रूप से नेमन पियरसन के I प्रकार की त्रुटियों से भिन्न है।

9.5 शब्दावली

महत्व स्तर : साक्ष्यों की मात्रा को स्वीकार करने के लिए यह आवश्यक है कि एक घटना अविश्वसनीय संयोग द्वारा उत्पन्न हुई है।

नमूनाकरण त्रुटियॉ : नमूने से समग्र प्राचल आंकलन में नमूनाकरण त्रुटियॉ शामिल होती है।

9.6 बोध प्रश्न

1. एक केचप निर्माता यह तय करने की प्रक्रिया में है कि क्या केचप के एक नए अतिरिक्त मसालेदार ब्रांड का उत्पादन किया जाय। कम्पनी के बाजार शोध दल में पाया कि 6000 परिवारों में किये गये सर्वेक्षण में से 355 परिवार अतिरिक्त मसालेदार ब्रान्ड खरीदेंगें। दो साल पहले किये गये अधिक व्यापक अध्ययन से पता चला है कि कब 5 प्रतिशत परिवार ब्राड खरीदेंगे। 2 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, क्या कम्पनी को निष्कर्ष निकालना चाहिए कि कोई एक अतिरिक्त मसालेदार की रूचि में बढोतरी हुई है ?
2. मुम्बई विश्वविद्यालय के 1000 छात्रों का नमूना लिया गया और उनका औसत वजन 112 Ibs, 20 Ibs के मानक विचलन के साथ पाया गया। क्या समग्र में छात्रों का औसत वजन 120 पाउन्ड हो सकता है।
3. विद्युत प्रकाश बल्बों का निर्माण करने वाली कम्पनी का दावा है कि उनके बल्बों का औसत जीवन 1600 घंटे हैं। 100 के इन बल्बों के यादृच्छिक नमूने का औसत जीवन और मानक विचलन क्रमशः 1570 घन्टे और 120 घन्टे था। क्या हमें कम्पनी के दावे को स्वीकार करना चाहिए ?

9.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

हलः $n = 6000$, $p = 335/6000 = 0.05583$

$H_o: P = 0.05 \quad H_1: P > 0.05 \quad \alpha = 0.02$

$\beta = 0.4800$ के लिए स्वीकृत क्षेत्र की ऊपरी सीमा 0.4800 है इसके लिए Z का मान Z तालिका 2.05 है।

$$p = p_{Ho} + z\sqrt{\frac{p_{Ho}\, q_{Ho}}{n}} = 0.05 + 2.05\sqrt{\frac{0.05 x 0.95}{6000}} = 0.05577$$

क्योंकि अवलोकित मान P (0.05577) is > than P (0.05) की तुलना है हम नाममात्र μ_0 को अस्वीकार करते हैं।

9.8 स्वपरख प्रश्न

1. माध्य के लिए परीक्षण की व्याख्या कीजिए ।
2. बडे नमूने से आप क्या समझते है ?

9.9 सन्दर्भ पुस्तकें

1. बुनियादी सांख्यिकी, गौण, गुप्ता औश्र दास गुप्ता – वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड–कलकत्ता ।
2. व्यावसायिक सांख्यिकी के बुनियादी सिद्धान्त सांचेथी औश्र कपूर ।
3. प्रबन्ध में मात्रात्मक विधियॉ श्रीवास्तव, शेनॉय और गुप्ता ।
4. व्यावसायिक सांख्यिकी – गुप्ता और गुप्ता ।

इकाई 10 चरों का साथर्कता परीक्षण (छोटे प्रतिदर्श) (Significance Test in Variables (Small Samples))

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- छोटे नमूनों के लिए महत्व परीक्षण को प्रयोग कर सकें।
- महत्वपूर्ण परीक्षणों के द्वारा छोटे नमूनों के बीच दिए गए आंकडों का विश्लेषण कर सकें।
- t परीक्षण एवं काई वर्ग परीक्षण का वर्णन कर सकें।

10.1 प्रस्तावना

यदि नमूना आकार 30 से कम है या $n < 30$, तो उन नमूनों को छोटा नमूना समझा जा सकता है। यथाविधि, छोटे नमूनों के तरीके और छोटे नमूनों के सिद्धान्त बडे नमूनों पर लागू होते हैं, लेकिन बडे नमूनों के तरीके और बडे नमूनों के सिद्धान्त छोटे नमूनों पर लागू नहीं होते हैं। छोटे नमूनों का उपयोग एक अनुमानित अवधारणा को जॉचने के लिए किया जाता है, जो प्रेक्षित मानों ज्ञात करने के लिए होता है, जो अग्रिम में दिए गए कुछ मानों के उतार चढाव नमूनाकरण के कारण उत्पन्न होता है। उदाहरण के लिए 12 के नमूने में यदि सहसम्बन्ध गुणांक $+0.5$ है, हम परीक्षण कर सकते हैं कि क्या सहसम्बन्ध का मान मूल समग्र में महत्वपूर्ण है।

छोटे नमूनों में, जांचकर्ताओं का अनुमान नमूनों से नमूनों तक व्यापक रूप से भिन्न होगा। छोटे नमूने परणिाम से निकला हुआ अनुमान, बडे नमूने परिणाम से कम सटीक होता है।

10.2 स्टूडेंट का t – वितरण

छोटे नमूनों के सिद्धान्त में सबसे बडा योगदान सर गोस्सेट और आर0ए0 फिशर द्वारा किया गया था। गोस्सेट ने अपनी खोज 1905 में स्टूडेन्टेस उपनाम के

तहत प्रकाशित की और इसे सामान्यतया t परीक्षण या स्टूडेन्ट्स का t वितरण या स्टूडेन्टस वितरण कहा जाता है।
जब नमूना आकार 30 या 30 से कम है और समग्र का मानक विचलन अज्ञात है, हम t वितरण का प्रयोग कर सकते हैं।

$t = (\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}) \times \sqrt{n}$ सूत्र है।

जहॉ $\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

सामान्य समग्र वितरण की अवधारणा के अर्न्तगत t वितरण को गणितीय रूप में सिद्ध किया गया है या ,

$f(t) = c\ (1+\frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}$

जहॉ $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$

$c =$ एक स्थिरता को समानता के बराबर व्क के अर्न्तगत क्षेत्र बनाने की आवश्यकता हेाती है।

$v = n-1$, स्वतन्त्रता के दर्जे की संख्या उदारहण – निम्नलिखित परिणाम विस्किट के 10 डिब्बों के नमूनों मे से प्राप्त किये गये :–

निहित वस्तु का माध्य वजन = 490 ग्राम

बजन का मानक विचलन = 9 ग्राम

क्या नमूना आबादी में से आ सकता है जिसका माध्य 500 ग्राम है।

परिकल्पना लें कि $\mu = 500$ ग्राम

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$\overline{X} = 490 : \mu = 500\ ;\ \sigma = 9\ ; n = 10$$

$$t = \frac{490-500}{9}\sqrt{10}$$

df =10 – 1 = 9

$$= \frac{10}{9}\sqrt{10}$$

$$= \frac{10}{9} \times 3.16 = \frac{31.6}{9} = 3.51$$

df = 9, $t_{0.01} = 3.25$

$3.51 > 3.25$, हमारी परिकल्पना अस्वीकार्य है।

उदाहरण – एक आपरेटर दाबा करता है कि वह एक घंटे में 40 लेख तैयार करता है। 10 यादृच्छिक घंटों का नमूना दिखाता है कि 43, 45, 38, 37, 41, 42, 44, 39, 43 और 38 लेख तैयार होते है। क्या आपरेटर का दावा 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर

उचित है। आपरेटर के घंटे में तैयार लेख का वितरण सामान्य है और 9 degree of freedom के लिए 5 प्रतिशत महत्वपूर्ण स्तर पर एक पुच्छीय परीक्षण का मान 1.833 लें।

हल :– शून्य परिकल्पनाः आपरेटर का औसत निर्माण 40 है। शून्य परिकल्पना के विरूद्ध वैकल्पिक परिकल्पना है औसत निर्माण 40 से कम है।

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(43+45+38+37+41+42+44+39+43+38)=41$$

$$\delta^2=\frac{1}{9}(43-41)^2+(45-41)^2+(38-41)^2+(37-41)^2+(41-41)^2+$$

$$(42-41)^2+(44-41)^2+(39-41)^2+(43-41)^2+(38-41)^2$$

$$=\frac{1}{9}\times 72=8$$

$$\delta=\sqrt{8}=2.8284$$

$$t=\frac{\sqrt{X}-\mu}{\delta}\sqrt{n}=\frac{41-40}{2.8284}\times\sqrt{10}$$

$= 1.118 < 1.833$

इसलिए अन्तर महत्वपूर्ण नहीं हैं इसलिए यह संयोग होने के कारण उत्पन्न हो सका। अवधारण को अस्वीकार्य नहीं किया जा सकता है। आपरेटर की मांग तर्क संगत है।

10.3 t परीक्षण

एक परिकल्पना परीक्षण आंकडों के नमूने वितरण पर आधारित होता है। और इसलिए एक महत्वपूर्ण खेत्र के परिभाषित करने के लिए नमूना वितरण का ज्ञात होना आवश्यक है।

सामान्य वितरण $N(\mu,\sigma^2)$ से यादृच्छिक नमूना आकार n के लिए, नमूना माध्य $\bar{x}$ माध्य μ मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ के साथ सामान्यता वितरित है।

इसलिए $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ N(0,1)$ हैं और $t=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट $t(n-1)$ के साथ चर है।

$N(\mu,\sigma^2)$ से दो क्रमशः लिये गए यादृच्छिक नमूनों n_1 और n_2 आकार के और $N(\mu,\sigma^2)$ समग्रों $\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$

स्टूडेन्ट t चर $(n_1+n_2-2)d.f$ के साथ है।

जब समग्र मानक विचलन अज्ञात है, उपरोक्त t चर को परिकल्पना परीक्षण के लिए प्रयोग करते हैं यद्यपि बडे नमूनों के लिए, t लगभग सामान्य है।

<u>मध्य के लिए छोटे नमूने</u>

मान लें कि $N(\mu,\sigma^2)$ समग्र में, μ और σ दोनों अज्ञात हैं

हम परीक्षण करना चाहते हैं कि क्या माध्य दिया हुआ मान μ_0 है।

शून्य परिकल्पना $\mu_0 = \mu = \mu_0$ (समग्र माध्य μ_0 है)

आकार n के यादृच्छिक नमूने के लिए , μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $t = \frac{x-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$

एक स्टूडेन्ट का t चर (n-1)d.f के साथ है।

निम्न में से कोई एक वैकल्पिक परिकल्पना हो सकती है।

1. $\mu_1 : \mu \neq \mu_0$ यहाँ t परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $\mu_1 : \mu > \mu_0$ यहाँ परीक्षण महत्वपूर्ण के साथ ऊपरी एक पुच्छीय है।
3. $\mu_1 : \mu > \mu_0$ यहाँ परीक्षण महत्वपूर्ण के साथ निचला पुच्छीय है।

द्विपुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-t{\propto}/_2$ और $t{\propto}/_2$ है।

ऊपरी पुच्छीय परीक्षण में, महत्वपूर्ण मान $t_{\propto}$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण में, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto}$ है।

विभिन्न $\propto$ के महत्वपूर्ण मानों के लिए और विभिन्न degree of freedom (स्वतन्त्रता के विभिन्न स्तरों के लिए) t तालिका मान पुस्तक के अंत में प्रदान की गई t वितरण से प्राप्त की जाती है।

ध्यान दें : यह परीक्षण इस धारणा पर आधारित है कि समग्र सामान्य है।

माध्यों की समानता के लिए छोटा नमूना परीक्षण

मान लें कि दो समग्र $N(\mu_1,\sigma^2)$ और $N(\mu_2,\sigma^2)$ अज्ञात μ_1 और μ_2 और σ^2 के साथ है।

हम परीक्षण करना चाहते हैं कि μ_1 और μ_2 समान है।

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ (समग्र माध्य समान है।)

इन समग्रों में से, यादृच्छिक नमूना आकार n_1 और n_2 के लिए , आंकडा परीक्षण

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

$(n_1 + n_2 - 2)d.f$ के साथ स्टूडेन्ट t परीक्षण है।

वैकल्पिक परिकलपना निम्न में से कोई एक हो सकती है।

1. $\mu_1 : \mu \neq \mu_0$ यहाँ t परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहाँ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ ऊपरी पुच्छीय है।

3. $\mu_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ निचला पुच्छीय है।

छो पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण क्षेत्र $-t\propto/_2$ और $t\propto/_2$ है।

ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $t_\propto$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto$ है।

विभिन्न $\propto$ के मानों के लिए और विभिन्न स्वतंत्रता के स्तरों के लिए t वितरण का मान तालिका से प्राप्त किया जाता है।

ध्यान दें: 1. यह परीक्षण इन अवधारणों पर आधारित है

(अ) समग्र सामान्य है।

(ब) समग्र मानक विचलन समान है (अज्ञात)

ध्यान दें : 2 युगल अवलोकन की स्थिति में n यादृच्छिक युग्मों के साथ आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{Sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट t चर (n-1)d.f के साथ है।

यहॉ, d युग्मों के अवलोकनों के बीच अन्तर हैं माध्यों की समानता के लिए परीक्षण जब प्रेक्षण युग्मित है (पेयर टी परीक्षण, अश्रित नमूने) दो चरों के सामान्य समग्र में, यदि समग्र में दो चर इकाई विशेषताऐं x और y जो कि $N(\mu_2, \sigma^2)$, और $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ क्रमशः है। उदारहण के लिए,

1. उच्च रक्तचाप, के लिए योग उपचार से गुजरने वाले मरीजों मे रक्तचाप के दो माप होत हैं – पहला–उपचार से पहले (x) और दूसरा उपचार के बाद किसी परीक्षा में।
2. कोंचिंग कक्षाओं में किसी परीक्षा में अच्छे अंक प्राप्त करने के लिए भाग लेने वाले छात्रों का कोंचिग से पहले (x) कोंचिग के बाद (y)

इस तरह की परिस्थितियों में, मान लें कि हम परीक्षण करना चाहते हैं कि क्या माध्य μ_1 और μ_2 एकसमान है। शून्य परिकल्पना

$H_0 = \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य एक समान है)

n यादृच्छिक युग्म प्रेक्षणों के लिए

$(x_1 y_1), (x_2 y_2) \dots \dots \dots . . (x_n y_n)$, यदि $d_1 = x_i - y_i$ होगा। यदि $\bar{d}$ नमूना माध्य आर Sd उन विचलनों का नमूना माध्य विचलन है। तो, H_0 के अर्न्तगत आंकडा t परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{Sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट t चर (n-1)d.f के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना निम्न में से कोई एक हो सकती है।

1. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ यहॉं परीक्षण दो पुच्छीय है।
2. $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ ऊपरी पुच्छीय है।

3. $H_1: \mu_1 < \mu_2$ यहॉं परीक्षण एक पुच्छीय महत्वपूर्ण क्षेत्र के साथ निचला पुच्छीय है।

द्विपुच्छीय परीक्षण की स्थिति में , यदि $\propto$ महत्व का स्तर है, महत्वपूर्ण मान $-t\propto/_2$ और $t\propto/_2$ है। ऊपरी पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में महत्वपूर्ण $t_\propto$ है।

निचले पुच्छीय परीक्षण की स्थिति में, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto$ है। विभिन्न $\propto$ के महत्वपूर्ण और विभिन्न स्वतंत्रता के स्तरों के लिए t वितरण का मान तालिका से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण :– आठ यादृच्छिक दिनों पर, कालेज तक पहुॅचने के लिए शहर की बस से लिया गया समय नीचे दिखाया गया है। इस परिकल्पना का पीरक्षण करें कि बस से कालेज पहुॅचने के लिए औसत समय 30 मिनट है।

दिन	:	1	2	3	4	5	6	7	8
समय (मिनट)	:	27	34	30	35	31	30	29	32

हल :– $\mu_0 = 30$ मिनट और n=8 नमूना छोटा और $\propto$ अज्ञात हैं सामान्य वितरण मानते हुए हम स्टूडेन्ट t परीक्षण का प्रयोग करते हैं वैकल्पिक परकिल्पना $\mu_0: \mu = 30$ है (माध्य समय 30 मिनट है)

H_0 के अर्न्तगत ज परीक्षण $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t परीक्षण (चर) (n-1) के साथ हैं = 8-1=7d.f यहॉं परीक्षण द्विपुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर 7d.f के लिए महत्वपूर्ण मान $-t\propto/_2 = -2.37$ और $t\propto/_2 = 2.37$ है।

$Time(x)$	x^2
27	729
34	1156
30	900
35	1225
31	961
30	900
29	841
32	1024
248	7736

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{248}{8} = 31$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left[\frac{\sum x}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{7736 -}{8}\left[\frac{248}{8}\right]^2} = 2.4495$$

$$t_{0bs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s \,/\sqrt{n-1}} = \frac{31-30}{2.4495/\sqrt{8-1}} = 1.08$$

क्योंकि $t_{obs} = 1.08$ अंतराल $(-2.37, 2.37)$में है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : बस से कालेज पहुॅचने का माध्य समय 30 मिनट है।

उदाहरण : एक फैक्ट्री का प्रबंधन इस बात का तर्क करता है कि कारखाने में अैसत ध्वनि की तीव्रता 120 डेसिबल से कम है। 23 यादृच्छिक मापों में ध्वनि की तीव्रता 117 डेसिबल और मानक विचलन 8 डेसीबल था। प्रबंधन का तर्क स्वीकार हे या नहीं, इसके लिए 1% स्तर के महत्व पर परीक्षण करें।

हल : यहॉं $\mu_0 = 120$ डेसीबल और $n = 23$ $\bar{x} = 117$डेसीबल ,

$s = 8$ डेसीबल और $\propto = 1\%$ 0.01

चूॅकि नमूना छोटा है और σ अज्ञात है, ध्वनि की तीव्रता को सामान्य वितरण मानते हुए हम स्टूडेन्ट के t परीक्षण का उपयोग करते है। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu = 120$ है (औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल से कम हैं)

μ_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

एक स्टूडेन्ट t के चर (n-1)=23-1 =22 d.f है।

वैकल्पिक परिकल्पना

$\mu_1 : \mu < 120$ है (औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल से कम नहीं हैं)

परीक्षण निचला पुच्छीय है।

यहॉ परीक्षण एक पुच्छीय है।

22 d.f के लिए, 1% महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto} = -2.51$ है।

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{117-120}{\frac{8}{\sqrt{23-1}}} = -1.76$$

चूॅकि -1.76 –2.51 से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष : औसत ध्वनि तीव्रता 120 डेसीबल है और इससे कम नहीं हैं

उदाहरण : 5 मादा बिल्लियों और 8 नर बिल्लियों के दिलों का वजन ग्राम में नीचे दिया गया है:

मादा बिल्ली	:	7.5	7.3	7.1	9.0	7.6			
नर बिल्ली	:	12.7	15.6	9.1	12.8	8.3	11.2	9.4	8.2

1: महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि नर बिल्लियों का वनज मादा बिल्लियों से अधिक है।

हल :– यहॉं $n_1 = 5$, $n_2 = 8$, $\propto = 0.01$

शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य वनज एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट t का चर $n_1 + n_2 - 2 = (5 + 8 - 2) = 11 d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ है।

(नर बिल्ली के दिल का वजन मादा बिल्ली के वजन से ज्यादा है)

1% महत्व के स्तर पर, 11d.f. के लिए , महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2} = -2.72$ है।

मादा बिल्ली		नर बिल्ली	
x_1	x_1^2	x_2	x_2^2
7.5	56.25	12.7	161.29
7.3	53.29	15.6	243.36
7.1	50.41	9.1	82.81
9.0	81.00	12.8	163.84
7.6	57.76	8.3	68.89
		11.2	125.44
		9.4	88.36
		8.2	67.24
38.5	298.71	87.3	1001.23

मादा बिल्लीयॉ :

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1 x}{n_1} = \frac{38.5}{5} = 7.7$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_1 x^2}{n_1} - \left[\frac{\sum_1 x}{n_1}\right]^2 = \frac{298.71}{5} - \left[\frac{38.5}{5}\right]^2 = 0.452$$

नर बिल्लीयॉ

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_2 x}{n_2} = \frac{87.3}{8} = 10.91$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_2 x^2}{n_2} - \left[\frac{\sum_2 x}{n_2}\right]^2 = \frac{1001.23}{8} - \left[\frac{87.3}{8}\right]^2 = 6.12$$

$$t_{0bs}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\right]}}=\frac{7.7-10.1}{\sqrt{\frac{5\times0.452+8\times6.12}{5+8-2}\left[\frac{5+8}{5\times8}\right]}}=-2.61$$

चूँकि $t_{obs}=-2.61\,,-2.72$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– नर बिल्लियों के दिलों का वजन, मादा बिल्लियों के वजन के एक समान है। साक्ष्य यह निष्कर्ष निकालने के लिए र्प्याप्त है कि पुरूष बिल्लियों के दिलों का वजन महिला (मादा) बिल्लीयों की तुलना में अधिक है।

उदारहण : एसएसएलसी की कक्षा में बेतरतीब ढंग से चुने गए लडके व लडकियों की ऊँचाईयों के बारे में निम्नलिखित आंकडे बताते हैं कि एसएसएलसी के लडके औसतन एसएसएलसी लडकियों से लम्बे हैं।

	लडके	लडकियॉं
नमूना आकार	9	12
औसत ऊँचाई (सेमी)	171	169
मानक विचलन (सेमी)	3	2

हल :– यहॉं $n_1=9,n_2=12\,,\bar{x}_1=171,\bar{x}_2=169,s_1=3\,,s_2=2$

शून्य परिकल्पना $H_0=\mu_1=\mu_2$ है (लडके एवं लडकियों की औसत ऊँचाई एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट का t चर

$n_1+n_2-2=(9+12-2)=19d.f$

के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1:\mu_1>\mu_2$ (औसतन लडके लडकियों की तुलना में लम्बे हैं)

परीक्षण ऊपरी पुच्छीय है।

19 d.f. के लिए 5% महत्व के स्तर पर महत्वपूर्ण मान $t_\propto=1.73$ है।

$$t_{0bs}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\right]}}\quad\frac{171-169}{\sqrt{\frac{9\times3^2+12\times2^2}{9+12-2}\left[\frac{9+12}{9\times12}\right]}}=1.74$$

चूँकि

$t_{obs} = -1.74\,, 1.73$ से बडा है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– लडके, औसतन, लडकियें की तुलना में लम्बे हैं।

उदाहरण :– एक मवेशी चारा के निर्माता ढावा करते हैं कि गायों के ज्यादा चारा देने से अधिक दूध मिलता है। आने ढावे को सही साबित करने के लिए निम्न गाय प्रयोगों का आयोजन किया गया।

(अ) 6 गायों को सामान्य चारा खिलाया गया और 8 गायों को निर्माता का चारा खिलाया गया था। 6 गायों की माध्य उपज 9.7 लीटर और मानक विचलन 1.3 लीटर थी। 8 गायों की माध्य उपज 10.5 लीटर औश्र मानक विचलन 2.7 लीटर थी।

(ब) 8 गायों को निर्माता का चारा खिलाया गया था। दूध का उत्पादन लीटर मे तब हेाता है जब वे हमेशा के तरह चारा लेते थे और नीचे दिये हुए निर्माता के बारे मं अन्तर चारा भी लेते थे।

सामान्य चारा	:	6.3	7.4	9.7	12.4	11.1	10.4	9.6	7.1
निर्माता का चारा	:	7.4	7.2	14.6	13.6	10.5	11.6	10.4	8.7

उपरोक्त सभी मामलों, सत्यापित करें कि क्या निर्माता का ढावा सही है।

हल :– मामले (अ) में, गायों के दो स्वतन्त्र नमूने हैं जिसमें गायों को सामान्य चारा और निर्माता का चारा खिलाया जाता है। इसलिए, स्वतन्त्र नमूने के लिए t परीक्षण का प्रयोग किया जाता है। मामले (ब) में, गायों के एकसमान समुच्चय के अर्न्तगत सामान्य चारा निर्माता का चारा को प्रेक्षित किया जाता है। यहॉ आंकडे व्यक्तिगत मामलों में उपज में परिवर्तन दर्शाते हैं। इसलिए t युग्यित परीक्षण प्रयोग किया गया है।

यहॉ $n_1 = 6, n_2 = 8, \bar{x}_1 = 9.7\,, \bar{x}_2 = 10.5\,, s_1 = 1.3,\ \ s_2 = 2.7$

शून्य परिकल्पना $H_0{:}\,\mu_1{:}\,\mu_2$ हैं (माध्य एकसमान H_0 के अर्न्तगत आंकडा परीक्षण)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}}$$

स्टूडेन्ट का t चर $n_1 + n_2 - 2 = (6 + 8 - 2) = 12 d.f$ हैं (निर्माण का चारा ज्यादा अच्छा है)

परीक्षण निचला पुच्छीय है।

12 d.f के लिए 5ः महत्व के स्तर पर , महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto} = 1.78$ है।

$$t_{0bs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]}} \quad \frac{9.7 - 10.5}{\sqrt{\dfrac{6\times(13.3)^2 + 8\times(2.7)^2}{6+8-2}\left[\dfrac{6+8}{6\times 8}\right]}} = 0.62$$

चूँकि $t_{obs} = -0.62\,, -1.78$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– माध्य एक समान है। (कोई साक्ष्य नहीं है कि निर्माता का चारा बेहतर उपज है)

(ब) यहॉ, n=8, मान लें d=x-y है जहॉ x सामान्य चारें मे उपज है। और y निर्माता के चारें में उपज है।

H_0 के अर्न्तगत $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का चर

(n-1) = (8-1)=7 d.f के साथ है।

(अ) के मामले मे ंशून्य एवं वैकल्पिक परिकल्पनाऐं एकसमान हैं, परीक्षण निचला पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर, 7d.f के लिए, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto} = -1.90$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
6.3	7.4	-1.1	1.21
7.4	7.2	0.2	0.04
9.7	14.6	-4.9	24.01
12.4	13.6	-1.2	1.44
11.1	10.5	0.6	0.36
10.4	11.6	-1.2	1.44
9.6	10.4	-0.8	0.64
7.1	8.7	-1.6	2.56
-	-	-10.0	31.70

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{8} = \frac{-100}{8} = -1.25$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{31.70}{8} - \left[\frac{-10}{8}\right]^2} = 1.55$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = \frac{-1.25}{1.55/\sqrt{8-1}} = 2.13$$

चूॅकि $t_{obs} = -2.13\,, -1.90$ से कम नहीं है, H_0 अस्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– निर्माता के दावे के लिए समर्थन दिया गया है कि गायों को अपने चारे से अधिक देने पर अधिक दूध मिलता है।

उदाहरण :– CET के लिए एक कोचिंग क्लास है। 10 यादृच्छिक रूप से चयनित छात्रों को कोचिंग से पहले एक परीक्षा दिलाई गई थी और उनहें कोचिंग के बाद भी एक परीक्षा दिलाई गयी थी। परीक्षण स्कोर निम्नानुसार है।

कोंचिग से	:	35	39	47	53	27	19	36	46	08	17

पहले											
कोचिंग के बाद	:	41	37	45	56	31	21	47	41	05	12

क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि कोचिंग प्रभावी है।

हलः– यहॉ, कोचिंग से पहले एवं कोचिंग के बाद के अंकों का युग्म बनाया जा सकता है और इसलिए युग्मित t परीक्षण प्रयोग किया जायेगा।

मान लें x कोचिंग से पहले अंकों को प्रदर्शित करते हैं और y कोचिंग के बाद अंकों को प्रदर्शित करते है। शून्य परिकल्पना $\mu_0 : \mu_1 = \mu_2$ है।

(माध्य एक समान है)

H_0 के अर्न्तगत t आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t परीक्षण

$(n-1) = 10 - 1 = 9\, d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ है। (माध्य बढा हुआ है कोचिंग प्रभावशाली है।)

परीक्षण निचला पुच्छीय है।

9 d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर, महत्वपूर्ण मान $-t_\propto = -1.83$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
35	41	-6	36
39	37	2	4
47	45	2	4
53	56	-3	9
27	31	-4	16
19	21	-2	4
36	47	-11	121
46	4	5	25
08	05	3	9
17	12	5	25
-	-	-09	253

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-9}{10} = -0.9$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{253}{10} - \left[\frac{-9}{10}\right]^2} = 4.95$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = 4.95 \frac{-0.9}{1.55/\sqrt{10-1}} = 0.55$$

चूँकि $t_{obs} = -0.55, -1.83$ से कम नहीं है, H_0 स्वीकार्य है।

निष्कर्ष :– कोचिंग प्रभावशाली नहीं है।

उदाहरण :– 7 पतियों और उनकी पत्नियों के वनज किलोग्राम में निम्नवत हैं।

जोडे	:	1	2	3	4	5	6	7
पति	:	62	56	59	73	49	54	67
पत्नी	:	55	61	62	68	52	51	62

परिकल्पना का परीक्षण करें कि पतियों का माध्य वजन एवं पत्नीयों का माध्य वजन एक समाज है।

हल :– यहॉ हमारें पास n=7 प्रक्षेणों का युग्म और इसलिए, हम t युग्म परीक्षण का प्रयोग करते हैं मान लें x पति का वजन एव y पत्नी का वजन है। मान लें $d = x - y$ विचलन है।

शून्य परिकल्पना $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ है (माध्य वजन एक समान है।)

H_0 के अर्न्तगत , ज आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{d}}{\frac{sd}{\sqrt{n-1}}}$ स्टूडेन्ट का t चर $(n-1) = 7 - 1 = 6\ d.f$ के साथ है।

वैकल्पिक परिकल्पना $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ है।

(माध्य एक समान है)

परीक्षण दो पुच्छीय है।

5% महत्व के स्तर पर , 6d.f के लिए, महत्वपूर्ण मान $-t_{\propto/2} = -2.45$ और $t_{\propto/2} = 2.45$ है।

x	y	$d = x - y$	d^2
62	55	7	49
56	61	-5	25
59	62	-3	9
73	68	5	25
49	52	-3	9
54	51	3	9
67	62	5	25
-	-	9	151

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{9}{17} = 1.29$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left[\frac{\sum d}{n}\right]^2} = \sqrt{\frac{151}{7} - \left[\frac{9}{7}\right]^2} = 4.46$$

$$t_{0bs} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n-1}} = \frac{+1.29}{4.46/\sqrt{7-1}} = 0.71$$

चूँकि 0.71 अंतराल (–2.45 , 2.45) के बीच हे, H_0 स्वीकार्य है।
निष्कर्ष :– पतियों का माध्य वजन एवं पत्नीयों का माध्य वजन एक समान है।

10.4 काई वर्ग परीक्षण (x^2)

अनुमानित आंकडों के वितरण को सत्यापित करने के लिए काई वर्ग का प्रयोग सांख्यिकी में गुणों के तर्क संगत के लिए किया जाता है इसलिए, वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियों के विचलन का अध्ययन करने के लिए यह एक उपाय है।
नमूने के अध्ययन मे विशेष रूप से आंकडों में इसका और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच दो गुना संयोग और नमूने में उतार–चढाव के कारण अंतर को अनदेखा किया जा सकता है। यदि वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच कोई अंतर नहीं है x^2 शून्य होता है। इस प्रकार, काई वर्ग परीक्षण सिद्धान्त और अवलोकन के बीच विसंगति का वर्णन करती है।

x^2 परीक्षण की विशेषताऐं

1. परीक्षण आवृत्तियों की घटनाओं पर आधारित है, जबकि सैद्धान्तिक वितरण में, परीक्षण माध्य और मानक विचलन पर आधारित है।
2. निष्कर्ष निकालने के लिए, यह परीक्षण विशेष रूप से परिकल्पना परीक्षण के लिए प्रयोग किया जाता है लेकिन अनुमान के लिए उपयोगी नहीं है।
3. परीक्षण अवलोकन की पूर्ण स्थित एवं अपेक्षित
4. आवृत्तियों के बीच प्रयोग किया जा सकता है।
5. स्वतन्त्रता की श्रेण संख्या में हर वृद्धि के लिए, एक नया x^2 वितरण का गठन होता है।
6. यह एक सामान्य प्रयोजन परीक्षण है और जैसा कि अनुसंधान मे बेहद उपयोगी है।

मान्यताऐं :–

1. सभी प्रेक्षण स्वतन्त्र होने चाहिए।
2. सभी घटनाऐं परस्पर अनन्य हेाने चाहिए ।
3. बडे अवलोकन (प्रेक्षण) होने चाहिए।
4. तुलना प्रयोजनों के लिए आंकडे मूल इकाईयों में होने चाहिए।

स्वतन्त्रता की श्रेणी :– जब हम x^2 की गणना मान की तुलना तालिका मान के साथ करते हैं। स्वतन्त्रता की श्रेणी होती है। स्वतन्त्रता की श्रेणी का अर्थ है वर्गों की संख्या, जिनके मानों को बिना प्रतिबंध के बिना बंदिशों में सौंपा जा सकता है। उदारहण के लिए हम कोई भी चार अंक चुनते हैं, जिनका योग 50 है। यहॉ हमारे पास कोई भी तीन अंक के चयन करने का विकल्प है 10 , 15 , 20 और चौथ अंक $[50-(10+15+20)]$। इस प्रकार, हमारी आजादी के श्रेणी की पसंद इस शर्त पर एक करके कम हो जाती है कि योग 50 हो। इसलिए स्वतन्त्रता पर लगा प्रतिबंध एक और स्वतन्त्रता की श्रेणी तीन है। जैसे ही प्रतिबंध बढता है स्वतन्त्रता की श्रेणी कम हो जाती है।

इस प्रकार $v=n-k$

v : (न्यू) स्वतन्त्रता की श्रेणी

k : स्वतन्त्र प्रतिबंधों की संख्या

n : आवृत्ति वर्गों की संख्या

2×2 आकास्मिक तालिका के लिए, स्वतन्त्रता की श्रेणी

$$v = (c-1)(r-1)$$
$$= (2-1)(2-1)$$
$$= 1 \text{ है।}$$

उपयोग :–

1. **गुणों के तर्क संगत का x^2 परीक्षण :–** परीक्षण के माध्यम से हम प्रेक्षित मानों और अपेक्षित मानों के बीच के विचलन का पता लगा सकते है। यहॉ हम प्राचलों से संबन्धित नहीं है। लेकिन वितरण के रूप में सम्बन्धित है। कार्ल पियर्सन ने सैद्धान्तिक मान (परिकलपना) और प्रेक्षित मान के बीच अन्तर का परीक्षण करने के लिए एक विधि विकसित की है। परीक्षण गणना मान का x^2 के तालिका मान के वांक्षित स्वतन्त्रता श्रेणी के साथ तुलना करने से किया जाता है। x^2 ग्रीक शब्द का प्रयोग तथ्य औश्र सिद्धान्त के बीच के अंतर के परिणाम का वर्णन करने के लिए किया जाता है।

x^2 को इस तरीके से परिभाषित किया जाता है।

$$\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(O-E)^2}{E}\right\}$$

O = प्रेक्षित आवृत्तियॉ

E = अपेक्षित अवृत्तियॉ

चरण :–

1. एक परिकल्पना महत्व के स्तर के साथ स्थापित की गई हैं ।
2. प्रेक्षित मान और अपेक्षित मान के बीच विचलनों की गणना (O-E) ।
3. गणित विचलनों का वर्ग $(O-E)^2$
4. $(O-E)^2$ को इसकी अपेक्षित आवृत्तियों से विभाजित करें।
5. चरण 4 से प्राप्त मानों का योग करें।
6. x^2 तालिका में से एक निश्चित महत्व के स्तर पर, सामान्यतया 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान ज्ञात करें।

यदि x^2 का परिकलित मान x^2 के तालिका मान से एक निश्चित महत्व के स्तर पर ज्यादा है, हम परिकल्पना को अस्वीकार्य करते हैं यदि x^2 का परिकलित मान शून्य है तब प्रेक्षित मान और अपेक्षित मान पूर्णतया मेल खाते हैं। यदि x^2 का परिकलित मान पूर्णतया मेल खाते हैं यदि x^2 का परिकलित मान तालिका मान से एक निश्चित महत्व के स्तर पर कम है, तो यह महत्वपूर्ण नहीं है। इसका अर्थ है कि प्रेक्षित और

अपेक्षित आवृत्तियों के बीच नमूनाकरण में उतार चढाव के कारण विसंगतियॉ हो सकती है।

उदाहरण :– 4 सिक्के 160 बार उछाले गये थे और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये गये थे।

चिट्टों की संख्या	:	0	1	2	3	4
प्रेक्षित आवृत्तियॉ	:	17	52	54	31	6

0, 1, 2, 3 या 4 सिक्कों के होने की अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करें और गुणों के तर्क संगत परिकल्पना क्या सिक्का निष्पक्ष है का परीक्षण देखें

हल :– अपेक्षित आवृत्ति $= N.n_{c_4}p^2q^{n-2} = 160.4_{c_2}(0.5)^2(0.5)^{4-2}$

x	**अपेक्षित आवृत्ति**
	$160^4cx\ (.5)^4 = E$
0	$160\ X^4\ C0\ (.5)^4 = 10$
1	$160\ X^4\ C1\ (.5)^4 = 40$
2	$160\ X^4\ C2\ (.5)^4 = 60$
3	$160\ X^4\ C3\ (.5)^4 = 40$
4	$160\ X^4\ C4\ (.5)^4 = 10$

जब x^2 प्रयोग करते हैं।

चिट्टों की संख्या	*O*	*E*	*O – E*	*(O – E)²*	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	17	10	7	49	4.900
1	52	40	12	144	3.600
2	54	60	– 6	36	0.600
3	31	40	– 9	81	2.025
4	6	10	– 4	16	1.600

$$\Sigma\frac{(O-E)^2}{E}=12.725$$

d.f. = 5 – 1 = 4; χ^2 0.05 = 9.488.

x^2 का परिकलित मतान 12.725 है जो तालिका मान 9.488 से अधिक है, गलत तर्क है।

2. **स्वतन्त्रता के परीक्षण के रूप में :–** x^2 परीक्षण का उपयोग यह पता लगाने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए कोंचिंग कक्षा और सफल उम्मीदवार विवाह और विफलता आदि, हम यह पता कर सकते हैं कि क्या वे सम्बन्धित है या स्वतन्त्र । हम एक अवधारणा लेते हैं कि गुण स्वतन्त्र हैं। यदि x^2 का परिकलित मान एक निश्चित महत्व के स्तर पर तालिका मान से कम है, तो अनुमान सही है अन्यथा विपरीत।

उदाहरण :– एक गॉव में 120 लोगों के नमूनों में से , इन्फलुएंजा को रोकने के लिए 76 लोगों को एक नई दवा दी गई थी और उनमें से 24 व्यक्ति इन्फलुएंजा द्वारा ग्रसित थे। जिन व्यक्तियों मे नई दवा का प्रबंध नहीं किया गया उनमें से 12 इन्फलूएंजा से प्रभावित नहीं थे।

(अ) वास्तविक एवं अपेक्षित आवृत्तियों को दर्शाते हुए 2×2 तालिका तैयार करें।

(ब) काई–वर्ग का प्रयोग करते हुए ज्ञात करें कि क्या नई दवा प्रभावी है या नही ।

(5% महत्व के स्तर पर एक स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए काई वर्ग 3.84 है)

हल :–

2×2 तालिका

	A	α	
B	24	32	56 (B)
β	52	12	64
	76	44	120
	(A)		N

मान लें इंफलुएंजा और नई दवा स्वतन्त्र हैं।

अपेक्षित आवृत्तियॉ

$\frac{76 \times 56}{120} = 35.5$	$\frac{56 \times 44}{120} = 20.5$	56
$\frac{76 \times 64}{120} = 40.5$	$\frac{64 \times 44}{120} = 23.5$	64
76	44	120

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
24	35.5	– 11.5	132.25	3.725
52	40.5	11.5	132.25	3.265
32	20.5	11.5	132.25	6.451
12	23.5	– 11.5	132.25	5.627

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 19.068$$

$d.f = (2-1)(2-1) = 1, d.f$ के लिए $x^2 = 3.84$

x^2 का परिकलित मान 19.068 है जो कि तालिका मान की तुलना मे बहुत ज्यादा है। इसलिए, परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि इन्फलूएंजा को नियंत्रित करने मे ंदवा निस्संदेह प्रभावी है।

उदाहरण :– 2000 परिवारों के एक निश्चित नमूने मे ं1400 परिवार चाय के उपभोक्ता है। 1800 हिन्दू परिवारों में से 1236 परिवार चाय का सेवन करते हैं। x^2 परीक्षण का

उपयोग करें और बताएं कि क्या हिंदू और हिदूं परिवारों के बीच चाय की खपत के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर है।

हल :– 2×2 आकस्मिता तालिका में जानकारी के सारणीकरण पर, हम प्राप्त करते हैं :–

	हिन्दू	गैर हिन्दू	योग
उपभोग चाय	1236	164	1400
गैर उपभोग चाय	564	36	600
योग	1800	200	2000

परिकल्पना गुण स्वतन्त्र है।

अपेक्षित आवृत्तियॉ

$\frac{1800 \times 1400}{2000} = 1260$

$\frac{1800 \times 600}{2000} = 540$

$\frac{200 \times 1400}{2000} = 140$

$\frac{200 \times 600}{2000} = 60$

x^2 की गणना

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
1236	1260	– 24	576	0.457
564	540	+ 24	576	1.068
164	140	+ 24	576	4.114
36	60	– 24	576	9.600

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 15.239$$

$d.f\ 1$ है , $1\ d.f$ के लिए x^2 का तालिका मान = 3.841

x^2 का परिकलित मान 15.239 तालिका मान (3.841) से बहुत अधिक है। इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसलिए चाय के उपभोग के संबंध मे ंदो समुदायों में काफी अंतर है।

उदाहरण :– निम्नलिखित परिणामों के साथ एक पासा 120 उछाला जाता है।

ऊपर की संख्या :	1	2	3	4	5	6	Total
आवृत्ति :	30	25	18	10	22	15	120

इस परिकल्पना का परीक्षण करें कि पासा निष्पक्ष है।

हल :– परिकल्पना है कि पासा निष्पक्ष है।

अपेक्षित आवृत्ति $\left[120 \times \frac{1}{6}\right] = 20$ है।

x^2 परीक्षण का प्रयोग करते हुए

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
30	20	10	100	5.00
25	20	5	25	1.25
18	20	– 2	4	0.20
10	20	– 10	100	5.00
22	20	2	4	0.20
15	20	– 5	25	1.25

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 12.90$$

d.f. = n – 1 = 6 – 1 = 5

5% महत्व के स्तर पर 5d.f के लिए तालिका मान 11.07 है जो कि x^2 के परिकालित मान 12.90 से कम है परिकल्पना जो कि पासा निष्पक्ष है, 5% महत्व के स्तर पर अस्वीकार्य है।

उदाहरण 5– टाइफाइड के खिलाफ इसकी प्रभावशीलता का परीक्षण करने के लिए एक निश्चित इलाके में कुल 720 में से 456 पुरूषों को एक निश्चित दवा दी गई थी। टाइफाइड की घटनाओं को नीचे दिखाया गया है।

रोग के खिलाफ दवा की प्रभावशीलता का पता लगाएं।

(1d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.84 है)

हल :– 2×2 आकस्मिकता तालिका

	संक्रमण	गैर संक्रमण	योग
दवा	144	312	456
बिना दवा के	192	72	264
योग	336	384	720

परिकल्पना है कि दवा स्वतन्त्र है। अपेक्षित आवृत्तियॉ

$$\frac{336 \times 456}{720} = 212.80$$
$$\frac{336 \times 264}{720} = 123.2$$
$$\frac{384 \times 456}{720} = 243.2$$
$$\frac{384 \times 264}{720} = 140.8$$ है।

O	E	O – E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$

144	212.8	– 68.8	4733.44	22.24
192	123.2	+ 68.8	4733.44	38.42
312	243.2	+ 68.8	4733.44	19.46
72	140.8	– 68.8	4733.44	33.62

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 113.74$$

x^2 का परिकलित मान = 113.74 जो कि 1 d.f में 5% महत्व के स्तर पर तालिका मान से बहुत ज्यादा है। इसलिए यह अत्यन्त महत्वपूर्ण है। शून्य परिकल्पना गलत है। इसलिए टायफाइड को नियंत्रित करने मे दवा निश्चित रूप से प्रभावी है।

उदारहण :– एक शहर में 8000 स्नातकों मे से 800 महिलाएं हैं 1600 स्नातक कर्मचारियों मे ंसे 120 महिलाएं हैं x^2 का प्रयोग करके ज्ञात करें कि लिंग के आधारपर नियुक्ति में कोई विभेद है। 1 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 5% स्तर पर x^2 का मान 3.84 है।

हल :– प्रश्न में दी गई जानकारी को 2×2 तालिका में सारणीबद्ध किया जा सकता है।

	कार्यरत	बेरोजगार	योग
पुरूष	1480	5720	7200
महिला	120	680	800
योग	1600	6400	8000

हम इस अवधारणा को मानते हैं कि लिंग के आधार पर नियुक्ति में कोई अंतर नहीं है।

$$\frac{7200 \times 1600}{8000} = 1440$$
$$\frac{7200 \times 6400}{8000} = 5760$$
$$\frac{1600 \times 800}{8000} = 160$$
$$\frac{6400 \times 800}{8000} = 640$$ है।

O	**E**	**O – E**	**$(O – E)^2$**	**$\frac{(O-E)^2}{E}$**
1480	1440	40	1600	1.111
120	160	– 40	1600	10.000
5720	5760	– 40	1600	0.278
680	640	40	1600	2.500

$$\sum \frac{(O-E)^2}{E} = 13.889$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 13.889$$

d.f. = (r – 1) (c – 1)

= 1 × 1 = 1

1d.f के लिए $x_{0.05}^2 = 3.84$ है जो कि तालिका मान 3.84 से बहुत अधिक है इसलिए , परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि लिंग के आधार पर नियुक्तियॉं हुई है।

10.5 सारांश

महत्व का स्तर आमतौर पर यूनानी प्रतीक (लोअरकेस अल्फा) द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। महत्व के लोकप्रिय 10%(0.1), 5%(0.05), 1%(0.01), 0.5%(0.005), 0.1%(0.001) है। यदि महत्व का एक परीक्षण महत्व स्तर से कम पी मान देता है, तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाता है। ऐसे परिणामों को अनौपचारिक रूप से सांख्यिकी में महत्वपूर्ण कहा जाता हैं उदाहरण के लिए, यदि कोई तर्क करता है कि ''एक हजार में केवल एक ही मौका संयोग से होता है।,'' सांख्यिकीय महत्व का 0.001 एक स्तर निहित है। कम महत्व के स्तर के लिए मजबूत साक्ष्य की आवश्यकता हेाती हैं महत्व का स्तर चुनना काफी हद तक मनमाना कार्य है, लेकिन कई अनुप्रयोगों के लिए 5% का स्तर चुना जाता है, इसके कोई बेहतर कारण नहीं है, यह परंपरागत है।

कुछ स्थितियों मे यह $1-\propto$ के रूप में सांख्यिकीय महत्व व्यक्त करने के लिए सुविधाजनक है। सामान्य तौर पर, जब एक घोषित महत्व की व्याख्या करते हैं, तो सावधानी वरतनी चाहिए कि, वास्तव में सांख्यिकीय तरीके से परीक्षण किया जा रहा है। बराबर प्रभावों को बंद करने के विभिन्न स्तरों में महत्व के निर्धारण विश्वसनीयता बढाने के छोटे स्तर लेकिन गलत शून्य परिकल्पना (II प्रकार की त्रुटियॉं ''गलत नकारात्मक दृढ संकल्प) को अस्वीकार करने में विफल रहने का अधिक जोखिम चलाते हैं , और इसलिए कम सांख्यिकीय शक्ति हेाती है। इस स्तर का चयन अनिवार्यतः महत्व एवं शक्ति के बीच एक समझौता है, और इसका परिणाम टाइप I त्रुटि और टाइप II त्रुटि के बीच हेाता है।

10.6 शब्दावली

स्वतन्त्रता की श्रेणी : – जिसका अर्थ है कि वर्गों की संख्या जिनाक मान बिना किसी प्रतिबंध के उल्लंघन के मुताविक सौंपा जा सकता है।

काई वर्ग परीक्षण :– गुणों के तर्क संगत के लिए सांख्यिकीय में प्रयोग किया जाता है।

10.7 बोध प्रश्न

1. नमूना आकार $n = 10, \mu = 5$ किग्रा

दिए हुए नमूने आंकडों मे ेसे सबसे पहले $\bar{x}$ और s की गणना करते हैं।

Total

x:	4.7	4.9	5.0	5.1	5.2	4.6	4.7	**49.3**
x^2:	22.09	24.01	25.00	26.01	27.04	21.16	22.09	**243.73**

$\bar{x} = \frac{49.3}{10} = 4.93$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{243.73}{10} - (4.93)^2}$$

$$= \sqrt{2.4373 - 24.30}$$

$$= \sqrt{0.073} = 0.27$$

$H_0 = \mu = 5$ किग्रा

$H_1 = \mu \neq 5$ किग्रा

t आंकडा परीक्षण $= \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{4.93-5}{\frac{.27}{\sqrt{9}}} = \frac{-0.07\times 3}{.27} = -0.78$

$d.f = n - 1 = 10 - 1 = 9$

$9. d.f.$ के लिए 5% महत्व के स्तर पर तालिका मान $= 2.262$

2. $\mu = 2.00$ सेमी, $n = 10$ ट्यूब $\bar{x} = 2.01$ सेमी

$\sigma = \sqrt{0.004}$ सेमी

चूंकि $n < 30$, नमूना, छोटा नमूना है। इसलिए माध्य के परीक्षण के लिए t परीक्षण का प्रयोग करते हुए

$H_0: \mu = 2.00$ सेमी

$H_1: \mu \neq 2.00$ सेमी

आंकडा परीक्षण $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$ है।

$= \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{2.01-2.00}{\sqrt{\frac{0.004}{9}}} = \frac{.01\times 3}{\sqrt{.004}} = \frac{0.03}{0.0632} = 0.475$

$d.f$ (स्वतन्त्रता की श्रेणी की संख्या)$= 9$

$9. d.f$ के लिए 5% स्तर पर तालिका मान $= 2.262$

3. $p_1 = \frac{16}{500} = 0.032$(पहले नमूने में)

$p_2 = \frac{3}{100} = 0.0.$(दूसरे नमूने में)

मान लें कि मशीन मरम्मत के बाद नहीं सुधरी हुई है।

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$p = \frac{500 \times 0.032 + 100 \times 0.3}{500 + 100}$$

$$= \frac{16+3}{600} = 0.03$$

$$q = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$S.E.(p_1 - p_2) = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= \sqrt{(0.03)(0.97)\left(\frac{1}{500}\right) + \left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{(0.03)(0.97)(0.002 + 0.01)}$$

$$= 0.0187$$

$$z = \frac{0.032 - 0.03}{0.0187} = \frac{0.002}{0.0187} = 0.106$$

4. माना x_1 और x_2 क्रमशः घंटों में कारखानों (A) और कारखाना (B) के मजदूरों की मजदूरी (रू0 में) को प्रदर्शित करते हैं तो हमें दिया गया है।

$$n_1 = 150 \quad \bar{x}_1 = 2.56 \quad s_1 = 1.08 \quad = \sigma_1$$

$$n_2 = 200 \quad \bar{x}_2 = 2.87 \quad s_2 = 1.28 \quad = \sigma_2$$

शून्य परिकल्पना H_0

$\mu_1 = \mu_2$ कारखाना A एवं कारखाना B में मजदूरों के मजदूरी के औसत स्तर के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर नहीं है।

वैकल्पिक परिकल्पना H_1

$\mu_2 > \mu_1$ या $\mu_1 < \mu_2$ (आंये पुच्छीय परीक्षण)

आंकडा परीक्षण

H_0 के अर्न्तगत, आंकडा परीक्षण (बडे नमूनों के लिए)

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\therefore z = \frac{2.56 - 2.87}{\sqrt{\frac{(1.08)^2}{150} + \frac{(1.28)^2}{200}}}$$

$$z = \frac{-0.31}{\sqrt{0.016}} = \frac{-0.31}{0.126}$$

$$= -2.46$$

महत्वपूर्ण क्षेत्र

एक पुच्छीय परीक्षण के लिए, 5% महत्व के स्तर पर Z का महत्वपूर्ण मान 1.645 है। बाएं पुच्छीय परीक्षण्सा के लिए महत्वपूर्ण क्षेत्र में Z के सभी मान शामिल है।

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. निष्कर्ष :– 5ः स्तर पर शून्य परिकल्पना (H_0) स्वीकार हैं इसलिए मशीन उचित ढंग से काम कर रही है।

2. निष्कर्ष : 5ः स्तर पर H_0 स्वीकार्य है चूकि t का परिकलित मान, t के तालिका मान से कम है। इसलिए समग्र माध्य और नमूना माध्य के बीच का अंतर महत्वपूर्ण नहीं है।

3. चूंकि (1% स्तर पर) अंतर 2.58 से कम है, प्रयोगों के परिणाम परिकल्पना को प्रमाणित करते हैं। इसलिए, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि मशीन मरम्मत के बाद भी नहीं सुधरी है।

4. निष्कर्ष :– चूँकि 5% महत्व के स्तर पर Z का परिकलित मान (–2.46) महत्वपूर्ण मान (1.645) की तुलना में कम है। इसलिए शून्य परिकल्पना 5% महत्व के स्तर पर अस्वीकार्य है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि कारखाना B द्वारा प्रदत्त औसतन प्रति घंटा मजदूरी कारखाने A द्वारा भुगतान की तुलना मे निश्चित रूप से अधिक है।

10.9 स्वपरख प्रश्न

1. एक भरने की मशीन से 5 किलो पाउडर भरने की उम्मीद है। 10 थैलों के नमूने ने 4.7, 4.9, 5.0, 5.1, 5.4, 5.2, 4.6, 5.1, 4.6 और 4.7 के वनज दिए । जांच करें कि मशीन ठीक से कमान कर रही है।
2. एक कम्पनी 2.00 सेमी की औसत व्यास के स्टील ट्यूब का निर्माण क्र रही है। 10 ट्यूबों का एक नमूना 2.01सेमी का एक आंतरिक व्यास और 0.004 सेमी^{2} का विचलन देता है। क्या माध्य के मान में अंतर महत्वपूर्ण है। 5% के स्तर पर 9 d.f के लिए t का मान =2.262
3. एक मशीन ने 500 के नमूने मे ंसे 16 अपूर्ण लेखों को मशीन में लिया, मशीन की मरम्मत के बाद यह 100 के खेप में से 3 अपूर्ण लेखों को लेती हैं क्या मशीन मे सुधार हुआ है।

4. कारखाना A में 150 श्रमिकों के एक नमूने की औसत प्रतिघंटा मजदूरी रू0 2.56, रू0 1.08 के मानक विचलन के साथ थी। कारखाना B मे 200 श्रमिकों के एक नमूने की औसत प्रतिघंटा मजदूरी रू0 2.87 , रू0 1.28 के मानक विचलन के साथ थी। क्या एक सुरक्षित रूप में अनुमान लगाया जा सकता है कि कारखाना A द्वारा भुगतान किए गए प्रति घंटे की मजदूरी कारखाना B से अधिक है।

10.10 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 11 आंशिक और बहुगुणी सहसंबंध (Partial & Multiple Correlation)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- बहु संख्यक सह सम्बन्ध की व्याख्या कर सकें।
- आंशिक सह सम्बन्ध की व्याख्या कर सकें।
- सरल, आंशिक और बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांकों के बीच सम्बन्ध स्थापित कर सकें।

11.1 प्रस्तावना

आंकडों मे, निर्भरता दो यादृच्छिक चरों या दो आंकडों के समूहों के बीच किसी भी सांख्यिकीय संबंध को संदर्भित करती है। सह सम्बन्ध निर्भरता से संबंधित सांख्यिकीय संबंधों की एक व्यापक श्रेणी के किसी भी संदर्भ को दर्शाता है। निर्भर घटनाओं के परिचित उदाहरणों मे माता पिता और उनके वंश के शारीरिक अंतर के बीच हस सम्बन्ध और एक उत्पाद की मांग और उसकी कीमत के बीच सहसम्बन्ध शामिल है। सह सम्बन्ध महत्वपूर्ण है क्योंकि वे भविष्य मे किसी सम्बन्ध का संकेत कर सकते हैं जिनका दैनिक व्यवहार में दुरूपयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, बिजली की मांग और मौसम के बीच सह सम्बन्ध के आधार पर बिजली की उपादेयता नरम दिन पर कम शक्ति का उत्पादन कर सकती है। इस उदाहरण मे एक कारणात्मक सहसम्बन्ध है क्योंकि अधिकतम (गर्मी एवं ठंडक) वाला मौसम लोगों को ज्यादा ठंडक और गर्मी के लिए बिजली का प्रयोग करना पढता है। यद्यपि, इस तरह की कारणात्मक सहसम्बन्ध की उपस्थिति को प्रमाणित करने के लिए सांख्यिकीय निर्भरता महत्वपूर्ण नहीं है। औपचारिक रूप में निर्भरता किसी ऐसी स्थिति को संदर्भित करती है। जिसमें यादृच्छिक चर, संभव्य स्वतन्त्रता एक गणितीय स्थिति को संतुष्ट नहीं करती है। अस्पष्ट व्यवहार में, सहसम्बन्ध स्वतंत्रता में से दो या अधिक यादृच्छिक गंतव्य को संदर्भित कर सकता है। लेकिन तकनीकी रूप से यह कई और विशेष

तरीके के माध्य मानों के बीच सम्बन्ध संदर्भित करता है। विभिन्न प्रकार के सहसम्बन्ध गुणांक हैं प्रायः p सर r द्वारा प्रदर्शित करते हैं जो सह सम्बन्ध की श्रेणी मापते हैं। सम्बन्ध और चरों के बीच निर्भरता ज्ञात करने के लिए आंशिक और बहुसंख्यक सहसम्बन्धों का अध्ययन करते हैं यह सरल सहसंबंध की तकनीक का एक विस्तार है जिसके अन्तर्गत आप तीन या अधिक चरों के बीच अंतर संबंध का अध्ययन कर सकते है।

11.2 बहुसंख्यक सहसम्बन्ध

बहुसंख्यक सहसम्बन्ध गुणांक एक माप है जो कि किसी अन्य चर के समुच्चय के रैखिक कार्य का उपयोग कर दिये गये चर के लिए भविष्यवाणी की जा सकती है। इसे निर्णायक गुणांक द्वारा मापा जाता है, लेकिन विशेष धारणा के अन्तर्गत सर्वोतम संभव रेखीय भविष्यवाणियों का उपयोग किया जाता है। जबकि निर्णायक गुणांक को अधिक सामान्य मामलों मे परिभाषित किया जाता हें बहुसंख्यक निर्धारण गुणांक के मान 0 और 1 के बीच होते हैं। एक उच्चमान स्वतंत्र चर से आश्रित चर का बेहतर पूर्वानुमान देता है, मान एक होने पर भविष्यवाणी सही है और शून्य मान दर्शाता है कि आश्रित चर का कोइ रैखिक संयोजन सरल पूर्वानुमान की तुलना मे बेहतर है जो कि लक्ष्य चरों के माध्यों में शामिल है।

बहुसंख्य सहसम्बन्ध तीन या अधिक चरों के बीच सम्बन्ध का अध्ययन है। वह एकल आश्रित चर पर दो या अधिक स्वतन्त्र चरों के संयुक्त प्रभाव को मापता है। उदाहरण के लिए, यदि उर्वरक की माप के संयुक्त प्रभाव का गेहूँ की पैदावार (x_1) पर अध्ययन करते है यह प्रश्न बहुसंख्यक सह सम्बन्ध का है। आप बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांक को $R_{1.23}$ से प्रदर्शित करेंगे जिसमें x_1 निर्भर चर तथा इसके बीच निर्भर चर तथा इसके बीच x_2 एवं x_3 स्वतन्त्र चर है। इसी प्रकार आप बहुसंख्यक सह सम्बन्धों को $R_{2.13}$ और $R_{3.12}$ से प्रदर्शित कर सकते हैं।

बहुसंख्यक सह सम्बन्ध के गुणांक की गणना :–

बहुसंख्यक सह सम्बन्धों के गुणांकों $R_{1.23}$, $R_{2.13}$ और $R_{3.12}$ की गणना के सूत्र निम्नवत हैं

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$R_{123} =$ बहुसंख्यक सहसम्बन्ध गुणांक है।

$r_{12}, r_{13}, r_{23} =$ सरल या शून्य क्रम सहसंबंध है।

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{21}^2 + r_{23}^2 - 2r_{21}.r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}}$$

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{31}^2 + r_{32}^2 - 2r_{31}.r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$$

बहुसंख्यक सहसंबंध गुणांक की सीमाऐं :–

बहुसंख्यक सहसम्बन्ध गुणांक $(R_{1.23})$ का मान 0 और 1 के बीच होता है। यह कभी भी नकारात्मक नहीं हो सकता है।

$0 \geq R_{1.23} \leq 1$

उदाहरण 11.1 :– निम्नलिखित आंकडों में से $(R_{1.23})$, $(R_{2.13})$ और $(R_{3.12})$ की गणना करें।

हल :– $r_{12} = 0.60 , r_{13} = 0.70 , r_{23} = 0.65$ दिया हुआ है।

(i)

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.6)^2 + (0.7)^2 - 2\,(0.6)\,(0.7)\,(0.65)}{1 - (0.65)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.36 + 0.49 - 0.546}{0.5775}}$$

$$= \sqrt{0.526}$$

$$= 0.725$$

(ii)

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{21}^2 + r_{23}^2 - 2r_{21}.r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.6)^2 + (0.65)^2 - 2(0.6)(0.65)(0.7)}{1 - (0.70)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.36 + 0.4225 - 0.546}{1 - 0.49}}$$

$$= \sqrt{0.4638}$$

$$= 0.6809$$

(iii)

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{31}^2 + r_{32}^2 - 2r_{31}.r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.70)^2 + (0.65)^2 - 2\,(0.70)\,(0.65)\,(0.60)}{1 - (0.60)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.49 + 0.4225 - 0.546}{1 - 0.36}}$$

$$= \sqrt{0.5726} = 0.756$$

उदाहरण 11.2 : विद्यार्थियों के एक बडे समूह के लिए

$x_1 =$ अर्थशास्त्र में अंक, $x_2 =$ गणित में अंक , $x_3 =$ सांख्यिकीय में अंक , $r_{12} = 0.69\,, r_{13} = 0.45\,, r_{23} = 0.58$

ब्हुसंख्यक सह सम्बन्ध का गुणांक $R_{3.12}$ ज्ञात कीजिऐ।

हल :–

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{31}^2 + r_{32}^2 - 2r_{31}.r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$$

$$\sqrt{\frac{(0.45)^2 + (0.58)^2 - 2\,(0.45)\,(0.58)\,(0.69)}{1 - (0.69)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.2025 + 0.3364 - 0.3601}{1 - 0.4761}}$$

$$= \sqrt{0.3412} = 0.584$$

उदाहरण 11.3 :– शून्य कम सहसंबंध गुणांक निम्नवत दिए हुए हैं।

$r_{12} = 0.98\,, r_{13} = 0.44\,, r_{23} = 0.54$ पहले को निर्भर चर और दूसरे और तीसरे चरों को स्वतन्त्र चर मानते हुए बहुसंख्यक सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

हलः– आपको बहुसंख्यक सहसंबंध गुणांक की गणना करनी है जिसके लिए पहला निर्भर चर और दूसरा एवं तीसरा चर स्वतन्त्र चर है या आपका $R_{1.23}$ ज्ञात करना है।

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर ,

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{(0.98)^2 + (0.44)^2 - 2(0.98)(0.44)(0.54)}{1 - (0.54)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.9604 + 0.1936 - 0.4657}{1 - 0.2916}}$$

$$= \sqrt{\frac{.6883}{.7084}}$$

$$= \sqrt{0.9716} = 0.985$$

उदाहरण 11.4 :– यदि $R_{1.23} = 1$, सिद्ध करें कि $R_{2.13} = 1$

हल :–

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

और

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{21}^2 + r_{23}^2 - 2r_{21}.r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}}$$

$R_{2.13} = 1$ रखते हुए एवं दोनों पक्षों का वर्ग करते हुए

$$1 = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

$$\Rightarrow r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23} = 1 - r_{23}^2$$

$$\Rightarrow r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23} = 1 - r_{13}^2$$

$$\Rightarrow \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{23}.r_{23}}{1 - r_{13}^2} = 1$$

$$\Rightarrow R_{2.13}^2 = 1\ or\ R_{2.13} = 1$$

इसलिए बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गैर नकारात्मक समझा जाता है।

11.3 आंशिक सहसंबंध

गिल्फोर्ड (1973) के अनुसार , x और y के बीच आंशिक सहसंबंध नियंत्रित चरों $Z = (z_1, z_2, \dots\dots z_n)$ के दिए हुए समूहों, जिसे P_{xyz} लिखा जाता है, सहसंबंध अवशिष्टों R_x और R_y के बीच क्रमशः x का z के साथ और y का z के साथ रैखिक सहसंबंध के परिणामस्वरूप है। वास्तव में, पहला क्रम आंशिक सहसंबंध , सहसंबधं और हटाने योग्य संबंधों के उत्पाद के बीच अंतर के अलावा कुछ भी नहीं है, जो इटाए जाने योग्य संबंधों के अलगाव के गुणांकों के उत्पाद से विभाजित है। चरों में से तीसरे चर के प्रभाव को निकालने के पश्चात आंशिक सहसंबंध दो चरों के बीच सह सबंधं है। उदाहरण के लिए, यदि आप गेहॅू की पैदावार x_1 और खाद की मात्रा x_2 के प्रभाव को नजरअंदाज करते हुए (समान जलवायु होने की) के बीच सम्बन्ध को मापते हैं, तब यह प्रश्न आंशिक सहसबंध का है। तीन चरों $(x_1,\ x_2, x_3)$ के लिए,

तीन आंशिक सहसबंधं गुणांक होते हैं। जिनकों $r_{12.3}$, $r_{13.2}$ और $r_{23.1}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। $r_{12.3}$ आंशिक सहसबंध गुणांक x_1 और x_2 के बीच संबधं को दिखाता है जब x_3 का प्रभाव x_1 और x_2 दोनों से विलुप्त किया जाता है।

आंशिक सह सम्बन्ध गुणांकों की गणना :– आंशिक सहसम्बन्ध गुणांकों $r_{12.3}$, $r_{13.2}$ और $r_{23.1}$ की गणना के लिए सूत्र निम्न प्रकार से है :

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

जहॉ $r_{12.3} = x_1$ और x_2 के बीच आंशिक सहसम्बन्ध है।

r_{12} , r_{13} और $r_{23} =$ सरल या शून्य क्रम सह सम्बन्ध गुणांक है।

ठसी तरह, आप के पास

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1 - r_{21}^2}\sqrt{1 - r_{31}^2}}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{32}^2}}$$

आंशिक सह सम्बन्ध गुणांकों की सीमाऐं :–

$r_{12.3}$ का मान -1 और +1 के बीच मे स्थित होता है।

$$-1 \le r_{12.3} \le 1$$

उदाहरण 11.5 :– $r_{12} = 0.7\, , r_{13} = 0.61$ और $r_{23} = 0.4$ दिया हुआ है। $r_{12.3}$, $r_{13.2}$ और $r_{23.1}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$r_{12.3} = \frac{0.7 - (0.61)(0.4)}{\sqrt{1 - (0.61)^2}\sqrt{1 - (0.4)^2}}$$

$$= \frac{0.456}{0.792 \times 0.916} = 0.629$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{32}^2}}$$

$$= \frac{0.61 - (0.7)(0.4)}{\sqrt{1 - (0.7)^2}\sqrt{1 - (0.4)^2}}$$

$$= \frac{0.61 - 0.28}{\sqrt{1 - .49}\sqrt{1 - .16}}$$

$$= \frac{0.33}{0.714 \times 0.916}$$

$$= \frac{0.33}{0.654}$$

$$= 0.505$$

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1-r_{21}^2}\sqrt{1-r_{31}^2}}$$

$$= \frac{0.4 - (0.7)(0.61)}{\sqrt{1-(0.7)^2}\sqrt{1-(0.61)^2}}$$

$$= \frac{0.4 - 0.427}{\sqrt{1-(0.49)}\sqrt{1-.3721}}$$

$$= \frac{-0.027}{0.714 \times 0.792}$$

$$= -0.048$$

उदाहरण 11.6 :– 30 सूती पौधों के अवलोकन के आधार पर, सूत की पैदावार में सहसंबंध x_1, बच पोतों की संख्या x_2 और ऊँचाई $x_3 : r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.65, r_{23} = 0.7$ पाए गऐ।
सूत की पैदावार और बीज पेातों की संख्या, ऊँचाई के प्रभाव को निकालते हुए के बीच आंशिक सहासंबंध की गणना करें।
हल :– आपकों सूत की पैदावाद और बीजपेातों की संख्या के बीच आंशिक सहसंबंध ज्ञात करना है।, ऊँचाई के प्रभाव की निकालते हुए या आपकों ज्ञात करना है $r_{12.3}$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

दिये गये मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$r_{12.3} = \frac{0.8 - (0.65)(0.7)}{\sqrt{1-(0.65)^2}\sqrt{1-(0.7)^2}}$$

$$= \frac{0.8 - 0.45}{\sqrt{1-0.4225}\sqrt{1-0.49}}$$

$$= \frac{0.345}{0.76 \times 0.714}$$

$$= \frac{0.345}{0.543}$$

$$= 0.635$$

उदाहरण 12.7 :— विद्यार्थियों के एक बडे समूह के लिए x_1 =सिद्धान्त में अंक, x_2 =रीति में अंक , x_3 =मैदान कार्य में अंक। निम्नलिखित परिणाम प्रापत हुए थे : $r_{12} = 0.69$, $r_{13} = 0.45$ और $r_{23} = 0.58$ रीति में अंक को नियत रखते हुए, मैदान कार्य में अंक और सिद्धान्त में अंक के बीच आंशिक सह सम्बन्ध गुणांक की गणना करें और परिणाम की व्याख्या करें।

हल :— रीति में अंक को नियत रहते हुए, मैदान कार्य में अंक और सिद्धान्त में अंक के बीच आपकों आंशिक सहसम्बन्ध ज्ञात करना है या आपको $r_{31.2}$ ज्ञात करना है।

$$r_{31.2} = \frac{r_{31} - r_{32}.r_{12}}{\sqrt{1 - r_{32}^2}\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

$$= \frac{0.45 - (0.58)(0.69)}{\sqrt{1 - (0.58)^2}\sqrt{1 - (0.69)^2}}$$

$$= \frac{0.45 - 0.4002}{\sqrt{1 - 0.3364}\sqrt{1 - 0.4761}}$$

$$= \frac{0.0498}{\sqrt{0.6636}\sqrt{0.5239}}$$

$$= \frac{0.0498}{0.81 \times 0.72}$$

$$= \frac{0.0498}{0.5832}$$

$$= 0.085$$

इस प्रकार, मैदान कार्य में अंक और सिद्धान्त में अंक के बीच में कम श्रेणी का सहसम्बन्ध है।

उदाहरण 11.8 :— क्या वह संभव है कि प्रयोगात्मक आंकडों में निम्नवत समूह हो।

$r_{12} = 0.6$, $r_{13} = 0.8$ और $r_{23} = 0.5$

यह देखने के लिए कि क्या दिए गए आंकडों में असंगति है, आपकों $r_{12.3}$ का मान एक से ज्यादा है, तो असंगति है, अन्यथा नहीं ।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$= \frac{0.6 - (-0.5)(0.8)}{\sqrt{1-(0.5)^2}\sqrt{1-(0.8)^2}}$$

$$= \frac{0.6 + 0.4}{\sqrt{1-0.25}\sqrt{1-0.64}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.75}\sqrt{0.36}}$$

$$= \frac{1}{0.866 \times 0.6}$$

$$= \frac{1}{0.52}$$

$$= 1.92$$

चूँकि $r_{12.3}$ का मान एक से बडा है, दिये गये आंकडों में कुछ असंगति है।

विकल्प के रूप में :– आप आकडों में विसंगति की जांच $R_{1.23}$ की गणना द्वारा भी कर सकते हैं यदि $R_{1.23}$ का मान 1 से ज्यादा है, तो कुछ विसंगति अन्यथा नहीं।

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.6)^2 + (-0.5)^2 - 2(0.6)(-0.5)(0.8)}{1-(0.8)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.36 + 0.25 + 0.48}{1 - .64}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.09}{0.36}}$$

$$= \sqrt{3.0277}$$

$$= 1.74$$

चूँकि , $R_{1.23}$ का मान एक से ज्यादा है, दिये हुए आंकडों मे कुछ विसंगति है।

उदाहरण 11.9 :– मान लें कि, दिये हुए समूह में x_1, x_2, x_3 के मान : $r_{12} = 0.96\,, r_{13} = 0.36\,, r_{23} = 0.78$ कम्प्यूटर द्वारा प्राप्त हुए हैं। व्याख्या करें कि इन गणना किये हुए मानों को त्रुटियों से स्वतन्त्र कहा जा सकता है।

हल :– इन गणनो किये हुए मानों को त्रुटियों से स्वतन्त्र कहा जाता है या नहीं, बताने के लिए $r_{12.3}$ के मान कि आपको गणना करनी है। यदि $r_{12.3}$ मान 1 से ज्यादा हो तो गणना किये गए मान को त्रुटियों से स्वतन्त्र नहीं कहा जा सकता है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$r_{12.3} = \frac{0.96 - (0.36)(0.78)}{\sqrt{1 - (0.36)^2}\sqrt{1 - (0.78)^2}}$$

$$= \frac{0.96 - 0.2808}{\sqrt{0.8704}\sqrt{0.3916}}$$

$$= \frac{0.6792}{0.9329 \times 0.6258}$$

$$= \frac{0.6792}{0.5838}$$

$$= 1.163$$

चूँकि $r_{12.3}$ एक से ज्यादा है, गणनाकर दिये गए मान कुछ त्रुटि रखते हैं।

13.4 सरल, आंशिक एवं बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांकों के बीच सम्बन्ध

सरल, आंशिक एवं बहुसंख्यक सहसम्बन्ध गुणांकों के बीच सम्बन्ध होता है। जिनहें निम्नलिखित समीकरणों से समझते हैं।

(i) $1 - R_{1.23}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)$

(ii) $1 - R_{2.13}^2 = (1 - r_{21}^2)(1 - r_{23.1}^2)$ और

(iii) $1 - R_{3.12}^2 = (1 - r_{31}^2)(1 - r_{32.1}^2)$

उदाहरण 11.10 :– एक विस्तरीय चर वितरण में, $r_{12} = 0.60\,, r_{13} = 0.70\,, r_{23} = 0.65$ दिये हुए हैं।

बहुसंख्यक , सरल और आंशिक सहसंबंध गुणांक इस तरह से सम्बन्धित है।

$$R_{1.23}^2 = 1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{32}^2}}$$

$$= \frac{0.70 - 0.60 \times 0.65}{\sqrt{1-(0.60)^2}\sqrt{1-(0.65)^2}}$$

$$= \frac{0.70 - 0.39}{0.8 \times 0.760}$$

$$= 0.509$$

$$\therefore \qquad r_{13.2}^2 = 0.259,$$

$$r_{12}^2 = 0.36$$

$R_{1.23}^2$ के लिए , r_{12}^2 और $r_{13.2}^2$ के मान प्रतिस्थापित करने पर, आपके पास

$$R_{1.23}^2 = 1 - (1 - 0.36)(1 - 0.259)$$

$$= 1(0.64)(0.74) = 0.526.$$

उदाहरण 11.11 x_1, x_2, x_3 को उनके माध्यों में से मापा जाता है

$$N = 10, \sum x_1^2 = 90, \sum x_2^2 = 160, \sum x_3^2 = 40$$

$$\sum x_1 x_2 = 60, \sum x_2 x_3 = 60, \sum x_3 x_1 = 40$$

के साथ है। $x_{12.3}$ और $R_{2.31}$ की गणना करें।

हल :–

$$r_{12} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum x_2^2}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{\sqrt{90 \times 160}}}$$

$$= \frac{60}{120}$$

$$= 0.5$$

$$r_{13} = \frac{\sum x_1 x_3}{\sqrt{\sum x_1^2} \times \sum x_3^2}$$

$$= \frac{40}{\sqrt{\sqrt{90 \times 40}}}$$

$$= \frac{40}{60}$$

$$= 0.67$$

$$r_{23} = \frac{\sum x_2 x_3}{\sqrt{\sum x_2^2 \times \sum x_3^2}}$$
$$= \frac{60}{\sqrt{\sqrt{160 \times 40}}}$$

$$= \frac{60}{80}$$

$$= 0.75$$

अब,

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आपके पास

$$r_{12.3} = \frac{0.5 - 0.67 \times 0.75}{\sqrt{1 - (0.67)^2}\sqrt{1 - (0.75)^2}}$$

$$= -\frac{0.0025}{0.4910}$$

$$= -0.0051$$

$$R_{2.31} = \sqrt{\frac{r_{23}^2 + r_{21}^2 - 2r_{23}.r_{21}.r_{31}}{1 - r_{31}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.75)^2 + (0.5)^2 - 2(0.75)(0.5)(0.67)}{1 - (0.67)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.5625 + 0.25 + 0.5025}{0.5511}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.31}{0.5511}}$$

$$= 0.75$$

उदाहरण 11.12 :— निम्नलिखित आंकडों में से $r_{12.3}$ और $R_{1.23}$ की गणना :

X:	3	4	5	6	7	8	9
Y:	2	5	6	4	3	2	4
Z:	5	6	4	5	6	5	8

हल :— $r_{12.3}$ और $R_{1.23}$ की गणना :—

X	X^2	Y	Y^2	Z	Z^2	XY	XZ	YZ
3	9	2	4	5	25	6	15	10
4	16	5	25	6	36	20	24	30
5	25	6	36	4	16	30	20	24
6	36	4	16	5	25	24	30	20
7	49	3	9	6	36	21	42	18
8	64	2	4	5	25	16	40	10
9	81	4	16	8	64	36	72	32
$N = 7$ $\sum X = 42$	$\sum X^2 = 42$	$\sum Y = 26$	$\sum Y^2 = 110$	$\sum Z = 39$	$\sum Z^2 = 227$	$\sum XY = 153$	$\sum XZ = 243$	$\sum YZ = 144$

$$r_{12} = \frac{N.\sum XY - \sum X.\sum Y}{\sqrt{[\sum X^2.N - (\sum X)^2][\sum Y^2.N - (\sum Y)^2]}}$$

$$= \frac{7 \times 153 - (42 \times 26)}{\sqrt{[280 \times 7 - (42)^2][110 \times 7 - (26)^2]}}$$

$$= -0.155$$

$$r_{13} = \frac{N.\sum XZ - \sum X.\sum Z}{\sqrt{[\sum X^2.N - (\sum X)^2][\sum Z^2.N - (\sum Z)^2]}}$$

$$= \frac{7 \times 243 - (42 \times 39)}{\sqrt{[280 \times 7 - (42)^2][227 \times 7 - (39)^2]}}$$

$$= 0.546$$

$$r_{23} = \frac{N.\sum YZ - \sum Y.\sum Z}{\sqrt{[\sum Y^2.N - (\sum Y)^2][\sum Z^2.N - (\sum Z)^2]}}$$

$$= \frac{144 \times 7 - 26 \times 39}{\sqrt{[110 \times 7 - (26)^2][227 \times 7 - (39)^2]}}$$

$$= -0.075$$

आंशिक सह सम्बन्ध गुणांक

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{-0.155 - (0.546 \times -0.075)}{\sqrt{1 - (0.546)^2}\sqrt{1 - (-0.075)^2}}$$

$$= -0.1366$$

बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांक

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-0.155)^2 + (0.556)^2 - (2 \times -0.155 \times 0.546 \times -0.075)}{1 - (-0.075)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.024 + 0.298 - (.01269)}{1 - .006}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.1951}{0.994}}$$

$$= \sqrt{0.1962}$$

$$= 0.443$$

उदाहरण 11.13 विस्तरीय चर वितरण में ,

$r_{12} = 0.80, r_{23} = -0.56, r_{31} = -0.40$ $r_{23.1}$ and $R_{1.23}$. की गणना करें।

हल :–

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1 - r_{21}^2}\sqrt{1 - r_{31}^2}}$$

$$= \frac{-0.56 - (0.8)(-0.40)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}\sqrt{1 - (-0.4)^2}}$$

$$= \frac{-0.56 + 0.32}{\sqrt{1 - 0.64}\sqrt{1 - 0.16}}$$

$$= \frac{-0.24}{\sqrt{0.36 \times 0.84}}$$

$$= \frac{-0.24}{0.5499}$$

$$= -0.436$$

(i)

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.8)^2 + (-0.4)^2 - 2(0.8)(-0.4)(-0.56)}{1 - (-0.56)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.64 + 0.16 - 0.3584}{1 - 0.3136}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.4416}{0.6864}}$$

$$= 0.802$$

उदाहरण 11.14 x_1 (पैदावार) ए x_2(सिंचाई) और x_3(खाद) के बची में रैखिका सह सम्बन्ध गुणांक निम्नवत है :

$r_{12} = 0.81, r_{13} = 0.90, r_{23} = 0.65$

(1) पैदावार का सिंचाई के साथ आवाज करने वाला एक खाद तत्व
(2) पैदावार का आवाज करने वाले खाद के साथ सिंचाई एक तत्व के आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करें।

हल :– आपको ज्ञात करना है

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$r_{12.3} = \frac{(0.81) - (0.90)(0.65)}{\sqrt{1 - (0.90)^2}\sqrt{1 - (0.65)^2}}$$

$$= \frac{0.81 - 0.585}{0.4358 \times 0.7599}$$

$$= \frac{0.225}{0.3311}$$

$$= 0.679$$

आपको ज्ञात करना है $r_{13.2}$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{32}^2}}$$

$$= \frac{(0.90) - (0.81)(0.65)}{\sqrt{1 - (0.81)^2}\sqrt{1 - (0.65)^2}}$$

$$= \frac{0.3735}{\sqrt{0.3439}\sqrt{0.5775}}$$

$$= \frac{0.3735}{0.5864 \times 0.7599}$$

$$= \frac{0.3735}{0.4456}$$

$$= 0.838$$

उदाहरण : 11.15 नीचे शून्य क्रम सह सम्बन्ध गुणांक दिया हुआ है, ज्ञात करें (1) x_2 और x_3 के बीच आंशिक सह सम्बन्ध गुणांक (2) x_2 और x_3 में x_1 निर्भर चर लेते हुए बहुसंख्यक सह सम्बन्ध

$$r_{12} = 0.98, r_{13} = 0.44, r_{23} = 0.54$$

हल :–

(i)

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1 - r_{21}^2}\sqrt{1 - r_{31}^2}}$$

$$= \frac{0.54 - (0.98)(0.44)}{\sqrt{1 - (0.98)^2}\sqrt{1 - (0.44)^2}}$$

$$= \frac{0.54 - 0.4312}{\sqrt{1 - 0.9604}\sqrt{1 - 0.1936}}$$

$$= \frac{0.1088}{\sqrt{0.0396}\sqrt{0.8064}}$$

$$= \frac{0.1088}{0.1786}$$

$$= 0.6091$$

(ii)

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.98)^2 + (0.44)^2 - 2(0.98)(-0.44)(0.54)}{1 - (0.54)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.9604 + 0.1936 - 0.4656}{1 - (0.2916)}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.6884}{0.7084}}$$

$$= \sqrt{0.9717}$$
$$= 0.985$$

उदाहरण 11.16 :– प्रयोगात्मक आंकडों के समूह में से क्या यह संभव है कि निम्नलिखित आंकडे प्राप्त होते हैं :

(i) $r_{23} = 0.8, r_{31} = 0.5, r_{12} = 0.6$

(ii) $r_{23} = 0.7, r_{31} = -0.4, r_{12} = 0.6$

हल :– (1) इस कम को देखने के लिए क्या आंकडों मे ंविसंगति है, आपको $r_{12.3}$ की गणना करनी चाहिए, यदि इसका मान एक से ज्यादा है, तो विसंगति है अन्यथा नहीं ।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{0.6 - (-0.5)(0.8)}{\sqrt{1 - (0.5)^2}\sqrt{1 - (0.8)^2}}$$

$$= \frac{0.20}{\sqrt{0.75}\sqrt{0.36}}$$

$$= \frac{0.20}{0.52}$$

$$= 0.384$$

चूँकि $r_{12.3}$ का मान एक से कम है, आंकडा तर्क संगत है

(ii)

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{(0.6) - (-0.4)(0.7)}{\sqrt{1 - (-0.4)^2}\sqrt{1 - (0.7)^2}}$$

$$= \frac{0.6 + 0.28}{\sqrt{0.84}\sqrt{0.51}}$$

$$= \frac{0.88}{0.655}$$

$$= 1.344$$

चूँकि $r_{12.3}$ का मान एक से ज्यादा है, दिये गये आंकडों में विसंगति है।

उदाहरण 11.17 निम्नलिखित आंकडों के लिए तर्क संगत परीक्षण करें।

$$r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.4, r_{23} = -0.56$$

हल :– क्या दी हुई गणनाऐं तर्क संगत हैं या नहीं, के परीक्षण के लिए, $r_{13.2}$ की आप गणना करते हैं। यदि $r_{13.2}$ एक से ज्यादा आता है तब गणनाऐं तर्क संगत नहीं हो सकती है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$= \frac{(0.8) - (0.4)(-0.56)}{\sqrt{1-(-0.4)^2}\sqrt{1-(-0.56)^2}}$$

$$= \frac{0.8 + 0.224}{\sqrt{0.84}\sqrt{0.6864}}$$

$$= \frac{1.024}{0.7593}$$

$$= 1.349$$

चूँकि $r_{12.3}$ एक से ज्यादा है, r_{12}, r_{13}, r_{23} की गणनाएं तर्क संगत नहीं है।

उदाहरण 11.18 यदि $r_{12} = 0.77, r_{13} = 0.72, r_{23} = 0.52$ हो, आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक $r_{12.3}$ और बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांक $R_{1.23}$ ज्ञात करें।

हल :– $r_{12} = 0.77, r_{13} = 0.72, r_{23} = 0.52$ दिया हुआ है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$= \frac{.77 - .72 \times .52}{\sqrt{1-(.72)^2}\sqrt{1-(.52)^2}}$$

$$= \frac{.77 - .37}{\sqrt{1-.5184}\sqrt{1.2704}}$$

$$= \frac{.40}{\sqrt{.4816} \times \sqrt{.7296}}$$

$$= \frac{.4}{.593}$$

$$= 0.6745$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.77)^2 + (.72)^2 - 2(.77)(.72)(.52)}{1-(0.54)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.9604 + 0.1936 - 0.4656}{1 - (.52)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{.5929 + .5184 - .5766}{1 - .2704}}$$

$$= \sqrt{\frac{.5347}{.7296}}$$

$$= 0.856$$

उदाहरण 11.19 यदि $r_{12} = 0.60, r_{13} = 0.70, r_{23} = 0.65$ x_1 और x_2 के बीच आंशिक सह सम्बन्ध x_2 और x_3 के बीच x_1 निर्भर पर बहुसंख्यक सहसम्बन्ध ज्ञात करें।

हल :– $r_{12} = 0.60, r_{13} = 0.70, r_{23} = 0.65$ दिया है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{0.6 - 0.7 \times 0.65}{\sqrt{1 - (0.7)^2}\sqrt{1 - (0.65)^2}}$$

$$= \frac{0.6 - 0.455}{\sqrt{.4816 \times 0.5775}}$$

$$= \frac{0.145}{0.543}$$

$$= 0.2670$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.6)^2 + (.7)^2 - 2(.6)(.7)(.65)}{1 - (.65)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.9604 + 0.1936 - 0.4656}{1 - (.52)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{.304}{.5775}}$$

$$= 0.726$$

उदाहरण 11.20 तीन चरों x_1(ऊँचाई) , x_2(भार) और x_3(छात्रों के व्यास) के मध्य 10 यादृच्छिक चयनित खिलाडियों का सहसम्बन्ध निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है :

	x_1	x_2	x_3
x_1	1.0000	0.8630	0.6480
x_2		1.0000	0.7090
x_3			1.0000

$r_{12.3}$ और $R_{1.23}$ की गणना करें ।

हल : $r_{12} = 0.60, r_{13} = 0.70, r_{23} = 0.65,$ दिया गया है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{0.863 - 0.648 \times 0.709}{\sqrt{1 - (0.648)^2}\sqrt{1 - (0.709)^2}}$$

$$= \frac{.863 - .4594}{\sqrt{.580} \times \sqrt{.497}}$$

$$= \frac{.4036}{\sqrt{.2883}}$$

$$= \frac{.4036}{.537}$$

$$= 0.752$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.863)^2 + (.648)^2 - 2(.863)(.648)(.709)}{1 - (.709)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{.745 + .42 - .793}{.497}}$$

$$= 0.865 .$$

11.5 सारांश

कुल मिलाकर, बहु सहसम्बन्ध तीन या अधिक चरों के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन होता है और यह दो या अधिक स्वतन्त्र चरों के एकल आश्रित चर पर प्रभाव को मापता है। बहु सह सम्बन्ध गुणांक से अन्य चरों के समूह के रैखिक फलन का प्रयोग करते हुए अच्छे दिये हुए चर पूर्वानुमान करने की माप है। इसे निर्धारण के लिए गुणांक के द्वारा मापा जाता है, लेकिन विशेष अवधारणा के अन्तर्गत सबसे अच्छा संभावित रैखिक पूर्वानुमान का प्रयोग किया जाता है, जहॉं ज्यादातर सामान्य परिस्थितियों के लिए निर्धारण का गुणांक परिभाषित हाता है। बहु निर्धारण गुणांक के मान शून्य और एक के मध्य होते हैं, एक ऊँचा मान स्वतन्त्र चरों में से आश्रित चर का एक अच्छा पूर्वानुमान प्रदर्शित करता है, मान एक यह दर्शाता है कि पूर्वानुमान सटीक है और शून्य मान यह दर्शाता है कि सामान्य पूर्वानुमान की तुलना में जिसमें लक्ष्य चर का मान शामिल है, आश्रित चरों का रैखिक बेहतर है। इसके अलावा, आंशिक सहसम्बन्ध चरों के मध्य तीसरे चर के प्रभाव को निकालने के पश्चात दो चरों के मध्य सरल सह सम्बन्ध होता है।

11.6 शब्दावली

सहसंबंधः दो या दो से अधिक चीजों के बीच रिश्ते या संबंध स्थापित करने की प्रक्रिया ।

11.7 बोध प्रश्न

1. एक विचरीय वितरण में $r_{12} = 0.41, r_{13} = 0.71, r_{23} = 0.5$ पाये जाते हैं।$r_{23.1}$ और $r_{13.2}$ के मान ज्ञात कीजिए ।

2- यदि $r_{12} = 0.7, r_{13} = 0.61, r_{23} = 0.4$, $r_{12.3}, r_{13.2}$ और $r_{23.1}$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. क्या निम्न प्रयोगात्मक आंकडे होना सम्भव है : $\mathrm{r}_{12} = 0.6, \mathrm{r}_{23} = 0.8, \mathrm{r}_{31} = -0.5$

4. एक विचरीय वितरण में $\mathrm{r}_{23} = .2, \mathrm{r}_{13} = .5, \mathrm{r}_{12} = .6$ हैं $\mathrm{r}_{12.3}$ और $\mathrm{R}_{1.23}$ की गणना करें।

5. मान लें कि दिये गए समूहों x_1, x_2, x_3 के मानों के लिए $r_{12} = 0.91, r_{13} = 0.33$ and और $r_{23} = 0.81$. की गणना कम्प्यूटर से की जाती है। व्याख्या करें कि क्या ये गणनाऐं त्रुटियों से मुक्त कही जा सकती है।

11.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. $[r_{23.1} = 0.325, r_{13.2} = 0.639]$

2. $[r_{12.3} = 0.629, r_{13.2} = 0.505, r_{23.1} = 0.048]$

3. [$r_{12.3} = 1.92$, असंगत]

4. $[r_{12.3} = 0.47, R_{1.23} = 0.714]$

5. [$r_{12.3} = 1.161$; त्रुटियों से स्वतन्त्र नहीं]

11.9 स्वपरख प्रश्न

1. बहु संख्यक सह सम्बन्ध को स्पष्ट कीजिए ।
2. आंशिक सह सम्बन्ध की व्याख्या कीजिए।
3. सरल, आंशिक और बहुसंख्यक सह सम्बन्ध गुणांकों के के मध्य पाए जाने वाले संबंधो की व्याख्या कीजिए ।

11.10 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 12 बहु प्रतीपगमन विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- बहु प्रतीपगमन की अवधारणा को परिभाषित कर सकें।
- सामान्य समीकरणों का प्रयोग करते हुए बहु प्रतीपगमन तैयार कर सकें ।
- सरल सह सम्बन्ध गुणांकों के सम्बन्ध में बहु प्रतीपगमन समीकरण तैयार कर सकें।
- बहु प्रतीपगमन के लिए आंकलन की मानक त्रुटि की अवधारणा को समझ सकें।

12.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने आंशिक एवं बहु सहसम्बन्ध जो कि सरल सह सम्बन्ध तकनीकी का विस्तार है, का अध्ययन कर चुके हैं। इसी प्रकार, बहु प्रतीपगमन भी सरल प्रतीपगमन तकनीक का विस्तार होता है जिसके अन्तर्गत आप तीन या अधिक चरों के मध्य परस्पर सम्बन्ध का अध्ययन करेंगें। इसका प्रयोग स्वतन्त्र चरों के दिये हुए मानों के लिए आश्रित चर के सबसे संभावित मान के आंकलन में भी किया जाता है।

12.2 बहु प्रतीपगमन

बहु प्रतीपगमन में आप तीन चरों का अध्ययन करेंगे और आप एक चर का आश्रित चर के रूप में और अन्य दो चरों का स्वतन्त्र चर के रूप में विचार कर सकते हैं। बहु प्रतीपगमन समीकरणों का हल निम्नलिखित विधियों द्वारा निकाला जा सकता है :–

12.2.1 सामान्य समीकरणों का प्रयोग करते हुए बहु प्रतीपगमन समीकरण

इस विधि को न्यूनतम वर्ग विधि के रूप में भी जाना जाता है। इस विधि के अर्न्तगत प्रतीपगमन समीकरणों की गणना तीन सामान्य समीकरणों के हल द्वारा की जाती है, उदाहरण के लिए

x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण निम्न द्वारा दिया जाता है :–

$x_1 = a_{1.23} + b_{12.3} + b_{13.2}x_3$

जहॉ x_1 = आश्रित चर , x_2, x_3 = स्वतन्त्र चर

$b_{12.3}$ एवं $b_{13.2}$ = आंशिक प्रतीपगमन गुणांक

न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करते हुए, नियतांकों $a_{1.23}$, $b_{12.3}$ और $b_{13.2}$ के मानों को निम्नलिखित तीन सामान्य समीकरण के हल द्वारा प्राप्त किया जाता है :–

$$\Sigma X_1 = N.a_{1.23} + b_{12.3}\Sigma X_2 + b_{13.2}\Sigma X_3$$
$$\Sigma X_1X_2 = a_{1.23}\Sigma X_2 + b_{12.3}\Sigma X_2^2 + b_{13.2}\Sigma X_2X_3$$
$$\Sigma X_1X_3 = a_{1.23}\Sigma X_3 + b_{12.3}\Sigma X_2X_3 + b_{13.2}\Sigma X_3^2$$

इसी तरीके से, x_2 का x_1 एवं x_3 में और x_3 , का x_1 का x_2 में बहुप्रतीपगमन समीकरण और इनके सामान्य समीकरणों को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :–

x_2 का x_1 एवं x_3 में बहुप्रतिगन समीकरण निम्नवत दिया जाता है :–

$X_2 = a_{2.13} + b_{21.3}X_1 + b_{23.1}X_3$

तीन सामान्य समीकरण इस प्रकार है :–

$$\Sigma X_2 = Na_{2.13} + b_{21.3}\Sigma X_1 + b_{23.1}\Sigma X_3$$
$$\Sigma X_2X_1 = a_{2.13}\Sigma X_1 + b_{21.3}\Sigma X_1^2 + b_{23.1}\Sigma X_3X_1$$
$$\Sigma X_2X_3 = a_{2.13}\Sigma X_3 + b_{21.3}\Sigma X_1X_3 + b_{23.1}\Sigma X_3^2$$

x_3 , का x_1 एवं x_2 में बहु प्रतीपगमन समीकरण निम्न प्रकार से दिया जाता है :–

$X_3 = a_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2$

तीन सामान्य समीकरण इस प्रकार है :–

$$\Sigma X_3 = Na_{3.12} + b_{31.2}\Sigma X_1 + b_{32.1}\Sigma X_2$$
$$\Sigma X_3X_1 = a_{3.12}\Sigma X_1 + b_{31.2}\Sigma X_1^2 + b_{32.1}\Sigma X_2X_1$$
$$\Sigma X_3X_2 = a_{3.12}\Sigma X_2 + b_{31.2}\Sigma X_1X_2 + b_{32.1}\Sigma X_2^2$$

उदाहरण 12.1 : निम्नलिखित आंकडों के समूह के लिए, x_1 , का x_2 एवं x_3 में बहुप्रतीपगमन समीकरण की गणना करें :

X_1:	4	6	7	9	13	15
X_2:	15	12	8	6	4	3
X_3:	30	24	20	14	10	4

हल : X_1 का X_2 एवं X_3 में प्रतीपगमन समीकरण है :

$X_1 = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$

तीन सामान्य समीकरण इस प्रकार है :

$\Sigma X_1 = Na_{1.23} + b_{12.3}\Sigma X_2 + b_{13.2}\Sigma X_3$

$\Sigma X_1 X_2 = a_{1.23}\Sigma X_2 + b_{12.3}\Sigma X_2^2 + b_{13.2}\Sigma X_3 X_2$

$\Sigma X_1 X_3 = a_{1.23}\Sigma X_3 + b_{12.3}\Sigma X_2 X_3 + b_{13.2}\Sigma X_3^2$

X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	X_2^2	X_3^2
4	15	30	60	120	450	225	900
6	12	24	72	144	288	144	576
7	8	20	56	140	160	64	400
9	6	14	54	126	84	36	196
13	4	10	52	130	40	16	100
15	3	4	45	60	12	9	16
$\sum X_1 = 54$	$\sum X_2 = 48$	$\sum X_3 = 102$	$\sum X_1X_2 = 339$	$\sum X_1X_3 = 720$	$\sum X_2X_3 = 1034$	$\sum X_2^2 = 494$	$\sum X_3^2 = 2188$

इन मानों को सामान्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर :

$54 = 6a_{1.23} + 48b_{12.3} + 102b_{13.2}$

$339 = 48a_{1.23} + 494b_{12.3} + 1034b_{13.2}$

$720 = 102a_{1.33} + 1034b_{12.3} + 2188b_{13.2}$

समीकरण (i) को 8 द्वारा गुणा करने पर आप प्राप्त करते हैं

$432 = 48a_{1.23} + 384b_{12.3} + 816b_{13.2}$

समीकरण (ii) को (iv) से घटाने पर, आप प्राप्त करते हैं

$-93 = 110b_{12.3} + 218b_{13.2}$

समीकरण (i) को 17 द्वारा गुणा करने पर, आप प्राप्त करते हैं

$918 = 102a_{1.23} + 816b_{12.3} + 1734b_{13.2}$

समीकरण (ii) को (vi) से घटाने पर, आप प्राप्त करते हैं

$-198 = 218b_{12.3} + 454b_{13.2}$

समीकरण (v) को 109 द्वारा गुणा करने पर , आप प्राप्त करते हैं

$-10137 = 11990b_{12.3} + 23762b_{13.2}$

समीकरण (vii) को 55 द्वारा गुणा करने पर, आप प्राप्त करते हैं :

$-10890 = 11990b_{12.3} + 24970b_{13.2}$

समीकरण (viii) को (ix) से घटाने पर , आप प्राप्त करते हैं :

$753 = -1208b_{13.2}$

$$b_{13.2} = -\frac{753}{1208}$$

$= -0.623$

$b_{13.2}$ के मान को समीकरण (v) में प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं

$-93 = 110b_{12.3} + 218(-0.623)$

$$135.814 - 93 = 110b_{12.3}$$

$$b_{12.3} = \frac{42.814}{110}$$
$$= 0.389$$

$b_{12.3}$ एवं $b_{13.2}$ के मानों को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं

$$6a_{1.23} + 48(0.389) + 102(-0.623) = 54$$
$$6a_{1.23} + 18.672 - 63.546 = 54$$
$$6a_{1.23} = 54 - 18.672 + 63.546$$
$$6a_{1.23} = 98.874$$

$$a_{1.23} = \frac{98.874}{6}$$
$$= 16.479$$

सरल विधि :— यदि चरों के मानों का आकार बहुत बडा होता है, तब सामान्य समीकरणों के हल की उपरोक्त प्रणाली एक बहुत कठिन प्रकिया होती है। इस स्थिति में, वास्तविक मानों के स्थान में चरों का माध्यों से विचलन का प्रयोग संगणनात्मक प्रकिया के सरलीकरण में किया जाता है।

x_1 , का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण विचलन में निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

or

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

where

$$x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$$

आंशिक प्रतीपगमन गुणांकों ($b_{12.3}$ and $b_{13.2}$) के मानों को निम्नलिखित दो सामान्य समीकरणों के हल द्वारा प्राप्त किया जा सकता है :

$$\Sigma x_1 x_2 = b_{12.3}\Sigma x_2^2 + b_{13.2}\Sigma x_3 x_2$$
$$\Sigma x_1 x_3 = b_{12.3}\Sigma x_2 x_3 + b_{13.2}\Sigma x_3^2$$

आगे हल करने पर, आपके पास

$$b_{12.3} = \frac{(\Sigma x_1 x_2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_1 x_3)(\Sigma x_2 x_3)}{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$b_{13.2} = \frac{(\Sigma x_1 x_3)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)(\Sigma x_3 x_2)}{(\Sigma x_3^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_3 x_2)^2}$$

इसी तरीके से x_2 का x_1 एवं x_3 में, और x_3 का x_1 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण विचलन के रूप में निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$X_2 - \bar{X}_2 = b_{21.3}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{23.1}(X_3 - \bar{X}_3)$$

और

$$x_2 = b_{21.3}x_1 + b_{23.1}x_3$$

दो सामान्य समीकरण है :

$$\Sigma x_2 x_1 = b_{21.3}\Sigma x_1^2 + b_{23.1}\Sigma x_1 x_3$$

$$\Sigma x_2 x_3 = b_{21.3}\Sigma x_1 x_3 + b_{23.1}\Sigma x_3^2$$

आगे हल करने पर, आपके पास

$$b_{21.3} = \frac{(\Sigma x_2 x_1)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_2 x_3)(\Sigma x_1 x_3)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_1 x_3)^2}$$

$$b_{23.1} = \frac{(\Sigma x_2 x_3)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_2 x_1)(\Sigma x_3 x_1)}{(\Sigma x_3^2)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_3 x_1)^2}$$

x_3 का x_1 एवं x_2 में बहु प्रतीपगमन समीकरण विचलन के रूप में निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$X_3 - \bar{X}_3 = b_{31.2}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{32.1}(X_2 - \bar{X}_2)$$

या

$$x_3 = b_{31.2}x_1 + b_{32.1}x_2$$

दो सामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma x_1 x_3 = b_{31.2}\Sigma x_1^2 + b_{23.1}\Sigma x_1 x_2$$

$$\Sigma x_2 x_3 = b_{31.2}\Sigma x_1 x_2 + b_{32.1}\Sigma x_2^2$$

आगे हल करने पर, आपके पास

$$b_{31.2} = \frac{(\Sigma x_3 x_1)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_3 x_2)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$b_{32.1} = \frac{(\Sigma x_3 x_2)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_3 x_1)(\Sigma x_2 x_1)}{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_2 x_1)^2}$$

उदाहरण 12.2 निम्नलिखित आंकडों में से, x_3 का x_1 एवं x_2 में वास्तविक माध्य विधि का प्रयोग करते हुए न्यूनतम वर्ग प्रतीपगमन ज्ञात करें।

जब $x_1 = 10$ और $x_2 = 6$ पर x_3 का आंकलन भी

X_1:	3	5	6	8	12	14
X_2:	16	10	7	4	3	2
X_3:	90	72	54	42	30	12

हल :–

X_1	$x_1 = ($	x_1^2	X_2	$x_2 = (X_2$	x_2^2	X_3	$x_3 = (X_3$	x_3^2	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3
3	-5	25	16	+9	81	90	+40	1600	-45	-200	+360
5	-3	9	10	+3	9	72	+22	484	-9	-66	+66
6	-2	4	7	0	0	54	+4	16	0	-8	0
8	0	0	4	-3	9	42	-8	64	0	8	+24
12	+4	16	3	-4	16	30	-20	400	-16	-80	+80
14	+6	36	2	-5	25	12	-38	1444	-30	-228	+190
$\Sigma X_1 =$	$\Sigma x_1 = 0$	$\Sigma x_1^2 = 90$	$\Sigma X_2 = 42$	$\Sigma x_2 = 0$	$\Sigma x_2^2 = 140$	$\Sigma X_3 = 300$	$\Sigma x_3 = 0$	$\Sigma x_3^2 = 4008$	$\Sigma x_1x_2 = 100$	$\Sigma x_1x_3 = -582$	$\Sigma x_2x_3 = 720$

$$\bar{X}_1 = \frac{48}{6} = 8, \bar{X}_2 = \frac{42}{6} = 7, \bar{X}_3 = \frac{300}{6} = 50,$$

X_3 का X_1 एवं X_2 में प्रतीपगमन समीकरण है :–

$$X_3 - \bar{X}_3 = b_{31.2}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{32.1}(X_2 - \bar{X}_2)$$

$$b_{31.2} = \frac{(\Sigma x_3 x_1)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_3 x_2)(\Sigma x_1 x_2)}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{(-582)(140) - (720)(-100)}{(90)(140) - (-100)^2}$$

$$= \frac{-81480 + 72000}{12600 - 10000} = \frac{-9480}{2600} = -3.646$$

$$b_{32.1} = \frac{(\Sigma x_3 x_2)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_3 x_1)(\Sigma x_2 x_1)}{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_1^2) - (\Sigma x_2 x_1)^2}$$

$$= \frac{(720)(90) - (-582)(-100)}{(90)(140) - (-100)^2}$$

$$= \frac{64800 + 58200}{12600 - 10000} = \frac{6600}{2600} = 2.538$$

इन मानों को उपरोक्त समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं :–

$$X_3 - 50 = -3.646(X_1 - 8) + 2.538(X_2 - 7)$$

$$X_3 - 50 = -3.646X_1 + 29.168 + 2.538X_2 - 17.766$$

$$X_3 = -3.646X_1 + 2.538X_2 + 61.402$$

जब $X_1 = 10$ एवं $X_2 = 6$, हो तो ,

$$X_3 = -3.646(10) + 2.538(6) + 61.402$$

$= -36.46 + 15.228 + 61.402 = 40.17 \ or \ 40.$

उदाहरण 12.3 निम्नलिखित जानकारी दी हुई है (चरों का मापन उनके सम्बन्धित माध्यों से लिया गया है) :–

$\Sigma x_1 x_2 = 720, \Sigma x_2 x_3 = -582, \Sigma x_1 x_3 = -100$

$\Sigma x_2^2 = 4008, \Sigma x_3^2 = 90, \Sigma x_1^2 = 140$

$\bar{X}_1 = 7, \bar{X}_2 = 50, \bar{X}_3 = 8$

X_1 का X_2 एवं X_3. में बहु प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें। X_1 का आंकलन करें जब $X_2 = 10$ और $X_3 = 95$ हो

हल :– x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण निम्न द्वारा दिया जाता है।

$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$

$$b_{12.3} = \frac{(\Sigma x_1 x_2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_1 x_3)(\Sigma x_2 x_3)}{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$= \frac{(720)(90) - (-100)(-582)}{(4008)(90) - (-582)^2}$$

$$= \frac{64800 + 58200}{360720 - 338724}$$

$$= \frac{6600}{21996}$$

$= 0.30$

$$b_{13.2} = \frac{(\Sigma x_1 x_3)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)(\Sigma x_3 x_2)}{(\Sigma x_3^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_3 x_2)^2}$$

$$= \frac{(-100)(4008) - (720)(-582)}{(4008)(90) - (-582)^2}$$

$$= \frac{-400800 + 419040}{360720 - 338724}$$

$$= \frac{18240}{21996}$$

$$= 0.83$$

आप को दिया गया है : $\bar{X}_1 = 7, \bar{X}_2 = 50, \bar{X}_3 = 8$

इन मानों को उपरोक्त समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर आप प्राप्त करते हैं।

$X_1 - 7 = 0.30(X_2 - 50) + 0.83(X_3 - 8)$

या

$X_1 - 7 = 0.30X_2 - 15 + 0.83X_3 - 6.64$

$\therefore X_1 = 0.30X_2 + 0.83X_3 - 14.64$ आवश्यक समीकरण है।

जब $X_2 = 20$ एवं $X_3 = 30$ हो

$X_1 = 0.30(20) + 0.83(30) - 14.64 = 6 + 24.9 - 14.64 = 16.26$

उदाहरण 12.4 तीन चरों x_1 , x_2 एवं x_3 के लिए आंकडे नीचे दिये गए हैं।

$\Sigma x_1x_2 = 218, \quad \Sigma x_1x_3 = -198, \quad \Sigma x_2x_3 = -93$

$\Sigma x_1^2 = 454, \quad \Sigma x_2^2 = 110, \quad \Sigma x_3^2 = 90$

x_1 , x_2 एवं x_3 का मापन उनके माध्यों से हुआ है। दो आंशिक प्रतीपगमन गुणांक $(b_{12.3}\ and\ b_{13.2})$ ज्ञात करें।

हल :–

$$b_{12.3} = \frac{(\Sigma x_1x_2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_1x_3)(\Sigma x_2x_3)}{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_3^2) - (\Sigma x_2x_3)^2}$$

$$= \frac{(218)(90) - (-198)(-93)}{(90)(110) - (-93)^2}$$

$$= \frac{19620 - 18414}{9900 - 8649}$$

$$= \frac{1206}{1251}$$

$$= 0.964$$

$$b_{13.2} = \frac{(\Sigma x_1x_3)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1x_2)(\Sigma x_3x_2)}{(\Sigma x_3^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_3x_2)^2}$$

$$= \frac{(-198)(110) - (218)(-93)}{(90)(110) - (-93)^2}$$

$$= \frac{-21780 + 20274}{9900 - 8649}$$

$$= \frac{-1506}{1251}$$

$$= -1.203$$

12.2.2 बहु प्रतीपगमन समीकरण सह सम्बन्ध गुणांक के रूप में :–

जब $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ $\bar{X}_3, \sigma_1, \sigma_2$ एवं σ_3 एवं r_{12}, r_{13} एवं r_{23} दिये हुए है।, तब बहु प्रतीपगमन समीकरण को निम्नलिखित तरीके से व्यक्त किया जाता है :–

x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

or

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

जहाँ

$$x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$$

आंशिक प्रतीपगमन गुणांकों ($b_{12.3}$ and $b_{13.2}$) के मानों को निम्नलिखित सूत्र प्रयोग द्वारा निर्धारित किया जाता है :–

$$b_{12.3} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण को निम्न तरीके से भी लिखा जा सकता है :–

$$x_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]x_2 + \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]x_3$$

या

$$X_1 - \bar{X}_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right](X_2 - \bar{X}_2) + \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{23}^2}\right](X_3 - \bar{X}_3)$$

x_2 का x_1 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण

$$X_2 - \bar{X}_2 = b_{21.3}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{23.1}(X_3 - \bar{X}_3)$$

या

$$x_2 = b_{21.3}x_1 + b_{23.1}x_3$$

जहाँ,

$$b_{21.3} = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{21} - r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}\right]$$

$$b_{23.1} = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{1 - r_{31}^2}\right]$$

x_2 का x_1 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण को निम्नवत भी लिखा जा सकता है :–

$$x_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{21} - r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}\right]x_1 + \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{1 - r_{31}^2}\right]x_3$$

या

$$X_2 - \bar{X}_1 = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{21} - r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}\right](X_1 - \bar{X}_1) + \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{1 - r_{31}^2}\right](X_3 - \bar{X}_3)$$

x_3 का x_1 एवं x_2 में बहु प्रतीपगमन समीकरण

$$X_3 - \bar{X}_3 = b_{31.2}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{32.1}(X_2 - \bar{X}_2)$$

या

$$x_3 = b_{31.2}x_1 + b_{32.1}x_2$$

जहाँ,

$$b_{31.2} = \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{31} - r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right]$$

$$b_{32.1} = \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{32} - r_{31}.r_{21}}{1 - r_{21}^2}\right]$$

x_3 का x_1 एवं x_2 में बहु प्रतीपगमन को निम्नवत भी लिखा जा सकता है :–

$$x_3 = \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{31} - r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right]x_1 + \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{32} - r_{31}.r_{21}}{1 - r_{21}^2}\right]x_2$$

या

$$X_3 - \bar{X}_3 = \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right].\left[\frac{r_{31} - r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right](X_1 - \bar{X}_1) + \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{32} - r_{31}.r_{21}}{1 - r_{21}^2}\right](X_2 - \bar{X}_2)$$

ध्यान दें : $r_{12} = r_{21}, r_{23} = r_{32}, r_{13} = r_{31}$

उदाहरण 12.5 :– गणित में एक शिक्षक सेमेस्टर के दौरान दिए गए दो परीक्षा में अन्तिम परीक्षा के अंकों के सम्बन्ध को निर्धारित करना चाहता है। एक विद्यार्थी के प्रथम, द्वितीय एवं अन्तिम परीक्षा में अंक को क्रमशः x_1 , x_2 , x_3 कहा गया है , उसने कुल 120 विद्यार्थियों में से निम्नलिखित गणना की :

$\bar{X}_1 = 6.8 \quad \bar{X}_2 = 7.0 \quad \bar{X}_3 = 74$
$\sigma_1 = 1.0 \quad \sigma_2 = 0.80 \quad \sigma_3 = 9.0$
$r_{12} = 0.60 \quad r_{13} = 0.70 \quad r_{23} = 0.65$

1. उचित प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें।
2. उन दो विद्यार्थियों के अंकों का आंकलन करें जिन्हें दो परीक्षाओं में क्रमशः 9 एवं 7 , 4 एवं 8 अंक मिलें।

हल :– x_3 का x_1 एवं x_2 में उचित न्यूनतम वर्ग प्रतीपगमन समीकरण निम्न द्वारा दिया जायेगा :–

$$X_3 - \bar{X}_3 = b_{31.2}(X_1 - \bar{X}_1) + b_{32.1}(X_2 - \bar{X}_2)$$

$$b_{31.2} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.\left[\frac{r_{31} - r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}\right]$$

$$= \frac{9}{1} \times \left[\frac{(.70) - (.65)(.60)}{1 - (.60)^2}\right]$$

$$= 9 \times \left[\frac{(.70) - (.39)}{1 - (.60)^2}\right] = 9 \times \left[\frac{.31}{.64}\right] = \frac{2.79}{.64} = 4.36$$

$$b_{32.1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2}.\left[\frac{r_{32} - r_{31}.r_{21}}{1 - r_{21}^2}\right]$$

$$= \frac{9}{.80} \times \left[\frac{(.65) - (.70)(.60)}{1 - (.60)^2}\right]$$

$$= \frac{9}{.80} \times \left[\frac{.65 - .42}{0.64}\right]$$

$$= 4.04$$

इस प्रकार X_3 का X_1 एवं X_2 में प्रतीपगमन समीकरण है

$$X_3 - 74 = 4.36(X_1 - 6.8) + 4.04(X_2 - 7)$$

$$\therefore \quad X_3 = 16.07 + 4.36X_1 + 4.04X_2$$

उस विद्यार्थी के अन्तिम अंक जिसे 9 एवं 7 अंक मिले :–

जब $X_1 = 9$ एवं $X_2 = 7$

$$X_3 = 16.07 + 4.36(9) + 4.04(7)$$

$$= 16.07 + 39.24 + 28.28 = 83.59 \ or\ 84$$

उस विद्यार्थी के अन्तिम अंक जिसे 4 एवं 8 अंक मिले :–

जब $X_1 = 4$ एवं $X_2 = 8$

$$X_3 = 16.07 + 4.36(4) + 4.04(8)$$
$$= 16.07 + 17.44 + 32.32 = 65.8 \ or \ 66$$

उदाहरण 12.6 :– दिये गये निम्न से, प्रतीपगमन समीकरण निर्धारित करें :

(i) x_1 का x_2 एवं x_3 में और

(ii) x_2 का x_1 एवं x_3 में जब चरों को उनके माध्यों में से मापा जाता है :–

$r_{12} = 0.8 \quad r_{13} = 0.6 \quad r_{23} = 0.5$

$\sigma_1 = 10 \quad \sigma_2 = 8 \quad \sigma_3 = 5$

हल :– x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण जब चरों को उनके माध्यों में से मापा जाता है निम्न द्वारा दिया गया है :–

$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_2$

जहाँ

$x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$

$$b_{12.3} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right] \times \left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{10}{8}\right] \times \left[\frac{(0.8) - (0.6)(0.5)}{1 - (0.5)^2}\right] = 0.833$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right] \times \left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{10}{5}\right] \times \left[\frac{(0.6) - (0.8)(0.5)}{1 - (0.5)^2}\right] = 0.533$$

इसलिए आवश्यक प्रतीपगमन समीकरण है :

$x_1 = .833x_2 + .533x_3$

(2). x_2 का x_1 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण जब चरों को उनके माध्यों में से मापा जाता है निम्न द्वारा दिया गया है :

$x_2 = b_{21.3}x_1 + b_{23.1}x_3$

$$b_{21.3} = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right] \times \left[\frac{r_{21} - r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8}{10}\right] \times \left[\frac{(0.8) - (.5)(.6)}{1 - (.6)^2}\right] = .625$$

$$b_{23.1} = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right] \times \left[\frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{1 - r_{31}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8}{5}\right] \times \left[\frac{(.5) - (0.8)(0.6)}{1 - (.6)^2}\right] = 0.05$$

इसलिए आवश्यक प्रतीपगमन समीकरण है :

$x_2 = .625x_1 + .05\ x_3$

उदाहरण 12.7 :– आधारभूत सांख्यिकीय विषय के 15 विद्यार्थियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श को जब भारों x_1, आयु x_2 , एवं ऊँचाई x_3 के लिए अवलोकित किया तो निम्न जानकारी मिली :

$r_{12} = 0.8, r_{23} = 0.3, r_{13} = 0.5, S_1 = 8.5, S_2 = 4.5, S_3 = 2.1$

$\bar{X}_1 = 70kg, \bar{X}_2 = 22\ years\ and \bar{X}_3 = 160cms.$ ज्ञात करें।

1. बहु एवं आंशिक सह सम्बन्ध गुणांक $R_{1.23}$ एवं $r_{13.2}$
2. x_1, का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन एवं $x_2 = 25$ वर्ष एवं $x_3 = 140$ सेमी के लिए x_1 के मान का आंकलन

हल :– 1).

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.8)^2 + (0.5)^2 - 2(0.8)(0.5)(0.3)}{1 - (0.3)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.64 + 0.25 - 0.24}{0.91}} = \sqrt{\frac{0.65}{0.91}} = 0.8452$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{(0.8) - (0.5)(0.3)}{\sqrt{1 - (0.5)^2}\sqrt{1 - (0.3)^2}}$$

$$= \frac{.8 - 0.15}{\sqrt{.75} \times \sqrt{0.91}}$$

$$= \frac{0.65}{0.8261} = 0.7868$$

2). x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन निम्न द्वारा दिया गया है :

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

$$b_{12.3} = \left[\frac{S_1}{S_2}\right] \times \left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8.5}{4.5}\right] \times \left[\frac{(0.8) - (0.5)(0.3)}{1 - (.3)^2}\right] = 1.349$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{S_1}{S_3}\right] . \left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8.5}{2.1}\right] \times \left[\frac{(0.5) - (0.8)(0.3)}{1 - (.3)^2}\right] = 1.156$$

इन मानों को उपरोक्त समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं :

$$X_1 - 70 = 1.349(X_2 - 22) + 1.156(X_3 - 160)$$

$$X_1 - 70 = 1.349X_2 - 29.678 + 1.156X_3 - 184.96$$

$$\therefore X_1 = 1.349X_2 + 1.156X_3 - 144.638$$

$X_2 = 25$ एवं $X_3 = 140$ के लिए X_1 का आंकलन

जब $X_2 = 25$ एवं $X_3 = 140,$

$$X_1 = 1.349(25) + 1.156(140) - 144.638$$

$$= 33.725 + 161.84 - 144.638 = 50.927$$

उदाहरण 12.8 :– एक त्रिचर वितरण में :

$\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4, \sigma_3 = 5$

$r_{23} = 0.4, r_{31} = 0.6, r_{12} = 0.7$

1). $r_{23.1}$ एवं $R_{1.23}$ की गणना करें ।

2). x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण निर्धारित करें यदि चरों को उनके माध्यों से मापा गया है :

हल : 1).

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1 - r_{21}^2}\sqrt{1 - r_{31}^2}}$$

$$= \frac{(0.4) - (0.7)(0.6)}{\sqrt{1 - (0.7)^2}\sqrt{1 - (0.6)^2}}$$

$$= \frac{0.4 - (.42)}{\sqrt{0.51}\sqrt{0.64}}$$

$$= \frac{-0.02}{0.5713} = 0.035$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.7)^2 + (0.6)^2 - 2(0.7)(0.6)(0.4)}{1 - (0.4)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.49 + 0.36 - 0.336}{0.84}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.514}{0.84}} = 0.782$$

2). x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण जब चरों को उनके माध्यों से मापा गया है के द्वारा दिया जाता है :

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

जहॉ

$$x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$$

$$b_{12.3} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right] \times \left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{(0.7) - (0.6)(0.4)}{1 - (0.4)^2}\right]$$

$$= \frac{0.75 \times 0.46}{0.84} = \frac{0.345}{0.84} = 0.41$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right] \times \left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{5}\right] \times \left[\frac{(0.6) - (0.7)(0.4)}{1 - (0.4)^2}\right]$$

$$= \frac{0.6 \times 0.32}{0.84} = \frac{0.192}{0.84} = 0.229$$

इस प्रकार आवश्यक प्रतीपगमन समीकरण है :

$x_1 = 0.41x_2 + 0.229x_3$

12.3 बहु प्रतीपगमन के लिए आंकलन की मानक त्रुटि (या आंकलन की विश्वसनीयता)

आंकलन की मानक त्रुटि बहु प्रतीपगमन समीकरण द्वारा प्राप्त आंकलन की विश्वसनीयता द्वारा दी जाती है। यह दर्शाता है कि प्रतीपगमन समीकरण द्वारा प्राप्त आंकलित मान किस सीमा तक वास्तविक मानों के समीप है।

तीन प्रतीपगमन समीकरणों के लिए, तीन मानक त्रुटियॉ या आंकलन होते हैं :

(i) X_1 का X_2 एवं X_3 में मानक त्रुटि का आंकलन ($S_{1.23}$)

(ii) X_2 का X_1 एवं X_3 में मानक त्रुटि का आंकलन ($S_{2.13}$)

(iii) X_3 का X_1 एवं X_2 में मानक त्रुटि का आंकलन ($S_{3.12}$)

आंकलन के मानक त्रुटि की गणना के लिए सूत्र निम्नवत दिये गये हैं :

$$S_{1.23} = \sigma_1 . \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$S_{2.13} = \sigma_2 . \sqrt{\frac{1 - r_{21}^2 - r_{23}^2 - r_{13}^2 + 2r_{21}.r_{23}.r_{13}}{1 - r_{13}^2}}$$

$$S_{3.12} = \sigma_3 . \sqrt{\frac{1 - r_{31}^2 - r_{32}^2 - r_{13}^2 + 2r_{31}.r_{32}.r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$$

उदाहरण 12.9 :— यदि $r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.5, r_{23} = 0.3$ और $S_1 = 8.5$ x_1 का x_2 एवं x_3 में मानक त्रुटि के आंकलन की गणना करें।

हल :— x_1 का x_2 एवं x_3 में मानक त्रुटि के आंकलन को निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$S_{1.23} = \sigma_1 . \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= 8.5\sqrt{\frac{1-(0.8)^2-(0.5)^2-(0.3)^2+2(0.8)(0.5)(0.3)}{1-(0.3)^2}}$$

$$= 4.543$$

12.4 बहु निरूपण (R^2) का गुणांक

बहु प्रतीपगमन में निरूपण के गुणांक को $R^2_{1.23}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जो कि सरल रेखीय प्रतीपगमन में निरूपण के गुणांक r^2 के समान होता है। यह आश्रित चर X_1 में कुल विचरण का अनुपात (भाग) को निरूपित करता है जिसे बहु प्रतीपगमन समीकरण में स्वतन्त्र चरों (x_2 , x_3) द्वारा समझाया गया है । उदाहरण के लिए, यदि $R_{1.23} = 0.7252$ तब $R^2_{1.23} = 0.5259 = 0.526$

$R^2_{1.23} = 0.526$ का मान यह प्रदर्शित करता है कि 52.6 प्रतिशत आश्रित चर में विचरण को x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण को स्वतन्त्र चरों x_2 एवं x_3 द्वारा समझाया गया है।

उदाहरण 12.10 सांख्यिकी में उन्नत विषय के 15 छात्रों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श को जब भार x_1, आयु x_2 एवं ऊँचाई x_3 के लिए अवलोकित किया गया तो निम्नलिखित जानकारी प्राप्त हुई :

$r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.5, r_{23} = 0.3$

$S_1 = 8.5, S_1 = 4.5 \; and \; S_3 = 2.1$

निम्न को ज्ञात कीजिए :

(अ) आंशिक प्रतीपगमन गुणांक $b_{1.23}$ एवं $b_{13.2}$

(ब) आंकलन की मानक त्रुटि $S_{1.23}$

(स) सह सम्बन्ध गुणांक $R_{1.23}$ एवं $r_{12.3}$

(द) x_1 का x_2 एवं x_3 में बहुप्रतीपगमन गुणांक जब $\bar{X}_1 = 70kg, \bar{X}_2 = 22$ वर्ष एवं $\bar{X}_3 = 150cm$

(घ) एक विद्यार्थी का 25 (X_1) वर्ष की उम्र एवं 140 सेमी0 ऊँचाई में भार

हल :– दिया हुआ है :

$r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.5, r_{23} = 0.3$

$S_1 = 8.5, S_1 = 4.5 \; and \; S_3 = 2.1$

(अ)

$$b_{12.3} = \left[\frac{S_1}{S_2}\right] \cdot \left[\frac{r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1-r_{23}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8.5}{4.5}\right] \times \left[\frac{0.8 - (0.5)(0.3)}{1 - (0.3)^2}\right] = 1.349$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{S_1}{S_3}\right] . \left[\frac{r_{13}.r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{8.5}{2.1}\right] \times \left[\frac{(0.5) - (0.8)(0.3)}{1 - (0.3)^2}\right] = 1.156$$

(ब)

$$S_{1.23} = S_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= 8.5 \times \sqrt{\frac{1 - (0.8)^2 - (0.5)^2 - (0.3)^2 + 2(0.8)(0.5)(0.3)}{1 - (0.3)^2}}$$

$$= 8.5 \times \sqrt{\frac{1 - .64 - .25 - 0.09 + 0.24}{0.91}}$$

$$= 4.543$$

(स)

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.8)^2 + (0.5)^2 - 2(0.8)(0.5)(0.3)}{1 - (0.3)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.64 + .25 - 0.24}{0.91}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.65}{0.91}}$$

$$= 0.8452$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12}.r_{13}.r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$$= \frac{(0.8) - (0.5).(0.3)}{\sqrt{1-(0.5)^2}\sqrt{1-(0.3)^2}}$$

$$= \frac{0.65}{0.8261} = 0.7868$$

(द) x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु प्रतीपगमन समीकरण :

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आपके पास

$$X_1 - 70 = 1.349(X_2 - 22) + 1.156(X_3 - 150)$$

$$X_1 = -133.078 + 1.349X_2 + 1.156X_3$$

(घ)

$X_2 = 25$ एवं $X_3 = 140$,

$$X_1 = -133.078 + 1.349(25) + 1.156(140)$$

$$= -133.078 + 33.725 + 161.84 = 62.487$$

उदाहरण 12.11 : निम्नलिखित आंकडे दिये गये हैं x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें यदि चरों को उनके माध्यों से मापा गया हो :

$r_{12} = 0.8, \quad r_{13} = 0.6, \quad r_{23} = 0.5$

$\sigma_1 = 10, \quad \sigma_2 = 8, \quad \sigma_3 = 15$

x_1 का x_2 एवं x_3 में मानक त्रुटि का आंकलन भी ज्ञात करें।

हल :– x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण है :

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

जहॉं $x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ and $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$

$$b_{12.3} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right].\left[\frac{r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1-r_{23}^2}\right]$$

$$= \left[\frac{10}{8}\right] \times \left[\frac{0.8-(0.6)(0.5)}{1-(0.5)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{10}{8}\right] \times \left[\frac{0.8-.30}{1-.25}\right]$$

$$= \frac{10}{8} \times \frac{0.50}{0.75} = 0.833$$

$$b_{13.2} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right].\left[\frac{r_{13}.r_{12}.r_{32}}{1-r_{32}^2}\right]$$

$$= \frac{10}{5} \times \left[\frac{(0.6) - (0.8)(0.5)}{1 - (0.5)^2} \right]$$

$$= \frac{10}{5} \times \frac{0.20}{0.75}$$

$$= \frac{2}{3.75} = 0.53$$

इस प्रकार, x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण है :

$x_1 = 0.833x_2 + 0.53x_3$

x_1 का x_2 एवं x_3 में मानक त्रुटि का आंकलन

$$S_{1.23} = \sigma_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$= 10. \sqrt{\frac{1 - (0.8)^2 - (0.6)^2 - (0.5)^2 + 2(0.8)(0.6)(0.5)}{1 - (0.5)^2}}$$

$$= 10. \sqrt{\frac{1 - .64 - .36 - .25 + .48}{0.75}}$$

$$= 10. \sqrt{\frac{.23}{0.75}}$$

$$= 10 \times .5537 = 5.537$$

उदाहरण 12.12 तीन चरों x_1 का x_2 एवं x_3 के मापन से निम्नलिखित मान प्राप्त किये गए

$\bar{X}_1 = 6.8$ $\quad \bar{X}_2 = 7.0$ $\quad \bar{X}_3 = 7.4$

$S_1 = 1.0$ $\quad S_2 = 0.80$ $\quad S_3 = 0.90$

$r_{12} = 0.60$ $\quad r_{13} = 0.70$ $\quad r_{23} = 0.65$

(i) X_1 का X_2 एंव X_3 में प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें।

(ii) $X_2 = 10$ एंव $X_3 = 9$ के लिए X_1 के मान का आंकलन करें।

(iii) बहु निरापण गुणांकों $R_{1.23}^2$ को r_{12} एवं $r_{12.3}$ से ज्ञात करें।

हल :– x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीकरण निम्नवत दिया जाता है :–

$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$....(i)

जहॉ

$$b_{12.3} = \frac{S_1}{S_2}\left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{0.80}\left[\frac{0.60 - 0.70 \times 0.65}{1 - (0.65)^2}\right]$$

or

$$b_{12.3} = (1.25)\left[\frac{0.60 - 0.455}{0.578}\right] = 0.313$$

$$b_{13.2} = \frac{S_1}{S_2}.\left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{0.90}\left[\frac{0.70 - 0.60 \times 0.65}{1 - (0.65)^2}\right]$$

$$= (1.111)\left[\frac{0.70 - 0.39}{0.578}\right] = 0.595$$

इन मानों को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर, आपके पास

$X_1 - 6.8 = 0.313(X_2 - 7.0) + 0.595(X_3 - 7.4)$

$X_1 = 0.206 + 0.313X_2 + 0.595X_3$

(ii) $X_2 = 10$ एवं $X_3 = 9$ के लिए उपरोक्त प्रतीपगमन में प्रतिस्थापित करने पर एवं x_1 के लिए हल करने पर

$X_1 = 0.206 + 0.313(10) + 0.595(9) = 8.691$

(iii) बहु एवं आंशिक सह सम्बन्ध इस रूप में सम्बन्धित होते हैं :

$R_{12.3}^2 = 1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13}.r_{12}.r_{32}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}\sqrt{1 - r_{32}^2}}$$

$$= \frac{0.70 - 0.60 \times 0.65}{\sqrt{1 - (0.60)^2}\sqrt{1 - (0.65)^2}}$$

$$= \frac{0.70 - 0.39}{0.8 \times 0.760} = 0.509$$

or,

$r_{13.2}^2 = 0.259$

r_{12}^2 एवं $r_{13.2}^2$ के मानों को $R_{1.23}^2$ के लिए प्रतिस्थापित करने पर आपके पास

$R_{1.23}^2 = 1 - (1 - 0.36)(1 - 0.259) = 0.526$

उदाहरण 12.13 एक विचर वितरण में :

$$\bar{X}_1 = 28.02, \bar{X}_2 = 4.91, \bar{X}_3 = 594, S_1 = 4.4, S_2 = 1.1, S_3 = 80$$
$$r_{12} = 0.80, r_{23} = -0.56, r_{31} = -0.40$$

(i) $r_{23.1}$ एवं $R_{1.23}$ सह सम्बन्ध ज्ञात करें।

(ii) X_1 के मान का आंकलन करें जब $X_2 = 6.0$ एवं $X_3 = 650$

हल :–

(i)

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{21}.r_{31}}{\sqrt{1 - r_{21}^2}\sqrt{1 - r_{31}^2}}$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं

$$r_{23.1} = \frac{-0.56 - (0.80).(-0.40)}{\sqrt{1 - (0.80)^2}\sqrt{1 - (-0.40)^2}}$$

$$= \frac{-0.56 + .32}{\sqrt{1 - .64}\sqrt{1 - .16}}$$

$$= \frac{-0.24}{0.6 \times 0.916}$$

$$= -0.436$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}.r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{(0.80)^2 + (-0.40)^2 + 2(0.80)(-0.40)(-0.56)}{1 - (-0.56)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.64 + .16 - .3584}{1 - .3136}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.4416}{0.6864}} = 0.802$$

(ii) X_1 का X_2 एवं X_3 के लिए रैखिक प्रतीपगमन समीकरण निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

$$b_{12.3} = \frac{S_1}{S_2}\left[\frac{r_{12} - r_{13}.r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right]$$

$$= \frac{4.4}{1.1}\left[\frac{0.80 - 0.224}{0.6864}\right]$$

$$= \frac{4.4}{1.1}\left[\frac{0.576}{0.6864}\right] = 3.357$$

$$b_{13.2} = \frac{S_1}{S_2}.\left[\frac{r_{13} - r_{12}.r_{32}}{1 - r_{32}^2}\right]$$

$$= \frac{4.4}{80}.\left[\frac{-0.40 - (0.80)(-0.56)}{1 - (-.56)^2}\right]$$

$$= \frac{4.4}{80}\left[\frac{-0.40 + 0.448}{0.6884}\right]$$

$$= \frac{4.4}{80}\left[\frac{0.048}{0.6864}\right]$$

$$= 0.0038 \; or \; 0.004$$

iii) इन मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, आप प्राप्त करते हैं,

$$X_1 - 28.02 = 3.357(X_2 - 4.91) + .004(X_3 - 594)$$

या

$$X_1 - 28.02 = 3.357X_2 - 16.4828 + .004X_3 - 2.376$$

$$X_1 = 3.357X_2 + .004X_3 + 9.1612$$

(iv) वित X_2 एवं X_3 के लिए X_1 का आंकलन

जब $X_2 = 6.00, X_2 = 650, \quad X_1 = 3.357(6.00) + .004(650) + 9.1612$

$= 20.142 + 2.6 + 9.1612$

$= 31.9032$

12.5 सारांश

सम्पूर्ण में, बहु प्रतीपगमन सामान्य प्रतीपगमन के तकनीकी का एक विस्तार होता है जिसके अन्तर्गत तीन एवं अधिक चरों के मध्य पारस्परिक सम्बन्धता का अध्ययन किया जाता है एवं दिये हुए स्वतन्त्र चरों के लिए आश्रित चर का सबसे संभाव्य मान का आंकलन किया जाता है। बहु प्रतीपगमन समीकरणों पर कार्य बहु प्रतीपगमन तरीकों में सामान्य समीकरण एवं सरल सह सम्बन्ध गुणांक के रूप में बहु प्रतीपगमन द्वारा किया जा सकता है। इसके आगे, आंकलन की मानक त्रुटि दिये गये बहु प्रतीपगमन समीकरण द्वारा आंकलनों की विश्वसनीयता को मापती है। यह दर्शाता है कि दिये गये प्रतीपगमन समीकरणों द्वारा आंकलित मान किस सीमा तक वास्तविक मानों के समीप हैं जहॉ तक बहु प्रतीपगमन $R^2_{1.23}$ में निरूपण गुणांक सम्बन्धित हैं, यह आश्रित चर X_1 में कुल विचरण के अनुपात को निरूपित करता है जिसे बहु प्रतीपगमन समीकरण में स्वतन्त्र चरों $(X_1\ and\ X_2)$ द्वारा वर्णित किया गया होता है।

12.6 शब्दावली

बहु प्रतीपगमनः यह सरल प्रतीपगमन तकनीक का विस्तार होता है जिसके अन्तर्गत आप तीन या अधिक चरों के मध्य परस्पर सम्बन्ध का अध्ययन करते है। ।

12.7 बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित आंकडों में से , x_1 , x_2 एवं x_3 का न्यूनतम वर्ग प्रतीपगमन ज्ञात करें और $X_2 = 16$ और $X_3 = 4$ के दिये हुए मानों के लिए x_1 के मान का आंकलन करें :

X_1:	10	5	10	4	8
X_2:	16	13	21	10	13
X_3:	3	6	4	5	3

2. समीकरण $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ के लिए निम्नलिखित आंकडों में से b_0, b_1 एवं b_2 के मानों की गणना करें :

Y:	3	5	6	8	12	14
X_1:	16	10	7	4	3	2
X_2:	90	72	54	42	30	12

3. निम्नलिखित आंकडों में से बहु रैखिक प्रतीपगमन प्रारूप $Y = \beta_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3$ के प्राचल ज्ञात करें :

$$\text{N} = 6, \Sigma Y = 54, \Sigma X_2 = 48, \Sigma X_3 = 102$$

$$\Sigma YX_2 = 339, \Sigma YX_3 = 720, \Sigma X_2X_3 = 1034, \Sigma X_2^2 = 494, \Sigma X_3^2 = 2188$$

4. निम्नलिखित आंकडों के समूह के लिए वास्तविक माध्य विधि का प्रयोग करते हुए x_1 का x_2 एवं x_3 के लिए बहु प्रतीपगमन ज्ञात करें। x_1 के मान का पूर्वानुमान करें जब $x_2 = 5$ एवं $x_3 = 7$

X_1:	12	24	32	28
X_2:	6	12	16	22
X_3:	4	6	12	18

5. नीचे दिये गए आंकडों में से, वास्तविक माध्य विधि का प्रयोग करते हुए x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु रैखिय प्रतीपगमन ज्ञात करें।

X_1:	4	6	7	9	13	15
X_2:	15	12	8	6	4	3
X_3:	30	24	20	14	10	4

6. नीचे दिये गए आंकडों में से, वास्तविक माध्य विधि का प्रयोग करते हुए x_1 का x_2 एवं x_3 में बहु रैखिय प्रतीपगमन ज्ञात करें।

X_1:	18	20	17	14	21
X_2:	38	40	25	28	44
X_3:	20	15	5	12	18

7. निम्नलिखित जानकारी दी गई है (चरों को उनके सम्बन्धित माध्यों से मापा गया है)

$$\Sigma x_1x_2 = 1900,\quad \Sigma x_1x_3 = -20,\quad \Sigma x_2x_3 = -50$$
$$\Sigma x_1^2 = 1350,\quad \Sigma x_2^2 = 2800,\quad \Sigma x_3^2 = 24$$
$$\overline{X}_1 = 65,\quad \overline{X}_2 = 55,\quad \overline{X}_3 = 30$$

आंशिक प्रतीपगमन गुणांकों $(b_{12.3}\ and\ b_{13.2})$ को ज्ञात करें।

x_1 के मान का आंकलन भी करें जब $x_2 = 60$ और $x_3 = 25$ हो ।

8. निम्नलिखित जानकारी दी गई है (चरों को उनके सम्बन्धिता माध्यों से मापा गया है)

$$\Sigma x_1^2 = 1350,\quad \Sigma x_2^2 = 2800,\quad \Sigma x_3^2 = 24$$
$$\Sigma x_1x_2 = 1900,\quad \Sigma x_1x_3 = -20,\quad \Sigma x_2x_3 = -50$$

x_1 का x_2 एवं x_3 में प्रतीपगमन समीरण निर्धारित करें।

12.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. [$X_1 = 4.753 + 0.502\,X_2 - 1.115\,X_3, 8.325$]
2. [$Y = 16.1067 + .426\,X_1 - 0.221\,X_2$]
3. [$Y = 16.479 + 0.389\,X_2 - 0.623\,X_3$]
4. [$X_1 = 2.577 + 1.661\,X_2 + 0.0169\,X_3, X_1 = 110$]
5. [$X_1 = 16.479\,X_2 + 0.623\,X_3$]
6. [$X_1 = 0.5\,X_2 - 0.36\,X_3 + 5.54$]
7. [$b_{12.3} = 0.689, b_{13.2} = 0.603, X_1 = 65.43$]

8. [$X_1 = 0.689\, X_2 + .603\, X_3$]

12.9 स्वपरख प्रश्न

1. निम्नलिखित नियंताकों को 300 अण्डों के लम्बाई के मापन मिमी (x_1), आयतन c.c. में (x_2) एवं भार (x_3) ग्राम में से प्राप्त किया :

$\bar{X}_1 = 55.95 \quad S_1 = 2.26 \quad r_{12} = 0.578$

$\bar{X}_2 = 51.48 \quad S_2 = 4.39 \quad r_{13} = 0.581$

$\bar{X}_3 = 56.03 \quad S_3 = 4.41 \quad r_{23} = 0.974$

अण्डे के भार का अण्डे की लम्बाई एवं अण्डे के आयतन में रैखिय प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करे। इसलिए अण्डे के भार का आंकलन कीजिए जिसकी लम्बाई 58 मिमी0 एवं आयतन 52.5 c.c.

2. एक त्रिचरीय वितरण में :

$$\sigma_1 = 2.7, \quad \sigma_2 = 2.4, \quad \sigma_3 = 2.7$$
$$r_{12} = 0.28, \quad r_{23} = 0.49, \quad r_{31} = 0.51$$

x_3 का x_1 एवं x_2 में प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें यदि चरों को उनके माध्य में से मापा गया हो।

3. निम्नलिखित आंकडे दिये गए हैं :

$\bar{X}_1 = 6, \quad \bar{X}_2 = 7, \quad \bar{X}_3 = 8$

$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 3$

$r_{12} = 0.6, \quad r_{13} = 0.7, \quad r_{23} = 0.8$

x_3 का x_1 एवं x_2 में रैखिय प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें। इस प्रकार x_3 का आंकलन करें जब $X_1 = 4$ एवं $X_2 = 5$ हो।

4. यदि $r_{12} = 0.926, r_{13} = 0.891, r_{23} = 0.955$ एवं $S_1 = 1.51$, X_1 का X_2 एवं $X_3 (S_{1.23})$ में मानक त्रुटि के आंकलन की गणना करें।

5. निम्नलिखित आंकडे दिये गये हैं

$\bar{X}_1 = 55 \quad S_1 = 5 \quad r_{12} = 0.57$

$\bar{X}_2 = 51 \quad S_2 = 7 \quad r_{13} = 0.58$

$\bar{X}_3 = 56 \quad S_3 = 9 \quad r_{23} = 0.97$

गणना करें

1) x_3 का x_1 एवं x_2 में बहु प्रतीपगमन

2) बहु सह सम्बन्ध गुणांक $R_{1.23}$

6. निम्नलिखित आंकडों में से :

$r_{12} = 0.8, r_{13} = 0.5, r_{23} = 0.3$

$S_1 = 8.5, S_2 = 4.5\ and\ S_3 = 2.1$

(i) x_1 का x_2 एवं x_3 में $\bar{X}_1 = 70kg, \bar{X}_2 = 22$ वर्ष एवं $\bar{X}_3 = 150cm$ के साथ प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करें।

(ii) X_1 का $X_2 = 25$ वर्ष एवं $X_3 = 140cm,$ के लिए मान आंकलित कीजिए

(iii) बहु निरूपण गुणांक $R^2_{1.23}$ को r_{12} एवं $r_{13.2}$ में से ज्ञात कीजिए । R^2 क्या इंगित करता है ?

उत्तर

1. [$X_3 = 3.54 + 0.052X_1 + 0.963X_2, X_3 = 57.11\ gms.$]
2. [$x_3 = 0.405x_1 + 0.424x_2$]
3. [$x_3 = -4.41 + 1.03x_1 + 0.89x_2, x_3 = 4.16$]
4. [$S_{1.23} = 0.5702$]
5. [$X_3 = 0.08X_1 + 1.21X_2 - 10.11, R_{1.23} = 0.97$]
6. [$X_1 = 1.349X_2 + 1.156X_3 - 133.078, X_1 = 62.487 R^2_{1.23} = 0.7443, R^2$ इंगित करता है कि 74.43 प्रतिशत x_1 में विचरण बहु प्रतीपगमन समीकरण द्वारा परिभाषित है।

12.10 संदर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकीय – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 13 सांख्यिकी गुणवत्ता नियंत्रण के प्रकार व तकनीकें (Types and Techniques of Statistical Quality Control)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- संख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण का अर्थ समझ सकें ।
- गुणवत्ता नियंत्रण के लाभों की व्याख्या कर सकें।
- गुणवत्ता नियंत्रण की सीमाओं का वर्णन कर सकें।
- गुणवत्ता विशेषताओं में भिन्नता के कारणों की व्याख्या कर सकें।
- संख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की विधियों का वर्णन कर सकें।
- सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की तकनीकें और चरों के लिए नियंत्रण लेखाचित्र का वर्णन कर सकें।

13.1 प्रस्तावना

प्रतिस्पर्धा के इस युग में, गुणात्मक उत्पादों के उत्पादन के लिए निर्माताओं के बाजार में प्रवेश करने की सरल आवश्यकता है और उनके द्वारा उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता पर लगातार नजर रख सके। लेकिन, बढे पैमाने पर उत्पादन स्तर के कारण उत्पादक द्वारा उत्पादित प्रत्येक वस्तु की गुणवत्ता की जॉच करने के लिए यह सभंव नहीं है। इसलिए, विनिर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता को नियंत्रित करने के लिए, सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण (SQC) का अध्ययन बहुत प्रासंगिक और उपयोगी हो जाता है।

13.2 सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण का अर्थ

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण विनिर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता को नियंत्रित करने में सांख्यिकीय तकनीकों के उपयोग को संदर्भित करता है। यह गुणवत्ता विनिर्देशों को स्थापित और प्राप्त करने का तरीका है, जिसमें आंकडों के उपकरणों और तकनीकों के उपयोग की आवश्यकता होती है। यह विनिर्मित उत्पादों के निरंतर प्रवाह में समान गुवत्ता के रखरखाव के लिए संभाव्यता के सिद्धान्त और नमूने के सिद्धान्त का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है। SQC का प्रमुख उपकरण एक नियंत्रण लेखाचित्र है जो सबसे पहले सामान्य वितरण के माध्यम से डब्लू0 ए0 रोबार्ट द्वारा पेश किया गया था।

कुछ महत्वपूर्ण सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की परिभाषाऐं नीचे दी गई हैं।

1. ''सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण को आसानी से यादृच्छिक नमूनों के साथ निरंतर परीक्षण के आधार पर विनिर्देश, उत्पादन और निरीक्षण की सम्पूर्ण परिचालन प्रक्रिया मे ंउत्पादन की गुणवत्ता को बनाए रखने और सुधारने की आर्थिक और प्रभावी प्रणाली के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।''
2. सांख्यिकीय गुणवत्त नियंत्रण को उपकरणों के एक समूह के रूप में देखा जाना चाहिए, जो विनिर्देश उत्पादन या निरीक्षण के कार्यों के फैसले को प्रभावित कर सकते हैं। **यूजीन एल0 ग्रान्ट**

उपरोक्त परिभाषाओं से , SQC की आवश्यक विशेषताओं को इस तरीके से लाया जा सकता है:

(1) यह विपणन के लिए उत्पादित वस्तुओं कें गुणवत्ता मानक को नियंत्रित करने के लिए तैयार किया जाता है।

(2) यह उत्पादकों द्वारा वस्तुओं की गुणवत्ता का मूल्यांकन करने के लिए उत्पादन प्रक्रिया के दौरान प्रयोग किया जाता है।

(3) यह कुछ सांख्यिकीय उपकरणों जैस कि माध्य लेखाचित्र , विचरण लेखाचित्र, P लेखाचित्र, C लेखाचित्र, नमूनाकरण निरीक्षण योजना इत्यादि की सहायता से किया जाता है।

(4) यह गुणवत्ता की विविधताओं को निर्धारित करने एवं वस्तुओं की सहिष्णुता की सीमाओं के लिए तैयार किया जाता है।

13.3 सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण के लाभ

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण के निम्नलिखित लाभ हैं :–

1. यह उत्पादन प्रक्रिया के दौरान उत्पाद की गुणवत्ता को नियंत्रित करने की एक उद्देश्य विधि प्रदान करता है। यह उत्पादन प्रबंधक को एक दृष्टि मे बताता है कि उत्पाद की गुणवत्ता नियंत्रण में है या नहीं ।
2. यह भिन्नता के असाधारण कारकों को समाप्त करने के लिए एक त्वरित विधि प्रदान करता है। सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की तकनीक का उपयोग करके हम भिन्न रूपों के असाधारण कारणों का पता लगा सकते हैं और उनसे बचने के लिए आवश्यक उपाय किए जा सकते हैं।
3. यह कम निरीक्षण लागत पर बेहतर गुणवत्ता आश्वासन प्रदान करता है। नमूनाकरण निरीक्षण हमेशा 100 प्रतिशत निरीक्षण के साथ सस्ता होता है। नियंत्रण लेखाचित्र व्याख्यात्मक और आर्थिक रूप से आसान है।
4. स्वीकृत नमूने उपभोक्ताओं के हितों की सुरक्षा करती है तो वे बहुत खराब गुणवत्ता को अस्वीकार कर सकें । यह उत्पादकों के लिए भी उपयोगी है क्योंकि उन्हें बहुत अच्छा होने की संभावना से अवगत कराया जाता है।
5. विनिर्माण संयंत्र मे सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की बहुत उपस्थिति का श्रमिकों के मनोदशा पर एक स्वस्थ प्रभाव पडता है और उन्हें गुणवत्ता के प्रति जागरूक बनाता है । उन्हें पता चलता है कि गुणवत्ता की जांच हो रही है।
6. एक गुणवत्ता वाला जागरूक उत्पादन इकाई अपने उत्पाद के उपभोक्ताओं से सद्भावना अर्जित करने मे सक्षम है जो कि लम्बी अवधि मे विशाल मूल्य का है।
7. गुणवत्ता नियंत्रण पर पिछले आंकडे एक नए संयंत्र और मशीनरी के साथ साथ तकनीकी कर्मचारियों की पसंद के लिए एक मार्गदर्शिका के रूप मे सेवा कर सकते हैं।
8. गुणवत्ता नियंत्रण दस्तावेज के आधार पर किसी भी सरकारी संस्था से पहले उत्पादन की गुणवत्ता को परिभाषित करना संभव है।

13.4 सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की सीमाऐं

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण के अपार महत्व के बाद SQC की तकनीकें कुछ सीमाओं से ग्रस्त हैं, जैसा कि निम्नवत है :

1. इसे अंधाधुंध रूप से सभी गुणवत्ता वाले बुराईयों के लिए एक रामबाण के रूप मे लागू नहीं किया जा सकता है।
2. इसका प्रयोग यांत्रिक तौर पर अपने असामान्य वातावरण का अध्ययन करने के बिना सभी उत्पादन प्रक्रियाओं के लिए नहीं किया जा सकता ।
3. गुणवत्ता में विविधताओं के विश्लेषण और व्याख्या की प्रक्रिया मे गणितीय सांख्यिकीय समस्याओं को ही शामिल करता है ।
4. यह केवल सूचना सेवाएं प्रदान करता है।

13.5 गुणवत्ता विशेषताओं मे भिन्नता के कारण

प्रत्येक निर्माता पूर्व निर्धारित मानकों के अनुसार उत्पाद का उत्पादन करता है। हालांकि उत्पाद को सबसे अधिक परिष्कृत तकनीक के साथ पूर्ण किया जाता है, उत्पादों की गुणवत्ता में कुछ भिन्नताऐं होती हैं, उदाहरण के लिए, यह संभव नहीं है कि कारखाने में उत्पादित सभी पिन, नट या बोल्ट्स एक ही गुणवत्ता के समान होंगे हालांकि कुछ भिन्नताऐं होनी चाहिए, लेकिन यह छोटी छोटी वस्तुओं की गुणवत्ता मे हो सकती है। इस भिन्नता के विभिन्न कारण हो सकते हैं इन कारणों को दो समूहों में वर्गीकृत किया जाता है:—

1. **निर्धारित करने योग्य कारण** :— इन कारणों से, जैसा कि नाम का सुझाव दिया गया है, उत्पादों की गुणवत्ता में उन परिवर्तनों को संदर्भित किया जा सकता है जो दोषपूर्ण सामग्रियों, दोषपूर्ण श्रम, दोषपूर्ण मशीन आदि जैसे किसी विशेष कारण को सौंपा जा सकता है बदलाओं का असर नियंत्रण के बेहतर तंत्र के साथ समाप्त हो सकता है जैसे SQC।
2. **संभावना योग्य कारण** :— इन कारणों से, जैसा कि नाम का सुझाव दिया गया है, संभावना संचयी प्रभाव के परिणामस्वरूप यादृच्छिक रूप में होता है और इसलिए इसे किसी उत्पादन योजना में भिन्नता के रूप मे स्वीकार किया जाता है। इन दो प्रकार के कारणों से, संभावना के कारणों के बारे में कुछ भी नहीं कहा जा सकता है। हालांकि निर्धारित बदलावों का पता लगाया जा सकता है और उन्हें सही किया जा सकता है।

13.6 सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की विधियॉं

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की दो प्रकार की विधियॉं होती है जिनहें कारखाना संचालन के भिन्न भिन्न चरणों मे प्रयोग किया जाता है। वे निम्नानुसार हैं :—

13.6.1. प्रकिया नियंत्रण :—

प्रक्रिया नियंत्रण के अन्तर्गत, उत्पादों की गुणवत्ता नियंत्रण मे होती है जबकि उत्पाद, उप्पादन की प्रक्रिया में होते हैं। नियंत्रण प्रक्रिया नियंत्रण लेखाचित्र के साथ सुरक्षित है। नियंत्रण लेखाचित्र का उपयोग न केवल उत्पादन गुणवत्ता नियंत्रण की माप के रूप मे किया जाता है अपितु इसका उपयोग विज्ञापन, पैकिंग, एअरलाइन आरक्षण इत्यादि क्षेत्रों में भी किया जाता है। नियंत्रण लेखाचित्र सुनिश्चित करते हैं कि क्या उत्पाद निर्दिष्ट गुणवत्ता मानक की पुष्टि करते हैं या नहीं ।

13.6.2 उत्पाद नियंत्रण :—

उत्पाद नियंत्रण के अर्न्तगत, उत्पादों की गुणवत्ता नियंत्रित होती है जबकि उत्पाद ग्राहकों के बिक्री और प्रेषण के लिए तैयार है । उत्पाद नियंत्रण स्वीकृति नमूने के साथ सुरक्षित होता है। स्वीकृति नमूने मे निर्मित वस्तु बहुत सारे बनते हैं, कुछ वस्तु यादृच्छिक चुने जाते हैं निश्चित नियमों के आधार पर कुछ ढेर यादृच्छिक चुने जाते हैं और उनमे से कुछ स्वीकार किये जाते हैं, आमतौर पर इसे नमूना निरीक्षण योजना कहा जाता है। इस प्रकार, प्रक्रिया नियंत्रण वस्तु की गुणवत्ता नियंत्रण की

उत्पादन प्रक्रिया अवधि के साथ संबंधित है जबकि उत्पाद नियंत्रण तैयार हुए वस्तुओं के निरीक्षण के साथ सम्बन्धित है, जब वे वितरण के लिए तैयार है।

13.7 नियंत्रण लेखाचित्र

उत्पादन प्रक्रिया में भिन्नता के अप्राकृतिक तरीका और अनुमेय सीमा का निर्धारण करने के लिए नियंत्रण लेखाचित्र उत्पादन प्रक्रिया में भिन्नता के अप्राकृतिक तरीके और संभावना और नमूने के अनुमेय सीमा का निर्धारण करने के लिए बाल्टर ए0 शेवार्ट द्वारा विकसित रेखाचित्रीय उपकरण है । नियंत्रण लेखाचित्र सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण के केन्द्रभाग है। ये संभावना और नमूने के सिद्धान्त पर आधारित है। नियंत्रण लेखाचित्र निर्माण मे सरल और व्याख्या में आसान है और ये उत्पादन प्रबंधक को एक नजर में बताते हैं कि प्रक्रिया नियंत्रण मे है या नहीं अर्थात् सहिष्णुता सीमा के भीतर, एक नियंत्रण लेखाचित्र में तीन क्षैतिज रेखाएं होती हैं (1) केन्द्रीय रेखा (CL) (2) ऊपरी नियंत्रण सीमा (UCL), और (3) निचली नियंत्रण सीमा (LCL)

13.7.1 केन्द्रीय रेखा (CL)

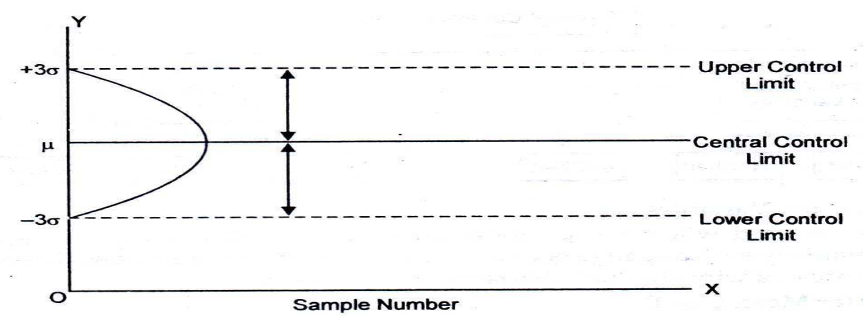
केन्द्रीय रेखा लेखाचित्र की मध्यम रेखा हें यह नमूनों के उच्च औसत की मापों को इंगित करती है। यह वांछनीय मानक या प्रक्रिया के स्तर को दर्शाती है। केन्द्रीय रेखा को सामान्यतः स्पष्ट रेखा द्वारा तैयार किया जाता है।

13.7.2 ऊपरी नियंत्रण सीमा (UCL) :–

ऊपरी नियंत्रण सीमा सामान्यतः उच्च औसत में 3 सिग्मा (3σ) जोडने के द्वारा प्राप्त किया जाता हैं इसे माध्य $+3\sigma$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता हैं ऊपरी नियंत्रण सीमा को सामानयतः बिन्दुकित रेखा द्वारा तैयार किया जाता है।

13.7.3 निचली नियंत्रण सीमा (CLC) :–

निचली नियंत्रण सीमा सामान्यतः उच्च औसत में से 3 सिग्मा (3σ) घटाने के बाद प्रापत की जाती है। इसे माध्य (3σ) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। ऊपरी नियंत्रण सीमा की तरह इसे भी बिन्दुकित रेखा द्वारा तेयार किया जाता है इन तीनों रेखाओं के आधार पर, एक नियंत्रण रेखचित का निर्माण किया जाता है। नियंत्रण लेखाचित्र का सामान्य स्परूप नीचे आरेख में दिया गया है :–



नियंत्रण लेखाचित्र में आंकडों के माध्य मानों (जैसे, माध्य, विचरण, मानक विचलन आदि) की एक दृश्य स्पष्टता प्रदान करने के लिए लगातार नमूने रेखांकित किए जाते हे। और प्रायः टूटी हुई रेखाओं से जुड जाते हैं जब तक, नमूना बिन्दु

ऊपरी और निचले नियंत्रण सीमाओं के भतर आते हैं चिंता की कोई बात नहीं है और ऐसी परिस्थितियों में नमूने के बीच भिन्नता का कारण संभावना के कारण होता है।

13.8 ± 30 पर नियंत्रण सीमाओं की स्थापना के लिए तर्क

डॉ0 शेवार्ट ने नियंत्रण लेखाचित्र के लिए 3σ सीमा को प्रस्तावित किया। प्रायिकता में से , यदि एक चर X सामान्य रूप से वितरित है, तो यादृच्छिक चर की प्रायिकता $\bar{x} \pm 3\sigma$ के बीच होगी। जहॉ, $\bar{x}$ माध्य है और σ मानक विचलन (0.9973) है जोकि बहुत अधिक है। इस प्रकार, यादृच्छिक चर के इन सीमाओं से बाहर होने की प्रयिकता 0.0027 है, जोकि बहुत कम है। दूसरे शब्दों में सीमाओं $\bar{x} \pm 3\sigma$ के पार घटनाओं का घटित होना वर्शते सामान्य वक्र में घटनाओं का होना है, सामान्य परिस्थितियों मे 1000 घटनाओं में से लगभग 3 बहुत ही दूरस्थ है। इस प्रकार यदि $\pm 3\sigma$ सीमाऐं नियोजित होती है और चर गुणवत्ता मानी हुई सामान्य वितरित विोषता है तब नमूना अंक के इन सीमाओं से बाहर होने की संभावना जब प्रक्रिया नियंत्रण बहुत कम होती है।

13.9 नियंत्रण लेखाचित्र के उद्देश्य एवं उपयोग

नियंत्रण लेखाचित्र निम्न परिस्थितियों में उपयोगी है :–

1. यह प्रकिया के दौरान उत्पन्न होने वाले उत्पादों के गुणवत्ता मानक को निर्धारित करने मे ंसहायता करता है।
2. यह गुणवत्ता के मानकों मे ंसंभावना और उत्पादों के दो नियंत्रण सीमा रेखाओं की नियत भिन्नता का पता लगाने में सहायता करता है।
3. यह वांछित स्तर से उत्पादों के गुणवत्ता मानकों में विविधताओं का पता लगता है।
4. यह इंगित करता है कि क्या उत्पादन प्रक्रिया नियंत्रण में है या नहीं इसके लिए आवश्यक सुधार क्रम उढाता है।
5. नियंत्रण लेखाचित्र निर्माण एवं व्याख्या में होते है।
6. यह प्रक्रिया नियंत्रण मे ंकम निरीक्षण लागत और समय सुनिश्चित करता है।
7. नियंत्रण लेखाचित्र उत्पादन प्रबंधक को एक नजर में बताता है कि क्या प्रक्रिया नियंत्रण में है या नहीं ।

13.10 नियंत्रण लेखाचित्र के प्रकार

नियंत्रण लेखाचित्र क्या किसी दिए गए उत्पाद की गुणवत्ता या विशेषता मापने योग्य है या नही, के आधार पर दो प्रकार के होते है। ये है :–

(अ) चरों के लिए नियंत्रण लेखाचित्र

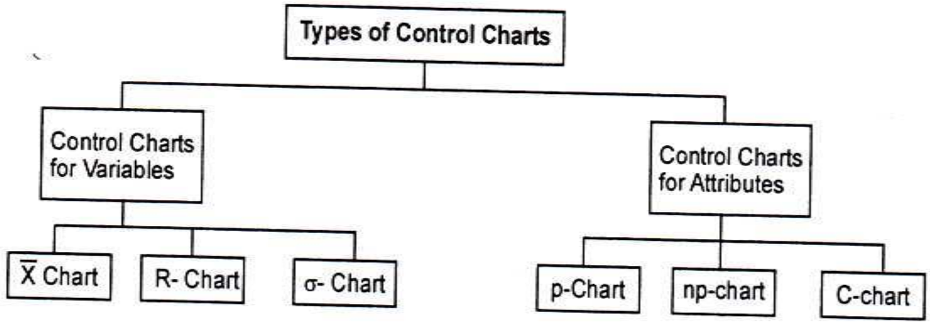
I. $\bar{x}$ – लेखाचित्र

II. R – लेखाचित्र

III. σ – लेखाचित्र

(ब) विशेषताओं के लिए नियंत्रण लेखाचित्र (जिसे आप अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे)

I. p – लेखाचित्र
II. np – लेखाचित्र
III. c – लेखाचित्र



13.10.1 चरों के लिए नियंत्रण लेखाचित्र :–

इन लेखाचित्रों का उपयोग तब किया जाता है। जब किसी उत्पाद की गुणवत्ता या विशेषताओं को मात्रात्मक रूप मे मापा जाता हैं जैसे स्टील वाक्स की माप, स्क्रू का व्यास, स्टील पाइप की तन्यता शक्ति, तार का प्रतिरोध आदि । ऐसे लेखाचित्र तीन प्रकार के होते हैं :–

(i) $\bar{x}$ लेखाचित्र यह लेखाचित्र उत्पादन प्रकिया मे उत्पादों की औसत गुणवत्ता मानक में भिन्नताओं को नियंत्रित करने के लिए तैयार किया जाता है।

प्रक्रिया : $\bar{x}$ के निर्माण में निम्नलिखित चरण शामिल हैं

1. प्रत्येक नमूने के माध्य की गणना करें, अर्थात् $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$..........$\bar{x}_k$
2. नमूने माध्य के माध्य को नमूने माध्य के योग द्वारा नमूना संख्या से विभाजित करें अर्थात

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 --- \bar{x}_k}{No\ of\ Samples} = \frac{\sum \bar{x}}{k}$$

जहाँ k नमूनो की संख्या

यह उच्च माध्य $\bar{x}$ केन्द्रीय रेखा (CL) को प्रदर्शित करती है।

3. निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हुए नियंत्रण सीमाऐं निर्धारित करें

(अ) समग्र के मानक विचलन σ के आधार पर नियंत्रण सीमाऐं

$$= \bar{x} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

इसलिए

$$UCL = \bar{x} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$ और

$$LCL = \bar{x} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

ये नियंत्रण सीमाऐं ऊपरी नियंत्रण रेखा और निचली नियंत्रण रेखाऐं प्रदर्शित करती हे।

(ब) गुणवत्ता नियंत्रण कारकों A_2 और $\bar{R}$ के आधार पर नियंत्रण सीमाऐं

$= \bar{\bar{X}} \pm A_2\bar{R}$ जहॉ $\bar{R} =$ विचरणों का माध्य

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$
$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

जहॉ A_2 गुणवत्ता यिंत्रण कारक है जिसका मान नियंत्रण लेखाचित्र तालिका से नमूना आकार के साथ संदर्भित होता है, और

$\bar{R} =$ विचरण का माध्य $= \frac{\sum R}{N}$

4. x अक्ष में नमूना अंक रेखंकित करके और y अक्ष मे नमूना माध्य, UCL, LCL और केन्द्रीय रेखा द्वारा माध्य लेखाचित्र का निर्माण करें।

5. $\bar{x}$ लेखाचित्र की व्याख्या करें। यदि सभी नमूने माध्य $\bar{x}$ नियंत्रण सीमाओं के अन्दर आते है। उत्पादन प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति में है अन्यथा, नियंत्रण से बाहर है।

6. R लेखाचित्र :– विचरण (R) लेखाचित्र को एक उत्पादन पक्रिया में उत्पादों की गुणवत्ता मानक के फैलाव या परिवर्तनशीलता में भिन्नता को नियंत्रित करने के लिए तैयार किया जाता है।

प्रक्रिया :– R लेखाचित्र के निर्माण में निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

1. $R = L - S = L$ सबसे बडा मान S सबसे छोटा मान

सूत्र का प्रयोग करते हुए प्रत्येक नमूने के लिए विचरण की गणना करें।

2. विचरण के माध्यों के नमूनों के योग द्वारा $\sum R$ नमूना संख्या से विभाजित करें अर्थात

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots \ldots\ldots R_k}{k} = \frac{\sum R}{k}$$

जहॉ k नमूनों की संख्या

विचरण का माध्य $(\overline{R})$ R लेखाचित्र के लिए केन्द्रयी रेखा (CL) प्रदर्शित करती है।

3. निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग करते हुए नियंत्रण सीमाएं ज्ञात करें।

(अ) गुणवत्ता नियंत्रण कारकों D_3 , D_4 और $\bar{R}$ के आधार पर :

ऊपरी नियंत्रण सीमा (UCL) = $D_4\bar{R}$

निचली नियंत्रण सीमा (LCL) = $D_3\bar{R}$

जहॉ D_3 , D_4 गुणवत्ता नियंत्रण कारक हैं और उनका मान नियंत्रण लेखाचित्र से नमूना आकार के साथ सर्दर्भित करके प्राप्त किया जाता है।

$\bar{R} =$ विचरण का माध्य

(ब) गुणवत्ता नियंत्रण कारकों D_1 , D_2 और समग्र मानक विचलन σ के आधार पर

UCL = $D_2\sigma$

LCL = $D_1\sigma$

जहॉ D_1 , D_2 गुणवत्ता नियंत्रण कारक हैं। स्ब्स का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है और इस स्थिति में इसे शून्य तक कम किया जायेगा।

4. R लेखचित्र (विचरण लेखाचित्र) का निर्माण X अक्ष में नमूना संख्या को रेखांकित करके एवं Y अक्ष में नमूना विचरण R, UCL , LCL और केन्द्रीय रेखा द्वारा किया जाताहै।

5. R लेखाचित्र की व्याख्या करें। यदि सभी नमूने विचरण ट नियंत्रण सीमाओं के अन्दर आते हैं तो उत्पादन प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति में हैं अन्यथा नियंत्रण से बाहर हैं।

उदाहरण 13.1 5 नमूनों के साथ प्रत्येक 5 वस्तुओं में निम्नलिखित आंकडों $\bar{x}$ लेखाचित्र एवं विचरण लेखाचित्र का निर्माण करें :

नमूना संख्या	वजन				
1	20	15	10	11	14
2	12	18	10	8	22
3	21	19	17	10	13
4	15	12	19	14	20
5	20	19	26	12	23

$n\varepsilon_5$ के लिए रूपांतर कारक $A_2 = 0.577 , D_3 = 0 , D_4 = 2.115$

हल :– $\bar{x}$ और R लेखाचित्र का निर्माण

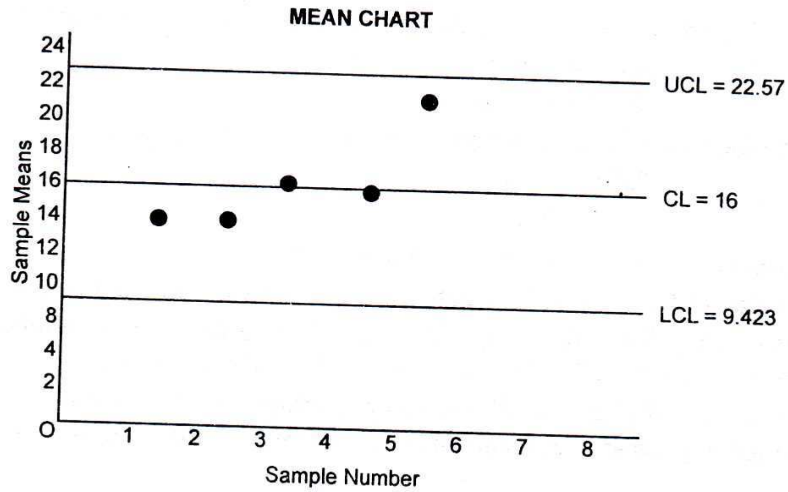
नमूना संख्या	प्रत्येक नमूने में वस्तु का वजन (X)					कुल वजन (ΣX)	$\bar{X} = (\Sigma X \div 5)$	विचरण $R = (L - S)$
1	20	15	10	11	14	70	14	10
2	12	18	10	8	22	70	14	14
3	21	19	17	10	13	80	16	11
4	15	12	19	14	20	80	16	8
5	20	19	26	12	23	100	20	14
$K = 5$							$\Sigma\bar{X} = 80$	$\Sigma R = 57$

$\bar{\bar{X}} = \frac{\Sigma\bar{X}}{k} = \frac{80}{5} = 16$

$\bar{R} = \frac{\Sigma R}{k} = \frac{57}{5} = 11.4$

$\bar{x}$ – लेखाचित्र

$\bar{x} =$ 16(केन्द्रीय रेखा)



नियंत्रण सीमाऐं

UCL $= \bar{X} + A_2\bar{R}$ LCL $= \bar{X} - A_2\bar{R}$

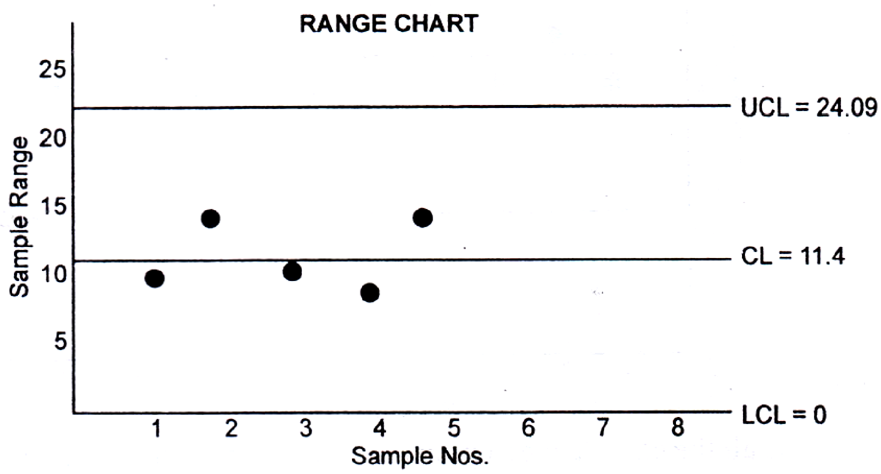
$= 16 + 0.577 \times 11.4$ $= 16 - 0.577 \times 11.4$

$= 16 + 6.577$ $= 16 - 6.577$

$= 22.577$ $= 9.423$

जैसा कि समस्त नमूना माध्य मान नियंत्रण सीमाओं के अन्दर आते हैं, लेखाचित्र प्रदर्शित करता है कि दी हुई प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण में है।

विचरण लेखाचित्र (Range chart) :



$\bar{R} = 11.4$ (केन्द्रीय रेखा)

नियंत्रण सीमाऐं

UCL = $D_2\bar{R} = 2.115 \times 11.4 = 24.09$ LCL = $D_3\bar{R} = 0 \times 11.4 = 0$

जैसा कि सभी विचरण बिन्दु नियंत्रण सीमाओं के अन्दर आते हैं, इसलिए R लेखाचित्र प्रदर्शित करता है कि दी हुई प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण में है।

उदाहरण 13.2 एक मशीन दिये गए पैकेट के बजन के वितरित होने के लिए तैयार है । प्रत्येक आकार 5 के 10 नमूनों को नीचे दिये हुए आंकडों में लेखाबद्ध किया गया था।

नमूना संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
माध्य $\bar{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16	162
विचरण	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5	74

माध्य लेखाचित्र और विचरण लेखा चित्र का निर्माण करें और नियंत्रण की स्थिति टिप्पणी करें।

(n=5) के लिए रूपांतर कारक $A_2 = .577$, $D_3 = 0$ और $D_4 = 2.115$

हल :–

नमूना संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
माध्य $\bar{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16	162
विचरण	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5	74

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\Sigma\bar{X}}{N} = \frac{162}{10} = 16.2 \qquad \bar{R} = \frac{\Sigma R}{N} = \frac{74}{10} = 7.4$$

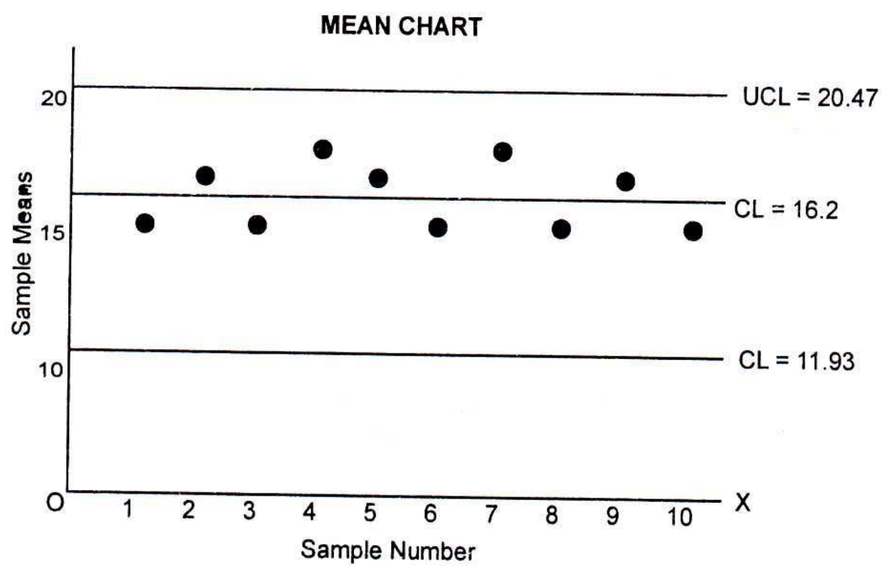
माध्य लेखाचित्र ($\bar{x}$ लेखाचित्र)

$\bar{x} = 16.2$ (केन्द्रीय रेखा)

नियंत्रण सीमाऐं

UCL $= \bar{X} + A_2\bar{R}$
$= 16.2 + 0.577 \times 7.4$
$= 20.47$

LCL $= \bar{X} - A_2\bar{R}$
$= 16.2 - 0.577 \times 7.4$
$= 11.93$



जैसा कि समस्त नमूने माध्य मान नियंत्रण सीमाओं के अंदर आते हैं, लेखाचित्र प्रदर्शित करता है कि दी गई प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण में है।

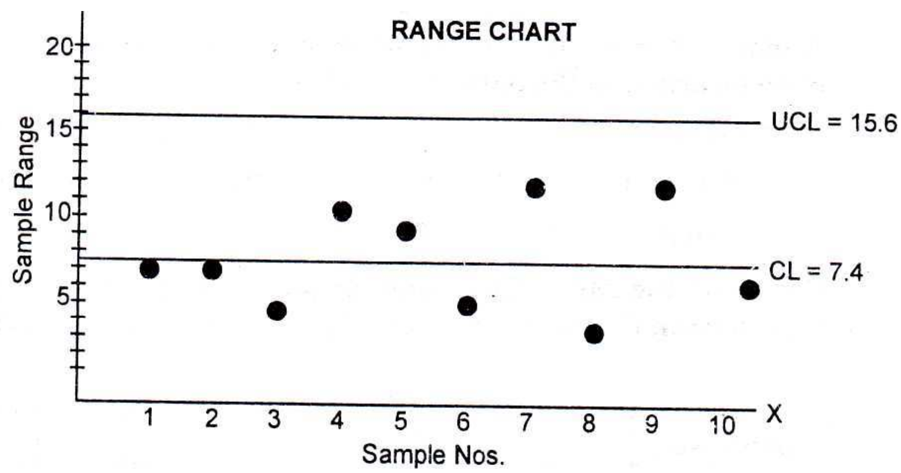
विचरण लेखाचित्र (R–लेखाचित्र)

$\bar{R} = 7.4$ (केन्द्रीय रेखा)

नियंत्रण सीमाऐं

$$\text{UCL} = D_4 . \bar{R}$$
$$= 2.115 \times 7.4$$
$$= 15.65$$

$$\text{LCL} = D_3 \bar{R}$$
$$= 0 \times 7.45 = 0$$



जैसा कि विचरण बिन्दु नियंत्रण सीमाओं के अंदर आते हैं, इसलिए लेखाचित्र प्रदर्शित करता है कि दी गई प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण में है।

उदाहरण 13.3 10 नमूनों में सेा आकार 5 के तैयार उत्पादों की लम्बाई और विचरण की लम्बाई निम्नवत दी हुई है :

नमूना संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
माध्य $\bar{X}$	201	198	202	200	203	204	199	196	199	201
विचरण	5	0	7	3	4	7	2	8	5	6

लम्बाई के लिए विनिर्देश सीमा 200 ± 5 सेमी है। $\bar{x}$ और R लेखाचित्र का निर्माण करें और जांच करें कि क्या प्रकिया नियंत्रण में है और अपनी सिफारिशें बताएं ।

मान लें n=5 के लिए , $A_2 = 0.577 , D_3 = 0 , D_4 = 2.115$

हल : विनिर्देश सीमाऐं 200 ± 5 सेमी दी गई हैं। इसलिए माध्य ज्ञात है जबकि मानक विचलन अज्ञात है।

$\bar{x}$ लेखाचित्र के नियंत्रण सीमाऐं

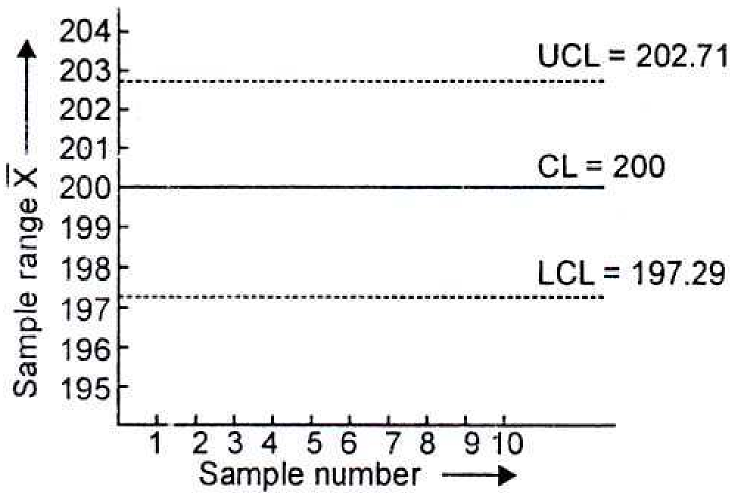
केन्द्रीय सीमा $CL = \bar{x} = 200$

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$ जहॉ $\bar{R} = \frac{\Sigma R_i}{10} = \frac{47}{10} = 4.7$

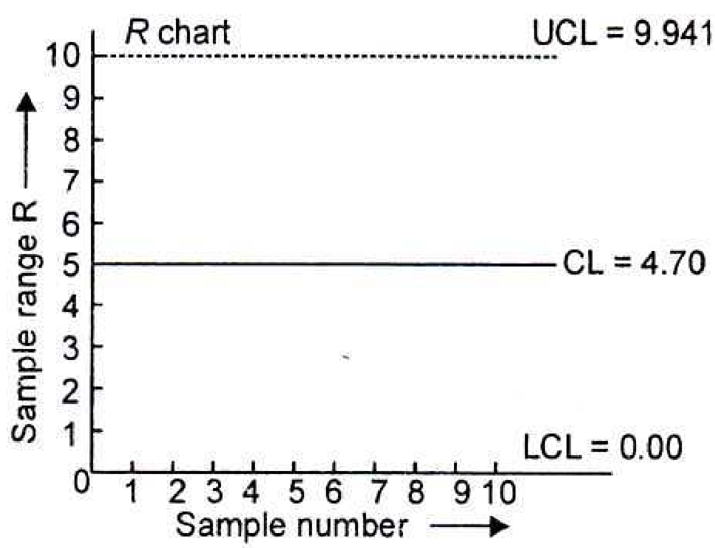
$UCL = 200 + 0.577 \times 4.7 = 202.712$
$LCL = 200 - 0.577 \times 4.7 = 197.29$
R लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$CL = \bar{R} = 4.7.$$
$$UCL = D_4\bar{R} = 2.115 \times 4.7 = 9.941$$
$$LCL = D_3\bar{R} = 0 \times 4.7 = 0$$

$\bar{x}$ और R लेखाचित्र चित्र (अ) और (ब) में क्रमशः खीचे गए हैं।



चित्र (अ)



चित्र (ब)

यह देखा जा सकता है कि सभी बिन्दु R लेखाचित्र की नियंत्रण सीमाओं के अन्दर है। यद्यपि तीन बिन्दु नमूना संख्या 5 , 6 और 8 संबंधित $\bar{x}$ लेखाचित्र के बाहर है। इसलिए प्रकिया सांख्यिकीय नियंत्रण में नहीं है। प्रक्रिया के जांच की आवश्यकता है

क्योंकि यह किसी निर्धारित कारण से हुई है। यदि वे पाये जाते हैं तो उनहें हटाने के लिए प्रक्रिया को समायोजित करना चाहिए, अन्यथा वहॉ पर उतार चढाव जारी रहेंगे।

उदाहरण 13.4 छः वस्तुओं के प्रत्येक 25 नमूने मशीन के समनुक्रम से संबंधित थे जिनका माध्य 0.81 इंच और विचरण 0.0025 इंच था। ऊपरी नियंत्रण सीमाओं और निचली नियंत्रण सीमाओं के माध्य लेखाचित्र और विचरण लेखाचित्र की गणना करें।

n=6 के लिए , $A_2 = 0.483\,, D_3 = 0\,, D_4 = 2.004$

हल : दिया हुआ है :

$\bar{x} = 0.81\,, \bar{R} = 0.0025\,, n = 6$

$\bar{x}$ – लेखाचित्र

नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$
$$= .81 + (.483)(.0025)$$
$$= .8112$$
$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$
$$= .81 - (.483)(.0025)$$
$$= .8088$$

विचरण लेखाचित्र

नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = D_4\bar{R}$$
$$= (2.004) \times (.0025)$$
$$= 0.0050.$$
$$LCL = D_3\bar{R}$$
$$= 0 \times (.0025) = 0.$$

उदाहरण 13.5 एक बडे नमूने के आधार पर एक निश्चित संयंत्र द्वारा निर्मित बेटरी सेल की अनुमानित औसत आयु 1500 घंटे, 180 घंटे मानक विचलन के साथ थी। नमूना आकार n=9 के लिए 3 सिग्मा (3σ) $\bar{x}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाओं की गणना करें।

हल : दिया हुआ है : $\bar{x} = 1500$ घंटे , $\sigma = 180$ घंटे $n = 9$

$\bar{x}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$= 1500 + 3 \times \frac{180}{\sqrt{9}}$$
$$= 1680$$
$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1500 - 3 \times \frac{180}{\sqrt{9}}$$
$$= 1320$$

III σ लेखाचित्र विचरण लेखाचित्र से प्राप्त विभिन्न नमूनों के आसानी से उपलबध मानक विचलन निर्माण की प्रक्रिया की तुलना में इस लेखाचित्र को एक गुणवत्ता मानक में भिन्नताओं के बेहतर चित्र प्राप्त करने के लिए किया जाता है।

प्रक्रिया : σ लेखाचित्र के निर्माण में निम्नलिख्ति चरण शामिल हैं :

I यदि S.D नहीं दिया है तो प्रत्येक नमूने के लिए S.D. ज्ञात करें।

II $\bar{S} = \frac{\Sigma S}{k} = \frac{S_1+S_2+S_3+\cdots S_k}{k}$ सूत्र का प्रयोग करते हुए मानक विचलन के माध्य की गणना करें। $S.D_s$ का माध्य $(\bar{s})$ केन्द्रीय रेखा (CL) को प्रदर्शित करता है।

III सूत्रों का प्रयोग करते हुए ऊपरी एवं निचली नियंत्रण सीमाऐं ज्ञात करें।

(अ) गुणवत्ता नियंत्रण कारकों B_1 B_2 और समग्र मानक विचलन σ के आधार पर

$$UCL = B_2.\sigma \qquad LCL = B_1.\sigma$$

(ब) गुणवत्ता नियंत्रण कारकों B_3 B_4 और अनुमानित समग्र मानक विचलन $\bar{s}$ के आधार पर $UCL = B_4.\bar{S}$ $LCL = B_3.\bar{S}$

जहॉ B_1 B_2 B_3 B_4 गुणवत्ता नियंत्रण कारक है।

IV σ लेखाचित्र का निर्माण x अक्ष में नमूना अंक को रेखांकित और y अक्ष में नमूना S.D. (σ), UCL, LCL और CL को रेखांकित करके किया जाता हे।

V इस प्रकार बने हुए लेखाचित्र की व्याख्या करते हैं।

उदाहरण 13.6 एक कारखाने में माध्य एवं मानक विलन लेखाचित्रों की सहायता से गुणवत्ता नियंत्रण बनाया जाता है। प्रत्येक नमूने से 10 वस्तुओं को चयनित किया गया है। सभी 18 नमूनों का चयन किया गया था जिनका $\sum \bar{x}$ 595.8 और $\sum s$ 8.28 था। $\bar{x}$ और σ लेखाचित्रों का 3σ (तीन सिग्मा) सीमाऐं ज्ञात करें। आप 3σ की सीमाऐं ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कारकों का प्रयोग कर सकते हैं :

n	A_1	B_3	B_4
10	0.949	0.28	1.72

हल :

$\Sigma\bar{X} = 595.8 , \Sigma S = 8.28 , n = 18$ दिया हुआ है।

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\Sigma \bar{X}}{k} = \frac{595.8}{18} = 33.1$$
$$\bar{S} = \frac{\Sigma S}{k} = \frac{8.28}{18} = 0.46$$

$\bar{x}$ लेखाचित्र

$\bar{x} = 33.1$ (केन्द्रीय रेखा)

नियंत्रण सीमाऐं

UCL $= \bar{\bar{X}} + A_1\bar{\sigma}$ LCL $= \bar{\bar{X}} - A_1\bar{\sigma}$

= 33.1 + (0.949)(.46)   = 33.1 - (0.949)(.46)

= 33.1 + .43675   = 33.1 - .43675

= 33.53   = 32.66

नियंत्रण सीमाए

$$\bar{S} = 0.46$$
$$UCL = B_4\bar{S} = 1.72 \times 0.46 = 0.7912$$
$$LCL = B_3\bar{S} = 0.28 \times 0.46 = 0.1288$$

13.11 सारांश

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता को नियंत्रित करके गुणवत्ता विर्निदेश द्वारा स्थापित और प्राप्त करने के तरीके की प्रक्रिया है, जिसमे सांख्यिकीय के उपकरणों एवं तकनीकीयों की आवश्यकता होती है और चरों के लिए नियंत्रण लेखाचित्रों का प्रयोग तब किया जाता हे जब वस्तु की गुणवत्ता या विशेषता संख्यात्मक मानों के रूप मे मापने के लिए उपयुक्त हो रही हो और वे SQC में बहुत ज्यादा उपयोगी हो। निर्मित उत्पादों के निरंतर प्रवाह में समान गुणवत्ता के रखरखाव के लिए SQC संभाव्यता के सिद्धान्त और नमूनाकरण के सिद्धान्त का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है। इसके बहुत सारे गुण एवं सीमाऐं है। इसके बावजूद यह भिन्नता के कारणों की पहचान करने और उन्हें प्रभावी ढंग से नियंत्रित करने के लिये बहुत उपयोगी है।

13.12 शब्दावली

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रणः यह विनिर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता को नियंत्रित करने में सांख्यिकीय तकनीकों के उपयोग को संदर्भित करता है।

13.13 बोध प्रश्न

1. 5 वस्तुओं के प्रत्येक समूह में से 12 नमूनों के निम्नलिखित आंकडों के लिए $\bar{x}$ लेखाचित्र और R लेखाचित्र का निर्माण करें :

42	42	19	36	42	51	60	18	15	69	64	61
65	45	24	54	51	74	60	20	30	109	90	78
75	68	80	69	57	75	72	27	39	113	93	94
78	72	81	77	59	78	95	42	62	118	109	109
87	90	81	84	78	132	138	60	84	153	112	136

दिया हुआ है $n = 5$, $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.115$

2 एक मशीन दिये गए पैकेट के वजन के वितरित होने के लिए तैयार है। प्रत्येक आकार 5 के 10 नमूनों को नीचे दिये हुए आंकडों में लेखाबद्ध किया गया था :

नमूना संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
नमूना माध्य $\bar{X}$	20	34	45	39	26	29	13	34	37	23
नमूना विचरण	23	29	15	5	29	17	21	11	90	10

माध्य लेखाचित्र और विचरण लेखाचित्र का निर्माण करें और इंगित करें कि क्या प्रक्रिया नियंत्रण में है।

$n = 5, A_2 = 0.58, D_3 = 0, D_4 = 2.115$

3 10 नमूनों के प्रत्येक 15 वस्तुओं का माध्य लेखा चित्र और विचरण लेखाचित्र का निर्माण करें और गुणवत्ता की प्रक्रिया पर टिप्पणी करें। निम्नलिखित आंकडे माध्य $\bar{x}$ और विचरण R के लिए है :

नमूना अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
नमूना माध्य $\bar{X}$	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
नमूना विचरण (R)	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

$n = 5$ are $A_2 = 0.577, D_3 = 0$ और $D_4 = 2.115$

4 प्रत्येक 5 वस्तुओं के तीस नमूनों को मशीन के उत्पादन से लिया गया और एक महत्वपूर्ण आयाम मापा। 30 नमूनों का मएय 0.6550 इंच और विचरण माध्य 0.0036 इंच था।

$\bar{x}$ और R लेखाचित्रों के लिए नियंत्रण सीमाओं की गणना करें।

$n = 5, A_2 = 0.58, D_3 = 0, D_4 = 2.115$

5 एक ड्रिलिंग मशीन 0.5230 सेमी के एक माध्य व्यास के साथ छेदों को छेद देती है और मानक विचलन 0.0032 सेमी है। आकार 4 के नमूनों के माध्य के लिए 2 सिग्मा और 3 सिग्मा ऊपरी एवं निचली नियंत्रण सीमाओं की गणना करें और नियंत्रण लेखाचित्र तैयार करें।

13.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. $[UCL_{\bar{x}} = 106.2, LCL_{\bar{x}} = 37.0, UCL_{\bar{R}} = 125.9, LCL_{\bar{R}} = 0]$
2. $[UCL_{\bar{x}} = 41.658, LCL_{\bar{x}} = 18.342, UCL_R = 42512, LCL_R = 0]$
3. $[UCL_{\bar{x}} = 41.2951, LCL_{\bar{x}} = 7.0249, UCL_R = 13.3245, LCL_R = 0]$
4. [(i) .6570, .6529 (ii).0076, 0]

13.15 स्वपरख प्रश्न

1. चरों के लिए विभिन्न प्रकार के नियंत्रण लेखाचित्र लिखे।

2. सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण से आप क्या समझते हैं, समझाइये।
3. 3 सिग्मा नियंत्रण लेखचित्र मे नियंत्रण सीमाओं के गणना की प्रक्रिया को समझाइये।
4. काल्पनिक चित्रों का प्रयोग करते हुए नियंत्रण लेखाचित्र $\bar{x}$ लेखाचित्र को रेखांकित कीजिए।
5. $\bar{x}$ और σ लेखाचित्रों के बीच विभेद कीजिए ।

13.16 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकी – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 14 गुण व चरों के लिए नियंत्रण चार्ट (Control Charts for Attributes and Variables)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- विशेषतओं के लिए नियंत्रण लेखा चित्र का वर्णन कर सकें।
- नमूना निरीक्षण योजनाओं के प्रकार की व्याख्या कर सकें।

14.1 प्रस्तावना

पूर्ववर्ती इकाईयों में, आपने अध्ययन किया है कि नियंत्रण लेखाचित्र वाल्टर ए शेवार्ट द्वारा उत्पादित प्रक्रिया मे भिन्नता के अप्राकृतिक तरीके का पता लगाने और संभाव्यता और नमूने की अनुमत सीमा निर्धारित करने के लिए विकसित ग्राफिक उपकरण है। ये दो प्रकार के होते हैं, इस बात पर निर्भर करते हैं कि किसी दिए गए गुणवत्ता या किसी उत्पाद की विशेषताओं को मापने योग्य है या चरों के लिए नियंत्रण लेखाचित्र या विशेषताओं के लिए नियंत्रण रेखा की तरह नहीं। उनमे से एक

की पहले ही पूर्ववर्ती इकाई मे चर्चा हो पाई है और दूसरा या विशेषताओं के लिए नियंत्रण लेखाचित्र की चर्चा स्वीकृत नमूनाकरण के साथ इस अध्याय मे होगी।

13.2 विशेषताओं के लिए नियंत्रण लेखाचित्र

इन लेखाचित्रों का उपयोग तब किया जाता है जब किसी उत्पाद की गणुवत्ता या विशेषताओं को मात्रात्मक शब्दों मे मापा नहीं जा सकता है और आंकडे को दोषपूर्ण और गैर दोष वाले गुणों की समग्रता के आधार पर अध्ययन किया जाता है । ऐसे लेखाचित्र तीन प्रकार के होते हैं।

14.2.1 $p-$ लेखाचित्र (अंश दोषपूर्ण लेखाचित्र) :-

यह लेखाचित्र एक मानक प्रक्रिया में गुणवत्ता के मानक को नियंत्रित करने के लिए बनाया जाता है जब किसी नमूना विषयों के दोषों और गैर दोषों में वर्गीकृत किया जाता है, तो उस प्रक्रिया मे उत्पादो के दोषपूर्ण औसत अंश को नियंत्रित करता है।

प्रक्रिया :- $p-$ लेखाचित्र के निर्माण मे ंनिम्नलिखित शामिल हैं :-

1. प्रत्येक नमूने में दोष अंश या दोष अनुपात या p_1, p_2, p_3............p_k ज्ञात कीजिए।
2. दोषों के अंश का माध्य सूत्र

   $\bar{p} =$ कुल दोषों की संख्या /निरीक्षण की गई इकाईयों की कुल संख्या

का प्रयोग करते हुए ज्ञात करें

$$\bar{q} = 1 - \bar{p}$$

वैकल्पिक रूप में :

$\bar{p}$ के मान की गणना इस प्रकार से भी की जा सकती है :

$\bar{p} = \frac{p_1, p_2, p_3 \text{...........} p_k}{k}$

जहॉ k नमूनों की संख्या है। $\bar{p}$ का मान, p लेखाचित्र की केन्द्रीय रेखा को प्रदर्शित करता है।

3. सूत्रों का प्रयोग करते हुए नियंत्रण सीमाऐं ज्ञात कीजिए :

   नियंत्रण सीमाऐं $= \bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$

$$\therefore \quad LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

LCL का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है और इस स्थिति मे ंइसे शून्य तक घटाया जायेगा।

4. नमूना संख्या को x अक्ष में, नमूना अंश दोषों UCL , LCL और केन्द्रीय रेखा को y अक्ष द्वारा रेखांकित कर p लेखाचित्र का निर्माण करें।

5. p लेखाचित्र की व्याख्या करें यदि सभी नमूना दोषपूर्ण अंश नियंत्रण सीमाओं के अन्दर (भीतर) आते हैं, प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति मे है अन्यथा नियंत्रण से बाहर है।

टिप्पणी :

1. यदि दोषों की संख्या छोटी है, तब p लेखाचित्र दोषों का प्रतिशत ज्ञात द्वारा निर्माण करना चाहिए।
2. यह लेखाचित्र मुख्यतः उपयोगी होता है, जब नमूना आकार (n) नमूनों में असमान है। इस स्थिति में (n) का मान सभी दोषपूर्ण इकाईयों को ,नमूना संख्या द्वारा विभाजित कर प्राप्त किया जा सकता है।

(समान नमूना आकार)

उदाहरण 14.1 : निम्नलिखित आंकडे उल्लेख करते हैं कि आटोमोबाइल कम्पनी द्वारा निर्मित कई दोपहिया वाहनों में नमूना आकार 100 के प्रत्येक ढेर मे से 10 नमूनों मे निरीक्षण के दौरान पाए गए दृश्य दोष :

नमूना संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दोषों की संख्या	5	3	3	6	5	6	8	10	10	4

दोष अंश के लिए नियंत्रण लेखाचित्र का निर्माण करें। आप नियंत्रण लेखाचित्र से क्या निष्कर्ष निकालते है।

हल :– हमें दिया गया है : $n =$ नमूने का आकार ,

$k =$ नमूनों की संख्या $= 10$

अंश दोषों की गणना

नमूना संख्या $(\boldsymbol{k})$	नमूने का आकार $(\boldsymbol{n})$	दोषों की संख्या $(\boldsymbol{d})$	अंश दोष $\boldsymbol{d/n}$
1	100	5	5/ 100 = 0.05
2	100	3	3/ 100 = 0.03
3	100	3	0.03
4	100	6	0.06
5	100	5	0.05
6	100	6	0.06
7	100	8	0.08
8	100	10	0.10
9	100	10	0.10
10	100	4	0.04
$k = 10$	1,000	$\Sigma d = 60$	0.60

$\bar{p} =$ कुल दोषों की संख्या ／निरीक्षण की गई इकाईयों की कुल संख्या

$$= \frac{60}{1000} = 0.06$$

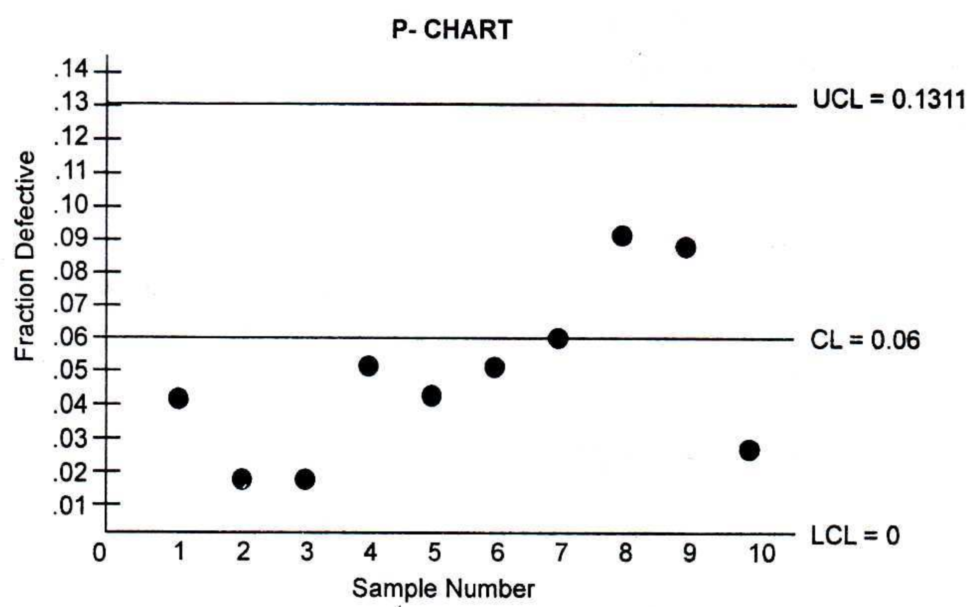
$$\bar{q} = 1 - \bar{p}$$

$$= 1 - 0.06$$
$$= 0.94$$

$\bar{p}$ का मान केन्द्रीय रेखा को इंगित करता है। $\bar{p}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$
$$= 0.06 + 3\sqrt{\frac{.06 \times .94}{100}}$$
$$= 0.06 + 3(0.0237)$$
$$= 0.06 + .0711$$
$$= 0.1311$$
$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$
$$= 0.06 - 3\sqrt{\frac{.06 \times .94}{100}}$$
$$= 0.06 - 3(0.0237)$$
$$= 0.06 - .0711$$
$$= -0.0111 = 0$$

चूँकि अंश दोष ऋणात्मक नहीं हो सकता है LCL शून्य लिया जा चुका है। अंश दोष लेखाचित्र ($\bar{p}$ लेखाचित्र) नीचे दिखाया गया है :



उपरोक्त लेखाचित्र दर्शाता है कि सभी बिन्दु नियंत्रण सीमाओं के भीतर है। इससे पता चलता है कि प्रक्रिया नियंत्रण में है।

(असमान नमूना आकार)

उदाहरण 14.2 :दैनिक निरीक्षण के आधार पर निम्नलिखित तालिका मे सिलाई मशीन की दोषपूर्ण सुइयों की संख्या दी गई है। p लेखाचित्र तैयार करें और बताएं कि क्या उत्पादन प्रक्रिया नियंत्रण में है।

दिन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
निरीक्षित सुइयों की संख्या	90	60	70	100	120	50	100	110	100	100
दोषपूर्ण सुइयों की संख्या	5	12	7	3	6	5	10	6	8	25

हल :– p लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाओं की गणना :

दिन	निरीक्षित सुइयों की संख्या	दोषों की संख्या	दोषपूर्ण सुइयों का प्रतिशत
1	90	5	5.56
2	60	12	20.00
4	70	7	10.00
3	100	3	3.00
5	120	6	5.00
6	50	5	10.00
7	100	10	10.00
8	110	6	5.45
9	100	8	8.00
10	100	25	25.00
$k = 10$	900	87	

$$\bar{p} = \frac{\text{कुल खराब सुईयों की संख्या}}{\text{निरीक्षित वस्तुओं की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{87}{900} = 0.0967$$

$\bar{p}$ प्रतिशत के रूप में $= 9.67$

$\bar{p}$ का मान केन्द्रीय रेखा को इंगित करता है।

$\bar{p}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

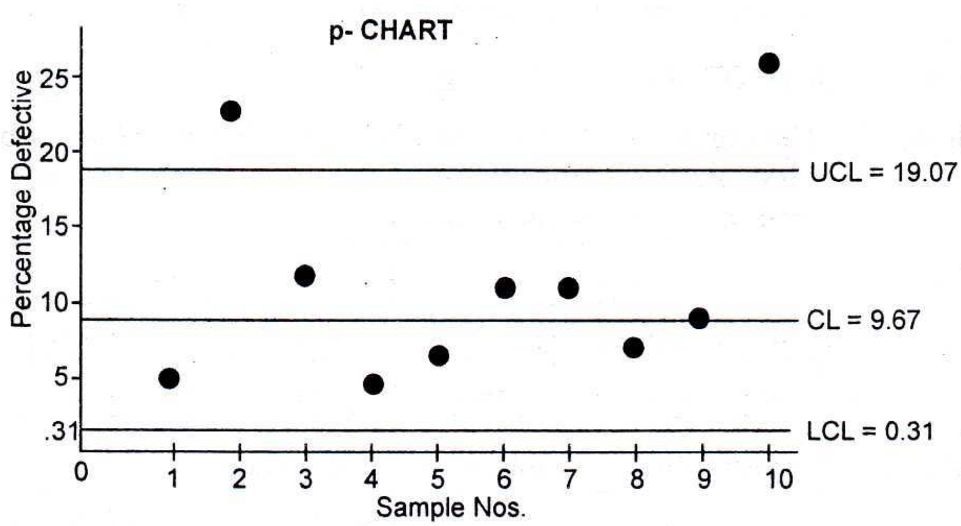
जहॉ $\bar{p} = 0.0967$

$$\bar{q} = 1 - 0.0967 = 0.9033$$

$$n = \frac{Total\ No.of\ Items\ Inspected}{k}$$
$$= \frac{900}{10}$$
$$= 90$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$
$$= 0.0967 + 3\sqrt{\frac{0.0967 \times 0.9033}{90}}$$
$$= 0.0967 + 3 \times 0.0312$$
$$= 0.1903\ or\ 19.03\%$$
$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$
$$= 0.0967 - 3\sqrt{\frac{0.0967 \times 0.9033}{90}}$$
$$= 0.0967 - 3 \times 0.0312$$
$$= 0.0031\ or\ 0.31\%$$



उपरोक्त लेखाचित्र दर्शाता है कि यद्यपि 10 बिन्दुओं में से 8 बिन्दु नियंत्रण सीमा के भीतर है लेकिन नमूना संख्या 2 और 10 ऊपरी सीमा के बाहर है। इससे पता चलता है कि प्रक्रिया नियंत्रण में नहीं है।

उदाहरण 14.3 किसी प्रक्रिया के आकार 100 के दोहराए गए नमूनों में से प्राप्त दोषों के अनुपात के लिए एक नियंत्रण लेखाचित्र का निर्माण करना है जो कि नियंत्रण के

अन्तर्गत समझा जाता है, जब औसत दोषपूर्ण अनुपात 0.20 के बराबर है । केन्द्रीय रेखा और ऊपरी एवं निचली सीमाऐं वर्गाकित कागज में खीचिंए।

हल : हमें दिया गया है

$\bar{p}$ =औसत अंश दोष $= 0.2$

$n = 100$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.2 = 0.8$$

केन्द्रीय रेखा $\bar{p} = 0.2$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

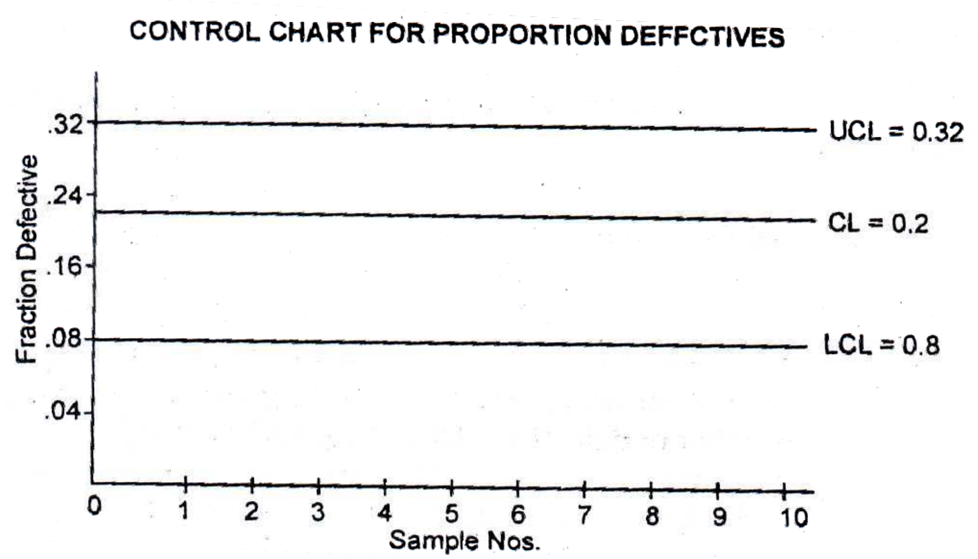
$$= 0.2 + 3\sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{100}}$$

$$= 0.2 + 3 \times (0.04) = 0.32$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

$$= 0.2 - 3\sqrt{\frac{0.20 \times 0.80}{100}}$$

$$= 0.2 - 3 \times (0.04) = 0.08$$



उदाहरण 14.4 नियंत्रण सीमाऐं स्थापित करने के लिए 14 दिनों की अवधि मे 30 वस्तुओं का दैनिक नमूना लिया गया था यदि 21 दोष पाए गए, तो दोषों के अनुपात के लिए ऊपरी और निचली नियंत्रण सीमाऐं क्या होनी चाहिए।

हल : नमूनों की संख्या $k = 14$

नमूने का आकार $n = 30$

$\sum d$ या दोषों की संख्या $= 21$

$\bar{p} =$ औसत अंश दोष

$\bar{p} = \frac{21}{14\times30} = 0.05$

$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.05 = 0.95$

$\bar{p}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

नियंत्रण रेखा $= \bar{p} = 0.05$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

$$= 0.05 + 3\sqrt{\frac{(.05)(.95)}{30}} = 0.17$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}.\bar{q}}{n}}$$

$$= 0.05 - 3\sqrt{\frac{(.05)(.95)}{30}} = 0.69$$

LCL का ऋणात्मक मान शून्य लिया गया है।

14.2.2 np – लेखाचित्र (दोषपूर्ण लेखाचित्र की संख्या)

इस लेखाचित्र को गुणों के गुणवत्ता मानक को नियंत्रित करने की प्रक्रिया के लिए बनाया जाता है जहॉ नमूना आकार एक है और अंश दोषों p के बजाय नमूने में दोषों की संख्या np अवश्य चिन्हित हो ।

प्रक्रिया : np लेखाचित्र के निर्माण में निम्नलिखित चरण शामिल हैं।

(i) औसत दोषों की संख्या $n\bar{p}$ ज्ञात कीजिए

$n\bar{p} =$ कुल दोषों की संख्या / कुल नमूनों की संख्या

$= \frac{\sum d}{k}$

$n\bar{p}$ का मान केन्द्रीय रेखा को इंगित करता है।

(ii) सूत्र $\bar{p} = \frac{n\bar{p}}{n}$

$\bar{q} = 1 - \bar{p}$ का प्रयोग करते हुए $\bar{p}$ का मान ज्ञात करें।

वैकल्पिक रूप में $\bar{p}$ का मान $\bar{p} = \frac{\sum d}{n\times k}$ के सूत्र का प्रयोग करते हुए भी निकाल जा सकता है।

(iii) सूत्र $UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$, $LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$ का प्रयोग करते हुए नियंत्रण सीमाऐं ज्ञात करें। LCL का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है और इस स्थिति मे ंइसे शून्य किया जायेगा।

(iv) नमूना संख्या को x अक्ष मे चिइन्त और दोषों की नमूना संख्या UCL , LCL और केन्द्रीय रेखा (CL) को y अक्ष मे ंचिन्हित कर np लेखाचित्र का निर्माण करें।

(v) np लेखाचित्र की व्याख्या करें। यदि दोषों की सभी नमूना संख्या , नियंत्रण सीमाओं के भीतर आती है तो प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति मे ंहै अन्यथा नियंत्रण से बाहर।

टिप्पणी :— दोषपूर्ण लेखाचित्र की संख्या का निर्माण एवं व्याख्या या करें np लेखाचित्र p लेखाचित्र के समान है। np लेखाचित्र में, केन्द्रीय रेखा p की बजाय, np से खींची जाती है और दोषों की वास्तविक संख्या np निश्चित आकार n के नमूनों मे ंअंश दोषों के बजाय इसे चिन्हित किया जाता है।

उदाहरण : 14.5 : 10 युग्मों में से प्रत्येक 400 आकार के 10 नमूनों का निरीक्षण करने पर निम्न दोषों का पता चलता है :

17	15	14	26	9	4	19	12	9	15

दोषपूर्ण इकाईयों के लिए नियंत्रण सीमा की गणना करें ग्राफ चिन्हित करें और बताऐं कि प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति में है या नहीं।

हल :— हमें दिया हुआ है, $n = 400$

$k =$ (नमूनों की संख्या) $= 10$

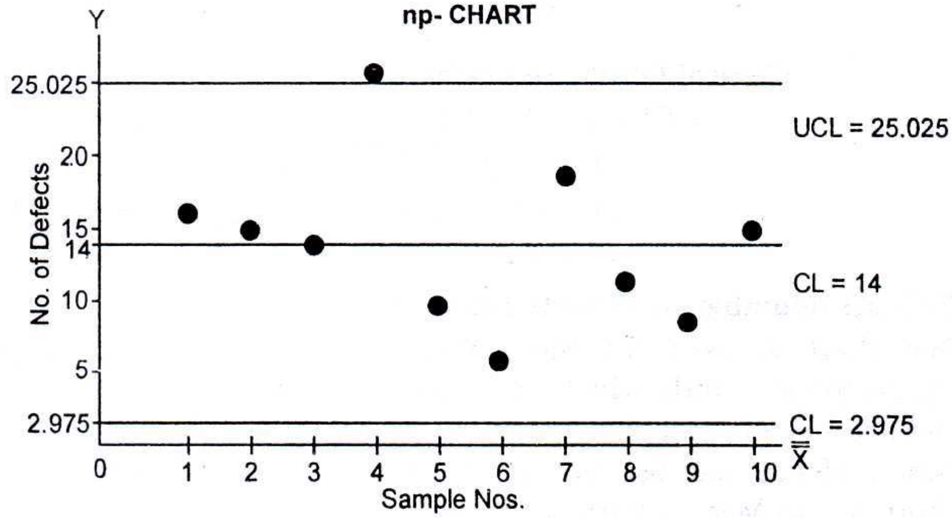
$\bar{p} =$ औसत अंश दोष

$$= \frac{140}{10 \times 400}$$
$$= 0.035$$
$$\bar{q} = 1 - 0.035$$
$$= 0.965$$
$$n = 400$$
$$\therefore \quad n\bar{p} = 400 \times .035 = 14$$

np का मान केन्द्रीय रेखा को इंगि करता है। np लेखाचित्र क`लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$
$$= 14 + 3\sqrt{400 \times 0.035 \times 0.965}$$
$$= 14 + 3(3.675)$$
$$= 14 + 11.025$$
$$= 25.025$$
$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

$$= 14 - 3\sqrt{400 \times 0.035 \times 0.965}$$
$$= 14 - 3 \times 3.675$$
$$= 2.975$$



उपरोक्त लेखाचित्र दर्शाता है कि यद्यपि 10 बिन्दुओं मे से 9 बिन्दु नियंत्रण सीमा के भीतर है लेकिन, नमूना 4 के लिए बिन्दु UCL के बाहर है। इससे पता चलता है कि प्रक्रिया नियंत्रण मे नहीं है।

उदाहरण 14.6 एक निश्चित नमूना निरीक्षण में, 100 के प्रत्येक 10 नमूनों में दोषों की संख्या नीचे दी गई है :

16	18	11	18	21	10	20	18	17	21

क्या इससे संकेत मिलता है कि गुणवत्ता की विशेषताओं का निरीक्षण सांख्यिकीय नियंत्रण के अन्तर्गत है।

हल :– यहाँ पर हम $n\bar{p}$ लेखाचित्र का प्रयोग यह ज्ञात करने के लिए करते हैं कि क्या निरीक्षण के अन्तर्गत गुणवत्ता विशेषताऐं नियंत्रण की स्थिति में है या नहीं।

हमें दिया गया है : $n = 100\,, k = 10$

$\sum d =$ कुल दोषों की संख्या $= 170$

$$\bar{p} = \frac{170}{100 \times 10} = 0.17$$
$$\bar{q} = 1 - 0.17 = 0.83$$

$n = 400$ है $\therefore n\bar{p} = 100 \times 0.17 = 17$

$n\bar{p}$ का मान केन्द्रीय रेखा को इंगित करता है। $n\bar{p}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$
$$= 17 + 3\sqrt{100 \times 0.17 \times 0.83}$$
$$= 17 + 11.268$$

$$= 28.268$$

$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

$$= 17 - 3\sqrt{100 \times 0.17 \times 0.83}$$

$$= 17 - 11.268$$

$$= 5.732$$

चूँकि कोई भी बिन्दु निचली एवं ऊपरी सीमाओं के बाहर नहीं है, प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण की स्थिति में है।

उदाहरण 14.7 10 इकाईयों के प्रत्येक नमूना आकार में जब औसत दोष संख्या 1.2 है, उत्पादन प्रक्रिया के नियंत्रित कहा जाता है यह पाया गया था। 10 इकाईयों के प्रत्येक नमूना आकार नियंत्रण लेखाचित्र के लिए आप क्या नियंत्रित सीमाएं स्थापित करेंगे।

हल :– यह ज्ञात करने के लिए कि कया गुणवत्ता विशेषताऐं निरीक्षण के अन्तर्गत नियंत्रण में है या नहीं यहॉ $n\bar{p}$ लेखाचित्र का प्रयोग करते हैं।

हमें दिया गया है : $n\bar{p} = 1.2\,, n = 10\,,$

$$\bar{p} = \frac{n\bar{p}}{n} = \frac{1.2}{10} = 0.12,$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p}$$

$$= 1 - 0.12 = 0.88$$

$n\bar{p}$ लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

$$= 1.2 + 3\sqrt{10 \times 0.12 \times 0.88}$$

$$= 1.2 + 3(1.027)$$

$$= 4.281$$

$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

$$= 1.2 - 3\sqrt{10 \times 0.12 \times 0.88}$$

$$= 1.2 - 3.081$$

$$= -1.881$$

14.2.3 c – लेखाचित्र (प्रति इकाई लेखाचित्र के दोषों की संख्या) :–

इस लेखाचित्र को प्रति इकाई दोषों की संख्या जैसे कपडे का टुकडा /कॉच /कागज/बोतल जिसमें एक से अधिक दोष हो सकते हैं के नियंत्रण के लिए उपयोग किया जाता है। इसे लेखाचित्र में निरीक्षण इकाई उत्पाद की एक इकाई होगी प्रत्येक दोष के घटित होने की संभावना बहुत छोटी रहती है। इसलिए, दोषों की संख्या के वितरण को माध्य = परिवर्तनशीलता के साथ पायसन वितरण माना जा सकता है।

प्रक्रिया :– c – लेखाचित्र के निर्माण में निम्नखिखित चरण शामिल है।

(i) समान आकार के नमूनो में प्रति इकाई दोषों की संख्या ज्ञात करें।

(ii) सूत्र $\bar{c} = \frac{\sum c}{k}$ का प्रयोग करते हुए कई इकाईयों में गिने जाने वाले दोषों की संख्या का माध्य ज्ञात करें।

(iii) नियंत्रण सीमाऐं $= \bar{c} \pm 3\sqrt{c}$, $UCL = \bar{c} + 3\sqrt{c}$, $LCL = \bar{c} - 3\sqrt{c}$ सूत्र का प्रयोग करते हुए नियंत्रण सीमाऐं ज्ञात करें। LCL का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है और इस परिस्थिति में इसे शून्य किया जायेगा।

(iv) नमूना संख्या को x अक्ष में रेखांकित करके और प्रेक्षित दोषों की प्रति इकाई संख्या , LCL UCL और CL को y अक्ष में रेखांकित कर $c -$ लेखाचित्र का निर्माण करें।

(v) $c -$ लेखाचित्र की व्याख्या करें। दोषों की संख्या का प्रति इकाई प्रेक्षित मान, नियंत्रण सीमा के अन्दर आते हैं तो प्रक्रिया नियंत्रण की स्थिति में है अन्यथा नियंत्रण से बाहर है।

यद्यपि , $c -$ लेखाचित्र के अनुप्रयोग $\bar{x}$ और R लेखाचित्र की तुलना में सीमित है, फिर भी कई उद्योगों मे कई व्यावहारिक स्थितियॉ मौजूद है जहॉ अभी भी $c -$ लेखाचित्र का प्रयोग किया जाता है। निम्नलिखित क्षेत्रों मे $c -$ लेखाचित्रों का अनुप्रयोग होता है।

1. आखिरकार इकट्ठे हुए सभी प्रकार के विमान के दोषों की संख्या
2. लेपित कागज के रोल, फोटोग्राफिक फिल्म की शीट, कपडे की बेल (या टुकडे) आदि में गिने जाने वाले दोषों की संख्या आदि।

उदाहरण 14.8 : समान लम्बाई के विभिन्न रोलों के कपडों के दस टुकडों मे निम्नलिखित दोष शामिल है :

1	2	5	0	6	0	9	4	4	3

दोषों की संख्या के लिए एक नियंत्रण लेखाचित्र बनाएं और बताएं कि प्रक्रिया सांख्यिकीय नियंत्रण की स्थिति में है या नहीं ।

हल :– हमारे पास $N = 10$ और $C =$ दोषों की संख्या $= 35$

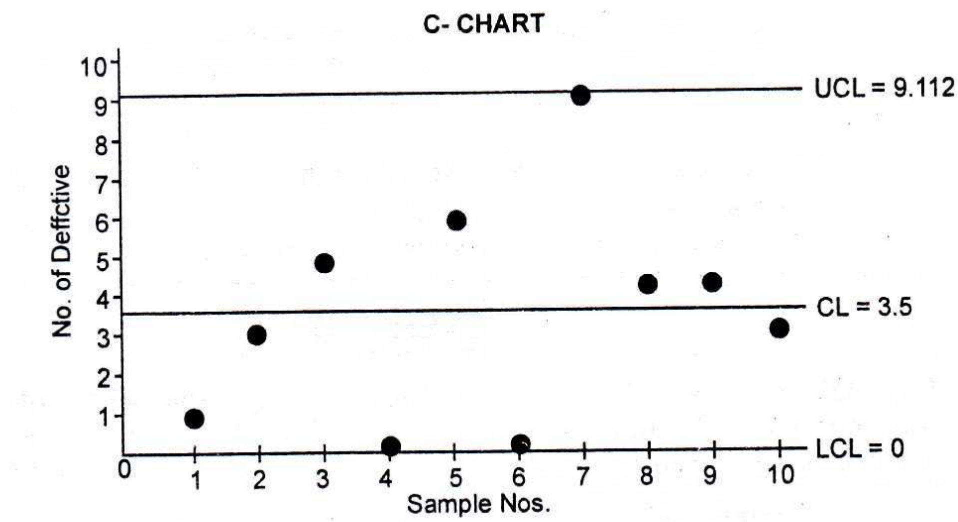
$\bar{c} = \frac{\sum c}{N} = \frac{35}{10} = 3.5$

$\bar{c}$ का मान केन्द्रीय रेखा को प्रदर्शित करता है।

C लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$$
$$= 3.5 + 3\sqrt{3.5}$$
$$= 3.5 + 5.612$$
$$= 9.112$$
$$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$$

$$= 3.5 - 3\sqrt{3.5}$$
$$= 3.5 - 5.612$$
$$= -2.112 = 0$$



उपरोक्त लेखाचित्र दर्शाता है कि रेखाकित बिन्दु दो नियंत्रण सीमाओं के भीतर है । इससे पता चलता है कि प्रक्रिया नियंत्रण में है।

उदाहरण 14.9 20 वस्तुओं के दोषों की संख्या नीचे दी गई है :

वस्तु संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दोषों की संख्या	2	0	4	1	0	8	0	1	2	0
वस्तु संख्या	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
दोषों की संख्या	6	0	2	1	0	3	2	1	0	2

एक उपयुक्त लेखाचित्र बनाएं और अपना निष्कर्ष दें।

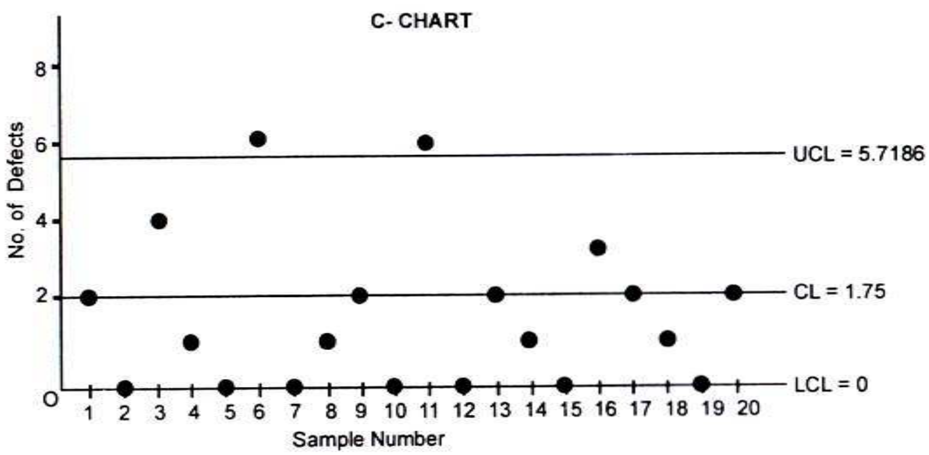
हल :– जैसा कि प्रति इकाई दोषों की संख्या दी गई हे, उपयुक्त नियंत्रण लेखाचित्र $C -$ लेखाचित्र है। हमारे पास $N = 20$ और $C =$ दोषों की संख्या $= 35$

$$\bar{c} = \frac{\sum c}{N} = \frac{35}{20} = 1.75$$

$\bar{c}$ का मान केन्द्रीय रेखा को प्रदर्शित करता है।

C लेखाचित्र के लिए नियंत्रण सीमाऐं

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$$
$$= 1.75 + 3\sqrt{1.75}$$
$$= 5.7186$$
$$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$$
$$= 1.75 - 3\sqrt{1.75}$$
$$= -2.218 = 0$$



उपरोक्त लेखाचित्र दर्शाता हे कि यद्यपि 20 रेखांकित बिन्दुओं मे ंसे 18 बिन्दु नियंत्रण सीमा के भीतर है लेकिन नमूना 6 और नमूना 11 के लिए बिन्दु UCL से बाहर है। इससे पता चलता है कि प्रक्रिया नियंत्रण में नहीं है।

14.3 स्वीकृति नमूना

सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण का एक अन्य प्रमुख क्षेत्र उत्पाद नियंत्रण या स्वीकृति नमूना होता है। उत्पाद नियंत्रण उत्पादों के निरीक्षण के साथ समबन्धित होता है। वस्तुयें स्वीकार्य है या नहीं का पता लगाने के लिए समानता के मानकों के अनुरूप वस्तुओं का निरीक्षण किया जाता हें यहॉ निर्णय नमूनाकरण का निरीक्षण किया जाता हैं । यहॉ निर्णय नमूनाकरण के माध्यम से निकलता है। यही कारण है कि उत्पाद नियंत्रण को स्वीकृति नमूना कहा जाता है। सिम्पसन और काफ्का के अनुसार ''स्वीकृति नमूना गुणवत्ता के अनुरूप होने वाले गैर अनुरूपता को स्वीकार करने के निर्णय से संबंधित है । निर्णय नमूनाकरण के माध्यम से निकलता हैं ।

14.4 स्वीकृति नमूना या उत्पाद नियंत्रण में जोखिम

स्वीकृति नमूने या उत्पाद गुणवत्ता नियंत्रण में दो प्रकार के जोखिम हैं जो नीचे दिए गए है।

14.4.1 निर्माता का जोखिम :–

कभी–कभी ऐसा होता है कि अच्छी गुणवत्ता के बावजूद लिया गया नमूना दोषपूर्ण इकाईयॉ दिखा सकता है इस तरह से ढेर को अस्वीकार कर दिया जायेगा। अच्छी गुणवत्ता के बावजूद ढेर अस्वीकार कर दिया जाता है। अस्वीकृति का होना एक प्रकार से निर्माता के जोखिम के रूप में जाना जाता है दूसरे शब्दों में, ढेर की अस्वीकार्य होने की संभावना स्वीकार्य गुणवत्ता स्तर के अनुसार जिसे वास्तव में उत्पादक द्वारा संतोषजनक पाया गया हो, निर्माता का जोखिम कहा जाता है।

14.4.2 उपभोक्ता का जोखिम :–

कभी–कभी ऐसा होता है कि ढेंर की गुणवतत्ता अच्छी नहीं होती है लेकिन नमूने के परिणाम अच्छी गुणवत्ता वाले इकाईयॉ दिखाते हैं जैसे उपभोक्ताओं को दोषपूर्ण ढेर स्वीकार करने पढते हैं। इस तरह के जोखिम को उपभोक्ता का जोखिमि

कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, उपभोक्ता द्वारा पूर्व निर्धारित मानक के अनुसार ढेर के स्वीकार्य होने की संभावना जो कि वास्तव में उपभोक्ता द्वारा संतोषजनक पाया गया है, उपभोक्ता का जोखिम कहा जाता हैं। इस प्रकार, अच्छे ढेर को खारिज करने का जोखिम निर्माता के जोखिम के रूप में जाना जाता है। उपभोक्त और उत्पादक दोनों स्वीकत्रति मानक का फैसला लेते हैं। यह स्वीकार्य गुणवत्ता स्तर (AQL) या ढेर सहिषणुता दोषपूर्ण प्रतिशत $(LTPD)$ कहलाता है।

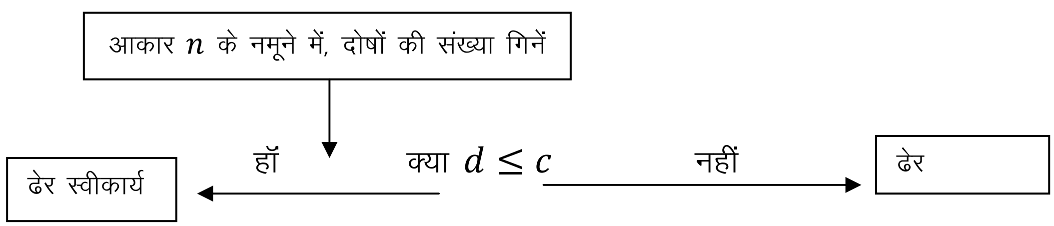
14.5 नमूना निरीक्षण योजना के प्रकार

स्वीकृति नमूना, नमूनाकरण पर आधारित होता है। नमूनों के निरीक्षण के पश्चात, ढेर के स्वीकृति या अस्वीकृति के बारे मे निर्णय लिया जाता है।, स्वीकृति नमूनाकरण में, नमूनों की संख्या और उनका क्रम एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। स्वीकृति या अस्वीकृति नियमों को तैयार किया जाता है। तीन तरह के नमूनाकरण योजनाएं हैं जिन्हें अक्सर स्वीकृति नमूने मे प्रयोग किया जाता है, जो निम्नानुसार है।

14.5.1 एकल नमूनाकरण योजना :–

एकल नमूनाकरण योजना के अन्तर्गत, पहले n वस्तुओं के नमूने को N वस्तुओं के ढेर से यादृच्छिक चुना जाता है।

यदि नमूने में C या कुछ दोष शामिल है। तब ढेर स्वीकार्य होता है जबकि यदि इसमें C से ज्यादा दोष शामिल हैं तब ढेर अस्वीकार्य होता है। (c को c स्वीकृति संख्या जाना जाता है) एकल नमूनाकरण योजना निम्नलिखित लेखाचित्र में दर्शायी गई है :



उदाहरण 14.10 500 वस्तुओं को एक ढेर निरीक्षण के लिए प्रस्तुत किया जाता है जिसके लिए दोषों की स्वीकृति संख्या सहिषणुता 10 है। 30 वस्तुओं के एक लिये गए नमूने में आप पाते हैं कि 8 में दोष है। बताऐं कि ढेर को विपणन के लिए स्वीकार्य करना चाहिए या नहीं।

हल :– हमारे पास C या स्वीकृति संख्या $= 10$

और d या नमूने में दोषों की प्रेक्षित संख्या $= 8$

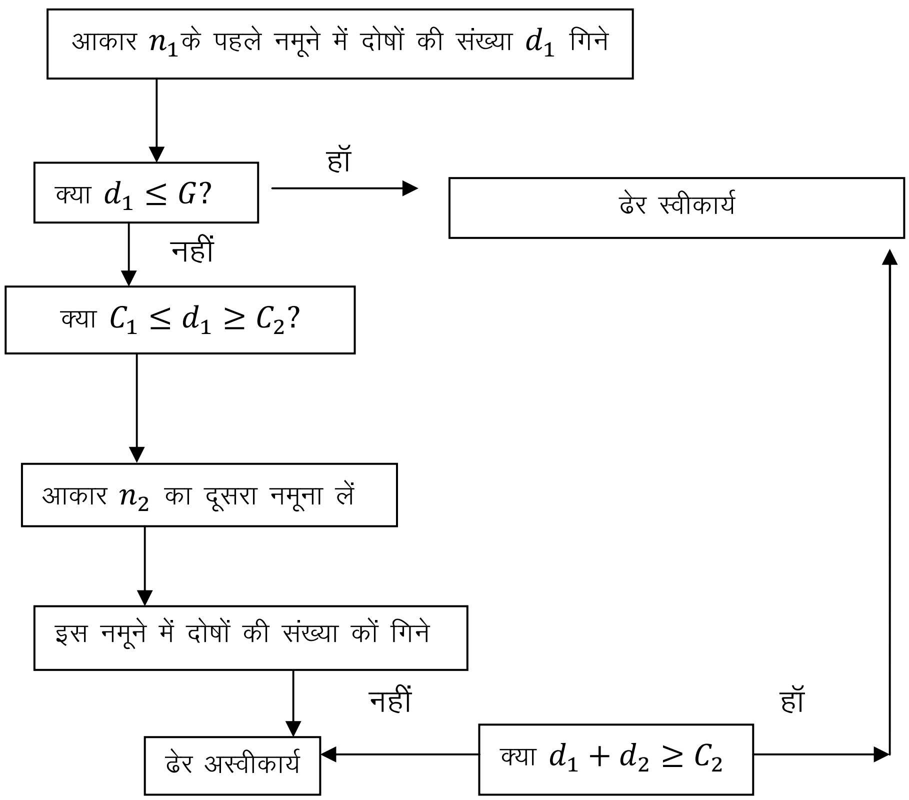
इस प्रकार $d < c$ (या $8 < 10$)

चूँकि $d < c$, विचार के अन्तर्गत ढेर स्वीकार्य करना चाहिए।

14.5.2 दोहरी नमूनाकरण योजना :–

इस नमूनाकरण योजना के अर्न्तगत, पहले आकार N के ढेर में से n_1 वस्तुओं का एक नमूना लिया जाता है। यदि नमूने में, माना C_1 या कुछ दोषों को शामिल किया जाता है तो ढेर स्वीकार्य होता है। यदि इसमें C_2 से ज्यादा दोष शामिल होते हैं, तो

ढेर अस्वीकाग्र होता है। यदि नमूने मे दोषों की संख्या C से ज्यादा है, लेकिन यह C_2 से ज्यादा नहीं है, समान ढेर से एक दूसरा n_2 वस्तुओं का नमूना लिया जाता है। अब, कुल दोषों की संख्या दोनों नमूनों में C_2 से ज्यादा है, ढेर स्वीकार्य होता है अन्यथा अस्वीकार्य होता है। $C\ C_1$ को पहले नमूने के लिए स्वीकृति संख्या के रूप में जाना जाता है और C_2 को दोनों नमूनों को एक साथ लेने पर स्वीकृति संख्या के रूप में जाना जाता है। दोहरी नमूना योजना को निम्नलिखित लेखाचित्र में दर्शाया गया है :–



उदाहरण 14.11 एक दोहरी नमूनाकरण योजना में निम्न तथ्य बताए गऐ हैं : $N = 5{,}000$, $n_1 = 50$, $c_1 = 4$, $n_2 = 100$ और $c_2 = 6$ योजना कार्यन्वित करें।

हल : दोहरी नमूनाकरणयोजना के कार्यान्वयन में निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

1. 5,000 वस्तुओं के ढेर में से एक समान यादृच्छिक लेने के पश्चात पहले नमूने के सभी 50 वस्तुओं का निरीक्षण करें।
2. नमूने में से प्रेषित दोषों की संख्या (d_2) 4 या 4 से कम हैं या c_1 ढेर को स्वीकार करें यदि $d_1 > 6$ या c_2 ढेर को अस्वीकार करें।
3. ठस प्रकार प्रेक्षित नमूनों में दोषों की संख्या या $d_1\ 4\ (c_1)$ से ज्यादा हो लेकिन $6\ (c_2)$ से ज्यादा न हो, दूसरे नमूने के सभी 100 वस्तुओं का निरीक्षण करें।

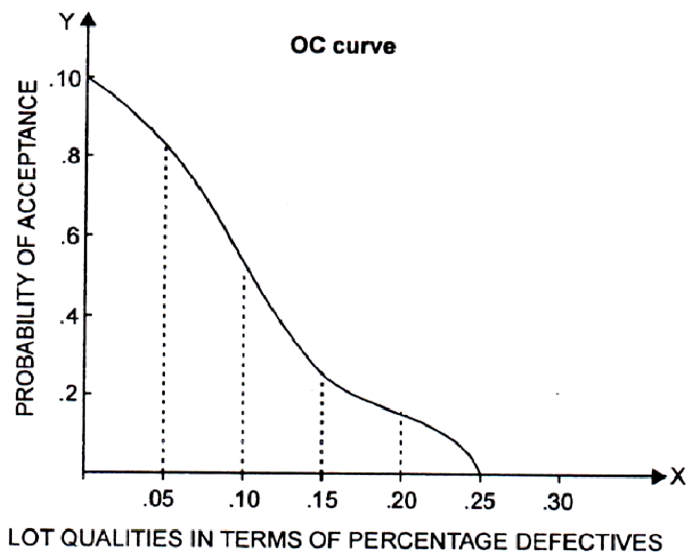
4. अब 150 वस्तुओं $(n_1 + n_2)$ ढेर स्वीकार्य हैं यदि यह 6 से ज्यादा है तो ढेर अस्वीकार्य हैं

14.5.3 बहु या अनुकमिक नमूनाकरण योजना :

इस नमूनाकरण योजना के अन्तर्गत, प्रत्येक छोटे आकार के दो से ज्यादा नमूनों का निरीक्षण करने के पश्चात ढेर के स्वीाकार होने या अस्वीकार होने का निर्णय लिया जाता है। इस योजना में लिये गए प्रत्येक इकाई निर्णय की जांच के पश्चात इकाईयों की एक बार में एक जॉच की जाती है। यद्यपि, इस तरह की योजना बहुत जटिल है और इसलिए अभ्यास में शायद ही प्रयोग की जाती है।

14.6 एक स्वीकार्य नमूना योजना की संचालित विशेषता वक

यह अच्छे और बुरे वस्तुओं के बीच भेद करने में नमूनाकरण योजना की क्षमता का आंकलन करने का एक रेखाचित्रीय उपाय है। दोष प्रतिशत के रूप में विभिन्न ढेर गुणवत्ता के लिए, यह ढेर के $pa(p)$ स्वीकृति संभावनाओं के बीच संबंध दर्शाते हुए इसे अभिव्यक्त करती है। oc वक्र के निर्माण में, हम x अक्ष के साथ p या दोष प्रतिशत के रूप में ढेर गुणवत्ता और y अक्ष के साथ $p_2(p)$ या ढेर की स्वीकृति संभाव्यता को लेते हैं । किसी भी दिए गए नमूनाकरण योजना के अनुरूप हमेशा एक संचालन (oc वक्र) विशेषता होती है। एक विशिष्ट oc वक्र का आकार निम्न होता है:



14.7 ढेर गुणवत्ता दोष प्रतिशत के रूप में

उपर्युक्त आंकडे में, यह माना जाता है कि स्वीकार्य और अस्वीकार को गुणवत्ता के अनुपात के रूप में मापा जाता है जो दोषपूर्ण हाते हैं और $p_a = 0.05$, और $p_r = 0.15$ है। oc वक्र में से, यह देखा जाना चाहिए कि स्वीकृति की संभावना 0.05, 0.9 से कम है, गुणवत्ता के अस्वीकृति की संभावना 0.15 , 0.1 से थोडा अधिक है। इससे पता चलता है कि अच्छे उत्पादों की अस्वीकृति का मौका जा निर्माता के जाखिम 0.1 से थोडा अधिक है और खराब उत्पादों की स्वीकृति का मौका, जो उपभोक्ता के जोखिम 0.1 से थोडा अधिक है।

इस प्रकार, निर्माता और उपभोक्ता दोनों का जोखिम एक समान होता है। वक्र की ढलान नमूना आकार पर निर्भर होता है। बडे नमूने के OC वक्र में ढलान ज्यादा होती है। OC वक्र की स्थिति स्वीकृति के लिए स्वीकार्य दोषपूर्ण वस्तुओं की अधिकतम संख्या द्वारा निर्धारित की जाती है, जिसे स्वीकृति संख्या कहा जाता है। स्वीकति संख्या के छोटे या बडे होने पर वक्र को बाएं या दाएं स्थानांतरित किया जाता है।

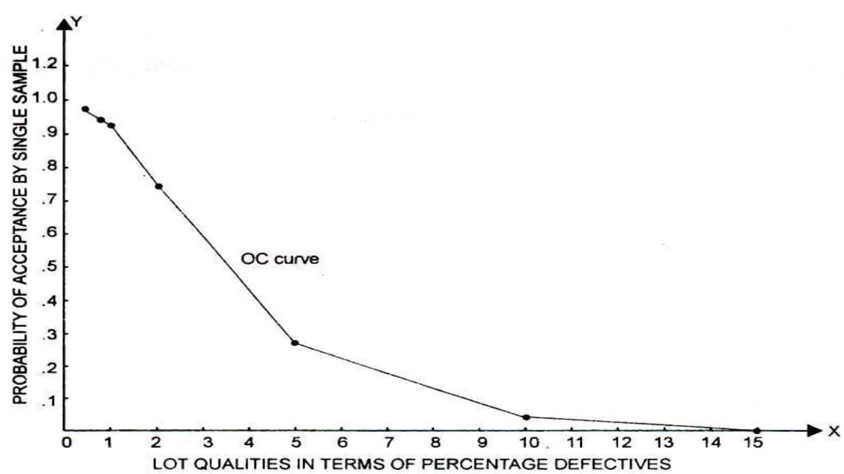
उदारहण 14.12 एकल नमूनाकरण योजना से संबंधित निम्नलिखित आंकडों से , 0.5 प्रतिशत, 7.5 प्रतिशत, 1 प्रतिशत, 2 प्रतिशत, 5 प्रतिशत 10 प्रतिशत और 15 प्रतिशत ढेर गुणवत्ता में दोषों की स्वीकृति संभावना ज्ञात करें और आंकडों को प्रदर्शित करने के लिए OC वक्र दर्शाऐं ।

हल :– यह एकल नमूनाकरण योजना की स्थिति है। चूँकि सहिष्णु दोष की संख्या या $c = 1,$ यदि नमूना 0 या 1 दोष देता है तो ढेर स्वीकार्य होगा ।

पायसन वितरण का प्रयोग करते हुए संचयी प्राथिमताओं की गणना

ढेर में % दोष	माध्य दोष (m)	$P(0) = e^{-m}$	$P(1) = m.e^{-m}$	$P_\alpha(p) = P(0) + P(1)$
0.50	$\frac{50}{100}$ ×.5=2.5	0.7788	0.1947	0.9735
0.75	$\frac{50}{100}$ ×.75=.38	0.6839	0.2599	0.9438
1.00	$\frac{50}{100}$ ×1=.50	0.6065	0.3033	0.9098
2.00	$\frac{50}{100}$ ×2=1.00	0.3678	0.3678	0.7358
5.00	$\frac{50}{100}$ ×5=2.50	0.0821	0.2053	0.2874
10.00	$\frac{50}{100}$ ×10=5.00	0.0070	0.0350	0.0420
15.00	$\frac{50}{100}$ ×15=7.50	0.0006	0.0045	0.0051

अब, आप एक नमूनाकरण योजना द्वारा दिए गए प्रतिशत दोषों के साथा ढेर के स्वीकृति की संभावनाओं का प्रतिनिधित्व करेंगें। इसे नीचे दर्शाया गया है:–



उपरोक्त oc वक्र इंगित करता है कि 1,000 वस्तुओं (चूंकि $N = 1000$) के निरीक्षण में से $974(.9735 \times 1000)$ वस्तु स्वीकार्य हेंगें और 26 वस्तु 0.5% दोष के साथ अस्वीकार्य होंगें।

14.8 सारांश

संक्षेप में विशेषताओं के लिए लेखाचित्र का उपयोग किया जाता है जब किसी उत्पाद की गुणवत्ता को मात्रात्मक रूप में मापा नहीं जा सकता है और आंकडों का दोष और गैर दोष जैसे गुणों की समग्रता के आधारपर अध्ययन कियाजाता है। इसके अतिरिक्त, स्वीकृति नमूनाकरण सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण का एक और बडा क्षेत्र है । उत्पादकों और उपभोक्ताओं के हिस्सों पर होने वाले जोखिम को समाविष्ट करके उत्पादित उत्पादों के नरीक्षण के साथ संबंधित है।

14.9 शब्दावली

विशेषताओं के लिए नियंत्रण लेखाचित्र: ऐसे लेखाचित्र जिनका उपयोग तब किया जाता है जब किसी उत्पाद की गणुवत्ता या विशेषताओं को मात्रात्मक शब्दों मे मापा नहीं जा सकता है ।

14.10 बोध प्रश्न

1. यदि उत्पादों के एक बडे नमूने का औसत अंश सीमाओं की गणना करें। (यह देखते हुए कि प्रत्येक नमूने का आकार 200 है।)
2. 9 ढेरों में से आकार 100 के 9 नमूनों के निरीक्षण ने निम्नलिखित दोष इकाईयों की संख्या प्रदर्शित की :

वस्तु संख्या (प्रत्येक 100 वस्तुओं में)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
दोषों की संख्या	12	7	9	8	10	6	7	11	8

3. 250 से ज्यादा वस्तुओं के रेडियों उत्पादन के निर्माण से संबंधित 250 वस्तुओं के ढेर को एक समय में निरीक्षित किया। व्यापार मे 20 विभिन्न नमूने लिये गए और दोष नीचे लिखे गए है। एक उपयुक्त नियंत्रण लेखाचित्र बनाऐं।

ढेर संख्या (250 वस्तुओं में प्रत्येक)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दोषों की संख्या	25	47	23	36	24	34	39	32	35	22
ढेर संख्या	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
दोषों की संख्या (250 वस्तुओं में प्रत्येक)	45	40	32	35	21	40	15	28	23	42

4. एक निश्चित नमूना निरीक्षण में, प्रत्येक 100 के 21 नमूनों में पाये गए दोषों की संख्या नीचे दी गई है। 57,9,7,8,13,8,4,8,4,3,7,7,12,15,5,13,4,3,10,8, क्या इंगित करते हैं कि सांख्यिकीय के अर्न्तगत गुणवत्ता विशेषता निरीक्षण में है।
5. कपडे के समान लम्बाई की जांच के दौरान, दोषों की निम्नलिखित संख्या देखी गई। 2,3,4,0,5,6,7,4,3,2 दोषों की संख्या के लिए एक नियंत्रण लेखाचित्र बनाऐं और टिप्पणी करें कि प्रकिया नियंत्रण में है या नहीं ।

14.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. [UCL= 0.17738, LCL =0.12952 or 0]
2. [CL =8.66, UCL =9.38, LCL =7.94]
3. [CL = =31.9 UCL = 32.84, LCL =16.16]
4. [UCL = 16.48, LCL = -0.48=0]
5. [CL = $\bar{C}$ = 3.6, UCL = 9.292, LCL = 0]

14.12 स्वपरख प्रश्न

1. विशेषताओं के लिए विभिन्न प्रकार के नियंत्रण लेखाचित्र लिखे।
2. स्वीकृति नमूनाकरण से क्या समझते हैं समझाइये।
3. नियंत्रण लेखचित्र में अंशदोषों की गणना की प्रक्रिया को समझाइयें।
4. काल्पनिक अंकों का प्रयोग करते हुए नियंत्रण लेखाचित्र (p लेखाचित्र) को रेखांकित करें।
5. नियंत्रण लेखाचित्र एंव स्वीकृति नमूनाकरण के बीच विभेद कीजिए ।

14.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. मूल सांख्यिकी – गौण, गुप्ता और दासगुप्ता वर्ल्ड प्रेस लिमिटेड –कलकत्ता
2. व्यावसायिक सांख्यिकीय की बुनियादी बातें संचेती और कपूर
3. प्रबंधन में मात्रात्मक तरीके – श्रीवास्तव, शेनाय और गुप्ता
4. व्यावसायिक सांख्यिकीय – गुप्ता और गुप्ता

इकाई 15 काई–वर्ग परीक्षण (Chi-Square Test)

इकाई की रुपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- काई–वर्ग वितरण की अवधारणा की व्याख्या कर सकें।
- काई–वर्ग वितरण के प्रयोग का वर्णन कर सकें।

15.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं कि विभिन्न सांख्यिकीय उपकरणों का प्रयोग परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए किया जाता है। इन सांख्यिकीय परीक्षणों को दो अलग अलग समूहों मे वर्गीकृत किया जा सकता है। प्राचल परीक्षण और गैर प्राचल परीक्षण। प्राचल परीक्षण वे होते हैं जो समग्र के मापदंडों पर आधारित होते हैं। प्राचल परीक्षणों को प्रयोग करने में, समग्र वितरण की निश्चित मान्यताओं को पूरा करना आवश्यक है। यह इन परीक्षणों के कार्यान्वयन के लिए प्रतिबंध बनता है। इन प्रतिबंधों को रोकने के लिए हम दूसरे वर्ग के परीक्षणों का प्रयोग कर सकते हैं जिन्हें गैर प्राचल परीक्षणों के रूप मे जाना जाता है। इस ढांचे में, आप विभिन्न गैर प्राचल परीक्षणों के बारे में अध्ययन करेंगें। इन सभी परीक्षणों में, काई वर्ग परीक्षण सबसे लोकप्रिय गैर प्राचल परीक्षण है लेकिन इसे प्राचल परीक्षण के रूप में भी प्रयोग किया

जा सकता है। इस अध्याय में आप सैद्धान्तिक अवधारणा और काई वर्ग परीक्षण के विभिन्न उपयोगों के बारे मे विस्तार से अध्ययन करेंगें।

15.2 काई वर्ग परीक्षण का अर्थ एवं उपयोग

संख्यिकीविदों द्वारा विकसित किये गये कई परीक्षणों के बीच काई–वर्ग परीक्षण एक महत्वपूर्ण परीक्षण है। 1900 में प्रोफेसर कार्ल पियरसन द्वारा इस परीक्षण का प्रस्ताव किया था। काई वर्ग परीक्षण को x^2 प्रतीक द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इसकी उत्पत्ति ग्रीक अक्षर 'ची' से होती है। काई–वर्ग परीक्षण का उपयोग समग्र के भिन्नता की तुलना करने के लिए प्राचलन के साथ ही गैर प्राचल परीक्षण के रूप में किया जा सकता है, जैसे स्वतन्त्र के परीक्षण के रूप में या Goodness of fit के परीक्षण के रूप में । सैद्धांतिक विचरण को भिन्नता के लिए नमूना विश्लेषण के संदर्भ में यह परीक्षण मुख्य रूप से प्रयोग किया जाता है। नील आर उल्लमन के अनुसार,''गैर प्राचलन परीक्षण के रूप में, यह निर्धारित करने के लिए प्रयोग किये जा सकते हैं कि क्या आंकडे स्पष्ट निर्भरता दिखाते हैं या दो वर्ग स्वतन्त्र है। जब वर्ग प्रयोग किये जाते हैं, इसका प्रयोग सैद्धान्तिक समग्र एवं वासतविक आंकडों के बीच तुलना करने में किया जा सकता है।'' x^2 की यात्रा सैद्धान्तिक एवं अवलोकित विसंगति के परिमाण का वर्णन करती है, अर्थात् x^2 की सहायता से हम जान सकते हैं कि क्या सिद्धानत एवं अवलोकन के बीच दी हुई विसंगति संयोगवश विशेषता से हुई है या क्या यह सिद्धान्त की अपर्याप्तता से बनाये अवलोकित तथ्यों को जोडने के लिए है।

x^2 परीक्षण सांख्यिकीय कार्य में सबसे आसान और सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयोग किया जाने वाला गैर प्राचल परीक्षणों मे से एक है, जिसे कई स्थितियों मे प्रयोग किया जा सकता है। इस तकनीक को निम्नलिखित प्रयोजनों के लिए प्रयोग किया जाता है:

- Goodness of fit के परीक्षण के लिए
- दो विशेषताओं के बीच सम्बन्ध के बीच महत्व के परीक्षण के लिए
- समरूपता या समग्र में भिन्नता के महत्व को जानने के लिए

15.3 काई वर्ग–वितरण

काई–वर्ग चर के प्रायिकता वितरण को काई वर्ग वितरण कहते हैं। यदि Z_1, Z_2,…………Z_K स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हों, प्रत्येक के पास एक मानक सामान्य वितरण N(0,1) हो, तब $\chi_k^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_k^2$ के वितरण को x^2 वितरण कहा जाता है।

वैचारिक रूप में, x^2 अवलोकित एवं अपेक्षित आवृत्तियों के अस्तित्व के बीच विसंगति की माप है जिसका मान मुख्य रूप से स्वतन्त्रता की मात्रा पर निर्भर करता है। स्वतन्त्रता की मात्रा मानो की वह संख्या है जिसे हम स्वतन्त्र रूप से चुन सकते हैं, अर्थात वे अन्य पूर्व निर्धारित प्राचलों द्वारा तय नहीं किया जाता है। इसका अर्थ है

कि काई वर्ग परीक्षण में केवल एक प्राचल होता है अर्थात स्वतन्त्रता की मात्रा की संख्या । उदाहरण के लिए, यदि यह दिया गया है कि तीन चरों का योग 50 के बराबर हो, तो हम कोई भी दो चरों का चयन करने के लिए स्वतन्त्र हैं लेकिन तीसरा चर 50 (दो चरों का योग) के बराबर होना चाहिए, क्योंकि केवल तभी तीन चरों का योग 50 के बराबर होगा। यहाँ स्वतन्त्रता की मात्रा 2 है। स्वतन्त्रता की मात्रा को सामान्यतया r या df द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। x^2 परीक्षण के माध्यम से हम सिद्धान्त या अपेक्षित मान और अवलोकित या वास्तविक मान के बीच अंतर की सीमा निर्धारित करने में सक्षम है।

गणितीय रूप में इसे निम्नवत परिभाषित किया जाता है :

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

जहाँ O = अवलोकित आवृत्तियाँ

E = अपेक्षित आवृत्तियाँ

काई वर्ग परीक्षण विशेष रूप से संज्ञात्मक आंकडों से जुडे परीक्षणों मे उपयोगी है, लेकिन इसका उपयोग उच्च मानदण्डों के लिए भी किया जा सकता है। संज्ञात्मक आंकडा माप का सबसे प्रारम्भिक रूप है, जो विभाजन को एक श्रेणी मे व्यवस्थित करता है जो कि पारस्परिक रूप से अनन्य और सामूहिक रूप से संपूर्ण है। उदाहरण के लिए, समग्र को दो श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है। पुरूष और महिलाएं।

15.3.1 x^2 वितरण के गुण

x^2 वितरण में कई गुण है, वितरण के कुछ महत्वपूर्ण गुण निम्नानुसार हैः

1. x^2 वितरण एक निरंतर संभाव्यता वितरण है जिसका निचली सीमा में मान शून्य है और धनात्मक दिशा में अनंनता तक फैली हुई है। x^2 का नकारात्मक मान सम्भव नहीं है क्योंकि अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच के अंतर की हमेशा वर्ग होता है, इसलिए x^2 का मान कभी नकारात्मक नहीं हो सकता है।
2. वितरण का सही आकार स्वतन्त्रता की मात्रा की संख्या (v) पर निर्भर करता है। सामान्य रूप में जब v छोटा है, वक्र का आकार दायीं ओर तिरछा है और जैसे ही v बडा हो जाता है, वितरण अधिक से अधिक सममित हो जाता है और सामान्य वितरण द्वारा अनुमानित किया जा सकता है।
3. x^2 वितरण का माध्य स्वतन्त्रता की मात्रा द्वारा दी जाती है और भिन्नता स्वतन्त्रता की मात्रा की दो गुनी है। इसे निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है :

   $E(\chi^2) = \mu = v$

   $V(\chi^2) = \sigma^2 = 2v$
4. x^2 एक नमूना आंकडा है जिसके पास कोई संगत प्राचल नहीं है। यह x^2 वितरण गैर प्राचल वितरण को बनाता है।

5. x^2 वितरण के लिए योगात्मक गुण अच्छा निर्णय देता है। इसका अर्थ है कि स्वतन्त्र x^2 चरों का योग भी x^2 चर होता है। इस प्रकार यदि ${\chi_1}^2$ v_1 $d.f.$ के साथ x^2 चर है और ${\chi_2}^2 v_2$ $d.f.$ के साथ x^2 का दूसरा चर है। ${\chi_1}^2$ स्वतन्त्र है, तब उनका योग ${\chi_1}^2 + {\chi_2}^2$ भी एक $v_1 + v_2$ $d.f$ के साथ x^2 का चर है।

15.3.2 x^2 परीक्षण के प्रयोग के लिए शर्तें :–

एक काई –वर्ग परीक्षण का उपयोग किया जाना चाहिए, यदि निम्न स्थितियॉ संतुष्ट होती है

1. सैद्धान्तिक रूप से सही वितरण और अध्ययन के नमूनाकरण वितरण के बीच समानता के एक माडेम के दायित्व के लिए 'N' की कुल संख्या बहुत बडी होनी चाहिए। N का सामान्यतया स्वीकार किया गया मान 50 होता है। इसलिए नमूने कम से कम 50 अवलोकन होने चाहिए।
2. नमूना आंकडा लक्षित समग्र से यादृच्छिक तरीके से लिया जाना चाहिए ताकि पक्षपाती (पूर्वाग्रह) कोई तत्व न हो ।
3. प्रयोगिक आंकडा या नमूना अवलोकन, अर्पित सभी वस्तुऐं या नमूने मे अवलोकलन एक दूसरे से अलग होन चाहिए।
4. तुलनात्मकता की सुविधा के लिए आंकडों को मूल इकाईयों (पूर्ण रूप) में व्यक्त किया जाना चाहिए न कि तुलनात्मक रूप में जैस कि प्रतिशत या अनुपात या समानुपात इत्यादि।
5. किसी भी कक्ष में पॉच अवलोकन से कम नहीं होना चाहिए। (प्रत्येक आंकडे प्रविष्टि को एक कक्ष के रूप में जाना जाता है)। यदि किसी समूह में स्वीकार स्तर के नीचे आवृत्तियॉ होती हैं तो आवृत्तियों का एकत्रीकरण किया जाता है जिससे कम आवृत्तियों को पूर्ववर्ती या बाद की आवृत्तियों मे ंजोडा जाता है ताकि परिणामस्वरूप मान स्वीकार्य स्तर से अधिक हो कुछ सांख्यिकीयविद् 5 के बजाय न्यूनतम स्वीकार्य स्तर के लिए 10 अंक को बेहतर मानते हैं।
6. प्रतिबंधों को रैखिक होना चाहिए अर्थात् प्रतिबंधों की परिभाषित करने वाले सभीकरणों में आवृत्तियों का कोई वर्ग या उच्च घातें नहीं होनी चाहिए।

15.4 विविधता की तुलना के लिए , काई वर्ग परीक्षण

काई–वर्ग मान प्रायः समग्र विचरण के महत्व के आकलन के प्रयोग के लिए किया जाता है। इसका अर्थ यह है कि जब सामन्य वक्र जिसका माध्य μ और विचलन σ_p^2 है में से एक यादृच्छिक नमूना लिया जाता है तो χ^2 परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है। समग्र विचलन के महत्व के आंकलन केलिए, यह माना जाता है कि नमूना विचलन समग्र विचलन के बराबर हो। इस प्रकार शून्य परिकल्पना को निम्न प्रकार से लिया जाता है : $H_0 : \sigma_s^2 = \sigma_p^2$

यह स्पष्ट है कि χ^2 परीक्षण χ^2 वितरण पर आधारित होता है जो कि मानों के संग्रह से संबंधित होती है और जिसमें वर्गों का योग शामिल हेाता है। जब हमें काई वर्ग का

प्रयोग समग्र विचलन के परीक्षण के रूप में करना होता है, तो हमें शून्य परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए निम्नलिखित सूत्र द्वारा χ^2 का मान निकलना पडेगा।

$$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$$

जहॉ

σ_s^2 = नमूने का विचलन

σ_p^2 = समग्र का विचलन

$(n-1)$ = स्वतन्त्रता का अंश

n = नमूने में वस्तुओं की संख्या

स्वतन्त्रता के विभिन्न अंशों एवं स्तरों के लिए x^2 के महत्वपूर्ण मान तालिका के रूप मे उपलब्ध हैं। आप इस तालिका को सांख्यिकीय की किसी भी अच्छी किताबों के परिशिष्टों मे पा सकते हैं। किसी निर्णय मे पहुॅचने के लिए उपरोक्त सूत्र द्वारा x^2 के मान की गणना की जाती है, गणना किये हुए मान को (n-1) स्वतंत्रता के अंश के साथ किसी विशेष स्तर पर तालिका मान से तुलना करते हैं। यदि x^2 का गणितीय मान, तालिका के मान से कम है तो शून्य परिकल्पना को स्वीकृत किया जाता है। इसके विपरीत, यदि x^2 का गणना किया हुआ मान, तालिका मान के बराबर या अधिक हो तब परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है।

इस सम्बन्ध में याद रखने के लिए एक महत्वपूर्ण बात यह है कि काई वर्ग वितरण सममित नहीं है और सभी मान सकारात्मक है। भिन्नता की तुलना करने के लिए x^2 परीक्षण का उपयोग समग्र के सामान्य वितरण की धारणा पर आधारित होती है।

उदाहरण – 1 10 छात्रों का वजन इस प्रकार है :–

कम0 संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वजन(किग्रा)	38	40	45	53	47	43	55	48	52	49

क्या हम कह सकते हैं कि 10 छात्रों के ऊपर दिए गए नमूने से सभी छात्रों के वजन का विचलन 20 किलोग्राम के बराबर है ? 5 प्रतिशत एवं प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण करें।

हल :– सबसे पहले हमें नमूना आंकडा ज्ञात करना चाहिए, अर्थात σ^2 जिसकी गणना निम्नानुसर की जाती है :–

कम0सं0.	X_i (वनज किग्रा में.)	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	38	– 9	81
2	40	– 7	49
3	45	– 2	04
4	53	+ 6	36
5	47	0	00
6	43	– 4	16
7	55	+8	64

8	48	+1	01
9	52	+5	25
10	49	+2	04

$n = 10 \quad \sum X_i = 470 \qquad \sum (X_i - \bar{X})^2 = 280$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{470}{10} = 47 \text{ kgs}$$

$$\therefore \qquad \sigma_s = \sqrt{\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{280}{10-1}} = \sqrt{31.11}$$

या $\qquad \sigma_s^2 = 31.11$

$H_0 : \sigma_s^2 = \sigma_p^2$

इस रिक्त परिकल्पना के परीक्षण के लिए, हमें χ^2 के मान पर निम्नानुसार कार्य करना पडेगा।

$$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$$

$$= \frac{31.11}{20}(10-1) = 13.999$$

स्वतन्त्रता का अंश = n – 1 or 10 –1 = 9

5% महत्व के स्तर पर, x^2 का तालिका मान 16.92 है और 1% महत्व के स्तर पर यह $9d.f.$ के लिए 21.67 है और ये दोनों मान x^2 के गणना किये हुए मान जो कि 13.999 हे से ज्यादा है। इसलिए, हम शून्य परिकल्पना को स्वीकार करते हैं और यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिये हुए वितरण का विचलन 5% एवं 1% महत्व के स्तर पर 20 किलोग्राम लिया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, नमूने को समग्र से 20 किलोग्राम वजन के साथ लिया जा सकता है।

उदाहरण – 2 15 बोतलों का एक नमूना यादृच्छिक तरीके से एक निश्चित समग्र से लिया जाता है। दिये हुए नमूने के माध्य से विचलन के वर्ग का योग 55 है। क्या इस नमूने का 6 के विचलन के साथ समग्र से लिया गया है ?

हल :– n = 15, $\qquad \sum (X_i - \bar{X})^2 = 55, \qquad \sigma_p^2 = 6$ दिया गया है :

शून्य परिकल्पना को निम्नानुसार लिया जा सकता है : $H_0: \sigma_s^2 = \sigma_p^2$

सबसे पहले हमें नमूना विचलन की गणना

$\sigma_s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{55}{15-1} = 3.93$ के अन्तर्गत करते हैं

अब हमें x^2 के मान की गणना $\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1)$ के अन्तर्गत करनी है।

$$\chi^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_p^2}(n-1) = \frac{3.93}{6}(15-1) = 9.17$$

(n-1) के लिए अर्थात् (15–1) या 14 स्वतन्त्रता के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का परिकलित मान x^2 के तालिका मान से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना

स्वीकार्य है, अर्थात् नमूना विचलन और समग्र विचलन के बीच कोई महत्वपूर्ण अंतर नहीं है और नमूने को 6 के विचलन के साथ समग्र से लिया गया है।

15.5 काई–वर्ग गैर–प्राचल परीक्षण के रूप में

काई–वर्ग का उपयोग प्राचल के साथ ही गैर–प्राचल परीक्षण के रूप मे किया जा सकता है। पहले के खंड में, आपने पढा है कि काई–वर्ग का प्रयोग नमूना विचलन की तुलना, समग्र विचलन के साथ की जा सकती है। इस स्थिति में, इसे प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह समग्र प्राचल पर आधारित है। लेकिन यह ज्यादातर गैर–प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, काई वर्ग सबसे महत्वपूर्ण और लोकप्रिय गैर प्राचल परीक्षण मे से एक है जो उन सम्बन्ध में पूरा करना है। यह परीक्षण विशेष रूप से संज्ञात्मक आंकडों के सम्बन्ध मे उपयोगी है। लेकिन इसे उच्च स्तरों (क्रमिक, अंतराल, अनुपात) के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है। गैर प्राचलन परीक्षण के रूप में, निम्न परिस्थितियों में काई वर्ग प्रयोग किया जा सकता है।

15.5.1 काई–वर्ग स्वतन्त्रता के परीक्षण के रूप में

गुणों के समूह के क्षेत्र मे काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग बहुत उपयोगी है। विशेषताओं के समूह से, हमारा उद्देश्य यह पता लगाना है कि क्या दो विशेषताऐं स्वतन्त्र है या उनके बीच कोई सम्बन्ध है। इस प्रयोजन के लिए, हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि दो विशेषताओं के बीच कोई समबन्ध नहीं है अर्थात दो विशेषताऐं स्वतन्त्र है। उसके बाद x^2 के मान की गणना की जाती है और इसकी तुलना x^2 के तालिका मान से की जाती है यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से कम या उसके बराबर है तो शून्य अवधारणा को स्वीकार किया जाता है और दो विशेषतओं को स्वतन्त्र माना जाता है, अन्यथा अगर परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो शून्य परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार कर दी जाती है और यह माना जाता है कि दो विशेषताओं के बीच सम्बन्ध है। इसलिए दो विशेषताओं के बीच परस्पर स्वतन्त्रता के परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण के लिए, मान लिजिए हमें यह जानने में रूचि है कि क्या एक नई दवा बुखार को नियंत्रित करने में प्रभावी है या नहीं। हम यह निर्णय लेने मे काई वर्ग परीक्षण की सहायता ले सकते हैं। सबसे पहले हम शून्य अवधारणा लेंगें कि दो विशेषताओं, अर्थात् नई दवा और बुखार का नियंत्रण स्वतन्त्र है जिसका अर्थ है कि नई दवा बहुखर को नियंत्रित करने मे प्रभावी नहीं है। इस आधार पर, हम पहले अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं और फिर x^2 का मान ज्ञात करते हैं। यदि x^2 का परिकलित मान स्वतन्त्रता के दिये गए अंश के लिए एक निश्चित स्तर पर तालिका मूलय से कम है, तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि शून्य परिकल्पना सत्य है जिसका अर्थ है कि देा विशेषताऐं स्वतन्त्र हैं या सम्बन्धित नहीं है। (अर्थात नई दवा बुखार को नियंत्रित करने मे प्रभावी नहीं है) लेकिन यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से अधिक है तो हमारा अनुमान गलत होगा जिसका अर्थ है कि

दो विशेषताऐं सम्बन्धित है और सम्बन्ध संयोगवश नही है अपितु यह वास्तविकता मे मौजूद है (अर्थात नई दवा बुखार को नियंत्रित करने में प्रभावी है और जैसा कि निर्धारित किया जा सकता है)। यहॉ पर घ्यान देने योग्य एक महत्वपूर्ण बात यह है x^2 सम्बन्ध के अंश की माप नहीं है या दो विशेषता के बीच सम्बन्ध के रूप मे उपाय नहीं है, लेकिन यह केवल इस तरह के सहयोग के महत्व को पहचानने की एक तकनीक या दो विशेषताओं के संबंध को पहचानने की एक तकनीक है।

15.5.2 काई वर्ग Goodness of fit के परीक्षण के रूप में

काई–वर्ग परीक्षण का प्रयोग यह पता लगाने के लिए भी किया जाता है कि सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के अनुरूप अपेक्षित वितरण मे कितना अंतर है अर्थात Goodness of Fit का परीक्षण किया जाता है। इसका अर्थ यह है कि x^2 का परीक्षण Goodness fo Fit के रूप में प्रयोग यह निर्धारित करने के लिए प्रयोग किया जाता है कि अवलोकित आंकडे सैद्धान्तिक वितरण मे कितने अच्छे हैं। कई बार, अपेक्षित आवृत्तियों को गणितीय तकनीकों जैसे द्विपद, सामान्य और पायसन वितरण आदि की सहायता से ज्ञात किया जाता है। कभी कभी यह जानना हमारे लिए महत्वपूर्ण हो जाता है कि कितनी वास्तविक आवृत्तियॉ, अपेक्षित आवृत्तियों से मिलती है। यह आवश्यकता मुख्य रूप से नमूना अध्ययन के मामले मे उत्पन्न होती है। ऐसी परिस्थितियों में, हमें यह देखना होगा कि नमूना अध्ययन से प्राप्त वास्तविक आवृत्तियों का सैद्धांतिक या गणितीय वितरण से प्राप्त अपेक्षित आवृत्तियों के साथ मिलान है और उनके बीच का अंतर महत्वपूर्ण है या नहीं। इसे Goodness of Fit कहा जाता है। अस्वीकृति यह बताती है कि Goodness of Fit खराब है। इस सम्बन्ध में Goodness of Fit एक अन्य उल्लेखनीय बात यह है कि अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के वक्र एक समान होते है। दूसरी ओर, यदि Goodness of Fit नहीं है तब दोनों वक्र एक समान नहीं होते है। जैसा कि आप जानते हैं कि Goodness of fit के रूप में , काई वर्ग मुख्य रूप से नमूने अध्ययनों मे उपयोग किया जाता है। लेकिन अलग अलग तरह के नमूनों में काई वर्ग का उपयोग करते समय एक बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि Goodness of Fit भी इसकी विश्वसनीयता पर प्रश्न चिन्ह उठाती है। चाउ के अनुसार ,''यह ध्यान में रखा जाना चाहिए खराब Goodness of Fit के रूप में एक समान है। जब गणना किये गए काई वर्ग का मान शून्य के निकट है तो हमें इस सम्भावना पर संदेह करना चाहिए कि दो आवृत्तियों के आवंटन को उनके साथ सहमत होने के लिए बाध्य किया गया है और इसलिए हमारे प्रयोग के प्रारूप की पूर्ण रूप से जांच करनी चाहिए।

15.5.3 काई–वर्ग समरूपता के रूप में

विभिन्न नमूनों के बीच एकरूपता परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का भी प्रयोग किया जाता है। एकरूपता के परीक्षण के लिए, यह पता लगाया जाता है कि क्या दो विभिन्न नमूने एक ही समग्र से लिये गये हैं या नहीं। दूसरे शब्दों में, काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग दो अलग नमूनों के मानों के बीच अंतर के महत्व के परीक्षण

करने के लिए किया जाता है। इसलिए, यह दो विशेषताओं के बीच स्वतन्त्र परीक्षण के समान है। लेकिन एक ही समय में, यह दो बिन्दुओं के स्वतन्त्र परीक्षण से भिन्न है। सबसे पहले स्वतन्त्र परीक्षण यह पता करने की कोशिश करता है कि एक विशेषता दूसरे से स्वतन्त्र है, और समरूपता का परीक्षण यह पता लगाने की कोशिश करता है कि यादृच्छिक नमूने समग्र से लिये गये है। दूसरा स्वतन्त्र परीक्षण एक नमूने का प्रयोग करता है जबकि समरूपता की जांच मे ंदो या अधिक नमूनों का प्रयोग होता है।

15.6 काई–वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोग में चरण

x^2 परीक्षण प्रारम्भ करने के एिल निम्नलिखित चरणों का पलन किया जाता हैः

- काई वर्ग x^2 परीक्षण की प्रक्रिया शून्य परिकलपना की अवधारणा के साथ प्रारम्भ होती है। यह माना जाता है कि अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के बीच कोई अंतर नहीं है। स्वभाविक रूप से, अपेक्षित और वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर के लिए वैकल्पिक अनुमान भी शून्य परिकल्पना से तैयार किया जाता है। इसे निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है।

  $H_0 : O_i = E_i$

  $H_0 : O_i \neq E_i$

  जहॉ $O_i =$ अवलोकित आवृत्ति और

  $E_i =$ अपेक्षित आवृत्ति

  कुछ सांख्यिकीयविदों द्वारा अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों को दर्शाने के लिए कमशः f_0 और f_e या O और E प्रतीक चिन्ह प्रयोग किये जाते हैं।

- x^2 के मान की गणना करने के लिए, हमारे पास वास्तविक और अपेक्षित आवृत्तियॉ हमारे पास पहले से उपलब्ध है। दूसरे चरण में, इन वास्तविक आवृत्तियों के आधार पर, परिस्थितियों के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं। अपेक्षित आवृत्तियों को यह मानकर विकसित किया जाता है कि संबंधित सांख्यिकीय समग्र के लिए एक विशेष संभावना वितरण उचित है। सामान्यता, 2x2 किसी भी आकस्मिकता तालिका के लिए किसी भी कक्ष मे अपेक्षित आवृत्ति को निम्नानुसार ज्ञात किया जाता है।

  किसी भी कक्ष में अपेक्षित आवृत्ति =

  (उस कक्ष की पंक्ति के लिए पंक्ति योग) x (उस कक्ष के स्तम्भ के लिए स्तम्भ योग)/कुल योग

- अगले चरण में, अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच अन्तर को देखते हैं, अर्थात (O-E)

- इसके पश्चात्, अन्तर का वर्ग करते हैं। अर्थात् $(O - E)^2$

- अगले चरण में, इस अंतर के वर्ग को इसकी अपेक्षित आवृत्तियों से विभाजित करते हैं, अर्थात $(O - E)^2/ E$ । यह प्रत्येक कक्षा की आवृत्तियों के लिए दोहराया जाना चाहिए।
- उसके बाद $(O - E)^2/ E$ का कुल योग ज्ञात करते हैं। यही आवश्यक x^2 मान है। इसे निम्नवत व्यक्त किया जा सकता है। $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$
- उपर्युक्त विधि द्वारा x^2 के मान की गणना करने के बाद, शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति के सम्बन्ध में निर्णय लेने के लिए इसकी तुलना तालिका मान से की जाती है, हमें दो पहलुओं के बारे मे ंनिणय लेना चाहिए – महत्व का स्तर और स्वतन्त्रता का अंश।
- महत्व के स्तर का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने के उतार चढाव के कारण गलत होने वाले अधिकतम संभावित प्रतिशत। उदाहरण के लिए 1% महत्व का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने में उतार चढाव के कारण अधिकतम 1% संख्या गलत हो सकती है। इसी तरह, 5% महत्व का अर्थ है कि यादृच्छिक नमूने में उतार चढाव के कारण अधिकतम 5% संख्या गलत हो सकती है। x^2 के तालिका मान ज्ञात करने के लिए शोधकर्ता द्वारा उनकी सुविधा एवं अध्ययन के उद्देश्य के अनुसार महत्व के स्तर का निर्णय लेना होता है। अभ्यास में 5% महत्व का स्तर ज्यादा प्रचलित है।
- x^2 के तालिका मान को जानने एक और मापदंड तय किया जाता है वह स्वतन्त्रता का अंश है। स्वतन्त्रता के अंश का अर्थ चयन की स्वतन्त्रता की सीमा से है। किसी भी परिस्थिति में, जब विभिन्न आवृत्ति अंतराल दिये हों, पहले के तरह ही योग निकालते हैं, आवृत्ति बदलने के लिए उपलब्ध विकल्पों की संख्या को वांछित स्वतंन्त्रता के रूप में जाना जाता है। स्वतन्त्रता के वांछित अंश को कुल संख्या में से एक को घटाकर प्राप्त किया जाता है। इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। $d.f. = n - 1$ यदि वर्ग आवृत्तियॉ को पंक्तियों और स्तम्भों में व्यवस्थित किया जाता है, तो स्वतन्त्रता के अंश जानने के लिए, एक पंक्ति की संख्या और स्तम्भ की संख्या दोनों से घटाया जाता है क्योंकि पहले की तरह पंक्तियों और स्तम्भों का योग ज्ञात करना आवश्यक होता है। इन स्थितियों में, स्वतन्त्रता के अंश का सूत्र निम्नवत दिया जाता हैः

  $d.f. = (c - 1)(r - 1)$

  जहॉ c = स्तम्भों की संख्या

  r = पंक्तियों की संख्या
- महत्व के स्तर और स्वतन्त्रता का अंश तय करने के पश्चात x^2 के तालिका मान को विशिष्ट स्तर और अंश को देखा जाता है। काई वर्ग का तालिका

मान अधिकतम सीमा तक, परिकलित मान है जो नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण उत्पन्न हुआ माना जाता है।

अंतिम चरण में, x^2 के गणना मान और तालिका मान के बीच तुलना की जाती है। यदि परिकलित मान, तालिका मान से कम है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार हेाती है जो इंगित करता है कि अपेक्षित ओर वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर महत्वपूर्ण नहीं समझा जाता है। इसके विपरीत, यदि परिकलित मान, तालिका मान से ज्यादा है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है औश्रअपेक्षित एवं वास्तविक आवृत्तियों के बीच अंतर महत्वपूर्ण समझा जाता है। इस सम्बन्ध मे ंएक और उल्लेखनीय तथ्य यह है कि जब स्वतन्त्रता का अंश 30 से अधिक हो तो $\sqrt{2\chi^2}$ का वितरण सामान्य वितरण के अनुरूप होता है, जिसमें $\sqrt{2\chi^2}$ वितरण का माध्य $\sqrt{2\, d.f.-1}$ है और मानक विचलन $=1$ । फलस्तरूप जब स्वतन्त्रता का अंश 30 से ज्यादा हो, $\left[\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2d.f.-1}\right]$ की मात्रा का प्रयोग इकाई के विचलन के साथ सामान्य चर के लिए किया जा सकता है, अर्थात् $Z\alpha = \left[\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2d.f.-1}\right]$

उदाहरण 3 :– नीचे दी गई तालिका मे ंहैजा के महामारी के दौरान प्राप्त आंकडों को दर्शाया गया है :–

	आक्रमण	गैर आक्रमण	योग
टीकाकरण	31	469	500
गैर टीकाकरण	185	1315	1500
योग	216	1784	2000

हैजा के हमले को रोकने मे टीकाकरण की प्रभावशीलता का परीक्षण करें। 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 1 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 3.84 है।

हल :– हम परिकल्पना को निम्नानुसार लेंगें :

शून्य परिकल्पना : टीकाकरण एवं हैजे के हमले की रोकथाम के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात दो विशेषताऐं स्वतन्त्र हैं। x^2 के मान की गणना करने के लिए हमारे पास वासतविक एवं अपेक्षित आवृत्तियॉ होनी चाहिए । वास्तविक या अवलोकित आवृत्तियॉ प्रश्न मे दी गई हैं (हैजे का आक्रमण A द्वारा प्रदर्शित है और टीकाकरण B द्वारा) जो निम्नवत है।

अवलोकित आवृत्ति

	आक्रमण (A)	गैर आक्रमण (α)	
टीकाकरण (B)	31 (AB)	469 (α B)	500
गैर टीकाकरण (β)	185 (Aβ)	1,315 ($\alpha\beta$)	1500
	216	1,784	2,000 (N)

इन वास्तविक आवृत्तियॉ के आधार पर, हम निम्नलिखित तरीके से अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करते हैं।

(AB) = $\frac{500 \times 216}{2000}$ = 54 $\therefore$ (αB) = (B) – (AB) or 500 – 54 = 446

(Aβ) = (A) – (AB) or 216 – 54 = 162

($\alpha\beta$) = (β) – (Aβ) or 1500 – 162 = 1,338

इसे निम्नलिखित तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है:

अपेक्षित आवृत्ति

	आक्रमण (A)	गैर आक्रमण (α)	
टीकाकरण (B)	$\frac{500 \times 216}{2000}$ = 54 (AB)	500 – 54 = 446 (α B)	**500**
गैर टीकाकरण β)	216 – 54 = 162 (Aβ)	1500 – 162 = 1,338 ($\alpha\beta$)	**1500**
	216	**1,784**	**2,000 (N)**

$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर :

$$\chi^2 = \frac{(31-54)^2}{54} + \frac{(469-446)^2}{446} + \frac{(185-162)^2}{162} + \frac{(1315-1338)^2}{1338}$$

$$= \frac{(-23)^2}{54} + \frac{(23)^2}{446} + \frac{(23)^2}{162} + \frac{(-23)^2}{1338}$$

$$= 9.8 + 1.19 + 3.27 + 0.40 = 14.66$$

इस प्रकार, χ^2 का परिकलित मान **14.66** है।

स्वतन्त्रता के अंश की संख्या = (c – 1) (r – 1) = (2 – 1) (2 – 1) = 1

5% महत्व के स्तर पर 1d.f के साथ =1 x^2 का तालिका मान =3.84 है, जबकि x^2 का परिकलित मान 14.66 है जो कि तालिका मान से बहुत अधिक है इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है जिसका अर्थ है टीकाकरण एवं हैजे के हमले की रोकथाम स्वतन्त्र नहीं है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि टीकारण हैजे की रोकथाम के लिए प्रभावशाली है।

x^2 की गणना के लिए वैकलल्पक विधि

हम 2x2 अकस्मिकता तालिका के मामले में x^2 के मान की गणना के लिए अन्य विधि का प्रयोग कर सकते है। हम मान सकते हैं कि अवलोकित आवृत्तियों को निम्नलिखित तरीकों से व्यवस्थित किया गया है :

a	b	(a + b)
c	d	(c + d)
(a + c)	(b + d)	N

तब x^2 की गणना निम्न सूत्र के आधार पर की जा सकती है :

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 \times N}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

इस सूत्र को इस प्रश्न में प्रयोग किया जा सकता है ताकि x^2 के मान की गणना के बिना अपेक्षित आवृत्तियों को भी ज्ञात किया जा सके। ऐसी स्थिति में, हमें केवल वास्तविक आवृत्तियों की आवश्यकता होती है जो प्रश्न में पहले से ही दिए गए है।

$$\chi^2 = \frac{[(31 \times 1315)-(185 \times 469)]^2 \times 2000}{(31+469)(185+1315)(31+185)(469+1315)}$$

$$= \frac{(40675-86765)^2 \times 2000}{(500)(1500)(216)(1784)}$$

$$= \frac{4232000000000}{28900800} = 14.6$$

उदाहरण –4 1000 छात्रों पर जो डिस्कवरी चैनल देखते हैं और उनके बुद्धि स्तर में किये गए सर्वेक्षण मे ंनिम्नलिखित जानकारियॉ सामने आई है।

		डिस्कवरी देखने वाले	गैर डिस्कवरी योग देखने वाले	योग
उच्च	IQ	415	185	600
निम्न	IQ	65	335	400
योग		480	520	1,000

5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि डिस्कवरी चैलन देख रहे छात्रों में उच्च IQ होता है।

हल : आइऐं हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि डिस्कवरी चैनल देखने और IQ स्तर में कोई भी सम्बन्ध नहीं है। अब वास्तविक आवृत्तियों के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं

$\frac{480 \times 600}{1000} = 288$	600 – 288 = 312	**600**
480 – 288 = 192	400 –192 = 208	**400**
480	**520**	**1000**

अवलोकित आवृत्ति (O)	अपेक्षित आवृत्ति (E)	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/ E$
415	288	127	16129	56
185	312	– 127	16129	51.7
65	192	– 127	16129	84
335	208	127	16129	77.54
			Total	$\boxed{269.24}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 269.24$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या = (c – 1) (r – 1) = (2 – 1) (2 – 1) = 1

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.841 है। चूँकि, परिकलित मान (269.24) तालिका मान (3.841) से बहुत अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि डिस्कवरी चैलन देखने वाले छात्रों का IQ ऊँचा है।

उदाहरण 5 :– एक पासे को 150 बार उछालने पर निम्नलिखित परिणाम आये

अंकों की संख्या	1	2	3	4	5	6
आवृत्ति	19	23	28	17	32	31

परिकल्पना का परीक्षण करें कि पासा निष्पक्ष है।

हल :– पासे को उछालने पर हम यह परिकल्पना करते हैं कि अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात् पासा निष्पक्ष है। एक पासे मे 6 मुख होते हैं और प्रत्येक मुख के घटित होने की प्रायिकता एक समान है, इसलिए 150 उछालों के लिए प्रत्येक मुख की अपेक्षित आवृत्ति 150 ⁄ 6 = 25 होगी।

O	E	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/E$
19	25	– 6	36	1.44
23	25	– 2	4	0.16
28	25	3	9	0.36
17	25	– 8	64	2.56
32	25	7	49	1.96
31	25	6	36	1.44
			Total	$\boxed{7.92}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.92$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या = $n – 1 = 6 – 1 = 5$

5 स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ, 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 11.07 है। चूँकि x^2 का परिकलित मान (7.92) तालिका मान (11.07) से कम है। इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पासा निष्पक्ष है।

उदाहरण 6 :– निम्नलिखित आकस्मिकता तालिका 300 लोगों के आंखों के रंग और बालों के रंग का विश्लेषण प्रदर्शित करती है। जांच के लिए x^2 परीक्षण का प्रयोग करें, क्या आंखों के रंग और बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध है।

हल :

आंख का रंग		**बाल का रंग**		**योग**
	काला	**सुन्दर**	**भूरा**	
भूरा	30	10	40	80
नीला	40	20	40	100
धुँधला	50	30	40	120
योग	120	60	120	300

शून्य परिकल्पना : आंखों के रंग और बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात् दोनों स्वतन्त्र हैं।

प्रश्न में दिये गए वास्तविक आवृत्तियों के आधार अपेक्षित आवृत्तियों की गणना करते हैं।

अपेक्षित आवृत्ति

आंख का रंग	बाल का रंग			योग
	काला	सुन्दर	भूरा	
भूरा	$\frac{80 \times 120}{300}$ = 32	$\frac{80 \times 60}{300}$ = 16	80 – (32 +16) = 32	**80**
नीला	$\frac{100 \times 120}{300}$ = 40	$\frac{100 \times 60}{300}$ = 20	100 – (40 + 20) = 40	**100**
धुंधला	120 – (32 + 40) = 48	60 – (16 +20) = 24	120 – (32 + 40) = 48	**120**
योग	**120**	**60**	**120**	**300**

O	**E**	**(O – E)**	**$(O – E)^2$**	**$(O – E)^2/E$**
30	32	– 2	4	0.125
10	16	– 6	36	2.250
40	32	+ 8	64	2.000
40	40	0	0	0
20	20	0	0	0
40	40	0	0	0
50	48	+ 2	4	0.08
30	24	+ 6	36	1.50
40	48	– 8	64	1.33
			Total	$\boxed{7.285}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.285$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या = (c – 1) (r – 1) = (3 – 1) (3 – 1) = 4

4 स्वतन्त्रता की श्रेणी के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 9.488 है । x^2 का परिकलित मान 7.285 है जो कि तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इसका अर्थ है कि आंखों के रंग एवं बालों के रंग के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है।

उदाहरण –7 प्रत्येक 5 बच्चों वाले 320 परिवारों के एक सर्वेक्षण से निम्नलिखित वितरण का पता चला :

लडकों की संख्या :	5	4	3	2	1	0
लडकियों की संख्या :	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या :	14	56	110	88	40	12

क्या हम परिणाम कल्पना के अनुरूप हैं कि पुरूष और महिला जन्म समान रूप से संभावित है।

हलः– आइए हम शून्य परिकल्पना लेते हैं कि पुरूष और महिला का जन्म समान रूप से संभावित है, अर्थात् पुरूष औश्र महिला के जन्म की संभावना के बीच कोई अंतर नहीं है।

इस प्रश्न में , अपेक्षित आवृत्तियों को जानने के एिल द्विपद वितरण प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि यह द्विपद वितरण की सभी शर्तों को पूरा करता है।

पुरूष के जन्म की संभावना = $p = \frac{1}{2}$

महिला के जन्म की संभावना = $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

यदि प्रत्येक 5 बच्चों के 320 परिवारों पर एक सर्वेक्षण किया जाता है, तो द्विपद विस्तार निम्नानुसार होगा :

$320\,(p + q)^5$

or $320\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^5$

$= 320\,[p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5]$

$= 320[\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5]$

$= 320\left(\frac{1}{32}\right) + 320\,(5)\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 320\,(10)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 320\,(10)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + 320\,(5)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{16}\right) + 320\left(\frac{1}{32}\right)$

$= 10 + 50 + 100 + 100 + 50 + 10$

उपरोक्त द्विपदीय विस्तार की विभिन्न पदों से अपेक्षित आवृत्तियों का पता चलता है।

O	E	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/E$
14	10	4	16	1.60
56	50	6	36	0.72
110	100	10	100	1.00
88	100	– 12	144	1.44
40	50	– 10	100	2.00
12	10	2	4	0.40
			Total	$\boxed{7.16}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 7.16$$

स्वतन्त्रता के श्रेणीयों की संख्या $= n - 1 = 6 - 1 = 5$

5 स्वतन्त्रता के श्रेणी के साथ 5ः महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 11.07 है। x^2 का परिकलित मान तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि पुरूष और महिला जन्म एक समान रूप से संभावित है।

उदाहरण –8 200 एमबीए के परीक्षा परिणामों का एक विश्लेषण किया गया था। यह पाया गया कि 46 छात्र असफल हुए हैं, 68 ने तृतीय श्रेणी प्राप्त की है, 62 ने

द्वितीय श्रेणी और शेष ने प्रथम श्रेणी प्राप्त की है। क्या ये आंकडे सामान्य परीक्षा परिणाम के अनुरूप हैं जो कमशः विभिन्न श्रेणीयों के लिए 2:3:3:2 के अनुपात में है ?

हल : आइए हम शून्य परिकल्पना बनाते हैं कि अवलोकित और अपेक्षित परिणामों में कोई अंतर नहीं है।

अपेक्षित आवृत्तियों को 2:3:3:2 के सामान्य परीक्षा परिणाम अनुपातों के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है। इन अनुपातों के आधार पर, विद्यार्थियों के असफल, तृतीय श्रेणी, द्वितीय श्रेणी एवं प्रथम श्रेणी प्राप्त की अपेक्षित आवृत्तियॉ क्रमश : $\frac{200 \times 2}{10} = 40$, $\frac{200 \times 3}{10} = 60$, $\frac{200 \times 3}{10} = 60$ and $\frac{200 \times 2}{10} = 40$ होना चाहिए ।

O	E	(O – E)	$(O – E)^2$	$(O – E)^2/E$
46	40	+ 6	36	0.900
68	60	+ 8	64	1.067
62	60	+ 2	4	0.067
24	40	– 16	256	6.400
			Total	$\boxed{8.434}$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = 8.434$$

स्वतन्त्रता के श्रेणी की संख्या = n – 1 = 4 –1 = 3

3 स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 7.81 है। x^2 का परिकलित मान 8.434 है जो कि तालिका मान से अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकार है और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिए गए परिणाम सामान्य परीक्षा परिणाम के अनुरूप नहीं है।

15.7 येट का सुधार

1934 में, येट ने एक (2x2) तालिका के सम्बन्ध में गणना की गई x^2 मान निरंतरता के लिए सुधार का सुझाव दिया है, विशेषकर जब कक्ष मे छोटी आवृत्तियॉ हेाती हैं और x^2 केवल महत्व के सतर पर होता है। x^2 विश्लेषण का उपयोग करते समय, यह महत्वपूर्ण है कि कक्ष में (कम से कम 5) कम से कम 80 प्रतिशत अपेक्षित या सैद्धान्तिक आवृत्तियॉ हों और किसी भी कक्ष में अपेक्षित आवृत्ति 5 से कम हेा, तो 2x2 आकस्मिकता तालिका में 1d.f के लिए हम येट का सुधार का प्रयोग करते हैं । इस सुधार के अनुसार, अवलोकित आवृत्ति जो कि 5 से कम है में 0.5 तक वृद्धि की जाती है और दूसरी आवतृत्तियों को भी व्यवस्थित किया जाता है (0.5 जोडकर और 0.5 घटाकर) कि कुल पंक्ति और कुल स्तम्भ एक समान हों।

आवृत्तियों का वर्गीकरण

यदि छोटी सैद्धान्तिक आवृत्तियॉ घटित होती है; तो आमतौर पर दो या दो से अधिक कक्षाएं एक साथ जोडकर इस समस्या को दूर करना सम्भव हो। दूसरे शब्दों में, 5 से कम सैद्धान्तिक आवृत्तियों को एक या अधिक कक्षों के मिश्रण मे से लेकर

एक वर्ग में किया जा सकता है, जो अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों के बीच अंतर की गणना करने से पहले हेा सकता है। पुर्नगठन के बाद आजादी के श्रेणी की संख्या को निर्धारित किया जायेगा। येट का सुधार (2x2) आकस्मिकता तालिका में उपयोग किया जाता है। आवृत्तियों का वर्गीकरण nxn (m>2,n>2) आकस्मिक तालिकाओं में उपयोग किया जाता है जहॉं 5 से कम अपेक्षित अवृत्तियों को आसन्न आवृत्ति में जोडा जाता है।

उदाहरण – 9 50 छोटी सामान्य दुकानों के एक नमूने मे निम्नलिखित जानकारी प्राप्त की गई थी। क्या यह कहा जा सकता हे कि शहर की तुलना मे गॉवों मे अपेक्षाकृत अधिक महिला दुकानदार हैं ? x^2 परीक्षण का प्रयोग करें

	दुकानें		
	शहर में	गॉवों में	योग
पुरूष दुकानदार	17	18	**35**
महिला दुकानदार	3	12	**15**
योग	**20**	**30**	**50**

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 3.841 है।

हल : शून्य परिकल्पना महिला दुकानदारों की संख्या शहर और गॉव में एक समान है। कक्ष आवृत्ति 3 में 0.5 जोडना और अन्य कक्ष आवृत्तियों को समायोजित करना है ताकि पंक्ति का योग समान ही रहे, हमारे पास निम्नलिखित आकस्मिकता तालिका है :

अवलोकित आवृत्ति तालिका

	A	α	योग
B	16.5	18.5	**35**
β	3.5	11.5	**15**
	20	**30**	**50**

अपेक्षित आवृत्ति तालिका

	A	α	योग
B	$\frac{35 \times 20}{50} = 14$	$\frac{35 \times 30}{50} = 21$	**35**
β	$\frac{15 \times 20}{50} = 6$	$\frac{15 \times 30}{50} = 9$	**15**
	20	**30**	**50**

O	E	(O – E)	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
16.5	14	+ 2.5	6.25	0.45
18.5	21	– 2.5	6.25	0.30
3.5	6	– 2.5	6.25	1.04
11.5	9	+ 2.5	6.25	0.69
			Total	$\boxed{2.48}$

1d.f के साथ 5% महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.841 है। x^2 का परिकलित मान 2.48 है जो कि तालिका मान से कम है। इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार है। इसका अर्थ है कि महिला दुकानदारों की संख्या शहर और गॉव में एक समान है।

15.8 काई–वर्ग परीक्षण की महत्वपूर्ण समीक्षा

आपने उपरोक्त खण्डों में देखा है कि काई–वर्ग परीक्षण का प्रयोग कई क्षेत्रो में किया जाता है जैसे कि नमूना विचरण और समग्र विचरण के बीच तुलना करने के लिए, दो विशेषताओं के बीच स्वतन्त्रता या सम्बन्ध के लिए या विभिन्न नमूनों के बीच समरूपता को जानने के लिए। यह सैद्धान्तिक वितरण के सम्बन्ध में Goodness of fit के निर्णय के एिल भी प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, x^2 परीक्षण के महत्व के बारे मे कोई संदेह नहीं हैं।

x^2 एक बहुत ही लोकप्रिय परीक्षण है और अपने गुणों के कारण अक्सर (प्रायः) प्रयोग किया जाता है।

x^2 परीक्षण की मुख्य विशेषता यह है कि यह मूल वितरण या इसके प्राचल के रूप में कोई अवधारणा नहीं होती है। चूँकि x^2 अवलोकित और अपेक्षित आवृत्तियों पर आधारित होता है, न कि प्राचलों मे जैसे माध्य एवं मानक विचलन, इसलिए मूल

वितरण के सन्दर्भ मे इसे कोई अवधारणा बनाने की आवश्यकता नहीं होती है। मुक्त परीक्षण वितरण होने के नाते, इसका प्रयोग किसी भी प्रकार के समग्र वितरण मे किया जा सकता है जो x^2 परीक्षण के दायरे को बढाता है। इस परीक्षण की लोकप्रियता का एक कारण यह है कि प्राचल परीक्षणों t परीक्षण,Z परीक्षण और f परीक्षण की तुलना में, x^2 परीक्षण की गणना और व्याख्या की प्रक्रिया आसान (सरल) है। फिर भी x^2 परीक्षण का एक अन्य लाभ इसका योगात्मक गुण है, जिसके कारण स्वतन्त्र से सम्बन्धित नमूनों के परिणामों को जोडना सम्भव होता है। इन सभी गुणों के कारण, काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग प्रायः व्यापारिक समस्याओं और सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र मे किया जाता है।

इन गुणों के बावजूद, काई वर्ग परीक्षण की निश्चित सीमाऐं या दोष भी है। जैसा कि आप जानते हैं, x^2 परीक्षण का प्रयोग करने के लिए निश्चित शर्तों को पूरा किया जाता है। इन शर्तों को पूर्ण करना ही इस परीक्षण की एक सबसे बडी सीमा है। इस सम्बन्ध मे एक उल्लेखनीय बात यह है कि प्राचल परीक्षणों की तरह x^2 परीक्षण विश्वसनीय नहीं है। इस प्रकार, किसी स्थिति में यदि x^2 एवं प्राचल दोनों तरह के परीक्षण प्रयोग होते हों तो उस स्थिति में वरीयता प्राचल परीक्षणों को दी जानी चाहिए। इस प्रकार इस परीक्षण का प्रयोग केवल परिकल्पना के परीक्षण के लिए किया जा सकता है। यह आंकलन के लिए उपयुक्त नहीं हैं इस परीक्षण की दूसरी सीमा यह है कि, घटनाओं के घटित होने के साथ घटनाओं के घटित न होने के सम्बन्ध में आंकडे आवश्यक हैं। फिर भी काई वर्ग परीक्षण का एक और दोष यह है कि x^2 का मान परिकलित नहीं किया जा सकता है, यदि एक ही तालिका में समान या मिलान वाले समूहों की दोहराई गई माप दर्शायी जाती है। लेकिन इन सभी सीमाओं के पश्चात भी x^2 परीक्षण का महत्व या लोकप्रियता को कम नहीं किया जा सकता है। इसके महत्व या लोकप्रियता के बारे मे कोई संदेह नहीं है लेकिन इसका सही अनुप्रयोग भी एक महत्वपूर्ण और कठिन कार्य है। x^2 परीक्षण का उपयोग करते समय हमेशा याद रखना चाहिए कि परीक्षण केवल तभी प्रयोग किया जा सकता है जब नमूने के व्यक्तिगत अवलोकन स्वतन्त्र हों। इसका अर्थ है कि व्यक्तिगत पद या घटना या अवलोकन की घटना का विचाराधीन नमूना के घटित अवलोकन का कोई प्रभाव नहीं पडता है। छोटे सैद्धान्तिक आवृत्तियों वाला नमूना विशेष तरीके से समझा जाना चाहिए। इस परीक्षण के अनुचित प्रयोग या दुरूप्रयोग से सम्बन्धिता गैर घटनाओं के आवृत्तियों के बारे मे लापरवाही, परिकलित मान, अवलोकित मानों का योग और अपेक्षित मानों का योग और गलत गणना आदि संभावित कारण के गलत निर्धारण से विफलता हो सकती है। इस प्रकार शोधकर्ता को इन सभी सावधानियों को ध्यान में रखना चाहिए जब वे x^2 परीक्षण का प्रयोग कर रहे हैं और परिकल्पना के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालते हैं।

15.9 सारांश

1900 में कार्य पीयरसन द्वारा काई वर्ग परीक्षण का प्रतिपादन किया गया था। x^2 परीक्षण प्राचल के साथ साथ एक गैर प्राचल परीक्षण है। लेकिन यह मुख्यतः गैर प्राचल परीक्षण के रूप मे प्रयोग किया जाता है।

x^2 परीक्षण से हमें, सैद्धान्तिक या अपेक्षित मान और अवलोकित या वास्तविक मान के बीच अंतर की सीमा निर्धारण में सहायता मिलती है। कुछ परिस्थितियॉ ऐसी होती हैं जहॉ x^2 परीक्षण प्रयोग करने के लिए कुछ पदों की संख्या कम से कम 50 होनी चाहिए। और किसी भी कक्षा मे आवृत्ति 5 से कम नहीं हेानी चाहिए। नमूना यादृच्छिक तरीके से चयनित होना चाहिए और आंकडों को पूर्ण रूप में दिखाया जाना चाहिए। यदि यादृच्छिक नमूना, सामान्य वितरण में माध्य μ और विचलन σ_p^2 के साथ लिया गया हो तो परीक्षण के लिए x^2 का प्रयोग किया जा सकता है।

गैर प्राचल परीक्षण के रूप में, x^2 का प्रयोग स्वतन्त्र परीक्षण के रूप में Goodness of fit और समरूपता के रूप में किया जा सकता है। x^2 स्वतन्त्र परीक्षण के रूप में स्थापित किया जा सकता है यदि दो या अधिक विशेषताऐं एक दूसरे से सम्बन्धित हैं या स्वतन्त्र हैं। x^2 Goodness of fit के रूप में अवलोकित आंकडों मे सैद्धान्तिक वितरण के निर्धारण के लिए प्रयोग किया जाता है। x^2 समरूपता के एक परीक्षण के रूप मे यह ज्ञात करने के लिए प्रयोग किया जाता है कि दो या अधिक यादृच्दिक रूप से चयनित स्वतन्त्र नमूने समान समग्र से लिये गऐ हैं या नहीं। सूत्र $\sum \frac{(O-E)^2}{E}$ का प्रयोग x^2 की गणना के लिए किया जाता है। x^2 के परिकलित मान की तुलना निश्चित स्तन्त्रता की श्रेणी और महत्व के स्तर पर तालिका मान के साथ की जाती है। यदि परिकलित मान, तालिका मान से कम है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है अन्यथा अस्वीकार। स्वतन्त्रता की श्रेणी वर्गों की संख्या को संदर्भित करते हैं, जिसमें मान को स्वतन्त्र रूप से निर्धारित किये जा सकता है जो सीमाओं के बिना बडे (n-1) या (c-1) (r-1) के प्रयोग से स्वतन्त्रता की श्रेणी के संख्या के निर्धारण के लिए होती है। यदि किसी कक्ष मे आवृत्ति 5 से कम है तो येट का सुधार प्रयोग होता है जिसके द्वारा 0.5 को उस आवृत्ति और अन्य आवृत्तियों में इस तरह से समायोजित किया जाता है कि पंक्ति और स्तम्भ का योग एक समान रहें।

15.10 शब्दावली

स्वतन्त्रता की श्रेणी : आंकडों के एक समूह में स्वतन्त्र बाधाओं की संख्या ।

महत्व का स्तर : यादृच्छिक नमूनाकरण के उतार चढाव के कारण संख्या में होने वाले अधिकतम संभावित प्रतिशत ।

Goodness of fit : सिद्धान्तिक वितरण का अवलोकित वितरण से सुमेल।

15.11 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. जब अवलोकित एवं अपेक्षित आवृत्तियॉ पूर्णतया सुमेलित होती हैं, तो x^2 का मान ———————होगा।

2. प्रोफेसर ––––––ने x^2 परीक्षण का प्रतिपादन किया।
3. x^2 की मात्रा सिद्धान्त एवं ––––के बीच विसंगति के परिमाण का वर्णन करता है।
4. x^2 वितरण एक ––––––प्रायिकता वितरण है।
5. येट का सुधार ––––––आकस्मिकता तालिका में प्रयोग होता है।

(ब) सही या गलत

1. x^2 की गणना के लिए सूत्र $\sum \frac{(O-E)^2}{O}$ है।
2. x^2 का परिकलित मान सकारात्मक या नकारात्मक है।
3. स्वतन्त्रता की श्रेणी v द्वारा प्रदर्शित की जाती है।
4. (c-2) (r-2) सूत्र का प्रयोग आकस्मिकता तालिका मे स्वतन्त्रता की श्रेणी निर्धारित करने के एिल किया जाता है।
5. यदि x^2 का परिकलित मान उसके तालिका मान से कम होता है तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाता है।

15.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ) 1. शून्य 2. कार्ल पियर्सन 3. अवलोकन 4. सतत् (निरंतर) और 5. 2x2

(ब) 1. असत्य, 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य

15.13 स्वपरख प्रश्न

1. x^2 परीक्षण के विभिन्न उपयोगों को बताऐं।
2. स्वतन्त्रता की श्रेणी से आप क्या समझते हैं ?
3. किस स्थिति में येट का सुधार प्रयोग किया जाता है।
4. काई वर्ग परीक्षण क्या है ? काई वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोग में शामिल विभिन्न चरणों का उल्लेख करें।
5. काई वर्ग परीक्षण के अनुप्रयोगों का समीक्षात्मक विश्लेषण करें।
6. एक कक्षा के सात छात्रों का नमूना निम्नानुसार दिया गया है

क्रम सं0	1	2	3	4	5	6	7
अंक(प्रतिशत में)	52	50	56	61	45	54	39

यह निर्धारित करने के लिए x^2 परीक्षा का उपयोग करें कि क्या उपरोक्त नमूना एक छात्र समग्र से लिया गया है जिसका विवरण 25 है। 5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें। स्वतन्त्रता की 6 श्रेणीयों के साथ x^2 का तालिका मान 14.1 है।

[12.64, H_0स्वीकार]

7. 10 का एक नमूना यादृच्छिक तरीके से एक निश्चित समग्र से लिया गया है। दिये गये नमूने के माध्य से विचलनों का योग 50 है। इस परिकलपना का परीक्षण करें कि 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर समग्र का विचरण 5 है। x^2 का तालिका मान 9 स्वतन्त्रता की श्रेणीयों के साथ 16.92 है।

[10, H_0 स्वीकार]

8. नीचे दिये गए आंकडे मलेरिया से हुए महामारी के दौरान लिये गए आंकडे दिखाता है

	ग्रसित	गैर ग्रसित	योग
टीकाकरण	120	240	360
गैर टीकाकरण	280	360	640
	400	600	1000

मलेरिया के आक्रमण को रेाकने में टीकाकरण के प्रभाव का परीक्षण करें। स्वतन्त्रता की श्रेणी के साथ x^2 का तालिका मान 3.841 है।

[10.41, H_0 अस्वीकार]

9. एक निश्चित शहर में पुलिस दस्तावेज, जनवरी 2012 के पहले सप्ताह के दौरान हुए दुर्घटनाओं की संख्या से संबंधित निम्न आंकडे दिखाते हैं :–

दिन	रवि	सोम	मंगल	बुध	गुरू	शुक्र	शनि	योग
दुर्घटनाओं की संख्या	20	12	13	17	19	20	18	119

आप को यह ज्ञात करना है कि दुर्घटनाऐं सप्ताह में एक समान रूप से हुई हैं। 5% महत्व के स्तर पर स्वतन्त्रता की 6 श्रेणीयों के साथ x^2 का मान 12.59 हैं

[3.77, H_0 स्वीकार]

7. तालिकाओं के एक समूह में से 200 अंकों को यादृच्छिक रूप से चुना गया था। अंकों की आवृत्तियॉ थी :

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
आवृत्ति	18	19	23	21	16	25	22	20	21	15

अभिकल्पना की शुद्धता के आंकलन के लिए x^2 परीक्षण का प्रयोग करें, जो उन तालिकाओं में अंकों की समान संख्या में वितरित किए गए थे जिनसे इन्हें चयनित किया गया था। 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 9d.f के लिए 16.919 है।

[4.3, H_0 स्वीकार]

8. नमूना अध्ययन के आधारपर आय वर्गों में कुछ लोगों को वर्गीकृत करने के लिए दो शोध अध्ययन किए गए। उनके परिणाम इस प्रकार थे :

ुसंधान अध्ययन	**आय वर्ग**			**योग**
	गरीब	**मध्य**	**अमीर**	
अ	160	30	10	200
ब	140	120	40	300
योग	300	150	50	500

परीक्षण करें कि आय वर्गीकरण के लिए दोनों अध्ययन एक समान परिणाम देते हैं। 5% महत्व के स्तर पर 9d.f के लिए x^2 का मान 16.919 है।

[55.54, H_0 अस्वीकार]

9. पांच सिक्कों को 3200 बार उछाला जाता है और हर बार प्रदर्शित होने वाले चिटों की संख्या का उल्लेख किया जाता है। अन्त में, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए गए :

चिटों की संख्या	0	1	2	3	4	5
आवृत्ति	80	570	1100	900	500	50

यह निर्धारित करने के लिए कि क्या सिक्का निष्पक्ष है या नहीं, Goodness of fit के लिए काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग करें। 5 d.f के लिए 5% महत्व के स्तर पर x^2 का मान 11.07 है।

[58.8, H_0 अस्वीकार]

10. एंथ्रेक्स के बकरियों के प्रतिरक्षण पर एक प्रयोग के बाद निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए गए :

	मरे हुए	जीवित	कुल
टीकाकरण	2	10	12
गैर टीकाकरण	6	6	12
योग	8	16	24

येट के सुधार से x^2 की गणना करें और वैक्सीन की प्रभावकारिता पर अपना अनुमान दें।

15.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. रॉय रामेंड , 'सांख्यिकीय के सिद्धान्त' प्रयाग पुस्तक भवन
2. गुप्ता एस0पी0 और गुप्ता एम0पी0, 'व्यावसायिक सांख्यिकी' सुल्तान चंद एंड संस, नई दिल्ली
3. शुक्ला एस0एम0 और सहाय एस0पी0 'उन्नत सांख्यिकी' साहित्य भवन प्रकाशन, आगरा ।

इकाई 16 साइन व माध्यिका परीक्षण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- विभिन्न प्रकार के गैर प्राचल परीक्षण का वर्णन कर सके।
- गैर प्राचल परीक्षणों की उपयुक्तता को समझ सकें।
- गैर प्राचल परीक्षणों के लाभ एवं सीमाओं का वर्णन कर सके।

16.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आप काई–वर्ग के बारे में जो कि सबसे प्रचलित गैर प्राचल परीक्षण है, का अध्ययन कर चुके हैं। काई वर्ग परीक्षण के अतिरिक्त हाल के वर्षों के दौरान कई अन्य गैर प्राचल परीक्षणों को विकसित किया गया है। जैसा कि आप जानते हैं कि गैर – प्राचल परीक्षण वितरण मुक्त परीक्षण होते हैं जिसमें कल्पना नहीं की जाती है कि कोई विशेष वितरण लागू हुआ है या कोई निश्चित मान समग्र के प्राचल से जुडा हुआ है। इस प्रकार इनका प्रयोग आसान होता है। यही कारण है कि जहॉ भी इन परीक्षणों में समतुल्य प्राचल परीक्षण की विधियॉ एकसमान होती हैं, गैर प्राचल संस्करणों को अधिक यथार्थवादी होने के लिए पसंद किया जाता है, इसलिए परिकल्पित समग्र को सामान्य या सामान्य के निकट होने की आवश्यकता नहीं होती है। कई गैर–प्राचल परीक्षणों जो हमारे लिए उपलब्ध है के मध्य उन वास्तविक जीवन परिस्थितियों की संख्याओं पर सोचेगें जो प्रायः प्रयोग किये जाते हैं। इस इकाई में आप प्रायः प्रयोग होने वाले एवं प्रचलित गैर प्राचल परीक्षणों जैसे साइन परीक्षण

माध्यिका परीक्षण, फिशर इरविन परीक्षण, मन व्हाइटने U परीक्षण मैक नेयर परीक्षण, लिकोक्सन परीक्षण, एक नमूना रन्स परीक्षण आदि का अध्ययन करेगें।

16.2 साइन परीक्षण

साइन परीक्षण सबसे पहले में से एक और सबसे सरलतम गैर प्राचल है। इसका नाम इस तथ्य से आता है कि यह अवलोकन के एक जोडे की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) पर आधारित होता है न कि उनकी संख्यात्मक परिमाण पर । इस प्रकार इस परीक्षण मे पूर्वानुमानित मानों और अवलोकित मानों के मध्य परिमाणों का अन्तर आवश्यक नहीं होता है, बल्कि दिशा क अन्तर का, अर्थात + या – चिन्ह प्रासंगिक होता है। यह दो प्रकार के तरीकों की प्रभावशीलता का मूल्यांकन करने के लिए उपयोगी होता है जिनके प्रभावों को मापा नहीं जा सकता है। लेकिन इसका केवल उत्कृष्ट/निकृष्ट या अच्छा/बुरा या/बेहतर/बेहतर नही के रूप में अनुमान लगाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, छात्रों के एक समूह को दो विभिन्न प्रकार के शिक्षण विधियों का मूल्यांकन करने के लिए कहा जाता है। दो विधियों के मूल्यांकन करने के लिए कहा जाता है। दो विधियों के मूल्यांकन को चिन्हों मे परिवर्तित किया जाता है। धनात्मक चिन्ह का अर्थ पहली विधि के लिए प्राथमिकता है, ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ दूसरी विधि की प्राथमिकता है और शून्य बराबरी को प्रदर्शित करता है। अर्थात कोई प्राथमिकता नहीं है। हम + चिन्हों और – चिन्हों की गणना करते हैं और बराबर के मूलयांकनों को छोड देते हैं। इस परीक्षण का उपयोग करने के लिए आवश्यक एकमात्र आवश्यकता यह है कि समग्र वितरण लगभग माध्य μ_0 के सममित हो। साइन परीक्षण दो प्राकर का हेाता है :

- एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण
- द्वि प्रतिदर्श साइन परीक्षण

16.2.1 एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण :– एकल प्रतिदर्श साइन परीक्षण बहुत सरल गैर–प्राचल परीक्षण हेाता है, जब हम एक निरंतर सममित समग्र का प्रतिदर्श लेते हैं, तो उस स्थिति में प्रतिदर्श मान कम होने की संभावना $\frac{1}{2}$ होती है और अपेक्षा से अधिक प्रतिदर्श मान प्राप्त करने की संभावना $\frac{1}{2}$ होती है। साइन परीक्षण आयोजित करने की प्रक्रिया निम्नानुसार होती है :

- सबसे पहले समग्र में से n आकार का यादृच्छिक प्रतिदर्श चयनित करते है और हम शून्य परिकलपना लेते हैं कि समग्र माध्य परिकल्पित माध्य के बराबर है अर्थात $\mu_0 \colon \mu = \mu_0$
- n प्रतिदर्श के प्रत्येक मानों को अवलोकित कर यह पता लगाया जाता है कि यह मान μ_0 से अधिक है या इससे कम है। μ_0 से ज्यादा प्रतिदर्श मानों को + चिन्ह निर्दिष्ट किया जाता है और इसे सफल के रूप में निर्दिष्ट करते हैं और जो μ_0 से कम होते हैं उन्हें – चिन्ह निर्दिष्ट करते हैं और उस असफल के रूप में निर्दिष्ट करते हैं।

- यदि कोई ऐसा एकांश है जिसका मान माध्य के बराबर है, तो उसे शून्य निर्दिष्ट करते हैं और इनके मानों को केवल त्याग दिया जाता है। यह प्रतिदर्श आकार को छोटा (कम) कर देता है।
- कुल चिन्हों की संख्या को n द्वारा प्रदर्शित करते हैं ओर प्रायः कम चिन्हों की संख्या को s द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
- इसके उपरान्त 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर दो तरफा विकल्प के लिए गणना करते हैं और इसे ‘k’ प्रदर्शित करते हैं। k के मान की गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं :

$$k = \frac{n-1}{2} - (0.98)\sqrt{n}$$

- अन्तिम चरण में, s और k के मान के बीच तुलना की जाती है। यदि s का मान k के मान से अधिक होता है , तब शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है। यदि फिर भी s का मान k के मान से कम या इसके समान हेाता है तब शून्य परिकलपना अस्वीकार होती है। एक प्रतिदर्श चिन्ह परीक्षण तब प्रयोग करते हैं जब प्रतिदर्श छोटा होता है, हम द्विपद प्रायिकताओं की सारणीयों का प्रयोग कर सकते हैं। सामान्य वितरण के z महत्वपूर्ण मानों का प्रयोग करते हुए, शून्य परिकलपना का परीक्षण किया जाता है। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :–

$$z = \frac{p \pm 0.50 - {}^{n}/_{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

जहॉ p = धन चिन्हों की संख्या

n = कुल धन एवं ऋण चिन्हों की संख्या (निकाले हुए शून्य चिन्ह)

जब $p < \frac{n}{2}$ $(+0.5)$ प्रयोग होता है और जब $p > \frac{n}{2}$ (-0.5) सूत्र में प्रयोग हेाता है ।

यदि परिकल्पित z मान सारणी मान से अधिक हेाता है, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है अन्यथा शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है। जब प्रतिदर्श बडा होता है, हम द्विपद वितरण के लिए सामान्य सादृश्य का प्रयोग करते हैं। z के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :

$$z = \frac{s-np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ या } z = \frac{s-np}{\sqrt{npq}}$$

जहॉ p = सफलता का अनुपात और

q = 1-p

s = धनात्मक चिन्हों की संख्या

यदि परिकलित z मान, महत्वपूर्ण मान से कम होता है तब शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है और यदि परिकलित z मान सारणी मान से अधिक होता है तब यह अस्वीकार्य होता है।

यहॉ इस बिन्दु में ध्यान देना आवश्यक है कि यह अपेक्षित है कि समग्र एक सतत् द्विपद समग्र नहीं है तब शून्य परिकलपना को माध्य के बदले माध्यिका के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण –1 एक विक्रेता ने अपने क्षेत्र के बिक्री प्रबंधक के लिए 12 यात्राओं का भुगतान किया और कहा कि उसने कार्यालय के लिए क्रम से 10, 15, 20, 17, 11, 25, 30, 27, 36, 40, 5 और 26 मिनट का प्रतीक्षा करना पडता है। क्षेत्रीय प्रबंधक का दावा है कि उनसे मिलने वाले विक्रेता को 20 मिनट से अधिक समय तक प्रतीक्षा नहीं करनी पडती । साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए 0.05 महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि क्षेत्रीय बिक्री प्रबन्धक का दावा सही है।

हल :

$\mu_0 : \mu = 20$ मिनट

$\mu_0 : \mu > 20$ मिनट

अब हम प्रतिदर्श मानो के आधार पर धनात्मक एवं ऋणात्मक चिन्ह देंगें कि ये मान 20 से अधिक है या कम है।

समय (मिनट में) :	10	15	20	17	11	25	30	27	36	40	5	26
चिन्ह :	–	–	0	–	–	+	+	+	+	+	-	+

चिन्हों की संख्या या n = 11

प्रायः कम चिन्हों की कुल संख्या , अर्थात (–) या

$$s = 5$$

$$k = \frac{n-1}{2} - (0.98)\sqrt{n}$$

$$k = \frac{11-1}{2}(0.98)\sqrt{11}$$

$$k = 5 - 3.25 = 1.75$$

यदि s(5) का मान k(1.75) के मान से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है, इसका अर्थ है कि क्षेत्रीय बिक्री प्रबंधक द्वारा प्रस्तुत दावा प्रमाणित है।

उदाहरण 2 : मान लें कि शहर के क्लब में गोल्फ के चार छोरों को खेल रहे 11 पेशेवर खिलाडियों ने 280,282,290,273,283,283,275,284,282,279 और 281 की संख्या बनाई। 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करें कि वैकल्पिक परिकल्पना

$h_0 < 284$ के विपरीत शून्य परिकल्पना चार दोरों के लिए पेशेवर गोल्फरों का औसत $\mu_0 = 284$ है।

हल : $h_0 : \mu_0 = 284$

$h_1 : \mu_0 < 284$

अब हम प्रतिदर्श मानों के आधार पर धनात्मक एवं ऋणात्मक मान देंगें कि ये मान 284 से अधिक है या 284 से कम है।

अंक	चिन्ह
280	–
282	–
290	+
273	–
283	–
283	–
275	–
284	0
282	–
279	–
281	–

शून्य को अलग करते हुए कुल चिन्हों की संख्या, अर्थात् 'n' = 10

प्रायः कम चिन्हों की कुल संख्या (+) अर्थात s = 1 इस प्रश्न को विभिन्न वैकल्पिक विधियों द्वारा हल किया जा सकता है जो कि निम्नवत स्पष्ट है :

1. प्रायोगिक विधि के अर्न्तगत :

$$k = \frac{n-1}{2} - 0.98\sqrt{n}$$

$$= \frac{10-1}{2} - 0.98\sqrt{10}$$

$$= 4.5 - 3.099 = 1.4$$

चॅूकि s(1) का मान k(1.4) के मान से कम है इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है। इसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दौरों में गोल्फरों का औसत 284 से कम है।

2. द्विपद प्रायिकता विधि के अर्न्तगत : जब प्रतिदर्श आकार छोटा होता है, साइन परीक्षण का प्रयोग करने के लिए हम द्विपद प्रायिकता वितरण का प्रयोग कर सकते है।

n=10 , p = $\frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

प्रायः कम चिन्हों की संख्या (+) 1 है। इसलिए, n= 10 और $p = \frac{1}{2}$ के साथ एक या कम सफलता की संभावना की प्रक्रिया निम्नवत है।

$$P(1) = {}^{10}C_1\, p^1 q^9 + {}^{10}C_0\, p^0 q^{10}$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 1\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 0.010 + 0.001 = 0.011$$

चूँकि p(s) , अर्थात 0.011 मान 0.5 (अर्थात वांछित महत्व स्तर) से कम है इसलिए शून्य परिकलपना को अस्वीकार किया जाना चाहिए। इसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दौरों के गोल्फरों का औसत 284 से कम है।

आप को याद रखना चाहिए कि शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है यदि $p(s) > \propto$ और शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है यदि $p(s) < \propto$

3. सामान्य वक्र विधि के अन्तर्गत : $n = 10$ $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

चिन्हों के आधार पर, अवलोकित सफलता अनुपात $\hat{p} = \frac{1}{10} = 0.1$

शून्य परिकल्पना $p = \frac{1}{2}$ मानते हुए अनुपात की मानक त्रुटि निम्नवत है :

$$\text{S.E.}_{\text{prop}} = \sqrt{\frac{p.q}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{10}} = 0.1581$$

शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए, अर्थात

$p = \frac{1}{2}$ वैकल्पिक परिकलपना के विपरीत

$p < \frac{1}{2}$ एक पुच्छीय परीक्षण (बायीं पुच्छीय) उपयुक्त है।

चूँकि महत्व स्तर 5 प्रतिशत है इसलिए स्वीकृत क्षेत्र 0.5–0.05 = 0.45 क्षेत्र है। सामान्य वक्र के अर्न्तगत क्षेत्र सारणी के प्रयोग द्वारा हम निर्धारित करते हैं कि 0.45 क्ष के समतुल्य z मान के लिए क्षेत्र 1.64 है। अब, हम स्वीकृत क्षेत्र की सीमा को p से अनुपात के मानक त्रुटि को घटाके ज्ञात करेंगें (क्योंकि यह बायी पुच्छीय परीक्षण हैं, इस प्रकार SE_{prop} कम होना चाहिए न कि जुडना

स्वीकृत क्षेत्र की सीमा $= P - z \,.\, \text{S.E.}_{\text{prop}}$

$$= \frac{1}{2} - (1.64)\,(0.1581)$$

$$= 0.5 - 0.2593 = 0.2407$$

जैसा कि सफलता का अवलोकित अनुपात केवल 0.1 है जो कि अस्वीकृत क्षेत्र में आता है (क्योकि यह 0.247 क्षेत्र के अन्तर्गत आता है), इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकृत होती है और परिणामस्वरूप वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकृत होती है जिसका अर्थ है कि गोल्फ के चार दोरों के लिए पेशेवर गोल्फर का औसत 284 से कम है।

16.2.2 दो प्रतिदर्श साइन परीक्षण :– साइन परीक्षण मे समस्याओं के महत्वपूर्ण अनुप्रयोग होते हैं, जहॉ हम युग्मित आंकडों का वर्णन करते हैं यह दो सममित समग्रों से संबंधित n युग्मित अवलोकनों पर प्रयोग किया जा सकता है। इसलिए इसे युग्मित आंकडों के लिए साइन परीक्षण के रूप में जाना जाता है। परीक्षण आंकडें एवं निर्णय नियम एक प्रतिदर्श साइन परीक्षण के समान होते है। अन्तर केवल धन चिन्ह एवं ऋण चिन्ह कैसे निर्दिष्ट होते हैं, पर निर्भर करता है। प्रत्येक वस्तु या एकांश के लिए पहले अंक को दूसरे अंक के साथ तुलना की जाती है। यदि

अन्तर धनात्मक होता हे अर्थात पहला अंक दूसरे अंक से अधिक है, हम धन चिन्ह निर्दिष्ट करते हैं, यदि अनतर ऋणात्मक होता है अर्थात पहला अंक दूसरे से छोटा है तब ऋण चिन्ह निर्दिष्ट करते है। वस्तुओं के लिए, जहॉ दो मान या अंक एक समान हैं, उनको 0 निर्दिष्ट किया जाता है और इन युग्मों को अलग कर देते हैं। जिस परिस्थिति मे ंदो प्रतिदर्श समान आकार में नहीं होते हैं तब बडे प्रतिदर्श के कुछ मानों को जिनका कोई युग्म नहीं होता है, अलग कर देते हैं। दो प्रतिदर्श साइन परीक्षण का मुख्यतः प्रयोग दो पुनरावृत्ति मापों के परीक्षण के लिए किया जाता है यदि दो प्रतिदर्श के माध्यों के बीच कोई अर्थपूर्ण अन्तर होता है।

उदाहरण – 3 22 मरीजों की स्पंद दर एक औषधि के प्रबन्ध के पहले और बाद मापी जाती है जो निम्नवत है :

मरीज	औषधि लेने से पहले स्पंद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर	मरीज	औषधि लेने से पहले स्पंद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर
1	73	75	12	70	72
2	71	73	13	70	69
3	69	70	14	67	70
4	68	69	15	74	75
5	74	73	16	72	74
6	72	73	17	71	71
7	73	73	18	73	75
8	71	72	19	71	69
9	70	68	20	70	72
10	69	74	21	73	75
11	73	70	22	74	75

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए ''औषधि का स्पंद दर में कोई प्रभाव नहीं है'' परिकल्पना का परीक्षण करें।

हल :

मरीज	औषधि लेने से पहले स्पद दर	औषधि लेने के बाद स्पंद दर	चिन्ह
1	73	75	–
2	71	73	–
3	69	70	–
4	68	69	–
5	74	73	+
6	72	73	–
7	73	73	0

8	71	72	–
9	70	68	+
10	69	74	–
11	73	70	+
12	70	72	–
13	70	69	+
14	67	70	–
15	74	75	–
16	72	74	–
17	71	71	0
18	73	75	–
19	71	69	+
20	70	72	–
21	73	75	–
22	74	75	–

धन चिन्हों की कुल संख्या = 5

ऋण चिन्हों की कुल संख्या = 15

प्रतिदर्श आकार या n = 20

जो '0' चिन्ह के साथ निर्दिष्ट है हम दो युग्मों को अलग करेंगें। इसलिए प्रतिदर्श आकार 22-2=20 होगा ।

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$= \frac{5 - \left(20 \times \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{20 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}}$$

$$= \frac{5 - 10}{\sqrt{20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{-5}{\sqrt{5}}$$

$$= -2.23$$

चूँकि $z(-2.23)$ का परिकल्पित मान z के सारणी मान 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर कम है, इसलिए, शून्य परिकलपना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि औषधि का स्पंद दर पर कोई प्रभाव नहीं है।

16.3 माध्यिका परीक्षण

पिछली इकाई में, आपने काई वर्ग परीक्षण के बारे में जो कि संज्ञात्मक स्तर पर दो या अधिक स्वतन्त्र प्रतिदर्श मापों के लिए प्रयोग होता है का अध्ययन कर चुके हैं लेकिन यदि प्रतिदर्शों को क्रमवार स्तर पर मापा जाता है तब हम माध्यिका परीक्षण

का प्रयोग कर सकते हैं। इसी तरह पिछले खण्ड में, अपने साइन परीक्षण के बारे में अध्ययन किया जो मुख्यतः उन परिस्थितियों में प्रयोग होता है जहॉ हम युग्म अवलोकनों के n समुच्चयों के साथ वर्णन करते हैं। लेकिन साइन परीक्षण के अनुप्रयोग के लिए एक आवश्यक शर्त यह है कि एक ही आकार के दो प्रतिदर्शों को लिया जाना चाहिए यदि प्रतिदर्श परिणामी आंकडा युग्मित परिणाम हो। व्यवहारिक परिस्थितियों में, हमें उन समस्याओ के साथ वर्णन करना पडता है जहॉ दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन आवश्यक होता है। विभिन्न समग्रों से समान आकार का प्रतिदर्श आवश्यक नहीं है। इन परिस्थितियों में यह प्रमाणित करना आवश्यक होता है कि समग्रों से लिये गये प्रतिदर्श उनके माध्य मानों से भिन्न है। माध्यों की तुलना द्वारा, माध्यिका परीक्षण का प्रयोग यह निर्धारित करने के लिए किया जाता है कि समगों से लिये गये प्रतिदर्शों की माध्यिका एकसमान है। यह दो या अधिक यादृच्छिक प्रतिदर्शों के माध्यिकाओं के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर को निर्धारित करती हैं माध्यिका परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है।

- पहले चरण में, मिश्रित प्रतिदर्शों के माध्यिका की गणना की जाती है। इस चरण में, प्रतिदर्शों के चयन के पश्चात प्रत्येक अवलोकनों मे ंवर्णित प्रतिदर्शों की मिश्रित किया जाता हैं, प्रतिदर्शों को परिमाणों के आधार पर व्यवस्थित करते हैं और माध्यिका ज्ञात की जाती है। माध्यिका मध्य का अवलोकन होता है जब n एक विषय संख्या होती है और जब n एक सम संख्या होती है तो यह दो मध्य के अवलोकनों का माध्य हेाती हैं
- अगले चरण में, पहले प्रतिदर्श n_1 के सभी अवलोकनों की तुलना माध्यिका मान के साथ की जाती है और इन्हें दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है।

1. माध्यिका से अधिक a_1 और
2. माध्यिका से कम b_1

इसी तरह, माध्यिका के साथ तुलना करने के पश्चात दूसरे प्रतिदर्श n_2 के सभी अवलोकनों को दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है। माध्यिका से अधिक a_2 और माध्यिका से कम b_2

- तदपश्चात परिणामी आंकडों को 2x2 आकस्मिकता तालिका के रूप में प्रदर्शित करते हैं।

माध्यिका परीक्षण के लिए प्रतिदर्श आंकडे का वर्गीकरण

	माध्यिका से अधिक	माध्यिका से कम	प्रतिदर्श आकार
प्रतिदर्श I	a_1	b_1	$n_1 = a_1 + b_1$
प्रतिदर्श II	a_2	b_2	$n_2 = a_2 + b_2$
कुल	$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$n = n_1 + n_2$

- जब प्रतिदर्श आंकडा का वर्गीकरण 2x2 आकस्मिकता तालिका में करते हैं, यदि कोई अवलोकन माध्यिका के मान के बराबर पाया जाता है तब या तो इसे प्रतिदर्श में से अपमार्जित किया जा सकता है या इसे माध्यिका वर्ग से ऊपर सम्मिलित

किया जा सकता हैं । यदि प्रतिदर्श का आकार पर्याप्त रूप से बडा होता है तब माध्यिका मान के बराबर अवलोकनों को प्रतिदर्श में से अपमार्जित किया जा सकता है लेंकिन यदि प्रतिदर्श का आकार छोटा होता है तब इसे माध्यिका वर्ग से ऊपर समिमलित किया जाना चाहिए।

- यदि प्रतिदर्श आकार बडा है (न्यूनतम 30 या 30 से अधिक) तब हम शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए काई वर्ग परीक्षण का प्रयोग करेंगें। इस परिस्थिति में, 2x2 आकस्मिकता तालिका के आधार पर अपेक्षित आवृत्तियॉ ज्ञात करने के पश्चात हम x^2 की गणना करेंगें और इसकी तालिका मान के साथ तुलना पूर्व निर्धारित महत्व के स्तर के साथ $1d.f.$ में करेंगें। यदि परिकल्पित मान तालिका मान से कम होता है तो शून्य परिकलपना स्वीकार्य होती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है।
- यदि प्रतिदर्श आकार छोटा होता है तब हम शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए फिशर के यथार्थ प्रायिकताा परीक्षण का प्रयोग करेंगें। इस परिस्थिति में हम आवृत्तियों के युग्म के लिए व्यवस्थित 2x2 आकस्मिकता तालिका से फिशर की यथार्थ प्रायिकता का निर्धारण निम्नलिखित विधि से हाइपर ज्यामितीय वितरण के प्रयोग द्वारा करेंगें।

$$P_{(a_1\,a_2)} = \frac{\left(n_{1_{C_{a_1}}}\right)\left(n_{2_{C_{a_2}}}\right)}{\left(n_1 + n_{2\;C_{a_1+a_2}}\right)}$$

शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है या अस्वीकार्य का निर्णय p के परिकल्पित मान के साथ महत्व के स्तर α की तुलना द्वारा लिया जाता है। यदि p का परिकल्पित मान महत्व के स्तर की तुलना में कम होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होता है और यदि p का मान महत्व के स्तर की तुलना में अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार्य होती है।

उदाहरण 4 :– टीवी स्वरसमंजक के s_1 और s_2 के रूप में चिन्हित दो बडे नौवहन एक आयातक द्वारा प्राप्त किये जाते हैं। वह दो नौवहन से दो प्रतिदर्शों को जिसमें 25 स्वरसमंजक शामिल हैं का चयन करता है। दोषपूर्ण टुकडों की संख्या को जांचने के लिए, वह दोषपूर्ण स्वरसमंजक की संख्या के लिए निम्नलिखित आंकडे प्रदान करता है :–

प्रतिदर्श I (S_1) :	2	1	0	4	2	3	6	5	3	1
प्रतिदर्श II (S_2):	3	2	0	6	3	4	8	6	5	2

माध्यिका परीक्षण प्रयोग द्वारा 0.05 महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि दो नौवहन मे दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के एकसमान है।

हल :– शून्य परिकल्पना μ_0दो नौवहन में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के एक समान है। वैकल्पिक परिकल्पना h_1 दो नौवहन में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के समान नहीं है। अब, हम माध्यिका के मान की गणना करने के एिल पहले एवं दूसरे प्रतिदर्श के अवलोकनों को बढते हुए क्रम मे व्यवस्थित करेंगें।

S.No:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Values:	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	8

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वें पद का मान

$= \frac{20+1}{2}$ वें पद का मान

$= 10.5$ वें पद का मान

$=$ 10 वें और 11 वें पद का मान

$= \frac{3+3}{2} = 3$

अब हम पहले एवं दूसरे प्रतिदर्श के मानों को माध्यिका 3 के मान के साथ तुलना करेंगें और उनको माध्यिका से अधिक और माध्यिका से कम वर्गों में वर्गीकृत करेगें। इसे निम्नलिखित 2x2 आकस्मिकता तालिका में अभिव्यक्त किया जा सकता है :

	M_d से अधिक	M_d से कम	प्रतिदर्श आकार
S_1	5	5	10
S_2	7	3	10
कुल	12	8	20

चूँकि प्रतिदर्श (20) का आकार छोटा है (30से कम) है इस प्रकार हम फिशर का यर्थार्थ प्रायिकता परीक्षण प्रयोग करेंगें।

$$P_{(a_1\, a_2)} = \frac{\left(n_1 C_{a_1}\right)\left(n_2 C_{a_2}\right)}{\left(n_1 + n_2\ C_{\ a_1 + a_2}\right)}$$

$$P_{(5,7)} = \frac{(10_{C_5})(10_{C_7})}{(20\ {C_{12}})} = \frac{252 \times 120}{125970} = 0.24$$

चूँकि $p(5,7)$ 0.24 है जो महत्व के स्वर (0.05) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकलपना स्वीकार्य है, इसका अर्थ है कि दो पोतलदानों मे ंदोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या माध्यिका संख्या के समान है।

16.4 विल्कसन मिलान युग्मित परीक्षण

यह परीक्षण मिलान युग्मित आंकडों के लिए उपयुक्त होता है। अर्थात सम्बन्धित प्रतिदर्शों के साथ एक द्विभाजित चर और निरंतर चर के महत्व के परीक्षण करने के लिए किया जाता है। इस परीक्षण को बिल्कसन चिन्हित श्रेणी भी जाना जाता है क्योंकि चिन्ह परीक्षण में हम केवल मानों के मध्य अन्तर का चिन्हों के साथ वर्णन करते हैं जबकि यह परीक्षण न केवल दिशा परीक्षण करता है, अपितु मिलान युग्मों के मध्य के अन्तर के परिमाणों का भी परीक्षण करता है। यह परीक्षण विशेष रूप से मिलान युग्मों के पहले और बाद के प्रयोग प्रकार के लिए उपयुक्त होता है । यह

मुख्यतया मिलान युग्मों की परिस्थिति में प्रयोग होता है जैसे एक अध्ययन जहॉ पति और पत्नी में मिलान हाता है या जब हम दो एक ही तरह के मशीनों के परिणामों की तुलना करते हैं या पहले बाद के प्रयोग के परिणाम इस प्रकार यह एक महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण जो मिलान युग्मों के बीच अन्तर की दिशा एवं परिमाण का संज्ञान लेता है। दो एक ही तरह के के मशीनों के परिणामों की तुलना करते हैं या पहले बाद के प्रयोग के परिणाम । इस प्रकार यह एक महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण जो मिलान युग्मों के बीच अन्तर की दिशा एवं परिमाण का संज्ञान लेता हे। विल्कसन चिन्हित श्रेणी परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है :

- सबसे पहले, समस्या के गुण के आधार पर, विचार के अर्न्तगत दो श्रेणीयों के मध्य कोई अन्तर नहीं है, शून्य परिकल्पना बनाई जाती है।
- प्रत्येक युग्म को अंकों या मानों के बीच अन्तर पर कार्य किया जाता है।
- चिन्ह के बगैर छोटे से बडे के बीच श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है। इसका अर्थ है कि श्रेणी 1 सबसे छोटे अन्तर को निर्दिष्ट करते हैं, 2 इसी क्रम में अगले और इसी तरह। जब श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है, अन्तर के चिन्ह को संज्ञान में नहीं लिया जाता है।
- जब इस परीक्षण को प्रयोग करते है, दो प्रकार की बराबर की परिस्थितियॉ समझ में आ सकती है।
- पहली स्थिति दृष्टिगोचर होती है जब कुछ मिलान युग्मों के दो मान समान होते हैं अर्थात मानों के मध्य अन्तर शून्य होता है। इन युग्मों को गणना से अलग कर देते हैं। इस प्रकार उन युग्मों को जिनका अन्तर समान या शून्य होता है उन्हें बाद की गणनाओं से अलग कर देते हैं।
- दूसरी बराबर की स्थिति दृष्टिगोचर होती है जब दो या अधिक युग्मों का अन्तर एकसमान होता है। इस स्थिति में हम सम्बन्धित स्थिति सदिश के औसत श्रेणी पर कार्य करते हैं और उन्हें औसत श्रेणी निर्दिष्ट करते हैं। उदारहण के लिए मान लें 1, 2 और 3 श्रेणी निर्दिष्ट करने के बाद हमारे पास दो समान अन्तर के मान हैं। यदि उनके अन्तर एक समान नहीं होगें तो उनको श्रेणी 4 और 5 के साथ निर्दिष्ट किया जायेगा। इस प्रकार, हम दोनों को 4 और 5 वीं श्रेणी को औरसत निर्दिष्ट करेंगें, अर्थात $\frac{4+5}{2} = 4.5$ अगले अन्तर मान को 6वीं श्रेणी निर्दिष्ट करेंगें।
- एक बार अन्तरों को श्रेणीबद्ध कर लिया, प्रत्येक को तब वास्तविक अंतर के चिन्ह के साथ निर्दिष्ट करते हैं।
- अगले चरण में, परीक्षण आंकडा (T) की गणना की जाती है जो दो योगों से छोटा घटित होता है अर्थात ऋणात्मक श्रेणीयों का योग और घनात्मक श्रेणीयों का योग।
- मिलान युग्मों की कुल संख्या, संज्ञान के पश्चात छोडे हुये युग्मों की संख्या 25 के बराबर या कम होती है, T के महत्वपूर्ण मान की तालिका का प्रयोग

शून्य परिकल्पना के स्वीकृत या अस्वीकृत के प्रयोग के लिए की जाती है। शून्य परिकलपना स्वीकार हाती है यदि T आंकडे का परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है यदि T तालिका मान से कम या बराबर होता है शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है।

- जब मिलान युग्म 25 से अधिक होते हैं तब शून्य परिकल्पना के स्वीकृत या अस्वीकृत सम्बन्धित निर्णय के लिए z के मान की गणना के लिए विधि निम्नवत है :

$$Z = \frac{T - U_T}{\sigma_T}$$

जहॉ U_T = माध्य

σ_T = मानक विचलन

T = छोटे चिन्हित वर्ग के श्रेणीयों का योग

माध्य या $U_T = \frac{n(n+1)}{4}$

मानक विचलन या $\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

जहॉ : n = अलग किये गये युग्मों को छोडकर मिलान युग्मों की संख्या

उदाहरण 5 :– गणित के अभ्यास के लिए पॉचवी कक्ष के छात्रों को के दो सेट दिये गए थे। अभ्यास पुस्तिकाओं के नीचे दिये गये आंकडे क्रमशः कार्य पुस्तिका A और B से अभ्यास करने वाले छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों को दर्शातें हैं। शोधकर्ता इस बात को जानने में रूचि रखते हैं कि क्या अंकों में स्पष्ट अंतर है जिसमें अभ्यास पुस्तिका के प्रकार के उपयोग के लिए बच्चों को जिम्मेदार ठहराया जा सकता है।

Student No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A:	73	43	47	53	58	47	52	58	38	61	56	56	34	55	65	75
B:	51	41	43	41	47	32	24	58	43	53	52	57	44	57	40	68

हल : इस समस्या के लिए शून्य एवं वैकल्पिक परिकल्पना निम्नवत की जा सकती है।

$\mu_0 =$ विद्यार्थियों के दो वर्गों के अंकों के बीच कोई अंतर नहीं है।

$\mu_a =$ दो वर्गों के अंकों के बची अंतर ।

विल्कसन मिलान युग्मों परीक्षण का प्रयोग करते हुए , हम T आंकडा परीक्षण के मान के लिए निम्न के अन्तर्गत कार्य करते हैं :

युग्म	कार्य पुस्तिका **A**	कार्य पुस्तिका **B**	अन्तर **(di)**	अन्तर की श्रेणी. $\lvert di \rvert$	चिन्ह श्रेणीयॉ +	–
1	73	51	+22	13	+13	…..
2	43	41	+2	2.5	+2.5	…..
3	47	43	+4	4.5	+4.5	…..
4	53	41	+12	11	+11	…..

5	58	47	+11	10	+10	…..
6	47	32	+15	12	+12	…..
7	52	24	+28	15	+15	…..
8	58	58	0	…..	…..	…..
9	38	43	– 5	6	…..	– 6
10	61	53	+8	8	+8	….
11	56	52	+4	4.5	+4.5	…..
12	56	57	–1	1	…...	–1
13	34	44	–10	9	…..	–9
14	55	57	–2	2.5	…...	–2.5
15	65	40	+25	14	+14	…..
16	75	68	+7	7	+7	…..
				Total	***+101.5***	***–18.5***

हम युग्म संख्या 8 को अलग करेंगें क्योंकि इसका अन्तर मान शून्य है।

n= 16-1 =15 और += छोटे साइन वर्ग का योग = 18.5

जब n=15 5% महत्व के स्तर पर T का तालिका मान 25 है (द्विपुच्छीय परीक्षण का प्रयोग करते हुए क्योंकि हमारी वैकल्पिक परिकल्पना यह है कि दो वर्गों के मध्य अन्तर है) T का परिकल्पित मान 18.5 है जो तालिका मान 25 से कम हे। उसी रूप में हम शून्य परिकलपना को अस्वीकार करते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि दो वर्गों के मध्य अंतर है।

16.5 विल्कसन–मन–व्हाइटने परीक्षण (U परीक्षण)

श्रेणी योग परीक्षणों के मय U परीक्षण सबसे अधिक लोकप्रिय परीक्षण है। इसे सामान्यतया विल्कसन मन व्हाइटने परीक्षण के रूप मे भी जाना जाता है। पूर्ववर्ती परीक्षणों के समान, U परीक्षण भी दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों से प्राप्त आंकडों पर आधारित होता है। इसका प्रयोग यह निर्णारित करने में किया जाता है कि लिये गये प्रतिदर्श समान समग्र में से है या समान वितरण के दो विभिन्न समग्रों से है इसे साइन परीक्षण के ऊपर और फिशर ईरविन समझा जाता है। क्योंकि धन और ऋण चिन्ह के बदले इसमे श्रेणी सूचना का प्रयोग होता है । मन –व्हाइटने U और विल्कसन मिलान युग्म सामान्यतः समान होते हैं जिसमे उनको दो माध्यिकाओं के बीच तुलना करने की सलाह दो प्रतिदर्श समान समग्र से लिये गये हैं या नहीं। यदि आपके दोनों प्रतिदर्श पूर्ण रूप से एक दूसरे से स्वतन्त्र नहीं है और कुछ कारक एक समान है, अर्थात भौगोलिक परिस्थिति या पहले/बाद प्रतिपादन मे ंविल्कसन मिलान युग्म परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है। यदि आपके पास दो प्रतिदर्श जो कि स्वतन्त्र हैं, आपको मन –व्हाइटने U परीक्षण का प्रयोग करना चाहिए। अत्यधिक परिवर्तनशील गैर प्राचल परीक्षण के रूप में, इसे उन परिस्थितियों मे प्रयोग किया जाता है जहॉ प्रतिदर्श छोटे और समान आकार के नहीं होते हैं। यह परीक्षण बहुत सामान्य शर्तों के अन्तर्गत लागू होता है और केवल समग्र प्रतिदर्श सतत होने की आवश्यकता होती है।

U परीक्षण के संचालन की प्रक्रिया निम्नवत है :

- एकल समग्र में से या दो विभिन्न समग्रों से दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श सामान्यतः विभिन्न आकार के लिये जाते है। छोटे आकार के प्रतिदर्श जिसमें n_1 अवलोकन निहित है और बडे आकार के प्रतिदर्श जिसमें n_2 अवलोकन समाहित होते है।
- शून्य और वैकल्पिक परिकल्पनाऐं ली जाती है। शून्य परिकल्पना व्यक्त करती है कि अंकों के दो समूहों में कोई अन्तर नहीं है जबकि वैकल्पिक परिकल्पना व्यक्त करती है कि अंकों के दो समूहों में व्यवस्थित ढंग से अंतर होता है। यह एकपुच्छीय या द्विपुच्छीय हो सकती है।
- दो प्रतिदर्शों को मिश्रित किया जाता है और सभी $n = (n_1 + n_2)$ अवलोकनों को छोटे से लेकर बडे तक बढते कम में व्यवस्थित करते हैं। तदपश्चात श्रेणीयॉ निर्दिष्ट की जाती है। प्रतिदर्शों को ध्यान दिये बिना मिश्रित प्रतिदर्शों n_1 और n_2 के मानों को सबसे कम से लेकर सबसे अधिक तक श्रेणीबद्ध किया जाता है, सबसे छोटे अंक को श्रेणी 1, अगले को श्रेणी 2 और इसी कम में प्रत्येक प्रतिदर्श की पहचान इंगित करता है। पुनरावृत्ति मानेां को अनेक प्रारम्भिक मानों के औसत के साथ श्रेणीबद्ध किया जाता है।
- तब पहले प्रतिदर्श के श्रेणी के योग को प्राप्त करते हैं और इसे R_1 के रूप में प्रदर्शित करते हैं और तब दूसरे प्रतिदर्श के श्रेणी के योग को प्राप्त करते हैं और इसे R_2 के रूप में प्रदर्शित करते हैं।
- अगले चरण में, हम आंकडे परीक्षण के मान पर कार्य करते हैं अर्थात U जो श्रेणीबद्ध अवलोकन के दो प्रतिदर्शों के अनतर के मध्य की माप के अन्तर्गत इस रूप में होती है : $U = n_1 \times n_2 + \frac{n_1\,(n_1+1)}{2} - R_1$
- तब U तालिका से n_1 और n_2 के लिए U का महत्वपूर्ण मान लिया जाता है। यदि U तालिका उपलब्ध नहीं है और प्रतिदर्श आकार (n_1 और $n_2 > 8$) बडा है तब U आंकडे को Z आंकडों में परिवर्तित किया जाता है। $n_1 + n_2$ अवलोकनों की शून्य परिकल्पना एक जैसी समग्र के लिए सत्य है, तब U आंकडे का प्रतिदर्श वितरण माध्य या $U = \frac{n_1 \times n_2}{2}$ और

  मानक विचलन या $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1.n_2(n_1+n_2+1)}{12}}$ के साथ होता है।

  इसलिए Z आंकडे का निम्नलिखित सूत्र से गणना की जा सकती है।

  $$Z = \frac{U - (n_1\, n_2)/2}{\sqrt{\frac{n_1\,.\,n_2(n_1+n_2+1)}{12}}}$$

- यदि Z का परिकल्पित मान, महत्वपूर्ण मान से छोटा या कम हेाता है, तब शून्य परिकलपना स्वीकार्य होती है। दूसरी ओर, यदि Z का परिकलिपत मान महत्वपूर्ण मान से अधिक होता है, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है।
- प्रतिदर्श आकार के छोटे होने की स्थिति में, अर्थात n_1 या $n_2 < 8$ तक हम वैकल्पिक विधि प्रयोग कर सकते हैं। U को w_s से न्यूनतम w_s का घटाकर ज्ञात किया जाता है, जहॉ w_s R_1 या R_2 से छोटा है और s प्रतिदर्श मे तत्वों की संख्या छोटे योग के साथ है। तब हम इस परिकल्पित मान को U के महत्वपूर्ण मान की बिल्कसन तालिका से तुलना करते हैं और शून्य परिकलपना के स्वीकृत या अस्वीकृत के सम्बन्ध में निर्णय लेते हैं।

उदाहरण 6 :– एक परीक्षा में लडकों एवं लडकियों द्वारा प्राप्त अंकों से सम्बन्धित आंकडे निम्नवत दिये गये हैं :

लडके (B):	44	56	32	36	52	48	40	44	56	52	36	32
लडकियॉ (G):	40	48	44	36	44	24	32	16	36	44	28	30

U परीक्षण का प्रयोग 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर यह परीक्षण करने के लिए करें कि दोनों लडकें एव ंलडकियॉ समान माध्य के साथ एक समग्र से ली गई है।

हल :– H_0 : लडकें एवं लडकियों का प्रतिदर्श समान माध्य के साथ्ज्ञ एक समग्र से लिया गया है।

H_1 : लडके एवं लडकियों का प्रतिदर्श समान माध्य के साथ भिन्न समग्र से लिया गया है।

अब हम सभी अवलोकनों को बढते क्रम में व्यवस्थित करेंगे और उन्हें श्रेणी निर्दिष्ट करेंगे।

प्रतिदर्श मान	श्रेणी	लडकों की श्रेणी **(B)**	लडकियों की श्रेणी **(G)**
16 (G)	1	-	1
24 (G)	2	-	2
28 (G)	3	-	3
30 (G)	4	-	4
32 (B)	6	6	-
32 (B)	6	6	-
32 (G)	6	-	6
36 (B)	9.5	9.5	-
36 (B)	9.5	9.5	-
36 (G)	9.5	-	9.5
36 (G)	9.5	-	9.5
40 (B)	12.5	12.5	-
40 (G)	12.5	-	12.5
44 (B)	16	16	-
44 (B)	16	16	-
44 (G)	16	-	16
44 (G)	16	-	16
44 (G)	16	-	16
48 (B)	19.5	19.5	-

48 (G)	19.5	-	19.5
52 (B)	21.5	21.5	-
52 (B)	21.5	21.5	-
56 (B)	23.5	23.5	-
56 (B)	23.5	23.5	-
Total		$R_1 = 185$	$R_2 = 115$

अब, इसके अर्न्तगत U आंकडे का मान ज्ञात करेंगें :

$$U = n_1 \times n_2 + \frac{n_1\,(n_1+1)}{2} - R_1$$
$$= (12 \times 12) + \frac{12\,(12+1)}{2} - 185$$
$$= 144 + 78 - 185 = 37$$

Or
$$U = n_1 \times n_2 + \frac{n_2\,(n_2+1)}{2} - R_2$$
$$= (12 \times 12) + \frac{12\,(12+1)}{2} - 115$$
$$= 144 + 78 - 115 = 107$$

चूँकि $n_1 = n_2$ $n_1 = 12$ और $n_2 = 12$ (दोनों ही 8 से अधिक है), इसलिए, U का प्रतिदर्श वितरण लगभग सामान्य वक्र की ओर होता है। निम्नलिखित सूत्र U को Z आंकडे मे ंपरिवर्तित किया जाता है :–

$$Z = \frac{U - (n_1\, n_2)/2}{\sqrt{\frac{n_1\,.\,n_2(n_1+n_2+1)}{12}}}$$

$$= \frac{37-(12 \times 12)/2}{\sqrt{\frac{12\times12(12+12+1)}{12}}} \qquad [\text{जब } U = 37]$$

$$= \frac{37-72}{17.32} = -2.02$$

या
$$Z = \frac{107-(12 \times 12)/2}{\sqrt{\frac{12\times12(12+12+1)}{12}}} \qquad [\text{जब } U = 107]$$

$$= \frac{107-72}{17.32} = +2.02$$

चूँकि यह एक द्विपुच्छीय परीक्षण है, 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर Z का महत्वपूर्ण मान ± 1.64 है। Z का परिकल्पित मान ± 2.02 महत्वपूर्ण मान से अधिक है । इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य होती है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि लडके एवं लडकियां समान माध्य के साथ समग्र से लिये गए हैं।

उदाहरण 7 :– दो प्रतिदर्श पहली स्थिति में 90, 94, 36 और 44 मानों के साथ ओर दूसरी स्थिति में 53, 39, 6, 24 और 33 मानों के साथ दिये गए हैं। U परीक्षण का प्रयोग 10 प्रतिशत महत्व के स्तर पर करें कि समान माध्य के साथ प्रतिदर्श समग्र से लिये गये हैं।

हल :– μ_0: समान माध्य के साथ दो प्रतिदर्श समग्र से लिये गये हैं।

H_1 : विभिन्न माध्यों के साथ दो प्रतिदर्श समग्र से लिये गए हैं। अब, हम अवलोकनों को बढते हुए कम मे व्यवस्थित करेंगें और उन्हें श्रेणीबद्ध करेंगें।

प्रतिदर्श मान	*श्रेणी*	*पहले प्रतिदर्श की श्रेणी*	*दूसरे प्रतिदर्श की श्रेणी*
6 (II)	1	……	1
24 (II)	2	……	2
33 (II)	3	……	3
36 (I)	4	4	……
39 (II)	5	……	5
44 (I)	6	6	…….
53 (II)	7	…….	7
90 (I)	8	8	……
94 (I)	9	9	……
	कुल	***$R_1 = 27$***	***$R_2 = 18$***

जैसा कि दो प्रतिदर्शों में पदों की संख्या 8 से कम है $(n_1 = 4$ और $n_2 = 5)$, हम सामान्य वक्र करीब (निकट) तकनीकी प्रयोग नहीं कर सकते हैं। हम दिये हुए विल्कसन के (अयुग्मित) वितरण तालिका का प्रयोग करेंगें।

$w_s =$ दो योगों का छोटा = 18

S = छोटे योग के साथ प्रतिदर्श में पदों की संख्या = 5

$w_l =$ दो योगों का बडा = 27

L = बडे योग के साथ प्रतिदर्श मे पदों की संख्या = 4

w_s का न्यूनतक मान =1+2+3+4+5 =15 (जब S=5)

w_l का अधिकतम मान =6+7+8+9=30 (जब L=4)

$U = w_s - w_s$ न्यूनतम $= 18 - 15 = 3$ या $U = w_l$ अधिकतम $w_l = 30 - 27 = 3$

U का प्रायिकता मान विल्कसन तालिका के अनुसार स्तम्भ 3 के कक्ष से , S=5 और L=4 टुकडे द्वारा 0.056 है। यह 3 से छोटी या छोटी से छोटी मान प्राप्त करने की आवश्यक प्रायिकता है हमें इसकी 10 प्रतिशत महत्व के स्तर के साथ तुलना करनी चाहिए चूँकि वैकल्पिक परिकल्पना यह है कि दो प्रतिदर्श विभिन्न माध्यों के साथ समग्र से लिये गये हैं, एक द्विपुच्छीय परीक्षण उपयुक्त है और 10 प्रतिशत महत्व स्तर का अर्थ 5 प्रतिशत बायॉ पुच्छीय और 5 प्रतिशत दायॉ पुच्छीय अनुसार है। दूसरे शब्दों में, हमें परिकल्पित प्रायिकता की 0.05 प्रायिकता के साथ तुलना करनी चाहिए। चूँकि परिकल्पित प्रायिकता (0.056) 0.05 से अधिक है, इसलिए, शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दो प्रतिदर्श समान माध्य से साथ समग्र से लिये गए हैं।

16.6 मैकनेमर परीक्षण

मैकनेयर परीक्षण महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षणों मे से एक है जो प्रायः संज्ञात्मक आंकडों और दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों से सम्बन्ध मे प्रयोग होता है । इसका

प्रयोग यह निर्धारित करने में किया जाता है कि दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों के अनुपातों के मध्य अंतर प्रमाणित है। एकल प्रतिदर्श गिनती आंकडे पर आधारित, यह पूर्व निर्णय और बाद मे निर्णय, प्रतिक्रिया परिणामों की तुलना करता है। दूसरे शब्दों में मैकनेमर परीक्षण स्थितियों में दो सम्बन्धित प्रतिदर्श के लिए प्रयोग होता है जहॉ लोगों की प्रवृत्ति का यदि कोई विचारों मे परिवर्तन के महत्व का परीक्षण पहले और बाद के प्रतिपादन के मूलयांकन से किया जाता है।

इस परीक्षण के उपयोग के लिए प्रयोग को इस तरीके से अभिकल्पित किया जाता है कि तत्रं के बारे में विषयों की आरम्भ में उनके अनुकूल ओर प्रतिकूल दृष्टिकोणों को समान वर्ग में विभाजित किया जाता है। कुछ प्रतिपादन के पश्चात समान संख्या के विषयकों से दिये हुए तन्त्र के बारे में अपने दृष्टिकोण व्यक्त करने को कहा जाता है कि क्या वे इसके पक्ष में है या नहीं। समान विषयक पहले और बाद की प्रतिक्रियाओं के प्रबंधकीय प्रतिपादन से निम्नलिखित 2×2 आकस्मिकता तालिका के रूप मे प्रदर्शित किया जा सकता है।

परिवर्तन के महत्व के परीक्षण के लिए प्रतिक्रिया तालिका

पहले प्रतिपादन	बाद का प्रतिपादन	
	पक्ष	विपक्ष
पक्ष	A	B
विपक्ष	C	D

इस तालिका में A प्रतिक्रियादाताओं के दृष्टिकोण हमेशा धनात्मक होते हैं पहले और बाद के प्रतिपादन से कोई परिवर्तन नहीं होता है के रूप को प्रदर्शित करता है। इसी तरह D भी प्रतिक्रियादाताअें के दृष्टिकोण मे पहले और बाद के प्रतिपादन मे कोई अन्तर नहीं होता है और वे हमेशा ऋणात्मक हेाते हैं को इंगित करता है। लेकिन B और C प्रतिपादन के प्रभाव के कारण प्रतिक्रियादाताओं के दृष्टिकोण मे परिवर्तन को दर्शाता है। B प्रतिक्रियादाताओं की उस संख्या को प्रदर्शित करता है जो प्रतिपादन से पहले धनात्मक थे और बाद मे ऋणात्मक थे। इसी तरह, C उन प्रतिक्रियादाताओं को इंगित करता है। जो प्रतिपादन से पहले ऋणात्मक थे और बाद मे धनात्मक थे। इस प्रकार, B और C केवल दो प्रासंगिक निर्णय की आवृत्ति कक्ष है जो महत्व मे परिवर्तन के होने या न होने को दर्शाता है। चूॅकि (B+C) प्रतिक्रियादाताअें के दृष्टिकोण के कुल परिवर्तन को इंगित करती है, इस प्रकार शून्य परिकल्पना के अन्तर्गत अपेक्षा यह है कि (B+C) स्थिति में परिवर्तन एक दिशा मे और समान अनुपात मे दूसरी दिशा मे होता है। मैकनेमर परीक्षण आंकडा एक x^2 रूपान्तर परीक्षण प्रारूप निम्नवत रूप में है :–

$$\chi^2 = \frac{(|B-C|-1)^2}{(B+C)} \qquad (\text{with } 1\ d.f.)$$

असतत् वितरण से सतत् वितरण बनाने के लिए उपरोक्त वर्णित x^2 सूत्र को -1 से सुधार किया जाता है। अन्तिम चरण में, पूर्व निर्धारित महत्व के स्तर पर 1 स्वतन्त्रता

के अंश के साथ x^2 के परिकल्पित मान की तालिका मान से तुलना की जाती है। यदि परिकल्पित मान तालिका मान से कम होता है महत्वपूर्ण परिवर्तन नहीं है की शून्य परिकलपना स्वीकृत होती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। मैकनेमर परीक्षण का x^2 के ऊपर लाभ यह है कि इस परीक्षण मे मिलान युग्मों को संज्ञान में लिया जाता है जबकि x^2 परीक्षण मे इन्हें संज्ञान में नहीं लेते हैं।

उदाहरण 8 :– एक कंपनी एक नई ब्रांडिंग रणनीति पर कार्य कर रही है, जो सोचती है कि वह अधिक प्रभावी है। इसकी स्वीकृत होने पर, प्रबन्धक जानना चाहता है कि नई रणनीति अपेक्षा से अधिक प्रभावी है। 50 प्रतिक्रियादाताओं का प्रतिदर्श नई रणनीति के अंगीकरण के दोनों पहले और बाद की प्रतिक्रिया जानने के लिए चयनित किया जाता है। प्रतिदर्श प्रतिक्रिया आंकडे का विश्लेषण निम्नलिखित परिणाम देता है :–

अंगीकरण के पहले	अंगीकरण के बाद	
	धनात्मक	ऋणात्मक
धनात्मक	10	16
ऋणात्मक	12	11

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि क्या नई ब्रांडिग रणनीति वास्तविकता मे अधिक प्रभावशाली है।

हल :– μ_0 : नई ब्रांडिग रणनीति अधिक प्रभावशाली नहीं है।

H_1 : नई ब्रांडिग रणनीति अर्थपूर्ण ढंग से अधिक प्रभावशाली है।

$$\chi^2 = \frac{(|B - C| - 1)^2}{(B+C)} = \frac{(|16 - 12| - 1)^2}{(16+12)} = \frac{9}{28} = 0.32$$

1 d.f के साथ 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर x^2 का तालिका मान 3.84 है। चूंकि परिकल्पित मान 0.32 तालिका मान 3.84 से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है। इसका अर्थ है कि नई ब्रांडिग रणनीति अधिक प्रभावशाली है।

16.7 एक प्रतिदर्श रन्स परीक्षण

एक प्रतिदर्श रन परीक्षण एक परीक्षण होता है जिसका उपयोग एक प्रतिदर्श की यादृच्छिकता के क्रम के आधार पर किया जाता है जिससे अवलोकन लिये जाते हैं। कई बाद हमें उन स्थितियों से समझौता करना पडता है जहॉ हमारा आंकडे पदो के चयन में कोई नियंत्रण नहीं होता है। इन परिस्थितयों मे, निर्णय लेना बहुत कठिन होता है कि चयनित प्रतिदर्श यादृच्छिक है या नहीं। इन परिस्थितियों में, हमें प्रतिदर्श मे यादृच्छिक परीक्षण के लिए रन परीक्षण प्रयोग करना चाहिए। यहॉ एक महत्वपूर्ण बिन्दु ध्यान मे रखना चाहिए कि यादृच्छिक प्रतिचयन के लिय यह आवश्यक है लेकिन पर्याप्त परीक्षण नहीं है। यदि कल्पित यादृच्छिक प्रतिदर्श रन परीक्षण को असफल करता है, यह प्रकट करता है कि ये यादृच्छिक प्रतिचयन के साथ प्रतिदर्श विसंगत के क्रम में ये असामान्य है, न यादृच्छिक काल चक्र में है। एक रन परीक्षण समान अक्षरों या किसी अन्य प्रकार के प्रतीकों का अनुक्रम होता है जो विभिन्न अक्षरों या किसी भी

अक्षर का नहीं द्वारा अनुसरण और पूर्ववर्तिता करता है । स्थिति की संख्या, पद या रन मे प्रतीकों की संख्या को रन की लम्बाई के रूप में जाना जाता है। यादृच्छिक आंकडे समूह में (I+1)th मान की प्रायिकता Ith मान से अधिक या कम हो तो द्विपद वितरण का अनुसरण होता है जो रन परीक्षण का आधार बनता है।

उदाहरण के लिए, XX YYYYY XXX ZZZZ XX एक रन को प्रदर्शित करते हैं।

हम निम्न प्राकर से उपरनों मे एक उपभाग को विभाजित करने के लिए रेखांकन के माध्यम से लगातार समान अक्षर समूह बना सकते हैं।

XX YYYYY XXX ZZZZ XX इस स्थिति मे, हमारे पास 5 उप रन (r) है, x की $7(n_1)$ घटनाऐं हैं, y की 5 (n_2) घटनाऐं हैं और z की $3(n_3)$ घटनाऐं हैं। इस प्रकार, रन की लम्बाई या कुल अवलोकनों (N) की संख्या $(7+5+3)=15$ है।

यदि किसी भी प्रकार के अवलोकनों के आकार 10 से कम होता है (अर्थात n_1 या n_2 या $n_3 < 10$) तब r के परिकल्पित मान की तुलना रन तालिका मे से प्राप्त r के तालिका मान के साथ से की जाती है। लेकिन जब सभी प्रकार से अवलोकनों का आकार 10 या इससे अधिक होता है तब निम्नलिखित तरीके से r में आधारित सांख्यिकी की गणना करते हैं :

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$

जहॉ : $\mu_r = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$ & $\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1 n_2\,(2n_1\ n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}$

एकल प्रतिदर्श रन्स परीक्षण केवल श्रेणी के सहजगुण के यादृच्छिकता सीमाबद्ध नहीं होता है। यहॉ तक कि माध्यिका से अधिक और माध्यिका से कम वर्गों या रन्स के अन्दर मानों के पृथककरण द्वारा संख्यात्मक मानों में शामिल प्रतिदर्श हेतु प्रयोग किया जा सकता है। यह आर्थिक आंकडे से संबंधित प्रवृत्तियों या चक्रियी तरीके के पीरक्षण के लिए मुख्य रूप से उपयोगी होता है।

उदारहण 9 :– 26 लोगों के प्रतिदर्श जिसमें 16 महिलाऐं (W) और 10 पुरूष (M) का साक्षात्मकार लिया गया। इनका साक्षात्मकार निम्नलिखित क्रम में था।

M WWWW MMM WW M WWW MM WWW MMM WWWW

5 प्रतिशत के स्तर पर इस प्रतिदर्श के यादृच्छिक परीक्षण के लिए रन परीक्षण का प्रयोग करें।

हल :– H_0 : प्रतिदर्श यादृच्छिक है।

H_1 : प्रतिदर्श यादृच्छिक नहीं है।

रन्स की संख्या $= r = 10$

महिला के घटित होने की संख्या $= n_1 = 4 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$

पुरूष के घटित होने की संख्या $= n_2 = 1 + 3 + 1 + 2 + 3 = 10$

कुल अवलोकनों की संख्या $= N = 16 + 10 = 26$

चूँकि दोनों n_1 और $n_2 \geq 10$, इसलिए Z- आंकडे की गणना निम्नवत करेंगें :–

$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2(16)(10)}{16+10} + 1 = 13.3$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1n_2\,(2n_1\ n_2 - n_1 - n_2\,)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} = \sqrt{\frac{2(16)(10)(2\times16\times10-16-10)}{(16+10)^2(16+10-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{94080}{16900}} = 2.359$$

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{10 - 13.3}{2.359} = -1.398$$

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर, द्विपुच्छीय परीक्षण के लिए Z का महत्वपूर्ण मान ± 1.96 होता है। इसलिए परिकलिपत Z मान तालिका मान से छोटा है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रतिदर्श यादृच्छिक है।

गैर प्राचल परीक्षणों का समीक्षात्मक मूल्यांकन :– परिकल्पनाओं के परीक्षण के लिए हमारे पास दो प्रकार के परीक्षण होते हैं प्राचल परीक्षण और गैर प्राचल परीक्षण। हमें प्राचल परीक्षण के निश्चित रूप से चयन करना चाहिए यदि हम विश्वस्त होते हैं कि समग्र से प्रतिदर्शित किया हुआ आंकडा सामान्य वितरण का अनुसरण करता है। लेकिन कई बार, हमें उन परिस्थितियों के साथ समझौता करना पडता है जहॉ महत्व के मानक परीक्षणों के लिए विभिन्न अवधारणाऐं आवश्यक होती है जैसे समग्र सामान्य है, प्रतिदर्श स्वतन्त्र है, मानक विचलन ज्ञात है इत्यादि को पूरा नहीं किया जा सकता है तब हम गैर प्राचल विधियों का प्रयोग कर सकते हैं। निम्नलिखित तीन परिस्थितियों में हमे निश्चित रूप से गैर प्राचल परीक्षण का चयन करना चाहिए :

- परिणाम एक श्रेणी या एक अंक है और समग्र पूर्णतया सामान्य नहीं है।
- कुछ मान पैमाने से बाहर होते है अर्थात माप मे ंबहुत बडे या बहुत छोटे। यहॉ तक की समग्र सामान्य है, प्राचल परीक्षण के साथ इन आंकडों का विश्लेषण असम्भव होता है चूँकि हम सभी मानों को नहीं जानते है। इन आंकडों के साथ गैर प्राचल परीक्षण का प्रयोग आसान हेाता है।
- आंकडे को क्रम संख्या पैमाने पर मापा जाता है। और समग्र का वितरण गौसियन तरीके से नहीं हुआ है।

गैर–प्राचल परीक्षणों मे ंप्राचल परीक्षणो ंके ऊपर बहुत लाभ होते हैं। गैर –प्राचल परीक्षण का सबसे बढा लाभ इसकी अस्थिरता होती है। इन परीक्षणों का प्रयोग सभी प्रकार के आंकडो ंके लिए किया जा सकता है चाहे समग्र सामान्य है या असामान्य, परिमाणात्मक है या गुणात्मक है। यह श्रेणीबद्ध आंकडे के लिए सबसे अधिक उपयोगी होता है। जब हम इस तरह के आंकडों के साथ समझाौता करते हैं जिन्हें प्रतिक्रियादाताों की पसंद के अनुसार श्रेणीबद्ध किया जा सकता है। लेकिन उनका सटीक परिमाणीकरण सम्भव नही होता है, तब हमारे पास एक ही विकल्प गैर

–प्राचल परीक्षण होता है। इसी प्रकार, यह निर्णयात्मक या संज्ञात्मक आंकडे के साथ सबसे अच्छे विकल्प का भी समझौता है। कभी कभी हम इस तरह के आंकडे के साथ कार्य करते हैं जिसे विभिन्न समग्रों से सम्बन्धित प्रतिदर्शों के माध्यम से प्राप्त करते हैं। इस तरह की परिस्थितियों में, हमें कुछ अयथार्थवादी अवधारणाओं को प्राचल परीक्षणों के प्रयोग के लिए बनाना पडता है। लेकिन गैर प्राचल परीक्षणों के अनुप्रयोग से इन परिस्थितियों में कोई समस्या नहीं होती है। जब प्रतिदर्श आकार छोटा है या केवल कुछ अवलोकन उपलब्ध होते हैं तब भी केवल गैर–प्राचल परीक्षण का प्रयोग किया जाना चाहिए।

गैर–प्राचल परीक्षण के लोकप्रियता का मुख्य कारण उनकी प्राचल परीक्षण की तुलना मे आसान गणना का होना है, चूँकि गैर प्राचल परीक्षण समझ मे आसान गणना मे सरल, सभी प्रकार के आंकडों के लिए अनुकूल और कम समय लेने वाले होते हैं, इसलिए ये अनुसंधानकर्ताओं द्वारा पसंद किये जाते हैं ।

यद्यपि गैर प्राचल परीक्षणों के बहुत लाभ है लेकिन इसकी कुछ हानियॉ भी होती है इस कारण से पहली पसंद हमेशा प्राचल परीक्षणों को दी जाती है। गैर–प्राचल परीक्षण, प्राचल परीक्षणों से कम शक्तिशाली होते हैं क्योंकि वे बहुत सी अवधारणाओं पर आधारित नहीं होती है। अवधारणाओं का अभाव निर्णय लेने के क्षेत्र को सीमाबद्ध करता है। इस प्रकार, प्रतिदर्शी आंकडा सभी वांछित अवधारणाओं को पूर्ण करता है, या आंकडों को अन्तराल मे ंया अनुपात पैमाने मे मापा जाता है, तब इसे हमेशा प्राचल परीक्षण का प्रयोग, गैर–प्राचल परीक्षण की तुलना मे अच्छा समझा जाता है।, इसी तरह, प्रतिदर्श का आकार बडा होता है तब गैर–प्राचल परीक्षणों मे शामिल गणनाऐ ज्यादा लम्बी होती है। इस प्रकार, बडे प्रतिदर्शों की स्थिति में, गैर–प्राचल परीक्षणों को नकार देना चाहिए। गैर–प्राचल परीक्षणों के क्रियान्वयन के साथ दूसरी समस्या तालिका समीक्षात्मक मान की उपलब्धता होती है। अर्थपूर्ण निर्णयों के पहुॅच के क्रम में, समीक्षात्मक मान आवश्यक होते हैं। यद्यपि, इनमे से कुछ मानों को प्रासंगिक तालिकाओं मे संकलित नहीं किया गया होता है और प्रचलित तालिका हमेशा ही उपलब्ध नहीं होती है, ये आसानी से उपलब्ध नहीं है।

16.9 सारांश

गैर–प्राचल परीक्षण वे परीक्षण होते हैं जो समग्र के प्राचलों पर आधारित नहीं होते हैं, ये वितरण मुफ्त परीक्षण होते हैं । इस इकाई मे आप कुछ लोकप्रिय और प्रयाः गैर–प्राचल परीक्षणों, काई वर्ग परीक्षण के अतिरिक्त के बारे में जिसे पिछले इकाई मे अध्ययन किया गया है।

गैर प्राचल परीक्षणों मे साइन परीक्षण सबसे महत्वपूर्ण है जिसका परीक्षण दिशा के अन्तरों के लिए प्रयोग होता है । यदि समग्र माध्य परिकलित माध्य के बराबर होता है। दो प्रकार के साइन परीक्षण होते है एक प्रतिदर्श साइन परीक्षण और द्वि प्रतिदर्श साइन परीक्षण ।

माध्यिका परीक्षण का प्रयोग यह निर्धारित करने में होता है कि समान माध्यिका के साथ समग्र में से प्रतिदर्श लिये गये है। यह दो या अधिक यादृच्छिक प्रतिदर्शों के माध्यिकाओं के बीच महत्वपूर्ण अन्तर को निर्धारित करता है।

दूसरा महत्वपूर्ण गैर प्राचल परीक्षण विल्कसन मिलान युग्म परीक्षण है जो पहले आर बाद के प्रयोग प्रकार का मिलान युग्मों के लिए उपयुक्त होता है। इस परीक्षण में, दिशाओं के साथ साथ अन्तर के परिमाणों को संज्ञान मे ंलिया जाता है। तब भी दूसरा गैर–प्राचल परीक्षण विल्कसन मन व्हाइटले परीक्षण है जो U परीक्षण के रूप मे जाना जाता है। यह दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के बीच अलग के अंशों की माप करता है।
इसका प्रयोग यह निर्धारित करने मे ंकिया जाता हैं कि दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श एक ही समग्र से लिये गये हैं या समान वितरण के दो या अधिक समग्रों से लिये गये हैं।

मैकनेयर परीक्षण का प्रयोग उन परिस्थितियों में जहॉ दो सम्बन्धित प्रतिदर्श स्थितियों में लोगों की प्रवृत्ति को परीक्षण के पहले और बाद के प्रतिपादन मे ंविचार मे यदि कोई अर्थपूर्ण परिवर्तन होता है वहॉ एकल प्रतिदर्श रन परीक्षण का प्रयोग प्रतिदर्श के यादृच्छिक परीक्षण के लिये किया जाता है। श्रेणी आंकडे के प्रयोज्य संज्ञात्मक और छोटे आकार प्रतिदर्श में गैर प्राचल परीक्षणेां के अस्थिरता होने के लाभ होते हैं। इसकी कुछ हानियॉ भी हैं, जैसे ये परीक्षण बडे प्रतिदर्श के लिए कम शक्तिशाली एवं उपयुक्त नहीं है। इस प्रकार, प्राचल परीक्षण गैर–प्राचल परीक्षणों से अधिक पसंदनीय होते हैं।

16.10 शब्दावली

साइन परीक्षण : यह अवलोकन के एक जोडे की दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) पर आधारित होता है न कि उनकी संख्यात्मक परिमाण पर ।

18.11 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. विल्कोवसोन मिलान युग्म परीक्षण को विल्कोक्सोन ––––––––परीक्षण के रूप में भी जाना जाता है।
2. एक रन में घटनाओं की संख्या को रन के –––– रूप में जाना जाता है ।
3. मकनर परीक्षण आंकडा प्रयोग एक परिवर्तित –––––––परीक्षण प्रारूप है।
4. –––––––परीक्षण श्रेणी योग परीक्षणों के मध्य बहुत प्रसिद्ध है।
5. साइन परीक्षण में, प्रतिदर्श मान μ_0 की तुलना में अधिक –––––––निर्दिष्ट किये जाते हैं।

(ब) सत्य या असत्य

1. जब समग्र का वितरण स्पष्टतया सामान्य होता है, हमें निश्चित रूप से गैर प्राचल परीक्षणों का चयन करना चाहिए। (सत्य/असत्य)
2. यदि प्रतिदर्शों को क्रमवार मापा जाता है, तब हम माध्यिका परीक्षण का उपयोग कर सकते हैं। (सत्य/असत्य)
3. u परीक्षण में जब n_1 एवं $n_2 < 8$ हो तब u को z में परिवर्तित करना चाहिए। (सत्य/असत्य)
4. माध्यिका परीक्षण में, हम z के परिकलित मान की तुलना z के महत्वपूर्ण मान से शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए करते हैं। (सत्य/असत्य)

5. गैर प्राचल परीक्षण छोटे प्रतिदर्शों के लिए अधिक उपयुक्त होते हैं। (सत्य / असत्य)

16.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ)

1. साइन की श्रेणी (Signed Rank), 2. लम्बाई (Length), 3. काई – वर्ग (Chi-sauare), 4. u, 5 धन (Plus)

(ब)

1. असत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. सत्य

16.13 स्वपरख प्रश्न

1. साइन परीक्षण के उपयोग का उद्देश्य क्या होता है ?
2. माध्यिका परीक्षण में परीक्षण से सन्दर्भित शून्य परिकल्पना को लिखें ?
3. गैर प्राचल परीक्षणों के तीन लाभों का वर्णन करें ?
4. दो गैर प्राचल परीक्षणों के महत्व को समझाते हुए इनकी संक्षिप्त विवेचना करें।
5. गैर प्राचल परीक्षणों के लाभों एवं (नुकसान) हानियों का वर्णन करें।
6. 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए विद्यालय के सभी विद्यार्थियों ने औसतन 80 प्रतिशत अंक प्राप्त किये हैं यह सत्य है या नहीं :

क्र0सं0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
अंक %	81	70	93	94	82	80	76	78	83	95	75	89

(μ_0 स्वीकार)

7. 30 दिनों में एक प्राचीन चट्टान पर दो पुरातात्विकों द्वारा खोदें गए कलाकृतियों की संख्या निम्नलिखित है :

X द्वारा	1	0	2	3	1	0	2	2	3	0	1	1	4	1	2	1	3	5	2	1	3	2	4	1	3	2	0	2	4	2
Y द्वारा	0	0	1	0	2	0	0	1	1	2	0	1	2	1	1	0	2	2	6	0	2	3	0	2	1	0	1	0	1	0

1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए शून्य परिकल्पना का परीक्षण करें कि दोनों पुरातात्विक x एवं y कलाकृतियों ज्ञात करने में वैकल्पिक परिकल्पना कि x अच्छा है के विरूद्ध एक समान है।

(μ_0 अस्वीकार)

8. एक शारीरिक प्रशिक्षण दावा करता है कि एक विशेष व्यायाम को जब न दिनों के लिए लगातार किया जाता है , शरीर का वजन न्यूनतम 3.5 किग्रा कम हो जाता है। 5 अधिक वनज वाली लडकियों में 7 दिनों के लिए व्यायाम किया और उनके शरीर का वजन निम्नवत पाया गया था :

लडकियॉ	व्यायाम से पहले वजन	व्यायाम के बाद वजन

1	70	66
2	72	70
3	75	72
4	71	66
5	78	72

साइन परीक्षण का प्रयोग करते हुए $\propto = 0.05$ पर दावे को प्रमाणित करें कि व्यायाम वजन को न्यूनतम 3.5 किग्रा करता है । (μ_0स्वीकार)

9. एम0बी0ए0 विद्यार्थियों के दो वर्गो को लागत लेखांकन के समान पाठ्यक्रम को अध्यापन की दो भिन्न विधियों द्वारा बताया गया था। जिन्हें T_1 तथा T_2 द्वारा जानें। 6 विद्यार्थियों के एक प्रतिदर्श को दो वर्गों के प्रत्येक में से 20 अंकों का एक कक्ष परीक्षा दिया गया था। अंक निम्नवत पाये गये थे।

प्रतिदर्श I $(T)_1$	15	10	11	12	18	15
प्रतिदर्श II $(T)_2$	12	17	14	11	09	15

0.05 महत्व के स्तर पर माध्यिका का परीक्षण का प्रयोग करते हुए परीक्षण करें कि एम0बी0ए0 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक दोनों वर्गों में माध्यिका अंक के रूप में एक समान है । (μ_0स्वीकार)

10. नीचे दिये गये आंकडों के मिलान युग्म दो मशीनों A एवं B के उत्पादन क्षमता से सम्बन्धित हैं :

मशीन A	142	140	144	144	142	146	149	150	142	148
मशीन B	138	136	147	139	143	141	143	145	136	136

विल्कोवन्सोन साइन श्रेणी का प्रयोग करते हुए शून्य परिकल्पना को 1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर प्रमाणित करें कि दो मशीनों के मध्य उत्पादन क्षमता में कोई अन्तर नहीं हैं। (μ_0अस्वीकार)

11. एक नाइट क्लब का सुरक्षा विभाग सामान्य दैनिक प्रयोग के लिए हाथ ज्योंति बैटरीयों B_1 एवं B_2 के दो ब्रान्डों में से एक के चयन की इच्छा दर्शाता है। महत्वपूर्ण जीवन के लम्बाई की माप घन्टों में ज्ञात करने के लिए ब्रान्ड B_1 एवं B_2 के 5 बैटरीयों के प्रतिदर्श को परीक्षण के लिए लिया गया था। परीक्षण परिणाम के निम्नलिखित आंकडे हैं :

$B_1\ (n_1 = 5)$	25	31	26	33	35	
$B_2\ (n_2 = 6)$	24	30	28	32	29	34

5 प्रतिशत के स्तर पर u परीक्षण का प्रयोग करते हुए परिकल्पना का परीक्षण करें कि दो ब्रान्ड की बैटरीयों में समान लम्बाई का महत्वपूर्ण जीवन है। (μ_0स्वीकार)

12. एक पहले एवं बाद के प्रयोग में 300 प्रतिक्रियादाताओं से प्राप्त प्रतिक्रियाओं को निम्नवत वर्गीकृत किया गया था :

पहले उपचार	बाद में उपचार	
	प्रतिकूल	अनुकूल
अनुकूल	60	90
प्रतिकूल	120	30

5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर परीक्षण करें, मकनर परीक्षण का प्रयोग करते हुए प्रमाणित करें कि उपचार के पश्चात लोगों की राय में कोई महत्वपूर्ण अन्तर है। (μ_0स्वीकार)

13. बहुत वर्ष पहले एक सडक के पास पास 30 आम के पेड स्थापित किये गये थे। एक शोधकर्ता ने पेडों को निरोगी (H) एवं रोगी (D) क्रम में निम्नवत पाया :

HH	DD	HHHHH	DDD	HHHH	DDDDD	HHHHHHHHH

1 प्रतिशत महत्व के स्तर पर रन्स परीक्षण का प्रयोग करते हुए इस प्रतिदर्श के लिए यादृच्छिकता का परीक्षण करें।

16.14 संदर्भ पुस्तकें

1. होडा आर0पी0, व्यवसाय एवं अर्थशास्त्र के लिए सांख्यिकीय, मैक मिल्लन व्यवसाय पुस्तकें, नई दिल्ली ।
2. राय रमनद्यू एवं बैनर्जी सुमोजित, अनुसंधान प्रणाली के मूल किताब महल इलाहाबाद ।
3. शुक्ला एस0एम0 एण्ड शशि एस0पी0, उन्नत सांख्यिकीय साहित्य भवन प्रकाशन आगरा ।

इकाई 17 F –परीक्षण और प्रसरण का विश्लेषण (अन्नोवा)

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- F- परीक्षण की अवधारणा एवं अनुप्रयोग की व्याख्या कर सकें।
- ANOVA की अवधारणा का वर्णन कर सके।
- प्रसारण के विश्लेषण की तकनीक का वर्णन कर सके।

17.1 प्रस्तावना

पिछले दो इकाईयों में, आपने काई–वर्ग परीक्षण और दूसरे गैर प्राचल परीक्षणो का अध्ययन किया है। आपको ज्ञात होना चाहिए कि प्राचल परीक्षण गैर प्राचल परीक्षणो की तुलना में अधिक प्रभावशाली होते हैं। इस प्रकार, आपको परिकल्पना परीक्षणों या निष्कर्ष निकालने के लिए प्राचल परीक्षणों में अधिक निभ्रर रहना चाहिए।

पिछले इकाईयों में आप पहले ही कुछ महत्वपूर्ण प्राचल परीक्षणों जैसे t परीक्षण z परीक्षण इत्यादि के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। दो प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच के महत्वपूर्ण अन्तर को या तो z परीक्षण या t परीक्षण द्वारा अपनिर्णीत किया जा सकता है। लेकिन जब हम एक ही समय में दो प्रतिदर्श माध्यों से अधिक अन्तर के महत्व का अध्ययन कर रहे होते हैं, ये दोनो परीक्षण उपयोगी नहीं होते हैं और हमें परिवर्तनशीलता के विश्लेषण का प्रयोग करना पडता है। दूसरा महत्वपूर्ण प्राचल परीक्षण F परीक्षा होता है जो स्वतन्त्र अनुमानों के लिए समग्र परिवर्तनशीलता के महत्व परीक्षण मे प्रयोग किया जाता है।

इस इकाई में, आप f परीक्षण और परिवर्तनशीलता के विश्लेषण के बारे मे अध्ययन करेंगें जो दो प्रतिदर्शों के बीच से अधिक परिवर्तनशीलता के महत्व के निर्णय में अपकी सहायता करेंगें।

17.2 F परीक्षण

प्राचल परीक्षणों के क्षेत्र में परिवर्तनशीलता अनुपात परीक्षण या F परीक्षण एक महत्वपूर्ण परीक्षण होता है। इसे सामान्यतया F परीक्षण के रूप मे जाना जाता है क्योंकि आर0ए0फिशर महान साख्यिकीयविद् ने पहली बाद परिवर्तनशीलता शब्द का प्रयोग और परीक्षण को विकसित किया था। F परीक्षण सामान्यतया उपयोगी होता है जब बहु प्रतिदर्श स्थितियॉ शामिल होती है और आंकडे के अन्तराल या अनुपात पैमाने मे मापा जाता है। F परीक्षण का उद्देश्य यह निर्धारित करने में किया जाता है क्योंकि दो स्वतन्त्र अनुमानों की समग्र परिवर्तनशीलता में अर्थपूर्ण अन्तर है, या क्या दो प्रतिदर्श सामान्य समग्रों से जिनकी परिवर्तनशीलता समान है से लिये जा सकते है। F परीक्षण एक बहुत उपयोगी परीक्षण है जिसे दो सामान्य समग्रों के समानता की परिवर्तनशीलता के परीक्षण मे प्रयोग किया जा सकता है। दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों से अधिक के लिए यह परिवर्तनशीलता का विश्लेषण कर सकता है। इसका प्रयोग सह प्रसरण के विशलेषण के लिये किया जा सकता है। इस प्रकार, यह एक महत्वपूर्ण, लोकप्रिय और उपयोगी प्राचल परीक्षण है जिसे सभी क्षेत्रों में जैसे अर्थशास्त्र, व्यवसाय, शिक्षा कृषि इत्यादि में प्रयोग किया जा सकता है।

17.2.1 F परीक्षण की अवधारणाऐं

F परीक्षण निश्चित अवधारणाओं पर आधारित होता है जिसे इसके अनुप्रयोग के लिए पूर्ण होना चाहिए ये अवधारणाऐं निम्नवत हैं :—

- पहली अवधारणा समग्र की सामान्य स्थिति हेाती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक वर्ग में मान सामान्य रूप से वितरित हुए हैं।
- दूसरी अवधारणा वर्गों की एकरूपता होती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक वर्ग के अर्न्तगत प्रसरण सभी वर्गों के लिए एकसमान होना चाहिए। यह अवधारणा मिश्रित या संघीय वर्गों के अर्न्तगत प्रसरणों के एकल भीतर वर्ग प्रसरण के श्रेात के क्रम के अंदर लिए आवश्यक होता है।
- तीसरी अवधारणा त्रुटि की स्वतन्त्रता होती है। इसका अर्थ है कि प्रत्येक मान के लिए अपने स्वयं के समूह के चारों ओर एक मान के विचरण का मध्य स्वतन्त्र होना चाहिए।
- अन्तिम अवधारणा यादृच्छिकता की होती है। इसका अर्थ है कि प्रतिदर्श पदों को यादृच्छिक तरीकों से समग्र से लिया जाना चाहिए।

17.2.2 F परीक्षण की तकनीकें

F परीक्षण दो प्रसरणों के अनुपात पर आधारित होता है। इसी कारण इसे, प्रसरण अनुपात परीक्षण कहा जाता है। दो प्रसरणों का अनुपात F वितरण का अनुसरण करता है जो उपरोक्त वर्णित अवधारणाओं पर आधारित होता है। इस परीक्षण में, सबसे पहले, एक शून्य परिकल्पना ली जाती है जिसका कथन यह होता है

कि दो समग्रों के प्रसरण के बीच कोई अन्तर नहीं हैं। इस परिकल्पना के परीक्षण के लिए, हमें F (प्रसरणों का अनुपात) के मान के लिए कार्य करना पडता है। F की गणना निम्नवत की जाती है।

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

जहॉ $S_1^2 = \frac{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$ & $S_2^2 = \frac{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$

यहॉ यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि अंशगणक हमेशा ही ज्यादा प्रसरण का होता है। इसका अर्थ है कि S_1^2 हमेशा की प्रसरण के बडे अनुमान का हेाता है। (अर्थात $S_1^2 > S_2^2$) इसे निम्नलिखित सूत्र के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

F = प्रसरण का बडा अनुमान / प्रसरण का छोटा अनुमान

v_1 के लिए $v_1 = n_1 - 1 =$ बडे प्रसरण के प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता का अंश

$v_2 = n_2 - 1 =$ छोटे प्रसरण के प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता का अंश

F के मान की गणना के बाद, इसे वांछित महत्व के स्तर (5% या 1%) पर v_1 और v_2 (बडे एवं छोटे प्रसरणों की स्वतन्त्रता के अंश के लिए) F के तालिका मान से तुलना करते हैं। यदि F अनुपात का परिकल्पित मान F के तालिका मान से कम होता है, तब F अनुपात अर्थपूर्ण नहीं हेाता है और शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है। तब यह अनुमान लगाया जा सकता दोनों प्रतिदर्श समान प्रसरण के समग्र में से लिये गये हैं। दूसरी तरफ, यदि F का परिकल्पित मान F के तालिका मान से अधिक होता है, तब F अनुपात अर्थपूर्ण समझा जाता है और शून्य परिकल्पना अस्वीकार हेाती है।

उदाहरण –1 दो यादृच्छिक नमूने दो सामान्य समगों में से लिये गये थे और उनके मान निम्नरूप में हैं :–

A:	66	67	75	76	82	84	88	90	92	--	--
B:	64	66	74	78	82	85	87	92	93	95	97

5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि क्या दोनों समगों में समान प्रसरण है (संकेत : 5% स्तर पर $v_1 = 10$ और $v_2 = 8$ के लिए F=3.36)

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते हैं कि दोनों समग्रों में समान प्रसरण हैं

A (X_1)	($X_1 - \bar{X}_1$)	$(X_1 - \bar{X}_1)^2$	B(X_2)	($X_2 - \bar{X}_2$)	$(X_2 - \bar{X}_2)^2$
66	–14	196	64	–19	361
67	–13	169	66	–17	289
75	–5	25	74	–9	81
76	–4	16	78	–5	25
82	+2	4	82	–1	1
84	+4	16	85	+2	4
88	+8	64	87	+4	16
90	+10	100	92	+9	81
92	+12	144	93	+10	100
			95	+12	144

			97	+14	196
720	***0***	***734***	***913***	***0***	***1298***

$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{720}{9} = 80$ $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{913}{11} = 83$

$S_1^2 = \frac{\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{734}{9-1} = 91.75$

$S_2^2 = \frac{\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{1298}{11-1} = 129.8$

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{129.8}{91.75} = 1.4$ (दूसरे प्रतिदर्श के प्रसरण को अंश गुणक बनाया गया क्येांकि दूसरे प्रतिदर्श का प्रसरण पहले की तुलता मे अधिक है) 5% महत्व के स्तर पर $v_1 = 10$ और $v_2 = 8$ के लिए F का तालिका मान 3.36 है। चूॅकि F(1.4) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.36) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है। इस प्रकार, यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि दो समग्रों में एक समान प्रसरण है।

उदाहरण –2 दो कृषि भूखंडों के समान क्षेत्र के सार्वजनिक 10 उपखण्डों के एक प्रतिदर्श मे गेहूॅ की उत्पादकता अवलोकित की गई। यह देखा गया था कि वर्ग विचलनों का योग माध्य से क्रमशः 0.92 और 0.26 था। 5% महत्व के स्तर पर परीक्षण करें कि क्या दो यादृच्छिक समग्रों से लिए गऐ प्रतिदर्शों का प्रसरण समान है।

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते है। कि दो समग्रों के प्रसरण के बीच कोई अन्तर नहीं हैं

दिया है :–

$n_1 = 10,$ $n_2 = 10,$ $\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2 = 0.92,$
$\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 0.26$

$S_1^2 = \frac{\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{0.92}{10-1} = 0.102$

$S_2^2 = \frac{\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{0.26}{10-1} = 0.028$

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.102}{0.028} = 3.64$

$v_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9,$ $v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$

5% महत्व के स्तर पर $v_1 = 9$ और $v_2 = 9$ के लिए F का तालिका मान 3.18 है। चूॅकि F(3.64) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.18) से अधिक है। इसलिए, शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अर्थ है कि समग्र से लिये गये प्रतिदर्शों में का प्रसरण भिन्न है।

17.3 प्रसरण का विश्लेषण

प्रसरण के विशलेषण को प्रायः ANOVA के रूप में उल्लेखित किया जाता है। विचरण में वर्गों की वजह से प्रसरण के पृथककरण जो कि अन्य वर्गों की वजह से होते हैं को सांख्यिकीय तकनीक के रूप में परिभाषित किया जाता है। अर्थशास्त्र,

जीवविज्ञान, शिक्षा, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, व्यवसाय या उद्योग के क्षेत्रों और विभिन्न दूसरे शिक्षणों में यह शोध सम्बन्धी अत्यधिक उपयोगी तकनीक होती है। ANOVA तकनीक का आरम्भ में कृषि सम्बन्धी शोध में प्रयोग किया गया था और अब इसे सक्रिय रूप से प्रायोगिक प्रारूप पर आधारित शोधों के लिए प्रयोग किया जाता है, जैसे कि प्राकृतिक विज्ञान या सामाजिक विज्ञान। यह तकनीक तब प्रयोग की जाती है जब विविध प्रतिदर्श घटनाऐं शामिल होती है। ANOVA को यह परीक्षण करने के लिए कि क्या दो से अधिक परिमाणात्मक समग्रों के माध्य समान होते हैं, विशेषरूप से प्रारूपित किया जाता है। इसमें आंकडों का वर्गीकरण और क्रास वर्गीकरण शामिल हेाता है तब परीक्षण होता है यदि निर्दिष्ट वर्ग के माध्य मे अर्थपर्णू अन्तर है।
डोनाल्ड एल हरनैट और जेम्स एल मर्फी के अनुसर ''ANOVA का सार यह है कि आंकडों के समूह मे प्रसरण की कुल मात्रा को दो हिस्सों में बांटा जाता है जैसे कि मात्रा जो संयोगवश सहजगुण के कारण हो सकती है और मात्रा जो कि निर्दिष्ट घटनाओं के सहजगुण के कारण हो सकती है।'' प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण हो सकता है और प्रतिदर्श पदो के बीच भी हो सकता है। ANOVA में विश्लेषणात्मक उद्देश्यों के लिए प्रसरण विखंडन शामिल होते है। आप जानते है कि t परीक्षण का प्रयोग जहॉ दो समग्र माध्य समान होते है के परीक्षण के लिए किया जाता है जबकि ANOVA का प्रयोग विविध समगों के माध्यों के बीच समानता के परीक्षण के लिए किया जाता है। इस प्रकार, ANOVA को ज परीक्षण के विस्तार के रूप में सुविचारित किया जा सकता है।

ANOVA एक तकनीक है जिसे विभिन्न क्षेत्रों में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यह तकनीक हमें वर्णन करने में सहायता करती है कि बीजों की विभिन्न प्रजातियॉ या रासायनिक उर्वरकों या मिट्‌टीयो में अर्थपूर्ण अन्तर है जिसकी विजह से कृषि शोधों के क्षेत्र में नीति निर्णय तद्‌नुसार लिये जा सकते हैं इसी तरह, इस तकनीक के अनुप्रयोग के माध्य से, जानवर के विशेष वर्ग के लिए तैयार संभरण में अन्तर या निर्दिष्ट बिमारी के संसाधन के लिए विभिन्न प्रकार की औषधि प्रौद्योगिक में अन्तर का अध्ययन किया जा सकता है या अन्तर अर्थपूर्ण है या नहीं का निर्णय लिया जा सकात है। इसका प्रयोग व्यवसाय से सम्बन्धित नीति निर्णय क्षेत्रों में भी प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक बडे कारोबार का एक प्रबन्धक अपनी देखरेख में आने वाले विभिन्न विक्रेताओं के कार्यों के प्रदर्शन का विश्लेषण कर सकता है और उनके प्रदर्शन को अर्थपूर्ण अन्तर मे जानने के क्रम में नियंत्रित कर सकता है। इसी तरह, विभिन्न मशीनों के परिणामों के माध्य गुणों में अर्थपूर्ण अन्तर को निर्धारित किया जा सकता है। इस तरह का अध्ययन निर्धारित करेगा कि परिणामों के गुणों में एकरूपता को संचालन की मानकीकरण प्रक्रिया द्वारा बढाया जा सकता है या इसे मशीनों के मानकीकरण द्वारा बढाया जा सकता है। इस तरह से ANOVA व्यवसाय से सम्बन्धित नीति निर्णयों के लिए एक बहुत महत्वपूर्ण सांख्यिकीय तकनीक सिद्ध हो सकता है। आपको हमेशा याद रखना चाहिए कि प्रसरण का विशलेषण परीक्षण दो प्रतिदर्श प्रसरणों के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर के परीक्षण के सर्वश्रेष्ठ उद्‌देश्य के लिए अभीष्ट नहीं है, बल्कि इसका उद्‌देश्य प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर के

अर्थपूर्ण उद्देश्य के परीक्षण के लिए होता है। दो प्रसरणों के मध्य अर्थपूर्ण अन्तर के लिए इसे F परीक्षण की प्रकिया माध्यम से सम्पन्न किया जाता है, लेकिन परीक्षण को इस तरीके से प्रारूपित किया जाता है कि तुलना किये जा रहे प्रसरण भिन्न होते हैं केवल यदि संज्ञान के अन्तर्गत माध्य सभांगी नहीं होते हैं इस तरह से, F का अर्थपूर्ण मान निर्दिष्ट करता है कि माध्य एक दूसरे से अर्थपूर्ण तरीके से भिन्न है।

17.3.1 प्रसरण के श्रोत

प्रसरण का विश्लेषण उन सभी परिस्थितियों के सन्दर्भ में महत्वपूर्ण तकनीक होती है जब शोधकर्ता दो से अधिक समग्रों की तुलना करना चाहता है। विभिन्न समग्रों के मध्य अन्तर के विश्लेषण के लिए हमें निर्णय करना पडता है कि प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर केवल घटना के कारण होता है या क्या अन्तर विभिन्न समग्रों के माध्य के कारण जो लिये गये वास्तविक प्रतिदर्शों में से घटित होता है। आंकडों में दो प्रकार के प्रसरण हो सकते है। और ANOVA तकनीक आंकडों में हमें इन दो प्रकार के प्रसरण के अध्ययन में सहायता करता है। पहला ''विभिन्न प्रतिदर्शों के बीच'' और दूसरा ''प्रतिदर्श के भीतर''

यदि प्रसरण प्रतिदर्श के भीतर और प्रतिदर्श के बीच एक दूसरे से अर्थपूर्ण भिन्न नही होते हैं, तब प्रतिदर्श केवल प्रसरण के भीतर एकसमान होते हैं । यदि प्रतिदर्श के मध्य विचरण, प्रतिदर्श के भीतर विचरण से बहुत अधिक होता है, इसका अर्थ है कि प्रतिदर्श समग्र के विभिन्न प्रकार से लिये गये हैं अन्यथा प्रतिदर्शों के मध्य और प्रतिदर्शो। के भीतर कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं रहेगा। इसलिए, प्रसरण के विशलेषण में, हम प्रतिदर्शो के बीच और प्रतिदर्शों के भीतर सम्बन्ध ज्ञात करते हैं। यदि समग्रों के सभी माध्य समान होते हैं, तब प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता केवल घटना परिणाम हेागा और इसलिए प्रतिदर्शें के भीतर उत्पन्न हुए परिवर्तनशीलता के समान होगा। दूसरी ओर, यदि समग्र माध्य एक समान नहीं होते हैं, प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता प्रतिदर्शों के भीतर परिवर्तनशीलता से अधिक होगी।

परितर्वनशीलता को प्रसरण के विश्लेषण में मापने को 'माध्य वर्ग' कहा जाता है जिसकी गणना निम्नलिखित सूत्र से की जाती है।

माध्य वर्ग = माध्य से विचलनों के वर्ग का योग / स्वतन्त्रता का अंश

प्रतिदर्शों के भीतर परिवर्तनशीलता मापने के लिए, विचलनों को विशेष प्रतिदर्श माध्यों से और विचलनों के वर्ग के योग को स्वतन्त्रता के अश से विभाजित (प्रतिदर्श की संख्या को कुल प्रतिदर्श आकार से घटाकर) कर लिया जाता है जिसे प्रतिदर्शों के भीतर माध्य वर्ग कहा जाता है। यह माध्य वर्ग परिवर्तनशीलता की माप को जोकि घटना या प्रयोगात्मक त्रुटि के कारण हुई है को प्रदर्शित करता है। प्रतिदर्शों के मध्य परिवर्तनशीलता मापने के लिए प्रतिदर्श माध्य के विचलनों को सभी अवलोकनों के सर्वोच्च माध्य से लिया जाता है और विचलनों के वर्ग के योग को स्वतन्त्रता के अंश द्वारा (प्रतिदर्शों की संख्या को एक से घटाकर) विभाजित किया जाता है जिसे प्रतिदर्शों के मध्य माध्य वर्ग द्वारा जाना जाता है। यह माध्य वर्ग वर्ग प्रभाव को या प्रतिदर्शों के मध्य संभावित अंतर को प्रदर्शित करता है।

यदि सभी समग्रों का माध्य समान होता है, उनमें कोई वर्ग प्रभाव नहीं होता है और प्रतिदर्शों का माध्य वर्ग भी अकेले घटना के कारण परिवर्तनशीलता को प्रदर्शित करेगा। इसलिए, जब समग्र में प्रतिदर्श माध्य एकसमान होते है, प्रतिदर्शों के भीतर माध्य वर्ग और प्रतिदर्शों के बीच माध्य वर्ग में बहुत अधिक अंतर नहीं होना चाहिए और उनका अनुपात एक के करीब होना चाहिए। असमान्यतः बडे अनुपात इंगित करेंगे कि समग्र में प्रतिदर्श माध्य एक समान नहीं होते हैं।

17.3.2 ANOVA का औचित्य :–

ANOVA के पीछे वैचारिक औचित्य यह है कि आंकडों के समूह में प्रसरण की मात्रा की दो तरह से विशेषता हो सकती है अर्थात घटना और निर्दिष्ट कारणों से और ANOVA के प्रयोग से हम विश्लेषणात्मक उद्देश्य के लिए इस प्रसरण को विभाजित कर सकते है। ANOVA कारकों के किसी संख्या के अनुसंधान के लिए स्वीकृति देता है जो आश्रित चर के प्रभाव के लिए अनुमानित हों। ANOVA का मूलभूत नियम प्रतिदर्शों भीतर प्रसरण की मात्रा का समग्रों के माध्य अन्तर के लिए परीक्षण द्वारा जांच पडताल करना और प्रतिदर्शों के मध्य सम्बन्धित प्रसरण की मात्रा का परीक्षण करना होता है। जबकि ANOVA का प्रयोग करते हुए, हम मानते है, कि प्रत्येक प्रतिदर्श को सामान्य समग्र से लिया गया है और प्रत्येक समग्र का प्रसरण एक समान है। यह भी कल्पना की जाती है कि एक या अधिक कारको के अतिरिक्त किये जा रहे परीक्षण प्रभावशाली तरीके से नियत्रण में है।

तद्पश्चात प्रत्येक आंकडे वर्ग के लिए स्वतन्त्र यादृच्छिक प्रतिदर्शों को चयनित किया जाता है, प्रतिदर्शो के बीच प्रसरण की मात्रा और प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की मात्रा के अनुपात पर कार्य किया जाता है, इसे F अनुपात के रूप में जाना जाता है। इसे निम्नलिखित सूत्र के आकार में वर्णित किया जा सकता है।

F = प्रतिदर्शो के मध्य प्रसरण पर आधारित समग्र प्रसरण का अनुमान / प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण पर आधारित समग्र प्रसरण का अनुमान

सामान्यतया प्रतिदर्शें के मध्य प्रसरण, प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की तुलना में अधिक होगा। यदि परिस्थिति विपरीत होती है, अर्थात प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण, प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण की तुलना में कम हेाता है तो अंश एवं हर की स्थितियों को परिवर्तित करना चाहिए और तद्नुसार निष्कर्ष निकाले जाने चाहिए लेकिन यह बहुत कदाचित होग। F मान के गणना के पश्चात इसे दिये हुए अंश की स्वतन्त्रता के लिए तालिका मान के साथ तुलना की जाती है। यदि F का परिकल्पित मान तालिका मान के समान या अधिक होता है तब प्रतिदर्श माध्यों के बीच अर्थपूर्ण अंतर न होने की शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। यह याद रखा जाना चाहिए कि ANOVA परीक्षण हमेशा एक पुच्छीय परीक्षण होता है, चूँकि प्रतिदर्श आंकडों मे से F का छोटा परिकल्पित मान का अर्थ होगा कि शून्य परिकल्पना के लिए समग्र माध्य बहुत लायक है।

AVOVA परीक्षण का अनुप्रयोग कुछ अवधारणाओं पर आधारित है जो निम्न रूप में है :

- समग्र की प्रसामान्यता

- प्रसरण की समरूपता
- यादृच्छिकरण
- त्रुटि की स्वतन्त्रता

आप देख सकते है। कि ANOVA परीक्षण एवं F परीक्षण की अवधारणाऐं समान होती है। इन अवधारणाओं की पूर्ति प्रत्यक्ष रूप से इस परीक्षण की विश्वसनीयता को बढायेगी लेकिन यदि समग्र एक रूपात्मक हों और प्रतिदर्श आकर लगभग समान हों तब समग्र के प्रसामान्यता की अवधारणा का उल्लंधन परीक्षण की उपयुक्तता को प्रभावित नहीं करेगा।

17.3.3 ANOVA तकनीक

प्रसरण के विश्लेषण के माध्यम से, शोधकर्ता कारकों की किसी संख्या जिसे अनुमानित किया जाता है की छानबीन कर सकते हैं। यदि शोधकर्ता केवल एक कारक को लेता है और इसके विभिन्न वर्गों के मध्य अन्तरों की छानबीन करता है जिसके बहुत संभावित मान है, तब शोधकर्ता एकतरफा ANOVA का प्रयोग करते हैं, और उस स्थिति में जहॉ वह दो कारकों की छानबीन एक साथ करता है, तब उसके द्वारा दो तरफा ANOVA का प्रयोग होता है। अच्छे निर्णय निर्धारण के लिए दो स्वतन्त्र चरों का एक आश्रित चर को प्रभावित करने का अध्ययन किया जाता है। आंकडों के वर्गीकरण के आधार पर या कारकों की सहभागिता ANOVA तकनीक को विभिन्न वर्गों जैसे एक तरफा ANOVA , दो तरफा ANOVA, ANOVA लैटिन वर्ग प्रारूप इत्यादि में विभाजित किया जा सकता है। विभिन्न स्थितियों में विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जा सकता है जिसका सार निम्नलिखित रूप में है :

1- एक तरफा ANOVA
   1. प्रत्यक्ष विधि
   2. सरल मार्ग विधि
   3. सांकेतिक विधि

2- दो तरफा ANOVA
   1. अपुनरावृत्ति मानों के साथ
   2. पुनरावृत्ति मानों के साथ
   3. रेखांचित्रिय विधि

1. एकतरफा ANOVA :–

एकतरफा या एकल कारक ANOVA की स्थिति में, केवल एक कारक सुविचारित होता है और यह अवलोकित किया जाता है कि एकल कारक प्रतिदर्शो के भीतर परिवर्तनशीलता और प्रतिदर्शों के बीच परिवर्तनशीलता का अध्ययन महत्वपूर्ण होता है। यदि कारक के भीतर अन्तर होते है तो हमें निरीक्षण करना पडता हैं एकतरफा वर्गीकरण में, आंकडों को केवल एक मानदण्ड के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है और शून्य परिकल्पना की जाती है जिसका कथन हातो है कि समग्रों के समान्तर माध्यों का जिसमें इसके k प्रतिदर्श यादृच्छिक लिये गये थे वे एक दूसरे के बराबर हैं। इसे निम्नवत वर्णित किया जा सकता है।

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mu_k$

इस शून्य परिकल्पना के परीक्षण के लिए हम विभिन्न वैकल्पिक विधियों का प्रयोग कर सकते हैं जिनका नीचे वर्णन किया गया है।

(अ) प्रत्यक्ष विधि :– एकतरफा ANOVA परीक्षण में प्रत्यक्ष विधि के अर्न्तगत निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

- सबसे पहले, प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य परिकल्पित किया जाता है :

  $\bar{X}_1,\ \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{X}_k$ (जब k प्रतिदर्श हैं)

- तद्पश्चात प्रतिदर्श माध्यों का माध्य निम्नलिखित तरीके से परिकल्पित किया जाता है :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{n1 * \bar{X}_1 + n2 * \bar{X}_2 + n3 * \bar{X}_3 + \cdots \ldots\ldots\ldots + nk * \bar{X}_k}{n1 + n2 + n3 + \cdots \ldots\ldots nk}$$

- अगले चरण में, प्रतिदर्श माध्यों के विचलनों को प्रतिदर्श माध्यों के माध्य से परिकल्पित किया जाता है।
- तद्पश्चात इन विचलनों का वर्ग किया जाता है और समरूपी प्रतिदर्श मे इन्हें पदों की संख्या द्वारा गुणा किया जाता है और उनका संकलन प्राप्त किया जाता है इसे प्रतिदर्श के बीच प्रसरण या SS बीच के लिए वर्गों का योग कहा जाता है। इसे निम्नलिखित रूप में वर्णित किया जा सकता है।

$$\text{SS बीच} = n_1\left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + n_2\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n_k\left(\bar{X}_k - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

- तब प्रतिदर्शो के बीच प्रसरण के लिए वर्गों के योगों का प्रतिदर्शो। के बीच स्वतंत्रता के अंश द्वरा विभाजित किया जाता है जो माध्य वर्ग मध्य प्रदान करता है। लाक्षणिक रूप से ,

$$\text{MS मध्य} = \frac{SS\ Between}{(k-1)}$$

  जहॉ $(k - 1)$प्रतिदर्शो के मध्य स्वतन्त्रता का अंश ।

- अगले चरण में, SS भीतर परिकल्पित किया जाता है। इसके लिए, सभी प्रतिदर्शों के लिए समरूपी प्रतिदर्श माध्य में से प्रतिदर्श पदो के विचलन का मान परिकल्पित करते हैं, इन विचलनों का वर्ग किया जाता है और उनका संकलन प्राप्त करते हैं। इसे प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग के रूप में जाना जाता है। इसे निम्नलिखित रूप मे व्यक्त किया जा सकता है।

  $$\text{SS भीतर} = \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sum(X_{ki} - \bar{X}_k)^2$$

  with i =1,2,3……………. के साथ

- तद्पश्चात ''प्रतिदर्श के भीतर माध्य वर्ग'' की गणना प्रतिदर्श के भीतर स्वतन्त्रता के अंश के साथ प्रतिदर्श के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग द्वारा विभाजन से की जाती है।

  MS भीतर = ss भीतर / (n-k)

  जहॉ n सभी प्रतिदर्शों के कुल पदों की संख्या अर्थात $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$

  k = प्रतिदर्शों की कुल संख्या

  इस प्रकार (n-k) प्रतिदर्शों के भीतर स्वतन्त्रता के अंशों को i =1,2,3…………….

  के साथ प्रदर्शित करता है।

- अन्तिम चरण में, F अनुपात की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है।

$$\text{F-ratio} = \frac{MS\ Between}{MS\ Within}$$

तद्पश्चात F के परिकल्पित मान की तुलना F के तालिका मान के साथ निर्दिष्ट महत्व के स्तर पर दिये हुए स्वतन्त्रता के अंश के लिए किया जाता है। यदि F अनुपात का परिकल्पित मान तालिका मान से छोटा होता है तब शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है और यदि परिकल्पित मान तालिका मान से अधिक होता है तब शून्य परिकल्पना अस्वीकार होती है। इस अनुपात का प्रयोग यह निर्णय करने में किया जाता है कि क्या विविध प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर अर्थपूर्ण है या यह केवल एक प्रतिचयन अस्थिरता का विषय है।

ANOVA तकनीक का योगात्मक गुण :– कुल प्रसरण के लिए विचलन के वर्ग का योग प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्ग के योग के जोड और प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण के लिए वर्ग के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

लाक्षणिक रूप से कुल प्रसरण के लिए SS= SS माध्य + SS भीतर कुल प्रसरण के लिए वर्ग के इस योग को एक वैकल्पिक विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है इस प्रक्रिया में विचलनों के वर्गों का योग शामिल होता है जब सभी प्रतिदर्शों में एकल पदो के लिए विचलनों को प्रतिदर्श लाक्षणिक रूप से,

कुल प्रसरण के लिए $SS = \sum \left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$

i = 1,2,3,……………..

j = 1,2,3,………………

कुल प्रसरण के लिए अंश की स्वतन्त्रता = (n – 1) = (k – 1) + (n – k)

इसका अर्थ है कि कुल प्रसरण के लिए अंशों की स्तऩता सभी प्रतिदर्शों में पदों की संख्या ऋण एक के बराबर होगी। इसे प्रतिदर्शों के बीच के लिए अंश की स्वतन्त्रता का योग और प्रतिदर्शो के भीतर अंश की स्वतन्त्रता के योग द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। यही कारण ANOVA तकनीक के योगात्मक गुण का है।

एकतरफा या एकल कारक ANOVA तकनीक में शामिल विभिन्न चरणों के आधार पर, उनकी गणना निम्नलिखित प्रसरण के विश्लेषण तालिका के रूप में संक्षिप्त की जा सकती है।

एकतरफा ANOVA के लिए प्रसरण की विश्लेषण तालिका

विचरण के श्रोत	वर्गों का योग **(SS)**	अंश की स्वतन्त्रता **(d.f.)**	माध्य वर्ग **(MS)**	**F**-अनुपात
(i)प्रतिदर्शों के बीच	$n_1(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + \ldots\ldots + n_k(\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})^2$	$(k-1)$ k = प्रतिदर्शों की संख्या	$\frac{SS\ Between}{k-1}$	$\frac{MS\ Between}{MS\ Within}$
(ii) प्रतिदर्शों के भीतर	$\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \ldots\ldots + \sum(X_{ki} - \bar{X}_k)^2$ i =1,2,3……………. के साथ	$(n-k)$ n = कुल पदों की संख्या	$\frac{SS\ Within}{(n-k)}$	
(iii) कुल	$\sum(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$ i = 1,2,3,…………….. j = 1,2,3,………………	$(n-1)$		

उदाहरण 3 :– एक शहर के कोनवेन्ट स्कूलों के मध्य किसी परीक्षा में प्रदर्शन के सम्भव विचरण के महत्व के आंकलन में एक सार्वजनिक परीक्षा चार स्कूलों से सम्बन्धित प्रत्येक अपर पांचवीं कक्षा से यादृच्छिक रूप से लिए गये छात्रों को दिलाई गयी थी। परिणाम नीचे दिये गये हैं। आंकडों के प्रसरण के विश्लेषण का सृजन करें।

	स्कूल		
A	*B*	*C*	*D*
8	12	18	13
10	11	12	9
12	9	16	12
8	14	6	16
7	4	8	15

हल :– हम शून्य परिकल्पना लेते है। कि $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य

$$\bar{X}_1 = \frac{8+10+12+8+7}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\bar{X}_2 = \frac{12+11+9+14+4}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{X}_3 = \frac{18+12+16+6+8}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\bar{X}_4 = \frac{13+9+12+16+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

प्रतिदर्श माध्यों का माध्य

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4}{k}$$

$$= \frac{9+10+12+13}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

SS मध्य

$$\text{SS Between} = n_1(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + n_2(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + n_3(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}})^2 + n_4(\bar{X}_4 - \bar{\bar{X}})^2$$

$$= 5(9-11)^2 + 5(10-11)^2 + 5(12-11)^2 + 5(13-11)^2$$

$$= 20 + 5 + 5 + 20$$

$$= 50$$

MS मध्य

$$\text{MS between} = \frac{SS\ Between}{(k-1)}$$

$$= \frac{50}{4-1} = 16.7$$ (there are 4 samples)

SS भीतर

$$\text{SS भीतर} = \sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 + \sum(X_{3i} - \bar{X}_3)^2 + \sum(X_{4i} - \bar{X}_4)^2$$

$$= \{(8-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2 + (8-9)^2 + (7-9)^2\}$$
$$+ \{(12-10)^2 + (11-10)^2 + (9-10)^2 + (14-10)^2 + (4-10)^2\}$$
$$+ \{(18-12)^2 + (12-12)^2 + (16-12)^2 + (6-12)^2 + (8-12)^2\}$$
$$+ \{(13-13)^2 + (9-13)^2 + (12-13)^2 + (16-13)^2 + (15-13)^2\}$$

$$= \{1+1+9+1+4\} + \{4+1+1+16+36\} + \{36+0+16+36+16\} + \{0+16+1+9+4\}$$

$$= 16 + 58 + 104 + 30 = 208$$

MS भीतर

$$\text{MS Within} = \frac{SS\ Within}{(n-k)}$$

$$= \frac{208}{20-4} = \frac{208}{16} = 13$$

F-अनुपात

$$\text{F- अनुपात} = \frac{MS\ Between}{MS\ Within}$$

$$= \frac{16.7}{13} = 1.285$$

उपरोक्त वर्णित गणनाओं को निम्नलिखित तालिका के रूप में संक्षिप्त किया जा सकता है :–

विचरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F- अनुपात	5% F-सीमा
मध्य प्रतिदर्श भीतर प्रतिदर्श	50 208	4 – 1= 3 20 – 4 = 16	16.7 13	1.285	F(3,16) 3.24
कुल	258				

F (1.285) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.24) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकार होती है और हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रतिदर्श समान समग्रों से लिये गये हैं।

(ब) सरल मार्ग विधि :– उपरोक्त वर्णित ANOVA के एकतरफा तकनीक की प्रत्यक्ष विधि बहुत विस्तृत और अधिक समय लेने वाली होती है। प्रत्यक्ष विधि के स्थान पर, सरल मार्ग विधि को एकतरफा ANOVA से सम्बन्धित समस्याओं के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है और हम समान परिणाम प्राप्त करेंगे। वास्तव में, सरल मार्ग विधि प्रत्यक्ष विधि की तुलना में अधिक लोकप्रिय है और सामान्यतया इसे एकतरफा ANOVA के अभ्यास के लए प्रयोग किया जाता है क्योकि यह कम समय लेने वाली, आसान और यह विशेष रूप से संगणनात्मक कार्य को कम करता है। सरल मार्ग विधि में निम्नलिखित चरण शामिल होत हैं :

- सबसे पहले, सभी प्रतिदर्शों में एकल पदों का योग ज्ञात किया जाता है और इसे 'T' के रूप में जाना जाता है। लाक्षणिक रूप से,

  $T = \sum X_{ij}$ जहॉ $i = 1,2,3\ldots\ldots$

  $j = 1,2,3,\ldots..$

- तद्पश्चात ''संशोधन कारक'' के अर्न्तगत कार्य करते हैं ' संशोधन कारक = $\frac{(T)^2}{n}$

- अगले चरण में, कुल विचरण के वर्गों के योग के लिए हम सभी पद मानों के वर्ग द्वारा और इसका योग लेते हुए और संशोधन कारक को इसमें से घटाते हैं।

  योग $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

- तब हम प्रतिदर्शों के बीच प्रसरण के लिए वर्गों का योग ज्ञात करते हैं। इस मान को प्राप्त करने के लिए, प्रत्येक प्रतिदर्श वर्ग $(T_j)^2$ के वर्ग को प्रतिदर्श में सम्बन्धित पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है, उनका संकलन ज्ञात किया जाता है और संशोधन कारक को इस संकलन से घटाया जाता है।

  $SS_{\text{मध्य}} = \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$ जहॉ $j = 1,2,3,\ldots\ldots$

- अगले चरण में, प्रतिदर्शों के बीच के लिए वर्ग के योग को कुल प्रसरण के लिए वर्गों के योग में घटाया जाता है और परिणामित मान प्रतिदर्शों के भीतर के लिए वर्गो के योग को निर्दिष्ट करता है। लाक्षणिक रूप से,

$$SS \text{ भीतर} = \left\{\sum X_{ij}^2 - \frac{(T)^2}{n}\right\} - \left\{\sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}\right\}$$

$$= \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$$

तद्पश्चात एक प्रत्यक्ष विधि के प्रयोग के लिए समान तरीके से ANOVA तालिका को निर्मित किया जाता है।

उदाहरण :– 4 तीन प्रजातियों के गेहूॅं 4 भूखंडों में विकास के लिए, प्रसरण के विश्लेषण को स्थापित करें इसके लिए प्रति उत्पादन आंकडा निम्नवत दिया है और कथन की पुष्टि करें कि प्रजातियों में अंतर महत्वपूर्ण है ।

प्रति एकड उत्पादन आंकडा

जमीन का भूखंड		**गेहूॅं की प्रजाति**	
	A	B	C
1	6	5	5
2	7	5	4
3	3	3	3
4	8	7	4

हल :–

हम इस समस्या को सरल मार्ग विधि द्वारा हल करेंगें

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

मान लें कि गेहूॅं की तीन प्रजातियों में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है, शून्य परिकल्पना है।

$T = \sum X_{ij}$

$= 6+7+3+8+5+5+3+7+5+4+3+4 = 60$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(60)^2}{12} = 300$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (7)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (4)^2 - \frac{(60)^2}{12}$

$= 332 - 300 = 32$

$SS \text{ मध्य} = \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$$= \frac{(24)^2}{4} + \frac{(20)^2}{4} + \frac{(16)^2}{4} - \frac{(60)^2}{12}$$

$$= 144 + 100 + 64 - 300 = 308 - 300 = 8$$

$$\text{SS भीतर} = \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$$

$$= 332 - 308 = 24$$

ANOVA तालिका निम्नवत है :

प्रसरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F-ratio	5% F-सीमा
प्रतिदर्श के बीच	8	3 – 1= 2	$\frac{8}{2} = 4.00$	$\frac{4.00}{2.67} = 1.5$	F (2,9) = 4.26
प्रतिदर्श के भीतर	24	12 – 3 = 9	$\frac{24}{9} = 2.67$		
योग	32				

F(1.5) का परिकल्पित मान तालिका मान (4.26) से कम है, इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकृत होती है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि गेहूॅं की पैदावार में अन्तर प्रजातियों की वजह से अर्थपूर्ण नहीं है और यह केवल घटना के तरीके से हुआ है।

(स) सांकेतिक विधि :– कभी कभी हमें बडे मानों के साथ समझौता करना पडता है। यह गणना की प्रक्रिया को बहुत जटिल बनाता है। इन स्थितियों में, हम सांकेतिक विधि की सहायता ले सकते है। यह एक सरल मार्ग विधि का विस्तार है। इस प्रकार, सांकेतिक विधि का प्रयोग समस्याओं के सरलीकरण के लिये किया जाता है जिसमें बडे मान शामिल होते हैं। बीजांक एक स्थायी द्वारा जोड, घटाना, गुणा या भाग का उल्लेख करता है। यदि सभी n पदों को एक सार्वाजनिक कारक जिसे स्थायी कहा जाता है द्वारा या तो गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है या एक अपरिवर्तनशील को प्रत्येक n पदों में जोडा या घटाया जाता है, तब भी F अनुपात का मान प्रभावित नहीं होता है। इसका अर्थ है कि वास्तविक माप की गणना को परिणामों के अनुगामी सामजस्यों के आवश्यकता बिना सरलीकरण किया जा सकता है। एक बार दिये हुए मान कुछ सार्वजनिक मान के साथ परिवर्तित किये जाते हैं, तब सरल मार्ग विधि के सभी चरणों को F अनुपात को ज्ञात और व्याख्या करने के लिए अंगीकृत किया जा सकता है।

उदाहरण 5:– 5 मोटर कार टायरों के यादृच्छिक प्रतिदर्शों को तीन कम्पनीयों द्वारा निर्मित प्रत्येक के 3 ब्रान्डों से लिया गया है। इन टायरों (मीलवार दौड द्वारा मापने के रूप में) नीचे दिखाया गया है। आंकडों के आधार पर, परीक्षण करें कि 3 ब्रान्ड के टायरों का औसत जीवनकाल समान है या नहीं।

टायरों का जीवनकाल ('000 मील)

ब्रान्ड

A	B	C
35	32	34
34	32	33
34	31	32
33	28	32
34	29	33

हल : $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

शून्य परिकल्पना मानते है कि तीन ब्रान्ड के टायरों के मध्य कोई अन्तर नहीं है। गणनाओं के सरलीकरण के कम में, प्रत्येक अवलोकन को 30 द्वारा कम किया जाता है।

बीजांक आंकडा है :–

A	B	C
5	2	4
4	2	3
4	1	2
3	–2	2
4	–1	3

$T = \sum X_{ij}$

$= 5 + 4 + 4 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 - 2 - 1 + 4 + 3 + 2 + 2 + 3 = 36$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(36)^2}{15} = 86.4$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$=(5)^2+(4)^2+(4)^2+(3)^2+(4)^2+(2)^2+(2)^2+(1)^2+(-2)^2+(-1)^2+(4)^2+(3)^2+(2)^2+(2)^2+(3)^2-86.4$

$= 138 - 86.4 = 51.6$

SS मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \frac{(20)^2}{5} + \frac{(2)^2}{5} + \frac{(14)^2}{5} - 86.4$

$= 80 + 0.8 + 39.2 - 86.4$

$= 120 - 86.4 = 33.6$

SS भीतर $= \sum X_{ij}^2 - \sum \frac{(T_j)^2}{n_j}$

$= 138 - 120 = 18$

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

प्रसरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F-ratio	5% F-सीमा
मध्य प्रतिदर्श	33.6	3 – 1= 2	$\frac{33.6}{2}$ = 16.8	$\frac{16.8}{1.5}$ = 11.2	F (2,12) = 3.89
भीतर प्रतिदर्श	18.0	15– 3 = 12	$\frac{18}{12}$ = 1.5		
योग	51.6				

F(11.2) का परिकल्पित मान तालिका मान (3.89) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार है और हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि टायरों के 3 ब्राण्डों का औसत जीवनकाल एकसमान नहीं है।

2. दो तरफा ANOVA

एकतरफा ANOVA में आपको ध्यान देना चाहिए कि एकल कारक के विभिन्न स्तरों के निरूपण संगठन जो कि प्रयोग में नियंत्रित रहता है। लेकिन वास्तविक जीवन स्थितियों में, एक शोधकर्ता एक ही समय में एक से अधिक कारकों के प्रभाव को जानने में रूचि रख सकते हैं या हम बहुत सी उन स्थितियों का सामना कर सकते हैं जिसमें रूचि का प्रतिक्रिया चर एक से अधिक कारकों द्वारा प्रभावित हो सकता है। उदाहरण के लिए, कृषि सम्बन्धी परिणाम उर्वरक के प्रकार एवं बीज की प्रजाति द्वारा प्रभावित किया जा सकता है, उत्पादन को मशीनों की विभिन्न प्रजातियों एवं मजदूरों के विभिन्न वर्गो द्वारा प्रभावित किया जा सकता है, उत्पाद विक्री को विज्ञापन स्तरें एवं कीमत स्तरों द्वारा प्रभावित किया जा सकता है। इन स्थितियों में, हम दो तरफा ANOVA का प्रयोग करेगें। इस प्रकार, दो तरफा ANOVA तकनीक प्रयोग की जाती है जब आंकडों का वर्गीकरण दो कारकों के आधार पर होता है। हम परीक्षण की रचना इस तरीके से कर सकते है। कि एक ही समय में दो कारकों के प्रभाव का परीक्षण प्रसरण के विश्लेषण से किया जा सके। दो तरफा ANOVA के साथ, एक ही समय, एक से आंकडे के साथ हम परिकल्पना के दो समूहों का परीक्षण कर सकते हैं। इस तकनीक का सबसे बडा लाभ यह है कि यह शोधकर्ता को कारकों के मध्य पारस्परिक प्रभाव के निरीक्षण के लिए समर्थ बनाता है। दो तरफा प्रारूप के प्रत्येक कारक में पुनरावृत्ति मापें हो सकती है या पुनरावृत्ति मापें नहीं हो सकती है।

(अ) अपुनरावृत्ति मानों के साथ :– दो तरफा वर्गीकरण में प्रसरण के विश्लेषण के लिए प्रक्रिया एकतरफा वर्गीकरण की स्थिति से थोडी सी भिन्न होती है। जब हमारे पास पुनरावृत्ति मान नहीं होते हैं, प्रतिदर्शों के भीतर वर्गों के योगों की गणना सीधे नहीं की जा सकती हैं इस अवशेष या विचरण त्रुटि की गणना एक निरूपण के मध्य प्रजातियों के प्रसरण के लिए वर्गों के योग द्वारा एवं दूसरे निरूपण के मध्य प्रजातियों के प्रसरण के लिए वर्गों के योग को कुल प्रसरण के लिए वर्गों के योग में से घटाकर की जाती है। संगणना प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं :–

- जब दोतरफा AVOVA की गणना करते हैं, यदि मान जटिल होते हैं, तब बीजांक प्रारम्भ में किया जा सकता है और तद्पश्चात अगले चरणों का अनुसरण करते हैं।
- सभी प्रतिदर्शो में एकल पदो के मानों या बीजांक मानों का योग किया जाता है और इस संगकलन को T के रूप में जाना जाता है। सांकेतिक रूप में,

  $T = \sum X_{ij}$
- तद्पश्चात निम्नलिखित तरीके से संशोधनकारक ज्ञात किया जाता है

  संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n}$
- अगले चरण में संशोधन कारक को एकल पदो के वर्गों के योग मे से घटाया जाता है और परिणामी मान कुल प्रसरण के लिए वर्गों के विचलनों का कुल योग होता है।

  सांकेतिक रूप में,

  कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$
- अब स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए हमें विचलनों के वर्गो का योग ज्ञात करना पडता है। इस मान की गणना के लिए ,विभिन्न स्तम्भों का योग किया जाता है और प्रत्येक स्तम्भ के योग के वर्ग को सम्बन्धित स्तम्भ में पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है और इन मानों को संकलित किया जाता है और तद्प्श्चात इस संकलन में से संशोधन कारक को घटाया जाता है, सांकेतिक रूप में,

  स्तम्भों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$
- अब स्तरम्भों के मध्य प्रसरण के लिए हमकें विचलनों के वर्गों का योग ज्ञात करना पडता है। इस मान की गणना के लिए, विभिन्न स्तम्भों का योग किया जाता है और प्रत्येक स्तम्भ के योग के वर्ग को सम्बन्धित स्तम्भ में पदों की संख्या द्वारा विभाजित किया जाता है और इन मानों को संकलित किया जाता है और तद्पश्चात इस संकलन में से संशोधन कारक को घटाया जाता है सांकेतिक रूप में,

  स्तम्भों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$
- स्तम्भों के मध्य गणना के पश्चात हमें पंक्तियों के मध्य SS की गणना करनी पडती है। पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग की गणना कुल पंक्ति के वर्ग के योग को सम्बन्धित पंक्ति में पदों की संख्या द्वारा विभाजन में से संशोधन कारक को घटाकर की जाती है। सांकेतिक रूप से

  पंक्तियों के मध्य $SS = \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

- अगले चरण में, स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों का योग और पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों का योग को कुल प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग मे से घटाकर किया जाता है और परिणामी मान अवशेष या त्रुटि प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गों के योग को दर्शाता है। इसे निम्नवत वर्णित किया जा सकता है :–

  अवशेष ss = कुल ss –(स्तम्भों के मध्य ss = पंक्तियों के मध्य ss)

- F अनुपात के मान को प्राप्त करने के लिए, हमें भिन्न वर्गों के योग के लिए अंशों की स्वतन्त्रता ज्ञात होनी चाहिए जिसके लिए निम्न के अन्तर्गत कार्य करना पड सकता है :–

  कुल प्रसरण के लिए $d.f. = (c \cdot r - 1)$

  स्तम्भों के मध्य प्रसरण के लिए $d.f. = (c - 1)$

  पंक्तियों के मध्य प्रसरण के लिए $d.f. = (r - 1)$

  अवशेष प्रसरण के लिए $d.f. = (c - 1)\,(r - 1)$

  जहॉ c = स्तम्भों की संख्या r = पंक्तियों की संख्या

- तब एक दो तरफा AVOVA तालिका निम्नलिखित तरीके से निर्मित की जाती है :–

दो तरफा AVOVA के लिए प्रसरण के विश्लेषण की तालिका

विचरण के श्रोत	वर्गों का योग (SS)	स्वतंत्रता का अंश ($d.f.$)	माध्य वर्ग (MS)	F-अनुपात
स्तम्भों के मध्य	$\sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$	(c – 1)	$\frac{\text{SS between Columns}}{(c-1)}$	$\frac{\text{MS between columns}}{(\text{MS residual})}$
पंक्तियों के मध्य	$\sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$	(r – 1)	$\frac{\text{SS between rows}}{(r-1)}$	$\frac{MS\ between\ rows}{(MS\ residual)}$
अवशेष या त्रुटि	कुल SS – (स्तम्भों के मध्य SS + पंक्तियों के मध्य SS)	(c–1)(r–1)	$\frac{\text{SS residual}}{(c-1)(r-1)}$	
कुल	$\sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$	(c.r – 1)		

आपकों यह स्पष्ट होना चाहिए कि अपुनरावृत्ति मानों के साथ दो तरफा ANOVA में अवशेष प्रसरण का आधार F अनुपात होता है। अवशेष प्रसरण के घटित होने के लिए

कारण प्रतिचयन की अस्थिरता होती है। महत्व के निर्दिष्ट स्तर पर दिये हुए अंश की स्वतन्त्रता के लिए दोनों F अनुपातों की तुलना उनके समरूपी तालिका मानों के साथ की जाती है। F के आधार पर शून्य परिकल्पनाओं के लिए स्वीकृत एवं अस्वीकृत मानदण्ड समान रहते हैं।

उदाहरण 6:– निम्नलिखित आंकडे इकाईयों की संख्या के प्रतिदिन उत्पादन को प्रदर्शित करते है। जो 3 भिन्न मजदूरों द्वारा 4 भिन्न प्रकार की मशीनों से निकले है। नीचे दिये हुए आंकडों में दो तरफा ANOVA को प्रदर्शित करें।

मजदूर	**मशीन के प्रकार**			
	A	***B***	***C***	***D***
I	38	40	41	39
II	45	42	49	36
III	40	38	42	42

(सांकेतिक विधि का प्रयोग दिये हुए संख्याओं को 40 से घटाकर करें)

हलः हम शून्य परिकल्पना लेते है कि उत्पादकता माध्य में मशीन प्रकार एवं विभिन्न मजदूरों के सन्दर्भ में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है। प्रत्येक मान को 40 में से घटाकर कर, हम प्राप्त करते हैं :–

मजदूर	**मशीन प्रकार**				**कुल**
	A	B	C	D	
I	–2	0	+1	–1	–2
II	+5	+2	+9	–4	+12
III	0	–2	+2	+2	+2
कुल	***+3***	***0***	***+12***	***–3***	***+12***

उपरोक्त तालिका से 'T' स्पष्ट है कि या $\sum X_{ij} = 12$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(12)^2}{12} = 12$

कुल SS $= \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (-2)^2 + (5)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (1)^2 + (9)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + (2)^2 - 12$

$= 4 + 25 + 0 + 0 + 4 + 4 + 1 + 81 + 4 + 1 + 16 + 4 - 12 = 144 - 12 = 132$

मशीनों के मध्य वर्गों का योग $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \frac{(3)^2}{3} + \frac{(0)^2}{3} + \frac{(12)^2}{3} + \frac{(-3)^2}{3} - 12$

$= 3 + 0 + 48 + 3 - 12 = 42$

मजदूरों के मध्य वर्गों का योग $= \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

$$= \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(12)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - 12$$
$$= 1 + 36 + 1 - 12 = 26$$

SS अवशेष = कुल SS – (मशीनों के मध्य SS + मजदूरों के मध्य SS)

= 132 – (42 + 26) = 132 – 68 = 64

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

विचरण के श्रोत	SS	d.f.	MS	F-अनुपात	5% F-सीमा
मशीनों के मध्य मजदूरों के मध्य अवशेष	42 26 64	4– 1= 3 3– 1 =2 (4 –1)(3–1) =6	$\frac{42}{3} = 14$ $\frac{26}{2} = 13$ $\frac{64}{6} = 10.67$	$\frac{14}{10.67} = 1.31$ $\frac{13}{10.67} = 1.22$	F (3,6) = 4.76 F(2,6) = 5.14
कुल	132	(4×3 – 1) =11			

चूँकि F अनुपातों (1.31,1.22) दोनों परिकल्पित मान उनके तालिका मानों (4.76, 5.14) से कम है इसलिए, दोनों शून्य परिकल्पनाऐं स्वीकार है और हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उत्पादकता माध्यों मे मशीन प्रकार के साथ साथ मजदूरों के सन्दर्भ में कोई अर्थपूर्ण अन्तर नहीं है।

(ब) पुनरावृत्ति मानों के साथ :– कदाचित हमें दो तरफा प्रारूप की कुछ स्थितियों मे सामना करना पढ सकता है जहॉ सभी वर्गों के लिए पुनरावृत्ति मापें होती है। दो तरफा प्ररूप के अपुनरावृत्ति मानों के साथ और दो तरफा पुनरावृत्ति मानों की संगणना प्रक्रिया मे केवल एक अन्तर होता है । कुल SS स्तम्भों के मध्य SS और पंक्तियों के मध्य SS की गणना समान तरीके से की जाती है। पुनरावृत्ति मानों की स्थिति में, हमें अन्योन्यक्रिया विचरण की गणना करनी पडती है। दो तरफा विश्लेषण में अन्योन्यकिया का तात्पर्य यह है कि दो निरूपण तन्त्र नहीं है और एक कारक का विशेष निरूपण का प्रभाव दूसरे कारक के स्तर पर आश्रित रहता है और विपरीत क्रम में प्रतिदर्शों के भीतर प्रसरण के लिए वर्गों के योग की गणना एक तरफा ANOVA की स्थिति के रूप में समान तरीके से की जाती है। अन्योन्य किग्रा विचरण की गणना शेष बचे वर्गो के योग के पर एवं बचे शेष स्वतन्त्रता के अंशों के आधार पर की जाती है।

एक अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया प्रभाव इंगित करता है कि एक कारक के लिए निरूपण का प्रभाव दूसरे कारक द्वारा दृढता से प्रभावित हुआ है।

ANOVA तालिका को सामान्य तरीके से तैयार किया जाता है।

उदाहरण 7 :– क्या अन्योन्यक्रिया विचरण निम्नलिखित सूचना सम्बन्धित मील संख्या आधारित विभिन्न ब्रान्डों की गैसोलीन एवं कारों की स्थिति में अर्थपूर्ण है :–

	गैसोलीन के ब्रान्ड		
कार	***X***	***Y***	***Z***
A	12	10	9
	12	9	11
B	12	7	10
	11	8	11
C	10	11	8
	11	11	7

हल :– H_0 कारों एवं गैसोलीन ब्रान्डों के मध्य कोई अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया नहीं है।

$T = \sum X_{ij}$

$= (12 + 12 + 10 + 9 + 9 + 11) + (12 + 11 + 7 + 8 + 10 + 11) + (10 + 11 + 11 + 11 + 8 + 7)$

$= 63 + 59 + 58 = 180$

संशोधन कारक $= \frac{(T)^2}{n} = \frac{(180)^2}{18} = 1800$

कुल $SS = \sum X^2_{ij} - \frac{(T)^2}{n}$

$= (12)^2 + (12)^2 + (10)^2 + (9)^2 + (9)^2 + (11)^2 + (12)^2 + (11)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (10)^2 + (11)^2 + (10)^2 + (11)^2 + (11)^2 + (11)^2 + (8)^2 + (7)^2 - 1800$

$= 1846 - 1800 = 46$

SS स्तम्भों के मध्य $= \sum \frac{(T_j)^2}{n_j} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \left\{\left(\frac{68 \times 68}{6}\right) + \left(\frac{56 \times 56}{6}\right) + \left(\frac{56 \times 56}{6}\right)\right\} - 1800$

$= 770.67 + 522.67 + 522.67 - 1800 = 1816.01 - 1800 = 16.01$

SS पंक्तियों के मध्य $= \sum \frac{(T_i)^2}{n_i} - \frac{(T)^2}{n}$

$= \left\{\left(\frac{63 \times 63}{6}\right) + \left(\frac{59 \times 59}{6}\right) + \left(\frac{58 \times 58}{6}\right)\right\} - 1800$

$= 661.5 + 580.17 + 560.67 - 1800 = 1802.34 - 1800 = 2.34$

प्रतिदर्शो के भीतर SS की गणना वर्ग के भीतर इसके माध्य के साथ प्रत्येक पद द्वारा घटाकर करते हैं।

[उदाहरण के लिए A & X → (12 +12)/2 = 12; A & Y→(10 + 9)/2 = 9.5 और इसी प्रकार]

SS भीतर =

$$(12-12)^2 + (12-12)^2 + (12-11.5)^2 + (11-11.5)^2+(10-10.5)^2+(11-10.5)^2 + (10-9.5)^2 + (9-9.5)^2 + (7-7.5)^2 + (8-7.5)^2+(11-11)^2+(11-11)^2+(9-10)^2+(11-10)^2 + (10-10.5)^2 + (11-10.5)^2 + (8-7.5)^2 + (7-7.5)^2$$

$$= 0 + 0 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 +0.25 +0.25 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0.25 + 0.25 +0.25 +0.25 = 5$$

SS अन्योन्यक्रिया = कुल SS – (SS स्तम्भ + SS पंक्ति + SS भीतर)

$$= 46 - (16.01 + 2.34 + 5) = 46 - 23.35 = 22.65$$

ANOVA तालिका निम्नवत है :–

विचरण के श्रोत	**SS**	**d.f.**	**MS**	**F-**अनुपात	**5% F-**सीमा
स्तम्भों के मध्य	16.01	3– 1= 2	$\frac{16.01}{2} = 8$	$\frac{8}{0.56} = 14.28$	F (2,9) = 4.26
पंक्तियों के मध्य	2.34	3– 1 =2	$\frac{2.34}{2} = 1.17$	$\frac{1.17}{0.56} = 2.09$	F (2,9) = 4.26
प्रतिदर्श के भीतर	5.00	18 – 9 = 9	$\frac{5}{9} = 0.56$		
अन्योन्यक्रिया	22.65	17–(2+2+9) =4	$\frac{22.65}{4} = 5.66$	$\frac{5.66}{0.56} = 10.1$	F(4,9) = 3.63
कुल	46	18-1=17			

अन्योन्यक्रिया (10.1) के लिए F अनुपात का परिकल्पित मान इसके तालिका मान (3.63) से अधिक है, इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार्य है। इसका अभिप्राय है कि कारों एवं गैसोलीन के ब्रान्डों के मध्य अर्थपूर्ण अन्योन्यक्रिया है, इसलिए स्तम्भ प्रभाव एवं पंक्ति प्रभाव के परिणामों का कोई उपयोग नहीं हैं।

(स) रेखाचित्रीय विधि :– यदि आपको दो तरफा ANOVA के पुनरावृत्ति मानों के साथ आवश्यक समस्याओं के साथ व्यवहार करन पडता है, तब आपके पास रेखाचित्रीय विधि का भी विकल्प होता है। इस प्रकार, दो तरफा प्रारूप में , रेखाचित्रीय विधि विभिन्न कारकों के मध्य अन्योन्यक्रिया का भी अध्ययन किया जा सकता है। रेखाचित्रीय विधि में, एक कारक को x अक्ष में रेखांकित और दूसरे कारक को y अक्ष में रेखांकित किया जाता है। सभी प्रतिदर्शों के लिए माध्यों को बिदुरेख में

रेखांकित किया जाता है और पृथक रेखाओं द्वारा तर्कसंगत किया जाता है। यदि प्रत्येक प्रतिदर्श पदों को जोडने वाली रेखाऐं एक दूसरे के विरूद्ध नहीं होती हे, तब इसका सूचक अन्योन्यक्रिया का नहीं हाता है, जबकि रेखाऐं एक दूसरे विपरीत (विरूद्ध) होती है इसका अभिप्राय कारकों के मध्य एक अन्योन्यक्रिया का होना है। प्रत्येक प्रतिदर्श पदों से सम्बन्धित रेखाओं के रेखाचित्रीय निरूपण अन्योन्यक्रिया के प्रकार के बारे में इंगित करता है। उदाहरण के लिए, अन्योन्यक्रिया क्रमवाचक प्रकार की हो सकती है जहॉ एक कारक से सम्बन्धित प्रभाव का श्रेणी क्रम एक समान रहता है। दूसरे कारक के परिवर्तन से सम्बन्धित प्रभावों का श्रेणी क्रम हो तो अन्योन्यक्रिया क्रमवार प्रकार की नहीं हेागी। यह गैर क्रमवार अन्योन्यक्रिया गैर विपरीत शेष या विपरीत शेष प्रकार की हो सकती है।

17.4 सारांश

इस इकाई में, आपने F अनुपात और ANOVA के बारे मे अध्ययन किया। F परीक्षण दो प्रसरणों के अनुपात पर आधारित हेाता है। इसका प्रयोग यह निर्धारण करने में किया जाता है कि क्या दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों को समान प्रसरण के सामान्य समग्रों से लिया गया है। F परीक्षण सामान्य स्थिति, समरूपता, यादृच्छिकता, त्रुटि की स्वतन्त्रता की अवधारणा पर आधारित होता है। ANOVA कारणों के वर्ग की वजह से विचरण के पृथककरण में से दूसरे वर्गो की वजह से विचरण की एक सांख्यिकीय तकनीक के लिए हैं विशेष रूप से इसे उस परीक्षण के लिए प्रारूपित किया जाता है जहॉ दो से अधिक मात्रात्मक (परिमाणात्मक) समग्रों के माध्य समान होते हैं। यदि आंकडे को केवल एक कारक के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है तब एक तरफा ANOVA प्रयोग होता है जबकि यदि आंकडे को दो करकों के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है तब दो तरफा ANOVA प्रयुक्त होता है। एक तरफा ANOVA में, F अनुपात की गणना माध्य वर्ग के माध्य और माध्य वर्ग के भीतर अनुपात के रूप में की जाती है। शून्य परिकल्पना की स्वीकार्यता और अस्वीकारिता के सम्बन्ध मे निर्णय F के परिकल्पित एक तालिका मान की तुलना के आधार पर लिया जाता है। दो तरफा ANOVA में एक साथ एक कारक से अधिक के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। अपुनरावृत्ति मानों की दशा में, दो F अनुपातों की गणना की जाती है। पहली स्तम्भों के मध्य और दूसरी पंक्तियों के मध्य पुनरावृत्ति मानों की दशा में, उपरोक्त वर्णित दो F अनुपातों के अतिरिक्त, दूसरा F अनुपात भी अन्योन्यक्रिया विचरण की गणना के लिए लिया जाता है।

एकतरफा और दो तरफा ANOVA के लिए स्वीकृत और अस्वीकृत मानदण्ड एक समान रहते हैं। जटिल आंकडों की दशा में, आंकडों के सरलीकरण के लिए सांकेति विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

17.5 शब्दावली

- AVOVA : प्रसारण का विश्लेषण ।
- SS : प्रसरण के लिए विचलनों के वर्गो का योग ।
- MS : औसत (माध्य) वर्ग।

- **अन्योन्यक्रिया प्रभाव** : एक कारक दूसरे कारक के लिए उपचार का प्रभाव ।

17.6 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. ''प्रसरण'' शब्द सबसे पहले सांख्यिकीविद् ————————द्वारा प्रयोग किया गया था।
2. ANOVA तकनीक प्रारम्भ में ———————अनुसंधान में प्रयोग की गई थी।
3. प्रतिदर्श के भीतर माध्य वर्ग गणना के लिए स्वतन्त्रता के अंश में सम्मिलित ——————घटाने पर ———————।
4. ————————विधि ANOVA तकनीक में गणनात्मक कार्य सरलीकरण के लिए प्रयोग होती है।
5. आलेखी विधि के अन्तर्गत ———————कारकों के मध्य रेखाओं को पार करने द्वारा इंगित किया जाता है।

(ब) सत्य या असत्य

1. F- परीक्षण के अनुप्रयोग के लिए वर्गों की समरूपता एक आवश्यक अवधारणा होती है। (सत्य/असत्य)
2. F- परीक्षण दो मानक विचलनों के अनुपात पर आधारित है। (सत्य/असत्य)
3. प्रसरण के विश्लेषण परीक्षण का उद्देश्य दो प्रतिदर्श प्रसरणों के मध्य अन्तर के महत्व का परीक्षण करना होता है। (सत्य/असत्य)
4. द्विमार्गी ANOVA पुनरावृत्ति मानों के साथ न होने पर की स्थिति में अन्योन्यक्रिया चिरण की मणना की जाती है। (सत्य/असत्य)
5. $(n-k)$ अवशेष प्रसारण के लिए स्वतन्त्रता के अंश को इंगित करता है। (सत्य/असत्य)

17.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ)

1. आर0ए0 फिशर 2. भूमि विषयक 3. कुल प्रतिदर्श आकार प्रतिदर्शों की संख्या
4. सांकेतिक शब्दों में बदलना 5. अन्योन्यक्रिया

(ब)

1. सत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. असत्य

17.8 स्वपरख प्रश्न

1. F- परीक्षण का उद्देश्य क्या होता है ?
2. शब्द माध्य वर्ग को परिभाषित करें ?
3. संशोधन कारक का सूत्र लिखें ?
4. F- परीक्षण की अवधारणाऐं एवं तकनीक का वर्णन करें ?
5. प्रसरण के विश्लेषण का अर्थ समझाइयें। द्विमार्गी वर्गीकरण के लिए ANOVA की तकनीक का संक्षेप में वर्णन करें ?
6. दो यादृच्छिक प्रतिदर्शों को दो सामान्य समग्रों में से लिया गया है :

प्रतिदर्श 1	75	68	65	70	84	66	55
प्रतिदर्श 2	42	44	56	52	46		

5 प्रतिशत महत्व के स्तर में प्रसरण अनुपात का प्रयोग करते हुए परीक्षण करें कि दो समग्रों में समान प्रसरण है। ($F = 2.37, H_0$: स्वीकार्य)

7. 8 अवलोकनों के एक प्रतिदर्श में, माध्य में से पदो के विचलनों के वर्गों का 84.4 था। 10 अवलोकनों के एक दूसरे प्रतिदर्श में ये मान 102.6 पाया गया था। 5 प्रतिशत स्तर पर परीक्षण करें कि अन्तर महत्वपूर्ण है। आपको 5 प्रतिशत का स्तर दिया गया है, $v_1 = 7$ एवं $v_2 = 9$ स्वतन्त्रता की श्रेणीयों के लिए F का समीक्षात्मक मान 3.29 है और $v_1 = 8$ एवं $v_2 = 10$ स्वतन्त्रता श्रेणीयों के लिए यह मान 3.07 है। ($F = 1.06, H_0$: स्वीकार्य)

8. सामान्य समग्र में से समान प्रसरणों के साथ नीचे तीन प्रतिदर्श प्राप्त किये गये। परिकल्पना परीक्षण करें कि प्रतिदर्श माध्य एक समान हैः

8	7	12
10	5	9
7	10	13
14	9	12
11	9	14

$v_1 = 2$ एवं $v_2 = 12$ के लिए 5 प्रतिशत महत्व के स्तर पर F का तालिका मान 3.88 है।

($F = 4, H_0$: अस्वीकार्य)

9. एक कम्पनी यह जानने के लिए इच्छुक है कि क्या तीन बिक्रीकर्ता एक समान प्रर्दशन कर रहे हैं। तीन बिक्रीकर्ताओं का साप्ताहिक बिक्री अभिलेख है।

A(Rs)	B (Rs)	C (Rs)
300	600	700
400	300	300
300	300	400
500	400	600
0	..	500

10. तीन प्रयोग शक्ति के प्रतिदर्श के संतुष्टि आर्द्रता का निर्धारण करते हैं, प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक 4 प्रेषणों में से एक प्रतिदर्श लेता है। परिणाम निम्नवत है।

प्रयोग	प्रेषण			
	I	II	III	IV
A	9	10	9	10
B	12	11	9	11
C	11	12	10	12

इन आकडों से प्रसरण का विश्लेषण निर्धारित करें और वर्णन करें कि वन्या प्रेषणों के मध्य या प्रयोगों के मध्य कोई महत्वपूर्ण अन्तर है प्रेषणों के मध्य $F = 4.02, H_0$स्वीकृत

प्रयोगों के मध्य $F = 6.91, H_0$अस्वीकृत

11. निम्नलिखित तीन ड्रगों के से सम्बन्धित सूचना के आधार पर ANOVA तालिका का निर्माण करें और यह परीक्षण करें कि ड्रगों की प्रभावशीलता तीन विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों रक्तचाप को कम करती है।

व्यक्ति का वर्ग	ड्रग		
	X	Y	Z
A	14	10	11
	15	9	11
B	12	7	10
	11	8	11
C	10	11	8
	11	11	7

1. क्या ड्रग्स भिन्न प्रकार से प्रतिक्रिया करते हैं ?
2. क्या भिन्न वर्ग के व्यक्ति भिन्न प्रकार से प्रभावित हैं ?
3. क्या अन्योन्यक्रिया पद महत्वपूर्ण है ? $(F = 36.9, 19.1, 18.78)$ सभी तीन H_0 अस्वीकार है

17.9 संदर्भ पुस्तकें

1. गुप्ता एस0 पी0 , ''सांख्यिकीय विधियॉ सुल्तान चन्द एवं सन्स, नई दिल्ली
2. दास एन0जी0 सांख्यिकीय विधियॉ टाटा मेग्रो हिल, नई दिल्ली
3. बाजपेई नवल व्यवसाय सांख्यिकीय पियरसन

इकाई 18 बहुभिन्नरूपी विश्लेषण तकनीक (Multivariate Analysis Technique)

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- बहुप्रसरण विश्लेषण की अवधारणा एवं महत्व का वर्णन कर सके।
- बहुप्रसरण तकनीकों का वर्गीकरण को स्पष्ट कर सके।
- बहुप्रसरण की तकनीकों का वर्णन कर सके।

18.1 प्रस्तावना

पिछली इकाईयों में, आप विभिन्न प्रकार के प्राचल एवं गैर प्राचल परीक्षणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। ये परीक्षण उन आंकडों के साथ व्यवहार करते है। जो कि एकल कारक या अधिक से अधिक दो कारकों पर आधारित होते हैं लेकिन वास्तविक जीवन में, हमें बहुत सी उन घटनाओं के साथ व्यवहार करना पडता है जो कि एक ही साथ एक से अधिक कारकों द्वारा प्रभावित होते है। इन जटिल घटनाओं की दशा में, एकल चर एवं द्विचर तकनीकें आंकडों के विश्लेषण के लिए सहायक नहीं हेाती है। हमें बहुचर विश्लेषण तकनीकों की सहायता लेनी पडती हैं ।

बहुचर विश्लेषण सभी सांख्यिकीय विधियों से सम्बन्ध रखता है जो अध्ययन के अन्तर्गत सभी व्यक्ति या वस्तुओं के बहुमापों का विश्लेषण एक साथ करता है। दूसरे

शब्दों में, कोई भी दो चरों से अधिक के एक साथ किये गये विश्लेषण को बहुचर विश्लेषण के रूप में सुविचारित किया जा सकता है । इस प्रकार, बहुचर विश्लेषण तकनीकें चरों के मध्य विभिन्न सम्बन्धों को समझने एवं व्याख्या में सहायता करता है। इस इकाई में, आप कुछ आमतौर पर प्रयुक्त बहुचर विश्लेषण तकनीकों जैसे कारक विश्लेषण बहु प्रतीपगमन, गुच्छ विश्लेषण MDS सामूहिक विशलेषण, इत्यादि का अध्ययन करेगें।

18.2 बहुचर विश्लेषण की अवधारणा एवं महत्ता

एकल चर एवं द्विचर तकनीकों की सीमाओं के क्रम में, बहुचर विशलेषण तकनीकियॉ प्रकट होती है। एकलचर विश्लेषण अध्ययन के अन्तर्गत चरों के स्तर एवं वितरण के बारे में केवल सूचना प्रदान करने में सहायता करता है।

बहुचर विश्लेषण केवल चरों के मध्य सम्बन्ध के अंश को स्थापित करने में सहायता करता है। यदि प्रत्येक चर के लिए एकल चर विशलेषण की श्रेणीयॉ स्वतन्त्र रूप से निष्पादित की जाती हैं, यह परिणामों की व्याख्या को अनुचित रूप में प्रभावित कर सकता है। बहुचर विश्लेषण तकनीकियॉ हमें चरों के मध्य एक साथ जटिल सम्बन्धों के उचित तरीके से विश्लेषण में सहायता करता है।

पाल ई0 ग्रीन के अनुसार, ''बहुचर तकनीकियॉ दो या अधिक समूहों की मापों के मध्य सम्बन्ध विश्लेषण के लिए प्रक्रियाओं का संकलन होता है जो एक या अधिक वस्तुओं के प्रतिदर्शों मे प्रत्येक वस्तु के लिए बनाया गया था। यदि केवल मापों के दो समूह शामिल होते हैं, आंकडे विशिष्ट रूप से द्विचर के रूप में निर्दिष्ट होते हैं'' सरल शब्दों में, जब तीन या अधिक चरों का एक साथ विश्लेषण किया जाता है तब बहुचर तकनीकियॉ प्रयुक्त होती है।

चूॅकि, जटिल वास्तविक जीवन आंकडे को बहुचर तकनीकियों की सहायता से संयोजित अर्थपूर्ण अंकों में परिवर्तित करना सम्भव हैं। इस प्रकार यह शोध सम्बन्धी विभिन्न क्षेत्रों जैसे अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, मानव विज्ञान, जीव विज्ञान, कृषि, चिकित्सा, वाणिज्य, प्रबन्ध शिक्षा इत्यादि क्षेत्रों मे एक शक्तिशाली उपकरण के रूप में साबित हुआ है। यह व्यवसाय सम्बन्धी समस्याओं के निर्णय निर्धारण में भी सहायक होता है। संक्षेप में जब कभी एक घटना बहुत कारकों या चरों द्वारा प्रभावित होती है, तब इसके उचित विशलेषण के लिए बहुचर तकनीकियॉ प्रयुक्त की जाती चाहिए। के0 टेकुची के अनुसार,''यदि शोधकर्ता प्रतिदर्श बहुमापों के आधार पर प्रायिकता कथनों के सृजन में रूचि रखता है, तब आंकडे विश्लेषण की सबसे अच्छी रणनीति, कुछ बहुचर सांख्यिकीय तकनीक का प्रयोग होना होता है।'' बहुचर तकनीकियॉ गुण आनुभाविक होती है जो जटिल आंकडों का विश्लेषण करती है। यह आंकडों के बडे अंकों को छोटी संख्या के संयोजित अर्थपूर्ण अंकों में रूपान्तरित करती है। एक सही बहुचर स्थिति की घटना में, सभी चरों को यादृच्छिक होना चाहिए और उनको इस तरीके से परस्पर सम्बन्धित किया जाना चाहिए कि उनका विभिन्न प्रभाव अर्थपूर्ण रूप मे पृथक रूप से व्याख्या न कर सके। आपको हमशा याद रखना चाहिए कि बहुचर तकनीकियों की इस नाम द्वारा जाना जाता है क्योकि इसमें बहुचर या चरों का बहुसंमिश्रण शामिल होता है और न कि बहु अवलोकन ।

इस सम्बन्ध में दूसरा विचारणीय तथ्य इसका जटिल विस्तृत गणना प्रक्रिया का होना है। बहुचर तकनीकियों को हाथ से हल करना बहुत कठिन होता है। इन तकनीकियों के माध्यम से एक समस्या को हल करने के लिए एकल चर विश्लेषण रैखिक बीजगणित, सदिश बीजगणित, लम्बकोणीय और तिर्यक अनुमानों की मूलभूत अवधारणाओं का ज्ञान आवश्यक हेाता है जो सम्पूर्ण तथ्य को बहुत जटिल बनाता है। हमें बहुचर तकनीकों के माध्यम से समस्या के हल के लिए कम्प्यूटर साफ्टवेयर प्रोग्राम का प्रयोग करना चाहिए। विशेषीकृत कम्प्यूटर साफ्टवेयर प्रोग्राम का आजकल के वर्षों में शोध के क्षेत्र बढता हुआ प्रयोग बहुचर तकनीकों की लोकप्रियता का मुख्य कारण है।

18.3 शब्दावली

आपको बहुत से पदों से परिचित होना चाहिए जिन्हें बहुचर विश्लेषण के प्रकरण मे प्रयोग किया जाता हैं क्योंकि समान पदों का प्रयोग एकलचर एवं द्विचर विश्लेषण में किया जाता है। लेकिन इन पदो के अतिरिक्त कुछ पद होते हैं जिन्हें प्रायः इस प्रकरण में प्रयोग किया जाता है और आपकों बहुचर विश्लेषण की अवधारणा की उचित समझ के लिए इनके अर्थ की जानकारी होनी चाहिए और ये पद नीचे वर्णित है :

- **चर मात्रा :–** एक चर मात्रा अनुभव के साथ ज्ञात वजनों के चरों का एक रैखीय मिश्रण होता है। चर शोधकर्ता द्वारा निर्दिष्ट किये जाते हैं, जबकि निर्दिष्ट उद्देश्य के मिलान के लिए वजनों का निर्धारण बहुचर तकनीक द्वारा किया जाता है। गणितीय रूप में, इसे निम्नवत व्यक्त किया जा सकता हैः–

  चर मात्रा मान = $w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + w_nX_n$

  जहॉ X_n अवलोकित चर है और बहुचर तकनीक द्वारा वजन निर्धारण है। इस प्रकार, समूह के सम्पूर्ण मिश्रण को एकल मान जिसे चर मात्रा मान जाना जाता है, प्रदर्शित करते हैं।
- **मापीय एवं गैर मापीय चर :–** मापीय चर उन आंकडों या चरों को उद्घृत करता है जो अन्तराल या अनुपात पैमाने में मापे जाते हैं जैस उम्र, वजन इत्यादि गैर मापीय चर उन आंकडों या चरों को उद्घृत करता है जो संज्ञात्मक या कमवाचक पैमाने जैसे नाम, लिंग धर्म इत्यादि।
- **परतंत्रता एवं स्वतन्त्रता तकनीकें :–** जब एक या अधिक चर जो कि स्वतन्त्र चरों में आश्रित होते हैं तब परतंत्रता तकनीक का प्रयोग किया जाता है। यदि चरों का वर्गीकरण आश्रित एवं स्तन्त्र वर्गो में सम्भव नहीं होता है और चरों के मध्य पारस्परिक निर्भरता रहती है तब अन्योन्याश्रय तकनीकों का प्रयोग करते हैं।
- **विवरणात्मक एवं मानदण्ड चर** :– वह चर जो दूसरे चर के माने में परिवर्तन की वजह होता है स्वतन्त्र या विवरणात्मक या बहिर्जात चर के रूप में जाना जाता है। इसके विपरीत, वह चर जिसका मान दूसरे चर के प्रभाव की वजह

से परिवर्तित हेाता है आश्रित या मानदण्ड या अंतर्जात चर के रूप में जाना जाता है।

- **अवलोकनीय और अविकसित चर** :– वितरणाात्मक चरों को दो वर्गों में पृथक किया जा सकता है। अवलोकनीय और अविकसित चर। यदि विवरणात्मक चर को प्रत्यक्ष रूप से अवलोकित किया जा सकता है तब इसे अवलोकनीय चर के रूप में जाना जाता है और यदि इसे प्रत्यक्ष रूप से अवलोकित नहीं किया जा सकता है तो इसे अविकसित चर के रूप में जाना जाता है।
- **कल्पित चर** :– इसे कृत्रिम चर के रूप में भी जाना जाता है। यह पद तकनीकी समझ में प्रयुक्त होता है और बहुचर विशलेषण के प्रकरण में बीजगणितीय दक्षप्रयोगों में उपयोगी होता है। X_i $(i = 1, 2,\ldots..\mathrm{m})$ को एक कल्पित चर कहा जाता है यदि केवल एक X_i 1 होता है और दूसरे सभी शून्य होते है।
- **अवशिष्टयॉः–** अवशिष्ट आरित चर के अपरिभाषित भाग को प्रदर्शित करता है। यह आश्रित या अर्न्तजात चर का वह भाग होता है जिसे बहुचर तकनीकी द्वारा परिभाषित नहीं किया जाता हे। इसे अनिदिृर्ष्ट सम्बन्धों या समस्याओं में शून्य निरूपण तकनीकी को स्थापित करने के लिए प्रयोग कर सकते है।
- **सह रेखीय** :– यह दो या अधिक स्वतन्त्र चरों के मध्य सम्बन्ध को वर्णित करता है। यदि कोई एकल स्वतन्त्र चर उच्चता से दूसरे स्वतन्त्र चरों के साथ उच्चता से सहसम्बन्धित होते हैं तो इसे बहु सह रेखीय के रूप मे जाना जाता हैं ।

18.4 बहुचर तकनीकों का वर्गीकरण

विभिन्न आधारों पर बहुचर तकनीकों को वर्गीकृत किया जा सकता है। इसका वर्गीकरण निश्चित प्रश्नों के उत्तरों पर आधारित होता है। पहला प्रश्न है :

क्या चरों को आश्रित एवं स्वतन्त्र चरों में वर्गीकृत किया जा सकता है ?

इसका अर्थ यह है कि चरों को दो वर्गों में वर्गीकृत करना सम्भव है – पहला आश्रित चर और दूसरा स्वतन्त्र चर। यदि हम धनात्मक उत्तर प्राप्त करते हैं, अर्थात कुछ सम्मिलित चर दूसरों में आश्रित हेाते हैं तब निर्भरता विधियों का प्रयोग किया जाता है। इसके विपरीत, यदि हम ऋणात्मक उत्तर प्राप्त करते हैं, अर्थात आश्रित चरों में कोई भी चर सम्मिलित नहीं हेाता है और वहॉ चरों के मध्य परस्पर निर्भरता होती है तब अन्योन्याश्रय विधि प्रयुक्त होती है। इस प्रकार आश्रित चरों की उपस्थिति के आधार पर, बहुचर तकनीकों को दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता हैं निर्भरता विधियॉ और अन्योन्याश्रय विधियॉ। उन्हें क्रमशः कार्यात्मक विधियॉ। एवं संरचनात्मक विधियॉ कहा जाता है। यदि हम कुछ आश्रित चरों को ज्ञात करते हैं तब यह निर्भरता विधियों के प्रयोग का संकेत हेाता है। निभ्रश्रता विधियों के प्रकरण में आगे के वर्गीकरण के लिए, अगला प्रासंगिक प्रश्न है :–

एक एकल विशलेषण में आश्रित के रूप मे कितने चरों का प्रतिपादन करते हैं ?

इसका अर्थ है कि हमें सुनिश्चित करना है कि क्या केवल एक आश्रित चर या बहु से आश्रित चर है। आश्रित चरों की संख्या ज्ञात करने के पश्चात अगला प्रासंगिक प्रश्न है :

चरों की माप कैसे की जाती है ?

इसका अर्थ है कि हमें ज्ञात करना होता है कि चरों के मान के माप के लिए कौन सा पैमाना प्रयुक्त है। जैसा आप जानते है। कि यदि आंकडे को अन्तराल या अनुपात पैमाने मे मापा जाता है तो इसे मापीय के रूप में जाना जाता है और यदि इसे संज्ञात्मक या क्रमवाचक पैमाने मे मापा जाता है तो इसे गैर मापीय के रूप में जाना जाता है। इस प्रकार चरों की प्रवृत्ति के आधार पर, बहुचर तकनीकों को मापीय एवं गैर मापीय विधियों के रूप मे वर्गीकृत कर सकते हैं। निर्भरता विधियों के सन्दर्भ में, यदि केवल एक आश्रित चर होता है और यह मापीय है तब सबसे प्रचलित बहुचर तकनीकी बहुप्रतिगमन होती है और यदि यह एकल आश्रित चर गैर मापीय है तब बहु विभेदक विश्लेषण प्रयुक्त होता हैं बहुत से आश्रित चरों की दशा में यदि वे मापीय हेाते हैं तो प्रसरण का बहुचर विशलेषण प्रचलित है और यदि बहुत से आश्रित चर गैर मापीय होते हैं तब प्रामाणिक विशलेषण और संयुक्त विशलषण सबसे वाछंनीय तकनीकें हेाती है।

अन्योन्याश्रय विधियों के संदर्भ में, यदि चर मापीय होते हैं तो कारक विशलेषण, गुच्छ विशलेषण और मापीय बहु आयामी पैमाने इत्यादि का प्रयोग किया जा सकता है। लेकिन यदि चर गैर मापीय होते हैं तो गैर मापीय बहु आयामी पैमाना और अविकसित संरचनात्मक विशलेषण उपयुक्त होंगें।

18.5 बहुचरमात्रा तकनीकें

जैसा आप जानते है। कि एक बहुचर मात्रा तकनीकी को सभी प्रकार की स्थितियों में प्रयोग नहीं किया जा सकता है। विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न प्रकार के बहुचर तकनीकों का प्रयोग होता है । कुछ महत्वपूर्ण बहुचर मात्रा तकनीकें नीचे वर्णित हैं :–

18.5.1 बहुचर प्रतीपगमन :– बहुचर प्रतीपगमन सामान्यतया सबसे अधिक प्रयोग की हुई बहुचर मात्रा तकनीक हैं यह सामान्य प्रतीपगमन का विस्तार है। जब हम दो या अधिक स्वतन्त्र चरों का एक आश्रित चर में संयुक्त प्रभाव का अध्ययन करना चाहते हैं, तब बहु प्रतीपगमन एक उपयुक्त विधि है। इस प्रकार, यह एक एकल मापीय आश्रित चर एवं दो या अधिक मापीय स्वतन्त्र चरों के मध्य सम्बन्ध का परीक्षण करता है। बहुचर प्रतीपगमन में विवरणात्मक चरों के एक रैखीय मिश्रण को इस तरीके बनाया जाता हैं कि इसका मापदंड चर के साथ सह सम्बन्ध अधिकतम हो । इस तकनीकी का मुख्य उद्देश्य सभी स्वतन्त्र चरों के साथ इसके सहप्रसरण पर आधारित आश्रित चरों की परिवर्तनशीलता का पूर्वानुमान करना होता है। दूसरे शब्दों में, बहुचर प्रतीपगमन का मूलभूत उद्देश्य एक प्रतिरूप का निर्माण रेखीय समीकरण के रूप में करना है जो अध्ययन में स्वतन्त्र चरों के सबसे भारित संयोजन को मानदण्ड चर में इष्टतम पूर्वानुमान की स्थापित करता है। इसका अर्थ है कि यदि स्वतन्त्र चरों को स्तर दिया हुआ हेाता है तब बहुचर प्रतीपगमन विश्लेषण प्रारूप के माध्यम से, आश्रित

घटनाओं के स्तर के पूर्वानुमानित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, दिये हुए वर्षा की मात्रा एवं आधार पर , बहुचर प्रतिगमन की सहायता के साथ उर्वरक फसल की उपज का अनुमान लगाया जा सकता हैं यह इसी तरह विज्ञापन एवं व्यक्तिगत विक्रयण के आधार पर विकी की मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है। इस सन्दर्भ में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि सामान्य प्रतीपगमन में, आश्रित चर का अनुमान हमेशा रैखीय होता है लेकिन जब दो स्वतन्त्र चर होते हैं तब अनुमान सपाट होते हैं यदि स्वतन्त्र चर तीन या अधिक होते हैं तब वे अति सपाट होते हैं।

बहुचर प्रतीपगमन प्रायः पूर्वानुमान उपकरणों के रूप में प्रयुक्त हेाते हैं। इन्हें विभिन्न उद्देश्यों जैसे अनेक दूसरे चरों के संयुक्त ज्ञान में से एक चर का मान या दूसरे चरों के समूह के साथ एक चर सम्बन्ध के आंकलन या दूसरे चरों के सह समूह के प्रयोग से एक चर के प्रसरण का सांख्यिकीय वर्णन के लिए या एक चर को कैसे कितना अच्छा पूर्वानुमानित किया जा सकता है इसके निर्धारण के लिए होता है यदि एक या अधिक प्राग्सूचक इत्यादि का मिश्रण में सम्मिलित करते हैं।

सामान्य प्रतीपगमन विशलेषण के समान, बहुचर प्रतीपगमन भी प्रतीपगमन समीकरणों की अवधारणाओं पर आधारित होता है। बहुचर प्रतीपगमन समीकरण विभिन्न चरों का औसत सम्बन्ध व्यक्त करता है और इस औसत सम्बन्ध के आधार पर आश्रित चर के लिए सबसे उपयुक्त अनुमान बनाया जाता है। यह समीकरण एक ही समय में आश्रित चर में बहुत स्वतन्त्र चरों के संयुक्त प्रभाव को व्यक्त करता है। बहु प्रतीपगमन प्रारूप का सामान्य रूप निम्नवत होता हैः–

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_kX_k + \varepsilon$$

जहॉं। Y = आश्रित चर का परिकल्पित मान

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ = ज्ञात स्वतन्त्र चर

$b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_k$ = प्रतीपगमन गुणांक

a =अपरिवर्तनशील

ε = त्रुटि या अवशेष

इस सम्बन्ध मे विचारणीय तथ्य यह है कि जब विचलनों को वास्तविक माध्य से लिया जाता है तब प्रतीपगमन समीकरण छोटे होते हैं क्योंकि इन परिस्थितियो में स्थिर a का मान शून्य होता है। वास्तव में स्थिर a प्रतीपगमन समतल द्वारा बनाया हुआ अवरोधन प्रदर्शित करता है, इस प्रकार, जब प्रतीपगमन रेखा मूल से गुजरती है तब a का मान शून्य हेाता है। इस स्थिति में, 3 चरों की स्थिति में समीकरण होगा :

$$Y = b_1X_1 + b_2X_2$$

बहुचर प्रतीपगमन में, यह माना जाता हे कि दिये हुए स्वतन्त्र चरों के लिए अाश्रित चर का प्रतिबंधी वितरण सामान्य है और यह माना जाता है कि इन प्रतिबंधी वितरण का मानक विचलन एक समान होता है। बहुचर प्रतीपगमन समीकरण को न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा भी निर्धरित किया जा सकता है। न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रतीपगमन समीकरणों के निर्धारण समय में, सामान्य प्रतीपगमन एवं बहुचर प्रतिगमन में केवल एक ही अन्तर होता है। इसलिए, सामान्य प्रतीपगमन में, केवल दो अज्ञात (a,b) मान

होते हैं, इस प्रकार इसे केवल दो समीकरणों द्वारा हल किया जा सकता है लेकिन बहुचर प्रतीपगमन की स्थिति में, अधिक समीकरणों की आवश्यकता होती है क्योंकि इसमें अधिक अज्ञात मान होते हैं । इन अज्ञान मानों के निर्धारण के पश्चात इन्हें मूलभूत समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है और फलस्वरूप बहुचर प्रतीपगमन समीकरण निर्धारित होती हैं एक आश्रित एवं दो स्वतन्त्र चरों के लिए बहुचर प्रतीपगमन होते हैं :

$$\sum Y = na + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2$$

$$\sum X_1Y = a \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1X_2$$

$$\sum X_2Y = a \sum X_2 + b_1 \sum X_1X_2 + b_2 \sum X_2^2$$

अभ्यास में, Y और विभिन्न X चरों को मानक अंकों में परिवर्तित किया जाता है, z_y, $z_1, z_2, \ldots\ldots z_k$ के प्रत्येक z में माध्य 0 और मानक विचलन है 1 ।

बहुचर प्रतिगमन का मुख्य दोष बहु समरेखीयता का है। यहॉ तक की एक चर के विलुप्त होने की स्थिति में भी इसके प्रभाव को तब भी सम्मिलित किया जाता है यदि अपवर्जित चर सम्मिलित चरों में एक के साथ सहसम्ब्न्ध रखता है। इस प्रकार सम्मिलित चर का अनुमानित गुणांक सम्मिलित एवं अपवर्जित चर दोनों को दर्शाता है। बहुसमरेखीयता की यह स्थिति बहुचर प्रतिगमन के लिए विशालतम चुनौती होती है।

18.5.2 बहु विभेदक विशलेषण :– बहु विभेदक विश्लेषण आश्रित विधियों की श्रेणी में एक ऐसी विधि है जो उस स्थिति में प्रयुक्त होती है जब आश्रित या मानदण्ड चर को संज्ञात्मक स्तर में मापा जाता है और स्वतन्त्र या प्रायः सूचक चर को अन्तराल या अनुपात पैमाने में मापा जाता है। यह विशेषरूप से उस स्थिति में उपयोगी होता है जब वस्तुऐं या व्यक्तियों को दो या अधिक पारस्परिक अनंय और सुविस्तृत वर्गों के आधार पर स्वतन्त्र चरों के एक समूह का एक वर्गीकरण किया जा सकता है। इस तकनीक का मुख्य उद्देश्य एक वस्तु की संभाव्यता का अनेक स्वतन्त्र चरों पर आधारित एक विशेष वर्ग से सम्बन्ध होने का पूर्वानुमान करना होता है।

इसका प्रयोग विभिन्न उद्देश्यों जैसे वस्तुओं का वर्गीकरण विभिन्न वर्गों में या वर्गो के मध्य कोई अर्थपूर्ण अन्तर का मूल्यांकन या इस तरह का विभेदक फलन विकसित करना जो विभिन्न वर्गों के मध्य विभेद करता हो या वर्गीकरण की सटीकता का मूल्यांकन इत्यादि।

बहु विभेदक विशलेषण वास्तविक जीवन स्थितियों में बहुत उपयोगी होता है। जिसमें एक गैर मापीय आश्रित चर एवं अनेक मापीय स्वतन्त्र चर सम्मिलित होते हैं। उदाहरण के लिए मान लें हमें दो विभिन्न ब्रान्डों के लिए ,यथा A और B में व्यक्ति की आमदनी, उम्र एंव शिक्षा का ब्रान्ड की पसंद से सम्बन्ध निर्धारित करना है। इस स्थिति में, प्रतिगमन विश्लेषण प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है क्योंकि आश्रित चर (ब्रान्ड पसंद) को अतंराल या अनुपात पैमाने में नहीं मापा जा सकता है। यहॉ, विभेदक विशलेषण उपयुक्त होगा।

यदि आश्रित चर को केवल दो वर्गों में वर्गीकृत किया जा सके तब पद ''द्विवर्गीय विभेदक विश्लेषण'' या केवल ''विभेदक विश्लेषण'' प्रयोग होता है। जबकि जब दो या

अधिक आश्रित चरों के वर्गो। का गठन किया जा सकता है, तब पद 'बहुविभेदक विश्लेषण'' का प्रयोग होता है।

अवधारणाऐं :– विभेदक विशेषण के अनुप्रयोग के लए कुछ अवधारणाऐं होती हैं जिन्हें पूर्ण किया जाना चाहिए जो निम्नवत हैः–

- पारस्परिक अनंय वर्ग होने चाहिए। इस प्रकार, प्रत्येक पद या वस्तु का सम्बन्ध केवल एक वर्ग से होना चाहिए और इसके वर्गीकरण के बारे में कोई भ्रम नहीं होना चाहिए।
- सभी स्थितियॉ स्वतन्त्र होनी चाहिए।
- आश्रित चर के वर्गो के आकार में बहुत अंतर नहीं होना चाहिए।
- स्वतन्त्र चरों की माप अंतराल पैमाने में होनी चाहिए।
- बहुसमरेखीयता नहीं होनी चाहिए।

विभेदक फलन समीकरण :– विभेदक फलन को निम्नलिखित रैखीक समीकरण प्रदर्शित किया जाता है :–

$$D_i = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_kX_k$$

जहॉ

D_i = विभेदक फलन I में अंक

$b_1, b_2, \ldots\ldots b_k$ = विभेदक गुणांक

b_0 = स्थिर

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ = स्वतन्त्र चर

B का संख्यात्मक मान एवं चिन्ह स्वतन्त्र चरों की अहमियत विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों के मध्य उनकी योग्यता को प्रदर्शित करती है। इस प्रकार, इस तकनीक के माध्यम से यह भी निर्धारित किया जा सकता है कि कौन सा स्वतन्त्र चर पूर्वानुमान में सबसें अधिक उपयोग हेाता है कि प्रतिक्रियादाता को पहले वर्ग या दूसरे में सम्मिलित करें।

चरण :– विभेदक विशलेषण प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं :

- सबसे पहले, आश्रित एवं स्वतन्त्र चरों को निर्धारित करते हैं।
- अगले चरण में, उपरोक्त वर्णित रैखीय समीकरण के सहायता के साथ, विभेदक फलन गुणांको को निर्धारित किया जाता है। जब स्वतन्त्र चरों (n) की संख्या 2 के बराबर हो, हमारे पास सीधी रेखा वर्गीकरण सीमा होती है। एक तरफ की रेखा में प्रत्येक व्यक्ति को वर्ग I के रूप में वर्गीकृत किया जाता है और दूसरी तरफ में प्रत्येक को वर्ग II से सम्बन्धित रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब n 3 के बराबर होता है, वर्गीकरण सीमा 3 स्थान में द्विआयामी समतल होता है। सामान्य वर्गीकरण में (n-1) आयामी n स्थान में अति समतल होते हैं। n वर्ग विभेदक विश्लेषण में, प्रत्येक वर्ग के युग्म के लिए विभेदक फलन निर्मित किया जाता है। यदि 6 वर्गो को गठन करना

होता है, हमारे पास 6 (6-1) =15 समूहों का युग्म होगा और इस प्रकार हमारे पास 15 विभेदक फलन होंगें।

- विभेदक फलनों के अंकवाई पश्चात उनके महत्व का निर्णय निम्नलिखित प्रकिया के माध्यम से होता है।
- यदि विभेदक प्रारूप सम्पूर्णतया महत्वपूर्ण है के परीक्षण के लिए F परीक्षण प्रयुक्त होता है।
- यदि F परीक्षण महत्व को दर्शाता है, तब एकल स्वतन्त्र चरों को अवलोकित करने के लिए निर्धारित किया जाता है जो चर माध्य में समूह द्वारा महत्वपूर्ण अन्तर रखते हैं और इनका प्रयोग आश्रित चरों के वर्गीकरण में किया जाता है।
- अन्तिम चरण में, परिणामों की व्याख्या की जाती है। जब विभेदक गुणांक धनात्मक होता है, स्वतन्त्र चरों के मान ऊंचे होने पर, ज्यादा संभावना होती है कि एकल इस वर्ग से सम्बन्ध रखता है। इस तकनीक का दो वर्गो के मध्य सांख्यिकीय महत्व के निर्णय में भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके लिए महालनोबिस आंकडा D^2की गणना की जाती है। जोकि दो वर्गो के मध्य सामान्यकृतः दूरी होती है, जहॉं प्रत्येक वर्ग n चरों के समान समूह द्वारा विश्लेषित किये जाते हैं और जहॅा यह कल्पना की जाती है कि प्रसरण सह प्रसरण संरचना दोनों वर्गों के लिए एक समान होती है। इसका सत्र निम्नवत है :

$$D^2 = (U_1 - U_2)\, v^{-1} (U_1 - U_2)'$$

जहॉ।

U_1 = वर्ग I के लिए माध्य सदिश

U_2 = वर्ग II के लिए माध्य सदिश

v = सामान्य प्रसरण सारणी

इस D^2 आंकडे को F आंकडे में परिवर्तित किया जा सकता है जिसे यदि दो वर्ग सांख्यिकीय रूप में एक दूसरे से भिन्न होते हैं के अवलोकन में प्रयोग किया जा सकता है। डी0 जी0 मौरीशन के अनुसार, ''रैखीय विभेद दो वर्गों के महत्तम सीमा तक पृथक करता है।'' विभेदक विश्लेषण की उपयोगिता के बारे में कोई संदेश नहीं होता है। यह भविष्यसूचक समीकरण प्रदान करता है। प्रत्येक चर की सापेक्ष महत्व को मापता है और यह समीकरण की योग्यता का भी माप है जो आश्रित चरों से सम्बन्धित वास्तविक कक्ष वर्गो का पूर्वानुमान करता है।

18.5.3 प्रसरण के बहुभिन्न रूपी का विश्लेषण (MANOVA) :—

बहुभिन्नरूपी या प्रसरण का बहुविश्लेषण (MANOVA) का प्रयोग बहु आश्रित अन्तराल चरों के सुस्पष्ट चरों के मुख्य एवं अन्योन्यकिया प्रभाव को अवलोकित करना होता है। MANOVA एक या अधिक सुस्पष्ट स्वतन्त्रों जैसे प्राक्सूचक, ANOVA की तरह प्रयुक्त होता है, लेकिन ANOVA से भिन्न इसमें एक से अधिक आश्रित चर होते

हैं। जहॉ ANOVA परीक्षणों मे स्वतन्त्रों के विभिन्न वर्गों के लिए आश्रित अंतराल के माध्यों में अन्तर होता है, MANOVA परीक्षणों में बहुअंतराल आश्रितों के माध्यों के सदिश में अन्तर होता हैं दूसरे शब्दों में, ऐसा कहा जा सकता है कि प्रसरण का बहुविचरण विश्लेषण प्रसरण का द्विविचरण विश्लेषण का विस्तार होता है जिसमें वर्गों के मध्य प्रसरण और वर्गों के अन्दर प्रसरण के अनुपात को एकल चर के बदले में चरों के समूह की गणना द्वारा करते है। इस प्रकार, यदि परीक्षण में केवल एक दाशमिक आश्रित चर एवं विभिन्न गैर दाशमिक आश्रित चर होते हैं तब ANOVA उपयुक्त होगा लेकिन यदि विभिन्न दाशमिक आश्रित चर बहुत से गैर दाशिमिक अर्थकारी चरों के साथ सम्मिलित होते हैं तब MANOVA सबसे उपयुक्त विकल्प होगा।

यह उदाहरण MANOVA के अनुप्रयोग के लिए उपयुक्त स्थितियों की प्रकृति को समझने मे आपकी सहायता करेंगा। एक अध्ययन संचालित किया जाता है और हम दो विभिन्न पाठ्यपुस्तकें में शोध करते है, और हम गणित एवं भौतिक विज्ञान मे विद्यार्थियों के सुधार में रूचि ले रहे हैं। उस स्थिति में, हमारे पास दो आश्रित चर होते हैं और हमारी परिकल्पना होती है कि दोनों एक साथ पाठ्यपुस्तकों में अन्तर द्वारा प्रभावित है। अब हम इस परिकल्पना के परीक्षण को MANOVA से कर सकते हैं । एकल विचरण F मान के बदले, हम बहुविचरण F मान (विल्कस लेम्डा) प्राप्त करेंगें जो कि त्रुटि प्रसरण/ सह प्रसरण सारणी और प्रभाव प्रसरण/ सह प्रसरण सारणी की तुलना पर आधारित होता है। सह प्रसरण को सम्मिलित किया जाता है क्योंकि दो मापें सम्भवतः सह सम्बन्धित होती है और हमें इस सहसम्बन्ध के संज्ञान में लेना चाहिए जब महत्व परीक्षण प्रदर्शित कर रहे होते हैं । प्रत्यक्ष रूप से यदि हम समान मापों को दोबारा ले रहे थे, तब हमें वास्तविकता मे कोई भी नई सीख की आवश्यकता नहीं होगी। यदि हम सहसम्बन्घित माप को लेते हैं, हम कुछ नई सूचना प्राप्त करते हैं, लेकिन नया चर भी अनावश्यक सूचना घेरता है जिसे सहप्रसरण में चरों के मध्य व्यक्त किया जाता है। यदि समस्त बहुविसरण परीक्षण अर्थपूर्ण है, हम निष्कर्ष निकालते है कि सम्बंधित पाठ्यपुस्तकों का प्रभाव अर्थपूर्ण है। अब प्रश्न उठता है कि क्या केवल गणित का हुनर सुधरा है, केवल भौतिक विज्ञान का हुनर सुधरा है या दोनों का, वास्तव में, एक विशेष मुख्य प्रभाव या अन्योन्यक्रिया के लिए एक अर्थपूर्ण बहुविसरण प्राप्त करने के पश्चात, प्रचलित रीति से कोई प्रत्येक चर के लिए सम्बन्धित प्रभाव की व्याख्या का निरीक्षण एकल विसरण F परीक्षणों से करेगा। दूसरे शब्दों मे कोई विशिष्ट आश्रित चरों को पहचानेगा जो अर्थपूर्ण समस्त प्रभाव के लिए योगदान देते हैं।

उद्देश्य :– MANOVA का प्रयोग निम्नलिखित उद्देश्यों के लिए किया जा सकता हैः

- अन्तराल आश्रित चरों के समूह में सुस्पष्ट स्वतन्त्र चरों का वर्ग विभेद द्वारा तुलनात्मक वर्ग निर्धारण करना।
- स्वतन्त्र चरों को पहचानना जो आश्रित चरों के एक समूह का सबसे अधिक विभेद करते हैं।

- प्रयोगात्मक दक्ष प्रयोगों के लिए वर्ग प्रतिक्रियाओं में सम्बन्धित बहुविसरण अन्तरों का परिकल्पना परीक्षण करना।

MANOVA की भिन्नताऐं :– विभिन्न परिस्थितियों में, MAVOVA की विभिन्न भिन्नताऐं प्रयोग की जा सकती है। MANOVA की तीन आधारभूत भिन्नताऐं निम्नवत हैं :–

- होटलिंग का T :– जब एक द्विभाजित स्वतन्त्र चर और बहु आश्रित चर होते हैं तब MAVOVA का यह विचरण प्रयुक्त होता है जो कि द्विवर्ग T परीक्षण के समान है।
- एकतरफा MANOVA :– जब एक बहुस्तरीय संज्ञानात्मक चर और बहुस्तरीय आश्रित चर होते है। तब MANOVA के इस विचरण का प्रयोग करते हैं जो कि एक तरफा F स्थिति के समान है।
- क्रमगुणित MANOVA :– जब बहु संज्ञानात्मक स्वतन्त्र चर एवं बहु आश्रित चर होते हैं तब MANOVA के इस विचरण का प्रयोग करते हैं जो कि क्रमगुणित ANOVA प्रारूप के समान है। MANOVA के इन सभी भिन्नताओं के मध्य एक सार्वजनिक विशेषता यह होती है कि ये आश्रित चरों के रैखिक संमिश्रण को क्रमबद्ध करते है जो एक विशेष प्रयोगात्मक प्रारूप में वर्गों के मध्य सबसे अच्छा विभेद करती हैं ।

18.5.4 **प्रामाणिक सह सम्बन्ध विश्लेषण :–** यह एक तकनीक है जो विभिन्न गैर–मापीय आश्रित चरों की स्थिति में प्रयोग होता हैं वास्तव में, दोनों मापीय एवं गैर–मापीय आंकडों का प्रयोग इस बहुविसरण तकनीक में किया जाता है। प्रामाणिक सहसम्बन्ध विश्लेषण का प्रतिपादन हौटलिंग द्वारा किया गया था। इस तकनीक मे मानदण्ड चरों के एक समूह का एक समय में पूर्वानुमान उनके संयुक्त सह विचरण के साथ एक अर्थकारी चरों के समूह में से एक प्रयत्न किया जाता है। इस प्रकार, इसे बहुप्रतिगमन विशलेषण का एक विस्तार के रूप मे सुविचारित किया जा सकता है। प्रामाणिक सह सम्बन्ध विश्लेषण में, आश्रित एवं स्वतन्त्र चरों के लिए भारों के एक समूह को इस तरीके से प्राप्त किया जाता है कि मानदण्ड चरों के रैखिक संयोजन के साथ अर्थकारी चरों का रैखिक मिश्रण मे अधिकतम सह सम्बन्ध हो। यह विभेदक अंकों एवं समूहों के मध्य सम्बन्ध के सीमा की माप करता है। इसका मुख्य उद्देश्य चरों के दो समूहों में कारकों की पृथक रूप से खोज करना होता है जिससे कि कारकों के समूहों के मध्य अधिकतम संभावित बहु सहसम्बन्ध होगा। उदाहरण के लिए, यदि हम मानदण्ड चरों (y_1, y_2) के अनुसार प्रायःसूचक चरों (x_1, x_2) के एक समूह के सम्बन्ध को विश्लेषण करना चाहते हैं तब इसे निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है :–

	x_1 x_2	y_1 y_2
x_1 x_2	R_{xx}	R_{xy}

y_1 y_2	R_{yx}	R_{yy}

यहॉ Rxx प्राग्सूचक या स्वतन्त्र चरों के मध्य अन्तर सह सम्बन्ध दर्शाता है, Ryy मानदण्ड या आश्रित चरों के मध्य अन्तर सह सम्बन्ध दर्शाता है और Rxy प्रायसूचक एवं मानदण्ड चर के मध्य परस्पर सह सम्बन्ध दर्शाता हैं ।

गणित के अनुसार, प्रायाणिक सह सम्बन्ध विश्लेषण में दो समूहों के भारों यथा–– a_1, a_2, a_3,…….a_k और b_1, b_2, b_3, ……..b_j को इस तरीके से निर्धारित किया जाता है. कि चरों $X = a_1X_1 + a_2X_2 +……+a_kX_k + a$ और $Y = b_1Y_1 + b_2Y_2 + ….+b_jY_j + b$ के पास अधिकतम सार्वजनिक प्रसरण हो। भारों को ज्ञात करने की प्रक्रिया के लिए आवष्यक कारक विश्लेषण दो आव्यूहों के साथ हो ।

$M = R_{yy}^{-1} R_{yx} . R_{xx}^{-1} R_{xy}$

यहॉ M विषम प्रामाणिक आव्यूह है।

20.5.5 सामूहिक विश्लेषण :– सामूहिक विश्लेषण एक अपघटन विधि होती है जिसका प्रयोग गुणों के संयुक्त उद्देश्यों के मूल्यांकन के प्रदर्शन में किया जाता है। यह पारंपरिक प्रयोग से सम्बन्ध रखता है जिसमें स्वतन्त्र चरों के स्तरों का प्रभाव आश्रित चर पर निर्धारित होता है। इस बहुविचरण तकनीक में, वस्तु या उत्पाद का समस्त मूल्यांकन प्रतिकियादाताओं द्वारा बनाया जाता है और उस उत्पाद को निश्चित गुणों के विभिन्न स्तरों के संमिश्रण के रूप में एक उत्पाद को मूल्यांकित किया जाता है, सम्पूर्ण मूल्यांकन के लिए प्रत्येक गुण के योगदान को सुनिश्चित किया जा सकता हैं। यह तकनीक एक बहुत उपयोगी तकनीक है जिसे प्रायः व्यवसाय एवं बाजार अनुसंधान के क्षेत्र में प्रयोग किया जाता है, जैसे क्रय निर्णय या अंगीकरण निर्णय या उत्पादों या सेवाओं के लिए उपभोक्ताओं की पसंदों को समझना इत्यादि। यह नये उत्पाद विकास के लिए एक शक्तिशाली उपकरण होता है।

सामूहिक विश्लेषण व्यवहारिक अध्ययनों एवं विपणन अध्ययनों में सबसे उपयोगी होता है जहॉ प्राग्सूचक चरों को प्रायः गुण कहा जाता है और आश्रित चर को प्रायः एक उत्पाद का सम्पूर्ण मूल्यांकन कहते हैं। सामूहिक विश्लेषण के पीछे धारणा यह होती है कि वस्तुऐं मान या एक उत्पाद या सेवा या सुझाव का मूल्यांकन करती है कि यदि प्रत्येक गुण द्वारा उपयोगिता के सयुक्त पृथक मात्राओं द्वारा यह वास्तविक या परिकल्पित है । इसे अपघटन तकनीक के रूप में सुविचारित किया जाता है क्योंकि एक वस्तु के समस्त मूल्यांकन विघटित होकर प्रत्येक प्रारसूचक चर एवं एक प्रारसूचक चर के प्रत्येक स्तर के लिए उपयोगिताऐं देता हैं ।

उद्देश्य :– निम्नलिखित दो उद्देश्यों के लिए सामूहिक विश्लेषण किया जाता है :

- विभिन्न प्राग्सूचक चरों का योगदान और उनका आश्रित चर से सम्बन्धित मानों या स्तरों का निर्धारण।
- प्राग्सूचक चरों में से लिये गए मानों का नए संयोजनों के लिए एक प्राग्सूचक प्रारूप स्थापित करना।

सामूहिक विश्लेषण का मुख्य लाभ यह होता है कि मापीय या गैर मापीय आश्रित चरों को अनुकूल योग्य बनाना होता है और इसका प्रयोग गैर मापीय चरों को प्राग्सूचक रूप में योग्य बनाना भी होता है।

सामूहिक विश्लेषण के लिए निर्णय प्रकिया :— एक सामूहिक विश्लेषण के लिए, एक उत्पाद कक्षा को वस्तुओं के एक समूह के साथ सुविचारित किया जाता है जो उस कक्षा में उत्पादों का मूल्यांकन करेगा। गुणों का एक समूह या प्राग्सूचक चरों को चयनित किया जाता है जो उत्पाद कक्षा का वर्णन करता है। प्रत्येक गुण के संभावित स्तरों को चयनित किया जाता है। एक उत्पाद उत्पाद कक्षा मे तब गुण स्तरों का एक सामान्य संयोजन होता है, अर्थात एक स्तर प्रति गुण। एक विशिष्ट सामूहिक विश्लेषण में निम्नलिखित स्तर सम्मिलित होते हैं :

- **गुण एवं स्तर चयन** :— प्रथम चरण में यह निर्धारण करना होता है कि किन गुणों एवं प्रत्येक गुण के किन स्तरों को अध्ययन में सम्मिलित करना होगा। उदाहरण के लिए, लेपटाप के क्रय निर्णय के लिए, तीन गुणों को ब्रान्ड का नाम, स्मृति आकार एवं कीमत का चयन। प्रायः अधिक गुणों का प्रजनन करना होता है तब उनका विश्लेषण सम्भव है, इसमें उनकी संख्या को कम करने की आवश्यकता होती है। सामान्यतया, एक अध्ययन के लिए 5 से 15 गुण सुविचारित करते हैं। तब विशिष्ट गुण स्तरों में सबसे उत्तम का चयन करना चाहिए। यदि एक गुण सतत है, दोनों गुण स्तरों की सीमा और स्तरों की संख्या के निर्धारण की आवश्यकता होती है। पर्याप्त अन्तः स्थायी स्तरों का उपयोग पर्याप्त रूप से सीमा के बचाव में करना चाहिए। सामान्यतया 2 से 5 गुण स्तरों को सुविचारित करते है। उदाहरण के लिए, 3 भिन्न ब्रान्डस, 3 भिन्न स्मृति आकार और 2 भिन्न कीमत सीमाओं का चयन होता है।
- **अवधारणा जनन** :— गुणों एवं स्तरों के निर्धारण के पश्चात दिखाये गये संकल्पना से प्रतिक्रियादाताओं के जनन की आवश्यकता होती है। एक बार गुण एवं स्तरों को चयनित हो चुके हों, प्रतिक्रियादाताओं से गुण स्तरों के प्रत्येक संभावित संयोजन के मूल्यांकन के बारे में पूछना सम्भव हो सकता है। इसे पूर्ण क्रमगुणित प्रारूप कहा जाता है क्योंकि यह प्रारूप प्रयोग में बहुत लम्बा और जटिल होता है। अभ्यास में, केवल कुल अवधारणाओं के एक उपसमूह को प्रतिक्रियादाता के समक्ष प्रस्तुत किया जाता है और इसे भिन्नात्क क्रमगुणित प्रारूप के रूप में जाना जाता है।
- **प्राचल आंकलन** :— इस चरण में, प्रतिक्रियादाताओं को कहा जाता है कि वे प्रत्येक संयोजन का मूल्यांकन करें। एक प्रतीपगमन प्रत्येक गुण के प्रत्येक स्तर के लिए उपयोगिता के आकलन की गति होती है। अनेक विभिन्न प्रकार के प्रारूपों का उपयोग पूर्ण रूपरेखा आंकडे के विश्लेषण में किया जा सकता है। दो विभिन्न प्रारूपों भाग मूल्य एवं सदिश का इस उद्देश्य में उपयोग किया जा सकता हें इस सामूहिक विश्लेषण प्रारूप को निम्नलिखित सूत्र द्वारा निरूपित किया जा सकता है

$$U(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} X_{ij}$$

जहाँ

U(X) = एक उत्पाद / वस्तु की समस्त उपयोगिता

α_{ij} = j^{th} (j =1,2.3………k) के साथ of i^{th} (i=1,2, ……..m) गुण के साथ सम्बन्धित भाग मूल्य का योगदान है।

k_i = गुण के स्तरों की संख्या

m = गुणों की संख्या

X_{ij} = 1, यदि i^{th} गुंण का j^{th} स्तर उपस्थित है या शून्य के समान है।

- **निर्णय निर्धारण के लिए विश्लेषण** :– सामूहिक विश्लेषण में से प्राप्त परिणामों की सहायता के साथ, विभिन्न प्रकार के निर्णय लिये जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, ब्रान्ड, स्मृति आकार एवं कीमत सीमा के विभिन्न संयोजनों के सामूहिक विश्लेषण के आधार पर यह निर्धारित किया जा सकता है कि कौन सेा संयोजन प्रतिक्रियादाताओं द्वारा सबसे अधिक पसंद किया जा सकता है।

18.5.6 कारक विश्लेषण :– कारक विश्लेषण अन्योयन्याश्रय विधियों की श्रेणी में सबसे लोकप्रिय बहुविचरण तकनीक है। यह मुख्यतया उन परिस्थितियों में प्रयोग की जाती है जब चरों के मध्य अन्योन्याश्रय स्पष्ट होता है और हम अविकसित या गोपनीय कारकों को ज्ञात करना चाहते है जो इस समानता का सृजन करते है। यह एक अवलोकित चरों के समह का समान कारकों की एक संख्या को एक कारक जो प्रत्येक चर में अद्वितीय है में मिलाकर के रूप में निरूपित करने की कोशिश करता हैं। दूसरे शब्दों में, कारक विश्लेषण प्रक्रियाओं का एक समूह होता है जिसे मापीय चरों के एक बडे समूह के समाधान मे ंअपेक्षाकृत कुछ श्रेणीयों, कारकों के रूप में ज्ञात में प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण के लिए, गुणों के अवलोकित समूह में हम रूचि रखते है कि जब एक कार खरीदी जाती है, कार क्रेता सुविचारित होता हैं विशेषज्ञों से परामर्श्ज्ञ के पश्चात हमने एक कार में 11 लक्षणों का एक समूह जिसमें उपयोक्ताओं का उनके कार के चयन का आधार होता है, निर्धारित किया। ये लक्षण कार की कीमत (X_1) , कार की भीतर (X_2) , वातानुकूलन (X_3), ईधन की किफायत (X_4), इंजन शक्ति (X_5) , बैठने की क्षमता (X_6) , वाहृय रूप (X_7) , ऋण की उपलब्धता (X_9) , पुनः विक्रय कीमत (X_{10}) और सुरक्षा (X_{11}) है। यदि आप सावधानी से इन चरों को अवलोकित करते हैं तब आप अपेक्षा कर सकते हैं कि बहुत से गुण सहसम्बन्धित हो सकते हैं । उदाहरण के लिए, एक व्यक्ति जो एक कार की कीमत की और संवेदनशील है वह ईधन की किफायत, कार की पुनः विक्रय कीमत और उचित ऋण सुविधा की उपलब्धता के बारे में भी संवेदनशील होगा। इसका अर्थ है कि हम उपरोक्त चरों के समूह को कारकों में कम कर सकते हैं जो एक दूसरे से अत्याधिक सहसम्बन्धित हैं। यदि हम बहुत अधिक जानकारी खोये बिना करकों को एक छोटी

संख्या के साथ बडी संख्या के मापों को संक्षिप्त कर सकते हैं, हम विवरण का कुछ अर्थ प्रबन्ध प्राप्त करते हैं, जो विज्ञान सम्बन्धी अनुसंधान का एक लक्ष्य होता है।

कारक विश्लेषण में, चरों के मध्य सहसम्बन्ध के आधार पर, चरों की एक बडी संख्या को कारकों की एक छोटी संख्या में वर्गीकृत किया जताा है और इन कारकों का मान या नये चरों या अविकसित चरों को वास्तविक चरों के मानों द्वारा जोडकर जात किया जाता है। ये कारक आंकडों के रैखिक मिश्रण होते है। और करक भराई विशेष चर एवं आंकडा आव्यूह कें रूप में प्राय दर्शाया गये कारक के मध्य सहसम्बन्ध निरूपित करता हैं। कारक विश्लेषण प्रारूप को निम्नलिखित n वस्तुऐं k मापों या चरों के साथ आंकडा आव्यूह या अंक आव्यूह में दर्शाया जा सकता है :–

$$\begin{array}{cc|cccc|}
 & & \multicolumn{4}{c}{\text{चर}} \\
 & & a & b & c & k \\ \hline
 & 1 & a_1 & b_1 & c_1 & k_1 \\
\text{वस्तुऐं} & 2 & a_2 & b_2 & c_2 & k_2 \\
 & 3 & a_3 & b_3 & c_3 & k_3 \\
 & - & - & - & - & - \\
 & - & - & - & - & - \\
 & - & - & - & - & - \\
 & n & a_n & b_n & c_n & k_n \\ \hline
\end{array}$$

इस आव्यूह में, a_1 a चर में 1^{st} वस्तु के अंक को दर्शाता है और इसी प्रकार प्रत्येक माप में अंकों का मानकीकृत निम्न सूत्र के प्रयोग से किया जाता है :–

$$x_i = \frac{X-\bar{X}}{\sigma_1}$$

इस प्रकार आव्यूह के किसी स्तम्भ में अंकों का योग 0 है और किसी स्तम्भ में अंको का प्रसरण 1.0 है।

उद्देश्य :– कारक विश्लेषण विभिन्न उद्देश्यों को संतुष्ट करने के लिए निष्पादित किया जा सकता है, उनमें से मुख्य निम्नवत हैं :–

- चरों के सारांश के लिए इसे अर्थकारी तकनीक के रूप में प्रयोग किया जा सकता है और चरों के मध्य सह सम्बन्ध के उपयोग के माध्यम से समानताओं का निर्धारण करना।
- कारक विश्लेषण के माध्यम से, आंकडों की बडी मात्रा को सरलीकरण द्वारा ज्यादा से ज्यादा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार, आंकडों को कम करना कारक विश्लेषण मुख्य उद्देश्य है।
- कारक विश्लेषण हमें उन सिद्धान्तों के परीक्षण की इजाजत देता हैं जिसमें सम्मिलित चरों की स्पष्ट रूप से माप दृढ होता है।

- यह हमें प्रत्येक कारक के सापेक्ष भार को ज्ञात करने में भी सहायता करता हैं

अवधारणाऐं :– कारक विश्लेषण निम्नलिखित तीन बुनियादी अवधारणाओं पर आधारित है :–

- आंकडों को मापीय होना चाहिए, गैर मापीय आंकडों की स्थिति में कल्पित चरों के उपयोग की आवश्यकता होती है।
- प्रतिदर्श आकार पर्याप्त होना चाहिए जिसकी वजह से सच्ची बनावट निर्धारित की जा सकती है। सामान्यता इसे 5 से 20 तक परिवर्तित होना चाहिए।
- चरों को एक दूसरे से सहसम्बन्धित होना चाहिए।

शब्दावली :– कारक विश्लेषण को उचित तरीके से समझने के लिए, आपको निम्नलिखित पदो के सच्चे अर्थ को समझना चाहिए जो कारक विश्लेषण के सन्दर्भ मे प्रायः प्रयोग किये जाते हैं:–

कारक :– एक कारक अर्न्तहित आयाम होता है जो अनेक अवलोकित चरों के लिए संज्ञान लेता हैं अध्ययन की प्रकृति एवं सम्मिलित चरों की संख्या के अनुसार, एक या अधिक कारक हो सकते हैं।

कारक भराई :– कारक भराई वे मान होते हैं जो व्याख्या करते हैं कि कैसे कारकों के अन्वेषित के लिए चर एक दूसरे से निकटतम सम्बन्ध रखते हैं। यह एक आव्यूह होता है जो चरों एवं कारकों के विभिन्न संयोजनों के मध्य सहसम्बन्ध को निरूपित करता है। $Li(j)$ अभिव्यक्ति कारक में i चर j का कारक भराई को दर्शाती है जहॉ $i = 1,2,3,\ldots\ldots..n$ और $j = 1,2,3,\ldots\ldots n$.

सहसम्बन्ध गुणांक आव्यूह :– यह वास्तविक अवलोकनों के मध्य विभिन्न सहयोग चरों के युग्मों के आव्यूह का सहसम्बन्ध गुणांक हें

समानता :– समानता दर्शाती है कि एक साथ लिये हुए अर्न्तहित कारक के लिए प्रत्येक चर कितना अधिक महत्व रखती है। इसे अभिव्यक्ति द्वारा दर्शाया जाता है। यह सभी कारकों में चर के कारक भराई के वर्ग का योग होता है : $h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} L_{ij}^2$

ईगन मान :– यह एक कारक में सभी चरों के कारक भराई के वर्गों का योग होता है। ईगन मान को अविकसित आधार भी कहा जाता है। यह चरों के विशेष समूह जिन्हें विश्लेषित किया जा रहा हो के प्रत्येक कारक की सापेक्ष महत्ता को निर्दिष्ट करता है।

चकानुकम :– यदि कारक भराई आव्यूह एक सरल बनावट रखता है, यह स्पष्टीकरणों को सरल बनाता है। सरल बनावट को प्रत्येक कारक के कारक भराई की एक दृष्टि द्वारा अवलोकित किया जा सकता है। यदि एक कारक में कारक भराई उच्च हो दूसरे में बहुत कम हो, इसे एक सरल बनावट का अधिकार कहते हैं। यदि कोई सरल बनावट न हो तब कारकों का n आयामी स्थल एक द्वारा इस प्रकार से घुमना चाहिए कि संशोधित कारक भराई में एक सरल बनायेंगें। यदि कारक स्वतन्त्र है, लम्ब कोणीय घुमाव सम्पन्न होता है और यदि कारक सहसम्बन्धित होते हैं, एक निर्यक घुमाव बनता है। घुमाव को ध्यान दिये बिना प्रत्येक चर के लिए समानता बाधा रहित रहेगी लेकिन घुमाव के परिणाम के रूप में ईगन मान परिवर्तित होगें।

कारक विश्लेषण के प्रकार :– कारक विश्लेषण के प्रकार निम्नवत हो सकते हैं :

R प्रकार कारक विश्लेषण :– यह कारक विश्लेषण का सबसे सामान्य प्रकार होता है। R तरीके में, पंक्तियॉ स्थितियॉ होती है, स्तम्भ चर होते हैं, कक्ष प्रविष्टियॉ चरों में स्थितियों के अंक होते हैं। इसका उद्देश्य चरों के समूहों जो अविकसित आयामों या कारकों का निर्माण करते हैं उन्हें निर्धारित करना है। यह अर्न्तहित बनावटों या कारकों के अनुसार चरों और उनके समूहों का आंकलन करता है। इस प्रकार R तरीके में, कारक समय के दिये हुए एक बिन्दु में लेागों के एक समूह या दूसरे अस्तित्वों में चरों के गुच्छ में होते हैं।

Q प्रकार कारक विश्लेषण :– इसे प्रतिलोम कारक विश्लेषण भी कहा जाता है जहॉ सहसम्बन्ध स्थितियों के बजाय प्रतिक्रियादाताओं के मध्य देखा जाता है। Q तरीके में, पंक्तियॉ चर हेाती है और स्तम्भ स्थितियॉ होती हैं और कक्ष प्रविष्टियॉ। चरों में स्थितियों के अंक होते हैं यह एक विशेषताओं के समूह में उनकी समानता के आधार पर प्रतिक्रियादाताओं का समूह बनाता है।

R तरीका और Q तरीका कारक विशलेषण के सबसे अलग कारक विशलेषण o विधि, T विधि और S विधि भी प्रयोग की जाती है। ये तीन विधियॉ समय श्रेणी विशलेषण के स्थित में प्रयोग की जाती है।

कारक विश्लेषण की विधियॉ :– कारक विश्लेषण को विभिन्न तरीकों से सम्पादित किया जाता है। कारक विश्लेषण की मुख्य विधियों का वर्णन निम्नवत है :–

केन्द्रक विधि :– यह कारक विश्लेषण की बहुत लोकप्रिय विधि है जिसे एल0एल0 थ्रस्टोन द्वारा विकसित किया गया था। यह समझने में आसान और दूसरी तकनीकों की तुलना में इसमें अपेक्षाकृत सरल गणनाऐ सम्मिलित होती हैं। यह कारक विश्लेषण के दूसरी विधियों को समझने में सहज मार्ग बनाता है। केन्द्रक विधि चिन्हों को नकारते हुए भराई के योग को उच्चतम की सीमा की आरे अग्रसर करती है। यह विधि परिणामस्वरूप प्रत्येक कारक के लिए पूर्ण भराई का सबसे बडे योग का सार तत्व निकालती है। इसे रैखिय संयोजनों द्वार परिभाषित किया जात है जिसमे सभी भार या तो +1.0 हों या -1.0। कारकों को केवल सामान्य प्रसरण के आधार पर आंकलित किया जाता है और विशिष्ट एवं त्रुटि विसरण को अपवर्जित किया जाता है।

प्रमुख घटक विश्लेषण विधि :– यह विधि नए चरों का इस तरीके से पता लगाती है जो अवलोकित चरों के रैखीय संयोजनों में हो उनमें अधिकतम प्रसरण हो और वे सहसम्बन्धित न हों। इसे एच होटलिंग द्वारा विकसित किया गया था। यह उस स्थिति में उपयुक्त होती है जहॉ उद्देश्य आंकडों का सार होता है जब प्रसरण की अधिकतम मात्रा को बनाए रखना होता है। यह विधि अनूठा हल प्रदान करती है, इस तरह से परिणामों से वास्तविक आंकडों की फिर से बनावट की जा सकती है। इस विधि में, आंकडों में कुल विसरण सुविचारित किया जात है और कुल विसरण पर आधारित कारकों को प्रमुख घटक कहा जाता है। ये कारक कुल विसरण के महत्तम भाग का पता लगाते हैं। सामान्यतया, यह देखा जा सकता है कि प्रमुख घटक विश्लेषण विधि केन्द्रक विधि के उपर एक उन्नत हल है।

कारक घुमाव :– एक सहसम्बन्ध आव्यूह में से एक कारक हल को प्राप्त गणितीय प्रक्रिया प्रयोग इस तरीके से है कि प्रत्येक क्रमागत कारक, प्रत्येक में जो दूसरे कारकों के साथ सहसम्बन्धित न हों, जितना सम्भव हो सके अवलोकित चरों का पता लगाना है। घुमाव परिणामों को अधिक समझने योग्य बनाता है और प्रायः कारकों के स्पष्टीकरणों को सुगम बनाने में आवश्यक होता है। दूसरे शब्दों मे कारक घुमाव एक अधिक प्रासंगिक कारक समाधान है जो कारक अक्ष के दक्ष प्रयोग या समाधान की प्रक्रिया है। कारक विश्लेषण में दो प्रकार के घुमान प्रयुक्त होते हैं उनमें से एक लम्ब कोणीय घुमाव होता है। यदि कारक अक्ष 90^0 का कोण बनाये रखते है तब इसे लम्बकोणीय घुमाव के रूप में जाना जाता है। उन्हें इस तरीके से धुमाया जाता है कि कारक अक्ष चरों के सबसे अच्छे लायक हों । लम्बकोणीय घुमाव के कुछ प्रसरण होते हैं। वेरीमेक्स घुमाव कारक अक्षों का एक लम्बकोणीय घुमाव है जो एक कारक आव्यूह में सभी चरों (पंक्तियॉ) का एक कारक के वर्ग भराईयों के विसरण को अधिकतम सीमा तक करता है।

एक कारक का विसरण सबसे अधिक होता है जब इसकी सबसे छोटी भराई शून्य की ओर अग्रसर होती है और इसकी सबसे बडी भराई एक की ओर अग्रसर होती है। यह सबसे सामान्य घुमाव विकल्प है। दूसरा लम्ब कोणीय घुमाव विकल्प क्र्वाटिमैक्स घुमाव होता है जो प्रत्येक चर की व्याख्या में आवश्यक कारकों की संख्या को महत्तम करता है। इस प्रकार का घुमाव प्रायः एक सामान्य कारक उत्पन्न करता है जिसमें अधिकतम चर उच्च या मध्यम अंश में भारित होते हैं। दूसरे प्रकार का कारक घुमाव गैर लम्बकोणीय या तिर्यक घुमाव। इस घुमाव में, कारकों को सहसम्बन्ध के लिए अनुज्ञात किया जाता है। यह परिणाम उच्च ईगन मानों में होगा लेकिन कारकों के क्षीण विवेचनीय में नहीं।

18.5.7 गुच्छीय विश्लेषण :– गुच्छीय विश्लेषण वर्गीकृत समस्याओं के समाधान के लिए एक अन्वेषी आंकडा विश्लेषण उपकरण होता है। इसका प्रयोग मिश्रित अवलोकनों को समूहों के लिए इस तरीके से प्रयोग किया जाता है कि प्रत्येक समूह में निश्चित विशेषताओं के साथ एकरूपता हो और प्रत्येक समूह दूसरे समूहों में से समान विशेषताओं के साथ भिन्न हों। इस प्रकार , इसका उद्देश्य स्थितियों को समूहों या गुच्छों में क्रमबद्ध करना हैं ।

तकनीकी रूप से , एक गुच्छ चरों को सम्मिलित करता हे कि चर एक दूसरे के साथ उच्च सह सम्बन्ध रखते हैं और उनका दूसरे गुच्छ के चरों के साथ तुलनात्मक रूप में छोटा (कम) सह सम्बन्ध होता है। इस प्रकार, गुच्छीय विश्लेषण का आधारभूत उद्देश्य समग्र के अस्तित्व में कितने पारस्परिक अनंय एवं सुविस्तृत गुच्छों का निर्धारण करना है और तद्पश्चात इसका उद्देश्य बनावट का वर्णन करना है। गुच्छीय विश्लेषण की स्थिति मे, स्थल के आंकडों का बिन्दुओं के रूप में विचार किया जा सकता है जहॉ अक्ष चरों के समान होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि आय को x अक्ष में और बचतों को y अक्ष में दर्शाते हैं तब विभिन्न व्यक्तियों की आय एवं बचतों का संग्रहित आंकडे को रेखाचित्र में बिन्दुओं के रूप मे निरूपित किया जा सकता हैं। इन बिन्दुओं के आधार पर, विभिन्न गुच्छेां को बनाया जा सकता हैं । मान लें कि, दो

गुच्छ A एवं B बनाने है जहॉ A लोगों की कम आय और ज्यादा बचत को दर्शाता है जबकि B लोगों के समूह को दर्शाता है जिनकी आय ज्यादा और बचत कम है। इस स्थिति में, एक गुच्छ के अन्दर लोगों के पास समान विशेषताऐं होती है लेकिन समान विशेषताओं के विरोध में दूसरे गुच्छों के साथ ये अर्थपूर्ण रूप से भिन्न होते हैं। कुछ लोग ऐसे होंगें जिन्हें किसी गुच्छ में वर्गीकृत नहीं किया गया हो क्योंकि उनका वर्गीकरण स्पष्ट नहीं होता है या ये इन विशिष्ट समूहों या गुच्छों से सम्बन्ध नहीं रखते हैं।

इसलिए, गुच्छ विश्लेषण खोज का एक उपकरण होते है जो आंकडों मे सम्बन्धों एवं बनावट को प्रदर्शित करता हे और इसके परिणाम एक विधिवत वर्गीकरण योजना की परिभाषा मे योगदान कर सकता है। इसका प्रयोग मुख्यता निम्न दो उद्देश्यों के लिए किया जाता है :

- समग्र में गुच्छों (अर्थात पारस्परिक अनंय और सुविस्तृत समूहों) का निर्धारण करना।
- अलग अलग समूहों के अंदर गुच्छों द्वारा आंकडे को कम करना।

गुच्छीय प्रकिया :– गुच्छीय प्रक्रिया को विभिन्न विधियों से सम्पन्न किया जा सकता है। गुच्छ की मुख्य विधियों को दो व्यापक श्रेणीयों में वर्गीकृत किया जा सकता है :

सोपानिक विधि :– सोपानिक विधि नीचे ऊपर दृष्टिकोण (संपिडित गुच्छ) या ऊपर नीचे दृष्टिकोण (विभाजनात्मक गुच्छ) का प्रयोग करते हुए गुच्छ की तरफ एक पेड को विकसित करना होता है संपिडित विधियों का प्रारम्भ प्रत्येक अवलोकन के साथ एक गुच्छ के रूप में होता है और प्रत्येक चरण के संयुक्त अवलोकनों कें साथ तब तक गुच्छों का निर्माण होता है जब तक एक बडा गुच्छ न हो । दूसरी ओर विभाजनात्मक विधियॉ का आरम्भ एक बडे गुच्छ के साथ होता है और छोटे गुच्छीय पदो को जो कि सबसे असमान हैं को पृथक कर आगे बढते हैं।

गैर–सोपानिक विधि :– गैर–सोपानिक गुच्छ एक गुच्छों की निर्धारित संख्या को लेती है और तब अधिकतम गुच्छ अन्तर सुनिश्चयकरण द्वारा इष्टतम समाधान ज्ञात करने की कोशिश करता है। यह प्रतिदर्श का विभाजन करता हैं प्रत्येक गुच्छ के पास एक बीज बिन्दु होता है और सभी वस्तुओं के अन्दर उस गुच्छ में एक नियत दूरी सम्मिलित की जाती है। गैर–सोपानिक गुच्छ का दूसरा तरीका प्रतिदर्श के माध्यम से सर्पिल होत है, बीज बिन्दु के प्रत्येक स्थिति जिसके ये नजदीक हैं को निर्धारित करते है।। आनुक्रमिक द्वार, समानान्तर द्वार और इष्टतम विभाजन गैर सोपानिक गुच्छ की तीन भिन्न दृष्टिकोण हैं।

जब प्रतिक्रियादाताओं को चरों के बदले वर्गीकृत किया जाता है तब गुच्छीय विश्लेषण कारक विश्लेषण की तुलना में एक उचित तकनीक होती है। लेकिन गुच्छीय विश्लेषण खण्डीकरण की एक व्यक्तिपरक विधि होती है, इस प्रकार, इसमें पक्षपात की संभावना होती है। गुच्छीय विश्लेषण की दूसरी शर्त यह होती है कि इस विश्लेषण में से प्राप्त परिणामों का सांख्यिकीय अर्थपूर्ण परीक्षण सम्भव नहीं होता है।

18.5.8 बहुआयामी प्रवर्धन :– बहुआयामी प्रवर्धन आंकडा छोटा करने की तकनीक होती है जिसका मुख्य उद्देश्य एक आकडे समूह की गुप्त बनावट को बताना होता है। एक आकडे समूह की गुप्त बनावट को बताना होता है। इसका प्रयोग एक पद की एक समय में एक से अधिक आयामों की माप करना होता है। यह सर्वत्र लोगों के अवबोधनात्मक पसंदों के एक विशेषताओं की बडी संख्या की माप का एक महत्वपूर्ण उपकरण होता है। बहुआयामी प्रवर्धन के पीछे की बुनियादी अवधारणा यह होती है कि लोग आयामों की एक संख्या में वस्तुओं के एक समूह को जो एक दूसरे से केवल एक के बदले अधिक या कम समान हो का अर्थ लेते हैं । इसका अर्थ है कि वस्तुओं की समानताओं या असमानताओं का निर्धारण प्रतिक्रियादाताओं में एक साथ एक से अधिक आयामों द्वारा किया जाता है। अभ्यास में अवबोधनों को एक बहुआयामी रूपरेखा में स्थान की दृष्टि से निरूपित किया जाता है और उन्हें बोधात्क प्रतिचित्रण कहते हैं।

बहुआयामी प्रवर्धन के प्रकार :– बहुआयामी प्रवर्धन अन्योन्याश्रय विधियों की श्रेणी में एक महत्वपूर्ण तकनीक होती है। एमडीएस तकनीकों को आयामी कमी के लिए तकनीकेां के रूप मे भी जाना जाता है। इन्हें दोनों मापीय एवं गैर मापीय आंकडों मे प्रयोग किया जा सकता है। इस प्रकार, बहुआयामी प्रवर्धन को दो विस्तृत श्रेणीयों 1. मापीय एमडीएस और 2. गैर मापयी एमडीएस में विभाजित किया जा सकता है।

मापीय एमडीएस की स्थिति में, दोनों आगत एवं प्रक्षेपण मापीय प्रकृति में होते हैं इस प्रकार आगत एवं प्रक्षेपण आंकडों के मध्य एक मजबूत सहसम्बन्ध हेाता है और आगत आंकडों के अधिकतम गुणों को अवलोकित किया जाता है। गैर–मापीय एमडीएस की स्थिति में, आगत आंकडा गैर मापीय एवं प्रक्षेपण आंकडा मापीय प्रकृति में होता है क्योंकि सामान्यतया, आगत आंकडे को कमवाचक पैमाने में मापा जाता है और इसे स्थान की दृष्टि में निरूपित किया जात है जो अन्तराल पैमाना है। जब आंकडा गैर–मापीय होता है, समानता के सम्बन्ध मे प्रत्येक युग्म को श्रेणी विधि से सम्पन्न करते हैं और तब निर्णित समानताओं को सांख्यिकीय दक्ष प्रयोगों के माध्यम से दूरीयों में परिवर्तित करते हैं और परिणामस्वरूप तरीके से n आयामी स्थल में दर्शाया जाता है कि अन्तर बिन्दु दूरीयॉ वास्तविक अन्तर बिन्दु निकटता को सबसे अच्छे तरीके से बनाए रखे।

महत्व :– एमडीएस एक बहुत उपयोगी तकनीक होती है जो विभिन्न उद्देश्यों के लिए शोधकर्ताओं द्वारा प्रायः प्रयोग की जाती है। यह बहु विशेषताओं के बदले प्रतिक्रियादाताओं की प्रवृत्तियों के माप की एक अच्छी तकनीक है। एमडीएस की सहायता के साथ, वस्तुओं, व्यक्तियों या दोनों को न्यूनतम सूचना से पैमानित किया जा सकता है। यह सबसे प्रमुख विशेषताओं के निर्धारण में भी सहायता करता है जो एक विशिष्ट निर्णय बनाने के लिए प्राथमिक निर्धारक होते हैं। इसके अतिरिक्त, स्थान की दृष्टि से प्रतिचित्रण में लोगों के अवबोधनों में अन्तर विशेषरूप से उपयोगी होते हैं और इस प्रकार नए अवसरों को चिन्हित करना होता है। यद्यपि यह एक उपयोगी तकनीक है लेकिन इसके साथ कुछ सम्बन्धित शर्ते भी होती हे । उदाहरण के लिए, अवधारणाओं का सुझाव जैसे समानता और पसंद स्पष्ट नहीं है और प्रत्येक

प्रतिक्रियादाता का अवबोधन एक दूसरे से भिन्न है। इसी तरह, परिणामों की व्याख्या करना कठिन होता है जब शोधकर्ता प्रोत्साहन परिवर्तन से बोधात्मक प्रतिचित्रण परिवर्तन में सम्बन्ध जोडने की कोशिश करता है।

18.5.9 अंतर्निहित बनावट विश्लेषण :– अविकसित बनावट विश्लेषण अन्योन्याश्रय विधियों की श्रेणी में दूसरी तकनीक होती है। इसे दो उद्देश्यों के लिए निष्पादित किया जाता है – अविकसित कारकों का सार तत्व निकालना और अवलोकित चरों के साथ इन कारकों का संकेतक के रूप में सम्बन्ध व्यक्त करना और प्रतिक्रियादाताओं के एक समग्र को शुद्ध रूप में वर्गीकृत करना। इस प्रकार आप देख सकते हैं कि इसके उद्देश्य कारक विश्लेषण के उद्देश्यों के समान है।

इस प्रकार का विश्लेषण उपयुक्त होता है जब एक अध्ययन में सम्मिलित चर निभ्ररता सम्बन्ध नहीं रखते हैं और चर गैर–मापीय होते हैं। ये तकनीकें विशेषरूप से उपयोगी होती है जब आंकडे की मात्रा विशाल एवं दुःसाध्य होती हैं । अविकसित बनावट विश्लेषण मे प्रारूपों की बडी संख्या जैसे अविकसित कक्षा विशलेषण, अविकसित विशेषता विश्लेषण, अविकसित रूपरेखा प्रारूप इत्यादि सम्मिलित होते हैं।

18.6 सारांश

बहुविसरण विश्लेषण सभी सांख्यिकीय विधियों से सम्बन्ध रखता है जो बहुमापों में अनुसंधान के अर्न्तगत प्रत्येक व्यक्ति या वस्तु को साथ –साथ विश्लेषित करता है। बहुविसरण विश्लेषण एकल विसरण एवं द्विविसरण सांख्यिकीयों से निकलता है। बहुविसरण तकनीकों को तीन कारकों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है 1.) चरों का वर्गीकरण आश्रित एवं स्वतन्त्र चरों में 2) एकल विशलेषण में उपचारित आश्रित चरों की संख्या 3) चरों के माप का पैमाना बहुविसरण विश्लेषण को मुख्यतः दो समूहो में वर्गीकृत किया जाता है, आश्रित एवं अन्योन्याश्रित तकनीक, सम्बन्ध के आधार पर उनका मूल्यांकन हो। इस इकाई में, आप बहुविसरण तकनीकों के कुछ लोकप्रिय अवधारणाओं के बारे मे अध्ययन कर चुके हैं। बहुप्रतिगमन विशलेषण सम्बन्ध की एक माप होती है जिसमें एक एकल आश्रित चर एवं दो या अधिक स्वतन्त्र चर सम्मिलित होते हैं। बहु विभेदक विश्लेषण प्रयोग होता है जब आश्रित चर को संज्ञानात्मक पैमाने में और स्वतन्त्र चर को अन्तराल या अनुपात पैमाने में मापा जाता है। बहुविसरण विश्लेषण का प्रसरण या MANOVA एक समय में एक से अधिक मापीय आश्रित चर के लिए माध्यों के मध्य अन्तर के अर्थपूर्ण होने का विश्लेषण करता हैं । प्रामाणिक सह सम्बन्ध विश्लेषण अर्थकारी चरों के एक समूह के साथ उनके संयुक्त सहप्रसरण में से आश्रित चरों के एक समूह के पूर्वानुमान में प्रयोग होता है। सामूहिक विश्लेषण विरचनात्मक वस्तुओं के मूल्यांकन में विशेषताओं के संयोजन के रूप मे प्रदर्शित उपयोगी विधि होती है। ये सभी तकनीकें आश्रित विधियों के श्रेणी से सम्बन्ध रखती हैं

कारक विश्लेषण, गुच्छीय विश्लेषण, बहुआयामी प्रवर्धन और अविकसित बनावट विश्लेषण को अन्योन्याश्रय विधियों की श्रेणी में सम्मिलित करते हैं । कारक विश्लेषण आंकडा कम करने एवं आंकडा संक्षिप्त करने के लिए प्रक्रियाओं का एक समूह हैं । कारक विश्लेषण की दो महत्वपूर्ण विधियॉ केन्द्रक विधि एंव प्रमुख घटक विश्लेषण

विधि है। गुच्छीय विश्लेषण अवलोकनों के संयोजन का समरूपता वर्गों के लिए प्रयोग किया जाता हैं । बहुआयामी प्रवर्धन एक आंकडा कम करने की तकनीके है जिसका मख्य उद्‌देश्य एक आंकडे समूह का गुप्त बनावट को निकालना है।

18.7 शब्दावली

मपीय आंकडा : चरों को अन्तराल या अनुपात पैमाने पर मापा जाता है।
गैर मापीय आंकडा : चरों को संज्ञात्मक या क्रमवार पैमाने पर मापा जाता है।
अर्थकारी चर : चर जो दूसरे चर मे ंपरिवर्तन का कारण होता है।
मापदण्ड चर : चर जिसका मान दूसरे चर के प्रभाव के कारण परिवर्तित होता है।
आइगेन मान : एक कारक के सम्बन्ध में कारक के वर्गमानों का योग होता है।
कारक घूर्णन : कारक अक्ष के जोड तोड की या समायोजन की प्रक्रिया ।
बहु समेरेखिकता : एक एकल स्वतन्त्र चर का दूसरे स्वतऩ चरों के एक समूह के साथ उच्च सह सम्बन्ध ।

18.8 बोध प्रश्न

(अ) रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. कल्पित चर को ------चर के रूप में भी जाना जाता है।
2. एकल मापीय आश्रित चर की स्थिति में ---------सबसे वांछनीय तकनीक होती है।
3. बहु विभेदक विश्लेषण में, -------समूह होने चाहिए।
4. -------विश्लेषण एक विरचनात्मक विधि होती है।
5. संपिंडित एवं -----विधि सोपानिक पुंज विश्लेषण की दो पहुंच मार्ग हैं।
6. बहुआयामी पैमाना --- वर्ग की विधियों की एक महत्वपूर्ण तकनीक होती है।

(ब) सत्य या असत्य

1. मापीय चरों संज्ञात्मक पैमाने मे ंमापा जाता है। (सत्य/असत्य)
2. विश्रामालय T MANOVA का एक विचरण है। (सत्य/असत्य)
3. वैरिमैक्स एवं क्वार्टीमैक्स घूर्णन तिर्यक घूर्णन के प्रकार होते हैं। सत्य/असत्य)
4. प्रामाणिक सह सम्बन्ध विश्लेषण स्पेयरमैन द्वारा प्रतिपादित किया गया था । (सत्य/असत्य)
5. R – प्रकार कारक विश्लेषण में पंक्तियॉ परिस्थितियॉ होती हैं एवं स्तम्भ चर होते हैं। (सत्य/असत्य)
6. सहरैखिकता दो आश्रित चरों के मध्य सम्बन्ध को व्यक्त करती है। (सत्य/असत्य)

18.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ)

(1) कृतिम (2) बहु प्रतिगमन (3) परस्पर अपवर्जी
(4) संयुक्त (5) विभाजन (6) अन्योन्याश्रय

(ब)

(1) असत्य	(2) सत्य	(3) असत्य
(4) असत्य	(5) सत्य	(6) असत्य

18.10 स्वपरख प्रश्न

1. लम्बकोणीय कारक घूर्णन क्या होता है।
2. उन स्थितियों को बतायें जहॉ अन्योन्यश्रितता विधियॉ। प्रयोग होनी चाहिए।
3. मापीय चरों को परिभाषित करें।
4. अर्थकारी एवं मापदण्ड चरों के मध्य विभेद करें।
5. बहुप्रसरण तकनीकों द्वारा आपका क्या अर्थ हैं।
6. बहुप्रसरण तकनीकों के वर्गीकरण को उपयुक्त उदाहरणों के साथ समझाइयें।
7. बहु विभेदक विश्लेषण की अवधारणाओं एवं विधि को समझाइयें।
8. कारक विश्लेषण विधि पर एक टिप्पणी लिखें।
9. पुंज विश्लेषण विधियों के विभिन्न प्रकारों को समझाइयें। इसके महत्व एवं सीमाओं का वर्णन करें।
10. निर्भरता विधियों के वर्ग से सम्बन्धत किन्ही दो बहुप्रसरण तकनीकों का संक्षेप में वर्णन कीजियें।

18.11 संदर्भ पुस्तकें

1. राय रमनद्यू एवं बैनर्जी सुभोजित, 'अनुसंधान प्रणाली के मूल' किताब महल इलाहाबाद
2. कोठारी सी0 आर0 , 'अनुसंधान प्रणाली : विधियॉ एवं तकनीकें' न्यू ऐज अन्तराष्ट्रीय प्रकाशन, नई दिल्ली।
3. गुप्ता शशि के0 एवं रंगी प्रनीति, 'अनुसंधान प्रणाली (विधियॉ, उपकरण एवं तकनीकें) कल्याणी प्रकाशन, नई दिल्ली।

इकाई 19 अवधारणा, दृष्टिकोण और विधियां

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- अनुसंधान की अवधारणा और अर्थ की व्याख्या कर सकें।
- अनुसंधान की आवश्यकता का वर्णन कर सकें।
- शोध समस्या के निर्माण की प्रक्रिया की व्याख्या कर सकें।
- अनुसंधान में वैज्ञानिक सोच के महत्व का वर्णन कर सकें।

19.1 प्रस्तावना

अध्ययन के विभिन्न क्षेत्रो में नवीनतम तथ्यों और सिद्धांतों के साथ अपने वर्तमान ज्ञान को अद्यतन करने की आवश्यकता है। इस लक्ष्य को हासिल करने के लिए विशिष्ट क्षेत्र में उपलब्ध ज्ञान से संबंधित अध्ययन के लिए अनुसंधान करने का सुझाव दिया जाता है। 'अनुसंधान' (Research) शब्द अति प्राचीन और वर्तमान ज्ञान में नवीनतम तथ्यों के साथ अद्यतन करने के लिए एक महत्वपूर्ण उपकरण के रूप में माना जाता है। वाणिज्य और व्यापार प्रबंधन के छात्र के लिए, अनुसंधान क्रियाविधि

विज्ञान या अनुसंधान प्रणाली अध्ययन का एक महत्वपूर्ण विषय है। इस विषय की समझ छात्रों में समस्या सुलझाने, तार्किक सोच (Logical Thinking) को बढ़ाने, कौशल विकसित करने आदि में सहायता करता है जिससे, आवश्यक घटना या परिस्थिति से छात्र सर्वोत्कृष्ट व् तार्किक समाधान के साथ बाहर आ सके। अनुसंधान पद्धति की इस इकाई में मूलभूत अवधारणाओं और अनुसंधान विधियों के दृष्टिकोण को समझाया गया है। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात छात्र प्रक्रियाओं और अनुसंधान पद्धति की विशेषताओं के बारे में अपनी समझ को विकसित करने में सक्षम हो पायेंगे ।

19.2 अनुसंधान और अनुसंधान पद्धति की परिभाषा

"अनुसंधान" शब्द को विभिन्न तरीकों द्वारा साहित्य में परिभाषित किया गया है हैं। वास्तव में शोध एक व्यवस्थित अन्वेषण है जो किसी क्षेत्र की समस्या या पसंदीदा क्षेत्र का अध्ययन करता है। यह प्रक्रिया, समस्या स्थिति की विशेषताओं के कारण को जानने के लिए, स्वयं में समस्या के विश्लेषण के साथ शुरू होती है। समस्या किसी से भी संबंधित हो सकती है, उदाहरण के लिए किसी संगठन में कर्मचारियों की अनुपस्थिति, ग्राहकों की संतुष्टि, विज्ञापन की प्रभावशीलता, ब्रांड के प्रति वफादारी, आदि को लेकर समस्या हो सकती है जिसका हल प्रबंधन को खोजना पड़ेगा। इस समय प्रबंधक को समस्या की प्रकृति के निष्पक्ष आकलन की आवश्यकता पड़ेगी, जिससे वह अध्ययन के आधार पर प्रबंधकीय निर्णय लेने के लिए सुझाव दे सके।

टिप्पणी

अनुसंधान, शोधकर्ता द्वारा आयोजित किया जाता है। शोधकर्ता वो व्यक्ति माना जाता है जो समस्या का अन्वेषण करते हुए समस्या से संबंधित कोई एक मान्य निष्कर्ष निकाल सके। शोध कार्य में वैज्ञानिक अन्वेषण तथा परिभाषित समस्या की जांच शामिल होती है। शोधकर्ता द्वारा, अनुसंधान प्रणाली के विषय में दिए गए मानकीकृत उपकरणों और तकनीकों का उपयोग करके वैज्ञानिक अध्ययन और अन्वेषण किया जाता है ।

सामान्यतः शोध, ज्ञान के लिए खोज को संदर्भित करता है। अनुसंधान को एक विशिष्ट विषय पर प्रासंगिक जानकारी के लिए एक वैज्ञानिक और व्यवस्थित खोज के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं। वास्तव में, अनुसंधान वैज्ञानिक अन्वेषण की एक कला है। वर्तमान उन्नत शिक्षार्थी शब्दकोश शोध की व्याख्या "fविशेष रूप से जांच के माध्यम से ज्ञान की किसी भी शाखा में नए तथ्यों तथा खोज के लिए एक सावधान अन्वेषण या जांच" के अर्थ में करती है । Redman और Mory अनुसंधान को "नया ज्ञान प्राप्त करने के लिए एक व्यवस्थित प्रयास" के रूप में परिभाषित करते है ।

अब आप अनुसंधान के अर्थ को समझ चुके हैं। यह उपयोगी होगा अगर "अनुसंधान" शब्द को अलग अलग दृष्टिकोण से उसकी विशेषताओं को समझाने तथा परिभाषाओं की व्याख्या करने के लिए विभिन्न दृष्टिकोण से परिभाषित किया जाय ।

अनुसंधान की कुछ परिभाषाएँ निम्नलिखित है ।

- किसी विषय में तथ्यों या सिद्धांतों की खोज करने के लिए अनुसंधान एक परिश्रमी और व्यवस्थित अन्वेषण या जांच है।
- अनुसंधान को एक ऐसे वैज्ञानिक अन्वेषण के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता जिसमे निर्धारित लक्ष्यों के अनुसार, आंकड़ो का संग्रह, आंकड़ो का विश्लेषण, आंकड़ो की व्याख्या तथा निष्कर्ष की प्रस्तुति शामिल है ।
- अनुसंधान एक ऐसा संरचित अन्वेषण है जो आम तौर पर लागू होने वाले स्वीकार्य वैज्ञानिक पद्धति का प्रयोग करके समस्याओं का समाधान और ऐसे ज्ञान की स्थापना करता है जो सामान्यतः स्वीकार्य हो।

अनुसंधान प्रणाली का उपयोग, अनुसंधान विधि में प्रयोग किये जाने वाले उपकरण के संग्रह तथा तकनीक का वर्णन करने के लिए किया जाता है। शोध पद्धति द्वारा अनुसरणीय अनुसंधान प्रणाली एक पूर्ण विज्ञान है । अनुसंधान प्रणाली के साथ जुड़े कुछ दृष्टिकोणों की चर्चा अगले भाग में हैं।

19.3 अनुसंधान के परिपेक्ष्य

अध्ययन के लिए, अन्वेषण तथा समस्या या स्थिति की समझ, अनुसंधान के मार्ग में पहला कदम है. उसके बाद शोधकर्ता, उस समस्या के कारणों का पता लगाने के लिए प्रयास करता है। इसलिए अनुसंधान में निम्न दो चरण शामिल होते है ।

चरण 1: अध्ययन के अन्तर्गत घटना की विशेषताओं की समझ और विश्लेषण ।

चरण 2: विशेषताओं के लिए कारणों की समझ और उनका विश्लेषण । अनुसंधान को भी अलग अलग दृष्टिकोणों से परिभाषित किया गया है।

ये दृष्टिकोण इस प्रकार हैं:

प्रतिमान (Paradigm) यह संदर्भित करता है उस विचार संप्रदाय है को जिसका अनुशरण, अनुसंधान करने के लिए किया जाता है।

दृष्टिकोण (Approach) यह एक शोधकर्ता द्वारा प्रश्न के उत्तर के लिए खोजे जाने वाले रास्ते तथा जवाब को कैसे संबोधित करना है, के बारे में है ।

उपकरण (Instruments) यह मानकीकृत उपकरण और अनुसंधान में इस्तेमाल किये जाने वाले तरीकों को संदर्भित करता है।

19.4 अनुसंधान के लक्षण

शोध को अलग अलग दृष्टिकोण से परिभाषित तथा शोध के चरणों को समझने के बाद हमें शोध और अनुसन्धान प्रणाली की विशेषताओं को समझना होगा। याद रखें, अब जब हम शोध की विशेषताओं का वर्णन कर रहे हैं, तो हमें किसी प्रक्रिया के रूप में अनुसंधान को मानना है जिसमे विभिन्न परस्पर अनुक्रमिक गतिविधियों शामिल होती है । दिन–प्रतिदिन के वातावरण में विभिन्न अन्य गतिविधियां भी शामिल होती है जो किसी व्यक्ति (प्रबंधक या शोधकर्ता) को निर्णय लेने के लिए मजबूर करती हैं। विभिन्न गतिविधियों को अनुसंधान के रूप में केवल तभी माना जायेगा जब यह कुछ आवश्यकताओं को पूरा करें । हमने पिछले अनुभाग में शोध की परिभाषा का परीक्षण करके अनुसंधान की इन आवश्यकताओं की पहचान की है। अब

हम अन्वेषण तथा अध्ययन के लिए मूलभूत आवश्यकताओं की सूची निम्नलिखित प्रकार से तैयार कर सकते हैं.

- अनुसंधान अन्वेषण तथा अध्ययन की एक व्यवस्थित प्रक्रिया ह।
- अनुसंधान की प्रकृति सार्वभौमिक है, तथा यह सभी प्रकार के विषयों के अध्ययन में प्रयोग किया जाता है।
- अनुसंधान में डेटा का संग्रह तथा विश्लेषण शामिल है।
- परिणाम तथा निष्कर्ष निकालने के लिए, अनुसंधान में वैज्ञानिक तर्क तथा विचार शामिल है .
- अनुसंधान एक चक्रीय प्रक्रिया है जो अंत में, आगे के अनुसंधान के लिए गुंजाइश छोड़ता है।
- अनुसंधान सिद्ध और मानकीकृत उपकरण का उपयोग, डेटा संग्रह और विश्लेषण के लिए करता है ।
- अनुसंधान की प्रकृति आम तौर पर निर्णयात्मक होती है।

टिप्पणी

जैसा कि पहले बताया गया है, शोध एक ऐसी प्रक्रिया है जिसमे परस्पर और अनुक्रमिक गतिविधियों का संग्रह शामिल है। हर गतिविधि को अनुसंधान नहीं माना जा सकता है। कुछ गतिविधियों की विशेषताए भी हैं जो अनुसंधान के साथ संबद्ध है.

गतिविधियाँ व्यवस्थित होनी चाहिए:

इससे संकेत मिलता है कि अनुसंधान में अनुक्रमिक गतिविधियों के संग्रह का अनुगमन (followed) किया जाता है।

गतिविधियों नियंत्रित होनी चाहिए:

यह इंगित करता है अध्ययन के तहत कारकों तथा चरो का प्रबंधन कुछ इस प्रकार से किया जाता है कि जिससे दो चरों के बीच प्रभाव – कारण संबंधों का अनुमान लगाया जा सके । शोधकर्ता अपने शोध अध्ययन को इस प्रकार व्यवस्थित करता है जो कि अन्य चरो के बीच संबंधों को प्रभावित करने वाले कारकों के प्रभाव को कम से कम कर दे।

गतिविधियां वैध होनी चाहिए:

इससे संकेत मिलता है कि जिस उद्देश्य के लिए एक विशिष्ट अनुसंधान में गतिविधियों और प्रक्रियाओं का पालन किया गया था है; वे ऐसा करने में सक्षम हैं।

गतिविधियां, सत्यापित करने योग्य होनी चाहिए:

इस अवधारणा का तात्पर्य यह है कि एक शोधकर्ता निष्कर्षों के आधार पर चाहे जो भी परिणाम निकाले उसको आप के साथ–साथ अन्य लोगों द्वारा भी सत्यापित किया जा सके ।

गतिविधियां दृढ़ होनी चाहिए:

इसका आशय यह है कि शोधकर्ता यह सुनिश्चित करने में न्यायसंगत होना चाहिए कि प्रश्नों के उत्तर खोजने के लिए शामिल प्रक्रियाये, प्रासंगिक, उचित तथा

न्यायोचित हैं । हालांकि अनुसंधान के विभिन्न प्रकार के लिए दृढ़ता की श्रेणी स्पष्ट रूप से भिन्न होती है।

अभ्यास:

"अनुसंधान प्रक्रिया" और "निर्णय लेने" में शामिल गतिविधियों की विशेषताओं को समझने के लिए, आप अपने विश्वविद्यालय के एक "अनुसंधान विद्वान" और किसी कंपनी के "विपणन प्रबंधक" के साथ बातचीत करे । इस खंड में वर्णित अनुसंधान प्रक्रिया की विशेषताओं के आधार पर अनुसंधान के रूप में माने जाने वाले गतिविधियों की पहचान कीजिये ।

19.5 अनुसंधान के उद्देश्य

अनुसंधान का उद्देश्य, वैज्ञानिक प्रक्रिया के अनुप्रयोग के माध्यम से प्रश्नों के उत्तर खोजना होता है। अनुसंधान के उद्देश्यों को निम्न रूप में सूचीबद्ध किया जा सकता है:

- एक घटना से परिचित या उसमे नए अंतर्दृष्टि प्राप्त करने के लिए ।
- एक विशेष व्यक्ति, स्थिति या समूह की विशेषताओं को चित्रित करने के लिए।
- किसी घटना में आवृत्ति को निर्धारित करने के लिए ।
- चरों के बीच कारण संबंध की परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए।

19.6 अनुसंधान के चरण

कई प्रतिमान उपलब्ध है जो बताते है कि कैसे एक अनुसंधान प्रक्रिया का संचालन किया जा सकता हैं और उनमें से केवल एक प्रक्रिया यहाँ प्रस्तुत है।
सामान्यतः एक अनुसंधान प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण होते हैं

चरण 1: विषय (शीर्षक) का निर्णय
चरण 2: विषय का विवरण विकसित करना
चरण 3: आवश्यकय सूचनाओ का निर्धारण
चरण 4: सूचना एकत्रित करना
चरण 5: सूचनाओ का व्यवस्थापन करना
चरण 6: सूचनाओ का विश्लेषण करना
चरण 7: निष्कर्ष तथा परिणाम संवाद

चित्र 1 :अनुसंधान प्रक्रिया के चरण

अभ्यास

आप को अपने विश्वविद्यालय में प्रस्तावित चुनाव के तहत "छात्र संघ के अध्यक्ष पद" के लिए एक जनमत सर्वेक्षण करना है। इस जनमत सर्वेक्षण के संचालन के लिए आवश्यक चरणों को नीचे लिखें। आपके द्वारा चयनित अनुसंधान प्रक्रिया के लिए चरणों को इस खंड में ऊपर सुझाए गए चरणों के साथ तुलना करें। नमत सर्वेक्षण को पूरा करने में प्रत्येक चरण के लिए आवश्यक गतिविधियों के अनुक्रम की सूची नीचे तैयार करें।

19.7 अनुसंधान की आवश्यकता

इस खंड में हम व्यापार और वाणिज्य में अनुसंधान के व्यावहारिक उपयोग को समझने की कोशिश करेंगे। व्यवसायी वातावरण में निर्णय लेने के लिए सावधानी से स्थिति के अध्ययन की आवश्यकता होती है। व्यापार और वाणिज्य में आई किसी विशिष्ट समस्या की जाँच तथा समस्याओं को हल करने के लिए, तर्कसंगत निर्णय लेने में अनुसंधान मदद कर सकते हैं। किसी अन्य क्षेत्र के अध्ययन, में भी अनुसंधान का वर्तमान ज्ञान में वृद्धि करने के लिए भी उपयोग किया जा सकता है । शोध, प्रत्येक तथा हर क्षेत्र में महत्वपूर्ण है। हमारा व्यापार कैसा चल रहा है तथा कौन से परिवर्तन करके हम, हमारे व्यापार में अधिक लाभ कमा सकते है, को बताने में भी, अनुसंधान हमें मदद करता है।

हम अनुसंधान की आवश्यकताओ को संक्षेप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

- अध्ययन के क्षेत्र में वर्तमान ज्ञान में वृद्धि तथा जीवन की गुणवत्ता में सुधार करने के लिए।
- प्रबंधन को मदद करने के लिए तथा तर्कसंगत और अच्छे निर्णय लेने के लिए।
- उत्पाद शुरू करने के लिए प्रभावी व्यापार योजना के लिए ।
- विपणन योजना के लिए ग्राहकों से प्रतिक्रिया लेने में ।

शोध का प्रयोग, ज्ञान के बुनियादी क्षेत्र, अनुप्रयुक्त क्षेत्र, या अनुसंधान के उद्देश्य के आधार पर किया जा सकता है। अनुसंधान, अध्ययन के बुनियादी क्षेत्र में अन्वेषण और नई अवधारणाओं की मान्यता तथा सिद्धांतों से संबंधित ज्ञान में वृद्धि करने की ओर उन्मुख होता है। अनुप्रयुक्त क्षेत्र के मामले में, शोध का उपयोग, विशिष्ट व्यापार समस्या को हल करने के लिए किया जाता है.

अभ्यास:

क्या आपको लगता है कि अनुसंधान की आवश्यकता, सभी प्रबंधकीय स्थितियों में है ? उपयुक्त उदाहरणों के साथ, अपने विचार की व्याख्या करने का प्रयास करें।

संकेत:

अनुसंधान अपने वैचारिक रूप में, सभी प्रबंधकीय फैसलों के लिए उपयोग नहीं किया जा सकता है। कुछ प्रबंधकीय फैसले अंतर्ज्ञान और अनुभवों पर भी आधारित होते हैं।

यह अन्वेषण की सीमा तथा निर्णयकर्ता की आवश्यकता पर निर्भर करता है कि वह अनुसंधान प्रक्रिया में दिए चरणों में निर्धारित शोध की विशेषताओं के अनुसार निर्णय ले या ना ले ।

19.8 शोध प्रश्न का सूत्रीकरण

आइये अब शोध प्रक्रिया के चरणों को समझते है। पहला चरण, शोध प्रश्न को तैयार तथा परिभाषित करना होता है। शोध प्रश्न एक विशिष्ट सवाल तथा शोध समस्या का एक हिस्सा है, जिसका अन्वेषण तथा उत्तर शोधकर्ता द्वारा दिया जायेगा। एक शोधकर्ता को किसी समस्या के बारे में कई सवाल हो सकते है। विभिन्न प्रश्नों में से एक विशिष्ट सवाल, शोध समस्या के रूप में चयन किया जाता है जिसका, अनुसंधान के मौलिक सिद्धांतों पर आधारित व्यवस्थित अन्वेषण के माध्यम से उत्तर दिया जा सके। एक शोध प्रश्न को परिभाषित करते समय निम्नलिखित बातें ध्यान में रखी जानी चाहिए:

1. शोध समस्या से सही प्रश्न अवश्य संबोधित किया जाना चाहिए।
2. शोध प्रश्न पूरी तरह से परिभाषित किया जाना चाहिए ।
3. शोध प्रश्न, अपेक्षित निर्णय निर्माता द्वारा आवश्यक उत्तरों से मान्य किया जाना चाहिए।
4. शोधकर्ता को यह सुनिश्चित करना चाहिए कि शोध प्रश्न के अलग अलग क्षेत्रों के लिए अन्वेषण संबंधित पर्याप्त डेटा उपलब्ध होगा ।
5. शोध प्रश्न से संबंधित डेटा का विश्लेषण करने के लिए समुचित वैज्ञानिक और सांख्यिकी उपकरण उपलब्ध होना चाहिए ।

एक शोध प्रश्न को विकसित करने के लिए, एक शोधकर्ता को बड़े पैमाने पर निर्णय निर्माता या अनुसंधान के परिणाम के उपयोगकर्ताओं के साथ परस्पर बातचीत करनी चाहिए। बातचीत का उद्देश्य मात्र शोध समस्या की परिभाषा को मान्य करना तथा व्यापक अनुसंधान समस्या के विभिन्न मुद्दों की खोज करना हैं। विभिन्न शोध समस्या के बीच एक विशिष्ट समस्या का चुनाव शोध प्रश्न को परिभाषित करने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए एक प्रबंधक, कंपनी के उत्पदो की बिक्री में गिरावट की समस्या का सामना कर रहा है। इसे एक प्रबंधकीय समस्या के रूप में जाना जा सकता है, जिसका प्रबंधक के द्वारा हल निकाला जाना चाहिए । इस विषय में प्रबंधक का समस्या के कारणों का पता लगाने में रुचि हो सकती है । जब एक शोधकर्ता प्रबंधक के साथ समस्या पर बातचीत करता है तो, वह शोधकर्ता विभिन्न दृष्टिकोण से समस्या को समझने की कोशिश करेगा, जैसे:

- प्रबंधक ने किन लक्षणों को देखकर यह माना कि बिक्री में गिरावट है ।
- बिक्री में गिरावट से संबंधित लक्षण की क्या विशेषताए हैं, यानी, मौसमी , अनियमित या सतत ।
- शोधकर्ता, प्रबंधक से "बिक्री में गिरावट" के कारण को जानने हेतु अन्वेषण की रीति के बारे में विशिष्ट होने के लिए पूछ सकते हैं।

एक बार जब शोधकर्ता, प्रबंधकीय सवाल को समझ कर सही तरीके से विश्लेषित कर लेता है तो यह अनुसंधान प्रश्न में परिवर्तित हो जाता है। Schindler और Cooper के द्वारा प्रबंधन के लिए दिए गए प्रतिमान ने निम्नलिखित सुझाव दिया –

अनुसंधान शोध समस्या के निर्माण में पदानुक्रम।

1. प्रबंधन दुविधा (Management Dilemma)

कौन से लक्षण प्रबंधन चिंता (symptoms cause management concern) का कारण है ?

कौन से पर्यावरण कारक (environmental stimuli)प्रबंध रूचि को उत्तेजित करते है ?

2. प्रबंधन सवाल (Management Question)

कैसे प्रबंधन नकारात्मक लक्षणों (negative symptoms)को समाप्त कर सकते हैं?

कैसे प्रबंधन पूरी तरह से एक अवसर को भुना (fully capitalize) सकता हैं?

3. अनुसंधान प्रश्न (ओं) (Research Question(s))

समस्या को ठीक करने या अवसर का लाभ उठाने के लिए प्रबंधन के पास क्या संभावित विकल्प (plausible courses of action) उपलब्ध हैं, जिसपर विचार किया जाना चाहिए?

4. अन्वेषनात्मक प्रश्न (Investigative Questions)

कार्रवाई के उपलब्ध विकल्पों (available courses of action) में से सबसे अच्छा विकल्प (best alternative) का चयन करने के लिए,प्रबंधक को क्या पता करने की जरूरत है?

5. माप प्रश्न (Measurement Questions)

प्रबंधक द्वारा अपेक्षित जानकारी प्राप्त करने के लिए क्या पूछने या देखने (asked or observed) की आवश्यकता है

6.प्रबंधन निर्णय

अनुसंधान के निष्कर्षों को देखते हुए, कारवाई के लिए क्या सिफारिश (recommended course of action)की गयी है?

शोध समस्या का निरूपण अनुसंधान के लक्ष्य को प्राप्त करने की ओर पहला कदम है। शोध प्रश्न का सृजन तथ्यों का खोज करने के लिए या व्यापार अथवा प्रबंधकीय समस्या को हल करने के लिए प्रेरणा के रूप में जिम्मेदार ठहराया जा सकता है। Northrop (1966) में लिखते हैं, कुछ असंतोषजनक होने पर ही अन्वेषण शुरू होता है। उदाहरण के लिए जब पारंपरिक मान्यताये अपर्याप्त होती हैं, या प्रश्न का समाधान करने के लिए आवश्यक तथ्य ज्ञात नही होते, या जब प्रासंगिक परिकल्पना के बारे में भी कभी नही सोचा गया होता तो किसी के पास क्या होता है । एक अन्वेषण की शुरुआत में केवल समस्या ही तो होती है। शोध समस्या का निर्माण भी एक महत्वपूर्ण सामाजिक कार्य है।

विभिन्न पुस्तकें और साहित्य की समीक्षा करने के बाद यह पाया गया कि सामाजिक वैज्ञानिकों के बीच शोध समस्याओं को तैयार करने के लिए सबसे प्रभावी प्रक्रिया पर बहुत कम सहमति है। विशेष रूप से, समस्याओं को स्पष्ट रूप से अनुसंधान में परिभाषित करना महत्वपूर्ण है भी या नही, पर काफी बहस की गयी है। हालांकि यह सलाह दी जाती है कि शोध समस्या तथा अनुसंधान प्रश्न शोधकर्ता तथा निर्णय निर्माताओं द्वारा ठीक से परिभाषित करना एवं समझा जाना चाहिए।

शोध समस्या के चयन में विचार

रुचि : एक अनुसंधान प्रयास में आम तौर पर समय लगता है, और इसमें कड़ी मेहनत तथा संभवतः अप्रत्याशित समस्याये भी शामिल होती है। इसलिए यह आवश्यक है कि प्रेरणा को बनाए रखने के लिए बहुत ही रुचिकर विषय का चयन करना चाहिए।

परिमाण : एक विषय का चयन करने के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है कि आप समय और संसाधनों के भीतर उसको प्रबंधित कर सकेँ । विषय संकीर्ण, विशिष्ट, स्पष्ट और प्रबंधनीय हो ।

अवधारणाओं के मापन : यह सुनिश्चित करें कि संकेतक और अवधारणाओं की माप के बारे में आप स्पष्ट हैं, यदि आप अपने अध्ययन में इनका उपयोग कर रहे है ।

विशेषज्ञता का स्तर : यह सुनिश्चित करें कि आप जिस कार्य के लिए प्रस्ताव कर रहे हैं उसके लिए आपके पास पर्याप्त स्तर की विशेषज्ञता है, चूँकि आप को अपने से काम करना है ।

प्रासंगिकता : सुनिश्चित करें कि आपके अध्ययन से मौजूदा ज्ञान में वृद्धि होगी, वर्तमान अंतराल में पुल का कार्य करेगी और नीति निर्माण में उपयोगी होगी । इससे आप को अध्ययन में रुचि को बनाए रखने में मदद मिलेगी ।

डेटा की उपलब्धता : विषय को अंतिम रूप देने से पहले, यह सुनिश्चित करें कि आपके पास पर्याप्त मात्रा में डेटा उपलब्ध है ।

नैतिक मुद्दे : कैसे नैतिक मुद्दे अध्ययन आबादी को प्रभावित कर सकते हैं और कैसे, नैतिक समस्याओं को दूर किया जा सकता है । इसकी समस्या तैयार होने के समय ही जांच होनी चाहिए।

अभ्यास

एक कंपनी XYZ लिमिटेड अपने उत्पाद के लिए प्रतिद्वंद्वियों से कड़ी प्रतिस्पर्धा का सामना कर रही है तथा, विपणन प्रबंधक, अपने विशिष्ट ब्रांड के उत्पाद के प्रति ग्राहकों की संतुष्टि के स्तर का पता करने के लिए उत्सुक है । विपणन प्रबंधक ने आपको समस्या की जाँच करने के लिए एक शोधकर्ता के रूप में अपने कम्पनी में काम पर रखा। प्रबंधकीय दृष्टिकोण तथा शोधकर्ता के परिप्रेक्ष्य से मुद्दों और अनुसंधान के सवालों की पहचान कीजिये ।

19.9 अनुसंधान दर्शन

एक अनुसंधान दर्शन घटना के बारे में एक धारणा है जो डेटा इकट्ठा, विश्लेषण तथा इस्तेमाल करने के तरीके के बारे में बताता है । अनुसंधान दर्शन के विभिन्न दृष्टिकोण में दो बातें शामिल हैं। ये हैं:

ज्ञानमीमांसा (Epistemology): "जो जाना गया है क्या वो सत्य है"? जैसे मुद्दों के साथ जुड़ा है।

स्तुति (Doxology): "जो माना गया है क्या वो सत्य है"? जैसे सवालों के साथ जुड़ा है ।

पश्चिमी परंपरा में दो प्रमुख अनुसंधान दर्शनों की पहचान की गई है मुख्यतः यथार्थवाद (positivist) (कभी–कभी वैज्ञानिक कहा जाता है) और व्यख्यात्मक (कभी – कभी नकारत्मक रूप में भी जाना जाता है)

यथार्थवाद

यथार्थवादी मानते है कि वास्तविकता स्थिर होती है तथा देखा और उद्देश्य के दृष्टिकोण से वर्णित किया जा सकता है, (Levin,1988), यानी, दखल के बिना घटना का अध्ययन । उनकी दलील है कि घटनाएं अलग तथा दोहराए जाने योग्य होनी चाहिए। इसमें अक्सर केवल एक स्वतंत्र चर में रूपांतरों के साथ नियमितता की पहचान करने के लिए वास्तविकता का हेरफेर शामिल होता है, तथा सामाजिक दुनिया के घटक तत्वों में से कुछ के बीच रिश्तों को बनाने लिए । पूर्वानुमान को पहले से अवलोकित तथा स्पष्ट वास्तविकताओं और उनके अंतर्संबंधों को के आधार पर समझाया जा सकता । "यथार्थवाद" की एक लम्बी और समृद्ध ऐतिहासिक परंपरा है। इस दृश्य को परोक्ष रूप से Alavi और Carlson (1992) द्वारा समर्थन प्राप्त है (1992) जिन्होंने, 902 अनुसंधान लेख की समीक्षा में पाया कि सभी प्रयोगसिद्ध अध्ययन का दृष्टिकोण यथार्थवाद (positivist) है। एक विशेष रूप से यथार्थवाद का भौतिक और प्राकृतिक विज्ञान के साथ सफल जुड़ाव रहा है । तथापि, इस मुद्दे पर बहुत बहस किया गया क्या है कि क्या यथार्थवाद प्रतिमान (Paradigm) सामाजिक विज्ञान के लिए पूरी तरह से उपयुक्त है या नहीं (Hirschheim, 1985), कई लेखक है जो कि अनुसंधान के तरीके के प्रति अधिक बहुलवादी दृष्टिकोण के लिए आवाज़ देते है (see e-g-] Kuhn, 1970)Bjørn&Andersen, 1985)Remenyi and Williams, 1996). जबकि हम इस बहस पर विस्तृत रूप से आगे नहीं जायेंगे, और यह हमारे अध्ययन करने के लिए भी उचित है क्योंकि यह भी मामला है कि सूचना प्रणाली लोगों की सहभागिता के साथ किस रूप में व्यवहार करता है एवं प्रौद्योगिकी, भौतिक विज्ञान के बजाय सामाजिक विज्ञान के लिए माना जाता है (Hirschheim, 1985) ^ वास्तव में, अनुसंधान में कठिनाइयों के कुछ और अनुभव भी है जैसे, परिणाम में स्पष्ट भिन्नता अनुचित व्यहवार करने के वस्तुनिष्ठवाद प्रतिमान की कार्यक्षेत्र आदि को जिम्मेदार ठहराया जा सकता है । इसी तरह, कुछ चर (अंतपंइसमे) या वास्तविकता के घटक को, हो सकता है यथार्थवाद प्रतिमान के अंतर्गत पहले अथाह मान लिया गया जिससे वे अशोध , रह गए (after Galliers, 1991).

व्याख्यात्मक (Interpretivism)

व्याख्यात्मक प्रतिमान यह दलील देता है कि व्यक्तिपरक व्याख्या और वास्तविकता में हस्तक्षेप के माध्यम से ही वास्तविकता को पूरी तरह से समझा जा सकता है । व्याख्यात्मक दर्शन में घटना का उनके प्राकृतिक वातावरण में अध्ययन अति महत्वपूर्ण है क्योंकि, वैज्ञानिक उन घटनाओं को प्रभावित किए बिना नहीं रह सकते जिनका वे अध्ययन कर रहे हैं। व्याख्यात्मक प्रतिमान की एक शानदार परंपरा है जो की यथार्थवाद से कम नही है और न ही यह छोटा है

19.10 अनुसंधान प्रतिमान (RESEARCH PARADIGM)

प्रतिमान की सबसे उद्धृत परिभाषा थॉमस कून द्वारा दिया गया है (1962,1970) "विज्ञान क्रांति की प्रकृति में अवधारणा" में इसे शोध और जांच के एक क्षेत्र में अंतर्निहित मान्यताओं और बौद्धिक संरचना के रूप में परिभाषित किया गया है

जिस पर विकास आधारित है । Patton के अनुसार (1990) प्रतिमान दुनिया को देखने का एक तरीका है, या सामान्य परिप्रेक्ष्य में असली दुनिया की जटिलता को तोड़ने का एक तरीका भी कह सकते है। प्रतिमान को एक व्याख्यागत ढांचे के रूप में भी माना जाता है, जो की "दुनिया के बारे में विश्वासों और भावनाओं के संग्रह तथा इसे कैसे समझना चाहिए और अध्ययन किया जाय" द्वारा निर्देशित होता है (Guba, 1990). Denzin and Lincoln (2001) उन मान्यताओं को तीन श्रेणियों में सूचीबद्ध किया गया है ।

(i) **सत्ता मीमांसा** : सामान्यतः, सत्ता मीमांसा समाज के भीतर मौजूद बातों या उनके के विषय के अध्ययन को संबोधित करता है٢

(ii) **ज्ञानमीमांसा** : ज्ञानमीमांसा ज्ञान के इन मुद्दो को संबोधित करता है, विशेष रूप से, कौन 'ज्ञानी' हो सकते हैं। यह जाननेवाले और ज्ञात के बीच के संबंधो का वर्णन करता है। इसे दर्शन की एक ऐसी शाखा के रूप में परिभाषित किया गया है Gall, Borg, – Gall (1996) जो की ज्ञान की प्रकृति और प्रक्रिया का अध्ययन करता है तथा जिसके द्वारा ज्ञान प्राप्त तथा मान्य होता है ।

(iii) प्रणाली: यह " हम कैसे दुनिया को जानते है , और इसका ज्ञान कैसे प्राप्त करते है "? को संबोधित करता है। प्रणाली विकल्पों की एक श्रृंखला है, जो कि निम्नलिखित का वर्णन करता है:

- सूचनाओ तथा डेटा एकत्रित करने के विषय में विकल्प ।
- सूचनाओ तथा एकत्रित किये गए डेटा का विश्लेषण करने के विषय में विकल्प ।
- अन्य प्रणाली विकल्प.।

यथार्थवाद में अंतर्निहित मान्यताओं को चुनौती देते हुए , Lincoln और Gub (2000) ने दो श्रेणियों की पहचान की जो कि प्रतिमानों में भेद करेगा, यानि करणीय संबंध में विश्वास और सत्ता मीमांसा। भिन्न करणीय संबंध की मान्यताये, प्रकृति की स्थिति पर जोर तथा और कारण रिश्ते की संभावना को ज्ञात करती है ; सत्ता मीमांसा मूल्यों के बारे में समस्याओं को संबोधित करता है । अनुसंधान के विशेष अनुमान में अनुसंधान में मूल्यों की भूमिका, अनुसंधान को प्रभावित करने वाले मूल्यों से कैसे बचें तथा कैसे अनुसंधान उत्पादों का उपयोग करें आदि शामिल हैं (Baptiste, 2000).

Dill और Romiszowski (1997) के द्वारा मानदंड का कार्य निम्नानुसार कहा गया:

दुनिया कैसे कार्य करती है परिभाषित करिए, इस दुनिया से ज्ञान कैसे निकाला जाता है, और कैसे किसी एक को इस ज्ञान के बारे में बात करने के लिए तथा लिखने के लिए सोचना चाहिए।

□पूछे जाने वाले सवालो के प्रकार तथा जवाब में इस्तेमाल किया जाने वाले तरीके को निर्धारित करे।

□क्या प्रकाशित किया गया है और क्या नहीं प्रकाशित किया है का फैसला करें ।

□19.11 अनुसंधान का दृष्टिकोण (RESEARCH APPROACHES)

अनुसंधान में वो तत्व भी हो सकते है जो एक गैर– प्रयोगसिद्ध दृष्टिकोण हैं, एक प्रयोगसिद्ध दृष्टिकोण, या दोनों के संयोजन पर आधारित है । प्रयोगसिद्ध दृष्टिकोण के लिए, तीन प्राथमिक आयाम है जो उपयोग के लिए मूल्यांकित किये जा सकते है ।

1. गुणात्मक बनाम मात्रात्मक
2. आगमनात्मक बनाम निगमनात्मक
3. उद्देश्यपरक बनाम व्यक्तिपरक

हम अनुसंधान के दृष्टिकोण पर चर्चा करें इससे पहले हमें इन दृष्टिकोणों को प्रयोगसिद्ध तथा गैर– प्रयोगसिद्ध दो व्यापक श्रेणियों में समूहीकृत करना पड़ेगा । प्रयोगसिद्ध शोध एक ऐसा अनुसंधान है जो कि देखे गए तथा मापे गए घटनाओ के आधार पर परिभाषित किया गया है। यह वास्तविक अवलोकन पर आधारित है । मात्रात्मक अनुसंधान विधियों के प्रयोगों पर और यह दो या दो से अधिक चरों के बीच संख्यात्मक डेटा जनरेट कर सकता है। गैर– प्रयोगसिद्ध शोध प्रत्यक्ष मात्रात्मक अवलोकन पर या प्रयोगों पर आधारित नहीं हैं । ये मुख्य रूप से गुणात्मक दृष्टिकोण और कुछ हद तक व्यक्तिपरक जांच पर आधारित होता हैं।

हसी और हसी (1997:10), के अनुसार "चार अलग अलग प्रकार के अनुसंधान उद्देश्य मौजूद है; परक, वर्णनात्मक, विश्लेषणात्मक एवं भविष्य बतानेवाला । "शोध का उद्देश्य चाहे कुछ भी हो लेकिन प्रयोगसिद्ध साक्ष्य की आवश्यकता पड़ती है । वे प्रयोगसिद्ध साक्ष्य को , "अवलोकन या अनुभव पर आधारित डेटा." के रूप में परिभाषित करते है।

गुणात्मक बनाम मात्रात्मक दृष्टिकोण

गुणात्मक अनुसंधान डेटा और इसकी व्याख्या के गुणात्मक प्रतिनिधित्व पर केंद्रित है। गुणात्मक अनुसंधान के ठीक विपरीत मात्रात्मक अनुसंधान डेटा और अनुसंधान में इसकी व्याख्या की मात्रा पर केंद्रित होता है।

Myers (1997) ने गुणात्मक और मात्रात्मक अनुसंधान तरीकों के बीच भेद किया । उनके अनुसार मूल रूप से प्राकृतिक विज्ञान में प्राकृतिक घटना का अध्ययन करने के लिए मात्रात्मक अनुसंधान के तरीके विकसित किए गए तथा मात्रात्मक अनुसंधान के कुछ उदाहरण निम्न हैं:

- सर्वेक्षण अनुसंधान
- प्रयोगशाला में प्रयोग
- औपचारिक तरीके
- संख्यात्मक तरीकों जैसे गणितीय मॉडलिंग

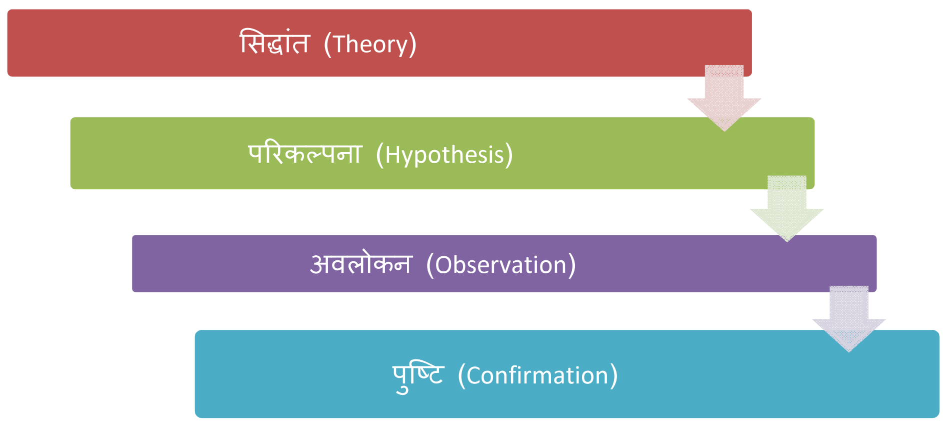
शोधकर्ताओं को सक्षम करने के लिए ताकि वो सामाजिक और सांस्कृतिक घटना का अध्ययन कर सकें । सामाजिक विज्ञान में गुणात्मक अनुसंधान के तरीके विकसित किए गए और इसके कुछ उदाहरण:

- क्रिया अनुसंधान
- मामले का अध्ययन अनुसंधान तथा नृवंशविज्ञान

गुणात्मक डेटा स्रोतों में शामिल हैं, अवलोकन और भागीदार अवलोकन, साक्षात्कार और प्रश्नावली, दस्तावेज़ और ग्रंथ, और शोधकर्ता के छापों और प्रतिक्रिया (Myers, 1997) । इस शोध को समझने के लिए की हम तलाश करेंगे "लोगों को और वे सामाजिक और सांस्कृतिक संदर्भों जिनके भीतर ये रहते हैं " (Myers, 1997). हसी और हसी के विचारों के अनुसार (1997) गुणात्मक अनुसंधान "एक व्यक्तिपरक दृष्टिकोण है जो कि सामाजिक और मानव गतिविधियों की समझ को हासिल करने के लिए परीक्षण को दर्शाती है"

आगमनात्मक दृष्टिकोण बनाम निगमनात्मक दृष्टिकोण

Hussey vkSj Hussey (1997) द्वारा निगमन अनुसंधान को परिभाषित किया गया है "एक अध्ययन है, जिसमें एक वैचारिक और सैद्धांतिक संरचना विकसित की जाती है तथा उसके बाद प्रयोगसिद्ध अवलोकन द्वारा परीक्षण किया जाता है"। निगमन अनुसंधान एक ऐसा अध्ययन जिसमे प्रयोगसिद्ध अवलोकन द्वारा सिद्धांत का परीक्षण किया जाता है। निगमन विधि को सामान्य से विशिष्ट के रूप में संदर्भित किया जाता है।



आगमनात्मक दृष्टिकोण

आगमनात्मक अनुसंधान एक ऐसा अध्ययन है जिसमें सिद्धांत 'प्रयोगसिद्ध वास्तविकता; के अवलोकन से विकसित होती है; अतः सामान्य अनुमान विशेष आवृत्तियों से प्रेरित होते है जो की निगमन विधि के विपरीत है । चूँकि यह व्यक्तिगत अवलोकन से सामान्य पैटर्न या कानून के तरफ चलती है (Hussey and Hussey, 1997).

अनुसंधान में दोनों दृष्टिकोण इस्तेमाल किया जा सकता और यह समयावधियों और निष्कर्ष आकर्षित करने के लिए तर्क को परिभाषित करता है।" एक ही केस स्टडी में दोनों ही आगनात्मक और निगमनात्मक दृष्टिकोण का उपयोग करने की संभावना का भी विचार विमर्श Perry (2001) द्वारा किया गया है । वह शुद्ध प्रेरण से एक सातत्य का वर्णन करता है (सिद्धांत–निर्माण) से शुद्ध (सिद्धांत–परीक्षण)। वह दोनों के बीच एक संतुलन की वकालत करता है, जिस स्थिति को वो "सिद्धांत की पुष्टि/अपुष्टि" दृष्टिकोण कहते है ।

निगमनात्मक दृष्टिकोण

व्यक्तिपरक दृष्टिकोण बनाम उद्देश्य दृष्टिकोण

एक अन्य महत्वपूर्ण विकल्प अनुसंधान के प्रतिमान में मौजूद है जो करने के लिए शोधकर्ता द्वारा व्यक्तिपरक होने की सीमा तक अपनाया जा सकता है यानी इसमें शामिल या शोध परिणाम या उद्देश्य पर एक प्रभाव है । अर्थात् डेटा संग्रह और अनुसंधान के निष्पादन में स्वतंत्र रूप से दूर है ।

Easter by&Smith et al- (1991) ने चर्चा की "यह एक पारंपरिक धारणा है कि विज्ञान में, शोधकर्ता को पूर्ण आजादी बनाए रखने चाहिए अगर वहाँ किसी भी प्रकार कि वैधता परिणामों में चाहिए" । घटना क्रिया अनुसंधान प्रतिमान प्रकृति द्वारा, व्यक्तिपरक है। इस प्रतिमान के उपयोग में दोनों की, वास्तविक दुनिया की परिस्थितियां और साथ ही शोधकर्ता की खुद की भागीदारी की आवश्यकता होती है। अब यह स्वीकार कर लिया गया है कि ऐसी एक व्यक्तिपरक दृष्टिकोण, जब शोध में प्रयोग की जाती है तो इसमें पहचान या अनुसंधान के निष्कर्षों की आवश्यकता होती है ।

19.12 अनुसंधान के प्रकार

अनुसंधान को वर्गीकृत करने के कई तरीके हैं। यद्यपि, अनुसंधान के विभिन्न प्रकार की विशेषताओं का अध्ययन करने से हमें जांच तथा पहचान एवं समानता और मतभेद करने में सहायता मिलती है। शोध को निम्नलिखित के अनुसार वर्गीकृत किया जा सकता है :

अनुसंधान का उद्देश्य –जिस कारण से इसे आयोजित किया गया है ।

अनुसंधान की प्रक्रिया – प्रक्रिया जिसके तहत डेटा को एकत्रित तथा उसका विश्लेषण किया गया ।

अनुसंधान के तर्क – क्या अनुसंधान का तर्क सामान्य से विशिष्ट के लिए या इसके विपरीत चलता है।

शोध के परिणाम – अपेक्षित परिणाम क्या किसी विशेष समस्या का समाधान है या ज्ञान के लिए एक सामान्य योगदान है। उदाहरण के लिए, अनुसंधान परियोजना का

उद्देश्य किसी विशेष व्यावसायिक गतिविधि (उद्देश्य) का वर्णन करने के लिए हो सकता है।

नीचे दी गई सारणी से उपरोक्त मानदंडों के अनुसार अनुसंधान का मुख्य प्रकार के वर्गीकरण का पता चलता है।

शोध के प्रकार (Type of Research)	वर्गीकरण का आधार (Basis of Classification)
अन्वेषणात्मक, वर्णनात्मक, विश्लेषणात्मक या भविष्य कहने वाला अनुसंधान (Exploratory, Descriptive, Analytical or Predictive Research)	अनुसंधान का उद्देश्य (Purpose of the research)
मात्रात्मक या गुणात्मक अनुसंधान (Quantitative or Qualitative Research)	अनुसंधान की प्रक्रिया (Process of the research)
लागू किए गए या बुनियादी अनुसंधान (Applied or Basic Research)	शोध के परिणाम (Outcome of the research)
निगमन या आगमनात्मक अनुसंधान (Deductive or Inductive Research)	अनुसंधान के तर्क (Logic of the research)

शोध के प्रकार (Type of Research)	वर्गीकरण का आधार (Basis of Classification)
अन्वेषणात्मक (Exploratory)	क विशेष कार्यालय में, विभाग, कंपनी, कंपनियों के समूह, उद्योग, क्षेत्र और अन्य जगहों पर लिपिक कर्मचारियों के बीच
वर्णनात्मक (Descriptive)	किस प्रकार से चयनित लिपिक स्टाफ पुरस्कृत हो रहे हैं तथा किस तरह का उपाय उनकी उत्पादकता स्तर को रिकॉर्ड करने के लिए उपयोग में लाया जाता है का वर्णन ।
विश्लेषणात्मक (Analytical)	लिपिक स्टाफ को दिए गए गए पुरस्कार और उनकी उत्पादकता स्तर के बीच कोई के संबंध का विश्लेषण।
भविष्य कहनेवाला अनुसंधान (Predictive)	एक भविष्यवाणी जो यह बताये कि किन चर (ओ) variable(s) को लिपिक कर्मचारियों की उत्पादकता स्तर में परिवर्तन लाने के लिए बदल दिया जाना चाहिए।

इन विश्लेषणों को करने के बाद, अब हम अनुसंधान के विभिन्न प्रकार की विशेषताओं पर चर्चा कर सकते हैं:

वर्णनात्मक बनाम विश्लेषणात्मक

वर्णनात्मक अनुसंधान में सर्वेक्षण और विभिन्न प्रकार के तथ्य को जानने वाले पूछताछ शामिल होते है। वर्णनात्मक अनुसंधान का प्रमुख उद्देश्य वर्तमान में मौजूद मामलों की स्थिति का वर्णन करना है। सामाजिक विज्ञान और व्यापार शोध में हम अक्सर वास्तविक अनुसंधान शब्द का प्रयोग वर्णनात्मक अनुसंधान अध्ययन के लिए करते है । इस विधि की मुख्य विशेषता यह है कि शोधकर्ता का चरों पर कोई नियंत्रण नहीं होता है अपितु शोधकर्ता केवल यह रिपोर्ट कर सकता हैं कि क्या हुआ है या क्या हो रहा है । ज्यादातर वास्तविक अनुसंधान परियोजनाओं का प्रयोग वर्णनात्मक अध्ययन में शोधकर्ता द्वारा , खरीदारी, लोगों की वरीयता, या समान डेटा के लिए उपयोग किया जाता है। पूर्व वास्तविक अध्ययन शोधकर्ताओं द्वारा कारणों का

पता लगाने के लिए प्रयास भी शामिल हैं जबकि वे भी चर को नियंत्रित नहीं कर सकते । वर्णनात्मक अनुसंधान उपयोग के तरीकों में तुलनात्मक और सहसंबंध विधियों सहित सभी प्रकार के सर्वेक्षण के तरीके शामिल हैं ।दूसरे तरफ विश्लेषणात्मक अनुसंधान में, शोधकर्ता द्वारा तथ्य या पहले से उपलब्ध जानकारी का उपयोग महत्वपूर्ण मूल्यांकन करने के लिए इन का विश्लेषण किया जाता है।

अनुप्रयुक्त बनाम मौलिक

अनुसंधान या तो अनुप्रयुक्त अनुसंधान (या कार्य) हो सकते हैं या मौलिक अनुसंधान (मूल या शुद्ध) । अनुप्रयुक्त अनुसंधान का मुख्य उद्देश्य एक समाज या एक औद्योगिक/ व्यापार संगठन के समस्या के लिए एक त्वरित समाधान खोजने में है, जबकि मौलिक अनुसंधान का उद्देश्य मुख्य रूप से सिद्धांत के निर्माण का है। कुछ प्राकृतिक घटना के विषय में या शुद्ध गणित से संबंधित अनुसंधान, मौलिक अनुसंधान के उदाहरण हैं। इसी तरह, वो अनुसंधान, जो मानव व्यवहार के अध्ययन के विषय में सचेत बनाने की दृष्टि से किया जाता है, मौलिक अनुसंधान का उदाहरण हैं । लेकिन एक ठोस सामाजिक या व्यावसायिक समस्या का सामना करने के उद्देश्य से निकला निष्कर्ष, अनुप्रयुक्त अनुसंधान का एक उदाहरण है।

अतः, अनुप्रयुक्त अनुसंधान का मुख्य उद्देश्य कुछ अहम व्यावहारिक समस्या के लिए एक समाधान खोजना है, जबकि बुनियादी अनुसंधान जानकारी खोजने की ओर निर्देशित किया गया है जिसका एक व्यापक आधार हो । इस प्रकार यह, पहले से ही मौजूदा संगठित वैज्ञानिक ज्ञान में वृद्धि करता है ।

मात्रात्मक बनाम गुणात्मक

मात्रात्मक अनुसंधान मात्रा या मात्रा के मापन पर आधारित है । यह उस घटना में लागू होता है जिसे हम मात्रा के संदर्भ में व्यक्त कर सकते है।, दूसरे तरफ गुणात्मक अनुसंधान, गुणात्मक घटना के साथ संबंध रखता है ।यानी वो घटना जो गुणवत्ता से संबंधि है । उदाहरण के लिए, जब हम मानव व्यवहार के कारणों की जांच में रुचि रखते हैं (यानी, क्यों लोग किसी एक धारणा में सोचते या कार्य करते हैं), हम अक्सर 'प्रेरणा के' अनुसंधान , को गुणात्मक अनुसंधान का एक महत्वपूर्ण प्रकार मानते है । इस प्रकार के अनुसंधान का उद्देश्य गहराई से साक्षात्कार को इस प्रयोजन के लिए का उपयोग करते हुए अंतर्निहित मंशा और इच्छाओं की खोज करना है । रवैया या राय अनुसंधान यानी, एक विशेष संस्था या विषय के बारे में लोगों को कैसा और क्या लगता है, का पता लगाने के लिए डिज़ाइन किया गया शोध भी गुणात्मक अनुसंधान ही है। गुणात्मक अनुसंधान व्यावहारिक विज्ञान में विशेष रूप से महत्वपूर्ण है, जहां मानव व्यवहार की अंतर्निहित मंशा की खोज करना ही उद्देश्य है। ऐसे शोध के माध्यम से हम विभिन्न प्रकार के कारको का विश्लेषण कर सकते हैं जो लोगों को एक विशेष तरीके से व्यवहार करने के लिए प्रेरित या जो लोगो के पसंदगी या नापसंदगी का कारण बनते है ।

वैचारिक बनाम प्रयोगसिद्ध

वैचारिक अनुसंधान सार विचारो या सिद्धांत से संबंधित होता है। यह आम तौर पर दार्शनिकों और विचारकों द्वारा नई अवधारणाओं का विकास करने के लिए या

वर्तमान अवाधारनाओ को पुनः परिभाषित करने के लिए उपयोग किया जाता है। दूसरी ओर, प्रयोगसिद्ध अनुसंधान प्रायः बिना कारण के या सिद्धांत के अनुभव या अकेले अवलोकन पर निर्भर करता है । यह डेटा–आधारित अनुसंधान है, जो अवलोकन या प्रयोग को सत्यापित करने में सक्षम होने के साथ निष्कर्ष पर पहुचता है । हम इसे प्रयोगात्मक अनुसंधान के रूप में भी पुकार सकते हैं। इस तरह के अनुसंधान में सक्रिय रूप से वांछित सूचना के उत्पादन को प्रोत्साहित करने को कुछ बातों को जानने के लिए प्रथम दृष्टया उनके स्रोत पर तथ्य प्राप्त करना आवश्यक है । ऐसे शोध में शोधकर्ता को पहले खुद एक परिकल्पना या संभावित परिणाम को प्रदान करना पड़ता है । वह फिर अपनी परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए पर्याप्त तथ्यों (डाटा) को प्राप्त करने के लिए काम करता है। वांछित जानकारी आगे लाने के लिए तथा व्यक्तियों या संबंधित सामग्री में व्यवस्था बना सके इसके लिए प्रयोगात्मक डिजाइन सेट करता है । इस प्रकार, ऐसे अनुसंधान शोधकर्ता के नियंत्रण की विशेषता रखते है जिसमे अध्ययन करने के लिए अपने विचार के तहत वह प्रबंधन करता है । अनुभवजन्य अनुसंधान उपयुक्त होता है जब सबूत यह दिखाते है कि कुछ चर अन्य चरो को किस तरह प्रभावित करते है । प्रयोगसिद्ध या प्रयोग अध्ययन के माध्यम से इकट्ठा सबूत, आज परिकल्पना को साबित करने का संभव का सबसे शक्तिशाली समर्थक माना जाता है ।

इन के अलावा अन्य प्रकार के विशिष्ट शोध भी है जो या तो अनुसंधान का उद्देश्य, या अनुसंधान वातावरण जिसमे शोध किया जाए, या कुछ अन्य समान कारक के आधार पर आधारित होते हैं। समय के दृष्टीकोण से हम या तो एक बार अनुसंधान (one&time research) या अनुदैर्ध्य अनुसंधान (longitudinal research) के बारे में सोच सकते हैं।

पूर्व मामले में अनुसंधान एक ही समय अवधि तक ही सीमित है, जबकि उत्तरार्द्ध मामले में अनुसंधान कई बार किया जाता है। पर्यावरण जिसमे अनुसंधान हो रहा है के आधार पर अनुसंधान कार्यक्षेत्र अनुसंधान या प्रयोगशाला अनुसंधान या अनुकरण शोध हो सकता है । अनुसंधान को नैदानिक अनुसंधान के रूप में भी अच्छी तरह से समझा जा सकता है। ऐसे अनुसंधान मूल कारण संबंधों तक पहुंचने के लिए गहन दृष्टिकोण या मामले का अध्ययन का सहारा लेते है । बहुत छोटे नमूने और बहुत गहरी जांच कर डेटा का उपयोग करते हुए ऐसे अध्ययन आम तौर पर गहरी बातों के कारणों में या हमारे हित की घटनाओं में जाते है । शोध को अन्वेषणात्मक या औपचारिक रूप दिया जा सकता है। अन्वेषणात्मक शोध का उद्देश्य परिकल्पना का विकाश करना होता है अपितु उसके परीक्षण से भी है जबकि औपचारिक अनुसंधान उन पर्याप्त संरचना का अध्ययन करते है, जिनकी परिकल्पना का परीक्षण किया जा सके ।

घटनाओं या अतीत के विचारों का अध्ययन करने के लिए, ऐतिहासिक अनुसंधान दस्तावेज, अवशेष, आदि ऐतिहासिक स्रोतों का इस्तेमाल करता है, जिसमे व्यक्तियों के दर्शन और समूहों का समय शामिल है । शोध को निष्कर्ष उन्मुख और निर्णय उन्मुख (decision&oriented) के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है ।

निष्कर्ष उन्मुख अनुसंधान, करते समय एक शोधकर्ता समस्या को लेने के लिए स्वतंत्र होता है, जैसे – जैसे आगे बढ़ता है वह पूछताछ को नया स्वरुप देता है और अपने इच्छा अनुरूप अवधारणा बनता है । निर्णय उन्मुख अनुसंधान हमेशा के लिए एक निर्णय निर्माता की जरूरत होता है और इस मामले में वह अपने झुकाव के अनुसार अनुसंधान करने में वह स्वतंत्र नही है । संचालन अनुसंधान निर्णय उन्मुख अनुसंधान का एक उदाहरण है क्योंकि यह कार्यकारी विभागों को एक मात्रात्मक आधार के साथ अपने नियंत्रण के तहत ऑपरेशन के बारे में निर्णय लेने के लिए एक वैज्ञानिक पद्धति है।

19.13 वैज्ञानिक सोच और अनुसंधान की भाषा

Schiendler और coopers के मुताबिक, अनुसंधान में तर्क शामिल है और एक शोधकर्ता को सही परिसर को खोजने, तथ्यों के बीच कनेक्शन का परीक्षण करने तथा पर्याप्त सबूत के आधार पर दावे करने के लिए उत्कृष्ट तर्क की आदत को विकसित करना चाहिए।

वैज्ञानिक सोच संदर्भित करता है, ऐसी प्रक्रियाओं को जिनका संज्ञानात्मक में शामिल प्रक्रियाओं सहित सिद्धांत के निर्माण, प्रयोग डिजाइन, परिकल्पना परीक्षण, डेटा व्याख्या, और वैज्ञानिक खोज के क्षेत्र में उपयोग किया जाता है ।

वैज्ञानिक सोच के इन पहलुओं में कई संज्ञानात्मक प्रक्रियाये भी शामिल है जिनकी अपने आप में जांच की गई है, जैसे प्रेरणा, कटौती, सादृश्य, विशेषज्ञता, और समस्या का हल । अनुसंधान में गुणवत्ता और निष्पक्षता बनाए रखने के लिए बड़े पैमाने पर वैज्ञानिक सोच की आवश्यकता होती है। अगला अनुभाग विशिष्ट शर्तों से संबंधित वैज्ञानिक सोच में अनुसंधान पर चर्चा करता है। जब हम अनुसंधान करते हैं, तो क्या समझना है, क्या व्याख्या करनी है तथा घटना की भविष्यवाणी करने के लिए हम प्रयत्न करते है । घटनाओ को परिभाषित और उनकी व्याख्या जरुर होनी चाहिए। इस संबंध में विभिन्न शब्दों उपयोग किया जाता है।

अवधारणा : अवधारणा अर्थ या कुछ घटनाओं, वस्तुओं, स्थितियों, स्थितियों और व्यवहार के साथ जुड़े विशेषताओं का आम तौर पर स्वीकार किए जाने वाला संग्रह है । किसी भी एकल अवलोकन से परे सामान घटनाओ को वर्गीकृत करना अवधारणाओं को बनाता है। हम दैनिक सोच, बातचीत, और अन्य गतिविधियों में कई अवधारणाओं का उपयोग करते है ।

अनुसंधान में, विशेष समस्याओं के बाहर भी अवधारणा की परिशुद्धता के लिए हम और खोजपरक अवधारणा का प्रयोग करके परिकल्पना का निर्माण करते है । हम इन काल्पनिक कथनों का परीक्षण करने के लिए जो माप अवधारणाओं का प्रयोग करते है । हम इन माप अवधारणाओं का उपयोग कर डेटा इकट्ठा करते है । शोध की सफलता पर निर्भर करता है:

1. कैसे हम स्पष्ट रूप से अवधारणा बनाते है , तथा
2. कैसे दुसरे अच्छी तरह से हमरे द्वारा बनाये गए अवधारणा को समझते है ।

उदाहरण के लिए, जब हम ग्राहकों के किसी खास ब्रांड के प्रति वफादारी से जुड़े प्रश्न पर सर्वेक्षण करते है तो प्रश्न हमेशा ऐसा होना चाहिए जो कि निष्ठापूर्वक उनके व्यहवार को भाप सके । यदपि व्यवहार काल्पनिक होते है, फिर भी हमें सावधानीपूर्वक चयनित अवधारणाओं का उपयोग करते हुए उनको मापने का प्रयास करना चाहिए। ऐसी अवधारणा जो कि दूसरों को स्पष्ट रूप से समझ आये विकसित करना एक चुनौती है। उदाहरण के लिए हमें , प्रतिभागियों से उनके परिवार की कुल आय का अनुमान पूछना चाहिए । लग सकता है कि यह एक सरल व् स्पष्ट अवधारणा है लेकिन हमें अलग अलग तरह के भ्रामक उत्तर मिलेंगे जब तक की हम उनके अवधारना को सिमित या संकीर्ण ना बनाये ।

- समय अवधि, जैसे साप्ताहिक, मासिक, या वार्षिक
- आय करों के बाद या पहले
- परिवार के प्रमुख या परिवार के सभी सदस्यों के लिए
- वेतन, मजदूरी, लाभांश, ब्याज या पूंजी लाभ के लिए के लिए
- सामान के रूप में आय जैसे निरू शुल्क किराया, कर्मचारी छूट, या खाद्य टिकटों पर

संरचनाएँ

अवधारणाये प्रगतिशील स्तर पर अमूर्त होती हैं व्यक्तित्व की तरह ही एक अमूर्त कल्पना करना अधिक कठिन है। इस तरह अमूर्त अवधारणाओं को अक्सर संरचनाएँ कहा जाता है। एक छवि का निर्माण है संरचनाएँ एक छवि होती है या अमूर्त विचार विशेष रूप से किसी दिए गए अनुसंधान के लिए आविष्कार किये जाते है या सिद्धांत के निर्माण के उद्देश्य से किये जाते है । हम संरचनाओं के निर्माण में सरल के संयोजन से, तथा अधिक ठोस अवधारणाओं खासकर जब विचार या छवि जो हम संप्रेषित करना चाहते है और वो प्रत्यक्ष अवलोकन के अधीन नहीं है। अवधारणाओं और संरचनाएँ आसानी से भ्रमित करते हैं।

परिभाषाएँ

शोधकर्ता या ग्राहक के बिना जाने भी अवधारणाओं के अर्थ के बारे में भ्रम एक शोध अध्ययन के मूल्य को नष्ट कर सकते हैं । अगर हितधारकों के लिए अलग अलग शब्द अर्थ के शामिल है । इसका आशय अलग अलग पक्ष अच्छी तरह से संवाद नहीं कर रहे हैं। परिभाषा इस खतरे को कम करने का एक तरीका हैं। शोधकर्ता दो प्रकार कि परिभाषाओ के साथ संघर्ष करते है : शब्दकोश परिभाषा और परिचालित परिभाषाओं। अधिक परिचित शब्दकोश में, परिभाषा को अवधारणा के एक पर्याय के रूप में परिभाषित किया गया है। परिचालनात्मक परिभाषा एक ऐसी परिभाषा जिसको परीक्षण या माप के लिए विशिष्ट मानदंडों के संदर्भ में लिया जाता है। ये सभी शब्द प्रयोगसिद्ध मानकों के लिए संदर्भित करना चाहिए । (यानी, हम गणना, उपाय, या कुछ अन्य तरह से हमारी इंद्रियों के माध्यम से जानकारी इकट्ठा करने में सक्षम हो)। चाहे परिभाषित किया जाने वाला वास्तु भौतिक हो (उदाहरण के लिए, एक सूप का कैन) या अत्यधिक सार हो (उदाहरण के लिए, उपलब्धि प्रेरणा) परिभाषा को

विशेषताओं को निर्दिष्ट करना होगा और उनका कैसे अवलोकन किया जाय । विवरण और प्रक्रियाये तो स्पष्ट होनी चाहिए ताकि कोई भी सक्षम व्यक्ति उसका उपयोग करके वस्तु को वर्गीकृत कर सके । परिचालित परिभाषाएँ भिन्न हो सकती हैं आपके द्वारा चुने गए उद्देश्य और जिस तरह से आप उन्हें को मापने के लिए प्रयोग करते है । यहाँ एक ही अवधारणाओं की अलग परिभाषा की आवश्यकता दो अलग स्थितियाँ हैंरू यहाँ दो अलग स्थितियाँ हैं जहाँ एक ही अवधारणाओं की अलग परिभाषाओ की आवश्यकता है ।

चर (Variables)

व्यवहार में, चर शब्द का उपयोग संरचनाओ, या गुणस्वभाव के पर्याय के रूप में लिए किया जाता है जिसका अध्ययन किया जाना है। इस संदर्भ में, एक चर, घटना, कार्य, या विशेषता का प्रतीक है जो मापा जा सकता है और जिसको हम स्पस्ट रूप से मूल्य प्रदान करते है । मोटे तौर पर विभिन्न प्रकार के चरो को स्वतंत्र और आश्रित स्वतंत्र रूप में वर्गीकृत कर सकते है । Schiendler और coopers ने इन विशेषताओं का वर्णन किया।

स्वतंत्र चर (Independent Variable)	आश्रित चर (Dependent Variable)
भविष्यवक्ता (Predictor)	कसौटी (Criterion)
प्रकल्पित कारण (Presumed cause)	प्रकल्पित प्रभाव (Presumed effect)
उत्तेजना (Stimulus)	प्रतिक्रिया (Response)
से भविष्यवाणी (Predicted from...)	करने के लिए भविष्यवाणी तक (Predicted to...)
पूर्वपद या प्रारंभ (Antecedent)	परिणाम (Consequence)
जोड़–तोड़ (Manipulated)	मापा हुआ परिणाम (Measured outcome)

कई पाठ्यपुस्तकों ने स्वतंत्र चर (Independent Variable) शब्द के लिए भविष्यवक्ता (Predictor) शब्द का एक पर्याय के रूप में उपयोग किया है । इन चरो में शोधकर्ता द्वारा हेर – फेर किया जाता है, और यह हेरफेर निर्भर चर (dependent variable) पर एक प्रभाव का कारण बनता है। हम देखते हैं कि अक्सर कई स्वतंत्र चर होते है जो कि शायद कम से कम कुछ हद तक "सहसंबद्ध" होते है और इसलिए आपस में स्वतंत्र नहीं है । इसी प्रकार समानार्थी रूप से निर्भर चर (DV) के साथ इसी तरह के शब्द उपयोग में लाये जाते है । यह चर मापा जाता है, या निगरानी नजर रखी जाती है और स्वतंत्र चर के हेरफेर से प्रभावित होने की उम्मीद होती है ।

प्रस्ताव और परिकल्पना (Proposition and Hypothesis)

हम एक प्रस्ताव को, एक बयान जो की सुस्पस्ट (अवधारणाओं) घटनाओ के रूप में परिभाषित करते है जिसका सत्य या असत्य के रूप में परिक्षण किया जा सकेँ । जब एक प्रस्ताव प्रयोग्निष्ठ परीक्षण के लिए तैयार किया जाता है, हम इसे एक परिकल्पना कहते हैं। दो या दो से अधिक चरों के बीच संबंध के बारे में एक कथात्मक बयान के रूप में, एक परिकल्पना एक अंतरिम और शुद्ध प्रकृति कि होती है। एक बयान के रूप में परिकल्पना का वर्णन भी किया गया है, जिसमें हम मामलों के लिए चर नियुक्त करते है । किसी मामले को इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है जिसके बारे में अस्तित्व या परिकल्पना वार्ता करें । चर है कि परिकल्पना कि

विशेषता, या गुण जिसको किसी मामले मे अध्यारोपित किया जाता है को चर कहते है ।

सिद्धांत (Theory)

एक सिद्धांत व्यवस्थित, आपसी–सम्बन्धो, अवधारणाओं, परिभाषाओं, और प्रस्ताव का एक संग्रह है जो कि समझाने और घटनाओ (तथ्य) की भविष्यवाणी करने के लिए सक्षम होते हैं। इस अर्थ में, हमारे पास कई सिद्धांत है जिसे हम लगातार, समझाने या हमारे चारों ओर क्या चल रहा की भविष्यवाणी करने के लिए के लिए उपयोग करते है। जिस हद तक करने के लिए कि हमारे सिद्धांतों मजबूत एवं किसी भी स्थिति के लिए उपयुक्त है, हम हमारे स्पष्टीकरण और भविष्यवाणियों में सफल है । विपणन में, उत्पाद का जीवन चक्र कई चरणों का वर्णन करता है जिससे एक उत्पाद बाज़ार से होकर गुजरता है ।

प्रतिमान या नमूना (Model)

एक अनुसंधान मॉडल संदर्भित करता है अनुसंधान के डिजाइन का परीक्षण करने के लिए तथा चरो के बीच जटिल संबंधों का अनुमान और जिनकी जांच की जा सके । मॉडल शब्द का प्रयोग एक प्रणाली के प्रतिनिधित्व के रूप में किया जाता है यानी इसका निर्माण व्यवस्था के कुछ पहलुओ का या पुरे व्यवस्था का अध्ययन करने के लिए किया जाता है । मॉडल शब्द का व्यापार अनुसंधान और व्यापार के अन्य क्षेत्रों में भी प्रयोग सादृश्य के माध्यम से घटना का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है । यहाँ पर एक मॉडल को एक प्रणाली के प्रतिनिधित्व के रूप में परिभाषित किया गया है जिसका निर्माण पूरे प्रणाली या प्रणाली के कुछ पहलू का अध्ययन करने के लिए किया जाता है। मॉडल सिद्धांत से अलग होते है क्योंकि सिद्धांत की भूमिका स्पष्टीकरण है जबकि एक मॉडल की भूमिका प्रतिनिधित्व की है । मॉडल चर के बीच संबंधों को परिभाषित करता है जिनका परिक्षण किया जाना है या अत्यधिक सैद्धांतिक अनुसंधान के लिए भी इसका इस्तेमाल किया जा सकता है।

एक व्यापार अनुसंधान के लिए, निम्न प्रकार के अनुसंधान मॉडल सुझाए गए हैं:

(i) वर्णनात्मक मॉडल (Descriptive model)

(ii) व्याख्यात्मक मॉडल (EÛplicative model)

(iii) अनुकरनात्मक मॉडल (Simulation model)

- स्थिर
- गतिशील

ये वर्गीकरण मॉडल के कार्यों पर आधारित हैं।

- जहां सिद्धांत अपर्याप्त और न के बराबर होते है वहा वर्णनात्मक मॉडल किसी प्रणाली में तत्वों के व्यवहार का वर्णन करता है ।
- व्याख्यात्मक मॉडल (Explicative model) अच्छी तरह से विकसित सिद्धांतों का अनुप्रयोग बताने के साथ साथ सिद्धांतों के महत्वपूर्ण अवधारणाओं के बारे में हमारी समझ में सुधार भी लाता है ।

- अनुकरनात्मक मॉडल अवधारणाओं के संरचनात्मक संबंधों को स्पष्ट तथा प्रक्रियाओं और उनके बीच संबंधों को उजागर करने का प्रयास करता है ।

स्थिर और गतिशील शब्द समय के साथ प्रणाली के व्यवहार को परिभाषित करते है । यदि अनुसंधान मॉडल, अध्ययन के साथ संबंध और किसी खास एक एक समय का प्रतिनिधित्व करती है तो यह स्थिर मॉडल (Static) कहा जाता है। यदि अनुसंधान मॉडल, अनुसंधान अध्ययन प्रणाली के लिए किसी समय की अवधि को परिभाषित करता है तो यह गतिशील (Dynamic) प्रणाली के रूप में जाना जाता है।

19.14 एक अच्छे अनुसंधान की विशेषताएं

आठ सबसे व्यापक रूप से सहमति वाले अनुसंधान की विशेषताएं निम्नानुसार हैं:

व्यवस्थित प्रक्रियायें

नियंत्रित प्रक्रियायें

वैधता

परिशुद्धता या सख्ती

तार्किकता

गंभीर विचार निष्पक्षता और

सटीकता

कुछ अति महत्वपूर्ण शब्द जो अनुसंधान की विशेषताओं को परिभाषित करते है, को यहाँ समझाया गया हैं:

व्यवस्थित

अनुसंधान में मान्य प्रक्रियाओं और सिद्धांतों का उपयोग करना चाहिए।

प्रतिलिपि प्रस्तुत करने योग्य

अनुसंधान की रुपरेखा मान्य तथा स्पष्ट प्रक्रियाओं के साथ होना चाहिए ताकि दूसरों भी निष्कर्षों का परीक्षण कर सकेँ ।

नियंत्रित

यह संदर्भित करता है कि कैसे चर (variables) चालाकी से नियंत्रित किये जा रहे हैं।

प्रयोगनिष्ठ और उद्देश्य

यह प्राथमिक निष्कर्ष और प्रत्यक्ष प्रेक्षण पर आधारित होना चाहिए ।

विश्लेषणात्मक और महत्वपूर्ण

वैध तर्क को संदर्भित करता है ।

सटीकता

निष्कर्ष मान्य होना चाहिए, साथ ही डेटा बिना किसी भी जोड़तोड़ के सटीक होना चाहिए ।

मौलिकता

अभिनव और नवीन चिन्तन से महत्वपूर्ण योगदान करता है ।

19.15 भारत में अनुसंधान के साथ समस्या

समय के साथ अनुसंधान लागू प्रकृति के रूप में बन जाता है जैसे विकसित सिद्धांत और संरचानाये मौजूदा घटनाओ को समझाने में सहायक होती हैं। आज के समय अनुसंधान की गुणवत्ता नीचे जा रही है क्योंकि शोधकर्ता अच्छे शोध के मापदंड से भटक जा रहे हैं ᐟ यह कारण वर्तमान परिदृश्य में शोध के साथ समस्याओं के लिए सबसे अग्रणी है। कुछ समस्याये, जो अनुसंधान के साथ जुडी हुई है, यहाँ सूचीबद्ध हैं:

- सटीकता और डेटा की विश्वसनीयता संदिग्ध हैं
- शोधकर्ता का पक्षपात
- डेटा का वैज्ञानिक संग्रह संदिग्ध है
- डेटा का अशुद्ध अर्थ
- अधिक समय लगना
- व्यक्ति के लिए रुचिकर न होना
- डेटा में स्पष्टता की कमी
- वैध निष्कर्ष और उद्देश्य की कमी
- ज्ञान का अभाव
- उच्च लागत
- डेटा की मात्रा
- अनुचित नमूना और उसका आकार
- डेटा का स्रोत संदिग्ध है
- जानकारी की कमी
- उत्तरदाताओं द्वारा ख़राब प्रतिक्रिया

ऊपर दी हुई समस्याये घटिया शोध और अनुसंधान की गुणवत्ता में समझौता करने के लिए प्रमुख कारण है । इंटरनेट और संचार प्रौद्योगिकी के आगमन के साथ अनुसंधान में डेटा की चोरी (अन्य शोधकर्ता द्वारा) शोध की एक बड़ी समस्या है, जो की नैतिकता से जुडी है।

19.16 सारांश

इस इकाई में हमने अनुसंधान के मौलिक अवधारणा और अनुसंधान क्रियाविधि के बारे में चर्चा की है अनुसंधान क्रियाविधि के साथ जुड़े विभिन्न मुद्दों पर इस इकाई में चर्चा की गई ताकि छात्र स्वयं सीखने के लिए एक ठोस आधार विकसित कर सके हैं । शोध को इस रूप में परिभाषित किया गया है कि शोध वह व्यवस्थित डेटा संग्रह और डेटा विश्लेषण की प्रक्रिया है, जो समस्या में नए समाधान को प्राप्त कर सके ।

19.17 शब्दावली

तत्व मीमांसा (Ontology) : सामान्यतः आंटलजी संदर्भित करता है समाज के भीतर मौजूद विषयों के अध्ययन को या बारे में ।

प्रतिमान (Paradigm) : यह संदर्भित करता है उस विचार संप्रदाय को जो अनुसंधान को करने के लिए अनुकरण करता है ।

ज्ञान मीमांसा (Epistemology): ज्ञान मीमांसा ज्ञान के मुद्दो के साथ सम्बन्ध स्थापित करता है विशेष रूप से, जो 'ज्ञानी' हो सकता है ।

अवधारणा (Concept) : आम तौर पर स्वीकार किए जाने वाले कुछ घटनाओं, वस्तुओं, स्थितियों, परिस्थितियों और व्यवहार के अर्थ के संग्रह को अवधारणा कहते है ।

सिद्धांत (Theory) सिद्धांत व्यवस्थित परस्पर अवधारणाओं का एक संग्रह है ।

प्रतिमान या नमूना (Model) एक अनुसंधान मॉडल, अनुसंधान की संरचना के परीक्षण तथा चरो के बीच के गूढ़ संबंधो के पूर्वानुमान के जाँच को संदर्भित करता है ।

19.18 बोध प्रश्न

रिक्त स्थानों को भरें

1. शोधकार्य में आवश्यक है एक कार्यरत रूपरेखा को तैयार करना जिसमे..........
   (a) एक पूर्वनिर्धारित और स्पष्ट उद्देश्य (यों) हो
   (b) एक योजना, जो क्या, कैसे, क्यों, कहाँ जैसे सवालों के जवाब के लिए
   (c) शोध समस्या समाधान के बारे में एक स्पष्ट विचार हो
   (d) इनमे से कोई नही
2. शोध करने के पीछे मुख्य उद्देश्य होता है....
   (a) अध्ययन और ज्ञान का अन्वेषण करना
   (b) नए विचारों को प्राप्त करना
   (c) स्पष्ट उद्देश्यों को परिभाषित करना
   (d) ऊपर के सभी
3. अनुसंधान शुरू करने के लिए, एक व्यक्ति को चाहिए.......
   (a) स्पष्ट लक्ष्यों की संख्या के साथ प्रारंभ करें
   (b) पूर्वपरिभाषित उदेश्यों की संख्या के साथ प्रारंभ करें
   (c) एक अच्छी तरह से परिभाषित अनुसंधान विधि के साथ
   (क) शोध समस्या का समाधान
4. अनुसंधान दर्शन संदर्भित करता है
   (a) दृष्टिकोण और अध्ययन विषय
   (b) अध्ययन विषय में सही प्रक्रिया
   (c) खोज करने के लिए विचार
   (d) शोध प्रक्रिया में शामिल होने वाले उद्देश्य
5. निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए इनमे से कौन सी तार्किक प्रक्रिया, सामान्य ज्ञान पर या सच को जानने के लिए आधारित है
   (a) आगमनात्मक तर्क
   (b) निगमनात्मक तर्क
   (c) निर्णायक तर्क
   (d) भविष्यसूचक तर्क
6. निम्नलिखित में से कौन सा अनुसंधान है जो मौजूदा ज्ञान में नए अंतर्दृष्टि की ओर जाता है तथा प्रबंधकीय समस्या के विशिष्ट स्थितियों पर आधारित नहीं है?

(a) शुद्ध अनुसंधान (Pure Research)
(b) अनुप्रयुक्त अनुसंधान (Applied Research)
(c) फील्ड (क्षेत्र) अनुसंधान (Field Research)
(d) ऐतिहासिक अनुसंधान (Historical Research)

7. अनुसंधान में, चर जो अन्य चरो को परिवर्तित करता है, उसे कहा जाता है..
(a) आश्रित चर (Dependent variable)
(b) स्वतंत्र चर (Independent variable)
(c) मध्यस्थ चर (Moderating Variable)
(d) हस्तक्षेप चर (Intervening Variable)

8. वर्णनात्मक अनुसंधान अध्ययन शोध का एक वर्ग है जिसका उद्देश्य
(a) अवधारणा के अंतर्दृष्टि को प्राप्त करना
(b) किसी की विशेषताओं का विश्लेषण
(c) किसी कार्य में आवृत्ति निर्धारण
(d) चरों के बीच संबंधों का परीक्षण

19.19 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (इ), 2. (क), 3. (इ), 4. (इ), 5.(इ), 6. (इ), 7. (इ), 8. (इ).

19.20 स्वपरख प्रश्न

1. निम्नलिखित शब्दों को परिभाषित कीजिये:
   a. अनुसंधान (Research)
   b. शोध समस्या (Research Problems)
   c. अनुसंधान विधिया (Research Methods)
   d. अनुसंधान क्रियाविधि विज्ञान (Research Methodology)
   e. अनुसंधान प्रतिमान (Research Paradigm)
   f. अनुसंधान प्रक्रिया (Research Process)
   g. अनुसंधान चर (Research Variables)
   h. अनुसंधान रूप रेखा (Research Design)
2. अनुसंधान के विभिन्न उद्देश्यों की व्याख्या कीजिये ।
3. अनुसंधान विधियों और अनुसंधान क्रियाविधि विज्ञान के बीच अंतर का अंतर बताइए ।
4. एक अनुसंधान के क्या लक्षण होते हैं ? आधुनिक समय में इसका महत्व समझाइये।
5. अनुसंधान के लिए प्रेरित करने वाले कारकों की चर्चा कीजिये ।
6. एक अच्छे अनुसंधान के सिद्धांतों की व्याख्या कीजिये ।
7. "राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के खोलने और बाजार के वैश्वीकरण" के वर्तमान संदर्भ में अनुसंधान का क्या कार्यक्षेत्र है ।
8. अनुसंधान में किन समस्याओं तथा सीमाओं का सामना करना पड़ता है, को समझाइये ।

9. एक अनुसंधान में प्रतिमान या नमूना से आप क्या समझते है? अनुसंधान प्रतिमान या नमूना कितने प्रकार के होते हैं?
10. व्याख्यात्मक और वर्णनात्मक अनुसंधान द्वारा आप क्या समझते है?
11. वैज्ञानिक सोच से आपका क्या आशय है ? एक अच्छे शोध के लिए वैज्ञानिक सोच क्यों आवश्यक है ?
12. निगमनात्मक तथा आगमनात्मक तर्क से आप क्या समझते है ? अनुसंधान में इन अवधारणाओं का क्या महत्व है ?

19.21 संदर्भ पुस्तकें

1. Kothari, C.R. (2008), *Research Methodology and Techniques*, New Age Publication, Delhi.
2. Bajpai, Naval (2012), *Business Research Methods*, Pearson, Delhi.
3. Schiendler and Cooper (2009), *Business Research Methods*, TMH, New Delhi.
4. N.K. Malhotra, *Marketing Research*, Pearsons Education Asia publication, New Delhi.

इकाई 20 अनुसंधान अभिकल्पना

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- एक अनुसंधान अभिकल्पना क्या होती है, की व्याख्या कर सकें।
- अनुसंधान अभिकल्पना में चरण क्या होते हैं, को समझ सकें।
- अनुसंधान अभिकल्पना के प्रकार क्या होते हैं, का वर्णन कर सकें।
- एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना के मानदण्ड क्या होते हैं, का वर्णन कर सकें।

20.1 प्रस्तावना

पिछले इकाई में आपने अनुसंधान के साथ सम्बन्धित अवधारणाओं एवं अर्थ को जाना। इस अनुभाग में हम एक अनुसंधान की अभिकल्पना के लिए विशिष्ट दृष्ट्रिकोणों का वर्णन करेंगें। जैसा कि विभिन्न लोगों के लिए अनुसंधान की व्याख्या एवं संकेतार्थ

भिन्न हेाते हैं, शोधकर्ताओं का कार्य अनुसंधान विधियों के माध्यम से घटित होता है, जो अनुसंधान अभिकल्पना में अनुसंधानकर्ता द्वारा चयनित हेाता है।

सबसे प्रारम्भिक समझ में, अनुसंधान अभिकल्पना अनुसंधान प्रक्रिया से जुडी क्रियाकलापों का एक तार्किक अनुक्रम होता है। यह अनुसंधान समस्या के मनस चित्रण के साथ आरम्भ होता है और परिणामों और निष्कर्षो। के साथ समाप्त होता है। यीन (1994) ने निर्दिष्ट किया कि एक अनुसंधान अभिकल्पना एक अनुसंधान की योजना होती है, जो निम्न के साथ सम्बन्ध रखती है।

- अध्ययन में क्या प्रश्न है ?
- क्या आंकडा प्रासंगिक है ?
- क्या आंकडा एकत्रित करना है ?
- परिणामों का विश्लेषण कैसे करना है ?

अनुसंधान अभिकल्पना एक कार्य योजना की तुलना में बहुत अधिक है क्योंकि इसका मुख्य उद्देश्य स्थिति का परिवर्जन करना जिसमें प्रमाण प्रारम्भिक अनुसंधान प्रश्नों का ध्यान नहीं करते है, की सहायता करना है। इस प्रकार अनुसंधान अभिकल्पना तार्किक समस्या के साथ सम्बन्धित है और निर्दिष्ट भी करता है कि अनुसंधानकर्ता महत्वपूर्ण मुद्दों का पता कैसे लगायेगा। अनुसंधान में अभिकल्पनाऐं आंकडा संकलन विधि या अनुसंधान दृष्टिकोण जो किएक अध्ययन में प्रयोग होती है का वर्णन करते है। यह विभिन्न तरीकों को परिभाषित करती है जिसके द्वारा सूचना को मूल्यांकन या आंकलन के लिए एकत्रित किया जाता है। अनुसंधान उद्देश्य के लिए प्रयोग किया जाता है। निश्चित अध्ययनों मे ंदो या अधिक अनुसंधान अभिकल्पनाओं के मिश्रण का प्रयोग असामान्य नहीं होता है।

20.2 अनुसंधान अभिकल्पना की परिभाषा

अनुसंधान अभिकल्पना की बहुत परिभाषाऐं हैं, लेकिन कोई भी परिभाषा महत्वपूर्ण पहलूओं की पूर्ण सीमा को नहीं ढकता है। अनुसंधान अभिकल्पना के लिए कुछ परिभाषाऐं यहॉ प्रस्तुत की गई हैं।

डेविड जे लक एवं रोनाल्ड एस रूबिन के अनुसार, ''एक अनुसंधान अभिकल्पना सामान्य अनुसंधान दृष्ट्रिकोण या विशेष अनुसंधान परियोजना के लिए स्वीकृत रणनीति का निर्धारण एवं कथन होता है।'' करलिंगर अनुसंधान अभिकल्पना को ऐसे परिभाषित करता है ''योजना, बनावट एवं अन्वेषण की कल्पित रणनीति ताकि अनुसंधान प्रश्नों के उत्तरों को एवं प्रसरण नियंन्त्रण प्राप्त हो।''

ग्रीन एवं टल के अनुसार, ''एक अनुसंधान अभिकल्पना आवश्यक जानकारी प्राप्त करने के लिए विधियों एवं प्रक्रियाओं का विशेष लक्षण होता है।''

कूपर एवं शेडलर कहते है। कि ''अनुसंधान अभिकल्पना संकलन, माप एवं आंकडे के विश्लेषण के लिए खाका तैयार करता है।''

ग्रीन अनुसंधान अभिकल्पना को इस तरीके से परिभाषित करता है ''आवश्यक जानकारी प्राप्त करने के लिए विधियों और प्रक्रियाओं का विशेष लक्षण होता है । यह

परियोजना की रूपरेखा का सम्पूर्ण क्रियाशील सॉचा होता है जो अपेक्षा करता है कि किस श्रोत में से किस प्रक्रिया द्वारा आंकडा एकत्रित किया जाना है।''

अनुसंधान अभिकल्पना को योजना एवं अन्वेषण की ऐसी बनावट में अनुसंधान प्रश्नों के उत्तरों को प्राप्त करने की कल्पना के रूप मे वर्णित किया जा सके। योजना अनुसंधान की समग्र पद्धति या कार्यक्रम होती है। यह परिकल्पनाओं लिखने से अनुसंधानकर्ता क्या करेगा की एक रूपरेखा आर उनके आंकडों के अन्तिम विश्लेषण से क्रियाशील अनुमानों को सम्मिलित करता है। एक बनावट अनुसंधान प्रक्रिया को आयोजित करने एवं अनुसंधान के विन्यासों की रूपरेखा होती है। एक अच्छा अनुसंधान यह सुनिश्चित करेगा कि अनुसंधान प्रश्नों से प्राप्त जानकारी प्रासंगिक है और जिसे उद्देश्य एवं अल्पव्ययी प्रक्रिया द्वारा संकलित किया गया था। विशेष रूप से एक अनुसंधान अभिकल्पना के वैचारिक अनुसंधान समस्याओं को आनुभविक अनुसंधान के प्रासंगिक (और साध्य) से जोडाने के लिए वर्णित किया जा सके। यह सुस्पष्ट करता है क्या आंकडा आवश्यक है, इस आंकडे के संकलन एवं विश्लेषण के लिए कौन सी विधियों का प्रयोग किया जाना है, और कैसे ये सब आप के अनुसंधान प्रश्नों के उत्तर दे रहे हैं। विभिन्न प्रकार के अध्ययन के लिए विभिन्न तार्किक अभिकल्पनाऐं प्रयोग की जाती है।

अनुसंधान अभिकल्पना सर्वेक्षण के उद्देश्य को भी दर्शाता है जो अन्वेषण, वर्णन, स्पष्टीकरण, आगम कथन, मूल्यांकन एवं इतिहास के रूप में चित्रित किया जा सकता है। नीचे दी हुई सारणी विभिन्न समूहों में प्रश्नों के प्रकारों के साथ को सम्बोधित करता है।

प्रश्न का प्रकार	प्रश्न	उदाहरण
अन्वेषी प्रश्न	क्या घटना है ? प्रमुख कारक क्या है ?	एक लाभदायक कम्पनी के सफलता के महत्वपूर्ण कारक क्या होते हैं ? एक अच्छे नेता के खास लक्षण क्या होते हैं ? दक्षिण अफ्रिका के सडकों में नरसंहार के कारण क्या है?
वर्णात्मक प्रश्न	कितने अधिक है ? x का भार क्या है ? क्या x और y सम्बन्धित हैं ?	पिछले वर्ष दक्षिण अफ्रीका में कितने लोग AIDS से मरे ? क्या अभिभावकीय समर्थन और शैक्षिक उपलब्धि के मध्य एक सहसम्बन्ध है ?

कारणात्मक प्रश्न	क्यों ? Y के क्या कारण हैं ?	एक ग्रामीण समुदाय में कुपोषण के मुख्य कारण क्या होते हैं ? क्या धूम्रपान फेफडों के कैन्सर का मुख्य कारण हैं ?
मूल्यांकनात्मक प्रश्न	X का परिणाम क्या था क्या P सफल रहा है ?	क्या एक नया TB जागरूकता कार्यक्रम TB घटनाओं के प्रतिवेध में गिरावट दिखाता है ? क्या एक नये रेफ्रीजरेटर का परिचय उत्पादन की अधिक प्रभावी कीमत देता है ?
प्रायसूचक प्रश्न	X का y में प्रभाव क्या रहेगा ?	समग्र P में एक नये जीवाणुनाशक का परिचय क्या प्रभाव डालेगा ?
ऐतिहासिक प्रश्न	Y के होने के लिए क्या बढता है ? Y के होने के लिए घटनाऐं क्या थी ? Y के कारण क्या हैं ?	अस्सी के दशक के मध्य यूरोप में समाजवाद के निधन के कारण क्या थे ? कोसोवों की हवाई बमबारी करने के लिए नाटों देशों को क्या करना है ?

अपने विश्वविद्यालय के पुस्तकालय का भ्रमण करें और पुस्तकालय में उपलब्ध अनुसंधान जर्नल की पहुॅच बनायें। अनुसंधान लेखों के पढे जो उस जर्नल में प्रकाशित है। अनुसंधान अभिकल्पना को और लेखक लेखकों द्वारा लेखों में प्रयुक्त अनुसंधान विधि को समझने की कोशिश करें।

20.3 अनुसंधान अभिकल्पना की विशेषताऐं

अनुसंधान अभिकल्पना के विश्लेषण एवं व्याख्या के पश्चात अब हम अनुसंधान अभिकल्पना की विशेषताओं को निम्नवत संक्षिप्त कर सकते हैं :

- अनुसंधान अभिकल्पना एक परस्पर सम्बन्ध का समूह एवं अनुक्रमिक गतिविधियॉ और समय आधारित योजना होती है।
- अनुसंधान अभिकल्पना अनुसंधान प्रश्न एवं अनुसंधान रूपरेखा पर आधारित होती है।

- अनुसंधान अभिकल्पना अनुसंधान के लिए जानकारी के श्रोत के चयन का मार्गदर्शन करती है।
- अनुसंधान अभिकल्पना चरों के समबन्ध का अध्ययन किया जाना है, का उल्लेख करती है।
- अनुसंधान अभिकल्पना विभिन्न अनुसंधान गतिविधियों में प्रक्रियाओं का पालन किया जाना है, की रूपरेखा एवं उल्लेख को दर्शाती है।
- अनुसंधान अभिकल्पना अनुसंधान मे प्रयुक्त उपकरणों एवं साधनों का उल्लेख करता है।

कूपर एवं शिंडलर (2009) के अनुसार एक अनुसंधान अभिकल्पना विभिन्न प्रश्नों के लिए उत्तरों को उद्धिष्ट करता है, जैसे कि

- आंकडे एकत्रित करने के एिल कौन सी तकनीकें प्रयुक्त होगी ?
- विश्लेषण के लिए कौन सी विधि का पालन किया जाना होगा ?
- किस प्रकार का प्रतिदर्शन प्रयोग होगा ?
- समय एवं कीमत की बाध्यता के साथ कैसे निपटा जायेगा ?

20.4 अनुसंधान अभिकल्पना एवं अनुसंधान प्रकिया

अनुसंधान अभिकल्पना एवं अनुसंधान प्रकिया के मध्य आधारभूत अन्तर होते हैं, इस चरण में इन दो अवधारणाओं की समझ आपके लिए आवश्यक है। शिंडलर एवं कूपर ने अनुसंधान अभिकल्पना एवं अनुसंधान प्रकिया की तुलना निम्नवत की है।

अनुसंधान अभिकल्पना	अनुसंधान प्रणाली
परिणाम में ध्यान केन्द्रित होता है : किस प्रकार के अध्ययन की योजना बनाई जा रही है और परिणामों के प्रकार का ध्येय क्या है। उदाहरण के लिए ऐतिहासिक –तुलनात्मक अध्ययन या अन्वेषणात्मक अध्ययन, विवेचनात्मक और निगमनात्मक इत्यादि	अनुसंधान प्रकिया में ध्यान केद्रित रहता है और उपकरणों एवं प्रकियाओं का प्रयोग किया जाना होता है। उदाहरण के लिए दस्तावेज विश्लेषण, सर्वेश्रण विधियॉ प्रचलित द्वितीयक आंकडे/सांख्यिकीय इत्यादि का विश्लेषण
अनुसंधान समस्या या प्रश्न (द्वारा संचालित) प्रस्थान स्थल	विशेष कार्य (आंकडा संकलन या प्रतिदर्शन) हाथ में (द्वारा संचालित प्रस्थान स्थल)
अनुसंधान के तर्क में ध्यान केन्द्रित करता है : प्रश्नों का र्प्याप्त रूप से पता करने के लिए कौन से प्रमाण आवश्यक होते हैं ?	अनुसंधान प्रकिया मे एकल चरणों में (अरैखीय) ध्ययान केन्द्रित रहता है और सबसे बडा उद्देश्य (निष्पक्ष) प्रकिया का हिसाब लगेगा।

20.5 एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना के लिए मानदण्ड

चावला एवं सोन्धी (2011) के अनुसार एक अनुसंधान अभिकल्पना में निम्नलिखित आधारभूत सिद्धान्त होने चाहिए।

- अनुसंधान प्रश्न को बदलने में सक्षम और निश्चित अवधारणाओं/परिकल्पनाओं को क्रियाशील चरों में जिन्हें मापित किया जा सकता है।
- प्रक्रिया को उल्लेखित किया जाना चाहिए जिसका उपरोक्त कार्य को पूर्ण करने में जितना प्रभावी एवं प्रभावी एवं मितव्ययता से संभव हो सके पालन किया जायेगा।
- प्रक्रिया नियंत्रण का उल्लेख करते हैं जो दूसरे चरों के प्रभाव के प्रयोग को सुनिश्चित करेगा जिससे अध्ययन के परिणाम को प्रभावित नहीं किया जा सके।

उपरोक्त वर्णन के आधार पर अब हम एक अनुसंधान अभिकल्पना के लिए निम्न मानदण्डों का सार निकाल सकते हैं :–

- **सहजता** :– एक अनुसंधान अभिकल्पना सरल एवं समझने योग्य होनी चाहिए।
- **किफायती** :– अनुसंधान अभिकल्पना किफायती होनी चाहिए। चयनित तकनीक फायदेमन्द और कम समय लेने वाली होनी चाहिए।
- **विश्वसनीयता** :– एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना को विभिन्न त्रुटियों की संभावनाओं को कम करना सुनिश्चित करना चाहिए।
- **व्यवहार्यता** :– एक अच्छे अनुसंधान अभिाकल्पना को साध्य, व्यावहारिक और उपयोगी होना चाहिएं
- **सुनम्यता** :– एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना को अनुसंधान और विकास के कई विभिन्न पहलुओं के विचार को समायोजित करने के लिए पर्याप्त लचीला होना चाहिए।
- **यथार्थता** :– एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना से सटीक और परिणाम प्राप्त करने के लिए उद्देशित उचित निष्कर्ष निकालना चाहिए।

20.6 अनुसंधान अभिकल्पना में अनुसरण के लिए चरण

अनुसंधान अभिकल्पना के निरूपण के लिए चरण चक्रीय प्रक्रिया में होते हैं। ये प्रक्रियाऐं इस तरीके से परस्पर सम्बन्धित होते हैं कि पिछले को संशोधित करने के लिए पहले की प्रतिपुष्टि आवश्यक होती है। कभी कभी अनुसंधान अभिकल्पना निरूपण अनुसंधान प्रक्रिया अभिकल्पना के साथ विनिमेयता के अनुसार प्रयोग किया जाता है जो कि सत्य नहीं है। प्रत्येक अनुसंधान प्रक्रिया के लिए अनुसंधान अभिकल्पना विशिष्ट होती है और क्यों, कैसे और कब के निष्पादन मे किये गए कार्यों के विनिर्देशों के मूर्त के लिए ध्यान केन्द्रित करने की आवश्यकता होती है। अनुसंधान अभिकल्पना निरूपण का प्रारम्भ उद्देश्यों की स्पष्टता एवं अनुसंधान के क्षत्र के साथ होती है। अनुसंधान अभिकल्पना निरूपण का प्रारम्भ उद्देश्यों की स्पष्टता एंव अनुसंधान के क्षेत्र के साथ होती है। अनुसंधानकर्ता को जॉच के प्रकार का चयन करना पडता है कि क्या ज्ञान का प्रकार संम्भव और तर्क संगत है। विभिन्न पदों की एक बडी संख्या

अनुसंधान अभिकल्पना के उद्धरण में प्रयोग की जाती है और इन पदों को प्रायः अनुसंधान पद्धति, दृष्टिकोणों, परिप्रेक्ष्य और धारणाअें के पर्यायवाची के रूप में प्रयोग किया जाता है यद्यपि ये सभी तुलनीय होते हैं, लेकिन ये भिन्न हैं ।

अनुसंधान समस्या के जॉच का प्रकार एवं अनुसंधान एक अनुसंधानकर्ता के ज्ञानमीमांसीय स्थिति को परिभाषित करता है। ज्ञानशास्त्र ज्ञान अन्वेषण मे आधारभूत विषय के साथ जैसे ''कैसे ज्ञान की उत्पत्ति हुई है और इसे परीक्षण और मान्य होना चाहिए '' के साथ व्यवहार करता है अनुसंधान में तीन इंगित जॉच के प्रकार है जो अनुसंधान अभिकल्पना का मार्ग दर्शन करते हैं।

1. **सकारात्मकता** :— इस प्रकार मे प्रयोगाश्रित एवं वैज्ञानिक अनुसंधान को निष्पादित किया जाता है। इसमें नियंत्रण एवं विश्लेषण के सांख्यिकीय प्रकार की अवश्यकता होती है।
2. **रचनावादी** :— यह अनुसंधान के गुणात्मक प्रकार महत्व देता है और तर्क प्रस्तुत करता है कि सामाजिक विज्ञान मात्रात्मक विधि की तुलना के रूप में अनुसंधान के लिए सबसे उचित विकल्प है।
3. **त्रिकोणीय सर्वेक्षण** :— यह अनुसंधान के गुणात्मक एवं मात्रात्मक विधियों का एक साथ एवं क्रमिक अनुप्रयोग इंगित करता है। उपरोक्त वर्णित दृष्टिकोण के एक में से ज्ञानमीमांसीय स्थिति के चयन के पश्चात शोध प्रश्न पूरी रिपोर्ट में प्रस्तुत किए जाते हैं। यह अनुसंधानकर्ता को अनुसंधान प्रश्न एवं अनुसंधान की विधि के लिए एक प्रायोगिक एवं प्रबन्धकीय परिप्रेक्ष्य के विकास में सहायता करता है।

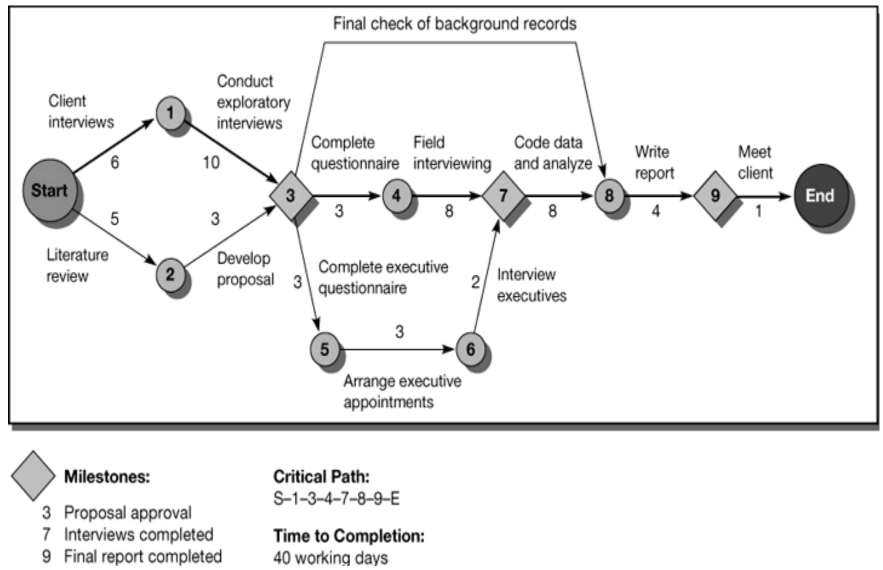
इस चरण के पश्चात अनुसंधानकर्ता द्वारा एक वैचारिक अनुसंधान अभिकल्पना का विकास किया जाता है जिसमें अध्ययन के चरों को निर्धारित किया जाता है और अध्ययन के प्रकार एवं विश्लेषण का चयन किया जाता है।

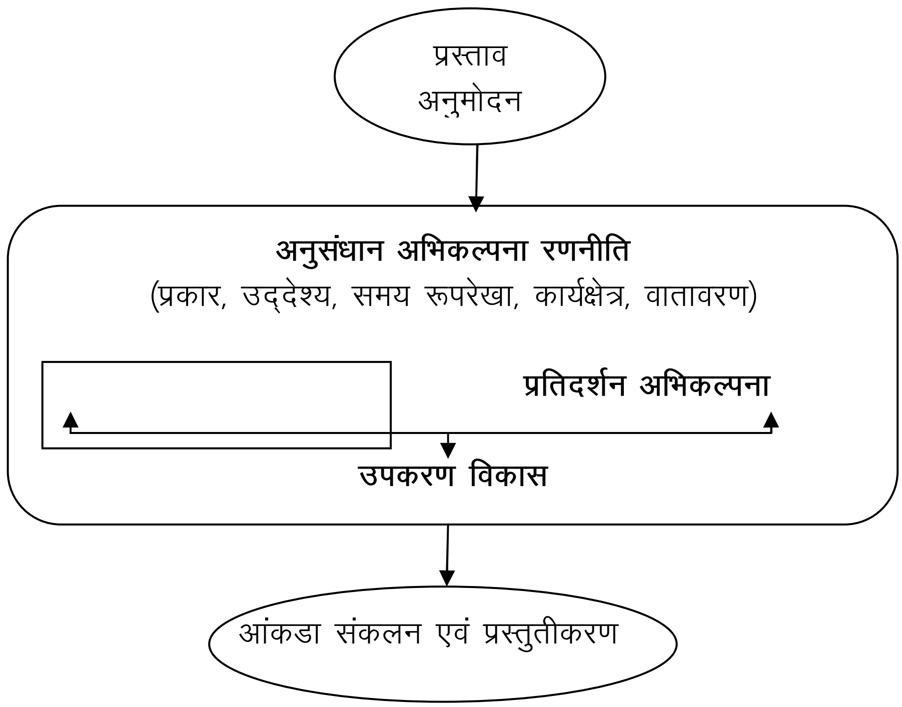
उपरोक्त वर्णनों के पश्चात अब आप अनुसंधान अभिकल्पना के पहलूओं के बारे में समझने में सक्षम होते हैं। अधिक विशेष रूप से एक अनुसंधान अभिकल्पना में निम्नलिखित सामान्य चरण सम्मिलित होते हैं।

1. **एक समस्या का चयन एवं परिभाषा** :— अध्ययन के लिए चयनित समस्या को क्रियाशील पदों मे इस तरीके से सुस्पष्ट परिभाषित करना चाहिए कि अनुसंधानकर्ता वास्तविक रूप से जानता है वह कौन से तथ्य देख रहा है और क्या यह अध्ययन में प्रासंगिक है।
2. **आंकडों का श्रोत** :— एक बार समस्या चयनित हो जाती है यह अनुसंधानकर्ता का कर्तव्य है कि जानकारी के विभिन्न श्रोतों का स्पष्ट वर्णन करें जैसे पुस्तकालय, व्यक्तिगत दस्तावेज, क्षेत्रकार्य, एक विशेष अवासिक समूह इत्यादि।
3. **अध्ययन का गुण** :— अनुसंधान अभिकल्पना को लिये गये अध्ययन की प्रकृति के सम्बन्ध में व्यक्त किया जाना चाहिए। इस चरण में सांख्यिकीय, प्रायोगिक या अध्ययन के तुलनात्मक प्रकार का विकल्प बनाना चाहिए ताकि योजना के निम्नलिखित चरणों में प्रस्तावित समस्या को प्रासंगिक बनाया जा सके।

4. **अध्ययन का उद्देश्य** :– इस स्थिति में अभिकल्पना का ध्येय या तो सैद्धान्तिक समझ या एक कल्पना धारणा को सुस्पष्ट करना चाहिये था। अध्ययन के उद्देश्यों का वर्णन न केवल अभिकल्पना को सुस्पष्ट करता है अपितु प्रतिक्रियादाताओं में से एक निष्कपट प्रतिक्रिया प्राप्त करता है।
5. **सामाजिक–सांस्कृतिक विषय** :– अनुसंधान अभिकल्पना को सामाजिक सांस्कृतिक परिस्थिति के आधार पर बनाना चाहिए। उदाहरण के लिए 'पिछले' वर्ग के लोगों में प्रजनन दर के अध्ययन में तथाकथित लोगों के पिछडे वर्ग का विषय एवं वैचारिक सन्दर्भ सुस्पष्ट बनाना चाहिए जब तक कि पद का अर्थ सुस्पष्ट परिभाषित न हो, अध्ययन में एक बडे परिवर्तन का रूख न हो । क्योंकि पिछडे पद के धार्मिक, आर्थिक और राजनैतिक संकेत हो सकते हैं।
6. **लौकिक विषय** :– अभिकल्पना की भौगोलिक सीमा भी इस चरण में निर्दिष्ट होनी चाहिए ताकि केवल विशेष सामाजिक समूह के लिए अनुसंधान सम्बन्धित परिकल्पनाओं का अनुप्रयोग किया जा सके।
7. **आयाम** :– एक बडे समग्र में से आंकडे संकलन का विश्लेषण स्वभाव में असम्भव होता है। इस प्रकार, एक र्प्याप्त एवं प्रतिनिधि प्रतिदर्श का चयन किसी अनुसंधान में एक शब्द द्वारा होता है।
8. **चयन का आधार** :– यादृच्छिक प्रतिदर्श लेने की प्रकिया (सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श, स्तरित, सुनियोजित, गुच्छीय) द्वि गुच्छीय या अंश प्रतिदर्श का जब सावधनीपूर्वक पालन किया जाता है एक प्रतिनिधित्व बनेगा या गैर यादृच्छिक प्रतिदर्शन (सुविधा, परख, सउद्देश्य अंश) निष्पक्ष तरीके में एक मान्य प्रतिदर्श है।
9. **आंकडों के संकलन की तकनीक** :– आवश्यक आंकडों के संकलन के लिए एक उपयुक्त तकनीक स्वीकार किया जाना होता है जो अध्ययन अभिकल्पना के प्रासंगिक हो। अवलोकन, साक्षत्कार और प्रश्नावली के सापेक्ष गुण अध्ययन के साथ उचित तकनीक के विकल्प में सहायता करेंगें। एक बार आंकडों का संकलन का विश्लेषण बीजांक और प्रस्तुतीकरण का पालन करना पडता है।

स्किल्डलर एवं कूपर ने अनुसंधान अभिकल्पना के चरणों को निम्नलिखित प्रारूपों में प्रस्तुत किया है।





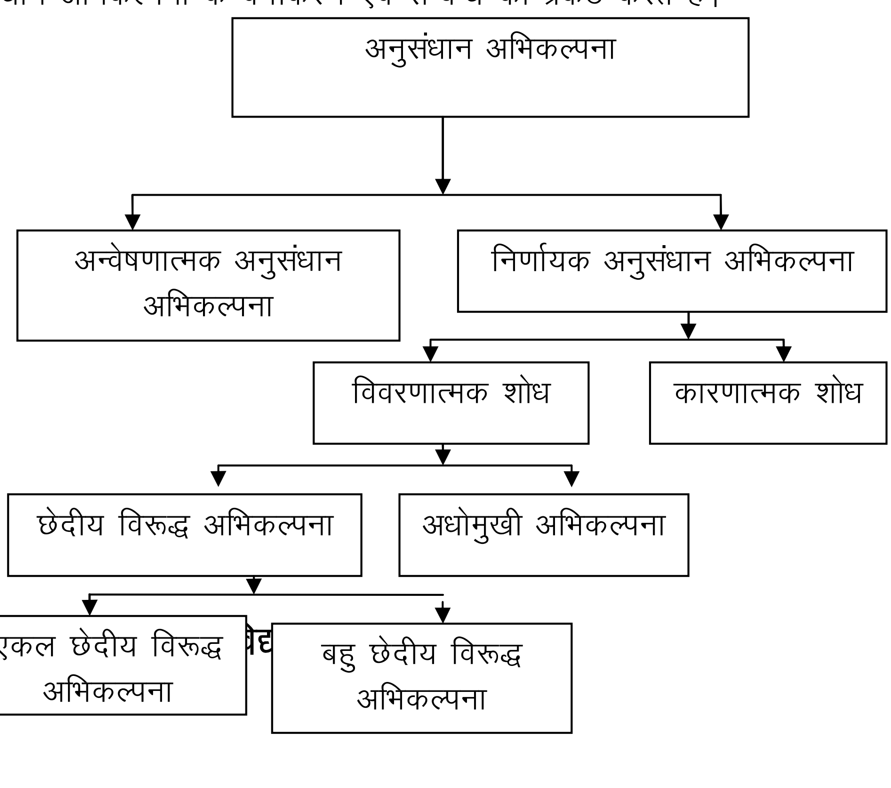
अभ्यास : किसी कम्पनी के उपलब्धि प्रतिवेदन जो समाचार पत्र में या किसी बेबसाइट में उपलब्ध हो पढे । आंकडे संकलन के प्रकार, इसका विश्लेषण एवं प्रस्तुतिकरण का निरीक्षण और कैसे इसको संगृहित किया गया है को समझे।

20.8 अनुसंधान अभिकल्पना वर्गीकरण के लिए मानदण्ड

अनुसंधान अभिकल्पना के विभिन्न प्रकारों को निम्न मानदण्डों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है।

- **जिस स्थिति तक अनुसंधान प्रश्न को किस्टलीकृत किया गया है :** इस आधार पर हमारे पास अन्वेषणात्मक अध्ययन एवं औपचारिक अध्ययन होते हैं।
- **आंकडा संकलन की विधि :** इस मापदण्ड के आधार पर अनुसंधान अभिकल्पनाओं को प्रबोधन एवं संचार अध्ययन के रूप में वर्गीकृत करते हैं।
- **अध्ययन के अन्तर्गत चरों में प्रभावों का निर्माण करने की अनुसंधानकर्ता की सामर्थ्य :–** इस श्रेणी के अन्तर्गत, अनुसंधान अभिकल्पनाओं को प्रायौगिक एवं पूर्वव्यापी के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।
- **अध्ययन का उद्देश्य** :– यह आधार अनुसंधान अभिकल्पना के प्रतिवेदन, विवरणात्मक, कारणात्मक अर्थकारी, कारणात्मक प्राग्सूचक के रूप में श्रेणीयों की ओर अग्रसर करता है।
- **समय आयाम** :– समय आयाम में, अनुसंधान अभिकल्पनाओं को अधोमुखी, छेदीय विरूद्ध के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।
- **प्रासंगिक कार्यक्षेत्र , विशालता और अध्ययन की गहनता** :– इस आधार पर, हम अनुसंधान अभिकल्पना को मामले का अध्ययन एवं सांख्यिकीय अध्ययन के रूप वर्गीकृत करते हैं।
- **अनुसंधान वातावरण** :– अनुसंधान वातावरण के आधार पर अनुसंधान अभिकल्पना को क्षेत्र विन्यास, प्रयोगशाला अनुसंधान, अनुकरण के रूप में परिभाषित किया जाता है।
- **प्रतिभागियों के अनुसंधान गतिविधियों की जानसम्बन्धी जागरूकता** :– यह अनुसंधान अभिकल्पना को वास्तविक नैत्यक अनुसंधान अभिकल्पना और संशोधित नैत्यक अनुसंधान अभिकल्पना के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।

मल्होत्रा ने अपनी विपणन अनुसंधान पुस्तक में विभिन्न प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पनाओं के मध्य सम्बन्धों को विकसित किया है । दायी ओर के चित्र विभिन्न अनुसंधान अभिकल्पना के वर्गीकरण एवं सम्बन्ध को प्रकट करते हैं।



20.9 अनुसंधान अभिकल्पना के प्रकार

पिछले वर्णनों के पश्चात, यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि विभिन्न विधियों द्वारा जिससे अनुसंधान प्रक्रिया को अभिकल्पित और बोधगम्य किया जा सके। इसके बाद भी अनुसंधान अभिकल्पना के विभिन्न प्रकार होते हैं बहुत सी पुस्तकें अनुसंधान अभिकल्पना के वर्णन को निम्न तीन प्रकार के अभिकल्पनों द्वारा पसंद करते हैं।

1. अन्वेषणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना
2. विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना
3. कारणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना

अब हम इन विभिन्न प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पनाओं का विस्तृत वर्णन करेंगें।

20.9.1 अन्वेषणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना :– अन्वेषणात्मक अनुसंधान असंगठित होता है, अनौपचारिक अनुसंधान, अनुसंधान समस्या का सामान्य प्रकृति के बारे में पृष्ठभूमि जानकारी को प्राप्त करना है। इस प्रकार की अनुसंधान अभिकल्पना विशेष रूप से उपयुक्त होती है जब अनुसंधान उद्‌देश्य निम्न पर पूर्ण विचार करते हैं :–

- समस्याओं या अवसरों का निर्धारण करना
- समस्या को अधिक विधि पूर्वक परिभाषित करना
- एक स्थिति में क्रियाशील चरों का घनिष्ठ निरीक्षण करना
- प्रासंगिक रणनीति निर्धारित करना
- समस्याओं या अवसरों के संभावित महत्व के सन्दर्भ में प्राथमिकताऐं स्थापित करना
- एक दृष्टिकोण विकसित होने से पहले अतिरिक्त अंतर्दृष्टि प्राप्त करना और
- निर्णायक अनुसंधान करने के लिए संबंधित समस्याओं पर जानकारी एकत्र करना

बहुत से अनुसंधान अन्वेषणात्मक प्रकृति के होते हैं, ये प्रथाओं को ढूढने या नीतियों जिन्हें परिवर्तन की आवश्यकता है और सम्भावित विकल्पों के विकास मे प्रकाश डालते हैं। अन्वेषणात्मक अनुसंधान का प्रयोग दूसरे अनुसंधान के संमिलन के साथ भी किया जा सकता है। जैसा नीचे बताया गया है, चूकि इसे अनुसंधान प्रक्रिया में पहले चरण के रूप में, समस्या को परिभाषित करने मे प्रयोग किया जाता है, दूसरे अभिकल्पनाओं का प्रयोग समस्या के हल के बाद होगा। उदाहरण के लिए, इसे उन परिस्थितियों में प्रयोग किया जा सकता है जब एक फर्म विक्री की मात्रा के लिए कठिन संघर्ष कर रही है, अनुसंधानकर्ता संभावित स्पष्टीकरण के विकास के लिए अन्वेषणात्मक अनुसंधान के प्रयोग को विकसित कर सकता है। अन्वेषणात्मक अनुसंधान का प्रयोग करते हुए प्राप्त आंकडों का विशलेषण करते हैं।

अन्वेषणात्मक अनुसंधान के उद्‌देश्यों के निरीक्षण में, यह सही समझे हैं कि इसे निर्णय निर्धारण प्रक्रिया के प्रारम्भिक अवस्था में प्रयोग किया जा सके। यह विकेता/केता को एक किसी वस्तु की अधिक समझ का जिसके बारे मे अनुसंधानकर्ता

अधिक नहीं जानता है की स्वीकृत प्रदान करता है। यह उन स्थितियों में निर्णय निर्धारक और अनुसंधानकर्ता की सहायता करता है जब उनके पास समस्या स्थिति और या वैकल्पिक रणनीति की जानकारी अपर्याप्त होती है। संक्षेप में, अन्वेषणात्मक अनुसंधान का प्रयोग विश्वसनीय प्रारूपों और निश्चित अवधारणाओं की अनुपस्थिती मे होता है।

अन्वेषणात्मक अनुसंधान को दूसरे अनुसंधान संमिलन के साथ भी प्रयोग किया जा सकता है। जैसा कि नीचे बताया गया है, चूँकि समस्या की परिभाषित करने के लिए इसे अनुसंधान प्रक्रिया की पहली अवस्था के रूप मे प्रयोग किया जाता है, दूसरी अभिकल्पनाऐं समस्या हल होने के बाद प्रयुक्त होंगी । उदाहरण के लिए, जब एक फर्म बिक्री की मात्रा के लिए कठिन संघर्ष कर रही है, अनुसंधानकर्ता संभावित स्पष्टीकरण के विकास के लिए अन्वेषणात्मक अनुसंधान प्रयोग को विकसित कर सकता है। अन्वेषणात्मक अनुसंधान का प्रयोग करते हुए उत्पन्न आंकडें का विश्लेषण अनिवार्य रूप से संक्षेपण और व्यापकीकरण में होता है। संक्षेपण प्रयोगाश्रित अवलोकनो, मापों इत्यादि के अनुवाद को अवधारणाओं के उद्घृत करता है, व्यापकीकरण का अर्थ सामग्री को इस तरीके से व्यवस्थित करना है कि ये उन बनावटों पर ध्यान केन्द्रित करता है जो सभी के लिए या अधिकतम परिस्थितियों में समान है। अन्वेषणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना को इसकी सुनम्यता और बहुविज्ञता द्वारा सबसे अच्छा विशेषित किया जाता है। यह इसलिए, क्योंकि एक बनावट में इसके अभिकल्पना के गैर अनिवार्यत की अनुपस्थिती होती है। इसमें प्रमुखता से कल्पनाशक्ति, सृजनता और अनुसंधानकर्ता की चतुरात सम्मिलित होती है।

निम्नलिखित विधियों द्वारा अन्वेषणात्मक अनुसंधान को संपादित किया जाता है :–

द्वितीयक आंकडा विशलेषण :– द्वितीयक आंकडा खोज के लिए एवं अनुसंधान समस्या के प्रासंगिक प्रचलित जानकारी की व्याख्या की प्रक्रिया को प्रकट करता है। (जैसे – जनगणना आंकडा, जर्नल, समाचार पत्रों इत्यादि में लेख)

- **अनुभव (विशेषज्ञ) सर्वेक्षण** :– उन समस्याओं से संबंधित जानकारी एकत्र करने का उल्लेख करता है जो समस्या से संबंधित मुद्दों पर जानकार हेाता है।(जैसे – विशेषज्ञों से पूछना)
- **स्थिति विश्लेषण** :– पिछली स्थितियों के प्रयोगों से जो वर्तमान अनुसंधान समस्या के समान है।
- **फोकस समूह** :– 8–12 लोगों के छोटे समूहों को एक साथ जोडता है और सहज चर्चा के माध्यम से एक मध्यस्थ द्वारा निर्देशित हेाता है।

  अन्वेषणात्मक अनुसंधान की कुछ और अधिक लोकप्रिय विधियों में साहित्य खोज, गहन साक्षात्मकार, फोकस समूह, और स्थिति विश्लेषण सम्मिलित हैं।

साहित्य की खोज :– परिकल्पनाओं को खोजने के लिए सबसे तेज और कम खर्चीला तरीकों मे से एक साहित्य खोज का संचालन करना होता है। प्रायः सभी विपणन अनुसंधान अनुमान यहॉ से प्रारम्भ होने चाहिए। पुस्तकालयों में, आनलाइन श्रोतों के माध्यम से, वाणिज्यिक डेटाबेस और इत्यादि में अविश्वनीसय मात्रा की जानकारी

उपलब्ध रहती है। साहित्य खोज में पत्रकारिता (समाचार पत्र, पत्रिकाऐं, इत्यादि) व्यापार साहित्य, शैक्षिक साहित्य, या प्रकाशित आंकडों का अनुसंधान फर्मों या सरकारी ऐजेंसियों से भी सम्मिलित होना होता है ।

गहन साक्षात्कार का प्रयोग ज्ञान एवं प्रतिक्रियादाताओं के अनुभव का समस्या या अवसर के साथ प्रासंगिक जानकारी से क्षार निकालना होता है। प्रासंगिक जानकारी के साथ एक गहन साक्षात्कार के लिए एक संभावित उम्मीदवार होता है जिसमे वर्तमान प्रतिक्रियादाता, लक्षित बाजार के सदस्य असामी संगठन के अधिशाषी एवं प्रबन्धक, विक्रय प्रतिनिधि, थोक विक्रेता, खुदरा व्यापारी और इस तरह सम्मिलित होते हैं। उदाहरण के लिए, एक बच्चों के पुस्तक प्रकाशक ने पुस्तकालयाध्यक्ष और स्कूल के अध्यापकों से बात करते हुए बिक्री की गिरावट के बारे में बहुमूल्य जानकारी प्राप्त की, जिन्होने संकेत दिया कि अधिक से अधिक लोग पुस्ताकलय अभिगम (सुविधााओं) का उपयोग कर रहे हैं और संभवतः अपने बच्चों के लिए कम किताबें खरीद रहे हैं।

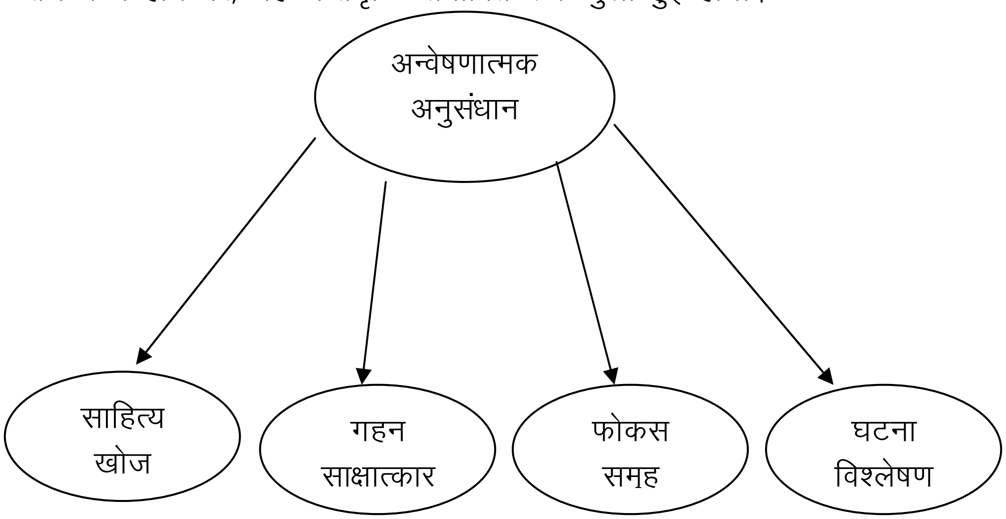
फोकस समूह साक्षात्कार विपणन अनुसंधान मे सबसे अधिक प्रयुक्त तकनीकें होती है। कुछ लोग यह तर्क देंगे कि ये सबसे भारी और दुरूप्योग तकनीकों में से एक है, इस बिन्दु को हम बाद में चर्चा करेगें। फोकस समूह में लोगों के एक छोटे समूह को (उदारहण के लिए, 8—12) रूचि के किसी विषय के बारे में बात करने के लिए फोकस समूह प्रायोजक द्वारा एक साथ लाया जाता है चर्चा को मध्यस्थ द्वारा निर्देशित किया जाता है जो कि कक्ष में फोकस समूह भागीदारों के साथ होता है। प्रबन्धक, विज्ञापन एजेंसी प्रतिनिधियों, और या दूसरे प्रायः सत्र को कक्ष के बाहर से मुद्दों की किसी न किसी रूपरेखा का पालन करने का प्रयास करता है जबकि एक साथ समूह चर्चा में विचार किए गए प्रत्येक व्यक्ति द्वारा की गई टिप्पणीयॉ होती है।

प्रतिभागियों को इस प्रकार दूसरों के विचारों से अवगत कराया जाता है कि उन विचारों का स्वयं के साथ जवाब दे सके। समूह अन्योन्यक्रिया एक महत्वपूर्ण पहलू होता है जो फोकस समूह साक्षात्कारों को गहन साक्षात्कारों में से पृथक करता है, जिन्हें एक समय मे एक प्रतिक्रियादाता के साथ संचालित किया जाता है। यह फोकस समूह का अनेकों अन्वेषणात्मक तकनीकों के ऊपर प्राथमिक लाभ भी है। क्योंकि उनके पारस्परिक प्रकृति से, एक फोकस समूह चर्चा के दौरान कभी कभी विचार ''नीले रंग से'' बाहर निकलते हैं इसके साथ साथ, एक तेजी से बढ जाना प्रभाव होता है। एक व्यक्ति द्वारा एक टिप्पणी दूसरों की प्रतिक्रियाओं की एक श्रंखला को प्रेरित कर सकती है। एक परिणाम के रूप में, प्रतिक्रियाऐं गहन साक्षात्कार की तुलना में अधिक सहज एवं कम पारंपरिक हो सकते हैं।

स्थिति का विश्लेषण रूचि की घटना के चयनित उदाहरणों के गहन अध्ययन से है, शोधकर्ता प्रायः सावधानी से चयनित उदाहरणों या घटनाओं के मामलों का अध्ययन करके एक स्थिति के बारे मे बहुत कुछ सीख सकते हैं। यह घटना विशलेषण का सार होता है, जो अन्वेषणात्मक अनुसंधान का दूसरा रूप है। अनुसंधानकर्ता के रूप में, आप मौजूदा अभिलेखों, घटना अवलोकन जिस रूप में यह घटित होता है,

असंगठित साक्षात्कारों का संचालन, विश्लेषण के विभिन्न दृष्टिकोणों में किसी एक के प्रयोग से दिये हुई स्थिति में क्या हो रहा है की जांच कर सकते हैं।

घटना विश्लेषण को विभिन्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है। कभी आन्तरिक अभिलेखों को समीक्षित करके, कभी व्यक्तिगत साक्षात्कार करके और कभी स्थितियों या लोगों को ध्यानपूर्वक अवलोकित करके । कई वर्षों पूर्व, एक कम्पनी ने इसके विक्रय बल की उत्पादकता को सुधारने का निर्णय किया। एक अनुसंधानकर्ता ने इस क्षेत्र के कई सबसे अच्छे विक्रेताओं की तुलना कई खराब विक्रेताओं से करते हुए उन्हें सावधानी पूर्वक अवलोकित किया। इससे निकला कि सबसे अच्छे विक्रेता थोक व्यापारियों के भंडार का निरीक्षण कर रहे थे और चीजों में अंगुलि निर्देश कर रहे जो कम था, छोटे प्रर्दशक इन चीजों में समय नहीं ले रहे थे। विक्रेता बल के साथ इस क्षेत्र में न होने पर, यह अन्तर्दृष्टि संभावित रूप खुली हुई होगी।



व्यावहारिक दृष्टि से अन्वेषणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना के निम्नलिखित उद्देश्य (मैल्होत्रा, 2001) हो सकते हैं।

- एक समस्या को अधिक सटीकता से निरूपित करना ।
- वैकल्पिक रणनीति निर्धारित करना ।
- एक परिकल्पना विकसित करना ।
- प्रमुख चरों को अलग करना और आगे के परीक्षण के लिए सम्बन्ध स्थापित करना ।
- समस्या के एक दृष्टिकोण को विकसित करने के लिए अर्न्तदृष्टि प्राप्त करना।
- आगे अनुसंधान के एिल प्राथमिकताऐं स्थापित करना।

20.9.2 विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना :– विवरणात्मक अनुसंधान कौन, क्या, कब ,कहॉ और कैसे प्रश्नों के उत्तर प्रदान करते हैं । यहॉ पर यह ध्यान रखना आवश्यक है कि हम अन्तिम रूप से उत्तरों को सुनिश्चित नहीं कर सकते हैं कि क्यों विवरणात्मक अध्ययनों का प्रयोग हो रहा है।

जैसा कि नाम के सुझाव से, विवरणात्मक अध्ययन में किसी स्थिति या घटना का निरीक्षण और अनुसंधान के अर्न्तगत अध्ययन का विवरण सम्मिलित होता है। उदाहरण के लिए एक बाजार स्थिति के लिए विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना के विवरण के लिए कौन, क्या, कब, कहॉ और कैसे निम्नलिखित स्थितियों को सुविचारित किया जा सकता है।

- विशेषताऐं या फलन
- एक विशेष समूह जो एक समान खरीद व्यवहार प्रदर्शित कर रहे हैं में ग्राहकों के प्रतिशत का आंकलन
- उत्पाद विशेषताओं की अभिज्ञता, और
- विशेषता के व्यवहार के आकार का दूसरे की तुलना मे पूर्वानुमान

विवणात्मक अनुसंधान में, आंकडे को एक विशिष्ट एवं निश्चित उद्देश्य के लिए एकत्रित किया जाता है और इसमें अनुसंधानकर्ता द्वारा विश्लेषण एवं व्याख्या सम्मिलित होती है। अन्वेषणात्मक एवं विवरणात्मक अनुसंधान के मध्य अन्तर निम्नवत है।

- विवरणात्मक अनुसंधान विशिष्ट उद्देश्यों के निरूपण द्वारा चित्रित होता है।
- विवरणात्मक अध्ययन अन्वेषणात्मक अनुसंधान की तुलना में लचीलेपन एवं बहुविज्ञता को रोकते हैं।
- जानकारी के श्रोतों के चयन के लिए एवं इन श्रोतों से आंकडे संग्रह के लिए इसमें एक उच्च अंश के विशिष्ट विधि का रूपतामक अभिकल्पना सम्मिलित होती है।

रूपात्मक अभिकल्पना यह सुनिश्चित करने में आवश्यक होती है कि वर्णन में सभी वांछनीय अवस्थाऐं सम्मिलित हैं । इसमे अनावश्यक आंकडे के संग्रह को रोकना भी आवश्यक हेाता है। जब एक विवरणात्मक अनुसंधान को अभिकल्पित किया जाता है, अनुसंधानकर्ता को उसके द्वारा प्रयोग किये जा रहे सांख्यिकीय तकनीकों के प्रकार एवं प्रकृति का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। यह स्थिति में सही अभिकल्पना के लिए सहायता करेगा।

सामान्यतः विवरणात्मक अध्ययन प्रश्नावली, संरचित साक्षत्कारों एवं अवलोकनों के प्रयोगों से निष्पादित की जाती है। विवरणात्म्क अध्ययनों के परिणाम सीधे तरीके से प्रबन्धकीय निर्णयों के लिए प्रयोग किये जाते हैं।

विवरणात्मक अध्ययन को विस्तृत श्रेणीयों के रूप में निम्नवत वर्गीकृत किया जा सकता है।

- पार अनुभागीय विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना
- अधोमुखी विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना

अधोमुखी अनुसंधान पैनल आंकडा एवं पैनल विधियों मे निर्भर होता है। इसमे एक पैनल लगाया जाता है जिसमें विषयों के प्रतिदर्श लगे होते हैं जो बार बार मापे जाते हैं, उन्हें शामिल करते हैं । पैनल सदस्य वे होते हैं जो अपनी सहमति एक विशिष्ट

अन्तराल में एक विस्तारित अवधि पर प्रदान करते हैं। उदाहरण के लिए, पैनल निर्माण से प्राप्त आंकडों की जानकारी को बाजार प्रतिभूतियों को प्रदान करना समय के विस्तारित अवधि पर आधारित होता हैं, लेकिन यह अनुसंधानकर्ता को समय के ऊपर बाजार प्रतिभूति में परिवर्तन के निरीक्षण की आज्ञा भी देता है। नये सदस्यों को पैनल में सम्मिलित किया जा सकता है। जब वर्तमान सदस्य पैनल को छोड देते हैं या जब सदस्यों का प्रतिनिधित्व बनाऐं रखना होता है। पैनल आंकडा विश्लेषणात्मक होता है और अध्ययन में जानकारी संग्रह के सन्दर्भ में लाभ सम्मिलित होते हैं । इन्हें पार अनुभागीय आंकडों की तुलना में अधिक सटीक सुविचारित भी किया जाता है क्योंकि पैनल आंकडा को पिछले व्यवहार के प्रतिवेदन में उठने वाली त्रुटियों और साक्षात्कार और प्रतिवादी के बीच आवश्यक वार्तालाप के कारण उत्पन्न हुई त्रुटियों से जुडी समस्या को बेहतर तरीके से संभालना होता है।

विवरणात्मक अनुसंधान के कुछ उदाहरण निम्नवत हैं।

- बिक्रीकर्ताओं के विभिन्न विशेषताओं के मापने का अध्ययन, एक प्रशिक्षण कार्यक्रम या खुदरा व्यापार स्थिति ।
- बिक्रीकर्ता या ग्राहक कैसे व्यवहार करते हैं को मापना साथ साथ बिक्री तीव्रता में क्या हुआ है।
- एक विशेष भंडार में खरीददारी करने वाले लोगों की विशेषताओं के बारे में सीखना।
- पूरे वर्ष में बहुसमय में लिया गया संतुष्टि अध्ययन ।

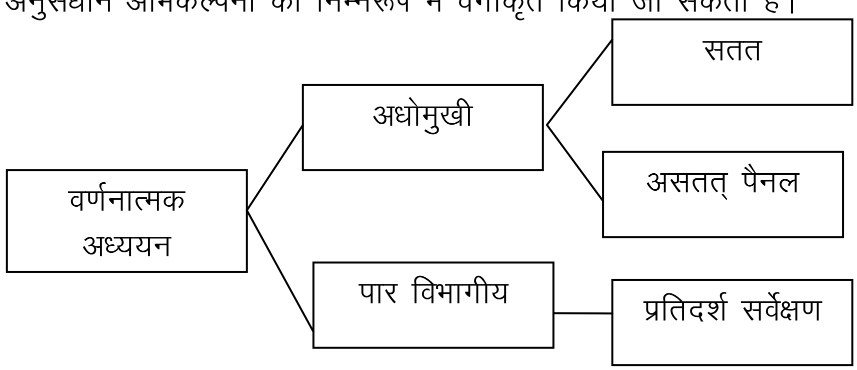
पार अनुभागीय अनुसंधान विपणन में सबसे अधिक प्रमुखता एवं बहुधा प्रयुक्त विवरणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना होती है। इसमें रूचि के समग्र में से एक प्रतिदर्श के तत्व सम्मिलित हेाते हैं प्रतिदर्श तत्वों को एक गुणों की संख्या में सुनिश्चित किया जाता है। दो प्रकार के पार अनुभागीय अध्ययन होते हैं।

- क्षेत्र अध्ययन और
- सर्वेक्षण

यह दिखाया जा सकता है कि क्षेत्र अध्ययनों एवं कोई अंतर नहीं है लेकिन दोनों समान है। यद्यपि, प्रौद्योगिक कारणों के लिए इन्हें पार अनुभागीय अनुसंधान की दो श्रेणीयों मे वर्गीकृत किया जाता है आधारभूत अन्तर ये अनुसंधान क्या सम्मिलित करते हैं इसकी गहराई निर्भर करता है। जबकि सर्वेक्षण का दायरा वृहद होता है, क्षेत्र अध्ययन में अधिक गहराई होती है। सर्वेक्षण कुछ ज्ञात समग्र के प्रतिनिधित्व को बनाने की कोशिश करता है और क्षेत्रीय अध्ययन बडे प्रतिनिधि के प्रतिदर्श जनन से कम सम्बन्धित होता है और कुछ विशिष्ट परिस्थितियों के गहन अध्ययन से अधिक सम्बन्धित होता है। पार विभागीय अभिकल्पना एक समग्र में से लिये गये प्रतिदर्शों की संख्या के आधार पर या तो एकल या बहु पार विभागीय अभिकल्पना हो सकती है। एकल पार विभागीय अभिकल्पना में, एक प्रतिदर्श प्रतिक्रियादाता को लिया जाता है जबकि बहु पार विभागीय अभिकल्पनाओं में, दो या अधिक प्रतिक्रियादाताओं का प्रतिदर्श लिया जाता है। विशेष रूचि का बहु पार विभागीय अभिकल्पना का एक प्रकार

को हार्ट (दल) विश्लेषण होता है। वर्णनात्मक अनुसंधान या तो मात्रात्मक या गुणात्मक अनुसंधान पद्धतियों की परिभाषा में पूर्णरूप से उपयुक्त नहीं होता है लेकिन इसके बावजूद इसका दोनों तत्वों में प्रायः समान अध्ययन के अन्दर प्रयोग किया जा सकता है। वर्णनात्मक अनुसंधान शब्द अनुसंधान प्रश्न के प्रकार, अभिकल्पना, और आंकडा विश्लेषण जो दिये हुए प्रसंग में प्रयोग होगा का इशारा करता है। वर्णात्मक सांख्यिकीय बताते है कि क्या है, जबकि अनुमानित सांख्यिकीय कारण और प्रभाव को निर्धारित करने की कौशिश करते हैं।

शोधकर्ता द्वारा पूछे जाने वाले प्रश्न का प्रकार अंततः विषय सही आकलन को पूरा करने के लिए आवश्यक दृष्टिकोण का निर्धारण करेगा। वर्णात्मक अध्ययन, मुख्यतः ''क्या है'' को जानने के लिए सम्बन्धित है, निम्न प्रश्नों की जांच के लिए प्रयोग किया जा सकता है। वर्णनात्मक अनुसंधान या तो मात्रात्मक या गुणात्मक हो सकता है । इसमे गुणात्मक जानकारी का संग्रह सम्मिलित हो सकता है जिसे संख्यात्मक रूप में एक सातत्य के साथ सारणीबद्ध किया जा सकता है, जैसे एक परीक्षण में प्राप्तांक या एक व्यक्ति द्वारा एक बहुमाध्यम कार्यक्रम के एक निश्चित विशेषता के चयन मे समय की संख्या या यह जानकारी के श्रेणीयों का वर्णन कर सकती है जैसे लिंग या अन्योन्यक्रिया का सांचा जब एक समूह स्थिति में तकनीक का प्रयोग किया जाता है। (ग्लास एवं होपकिन्स 1984) वर्णात्मक अनुसंधान में आंकडों का एकत्रीकरण सम्मिलित होता है जो घटनाओं का वर्णन करता है और तब संगठित, सारणीबद्ध, प्रदर्शित एवं आंकडा संग्रहण वर्णित होता है। इसमें प्रायः दृश्य प्रसाधन जैसे रेखाचित्र, मानचित्र सम्मिलित होते है। जो आंकडा वितरण में पाठक की समझ को बढाते हैं। क्योंकि मानवीय मस्तिष्क कच्चे आंकडों का पूर्ण आयात नहीं कर सकता है, प्रबंधकीय रूप से आंकडों को कम करने में वर्णनात्मक आंकडे बहुत महत्वपूर्ण होते है। जब गहराई मे, घटनाओं के छोटी संख्या के कथा वर्णन सम्मिलित होते हैं, अनुसंधान विश्लेषण के दौरान उभरने वाले प्रतिरूपों में आंकडों को व्यवस्थित करने के लिए उपकरण के रूप में वर्णन का प्रयोग किया जाता है। ये प्रतिरूप एक गुणात्मक अध्ययन और इसके प्रभावों को समझने मस्तिष्क की सहायता करते हैं। वर्णनात्मक अनुसंधान अभिकल्पना को निम्नरूप में वर्गीकृत किया जा सकता है।



उपरोक्त प्रदर्शित एक विवरणात्मक अध्ययन के विभिन्न प्रकार विवरण है। पार विभागीय अभिकल्पनाओं जो परम्परागत रूप से सबसे अधिक प्रचलित है और अधोमुखी अभिकल्पनाओं के मध्य आधारभूत अंतर होता है। विशिष्ट रूप से, एक पार

विभागीय अध्ययन में रूचि के समग्र में से प्रतिदर्श के तत्वों को लेना सम्मिलित होता है। तत्वों की विशेषता या प्रतिदर्श सदस्यों की माप एक बार होती है। अधोमुखी अध्ययन में, दूसरी तरफ, एक पैनल सम्मिलित होता है, जो एक नियत तत्वों का प्रतिदर्श होता है। तत्व भंडार, थोक विक्रेता, या प्रतिदर्श समय के माध्यम से अपेक्षाकृत स्थिर रहता है, यद्यपि सदस्यों को छोड गये सदस्यों की जगह सम्मिलित किया जाता है ताकि प्रतिनिधित्व बने रहे । एक अनुभागीय अध्ययन में एक बार माप के विपरीत, एक पैनल में प्रतिदर्श सदस्यों को बार बार मापा जाता है।

अभ्यास :– कुछ अनुसंधान लेखों को अपने विश्वविद्यालय के अध्यापकों के दिशा निर्देश में लिखें। अनुसंधान प्रसंग एवं आंकडे सग्रहण की परिभाषा एवं प्रतिपादन में सम्मलित चरणों को समझने की कोशिश करें। इन लेखों को प्रकाशन के लिए भी भेजें।

20.9.3 कारणात्मक अनुसंधान अभिकल्पना :– कभी कभी प्रबंधकों को एक विशेष क्रिया में एक विशेष परिणाम उत्पन्न करने की संभावना के लिए सशक्त प्रमाणों की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, अगर आप उत्पाद संवेष्टन में परिवर्तन पर विचार कर रहे थे, तो आप इस परिकल्पना का परीक्षण करना चाहेगें: ''अनाज संवेष्टन की पुनरर्चना होती है कि यह उत्पाद के कम और कम होने की संभावना है और इससे उपभोक्ता दृष्टिकोण में सुधार होगा।''

वास्तविक आवश्यक निर्णयों के लिए, कभी कभी हमें वर्णनात्मक अनुसंधान के साथ मिलकर सशक्त प्रमाणों की आवश्यकता होती है। (वर्णनात्मक अनुसंधान का उपयोग करके, हमने यह जान लिया होगा कि उपभोक्ता निर्धारण के बीच एक नकारात्मक सहसंबंध होता है, जो उत्पाद की ओर झुकाव एवं प्रवृत्ति की संभावना होती है, लेकिन बहुत अधिक नहीं।) वर्णात्मक अनुसंधान परिकल्पना परीक्षण के लिए चरों के मध्य सम्बन्धों के बारे में अच्छे होते हैं, लेकिन हमें कारण एवं प्रभाव सम्बन्ध परीक्षण के लिए कारणात्मक अभिकल्पनाओं की आवश्यकता होती है। धारणा के साथ परिचित होता है, विचार होता है कि एक बात दूसरी घटना की ओर ले जाती है। कारणत्व की वैज्ञानिक धारणा अत्यन्त जटिल होती है, यद्यपि वैज्ञानिक हमें बताते हैं कि यह सिद्ध करना असम्भव है कि एक बात का कारण दूसरा होता है स्थापित करें कि चर x, चर y में परिवर्तन को कारण हेाता है, में शर्तों की संख्या के मिलने की आवश्यकता होती है, उनमें से एक (y के दूसरे सभी सम्भावित कारणों का निष्कासन) हम निश्चित रूप से कुछ भी नहीं जानते है कि हम कितनी सावधानी से हम योजना बना चुके है और शोध का आयोजन करते हैं। प्रयोगात्मक अनुसंधान अभिकल्पनाऐं प्रयोगों के उपयोग के माध्यम से संभावित कारण सम्बन्धों की स्थापना की ओर काम करते हैं।

प्रयोग कारणात्मक अनुसंधान के रूप में : एक प्रयोग कारणों से सम्बन्धों के अधिक विश्वसनीय साक्ष्य प्रदान कर सकता है क्योंकि नियन्त्रण के कारण यह जांचकर्ताओं को प्रदान करता है। एक प्रयोग में, एक अनुसंधानकर्ता कुशलतापूर्वक कार्य करता है। या स्तरों के समूह का एक या एक से अधिक कारणों वाले (स्वतंत्र चर) एक दूसरे या अधिक परिणाम चर पर प्रभाव की जांच करने के लिए, अन्य सभी संभव कारणों के

प्रभावों के लिए निश्चित मात्रा का प्रयास करते हुए, सामान्यतया उन्हें स्थिर रखा जाता है।

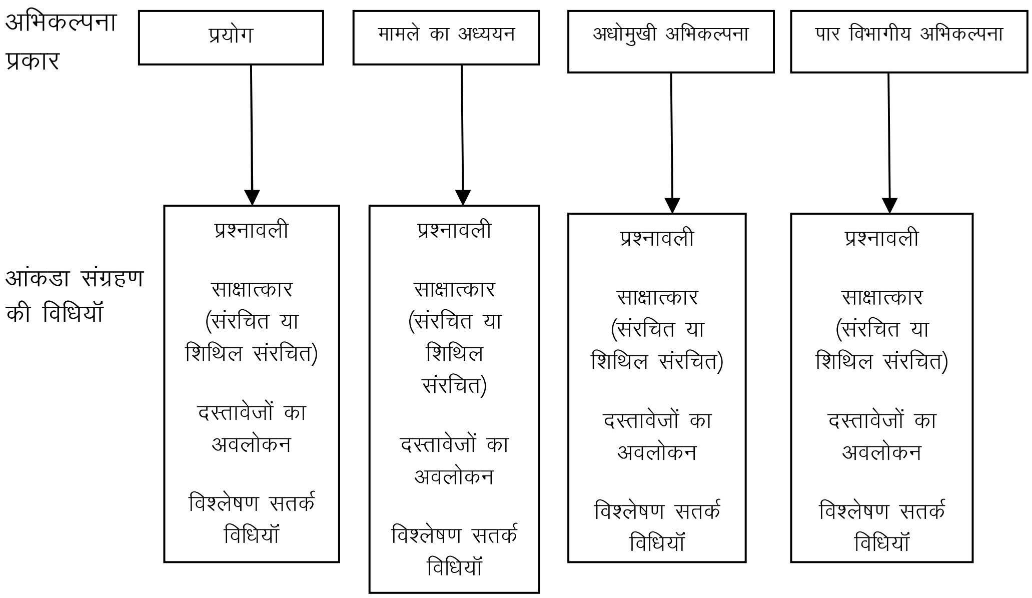
कभी कभी हम ''निचली'' या ''अकल्पनाशील'' वातावरण में प्रयोग का संचालन करते है ताकि हम ठीक से नियंत्रण कर सके कि कौन से शोध भागीदार देख सके और अनुभव कर सके । (प्रयोगात्मक विषय कहा जाता है) यह हमें अवलोकित किए गए चर के प्रभाव का पालन करने देता है जबकि अन्य कारकों के प्रभाव का पालन करने देता है। जबकि अन्य कारकों के प्रभाव को कम किया जाता है। प्रयोगों को प्रयोगशाला प्रयोगों या क्षेत्र प्रयोगों के रूप मे आयोजित किया जा सकता हैं प्रयोगशाला प्रयोगों में हमने लगभग निश्चित रूप से तय किया है कि चर हमलों के परिणामों का उत्पादन करते है। क्योंकि हमें सभी कारकों को नियत रख सकते हैं।

एक क्षेत्र प्रयोग एक यथार्थवादी या प्राकृतिक परिस्थितियों में आयोजित एक शोध अध्ययन है। प्रयोगशाला प्रयोगों की तरह, एक या अधिक चर को एक परिणाम चर पर उनके प्रभाव को देखने के लिए कुशलातापूर्वक प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह क्षेत्र में आयोजित किया जाता है, आपकों एक प्रयोगशाला अध्ययन की तरह नियंत्रण की मात्रा नहीं लेकिन आप यथा संभव अधिक नियंत्रण करने का प्रयास करेगें।

उदाहरण :– गुच्छीय (बनाम गैर गुच्छीय) यात्रा श्रंखलाओं के लिए उपभोक्ता प्राथमिकताओं का अध्ययन करने वाले शोधकर्ताओं ने भी क्षेत्रीय प्रयोग आयोजित किया था। इस स्थिति में, उन निवासियों के साथ प्रयोग किया गया जो वास्तव में उस क्षेत्र में रहते थे। जिनका प्रयोगशाला प्रयोगों के विषयों के लिए प्रतिचित्रण किया गया था। यद्यपि, क्षेत्रीय अध्ययन के लिए, शोधकर्ताओं ने एक टेलीफोन सर्वेक्षण का प्रयोग किया और छात्रों के घर के पते और खुदरा विक्रेताओं के वास्तविक स्थानों पर अध्ययन के आधार पर अध्ययन किया, जो विषयों के लिए जाना जाता था। उन्होने उनसे यह सोचने के लिए कहा कि खुदरा व्यापारियों को दो प्रकार की यात्राऐं करने की आवश्यकता है और फिर उन्हें दो वैकल्पिक मार्ग (एक जो गुच्छीय था और एक गैर गुच्छीय था) के साथ प्रस्तुत किया। प्रयोगशाला प्रयोग के रूप में, विषयों ने गैर गुच्छीय यात्रा श्रृंखला की तुलना में गुच्छीय यात्रा श्रृंखला के लिए प्राथमिकता व्यक्त की, यद्यपि समग्र यात्रा दूरी उसी बारे में थी।

अभ्यास प्रश्न :– एक कम्पनी उत्पाद के विक्री की गिरावट समस्या विक्रय का सामना कर रही है। इस कम्पनी का प्रबन्धक विक्रय आगम की गिरावट से चिन्तित है और विक्री कार्यकारिणी की संगोष्ठी बुलाता है। इस संगोष्ठी में विक्री की गिरावट के विभिन्न कारणों की व्याख्या हुई थी। विक्रय प्रबन्धक व्याख्याओं से संतुष्ट नहीं होता है और इस समस्या के लिए एक शोध का निष्पादन करता है। आप किस प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पना की सलाह देगें । अपने उत्तर को न्यायसंगत सिद्ध करें।

उदाहरण :– विभिन्न प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पना में आंकडा संग्रहण की सुझायी गयी विधियॉ



20.10 अनुसंधाान अभिकल्पना में त्रुटियॉ

अब हम अनुसंधान अभिकल्पना के प्रकार के बारे में समझ विकसित कर चुके हैं। विशेष रूप से अनुसंधान अभिकल्पना शोधकर्ता और जांच के तरीके के चयन द्वारा अनुसंधान समस्या के निर्माण पर निर्भर करता है। यहॉ तक कि विभिन्न प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पनाओं के व्यापक वर्गीकरण में भी, यह एक व्यक्ति परक प्रक्रिया है जो अभी तक मानकीकृत नहीं हैं। किसी भी चरण का गलत चयन, अनुसंधान अभिकल्पना में त्रुटियों की वजह से हो सकता है जो निम्नवत हो सकते हैं :–

1. **समग्र विशेष में त्रुटि** :– इस प्रकार की त्रुटि घटित होती है जब अनुसंधानकर्ता अनुपयुक्त समग्र या ब्रहमाण्ड का चयन करता है जिससे आंकडें प्राप्त करने हैं। **<u>उदाहरण</u>** :– पैकेज किए गए सामान निर्माता अवसर गृहिणियों का सर्वेक्षण करते हैं, क्योंकि उनसे सम्पर्क करना आसान होता है और यह माना जाता है कि वे यह तय करते है कि क्या खरीदा जाना चाहिए और वे वास्तविक खरीददारी भी करते हैं । इस स्थिति में प्रायः समग्र विनिर्देश त्रुटि होती है। पति खरीदे गए वस्तुओं का एक महत्वपूर्ण हिस्सा हो सकते हैं, और जो खरीदा जाता है उस पर बहुत प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष प्रभाव पडता है। इस कारण से, प्रतिदर्श से पति को छोडकर गलत दर्शकों का लक्षित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।
2. **प्रतिदर्शन में त्रुटि** :– प्रतिदर्शन त्रुटि घटित होती है जब एक प्रतिदर्श के चयन मे प्रायिकता प्रतिदर्शन विधि का प्रयोग होता है लेकिन परिणामी प्रतिदर्श सम्बन्धित समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करता है। दुर्भाग्यवश, प्रतिदर्श त्रुटि के कुछ तत्व अपरिहार्य होते हैं। यह विश्वसनीयता अंतराल के लिए जिम्मेदार हैं, एक संभावना मानते हुए प्रतिदर्शन विधि का प्रयोग किया जाता है। **<u>उदाहरण</u>** :– मान लिजिए कि हमने प्रौढ आबादी से 500 लोगों के एक यादृच्छिक

प्रतिदर्श को जो कि उनकी मनोरंजन वरीयताओं को मापने के लिए एकत्रित किए गये हैं। फिर विश्लेषण पर, इसमें 70 प्रतिशत महिलाऐं पायी गई यह प्रतिदर्श सामान्य वयस्क समग्र का प्रतिनिधि नहीं होगा और आंकडे को प्रभावित करेगा। महिलाओं की मनोरंजन वरीयताओं में अधिक वजन होता है, सामान्य वयस्क समग्र के लिए सटीक बहिर्वेशन को रोकता है। प्रतिदर्शन की त्रुटि का प्रभाव समग्र की समरूपता से प्रभावित होता है प्रतिदर्श में से प्रतिदर्श द्वारा होता है।

3. **प्रतिदर्श चयन मे त्रुटियॉ** :– चयन त्रुटि एक गैर प्रायिकता विधि द्वारा चयनित प्रतिदर्श के लिए प्रतिदर्शन त्रुटि होती है। **उदाहरण :–** एक माल अवरोधन अध्ययन करने वाले साक्षात्कारकर्ता उन उत्तरदाताओं का चयन करने के लिए एक स्वाभाविक प्रवृत्ति है जो सबसे अधिक सुलभ और अनुदार है जब भी ऐसा करने के लिए अक्षांश हो। ऐसे प्रतिदर्शों मे प्रायः दोस्तों और सहयोगियों को सम्मिलित किया जाता है जो वांछित समग्र के लिए विशेषताओं में कुछ समानताऐं रखते हैं।
4. **गैर प्रभावनीय त्रुटियॉ** :– गैर प्रतिकिया त्रुटि मौजूद हो सकती है जब प्राप्त प्रतिदर्श मूल चयनित प्रतिदर्श से भिन्न होता है। **उदाहरण :–** टेलीफोन सर्वेक्षण में, कुछ प्रतिक्रियादाता अनुपलब्ध होते हैं क्योंकि वे प्रारंभिक काल या वापिस काल के लिए घर पर नहीं होते है। सर्वेक्षण की अवधि के लिए दूसरों ने स्थानांतरित किया है या घर से दूर है, घर पर किसी व्यक्ति के साथ परिवारों की तुलना में काम करने वाली पत्नियों की तुलना में कम से कम कुछ प्रतिक्रियादाताओं का कोई भी छोटा बच्चा नहीं होता है। जो लोग स्थानांतरित हो चुके हैं या सर्वेक्षण अवधि के लिए दूर हैं वे समग्र के औसत की तुलना में अधिक भौगोलिक गतिशीलता रखते हैं, इस प्रकार, अधिकांश सर्वेक्षण प्रतिक्रियादाताओं के गैर संपर्क से त्रुटियों की अपेक्षा कर सकते हैं। ऑनलाइन सर्वेक्षण ई–मेल वितरण के माध्यम से इस त्रुटि से बचने की कोशिश करते हैं। इस प्रकार घर के प्रतिकियाओं को विलुप्त नहीं करना होता है।
5. **माणीय त्रुटियॉ** :– मापन त्रुटि ही माप प्रक्रिया से उत्पन्न होती है, और उत्पन्न की गई जानकारी और शोधकर्ता द्वारा मांगी गई जानकारी के बीच के अन्तर का प्रतिनिधित्व करती है।

उदाहरण 4 :– एक खुदरा भण्डार दहक खरीद पर ग्राहक प्रतिपुष्टि की राय का आंकलन करना चाहती है। सर्वेक्षण विकसित किया जाता है लेकिन भण्डार में खरीददारी वाले लक्षित ग्राहक से विफल रहते हैं। इसके अतिरिक्त जिन ग्राहकों द्वारा वस्तु ऑनलाईन खरीदे गए हैं उनके परिणाम बदले हैं।

20.11 आंकडों के प्रकार एवं आंकडा संग्रहण विधियॉ

अनुसंधान आंकडे विभिन्न प्रकार से एकत्रित किये जा सकते हैं। इन विधियों में से कुछ पद्धति पर और अनुसंधान मे प्रयुक्त अनुमानित अवधारणाओं पर निर्भर होती है। ''त्रिकोणीय'' (डेन्जिन 1978, टामकिन और ग्रूव्स, 1983 द्वारा उद्घृत) द्वारा सैन्य

अध्ययनों से प्रस्तुत एक धारणा को अलग अलग तरीकों के माध्यम से परिणामों की पुष्टि करके अनुसंधान के अध्ययन को अधिक मजबूत और कठोर बनाने का एक तरीका माना गया है जो परिणाम शोध पद्धति का एक कार्य नहीं हैं।

अनुसंधान में दो प्रकार के आंकडे होते हैं :–

1. प्राथमिक आंकडे
2. द्वितीयक आंकडे

पहले बार अनुभव से अवलोकित आंकडे या सीधे एकत्रित आंकडे प्राथमिक आंकडे कहलाते हैं। प्रकाशित आंकडे और पूर्व में किस संस्था द्वारा एकत्रित आंकडे द्वितीयक आंकडे कहलाते हैं। द्वितीयक आंकडे के सामान्य श्रोतों में जनगणनाऐं, संगठन दस्तावेज और गुणात्मक पद्धतियों या गुणात्मक अनुसंधान के माध्यम से आंकडा संग्रहण सम्मिलित होता है। दूसरी तरफ प्राथमिक आंकडे अनुसंधानकर्ता द्वारा अनुसंधान निष्पादन से एकत्रित किये जाते हैं।

आंकडे संग्रहण विधियॉ :– प्राथमिक आंकडे को प्रश्नावली, साक्षत्कार एवं अवलोकन के माध्यम से एकत्रित किया जा सकता है।

(अ) प्रश्नावली एवं सर्वेक्षण विधि :– शार्प एवं होवर्ड (196, पृ 145) के अनुसार, प्रश्नावली ''पिछली शताब्दी से, सूचना एकत्रित करने की एक सामान्य विधि रही है।'' इसे ''पूर्व तैयार किए गए प्रश्नों के लिखित समूह में प्रतिभागीयों का अपने उत्तरों को रिकार्ड करना, सामान्यता काफी हद तक निकटवर्ती परिभाषित विकल्प'' के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। (सेकरन 1992, पृ0 200) सर्वेक्षण एक विधि होती है जहॉ प्रश्नावली का प्रयोग आंकडा संग्रहण में किया जाता है। केसवेल (1994) ने एक सर्वेक्षण को ''सवाल पूछने की आंकडा संग्रह प्रकिया, समग्र के कुछ अंशो की एक मात्रात्मक या संख्यात्मक विवरण प्रदान करती है, अर्थात एक प्रतिदर्श जो सामान्तया समग्र से लिया जा सकता है जिसमें से प्रतिदर्श तैयार किया गया था। '' के रूप में परिभाषित है।

(ब) साक्षात्कार :– नाचिमिया एवं नाचिमिया (1996) साक्ष्ज्ञात्कार को एक ''आमने सामने पारस्परिक भूमिका की स्थिति जिसमें एक साक्षात्कारकर्ता प्रतिभागियों से सवाल पूछता है, जो प्रश्नों के आधार पर अनुसंधान परिकल्पनाओं के लिए प्रासंगिक है।'' के रूप मे परिभाषित किया है। यद्यपि सेकरन (1992) हमें याद दिलाता है कि साक्षात्कार के लिए आमने सामने होने की आवश्यकता नहीं होती है इसे टेलीफोन के माध्यम से या यहॉ तक की कम्प्यूटर की सहायता से निष्पादित किया जा सकता है। साक्षात्कार को संरचित या असंरचित (या गैर निर्देशित साक्षात्कार) के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है । यद्यपि नाचिमिया एवं नाचिमिया (1996) एक तीसरा वर्ग केन्द्रित साक्षात्कार निर्धारित किया, जो कि संरचित साक्षात्कार का एक विचरण होता है। संरचति साक्षात्कार में, प्रारूप अधिक कठोर होता है और यह माना जाता है कि शोधकर्ता जानता है कि कौन सी जानकारी की आवश्यकता है और इसमें पूर्व निर्धारित प्रश्नों की एक सूची होती है, जिसे वह प्रतिभागीयों से पूछना चाहता है। वही सवाल हर साक्षात्कारकर्ता को दिया जाता है, यद्यपि परिस्थितियों या प्रतिभागियों के उत्तरों

के आधार पर कुछ मामलों में, शोधकर्ता अतिरिक्त प्रश्न पूछे बिना अपने प्रश्न पर पूछकर अतिरिक्त जानकारी प्राप्त कर सकता है।
''इस प्रक्रिया के माध्यम से नए कारकों की पहचान की जा सकती है और परिणामों में गहरी समझ हो सकती हैं।'' (सेकरन 1992) गैर–निर्देशित साक्षात्कार में, शोधकर्ता के पास न तो पूर्व निर्दिष्ट प्रश्नों के समूह की सूची होती है न विशेष क्रम में पूछे जाने वाले प्रश्न होते हैं। शोधकर्ता साक्षात्कारकर्ता को निर्देशित नहीं करता है और इस प्रकार साक्षात्कारकर्ता को अपने अनुभवों को बताने और रूचि के विषय पर उनके दृष्टिकोण और धारणाओं को प्रकट करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। इस पद्वति में, साक्षात्कारकर्ता को विभिन्न क्षेत्रों की जांच करने और साक्षात्कार के दौरान विशिष्ट प्रश्नों को उठाने का अवसर मिलता है।

(स) अवलोकन :– अवलोकन व्यवहार, घटनाओं या उनके प्राकृतिक वातावरण में भौतिक विशेषताओं को ध्यान में रखते हुए आंकडों को एकत्रित करने का एक तरीका है। अवलोकन प्रत्यक्ष (प्रत्येक जानता है कि उनको अवलोकित किया जा रहा है) हो सकता है या गुप्त (कोई नहीं जानता है कि उनको अवलोकित किया जा रहा है और अवलोकनकर्ता अप्रकट है)। गुप्त अवलोकन का लाभ होता है कि लोगों के प्राकृतिक व्यवहार करने की अधिक संभावना होती है यदि वे नहीं जानते हैं कि उन्हें अवलोकित किया जा रहा है। यद्यपि, आप को विशिष्ट रूप से प्रत्यक्ष अवलोकन के निष्पादन की आवश्यकता होगी क्योंकि आपके अवलोकन के दुराव से सम्बन्धित नैतिक समस्याऐं होती है। अवलोकन या तो प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष भी हो सकता हैं । प्रत्यक्ष अवलोकन होता है जब आप अन्योन्य प्रतिक्रियाऐं, क्रियाऐं या व्यवहार जो घटित होते को देखते हैं । उदाहरण के लिए एक लिखित पाठ्यक्रम में से एक अध्यापक के पाठ्यविधि को अवलोकित करना निर्धारित करना कि वे ईमानदारी के साथ दे रहे हैं। अप्रत्यक्ष अवलोकन वे होते हैं जब आप अन्योन्यक्रिया के परिणामों प्रक्रियाओं या व्यवहारों को देखते हैं, उदाहरण के लिए स्कूल जलपान घर में छात्रों द्वारा प्लेट अपशिष्ट की मात्रा को मापने के लिए यह निर्धारित करना कि उन्हें एक नया भोजन स्वीकार्य है या नही।

अभ्यास प्रश्न :– निम्नलिखित स्थिति में आप आंकडा संकलन के लिए किस तकनीक का प्रयोग करेंगें ?

- उपभोक्ताओं के संतुष्टीकरण मूल्यांकन के लिए
- छात्र संघ के अध्यक्ष के चुनाव के पूर्व मतदान सर्वेक्षण के लिए
- कर्मियों के कार्य तनाव प्रबन्ध तकनीक के लिए
- मुद्रास्फीति को नियंत्रित करने के लिए नई आरबीआई की आर्थिकता पर अधिकारियों की राय को समझना

20.12 अनुसंधान अभिकल्पना में चर

अनुसंधान में, चर एक मापीय विशेषता होती है जो परिवर्तनशील है। यह समूह से समूह तक, व्यक्ति से व्यक्ति तक या समय के साथ ही एक व्यक्ति के भीतर भी परिवर्तित हो सकती है। छः सामान्य चरों के प्रकार होते हैं।

स्वतन्त्र चर : – ये चर ऐसे होते हैं जिनमें अनुसंधानकर्ता का नियन्त्रण होता है। इस ''नियंन्त्रण'' में मौजूदा चर (उदाहरण के लिए, अनुदेश के मौजूदा तरीकों को संशोधित करना) या अनुसंधान वातावरण में नए चर (उदाहरण के लिए, कुछ वर्गों के लिए एक पूरी तरह से नई पद्धति को अपनाने) को शामिल करना हो सकता है अनुसंधानकर्ता अपेक्षा करता है कि स्वतन्त्र चर/चरों का आश्रित चर (सम्बन्ध के साथ) पर कुछ प्रभार पडेगा।

आश्रित चर :– यह स्वतन्त्र चर को चतुराई या शुरू करने के प्रभाव को दर्शाता है। उदाहरण के लिए, यदि स्वतन्त्र चर ''नई भाषा शिक्षण प्रक्रिया'' का उपयोग करना या न करना हो तो उस प्रक्रिया का उपयोग सिखाया गयी सामग्री एक परीक्षा पर आश्रित चर उपयोगकर्ता का स्कोर हो सकता है। दूसरे शब्दों में, निर्भर चर (शैक्षणिक अंक) में भिन्नता स्वतन्त्र चर (नई शिक्षण प्रक्रिया) में भिन्नता पर निर्भर करती हैं

मध्यवर्ती चर :– यह अमूर्त प्रक्रियाओं का संदर्भ देता है जो प्रत्यक्ष रूप से नहीं देखे जा सकते हैं लेकिन यह स्वतन्त्र और आश्रित चर को जोडता है। भाषा सीखने और शिक्षण में, वे आमतौर पर विषयों के अंदर होते हैं, जिसमें विभिन्न भाषा सीखने की प्रक्रियाएं शामिल होती है जो शोधकर्ता नहीं देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि एक विशेष शिक्षण तकनीक का प्रयोग स्वतन्त्र चर है, तो भाषा सीखने की प्रक्रियाएं उन विषयों द्वारा उपयोग की जाती है जो मध्यवर्ती चर हैं।

मध्यस्थ चर :– ये ऐसे चर हैं जो हस्तक्षेप करने वाले चर (चरों) के प्रभाव को संशोधित करके स्वतन्त्र और निर्भर चर के बीच सम्बन्ध को प्रभावित करते हैं। बाहरी चर के विपरीत, TESL और भाषा अधिग्रहण अनुसंधान में मध्यस्थ चर (जब वे अध्ययन के सकेंद्रित नहीं हैं) में लिंग, आय, संस्कृति या विषयों की भाषा दक्षता सम्मिलित होती है।

नियंत्रण चर :– भाषा सीखना और शिक्षण बहुत जटिल प्रक्रियाऐं हैं। एक अध्ययन में प्रत्येक चर पर विचार करना सम्भव नहीं है। इसलिए, वे परिवेश जिन्हें अलग अलग अध्ययन में मापा नहीं जाता है, उन्हें निरंतर, निष्पक्ष/संतुलित या समाप्त किया जाना चाहिए, इसलिए अन्य चर पर उनके पक्षपाती प्रभाव नहीं होंगें। चर जिन्हें इस तरह नियंत्रित किया गया है उन्हें नियंत्रित चर कहा जाता है।

बाह्य चर :– इन शोध परिवेश में वे कारक होते हैं जिनका आश्रित चर पर प्रभाव पड सकता है, लेकिन जो नियंन्त्रित नहीं है, बाह्य चर खतरनाक है वे खगोल की वैधता को नुकसान पहुॅचा सकते हैं, यह जानना असंभव है कि क्या प्रभाव स्वतन्त्र और मध्यस्थ चर या कुछ बाहरी कारकों के कारण होता है । यदि उन्हें नियंत्रित नहीं किया जा सकता है, तो परिणामों की व्याख्या करते समय कम से कम चर को ध्यान में रखा जाना चाहिए।

20.13 प्रतिदर्शन एवं उनके अनुप्रयोग

आयोजित किसी भी शोध में, लोगों, स्थानों और चीजों का अध्ययन किया जाता है। उन लोगों, जगहों और चीजों के पूरे समग्र का अध्ययन करने का अवसर एक प्रयास होता है कि अधिकतर शोधकर्ता के पास समय और या धन नहीं होता है। इस सीमा को प्रतिदर्शन और सांख्यिकीय तकनीकों से दूर किया जाता है। अनुसंधान

अभिकल्पना में हमें प्राथमिक आंकडे के लिए आंकडे के श्रोत को भी निर्दिष्ट करना होगा। प्रतिदर्श पूरे समग्र की विशेषताओं का आकलन करने के लिए सांख्यिकीय समग्र के भीतर से व्यक्तियों के एक उपसमूह के चयन से सम्बन्धित है। एक प्रतिदर्श समग्र का प्रतिनिधि समूह होता है।

प्रतिदर्शन प्रक्रिया मे निम्नलिखित चरण सम्मिलित होते हैं :–

1. समग्र को परिभाषित करना
2. एक प्रतिदर्श रूपरेखा को निर्दिष्ट करना
3. एक प्रतिदर्शन विधि को निर्दिष्ट करना
4. प्रतिदर्श आकार निर्धारित करना
5. प्रतिदर्शन योजना का क्रियान्वयन करना
6. प्रतिदर्शन एवं आंकडा संग्रहण

एक अध्ययन में व्यक्तियों का चयन करने के लिए शोधकर्ताओं के लिए कई विभिन्न प्रतिदर्शन विधियॉ उपलब्ध हेाती हैं। प्रतिदर्शन पद्धति दो श्रेणीयों में आती हैं :

1. **प्रायिकता प्रतिदर्शन** :– समग्र में प्रत्येक व्यक्ति ज्ञात होता है और प्रत्येक के चयनित होने की निश्चित प्रायिकता होती है। यह यादृच्छिक प्रक्रिया प्रतिदर्श प्रत्येक व्यक्ति की प्रायिकता का आधार होता है। प्रायिकता प्रतिदर्शन के कुछ उदाहरण हैं :

(अ) **सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श** :– समग्र में प्रत्येक वस्तु निर्धारित हेाती है और प्रत्येक वस्तु की प्रतिदर्श में चयन की समान सम्भावना होती है। प्रत्येक वस्तु का चयन प्रत्येक दूसरे वस्तु के चयन से स्वतन्त्र होता है। एक वस्तु का चयन दूसरे वस्तु के चयन की सम्भावना को प्रभावित नहीं करता है।

(ब) **सुनियोजित यादृच्छिक प्रतिदर्शन** :– समग्र में प्रत्येक वस्तु निर्धारित होती है, और प्रत्येक वस्तु का प्रतिदर्श में होने की समान सम्भावना होती हैं।

(स) **स्तरीकृत यादृच्छिक प्रतिदर्शन :–** समग्र में प्रत्येक वस्तु निर्धारित होती है, प्रत्येक वस्तु ज्ञात है, प्रतिदर्श में होने की कोई भी सम्भावना नहीं हैं इसे प्रयोग किया जाता है जब अनुसंधानकर्ता जानता है कि रूचि के अनुसार समग्र में उप समूह (स्तरित) है।

(द) **गुच्छीय प्रतिदर्शन** :– गुच्छीय प्रतिदर्श्ज्ञन समग्र में इकाईयों को देखता है क्योंकि न केवल कुल समग्र के सदस्य है अपितु स्वाभाविक रूप से सदस्यों के समग्र के भीतर समूहों को लेना। उदाहरण के लिए पडोस, ब्लॉक और आवास संरचना के शहर निवासी।

2. **गैर प्रायिकता प्रतिदर्शन :–** समग्र पूर्ण रूप से ज्ञात नहीं होता है इस प्रकार एकल प्रायिकताऐं ज्ञात नहीं की जा सकती है। व्यावहारिक बुद्धि या सहुलियत का प्रतिदर्श चयन में प्रयोग किया जाता है, लेकिन पक्षपात दूर करने के लिए प्रयास किये जाते हैं और प्रतिदर्श प्रतिनिधित्व बनाया जाता है। गैर प्रायिकता प्रतिदर्शन के कुछ उदाहरण हैं।

(अ) **सहुलियत प्रतिदर्श** :– को ''सांयोगिक प्रतिदर्श'' या ''सडक में आदमी'' प्रतिदर्श भी कहा जाता है। अनुसंधानकर्ता इकाईयों का चयन करता है जो उचित , हाथ में हैं, पहुॅच में आसान है इत्यादि ।

(ब) **सउद्देश्य प्रतिदर्श** :– अनुसंधानकर्ता कुछ मस्तिष्क में उद्देश्य के साथ इकाईयों का चयन करता है, उदाहरण के लिए विद्यार्थी जो परिसर छात्रावास में निवास करते हैं, या शहरी विकास में विशेषज्ञ ।

(स) **अंश प्रतिदर्श** :– अनुसंधानकर्ता विभिन्न प्रकार के इकाईयों के लिए हिस्सों का निर्माण करता है। उदाहरण के लिए, एक माल में निर्धारित संख्या के दुकानदारों का साक्षात्कार, जिसमें आधे पुरूष हैं और आधे महिला हैं।

20.14 अनुमान का परिचय

अनुसंधान अभिकल्पना अनुसंधान उपसंहार के बारे में कुछ अवधारणााओं पर आधारित होता है। इस अवधारणा का परीक्षण मानक प्रक्रिया और आंकडे प्रयोग द्वारा किया जाता है। अभिकल्पना अनुसंधान अवधारणा होती है जो अनुसंधान अभिकल्पना को दिशा निर्देश देती है। एक अनुमान या व्याख्या (सिद्धान्त) जिसे कुछ घटनाओं या घटनाओं की व्याख्या के लिए अस्थायी रूप में स्वीकार किया जाता है और आगे की जॉच के लिए मार्गदर्शन प्रदान करने के लिए कहा जाता है, अनुमान है। एक अनुमान को सही या गलत सिद्ध किया जा सकता है, और इसे निराकरण के योग्य होना चाहिए। यदि यह तथ्यों द्वारा निराकरण करने के पश्चात समान रहती है, इसे सत्यापित या मंडित कहा जाता है। सांख्यिकीय में इसे एक समग्र की निश्चित विशेषता के बारे में एक अवधारणा के रूप में परिभाषित किया जाता है। यदि यह एक समग्र के प्रत्येक प्राचल के लिए मानों को निर्दिष्ट करता है, इसे सरल अनुमान कहा जाता है, यदि नहीं, एक संयोजित अनुमान है। यदि यह दो प्रतिदर्श माध्यों के मध्य अन्तर को अमान्य घोषित करने का प्रयास करता है (संकेत द्वारा कि सांख्यिकीय अंतर महत्वपूर्ण नहीं है) इसे एक शून्य परिकल्पना कहा जाता है।

20.15 सारांश

इस इकाई में हमें अनुसंधान अभिकल्पना की अवधारणा को सीखा। विभिन्न प्रकार के अनुसंधान अभिकल्पनाओं को भी अध्ययन किया। एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना के मापदण्ड और चरों के प्रकारों का वर्णन किया। आंकडा संग्रहण विधि किसी अनुसंधान अभिकल्पना का एक महत्वपूर्ण भाग होता है। हमने सर्वेक्षण, साक्षात्कार एवं अवलोकन के रूप में आंकडे संग्रहण की तीन महत्वपूर्ण विधियों के बारे में सीखा।

20.16 शब्दावली

ज्ञान शास्त्र : ज्ञान की खोज पर मूलभूत गुछ्दे के साथ्ज्ञ व्यवहार करता है कि ज्ञान कैसे प्राप्त किया जाय और इसका परीक्षण एवं सत्यापन किया जाना चाहिए।

रचनावादी : यह जांच के गुणात्मक तरीके पर जोर देता है और तर्क देता है कि मात्रात्मक विधि की तुलना में सामाजिक विज्ञान में अनुसंधान के लिए यह सबसे अच्छा विकल्प है।

त्रिकोणीय सर्वेक्षण : यह गुणात्मक एवं मात्रात्मक विधि के एक साथ और क्रमिक उपयोग का सुझाव देता है।

विश्लेषण : पिछली स्थितियों का उपयोग करता है जो वर्तमान शोध समस्या के समान है।

फोकस समूह : असंगठित, सहज चर्चा के माध्यम से एक मध्यस्थ द्वारा एकत्रित और निर्देशित लोगों के (8–12) छोटे समूहों को शामिल करता है।

परिकल्पना : समग्र के विशेष गुण के बारे में एक अवधारणा जिसका सांख्यिकीय रूप मे परीक्षण करना है ।

20.17 बोध प्रश्न

बहु विकल्पी प्रश्न

1. एक अनुसंधान अभिकल्पना क्या है।

   (क) अनुसंधान निष्पादन का एक मार्ग जो सिद्धान्त पर आधारित नहीं होता है।

   (ख) गुणात्मक या मात्रात्मक विधियों के प्रयोग के मध्य विकल्प

   (ग) वह ढंग जिसमें आप अपनी अनुसंधान परिणाम प्रदर्शित करते हैं, उदाहरण के लिए आलेख

   (घ) प्रत्येक चरण के लिए आंकडों का संकलन एवं विश्लेषण की एक बनावट

2. यदि एक अध्ययन ''विश्वसनीय'' है, इसका अर्थ कि :

   (क) यह एक प्रतिष्ठित शोधकर्ता द्वारा आयोजित किया गया था जिस पर विश्वास किया जा सकता है।

   (ख) अवधारणाओं के लिए तैयार उपाय विभिन्न अवसरों पर स्थित है।

   (ग) परिणामों को दूसरे सामाजिक परिस्थितियों में सामान्यीकृत किया जा सकता है।

   (घ) अनुसंधान को दोहराने के लिए विधियों को स्पष्ट रूप से पर्याप्त बताया गया हो।

3. समस्या में अंतदृष्टि प्राप्त करने के लिए निम्न में से कौन से शोध अभिकल्पना का उपयोग किया जाता है।

   (क) अन्वेषी

   (ख) विवरणात्मक

   (ग) कारणात्मक

   (घ) उपरोक्त में कोई नहीं

4. कौन सी शेध अभिकल्पना का कथन

   (क) सर्वेक्षण

   (ख) मानवजाति वर्णन

   (ग) प्रयोगात्मक

   (घ) घटना

5. निम्न में से कौन सी त्रुटि का अध्ययन किया जा रहा है जो समग्र एवं प्रतिदर्श आकार की एकरूपता से प्रभावित होता है।
   (क) समग्र विशिश्टिकरण त्रुटि
   (ख) चयन त्रुटि
   (ग) प्रतिदर्शन त्रुटि
   (घ) गैर प्रतिक्रिया त्रुटि
6. निम्न में से कौन सी विधि का प्रयोग प्राथमिक आंकडा संकलन के लिए किया जाता है।
   (क) सर्वेक्षण
   (ख) साक्षात्कार
   (ग) अवलोकन
   (घ) उपरोक्त सभी
7. अनुसंधान में प्रतिदर्शन को क्यों किया जाता है।
   (क) अनुसंधान के लागत को कम करने के लिए
   (ख) अनुसंधान को समय के अन्दर पूर्ण करने के लिए
   (ग) समग्र के सभी सदस्यों की सुलभता की सीमाओं को हटाने के लिए
   (घ) उपरोक्त सभी

20.18 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. घ
2. घ
3. क
4. ग
5. ग
6. घ
7. घ

20.19 स्वपरख प्रश्न

1. अनुसंधान अभिकल्पना क्या है ? इसके महत्व को समझाइयें।
2. एक अच्छे अनुसंधान अभिकल्पना के लक्षणों का वर्णन करें।
3. एक अनुसंधान अभिकल्पना निष्पादन के चरणों का वर्णन करें।
4. निष्पक्षता क्या है। इसकी अनुसंधान अभिकल्पना में आवश्यकता का वर्णन करें।
5. अनुसंधान अभिकल्पना में चरों द्वारा आपका क्या अर्थ है? वर्णन करें।
6. कारणात्मक अध्ययनों द्वारा आप क्या समझते हैं?
7. अनुसंधान अभिकल्पना में फोकस समूह से आप क्या समझते हैं?
8. अन्वेषी अनुसंधान अभिकल्पना की व्याख्या करें और इसके लक्षणों का वर्णन करें।
9. एक अनुसंधान अभिकल्पना के प्रमुख अंगों का वर्णन करें।

10. एक अनुसंधान अभिकल्पना के प्रमुख अंगों का वर्णन करें।
11. साक्षात्कार द्वारा आप क्या समझते हैं? साक्षात्कार के कितने प्रकार होते हैं? वर्णन करें।
12. एक अवलोकन क्या होता है? व्यवसाय अनुसंधान में इसके गुणों एवं सीमाओं का वर्णन करें।
13. एक अनुसंधान में त्रुटियों के संभावित श्रोत क्या होते हैं ? उदाहरण के साथ वर्णन करें।
14. प्रयोगात्मक अभिकल्पना द्वारा आप क्या समझते हैं ? इसकी विशेषताओं का वर्णन करें।

20.20 संदर्भ पुस्तकें

1. क्रेसवेल, जान , डब्ल्यू (2008) अनुसंधान अभिकल्पना, गुणात्मक, मात्रात्मक एवं मिश्रित विधियॉ पहुॅच मार्ग। न्यूवरी पार्क, सी0ए0 सेज प्रकाशन
2. मर्कजाक, जी0आर0 डेमटेयों, डी0एवं फेसटिनजर डी0 (2005), अनुसंधान अभिकल्पना एवं प्रणाली के मूलभूत, न्यूर्याक शहर, एन0वाय0 बिले।
3. इथराइड, डान ई0, (2004) । व्यावहारिक अर्थशस्त्र में अनुसंधान प्रणाली, दरियागंज, नई दिल्ली , बिले ब्लैक बैल ।
4. वर्घ , डी0 एवं केचन, डी0 (2009) रणनीति एवं प्रबन्ध में अनुसंधान प्रणाली, बिंगले, रू0 के0 एममारैड प्रकाशन समूह
5. सी0आर0कोठारी, अनुसंधान प्रणाली : न्यू ऐज, नई दिल्ली ।
6. एन0के0 मैल्होत्रा , विपणन अनुसंधान : पियरसन्स , नई दिल्ली।

इकाई–21 माप एवं परिमाण तकनीके

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- शोध में माप की आवधारणा की व्याख्या कर सकें।
- परिमाप पैमाने के प्रकार को समझ सकें।
- परिमाप के विकास की प्रक्रिया की व्याख्या कर सकें।
- अच्छे परिमापन के पैमाने के विभिन्न मुद्दों को समझ सकें।

21.1 प्रस्तावना

जैसा कि गैलीलियो ने कहा है कि, ''जो परिमाप करने योग्य पैमाना हो उसकी गणना करो और जो परिमाप योग्य नही हो, उसे माप के योग्य बनाया जाये ।'' प्रभावित करने वाली वस्तुओं का परिमाप ही शोध का एक महत्वपूर्ण पहलू है जिन्हें अनुसंधान नमूना में बताया गया है। परिमापन वह प्रक्रिया है जिसमें अध्ययन की कुछ घटनाओं या सम्पत्ति का वर्णन किया जाता है जो कि अक्सर विश्सनीय एवं वैध तरीके से ही किया जाता है। संख्याएं मापी जा रही संपत्ति के बारे में जानकारी गुणों के गुणात्मक पहलुओं की मात्रा जानने योग्य हो जाते है। जहाँ संख्याओं का उपयोग किया जाता है, वहाँ अनुसंधानकर्ता संख्या निर्धारित करने के लिये यह निमय बना लेना चाहिये कि उस

संख्या को अवलोकन हेतु इस भांति लिया जाय कि सही विवरण प्राप्त हो सके । यह ध्यान देने योग्य है कि हम शोध में जो कुछ भी निष्कर्ष निकालते हैं वह व्यक्ति या राज्य की वस्तु नीं है बल्कि उस विषय वस्तुत की विशेषताएं है। उदाहरण स्वरूप किसी शोध की रूपरेखा ग्राहकों का संतुष्टि का स्तर नापना है तो हम संतुष्टि स्तर मापेंगे न कि ग्राहक को। हम कभी भी व्यक्तियों का आकलन नहीं करते हैं, केवल उनकी आयु, कद, वजन, आय या कुछ अन्य विशेषताओं का ही आकलन करते हैं।

प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि आकलन किस प्रकार किया जाना चाहिये? प्रभावित घटनाओं के असर का अवलोकन करने के लिये हमें एक उपयुक्त पैमाने की आवश्यकता होती है। विशेष रूप से व्यावसायिक अनुसंधान में परिमाप के लिये पैमानों का निर्माण किया जाता है। यह प्रक्रिया जिसके द्वारा परिमाप के लिये पैमाना तैयार किया जाता है उसे स्केलिंग या परिमापन कहते हैं। स्केलिंग एक व्यापक रूप से परिभाषित शाश्वत निरंतरता है जिस पर मापी गयी वस्तुंए स्थित होती हैं (पीटरसन 2000)/ पैमाना एक वह उपकरण ह जो मूल्यों की एक श्रृंखला प्रदान करता है जो कि मापे जा रहे विभिन्न मूल्यों की अवधारणा के अनुरूप है। संबंधित नियम इस तरह से संकेत देते हैं कि पैमाने पर एक निश्चित मूल्य एक अवधारणा की कुछ वास्तविकता से संबंधित है।

उदाहर स्वरूप, सर्वेक्षण में यदि कोई अनुसंधानकर्ता किसी विक्रय प्रबंधक से विक्रय प्रतिनिधियों की ईमानदारी के संबंध में प्रश्न पूँछता है। तो उसका प्रत्युत्तर प्रश्यन के उत्तर द्वारा संलेखित किया जावेगाः–

"आपके विक्रय प्रतिनिधि पर आपको कितना विश्वास है उसी आधार पर संख्या 1 से 7 निर्धारित करें। यदि विक्रय प्रतिनिधि पूरी तरह से अविश्वसीय के रूप में जाना जाता है, तो संख्या 1 निर्धारित करें, यदि विक्रय प्रतिनिधि पूरी तरह से ईमानदार मालूम पड़ता है तो संख्या 7 निर्धारित करें।" विक्रय प्रतिनिधि के विश्वास के क्रम को निर्धारित करने के लिये प्रत्युत्तर में 1 से 7 तक उपयुक्त संख्या का चयन करें। इस मापक्रम में हम बिक्री कार्यपालकों से लेकर बिक्री प्रबंधक के विश्वास को नापतौल कर रहे हैं। प्रशिक्षकों द्वारा छात्रों के ग्रेड आवंटित करने के तरीके के बारे में सोचर भी माप को उद्धृत किया जा सकता है। कक्षा में छात्र द्वारा किये गये प्रदर्शन का मापदण्ड होता है श्रेणी । जिन छात्रों ने कक्षा में अधिक अच्छा प्रदर्शन किया है उन्हें कम प्रदर्शन करने वालों की अपेक्षा अधिक अच्छी ग्रेडिंग (श्रेणी) जैसा कि पहले ही कहा जा चुका है, मापन प्रक्रिया को अधिक प्रभावशाली बनाने के लिये अनुभवजन्य प्रणाी में घटनाओं या वस्तुओं के मध्य वर्तमान संबंधों का संख्यात्मक व्यवस्था के नियमों के साथ सीधा संबंध होना चाहिये। यदि यह अनुरूपता गलत तरीके से पेश्ख की गयी है तो माप संबंधी त्रुटि हुयी है। मापन प्रक्रिया में विभिन्न पहुलुओं से नापी गयी संख्या के प्रादुर्भाव को शब्द संख्या इंगित करती है। आंकड़ों का विश्लेषण एक सांख्यिकीय प्रक्रिया है जिसको उपयोग स्केल का प्रयोग करते हुये आंकड़े उत्पन्न करने में किया जाता है। अतः सभी मापों को संख्या लागू करके मात्रात्मक शर्तों के परिवर्तित किया जाना चाहिये । अतः मापतौल की परिभाषा स्वीकार्य संख्यात्मक जोड़–तोड़ के प्रकार पर कुछ प्रतिबंध लगाती है। इस इकाई के आगे के भाग में मापतौल के प्रकारों एव तरीकों के बारे में व्याख्या की जायेगी।

21.2 अनुसंधान में मापतौल क्या है ?

एक अनुसंधानकर्ता को मापतौल किस प्रकार किया जायेगा यह जानने के पहले इस बात की जानकारी होना आवश्यक है कि क्या मापा जाना है। परिभाषा प्रक्रिया की समस्या को उन अवधारणाओं के विषय में बताना चाहिये जिन्हें मापा जाना है। जैसा कि पिछली इकाई में भी बताया जा चुका है, एक साधारण विचारधारा अवधारणा हो सकती है जोकि आयु, लिंग, शिक्षा और बच्चों

की संख्या जैसी अवधारणाओं के अर्थ का प्रतिनिधित्व करती है। इस प्रकार माप तौल या परिभाषा में थोड़ी बहुत परेशानी आ सकती है। अन्य अवधारणाएं अधिक संक्षिप्त है। ईमापनदारी, व्यक्तित्व, चैनल शक्ति, विश्वास,निगम संस्कृति, ग्राहक संतुष्टि, उपयोगिता जेसी अवधारणाओं को मापना और उन्हें परिभाषित करना दोनों ही दुरूह कार्य है। उदाहरण स्वरूप, ईमानदारी को केवल ग्राहक द्वारा दी गयी जानकारी (व्यक्ति द्वारा किसी एक प्रतिद्वंदी साख / स्टोर से खरीदारी के आधार पर) एवं प्रतिबद्धता (वह स्तर जहां ग्राहक किसी साख या स्टोर के साथ व्यवसाय करने हेतु बलिदान करेगा । के आधार पर ही परखा जा सकता है। अतः हम देख सकते हैं कि ईमानदारी के अन्तर्गत दो अवयव सम्मिलित हैं, पहला स्वभाव संबंधी है और दूसरा व्यवहार के संबंधित है। जब हम परिवर्तनशीलता को मापतौल करने का चयन करते हैं, तो इस परिवर्तनशीलती के अन्तर्गत स्थापित अवधारणा को समझना आवश्यक हो जाता है। प्रभावित करने वाली वह चर वस्तुएं हैं जिन्हें हम मापते हैं, नियंत्रित करते हैं । प्रभावित करने वाली वह चर वस्तुएं हैं जिन्हें हम मापते हैं, नियंत्रित करत ेहैं या अनुसंधान में इनके साथ जोड़ –तोड़ से पहले उनको अवधारणा में परिभाषित होना आवश्यक है। जैसा कि पहले भी चर्चा की जा चुकी है कि चर (प्रभावित करने वलाी वस्तुओं) की विभिन्न परिभाषाएं :–

- **सैद्धान्तिक परिभाषा** :– इस प्रकार की परिभाषा का उपयोग शब्दावली में सिद्धान्तों अवधारणा या निर्माण हेतु सामान्यतः प्रयोग कियाक जाता है। इस प्रकार की परिभाषाएं सामान्य प्रकार की होती हैं ओर इनका उपयोग संकल्पना या विचारधारा को समझने हेतु किया जाता है।
- **परिचालन संबंधी परिभाषा** :– यह परिभाषा इसकी व्याख्या करती है कि अनुसंधान करते समय प्रभावशाली वस्तुओं को किस प्रकार मापा जाए। यह संकल्पना या चर वस्तुओं का अर्थ निर्धारित करती है और यह सुनिश्चितता प्रदान करती है कि इसके परिचालन में किस तरह के कार्यों की आवश्यकता होगी।

कभी–कभी, एक अकेला चर एकल विचारधारा को परिभाषित नहीं कर सकता है। एक विचारधारा को मापने में बहुत सारी वस्तुओं की आवश्यकता होती है। इस परिप्रेक्ष्य में रचनात्मकता का प्रयोग होता हैं निर्माण या रचना एक ऐसा शब्द है जिसका उपयोग अवधारणाओं के लिये किया जाता है एवं कई चरों या प्रभावित करने वाली वस्तुओं के साथ जिसकी माप –तौल की जाती है। उदाहरणार्थ, व्यापार का अनुसंधानकर्ता विक्रय अभिकर्ता के ग्राहक उन्मुखीकरण को मापने की इच्छा रखता है, विभिन्न चरों का उपयोग इसी प्रकार किया जा सकता है, सभी को 1 से 5 के पैमाने पर मापा जाना चाहिये :–

1 वह उत्पाद प्रस्तावित होना चाहिये जिससे ग्राहक की समसया का सबसे अधिक प्रभावी ढंग से समाधान हो रहा हो।

2 एक अच्छे कर्मचारी के दिमाग में ग्राहक के अच्छे हितों का ध्यान होना चाहिये।

3 यह जानने का प्रयास किया जाना चाहिये कि किस प्रकार के उत्पाद ग्राहक के लिये लाभप्रद होंगे।

अभ्यास करनाः– संगठन के काम काज पर अनुपस्थिति के प्रभाव की जानकारी प्राप्त करने के लिये विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया जाना चाहिये । मानव संसाधन प्रबंधकों से इस प्रकार के प्रश्न पूँछे जाने चाहिये । जवाब मिलने के बाद उत्तरदातोां द्वारा दिये गये जवाब की व्याख्या की जानी चाहिये।

21.3 परिमाप क्या है ?

परिमाप निरन्तरता की वह प्रक्रिया है जिसके आधार पर मापी गयी वस्तुओं की विशेषाएं स्थापित होती है। अनुसंधानकर्ता एक प्रक्रिया के माध्यम से अवधारणा को मापता है जिसे संचालन प्रक्रिया कहा जाता है। इस प्रक्रिया के अन्तर्गत तादाक्य स्थापित करने वाले वह पैमाने आते हैं जो अवधारणा में भिन्नता के अनुरूप है। परिमाप से उस मूल्यों की प्राप्ति होती है जो मापी जा चुकी अवधारणा में विभिन्न मूल्यों के अनुरूप होते हैं दूसरे शब्दों में, परिमाप से अनुरूप नियमों की प्राप्ति होती है। उदाहरण के लिये, एक परिमाप पद्धति के व्यक्तियों की बर्हिमुखता के स्तर का अनुमान भी सम्मिलित होना चाहिये, या उत्पादों की जांची परखी गुणवत्ता सम्मिलित होनी चाहिये। परिमाप के कुछ तरीके निरंतरता पर परिण की अनुमति देते हैं, जबकि अन्य तरीकों से केवल संस्थाओं के सापेक्ष आदेश ही प्राप्त होते हैं।

परिमाप के विस्तार के लिये उठाये जाने वाले कदम इस प्रकार हैः–

1 अवधारणा या अवधारणओं की परिभाषा का आकलन किया जाना चाहिये।

2 अवधारणा के घटकों की पहचान करना,

3 देखने योग्य और मापनीय वस्तुओं के नमूने का विनिर्देश (संकेतक या परोक्षी प्रभावित करने वाली वस्तुएं) जो अवधारणा के घटकों का प्रतिनिधित्व करते हैं,

4 अवधारणा को मापने हेतु उपयुक्त प्रणाली का चुनाव

5 वस्तुओं का एक समग्र पैमाने में संयोजन, जिसे एक उपकरण के रूप में जाना जाता है, जो कि प्रत्युत्तर में अवधारणा को मापने के साधन के रूप में कार्य करता है,

6 नमूने के लिये व्यवस्थापित साधन जमाना और प्रतिद्वन्दी की जानकारी का मूल्यांकन करना।

7 विश्वसनीयता एवं वैधता का आकलन , तथा आवश्यकतानुसार संशोधित साधन।

21.4 एक अच्छे पैमाने के मानदंड

एक अच्छी मापतौल की व्याख्या करने के लये पॉच प्रमुख मानदंड निर्धारित :–

विश्वसनीयता :– माप की आन्तरिक निरंतरता का सूचक है विश्वसनीयता। विश्वसनीयता को समझने के लिये भी चाभी निरंतरता है। कोई माप विश्वसनीय तब हो जाती हे जब किसी चीज को मापने के विभिन्न प्रयासों का परिणाम एक जैसा ही होता है। उदाहरणार्थ, एक परीक्षा पर विचार करें जिसके तीन भाग हैः– 25 बहु विकल्पीय प्रश्न, 2 निबंधात्मक प्रश्न ओर एक लघु प्रश्न। यदि एक छात्र 25 में से 20 (80 प्रतिशत) बहुविकल्प प्रश्न सही करता है, तो हम यह आशा करते हैं कि निबंधात्मक प्रश्न में भी उसे 80 प्रतिशत अंक प्रा एवं तीसरे भाग का भी यही अनुपात अपेक्षित होगा। आगे, यदि एक प्रोफेसर के द्वारा किये गये अनुसंधान परीक्षण विश्वसनीय है, तो छात्रों को उन सभी परीक्षणों में सुसंगत अंक प्राप्त होंगे। दूसरे शब्दों में, एक छात्र जिसे पहली परीक्षा में 80 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं उसके बाद वाले अन्य सभी परीक्षाओं में भी 80 प्रतिशत के आस पास ही अंक आने चाहिये। यह परीक्षा की स्थिरता है। क्या बार–बार परीक्षा दने में वह समान अंक लाता है। विश्वसनीयता का मूल्यांकन सामान्य रूप से सह–संबंधों की गणना करके की जाती है, और हम सदैव मजबूत एवं सकारात्मक मूल्यों की ओर देखते हैं।

परीक्षा– पुनः परीक्षा विश्वसनीयता :– इसमें लोगों के एक समूह की परीक्षा के दो प्रशासन के अंकों को सहसंबंधित करना शामिल है। जिन लोगों को पहली बार में अच्छे अंक प्राप्त होते हैं। उन्हें दूसरी, तीसरी बार भी इसी प्रकार समान अंक प्राप्त करने चाहिये।

समानांतर स्वरूप विश्वसनीयता :–इसमें एक ही परीक्षा के दो भिन्न संस्करणों के अंकों का सहसंबधं शामिल है (लोग –ए संस्करण में सर्वोच्च अंक प्राप्त करते हैं उन्हें दूसरे संस्करण में भी सर्वोच्च अंक प्राप्त करना चाहिये।

आधी बंटी हुई विश्वसनीयता :– इसमें परीक्षा के आधे भाग पर प्राप्तांकों का सह संबंध । विषम क्रमांकित वस्तुएं) दूसे आधे भाग में प्राप्तांकों के साथ, शामिल है (जैसे– समक्रमांकित वस्तुएं) पहले आधे में सर्वाधिक प्राप्त अंकों का तालमेल इसमें आधे भाग में प्राप्त सर्वोच्च अंकों से होना चाहिये ।

सांख्यिकी विश्वसनीयता :– इस संभावना की व्याख्या करती है कि जो परिणाम प्राप्त हुआ है वह ''मौके'' के कारण प्राप्त हुआ और यदि संभावना कम है (जैनादुई संख्या $P<.05$) तो हम कहते हैं कि यह वास्तविक परिणाम है (जैसे मौके पर आधारित नहीं है, अतः यदि परीक्षण पुनः किया गया तो पुनः प्राप्त होने की संभावना है। साहित्य में महत्वपूर्ण परिणामों की तलाश करते समय हम पढ़ते हैं (दो समूहों में महत्वपूर्ण अन्तर सांख्यिकी विश्वास भिन्नता है।

वैधता :– वैधता माप की सटीकता है या उस सीमा तक जहाँ तक सचमुच प्राप्तांक एक अवधारणा का प्रतिनधित्व करते हैं दूसरे शब्दों में हमने जो कुछ भी मापने का सोचा है या हम उतनी सटीकता से उसे माप रहे हैं। यह अर्थपूर्ण है या परीक्षण की सटीकता है– क्या जो मापना चाह रहे थे, उसी का परीक्षण किया जा रहा हैं।

- कुद मानदंडों की पहचान करके मूल्यांकन किया जाता है। (जैसे – व्यवहार का परीक्षण पूर्व में होकर लेना चाहिये ।
- परीक्षण की भविष्यवाणी वैधता मानदंडों पर प्राप्तांक के साथ परीक्षा में प्राप्तांकों के सहसंबंध के द्वारा निर्धारित की जाती है। जैसे, परीक्षा में आये अंकों का सामंजस्य शिक्षकों के साथ बैठाया जाना चाहिये। बच्चे द्वारा विद्यालय में कितनी बार झगड़ा किया गया उसके ब्यौरे को भी ध्यान में रखा जाना चाहिये।
- यदि अध्यापकों और विशेष माप के मध्यम एक मजबूत सघरात्मक संबंध सामने आता है, तब हम यह कह सकते हैं कि हमारे साथ की ''भावी वैधता'' है।

संवेदनशीलता :– पैमाने की संवेदनशीलता एक महत्वपूर्ण माप–तौल की अवधारणा है, और विशेषतया जब व्यवहार में परिवर्तन या काल्पनिक संरचनाएं जाँच पड़ताल के अन्तर्गत आती है। संवेदनशीलता से तात्पर्य एक अवधारणा में परिवर्तनशीलता को सटीक रूप से मापने के लिये उपकरण की क्षमता से है। एक द्विपक्षीय प्रतिक्रिया श्रेणी जैसे ''सहमति या असहमति'' छोटे से छोटे व्यवहारिक परिवर्तन का लेखा रखने की अनुमूति नहीं देती है। पैमाने पर कई श्रेणियों के साथ अधिक संवेदनशील उपाय की आवश्यकता हो सकती है। उदहरणार्थ, दृढ़तापूर्वक सहमत ''हल्की सी सहमति, न ही सहमत और न ही असहमत, हल्की सी असहमति ''थोड़ी असहमति'' और पूर्णतः असहमति जैसे शब्दों को जोड़ कर पैमाने की संवेदनशीलता को बढ़ाया जा सकता है।

21.5 माप के पैमाने का वर्गीकरण

व्यवसाय से संबंधित मुद्दों पर अनुसंधान करते समय, एक अनुसंधानकर्ता को सर्वप्रथम यह सुनिश्चित करना होगा कि किस चीज की माप तौल करनी है, केसे की जायेगी, और साथ ही अवधारणा ली, भी माप तौल कैसे की जायेगी। 1940 के शुरूआती दौर में, हार्वडे मनोचिकित्सक एस.एस. स्टीवेन्स ने मापतौल के पैमाने का वर्गीकृत करने केक लिये मामूल, क्रमिक, अन्तराल और अनुपात जैसे शब्दों की उत्पत्ति की (टीवेन्स 1946)/ मापतौल के पैमाने वह नियम हैं जो संख्याओं के गुण की व्याख्या करते है। यह नियम दर्शाते हैं कि विज्ञान में एक संख्या केवल संख्या नहीं होती है, इसके अतिरिक्त इससे आगे बढ़कर संख्या इस सूचना पर आश्रित होती है इसका उपयोग कैसे किया गया था या इसे कैसे मापा गया था। इस श्रेणी में, हम आंकड़ों के सूचनापरक के विस्तार तक की चर्चा करेंगे। अन्ततः मापतौल के पैमाने के तीन गुण होते है। आदेश या क्रम, अन्तर और अनुपात । प्रत्येक गुण की व्याख्या निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर देकर की जा सकती है:–

1 क्रम– क्या एक बड़ी संख्या छोटी संख्या से अधिक महत्व इंगित करती है।

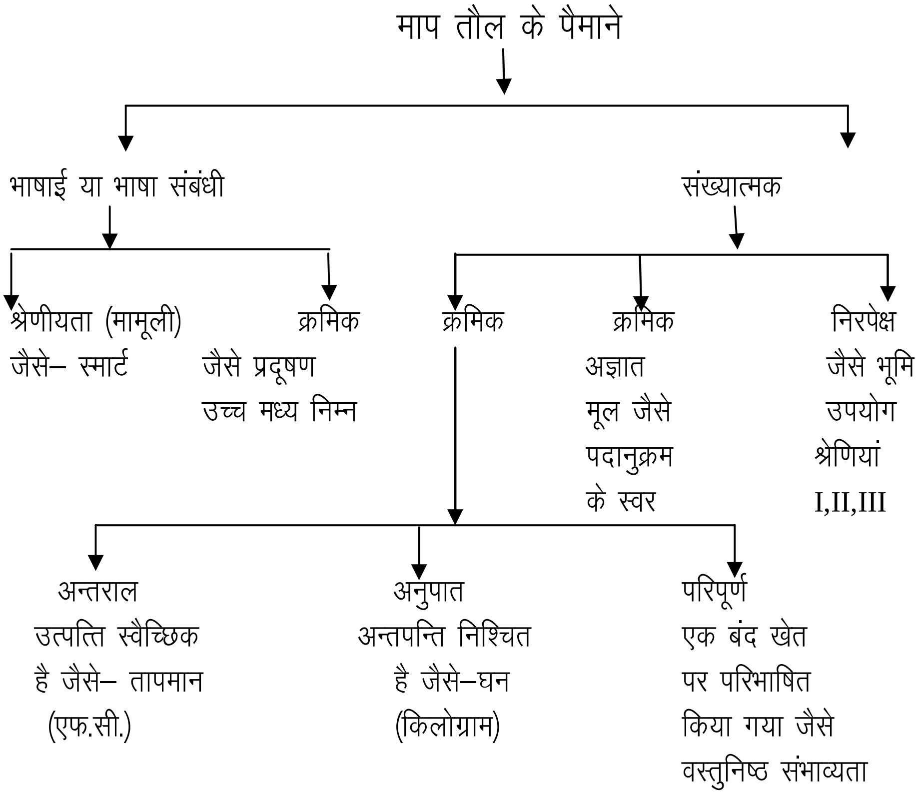
2 अन्तर – क्या दो संख्याओं को घटाने से कोई अर्थपूर्ण मूल्यांकन का प्रतिनिधित्व होता है।

3 अनुपात – क्या दो संख्याओं का विभाजन (या अनुपात) कुछ अर्थपूर्ण मूल्यांकन का प्रतिनिधित्व करता है।

मापतौल के पैमाने से तात्पर्य है संख्याओं के गुणों का भिन्न उपयोग करके किस प्रकार इनको बदला जा सकता है। पैमानों को सामान्यतः चार प्रकारों में बाँटा जाता है :–

1. मामूली पैमाना
2. क्रमिक पैमाना
3. अन्तराल पैमाना और
4. अनुपात पैमाना

व्यापार शोधकर्ता बहुत से पैमानों या संख्या व्यवस्था का प्रयोग करते है। सभी पैमाने मापतौल में एक समान परिणाम नहीं देते हैं और न ही सभी अवधारणाओं को समस्त मापतौल से परिपूर्ण होने की आवश्कयता है। पैमाने का स्तर अधिक महत्वपूर्ण दिखता है क्योंकि इससे गणितीय तुलना निर्धारित होती है जो कि स्वीकार्य हैं पैमाने के चार प्रकार या स्तर एक अनुसंधानकर्ता को विश्लेषण एवं पैमाने की वैधता के परीक्षण में प्रगतिशील रूप से अधिकाधिक शक्ति प्रदान करते है।



अभ्यास हेतु प्रश्न :– अपने विश्वविद्यालय के संबंधित अध्यापक के साथ चर्चा करो कि कक्षा और परीक्षा में विषयों के प्रदर्शन को मापने का क्या तरीका है । विभिन्न पैमानों के भिन्न भिन्न प्रकारों से इसमें सामंजस्य बैठाने हेतु चर्चा करो।

21.5.1 सांकेतिक पैमाना :–

सांकेतिक पैमाना नापतौल के स्तर का सर्वाधिक प्राथमिक या प्रारंभिक पैमाना है सांकेतिक पैमाना कवेल पहचान या वर्गीकरण के उद्देश्यों क`लिये किसी वस्तु का मान निर्दिष्ट करता है। मान कोई संख्या भी हो सकती है और होनी भी चाहिये क्योंकि किसी मात्रा का प्रतिनिधित्व नहीं किया जा रहा है। इस संदर्भ में, सांकेतिक पैमाना । सही मायने में गुणात्मक पैमाना है। सांकेतिक पैमाने बहुत अधिक उपयोगी होते हैं, और कभी कभी तो ये एकमात्र उचित पैमाना (उपाय) होते हैं, इन्हें प्राथमिक भी कहा जा सकता है। सांकेतिक पैमाना एकपक्षीय या विवेकाधीन होती है जैसे–प्रत्येक स्तर को बिना किसी त्रुटि के किसी भी श्रेणी में रखा जा सकता है। सांकेतिक पैमाने श्रेणी तक पैमाने होते हैं। जिसका उपयोग पहचान, नाम या श्रेणी गत चीजों या व्यक्तियां या घटनाओं के लिये किया जाता है। सांकेतिक पैमाने माप तौल के सबसे निम्न स्तर के पैमाने होते हैं। जब सांकेतिक पैमाने का विस्तार किया जा सरहा हो या तैयार किया जा रहा हो तो साधारण प्रक्रिया का अनुसरण किया जाना चाहिये। व्यापार अनुसंधान में सांकेतिक पैमानों का उपयेाग बहुत से अवसरों पर किया जाता है। उदाहरणार्थ, सांकेतिक पैमाने का प्रयोग पहचान करने हेतु, ब्रांड की पहचान हेतु, बिक्री क्षेत्र हेतु, ब्रांड की जागरूकता हेतु, स्त्रियों के कार्य करने की स्थिति आदि की जानकारी हेतु किया जाता है।

पुरूषों में लिंग के आधार पर जनसंख्या और स्त्रियों में अनुसूचित जाति, अनुसूचित जनजाति, अन्य पिछड़ा वर्ग और सामान्य जाति के आधार पर वर्गीकरण किया जाता है। व्यावसायिक बैंकों को सार्वजनिक, निजी और विदेशी बैंकें की श्रेणी में रखा जाता है और प्रत्येक श्रेणी को एक संख्याओं के रूप में (0,1,2) या अक्षरों के रूप में (ए.बी, सी) सारणी दे दी जाती है।

आंकड़े एकत्रित करने में सांकेतिक पैमानों का उपयोग किया जाता है, सांख्यिकीय विश्लेषण, प्रतिशत और ची–स्वेयर परीक्षा उपयुक्त तरीके हैं केन्द्रीकृत प्रवृत्ति को मापने के लये प्रणाली या रीति अकेले का ही उपयोग किया जा सकता है। मध्य और औसत को सांकेतिक आंकड़े पर नियोजित किया जा सकता है क्योंकि इसमें संख्या पद्धति के उच्च स्तरीय गुण सम्मिलित रहते है। अनुसंधानकर्ता को पैमाने के प्रकार का चयन करने में बहुत सावधानी बरतनी चाहिये यदि वे सांख्यिकीय तकनीक का उपयोग करने जर रहे हैं। अनुसंधान कर्ता सांकेतिक आंकड़ों से औसत मूल्य का अनुमान नहीं लगा सकता है।

21.5.2 क्रमसूचक पैमाना :–

क्रमसूचक पैमाना या औपचारिक पैमाना एक श्रेणीबद्ध पैमाना है जो वस्तुओं या घटनाओं के बीच आदेशित संबंधों को इंगित करता है। इसमें वस्तुओं की संख्याओं को निर्दिष्ट करना शामिल है जो कि वस्तुओं के गुणों एवं विशेषताओं के सापेक्ष विस्तार की सूचना देता है। यह इस बात की माप–तौल करता है कि एक वस्तु या घटना की विशेषताएं और गुण दूसरी घटनाओं या विशेषताओं के समान हैं या नहीं है। सांकेतिक पैमाने से आगे थोड़ा सुधरा हुआ रूप है क्योंकि यह क्रय की सूचना देता हैं फिर भी, इस पैमाने से इस बात की सूचना प्राप्त नहीं होती है कि विभिनन वस्तुओं या घटनाओं में कितनी विशेषताएं अधिक है और कम है तो कैस कम है । शब्द कितनी कम को इंगित करता है न कि यह दूसरी श्रेणी पहली श्रेणी से कितना करीब है या प्रथम श्रेणी से कितनी दूर हैं क्रमसूचक पैमाने का प्रयोग करते हुये जो आंकड़े एकत्रित किये जाते हैं उनमें एक श्रेणी निकल कर आती है जहाँ कोई वस्तु जिसे प्रथम श्रेणी में रखा गया है, उसमें द्वितीय या तृतीय श्रेणी में श्रेणीबद्ध वस्तुओं से अधिक विशेषताएं होंगी अतः, सांकेतिक पैमाने की अपेक्षा क्रमसूचक पैमाने की मुख्य विशेषता या गुण यह है कि यह सापेक्ष स्थिति को इंगित करता है न कि वस्तुओं के बीच अंतर की परिमाण को । अनुसंधान में, सांकेतिक पैमानों का उपयोग सापेक्ष प्रवृत्ति, विचार, धारणाओं इत्यादि को मापने के लिये किया जाता है। वह समस्त आंकड़े जिन्हें व्यक्तियों द्वारा प्रश्न पूंछकर एकत्रित किया जाता है क्रमसूचक गुण वाले होते हैं। उदाहरण के लिये । एक विक्रेता का हित ग्राहक की विभिन्न ब्रांडों में रूचि जानना हो सकता हैं ग्राहकों से निवेदन किया जा सकता है कि वे विशिष्ट जायके या सुगंध, पैकेट कीडिजायन आदि के आधार पर विभिन्न ब्रांडों को वरीयता प्रदान करें। मनोभाव या अभिवृत्ति का पैमाना भी क्रमसूचक प्रवृत्ति में ही आता है। किसी वस्तु या घटना हेतु निर्दिष्ट संख्या को क्रमसूचक पैमाने में भी परिवर्तित नहीं किया जा सकता हैं इस सिद्धांत का उल्लंघन होने पर अनुसंधानकर्ता को प्राप्त होने वाले परिणाम बहुत उलझाने वाले होंगे। क्रमसूचक पैमाने के लिये औसत एक उपयुक्त सांख्यिकीय नहीं है।

21.5.3 अन्तराल पैमाना :

अन्तरावधि पैमानेको क्रम निर्धारण मान भी कहा जाता है। इसमें वस्तुओं या घटनाओं के मूल्य निर्धारण हेतु संख्याओं का उपयोग शामिल है। अन्तरावधि पैमाने में, पैमाने पर संख्यात्मक रूप से बराबर दूरी अंतराल पैमाने में बराबर मान दर्शाती है जिसे कहीं कहीं क्रम निर्धारण मान भी कहा जाता हैं इसमें घटनाओं या वस्तुओं की दर करने हेतु संख्याओं का उपयोग करना शामिल है।

अन्तरावधि पैमाने में, पैमाने पर संख्यात्मक रूप से बराबर दूरी गुणों में बराबर मूल्यों को दर्शाती है। अन्तरावधि पैमाना क्रमसूचक पैमाने का आधुनिक रूप है, इसमें क्रमसूचक पैमाने के समस्त गुण होने के साथ–साथ यह अनुसंधानकर्ता को अनुमति देता है कि वह वस्तुओं के मध्य विभिन्नता की तुलना कर सके। इसमें मापतौल के प्रत्येक स्तर के मध्य विभिन्नता की समानता का गुण समाहित है। इस पैमाने की यह विशेषता है कि किसी भी दो पैमानो के मूल्य के मध्य अन्तर अन्य दो पैमाने के असन्न मूल्य में अन्तर होता है। अन्तराल पैमाने उदाहरण हैं फारेनहाइट और सेल्सियस पैमाना । अन्तराल पैमाना पैमाने के बिन्दुओं के मूल्यों पर प्रतिबंध लगाता है। शून्य जो एक कार्य हो सकता है वह प्राकृतिक शून्य की अपेक्षा स्वैच्छिक शून्य है। मध्यस्थता में किसी भी बिंदु पर शून्य मान रखने की स्वतंत्रता शामिल है। पैमाने के मानों पर समान और निरंतर अन्तराल होता है। अनुसंधन में, अधिकांश अनुसंधान मनोवृतित या अभिभावों, विचारों और संभावनाओं पर अनुसंधान अन्तराल पैमाने का प्रयोग करके किया जाता है। वह समस्त सांख्यिकीय तकनीकें जो सांकेतिक और क्रम सूचक पैमानों पर उपयोग में लायी जाती है, उनका उपयोग अन्तराल पैमानों द्वारा आंकड़े एकत्रित करने में भी किया जा सकता है।

21.5.4 अनुपात पैमाना :–

अनुपात पैमाने अन्तरावधि पैमाने से इस संदर्भ में भिन्न है कि इसमें प्राकृतिक /परिपूर्ण शून्य है। इसमें सांकेतिक, क्रमानुता और अन्तरावधि पैमाने के सभी गुण है। अनुपात पैमाने के द्वारा उत्पन्न आंकड़ों को पहचाना जा सकता है, श्रेणियों में वगीकृत किया जा सकता है, रैंक दी जा सकती है एवं अन्य गुणों से इसकी तुलना भी की जा सकती है। इसे सापेक्षता के संदर्भ में अभिव्यक्त भी किया जा सकता है, एक को दूसरे के विभाजन की शर्तों पर भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। अतः इसे सापेक्ष पैमाने के नाम से भी जाना जा सकता है। अनुपात पैमानों अनुसंधान में बहुत अधिक संख्या में उपलब्ध है। इसमें बिक्री, बाजार हिस्सेदारी, लागत, ग्राहक की आयु और संख्या सम्मिलित है। इन सभी मामलों में स्वाभाविक शून्य की उत्पत्ति होती है । समस्त सांख्यिकीय तकनीकों को अनुपात आंकड़ों पर अपनाया जा सकता है।

<u>माप का पैमाना</u>

	सांकेतिक	क्रमानुगत	अन्तरावधि	अनुपात
क्रम	नहीं	हाँ	हाँ	हाँ
अन्तर	नहीं	नहीं	हाँ	हाँ
अनुपात	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ

पैमानों को विस्तृत रूप में वगीकृत किया जा सकता हैः–

- दाशमिक पैमाने में समेकित आकलन, संख्यात्मक पैमाना, अर्थसंबंधी पैमाने और रेखाचित्रीय अनुपात पैमाना शामिल है।
- गैर दाशमिक पैमाने :–इसमें श्रेणीगत, पंक्तिबद्ध, श्रेणी करण, निरंतर योग ओर युगल तुलना शामिल है।

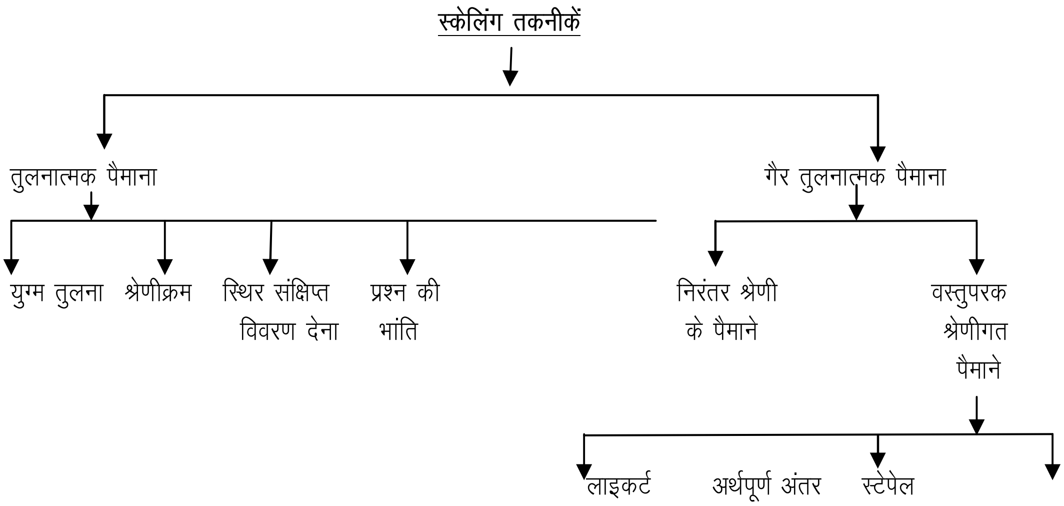
21.6 स्केलिंग की तकनीकें

इस भाग में हमारी चर्चा जारी रहेगी कि पैमानों का विकास किस प्रकार हुआ और सामान्य स्केलिंग तकनीकों और प्रारूपों का प्रयोग किस प्रकार कि जा सकता हैं यह अभिवृत्ति पैमाने की व्यापक

अवधारणाओं पर केन्द्रित है– प्रबंधकीय और उपभोक्ता या खरीददार धारणा के माप के लिये स्केलिंग का अध्ययन इसमें शामिल है। समस्त मनोभाव (और अन्य मनोवैज्ञानिक) माप तौल प्रक्रियाएं व्यक्तियों से संबंधित हैं जेसे ग्राहक, खरीदी, अभिकर्ता, बाजार प्रबंधक, या विनिर्दिष्ट दिशा निर्देशों के अनुसार कुछ प्रेरणास्पद प्रतिक्रियाएं। यह प्रेरणा या प्रोत्साहन वैकल्पिक उत्पाद या सेवाएं, विज्ञापन संबंधी विषयवस्तु, पैकेज की आकृति, ब्रांड नाम, बिक्री का प्रदर्शन और बहुत कुछ हो सकता हैं प्रतिक्रिया में यह शामिल हो सकता है कि कौन सी प्रतिलिपि विषयवस्तु दूसरे की तुलना में अधिक आकर्षक है । कौन सी पैकिंग डिजायन, इसमें की अपेक्षा अधिक लुभावनी है, हर ब्रांड नाम का क्या विशेष गुण है आदि आदि। स्केलिंग प्रक्रिया को अंतिम पैमाने (सांकेतिक, क्रमानुमन, अन्तरावधि या अनुपात) के गुणों की शर्तों के आधार पर वगीकृत किया जा सकता है, लक्ष्य यह है कि कार्य करने के लिये कहा जाता है या फिर भी अन्य तरीकों से किया जाता है, जैसे विषय, प्रेरणाओं या दोनों पर जोर दिया गया हो।

एक सुआकल्पित अनुसंधान समस्या से ही एक सुआकल्पित माप तौल (पैमाना) प्रक्रिया का निर्माण होता है। किसी भी अनुसंधान की मौलिक पहलू होती है मापन प्रक्रिया यही वह कदम है जहाँ हम इसके माप तौल की वास्तविकता को जानने का प्रयास करते हैं। निर्णायकगण इस कदम के पहले वाले कदम के ज्यादा इच्छुक होते है। यह कदम पूर्णतः व्याख्यात्मक होते हैं और यही वह कदम है जहाँ सही मायेन में परिमाणन अपना स्थान लेता है। माप में होने वाली त्रुटियों से रहित माप तौल होनी ाहिये। ऐसी विनाशकारी परिस्थितियां उत्पन्न हो सकती है जहाँ विपणन कर्ता आंकड़ों के निष्कर्षों तक पहुँच सकता हैं यदि वह उलझे हुये परिणामों को लेकर सतर्क है तो वह आंकड़ों के विश्लेषण से उत्पन्न होने वाले निष्कर्षों का त्याग कर सकता है। मापन से प्राप्त आंकड़े स्थिर, ओर स्पष्ट है तो उनकी पहचान करने के लिये अधिक ज्ञान और बुद्धिमत्ता की आवश्यकता होती है, किन्तु दुर्भायवश, विपणनकर्ता को यह जानकारी ही नहीं होती है या जानने का इच्छुक कभी नहीं होता है कि किस प्रकार के पैमाने का उपयोग किया जाए ताकि विपणन में आने वाली समस्याओं के विभिन्न पहलुओं को मापा जा सके। निष्कर्षों के आधार पर लिये गये किसी भी निर्णय को संगठन पर बहुत सारे नकारात्मक प्रभाव पड़ सकते है। अतः यह अत्यावश्यक है कि अनुसंधानकर्ता के मापन पैमाने को विस्तृत करने की समझ हो। ताकि युक्तियुक्त तरीके सही गुण प्राप्त किये जा सके।

विस्तृत रूप में मापन तकनीक को तुलनात्मक और गैर तुलनात्मक पैमाने में वर्गीकृत किया जा सकता है। तुलनात्मक पैमाना जैसा कि इसके नाम से ही इंगित होता है कि समस्त दरें, जिसमें सापेक्ष निर्णय भी सम्मिलित है, तुलना होती है । इसमें प्रेरणास्पद वस्तुओं की प्रत्यक्ष तुलना सम्मिलित है। इसमें केवल क्रमानुगत या श्रेणीबद्ध आदेश के गुण होते हैं। इसे दूसरे अर्थों में गैर मापीय पैमाना भी कहा जाता है । क्योंकि यह किसी भी प्रकार के यह इसके विपरीत सिकी भी अंकीय क्रियाओं की अनुमति नहीं देता है, इन सबका उउपयोग अन्तरावधि ओर अनुपात पैमानों में किया जा सकता है। तुलनात्मक पैमानों में प्ररणाप्रद वस्तुओं की प्रत्यक्ष तुलना सम्मिलित है।



21.6.1 तुलनात्मक पैमाना पद्धति :–

तुलनात्मक पैमाना पद्धतियों में सम्मिलित हैं :–

(ए) युग्म तुलना पैमाना,

(बी) श्रेणी क्रमिक पैमाना

(सी) स्थिर संक्षिप्त विवरण देने वाला पैमाना और

(डी) प्रश्न की भांति ।

(ए) युग्म तुलनात्मक पैमानाः– जैसा कि इसके नाम से ही विदित होता है इसमें दो वस्तुओं की प्रस्तुति और मानदंडों के अनुसार उत्तरदाताओं से प्रश्न पूदने में से किसी एक का चयन करना शामिल है। क्रमानुगत पैमाने का उपयोग करके आंकड़े एकत्रित किये जाते है। उदाहरण के लिये एक उत्तरदाता को टी.वी. के वरीयता क्रम को जोड़े में रखने को कहा जा सकता है। युग्म तुलतना आंकड़ों को विश्लेषण विभिन्न तरीकों से किया जा सकता है। ऊपर वाले उदाहरण में अनुसंधान कर्ता उन उत्तरदाताओं के प्रतिशत को गणना कर सकता है जिन्होंने किसी अन्य की अपेक्षा एक विशिष्ट टी.वी. ब्रांड को वरीयता दी है।

पारगमन की धारणा के तहत युग्मित तुलना तकनीक का उपयोग करके प्राप्त आंकड़ों को क्रमानुगत श्रेणी में परिवर्तित किया जा सकता है। वरीयता के पारगमन का तात्पर्य है कि यदि कोई प्रत्यर्थी Y ब्रांड की जगह X ब्रांड को वरीयता देता है और Y ब्रांड को Z के ऊपर वरीयता प्राप्त है, तब X ब्रांड को Z के ऊपर वरीयता प्राप्त होगी। यह, सबसे कम वरीयता की अपेक्षा प्रत्येक ब्रांड को पसंद किये जाने की संरख्या निर्धारित करने के द्वारा किया जा सकता है।

युग्मित तलनात्मक तकनीक तब बहुत उपयोगी हो जाती है जब ब्राडों की संख्या सीमित होती है, क्योंकि इसमें प्रत्यक्ष तुलना और अत्यधिक पसंद की जरूरत होती है। हालांकि ऐसा नहीं है, कि संभावित तुलना नहीं की जा सकती, किन्तु तुलना बहुत दुर्वह या बोझिल हो जायेगी। युग्मित तुलना के द्वारा किया जाने वाला सर्वसाधारण तरीका स्वाद परीक्षण है, उदाहरण के लिये इसमें उपभोक्ता को दो विभिन्न ब्रांउों के पेय पदार्थों को चखने के लिये कहा जाता है और यह कहा जाता है कि दो में से जिसका स्वाद सबसे अच्छा लग रहा हो उसका चुनाव करो।

(बी) पंक्तिबद्ध पैमाना :– यह तुलनात्मक मापन की एक अन्य जानी पहचानी पद्धति है। पंक्तिबद्ध पैमाने में प्रतिद्विन्दों या उत्तरदाता को बहुत सारी चीजें एक साथ दे दी जाती है और एक विशिष्ट मापदंड के आधार पर श्रेणीबद्ध या क्रम में रखने के लिये कहा जाता है। उदाहरण स्वरूप

टी.बी.के. विभिन्न ब्रांडों की वरीयता के लिये उपभोक्ता वरीयता रख सकते हैं इस मापन पद्धति में, क्रमानुगत पैमानो का उपयोग किया जाता है। टेलिविजन के विभिन्न ब्रांडों को एक क्रम में रखने हेतु उपभोक्ताओं से कहा जा सकता है, पहला सर्वाधिक पंसदीदा ब्रांड, दूसरे स्थान पर थोड़ा कम अधिमानित ब्रांड और तीसरे पर उससे कम पसंद के ब्रांड को रखा जा सकता है। युग्मित तुलना की तरह, यह भी तुलनात्मक प्रकृति का ही होता है। इस तकनीक द्वारा प्राप्त आंकड़े संयुक्त विश्लेषण के साथ नियोजित होते हैं ।क्योंकि पैमाने की विभेदक संभावना रहती है, उपभोक्ताओं को एक दूसरे ब्रांड के लिये भड़काते है। पारगमन की धारणाओं के तहत पंक्तिबद्ध क्रम को समकक्ष युग्मित तुलना आंकड़े या इसी के समान किसी आंकड़े में परिवर्तित किया जा सकता है।

(सी) **अविरत (लगातार) मापन** :– यह तकनीक कुछ इकाईयों को लगातार निर्धारित करने की आज्ञा उत्तरदाता को देता है, जैसे बिन्दु, रूपये या कुद मानदंडों के संदर्भ में महत्वपूर्ण वस्तुएं । इस तकनीक में उत्तरदाता को खेल उपयेागी वाहन के गुणों को 10 अंक देने के लिये कहा जाता है। यदि गुण महत्वपूर्ण नहीं हे उत्तरदाता शून्य अंक देना चाहेगा । गुणों को उत्तरदाताओं द्वारा दिये गये अंकों के आधार पर मापा जाता है। इसमें मुख्यत रूप से तुलनात्मक प्रकृति का होने केक कारण क्रमिक का इस्तेमाल किया जाता हे और उसका परिणाम सामान्यता की कमी होना है। अविरत मापन का लाभ यह है कि इससे महत्वपूर्ण वस्तुओं के मध्य बिनाअधिक समय लगाये भेदभाव करने का अवसर प्राप्त होता है। इसके लाभ में निर्दिष्ट लोागें की तुलना में अधिक याक म इकाईयों का आबंटन शामिल है।

(डी) शीघ्र समाधान :– यह अपेक्षाकृत बडत्री संख्या में वस्तुओं के बीच शीध्रातिशीघ्र भेदभाव को संदर्भित करता है। इस तकनीक में पंक्तिबद्ध क्रम प्रक्रिया का उपयोग होता है जिसमें कुछ मानदंडों के संबंध में वस्तुओं को समानता के आधार पर इकट्ठे में वृल (समाधान) किया जाता है। मल्होत्रा (2004) में एक सटीक उदाहरण प्रस्तुत किया गया, जो इस प्रकार है। उत्तरदाताओं को व्यक्तिगत कार्ड पर 100 व्यवहारिक कथन करने को दिये गये और उनसे कहा गया कि उन्हें सर्वाधिक सहमत से लेकर सबसे कम सहमत तक 11 ढेर बनाओ। छाँटीी गयी वस्तुओं की संख्या किसी भी हाल में 60 से कम और 140160 से अधिक नहीं होनी चाहिये, 60 से 90 वस्तुओं तक की सीमा को युक्तियुक्त माना गया । पूर्व निर्धारित प्रत्येक ढेर में वस्तुओं को रखा जाना चाहिये।

21.6.2 गैर तुलनात्मक मापन प्रणाली :–

गैर तुलनात्मक मापन को दूसरे शब्दों में भ्रमणकारी माप कहा जाता है क्योंकि एक समय में एक ही वस्तु का माप लिया जाता है। अनुसंधानकर्ता इस पैमाने का उपयोग उत्तदाताओं को उन मानकों का उपयोग करने की अनुमति देता है जो उन्हें सटीक और उचित लगते हैं न कि अनुसंधानकर्ता द्वारा विनिर्दिष्ट मानकों को। उत्तरदाता अनसुधान कर्ता द्वारा विनिर्दिष्ट मानको की तुलना अन्य वस्तुओं से नहीं करते हैं। गैर तुलनात्मक प्रणाली का उपयोग निरंतन होता है एवं मापक पैमाने का अलग–अलग उल्लेख होता है। इन पैमानों में, प्रत्येक वस्तु को दूसरी वस्तुओं से पृथक स्वतंत्र रूप से मापा जाता है, परिणाम मूलक आंकड़ा सामान्यतया उन्तरावधि या अनुपात पैमाना माना जाता है।

सतत् दर निर्धारित पैमाना :–

इसे आलेखीय दर–निर्धारित पैमाना भी कहा जाता है। एक एक प्रकार का पैमाना है जो उत्तरदाता को निरंतरता की अनुमति देता है। (जैसे एक रेखा) जिस पर किसी वस्तु का मूल्यांकन प्रदान किया जाता है। अनुसंधानकर्ता सतत् मूल्यांकन पैमाने का विस्तार करके उत्तरदाता को उनके

द्वारा मूल्यांकन करने हेतु अनुमति देते है, उनसे कहा जाता है कि एक रेखा पर उचित बिन्दु पर एक चिह्न अंकित करें जो एक छोर से दूसरे छोर तक मापदंड तक पहुंच सके या पूर्वनिर्धारित श्रेणी तक पहुंच सके। यह उत्तरदाता को अनुसंधानकर्ता द्वारा निर्धारित चिह्न को चयन करने की आवश्कयता नहीं होती है, इसमें बहुत से उतार चढ़ाव संभव है। यह रेखा लंबवत या क्षेति हो सकती है, यह चिन्हित या अचिन्हित हो सकती है, यह चिन्हित है, उसके कुछ भाग हो सकते हैं। या थर्मामीटर पैनाने में हो सकती है, पैमाने के बिन्दु या संख्यात्मक होने चाहिये या उनका संक्षिप्त विवरण होना चाहिये। सामान्यता नीचे दी गयी सारणी में तीन प्रकार के वर्णन हैः–

सतत् मूल्यांकन पैमानेक के उदाहरण :– किसी भी रेस्टोरेंट द्वारा दी गयी सेवाओं का मूल्यांकन करने के लिये क्षैतिज रेखा पर अविकणियें जिसमें आपकी मनोभावों का आभास होता है।

सहानुभूति :–

सबसे खराब ———————————————————— —————— सबसे अच्छा

– सतत् मूल्यांकन पैमाना बनाना आसान है, किन्तु गणना अविश्सनीय और बोझिल हो सकती है। अनुसंधान में कम्प्यूटर के प्रयोग से, और लगातार कम्प्यूटर का उपयोग करने से, अन्यथा सूचना बहुत कम प्रापत करते हैं।

अलग–अलग उल्लेखित मूल्यांकन पैमानाः– यह पैमाना आलेखीय पैमाने के ही समान है, इसमें भी व्यक्ति अपने निर्णय स्वतंत्रापूर्वक करते है। प्रत्यक्ष तुलना का लाभ न लेते हुये स्वतंत्र निर्णय किये जाते हैं। उत्तरदाताओं को एक पैमाना दिया जाता है जिसमें या तो संख्या दी होती है या प्रत्येक श्रेणी का संक्षिप्त विवरण दिया रहता है। यह पैमाना उत्तरदाताओं को विभिन्न श्रेणियों में से कुद संख्या में श्रेणी चयन की अनुमति देता है, सामान्यता उसे 7, और 10 या उससे अधिक कभी–कभी उपयोग में आते हैं। श्रेणियों को पैमाने की स्थिति में क्रमानुगत किया जाता है, और उत्तरदाताओं से एक विशिष्ट श्रेणी जिसका मूल्यांकन विशिष्ट विवरण के साथ है, को चुनने के लिये कहा जाता है विभिन्न वर्गों का मौखिक विश्लेषण कर दिया जाता है। हालांकि यह आवश्यक नहीं होता है । इस पैमाने का अनुसंधान में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है और आजकल अधिक जटिल प्रकार के पैमाने का उपयोग किया जा रहा है। इस प्रकार के मूल्यांकन पैमाने के कुछ प्रकार हैं वे है लाइकर्ट, अर्थपूर्ण भिन्नतम और मुख्य या प्रधान पैमाना ।

लीकर्ट पैमाना :– इस पैमाने का नाम रेनिस लीकर्ट के नाम पर रखा गया है। यह सर्वाधिक उपयोग में आने वाला पैमाना है। विशेषतया अनुसंधान में परीक्षण प्रणाली में इसका सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। बहुत सा अनुसंधात्मक अध्ययन लीकर्ट पैमाने का उपयोग करके किया गया है। विशेष वस्तुओं के बारे में सहमति या असहमति के वक्तव्यों की सूचित करने की आवश्यकता होती है। और यह उत्तरदाता से अपेक्षा की जाती है कि वह सहमति या असहमति की सूचना देगा। सेवा की स्थिरता को मापने के लिये जाने पहचाने लीकर्ट पैमाने के उपयोग के एक हिस्से का उदाहरण नीचे दिया गया है :–

बैंक द्वारा दी गयी सेवा की स्थिरता को मापने हेतु सूची नीचे दी गयी है। कृपया निम्नलिखित पैमाने का उपयोग करते हुये आप यह इंगित करें कि कितनी दृढ़ता से आप इससे सहमत हैं या असहमत हैः–

1 पूर्णतः असहमत

2 असहमत

3 न असहमत , न ही सहमत

4 सहमत

5 पूर्णतः सहमत

लीकर्ट पैमाना :– जिस कम्प्यूटर साफ्टवेयर का आप इस्तेमाल कर रहे हैं। उसके बारे में आप क्या अनुभव करते है कृपया एक संख्या पर गोला बनाइये :–

पूर्णतः असहमत	1	2	3	4	5	6	7	पूर्णतः सहमत

इसे इस्तेमाल करना आसान है।

पूर्णतः असहमत	1	2	3	4	5	6	7	पूर्णतः सहमत

इसका इस्तेमाल हास्यास्पद है।

पूर्णतः असहमत	1	2	3	4	5	6	7	पूर्णतः सहमत

इससे वह सब कुछ होता है जिसकी मैंने अपेक्षा की थी।

पूर्णतः असहमत	1	2	3	4	5	6	7	पूर्णतः सहमत

उपयोग में लाते समय किसी तरह की विसंगतता देखने मे ंनहीं आयी ।

पूर्णतः असहमत	1	2	3	4	5	6	7	पूर्णतः सहमत

यह उपयोगकर्ता के अनुकूल है।

दृढ़तापूर्वक असहमत	1	2	3	4	5	6	7	दृढ़तापूर्वक सहमत

इस पैमाने के उपयोग से एकत्रित आंकड़े का विश्लेषण करने के लिये प्रत्येक कथन का एक संख्यात्मक गणना दी जाती है, जिसकी सीमा –2 से +2 के माध्यम से एक शून्य या 1 से 5 तक होती है।

विश्लेषण या तो वस्तु अनुसार होता है या संपूर्ण गणना (समेकित) या औसत के द्वारा होता है, प्रत्येक उत्तरदाता द्वारा जोड़ कर या वस्तुओं के औसत की तुलना करके इसकी गणना की जा सकती है। लाइकर्ट पैमाने में यह महत्वपूर्ण है कि सतत् मूल्यांकन प्रक्रिया के अन्तर्गत अधिक गणना की प्रतिक्रिया का हितकारी प्रभाव नहीं होता है। विपरीत संकेतीकरण के रूप में कोई विचलन होता है जहाँ अनुकूल प्रतिक्रिया का सबसे कम मूल्यनिरूपण दिया गया है और अननुकूल प्रतिक्रिया का सबसे अधिक मूल्य निरूपण दिया गया है, उसे अनुसंधानकर्ता द्वारा विशिष्ट रूप से निर्दिष्ट किया जाना चाहिये। सामान्यता, प्रतिकूल संकेतीकरण का उपयोग नकारात्मक अवधारणा को चिन्हित करने के लिये किया जाता है और जब अन्य कथनों के साथ इसका उपयोग किया जाता है, प्रतिकूल संकेतीकरण का सकारात्मक प्रभाव होगा।

अर्थपूर्ण भिन्नता पैमानाः– यह पैमाना लाइकर्ट पैमाने के बाद एक बहुत ही प्रसिद्ध पैमाना है। इस पैमाने में उत्तरदाता की प्रतिक्रिया द्विध्रुवीय स्तर से संबंधित होती है जिसका अर्थपूर्ण मतलब होता है । उत्तरदाता वस्तुओं पर अलग–अलग संख्या का उल्लेख करता है, सात बिन्दु गणना पैमाना प्रत्येक छोर पर दो द्विध्रुीवय विशेषणों जैसे ''उत्कृष्ट'' ओर ''बहुत बुरा' द्वारा बंधे होते है। उत्तरदाता किसी एक का चयन करके अपनी प्रतिक्रिया जाहिर करते हैं कि यही उनकी सर्वोत्कृष्ट चयन है। संकेतों को शून्य या 1 से 7 लेकर – 3 से +3 तक चिन्हित किया जाता है। मध्यम मूल्यांकन को तटस्थ स्थिति के रूप में आंका जाता है। पहले प्रकार में शून्य मूल्यांकन तटस्थ बिन्दु होता है और दूसरे प्रकार में तटस्थ बिन्दु 4 होता हैं परिणाममूलक आंकड़ों को सामज्यतया रूपरेखा विश्लेषण के माध्यम से विश्लेषण किया जाता है। इस प्रकार के विश्लेषण में, प्रत्येक रेटिंग पैमाने के आशय और औसत मूल्यांकन को जोड़ा जाता है और आलेखन या सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा इसकी तुलना की जाती है। इससे अनुसंधानकर्ता को वस्तुओं में समानताओं और अंतर को पूर्णरूपेण

सुनिश्चित करने में सहायता मिलती है। विभिन्न खंडों में उत्तरदाता द्वारा आये अंतरों का अनुसंधानकर्ता विभिन्न खंडों के अर्थ की प्रतिक्रिया की तुलना कर सकता है। इस पैमाने के उपयोग से एकत्रित आंकड़ों को सारांश आंकड़ों के साथ नियोजित किया जा सकता है। यद्वपि कि इस पैमाने पर अर्थ के नियोजन पर विवाद है। अर्थ पूर्णतः अन्तरवधि और अनुपता पैमाना है जबकि यह पैमाना सैद्धांतिक रूप से एक क्रमानुगत पैमाना है। हालांकि सांख्यिकीविद द्वारा इस आपत्ति को मद्देनजर रखते हुये, अनुसंधानकर्ता इस पमाने पर सभी सांख्यिकीय तकनीकों का प्रयोग करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण अर्थपूर्ण भिन्नतापूर्ण पैमाने को उद्घृत करता है:–

1 प्रसन्नतापूर्वक .... अप्रसन्नतापूर्वक

2 आक्रामाक ....विनम्र (विनीत)

3 रोमांचक .... गैर रोमांचक

अर्थपूर्ण पैमाना :–

अच्छा – बुरा

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

<u>अर्थपूर्ण भिन्न पैमाना</u>

महत्वपूर्ण – अमहत्वपूर्ण

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

खर्चीला (बहुमूल्य) – अपमूमल्य (सस्ता)

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

उपयोगी – अनुपयोगी

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

मजबूत – कमजोर

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

गतिशील– धीमा

अत्यन्त , मुक्त, थोड़ा, अन्यथा, थोड़ा, काफी, अत्यन्त

स्टेपेज पैमाना :– इस पैमाने का नाम जैन स्टेपेल के नाम पर पड़ा है। जिन्होनें इसके बनाया। यह द्विध्रुवीय गणनात्मक पैमाना है जिसमें रूपधारण 10 श्रेणियाँ है। और –5 से +5 तक संख्याएं हैं और कोई तटस्यबिन्दु (शून्य) नहीं हैं इस पैमाने को आमतौर पर लंबवत् प्रस्तुत किया जाता है और उत्तरदाता यथार्थता और अयथार्यता के आधार पर अपनी प्रतिक्रिया को चुनता है और प्रतिक्रियात्मक श्रेणी में से युक्तियुक्त संख्या चुनकर प्रत्येक वस्तु का चयन करता है। किसी भी वस्तु की अधिकाधिक संख्या उसकी अधिक यथार्थता के आधार पर अपनी प्रतिक्रिया को चुनता है ओर प्रतिक्रियात्मक श्रेणी में से युक्तियुक्त संख्या चुनकर प्रत्येक वस्तु का चयन करता है। किसी भी वस्तु की अधिकाधिक संख्या उसकी अधाकि यथार्थता को इंगित करती है और कम संख्या वस्तु की कम यथार्थ विवरण की ओर इंगित करती है। इसका उदाहरण इस प्रकार है:–

+5

+4

+3

+2

+1
उच्च मूर्तता (वास्तविकता) सेवा
−1
−2
−3
−4
−5

स्टेपल पैमाने के माध्यम सवे एकत्रित आंकड़ों का विश्लेषण ठीक अर्थपूर्ण भिनन पैमाने के जैसे ही किया जा सकता है। स्टेपेल पैमाने का मुख्य लाभ यह है कि वास्तविक द्विध्रुवीयता सुनिश्चित करने के लिये विशेषणों या वाक्यांशों के प्रतितम की आवश्यकता नहीं होती है। और इसे टेलिफोन के द्वारा ही प्रबंधित किया जा सकता है।

विभिन्न पैमानों के आंकड़ों पर गणितीय और सांख्यिकीय विश्लेषण ।

सूची क्रमांक	पैमाने	मूलभूत लक्षण	उदाहरण	अनुमत आंकड़े	
				वर्णनात्मक	आनुमानित
1	नाममात्र	संख्या की पहचान और वस्तुओं को वर्गीकृत करना	संग्रह के प्रकार, हाँ या ना का चुनाव, लिंग	प्रतिशत साधन	पी वर्ग, द्विपदिक, परीक्षण
2	क्रमानुगत	संख्याएं वस्तुओं के प्रतिनिधि, पदों को इंगित करती हैं परंतु उनके बीच अंतर का परिमाण नहीं है।	वरीयताक्रम, गुणवत्ता क्रम	प्रति शतक, औसत	पद क्रम, सह संबंध, अनोवा,
3	अन्तराल	वस्तुओं के मध्य अन्तर की तुलना की जा सकती है, शून्य बिन्दु स्वैच्छिक है	मनोदृष्टि, मत, सूची संख्या	सीमा, अर्थ, मानक, विचलन	पल, सह–संबंध, टी–परीक्षण, अनोवा, प्रतीपगमन और घटक विश्लेषण
4	अनुपात	शून्य बिन्दु, निश्चित होता है, पैमाने गणना का अनुपात का अभिकलन किया जा सकता है।	आयु, आय, कीमत, बिक्री, बाजार शेयर	रेखागणितीय अर्थ, लायबद्ध अर्थ (माध्य)	गुणांक का परिवर्तन

अभ्यास का प्रश्नः– इंगित करें कि निम्नलिखित पैमाने नाममात्र, क्रमिक, अंतराल या अनुपात पैमाने का उपयोग करते हैः–

(ए) शयेर बाजार की कीमतें :–

(बी) वैवाहिक स्थिति, ''विवाहित'' ''या'' अविवाहित'' के रूप में 'वर्गीकृत'

(सी) इस तरह का प्रश्न पूंछे जाने पर हाँ या ना में उत्तर देना कि क्या कभी उत्तरदाता अनियोजित रहा।

(डी) प्रोफेसर पद – सहायक प्रोफेसर, संबंध प्रोफेसर या प्रोफेसर ।

(इ) वर्ग या पद –, ए, बी, सी, डी या एफ। जब हम व्यवसाय अनुसंधान में मापन प्रणाली का विस्तार करने का प्रत्यन्त करते हैं तब बहुत सारे विचारों की आवश्यकता होती हैं पैमाने का विस्तार करते समय कुछ आवश्यक निर्णय लिये जाते हैं। जो कि निम्नानुसार हैः–

पैमाने श्रेणियों की संख्या :–संख्या जितनी बड़ी होगी, मापन पैमाने की अधिक सटीकता की आवश्यकता होगी।

एक अवधारणा को मापने के लिये वस्तुओं की संख्या : – वस्तुओं की संख्या कितनी होनी चाहिये? स्वीकार्य विश्वसनीयता प्राप्त करने केक लिये कम से कम 3 वस्तुओं का होना आवश्यक है, किन्तु साधारणतया 5 से 7 वस्तुएं और कभी कभी तो इससे अधिक वस्तुएं भी देखने में आती है।

सम और विषम संख्या की श्रेणियाँ :– जब एक पैमाने में विषम संख्या की श्रेणियों का उपयोग किया जाता है तब मध्य–बिन्दु तटस्थ स्थिति का प्रतिनिधित्व करता हैं यदि अनुसंधान कर्ता किसी विशिष्ट मुद्दे पर अपनी पसंद या विकल्प के लिये मज़बूर करना चाहता है तो समसंख्या का उपयोग किया जाना चाहिये।

संतुलित और असंतुलित पैमान :–संतुलित पैमाने से तात्पर्य पक्षीय और गैर पक्षीय श्रेणियों का समान होना है और असंतुलित पैमाने से तात्पर्य दोनों श्रेणियों में असमानता होना है। असंतुलित पैमाने का वहां उपयोग किया जाता है जब अनुसंधानकर्ता पैमाने के एक छोर तक के पूछे गये प्रश्नों की प्रतिक्रिया की अपेक्षा करता है।

बलपूर्वक या गैर बलपूर्वक पसंद :– बलपूर्वक पसंद पैमाने में उत्तरदाताओं को विकल्प चुनने के लिये मजबूर किया जाता हैं इसमें ऐसा कोई मध्य बिंदु नहीं होता है जिसे तटस्थ की श्रेणी में रखा जा सके तथा जिसका अपना कोई मत न हो। यदि उत्तरदाता बीच की श्रेणी का चयन करता है जहां उनका अपना कोई 'मत' नहीं है या 'तटस्थ' है, इससे प्रतिक्रिया में त्रुटियाँ आयेंगी, अतः बलात पसंद पैमाने का प्रयोग करना अधिक उचित है एवं 'कोई राय नहीं का विकल्प उपलब्ध कराता है।
पैमानों के लिए श्रेणी लेबल :– तीन प्रकार की श्रेणियों के स्तर हैं मौखिक, संख्यात्मक, और लेबल रहित विकल्प संख्यात्मक एवं लेबल रहित पैमानों का उपयोग एक अनुसंधानकर्ता द्वारा तब किया जाता है जब उसे मध्यम श्रेणी के लिये उचित मौखिक विवरण प्राप्त करने में कठिनाई होती है।

21.7 माप में त्रुटियाँ

मापत्रुटि कोविकृत जानकारी के बीच अंतर के रूप में परिभाषित किया गया है तथा एक माप उत्पाद के बारे में अविकृत जानकारी के रूप में परिभाषित किया गया है। बहुत से स्रोतों के द्वारा माप में त्रुटियों की जा सकती हैं, जिसमें प्रतिक्रिया सीमा, मध्यम बिंदु प्रतिक्रिया, गैर प्रासंगिक प्रतिक्रिया (बामगार्टनर और स्टीनकैम्प, 2001, पॉट्स कॉफ, मैककैन्जी, ली और पॉड्स कॉफ 2003) कुछ त्रुटियों, के प्रकार की चर्चा इस प्रकार की गयी है।

समझौता (कराकर) पूर्वाग्रह के कारण त्रुटि :– पूर्वाग्रह युक्त समझौता कथन के साथ सहमत होने की प्रवृत्ति है न कि वस्तु के सामग्री के साथ सहमति । अधिग्रहण प्रतिक्रिया शैली के रूप में भी जाना जाता है।

स्थान पूर्वाग्रह के कारण त्रुटिः– ऐसा तब होता है जब व्यक्ति तरीके में भिन्न होता है जिसमें वे प्रतिक्रिया पैमाने श्रेणियों का उपयोग करते है (उदाहरण के लिये अग्रसर होने या चरम सीमा का उपयेाग करने की प्रवृत्ति)।

उदारता त्रुटिः उत्तरदाता की या तो बहुत अधिक या बहुत कम मूल्यांकन करने की प्रवृतित उदारता त्रुटि कहलाती है ।

तीव्र या कठोर त्रुटि :– यह उदारता त्रुटि की ठीक पिरीत है।

मध्य बिन्दु प्रतिक्रिया त्रुटि :– यह सामग्री की अपेक्षा मध्य पैमाना बिन्दु का उपयोग करने की प्रवृत्ति है (बामगार्टनर और स्टीनकैम्प 2001), और यह अपवंचनता (टालमटोल), असमंजस अनिश्चितता या उदासीनता (मौसिक, 1968, शुमैन और प्रेसर, (1981 के कारण हो सकता है।

चरम (नितान्त) प्रतिक्रिया त्रुटि :– श्यह एक शैली है जो सामग्री के बावजूद अत्यधिक प्रतिक्रियाओं को चुनने के लिये संदर्भित करती है।

21.8 प्रश्नावली निर्माण (रचना)

पिछले खण्डों में हमने मापन प्रणाली एवं पैमाने की मूलभूत अवध्यारणा का अध्ययन किया। इस खंड में प्रश्नावली रचना के रूप में व्यक्त (विज्ञ) अवधारणा को लागू करेंगे। हालांकि प्रश्नावली विकसित करने हेतु कोइ्र निर्धारित नियम नहीं है, बहुत से अनुसंधान कर्ताओं के सामूहिक प्रयास ने संभावनाओं को कम करने हेतु दिशा निर्देश प्रस्तावित किये हैं तथा कप्रश्नावली बनाने में आंकड़े की वैधता की समस्या की गंभीरता को भी कम करने हेतु दिशा निर्देश जारी किये हैं। इस विषय पर बॉयड और वेस्टफाल (1992) का एक उत्कृष्ट संदर्भ बना हुआ है। प्रश्नावली के डिजायन में सहायता के लिये एक सप्त –चरण प्रक्रिया प्रसतावित की गयी है।

चरण 1:– आवश्यक जानकारी निर्धारित करें :–

चूंकि प्रश्नावली आवश्यक सूचना एवं आंकड़े एकत्रित करने के मध्य एक श्रृंखला (कड़ी) है, अनुसंधानकर्ता के पास आवश्यक सूचना की विस्तृत सूची होनी और साथ ही प्रतिवादी समूह की स्पष्ट पहचान भी होनी चाहिये। यह चरण सामान्यता परक शोध एवं परिकल्पना विकास चरणों का परिणाम होता है। पिछले अध्याय में बाजार प्रतिक्रिया के विभिन्न रूपों के किया गया अध्ययन अवधारणाओं को मापने की पहचान करने में विश्लेषक को सहायता प्रदान करेगा।

चरण 2 : उपयोग में आने वाली प्रश्नावली के प्रकार को निर्धारित करें :–

व्यक्तिगत साक्षात्कार, मेल या टेलिफोन के द्वारा आंकड़े एकत्रित किये जा सकते है। इन विकल्पों के बीच चुनाव मुख्य रूप से प्राप्त की जाने वाली जानकारी के प्रकार द्वारा निर्धारित किया जाता है। इस बिन्दु पर आकर प्रश्नावली के प्रकार पर निर्णय लेना आवश्यक हो जाता है, प्रश्नों के शब्द और सामग्री के निर्णय से पहले प्रश्नावली के प्रकार पर निर्णय लेना आवश्यक हो जाता है। प्रश्नावली की लंबाई और प्रश्नों का तारतम्य पर भी इस निर्णय का खासा असर होगा। उदाहरण के लिये संयुक्त विश्लेषण का उपयोग करने का निर्णय एक टेलीफोन साक्षात्कार के उपयोग को रोक देना । अतः इस स्तर पर बाजार का विश्लेषण विशिष्ट हो जाता है कि किस प्रकार आवश्यक प्राथमिक आंकड़ों को एकत्रित किया जा सकेगा और आंकड़ों के साथ किस प्रकार का विश्लेषण किया जायेगा ।

चरण 3 व्यक्तिगत प्रश्नों की सामग्री निर्धारित करें :–

एक बार आवश्यक जानकारी ज्ञात हो गयी और आंकड़े एकत्रित करने का तरीका भी निश्चित कर लिया गया, अनुसंधानकर्ता प्रश्न तैयार करना प्रारंभ कर देता हैं एक बार प्रश्न की सामग्री निर्धारित होने के बाद बहुत सारे बिन्दुओं पर व्यवस्थित रूप से समीक्षा की जानी चाहिये।

क्या यह प्रश्न आवश्यक है ? उन दिलचस्प प्रश्नों को शामिल करने से बचना चाहिये जो आवश्यक जानकारी से सीधे संबंधित नहीं है।

एक के बजाय कई प्रश्न आवश्यक हैं ? कुछ प्रश्नों के दो या उसके अधिक तत्व होते हैं और यदि इन्हें एक प्रश्न में छोड़ दिया गया है तो व्याख्या असंभव हो जाती है। यह विशेषतया ''क्यों'' प्रश्न का मामला है।

क्या उत्तरदाता के पास पूँछी गयी जानकारी उपलब्ध है?

निम्न को निर्धारित करने के लिये उप–प्रश्नों का परीक्षण किया जा सकता हैः–

- क्या यह उत्तरदाता के अनुभव में उठाया गया मुद्दा है ?
- क्या उत्तरदाता जानकारी को याद कर सकता है ?
- क्या उत्तरदाता को जानकारी प्राप्त करने के लिये अत्यधिक काम करना होगा?
- क्या उत्तरदाता जानकारी दे पायेंगे :– यद्यिपि कि वे उत्तर जानते हैं उत्तरदाता कभी कभी प्रश्नों का उत्तर नहीं देते हैं क्योंकि ::–

– वे उत्तर नहीं देना चाहते हैं।

चरण 4 : उपयोग में आने वाले प्रश्नों का प्रकार निर्धारित करें :–

वास्तविक प्रश्नों को तैयार करते समय, अनुसंधान कर्ता के पास तीन मुख्य प्रकार के प्रश्नों के मध्य विकल्प होता है।

एक खुला– समाप्त प्रश्न :– इसमें उत्तरदाताओं को प्रश्नों के अपने उत्तर प्रदान करने की आवश्यकता होती है।

बहुतविकल्प प्रश्न :– इसमें उत्तरदाताओं को ऐसा उततर चुनने की आवश्यकता होती है जो एक सूची में प्रश्न के साथ दिये रहते है। उत्तरदाता से एक या एक से अधिक विकल्प भी चुनने के लिये कहा जा सकता है।

विरोधाभासी प्रश्न :– विरोधभासी कई वैकल्पिक प्रश्नों का एक चरम रूप है, जो उत्तरदाता को केवल दो प्रतिक्रियाओं की अनुमति देता है, जैसे हाँ/ना, सहमत/असहमत या इसी तरह । बहुविकल्प प्रश्न में जब प्रस्तावित उत्तरों को क्रमानुगत किया जाता है, तो उद्देश्य केवल एक श्रेणी की पहचान करना नहीं है (जैसा कि नाममात्र के पैमाने में होता है), किन्तु समझौते के सतर को मापने के बजाय महत्व का सतर या वरीयता क्रम को मापना होता है।

चरण क्रमांक 5 :– प्रश्नों के शब्द सुनिश्चित करें :– इस स्तर पर समसया यह आती है कि प्रश्नों का वाक्य विन्यास इस प्रकार हो कि :–

– उत्तरदाता को आसानी से समझ में आ सके।

– उत्तरदाता को सुराग नहीं देता है कि उसे कैसे उत्तर देना चाहिये।

निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुये प्रश्नों का निर्माण निश्चय ही सुबोध और निष्पक्ष होगा।

– **मुद्दे को स्पष्ट रूप से परिभाषित करें :–** प्रत्येक प्रश्न का छः बिन्दुओं पर परीक्षण किया जाना चाहिये – कौन, कहाँ, कब, क्या, क्यों और कैसे – ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि मुद्दा स्पष्ट है ।

– **सुनिश्चित करें कि प्रश्न वस्तुनिष्ठ होंगे या विषयनिष्ठ :–** एक व्यक्तिपरक प्रश्न व्यक्ति के संदर्भ में सवाल रखता है जबकि वस्तुपरक वाक्यांश यह संदर्भित करते हैं कि लोग सामान्य रूप में क्या सोचते हैं। व्यक्तिगतपरक या आत्मपरक प्रश्नों के परिणाम अधिक विश्वसनीय आते हैं।

साधारण शब्दों का इस्तेमाल करें :– प्रश्नावली में प्रयोग में लाये जाने वाले शब्दों का केवल ही अर्थ होना चाहिये और प्रत्येक व्यक्ति को उसका अर्थ ज्ञात हो ऐसे शब्दों का प्रयोग किया जाना चाहिये। दिन प्रतिदिन प्रयोग में आने वाले शब्दों से होने वाली गलतफहमी के बहुत सारे उदाहरण देखने को मिलते हैं। विशेष तौर पर विपणन के तकनीकी शब्दकोष (ब्रांड छवि, स्थिति इत्यादि) को टाला जाना चाहिये। इन कठिनाईयों पर काबू पाने के लिये प्रश्नावली का पूर्व–परीक्षण बहुत उपयोगी होता है।

– **संदिग्ध प्रश्नों से बचें :–** संदिग्ध प्रश्नों से तात्पर्य अलग–अलग लोगों के लिये अलग – अलग चीजों से है। अक्सर कभी न कभी 'अक्सर, 'बहुत' 'अच्छा', 'स्पष्ट', 'गरीब' ओर बहुत कुछ अनिश्चित शब्दों के अन्तर्गत आते हैं। इनके बहुत सारे अर्थ हो सकते हैं जेसे, एक मासिक पत्रिका का लगातार पढ़ना एक वर्ष में 6 या 7 प्रकाशन भी हो सकते हैं जो एक व्यक्ति द्वारा किया जाता है या वर्ष में दो बार भी पढ़ना हो सकता है।

– सूचक या एक तरफा प्रश्नों से बचे :– सूचक प्रश्न वह होता निश्चित उत्तर की ओर ले जा सकता है। एक तरफ प्रश्न मुद्दे के केवल एक ही पहलू को उजागर करता है। जितना संभव हो सके प्रश्नों को निर्माण बिल्कुल निष्पक्ष होना चाहिये, ब्रांड या कम्पनी के नाम से बचना चाहिये। 'दो किनारे वाले प्रश्नों से बचें :– प्रश्न वह होता है जिसमें दो प्रतिक्रियाओं की आवश्यकता होती है और फिर उत्तरदाताओं में भ्रम उत्पन्न होता है। ऐसे प्रश्नों को दो अलग–अलग भागों में विभाजित करना चाहिये।

– जहाँ संभव हो विभाजित ममतपत्र का उपयोग करें :– एक प्रश्न के लिये 'सही' शब्द नहीं है। जहाँ दो शब्द हैं ओर उनमें से चुनना है किन्तु वरीयता में रखने के लिये कोई आधार नहीं है, प्रश्नावली के आधे में एक शब्द को चुना जा सकता है और बाकी बचे दूसरे आधे भाग के लिये दूसरा शब्द चुना जा सकता है।

चरण –6 : प्रश्नों का अनुक्रम तय करें :– सामान्यतया प्रश्नावली में तीन बड़े भाग होते हैं :–

– मांगी गयी मूलभूत जानकारी ।

– उत्तरदाता की प्रोफाइल प्राप्त करने में उपयोगी सामाजिक जनसांख्यिकीय जानकारी ।

सामान्य नियम उस क्रम में अनुभागों को रखना है, प्रश्नावली का मुख्य भाग को प्रथम स्थान में रखा जाना चाहिये और सामाजिक जनसांख्यिकीय प्रश्नों को अन्त में रखा जाना चाहिये (जब तक कि वे सर्वेक्षण के लिये उत्तरदाताओं को अर्हता प्राप्त करने के लिये फिल्टर प्रश्नों के रूप में कार्य नहीं करते हैं)। प्रश्नों के अनुक्रम की सुनिश्चितता को अधिक भावशील बनाने के लिये निम्नलिखित बिन्दुओं पर भी ध्यान दिया जाना चाहिये :–

– साधारण एवं दिलचस्प शुरूआती प्रश्नों का उपयोग – यदि प्रारंभिक प्रश्न दिलचस्प और साधारण होंगे और उनका उत्तर देना आसान होगा, तो उत्तरदाता के सहयोग में वृद्धि होगी।

– कपी (फनल) दृष्टिकोण का उपयोग करें :– कीप दृष्टिकोण के अन्तर्गत आता है किसी भी विषय पर सामान्य प्रश्नों से प्रारंभ करना एवं धीरे धीरे उसी विषय के छोटे से छोटे प्रश्न तक पहुँच जाना।

– तार्किक क्रम में प्रश्नों का संयोजन करना:– विषय में आकस्मिक परिवर्तन होने से उत्तरदाता में भ्रम की स्थिति उत्पन्न हो सकती है और इस प्रकार असमंजस की स्थिति उत्पन्न हो सकती है।

– अंत में कठिन या संवेदनशील प्रश्न रखें :–

कठिन और संवेदनशील प्रश्नों को अंत में रखा जाना चाहिये :–

जब उत्तरदाता अध्ययन में शामिल हो जाए, तब प्रश्नावली के अंतिम पड़ाव पर संवेदनशील प्रश्न होने चाहिये। एक मेल द्वारा तैयार प्रश्नावली विशिष्ट अनुक्रम समस्याओं को उठाती है क्योंकि इसे स्वयं को बेचना चाहिये। यह भी उतना ही महत्वपूर्ण है कि शुरूआती प्रश्नों से उत्तरदाता की पसंद को आंका जाता है। उसके बाद प्रश्नों को तार्किक अनुक्रम में रखा जाना चाहिये। फिर भी, मेल प्रश्नावली में, व्यक्तिगत साक्षात्कार की भांति प्रश्नों के अनुक्रम का लाभ मिलना संभव नहीं होता है क्योंकि मेल प्रश्नावली में उत्तरदाता स्वयं ही उत्तर देने का क्रम निश्चित करता है। आत्मानुशासित प्रश्नावली के लिये शारीरिक आकर्षक और प्रश्नावली की तैयार भूमिका अत्यन्त आवश्यक है।

चरण –7 : प्रश्नावली का पूर्व परीक्षण:– किसी भी क्षेत्र के लिये तैयार प्रश्नावली के लिये उसक्षेत्र की स्थितियों के अन्तर्गत प्रश्नावली का पूर्व परीक्षण होना अत्यावश्यक होता हैं पूर्व परीक्षण में सुविधानुसार प्रश्नावली को चुनिंदा संभावित उत्तरदाताओं की एक सीमित संख्या मेंप्रशासित करना शामिल है, किन्तु संभावित लक्ष्य की संख्या बहुत अलग नहीं होनी चाहिये। फिर भी पूर्व परीक्षण के लिये सांख्यिकीय सर्वेक्षण आवश्यक नहीं होता हैं पूर्व परीक्षण प्रक्रिया अनुसंधानकर्ता को यह सुनिशितचत करने की आाा देती है कि क्या उत्तरदाताओं को प्रश्नावली समझने में कोई कठिनाई आ रही है और क्या प्रश्नावली में कोई अस्पष्ट या पक्षपातपूर्ण प्रश्न तो नहीं है। पूर्व परीक्षण के परिणामों को सारणीबद्ध करना भी यह सुनिश्चित करने के लिये आवश्यक हो जाता हे कि सभी आवश्यक जानकारी प्राप्त कर कली जायेगी।

21.9 सारांश

इस इकाई में हमने मापन प्रणाली की अवधारण को समझा । यह समझना महत्पूर्ण है कि मापन प्रणाली निर्णय को मापने के लिये चर या मनोवैज्ञानिक संरचनाओं के लिये संख्यात्मक मान निर्दिष्ट कर रहा है। माप पैमाने के विभिन्न स्तर है जैसे सांकेतिक, क्रमानुगत, अनुपात और अन्तरावधि । कुछ मानक माप पैमानों जैसे लाइकर्ट, सेमान्टिक भेदभाव पूर्ण आदि का विस्तार किया गया है।

21.10 शब्दावली

माप : वैाानिक पद्धति से चरों की वधारणा को संख्या निर्दिष्ट करने की प्रक्रिया।

रचना करना :– मापने के लिये एक परिचालित परिभाषित अवधारणा।

चर वस्तुएं (प्रभावित करने वलाी वस्तुएं) : कोई भी रचना जो अनुसंधान डिजायन में परिवर्तित हो जाए।

पैमाना : यह वह प्रक्रिया है जिसमें स्थापित मापित वस्तुओं के गुणों पर निरंतरता बरकरार रखी जाती है।

वैधता :– अच्छे पैमाने से माप की सुनिश्चितता ''जो मापना चाहा उसका मापन।''

संवेदनशीलता : यह एक अवधारणा में विलेख की क्षमता को सटीकरूप से मापने की क्षमता को संदर्भित करता है।

21.11 बोध प्रश्न

बहुविकल्प प्रश्न :–

1 निम्न में से कौनसी अवधारणा व्यवसाय अनुसंधान में मापने योग्य है ?
(अ) संतुष्टि स्तर (ब) प्रवृत्ति (स) दोनों (द) इनमें से कोई नहीं।

2 मापने योग्य पैमाने की विशेषताओं की व्याख्या करने में निम्न में से किसका उपयोग किया जाता है ''ताकि मापने के लिये क्या लगता है'' चता चले ?
(अ) विश्वसनीयता (ब) वैधता (स) संवेदनशीलता (द) इनमें से कोई नहीं।

3 पैमाने के कौन से अनुक्रमों बढ़ती हुई जटिलता का प्रतिनिधित्व करते है ?
(अ) क्रमानुगत, सांकेतिक, अन्तरावधि, अनुपात
(ब) सांकेतिक, क्रमानुमत, अन्तरावधि, अनुपात
(स) अन्तरावधि , सांकेतिक, क्रमानुगत, अनुपात
(द) अनुपात, क्रमानुगत, अन्तरावधि , सांकेतिक

4 किस पैमाने में वस्तुओं को संख्या बताने के लिये उन वस्तुओं के कुछ विशेषताएं होती है ?
(अ) अनुपात (ब) क्रमानुगत (स) अन्तरावधि (4) सांकेतिक

5 समस्त मनोवैज्ञानिक गुण जैसे प्रवृत्ति, विश्वास, संतुष्टि का स्तर है ?
(अ) एकध्रुवीय (ब) द्विध्रुवीय (स) तटस्य (द) इनमें से कोई नहीं।

6 किस मामले में पारगमन का सिद्धान्त लागू होगा ,
(अ) सांकेतिक (ब)क्रमानुगत (स) अनुपात (द)इनमें से कोई नहीं

21.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

(अ) –(1) ए, (2) बी, (3) ए, (4) बी (5) बी (6) बी

21.13 स्वपरख प्रश्न

1 व्यापार अनुसंधान में माप का क्या अर्थ होता है ?
2 माप में पैमाने से क्या तात्पर्य है ? पैमाने के कितने स्तर होते हैं ?
3 किसी व्यक्ति को माप में किस प्रकार की कठिनाई का सामना करना होता है?
4 विश्वसनीयता से क्या तात्पर्य है? चर्चा कीजिए।
5 वैधता से आप क्या समझते है ? चर्चा कीजिए।
6 एक अच्छे मापन पैमाने के क्या मानदंड होते हैं?
7 प्रश्नावली में शुरूआती प्रश्न एवं अंतिम प्रश्नों से आप क्या समझते हैं ?
8 लाइकर्ट पैमाने की विशेषताओं की उदाहरण सहित चर्चा कीजिए। यह अर्थपूर्ण भिन्नता पैमाने से किस प्रकार अलग है?
9 माप पैमानों के विभिन्न प्रकारों को दाहरण सहित समणइये ? प्रत्येक पैमाने से जुड़े अनुज्ञप्त सांख्यिकीय संचालन कौन से हैं?

10 एक शॉपिंग माल के प्रति ग्राहकों को निष्ठा को मापने के लिये लाइकर्ट पैमाने, अर्थपूर्ण भिन्न पैमाना और स्टेपल पैमाने का वर्णन करो।

11 एक अच्छी प्रश्नावली तैयार करने के लिये कौन–कौन से कदम उठाये जाने चाहिये।

12 मापन प्रणाली में क्या त्रुटियाँ है ? इन त्रुटियों को कैसे कम किया जा सकता है ?

13 **निम्नलिखित की वैधता एवं विश्वसनीयता पर टिप्पणी कीजिए –**

(अ) उपभोक्ता प्रतिवेदन की सदस्यता लेने के इरादे की एक उत्तरदाता की रिपोर्ट अत्यधिक विश्वसनीय होती है । शोधकर्ता का यह मानना होता है कि यह आर्थिक प्रणाली एवं बड़े व्यापार से अलगाव के साथ असंतोष का एक वैधमाप है।

(ब) एक सामान्य रूचि की पत्रिका ने दावा किया कि टेलीविजन कार्यक्रमों की अपेक्षा यह विज्ञापन का एक सशक्त माध्यम है। शोध में भी यह पाया गया कि शीतलपेय और अन्य परीक्षण उत्पादो के विज्ञापनों को याद रखने के लिये पत्रिका को, 30 सैकंड के विज्ञापनों से अधिक अंक प्राप्त हुये थे।

(स) पत्रिका पढ़ने की निरंतर आवृत्ति की उत्तरदाता की रिपोर्ट यह दर्शाती है कि वह नियमित रूप से ग्रह व्यवस्था पत्रिका पढ़ती है ।

21.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. क्रेसवेल, जान, डब्ल्यू (2008) अनुसंधान अभिकल्पना, गुणात्मक, मात्रात्मक एवं मिश्रित विधियॉ पहुॅच मार्ग। न्यूवरी पार्क, सी0ए0 सेज प्रकाषन
2. मर्कजाक, जी0आर0 डेमटेयों, डी0एवं फेसटिनजर डी0 (2005), अनुसंधान अभिकल्पना एवं प्रणाली के मूलभूत, न्यूर्याक षहर, एन0वाय0 बिले।
3. इथराइड, डान ई0, (2004) । व्यावहारिक अर्थषस्त्र में अनुसंधान प्रणाली, दरियागंज, नई दिल्ली , बिले ब्लैक बैल ।
4. वर्घ , डी0 एवं केचन, डी0 (2009) रणनीति एवं प्रबन्ध में अनुसंधान प्रणाली, बिंगले, रू0 के0 एममारैड प्रकाषन समूह
5. सी0आर0कोठारी, अनुसंधान प्रणाली : न्यू ऐज, नई दिल्ली ।
6. एन0के0 मैल्होत्रा , विपणन अनुसंधान : पियरसन्स , नई दिल्ली।

इकाई 22 अनुसंधान, रिपोर्ट लेखन ओर अनुसंधान में कम्प्यूटर आवेदन संरचना

इकाई की रूपरेखा

उद्‌देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- अनुसंधान रिपोर्ट की तैयारी और प्रस्तुति की प्रकिया की व्याख्या कर सकें।
- रिपोर्ट का स्वरूप, रिपोर्ट लिखना, ग्राफ और तालिकाओं सहित रिपोर्ट तैयार करने की बुनियादी आवश्यकताओं को समझ सकें।
- रिपोर्ट तैयार और प्रस्तुति में इंटरनेट और कंप्यूटर के उपयोग को समझ सकें।

22.1 प्रस्तावना

शोध के परिणाम प्रभावी रूप से और इच्छित प्रयोक्ताओं के लिए अर्थपूर्ण रूप से सूचित होने चाहिए। यह निर्णय लेने में मदद करता है । शोध रिपोर्ट एक व्यवस्थित, सुव्यवस्थित दस्तावेज है जो व्यवस्थित और तार्किक लेखन में पूरी गतिविधियों, शोध डिजाइन, प्रकियाओं, व्याख्याओं और शोध कार्यो के निष्कर्षो को प्रस्तुत करता है। इसे लिखित रूप में संकलित करने के बाद कंप्यूटर के जरिए ऑडियों विजुअल टूल्स की मदद से प्रस्तुत किया जा सकता है। यह अनुसंधान कार्य

के दौरान अनुसरण किए गए घटनाओं के अनुक्रम को रिकॉर्डिंग और व्याख्या करना, निष्कर्ष और संदर्भ के साथ समाप्त होता है। उपयोगकर्ताओं को एक शोध अध्ययन में निष्कर्षो को प्रस्तुत करना एक औपचारिक लिखित रिपोर्ट के साथ–साथ मौखिक प्रस्तुति भी शामिल है। रिपोर्ट और इसकी प्रस्तुति अत्यंत महत्वपूर्ण है एक अनुसंधान रिपोर्ट तैयार करने को लेखन के अलावा अन्य गतिविधियां शामिल है, वास्तव में, लेखन तैयारी प्रक्रिया का अंतिम चरण है। लिखने से पहले, अनुसंधान परियोजना के परिणामों को पूरी तरह से समझा जाना चाहिए और सोचा जाना चाहिए कि रिपोर्ट क्या कहें। इस प्रकार, एक शोध रिपोर्ट तैयार करने में तीन चरण शामिल हैं, समझ आयोजन और लेखन। इस इकाई के आगे के खंड अनुसंधान रिपोर्ट की तैयारी में विभिन्न पहलुओं के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे। इस इकाई में हम सीखेंगे कि एक शोध रिपोर्ट कैसे लिखनी है। विभिन्न प्रकार के अभ्यास सीखने की अपनी प्रगति की जांच करने के लिए प्रश्न शामिल हैं।

22.2 आंकड़ों का विश्लेषण एवं व्याख्या

एक शोध रिपोर्ट लिखने से पहले आकड़ों की व्याख्या करना आवश्यक है। व्याख्या एक विश्लेषणत्मक और प्रायोगिक अध्ययन के बाद एकत्र किए गए तथ्यों से निष्कर्षो को आकर्षित करने के कार्य को संदर्भित करना है। आकड़ों का विश्लेषण और व्याख्या एकत्रित जानकारी के लिए अर्थ प्रदान करने और निष्कर्षो, महत्व और निष्कर्षो के निहितार्थ का निर्धारण करने की प्रकिया है। एक प्रबंधकीय परिप्रेक्ष्य से निर्णय लेने के लिए डेटा को रिकॉर्ड की गई जानकारी के रूप में देखा जा सकता है। पूर्ण प्रश्नावली या अन्य माप उपकरणों को संपादित करना, कोडित करना, कंप्यूटर द्वारा प्रसंस्करण के लिए डेटा सेट में दर्ज करना होगा, और उनके पूर्ण अर्थों और प्रभावों से पहले सावधानी से विश्लेषण किया जाना आवश्यक है।

शोध के प्रकारों के आधार पर आकड़ों का विश्लेषण मात्रात्मक और गुणात्मक हो सकता है। मात्रात्मक समंक विश्लेषण और गुणात्मक समंक विश्लेषण के बीच एक महत्वपूर्ण अंतर है। मात्रात्मक अनुसंधान में प्रतिभागियों से प्राप्त जानकारी संख्यात्मक रूप में व्यक्त की जाती है। जिन अध्ययनों में हम प्रतिक्रिया समय याद करते हैं, या आक्रामक कृत्यों की संख्याओं की संख्या रिकॉर्ड करते हैं, वे सभी मात्रात्मक अनुसंधान के उदाहरण हैं। गुणात्मक अनुसंधान में, दूसरी ओर, प्रतिभागियों से प्राप्त जानकारी संख्यात्मक रूप में व्यक्त नहीं की जाती है। प्रतिभागियों के घोषित अनुभवों के अनुसार वे अपने आप को दूसरे लोगों को और उनके पर्यावरण के साथ जुड़ा हुआ कहा जाता है। गुणात्मक शोध करने वाले लोग कभी–कभी अपने प्रतिभागियों से सीधे उद्धरण का उपयोग करते हैं, और यह तर्क देते हैं कि ऐसे कोटेशन अक्सर बहुत खुलासा करते हैं।

गुणात्मक और मात्रात्मक समंक विश्लेषण की कुछ विशेषताओं पर यहां चर्चा की गई है।

मात्रात्मक समंक का विश्लेषण गणितीय शब्दों में दर्शाया गया है। मात्रात्मक समंक विश्लेषण के लिए सांख्यिकीय विश्लेषण का सबसे आम प्रकार के रूप में अनुसरण किया जाता है।

- **माध्य :** औसत स्कोर प्रतिक्रियाओं के एक सेट के लिए एक संख्यात्मक औसत का प्रतिनिधित्व करता है।
- **मानक विचलन :** मानक विचलन माध्य के आस–पास प्रतिक्रियाओं का विवरण दर्शाता है। यह प्रतिक्रियाओं के बीच निरंतरता की डिग्री को इंगित करता है। मानक विचलन माध्य के साथ संयोजन में, एक बेहतर समझ प्रदान करता है उदाहरण के लिए, अगर इसका आशय 3.3 है तो इसका मानक विचलन (एसडी) 0.4 है, तो दो – तिहाई प्रतिक्रियाएं 2.9(3.3–0.4) और 3.7(3.3+0.4) के बीच हैं।
- **आवृत्ति वितरण :** आवृत्ति वितरण प्रत्येक प्रतिक्रिया की आवृत्ति दर्शाता है। उदाहरण के लिए, अगर उत्तरदाता एक सहमति / असहमत पैमाने का उपयोग करते हुए एक प्रश्न का उत्तर देते हैं, तो उत्तरदाताओं का प्रतिशत जो पैमाने पर प्रत्येक प्रतिक्रिया का चयन करेगा, संकेत दिया जाएगा। आवृत्ति वितरण माध्य से परे अतिरिक्त जानकारी प्रदान करता है, क्योंकि यह डेटा के बीच सर्वसम्मति के स्तर की जांच करने की अनुमति देता है।

इनके अलावा हम मध्य, मोड ज्यामितीय माध्य, कर्कुटियों आदि की भी गणना कर सकते हैं। सांख्यिकीय विश्लेषण के उच्च स्तर (उदाहरण, टी–टेस्ट, एनोवा, मोनोवा, दोहराए गए उपाय प्रतिगमन कारक विश्लेषण, प्रतिगमन, एएनओवीए) भी डेटा पर आयोजित किया जा सकता है जो अध्ययन के शोध डिजाइन और उद्देश्यों पर निर्भर करता है। इन पहलुओं पर चर्चा आपके पाठ्यक्रम के दायरे से परे हैं।

गुणात्मक आंकड़ों का विश्लेषण : गुणात्मक आंकड़ों का विश्लेषण आंकड़ों को सामान्य विषयों या श्रेणियों में व्यवस्थित करके किया जाता है। वर्णात्मक आंकड़ों की व्याख्या करना अक्सर अधिक कठिन होता है क्योंकि संख्यात्मक आंकड़ों में प्राप्त अंतर्निहित संरचना की कमी **है।** प्रारंभ में, वर्णात्मक आंकड़े याद्वच्छिक, असंबद्ध बयान का एक संग्रह प्रतीत होता है। मूल्यांकन उद्देश्य और प्रश्न डेटा संगठन के फोकस को प्रत्यक्ष करने में मदद कर सकते हैं।

गुणात्मक विश्लेषण का मुख्य सिद्धांत यह है कि कारणपरख रिश्तों और सैद्धांतिक बयान स्पष्ट रूप से सामने आते हैं ओर अध्ययन की घटनाओं में आधारित हैं।

अभ्यास : तीन या चार लोगों के छोटे समूहों में, विचार करें कि आप बाल श्रोताओं के लिए डिजाइन किए गए टीवी कार्टून, कार्यक्रमों को देखते हुए बच्चों द्वारा देखी जाने वाली आक्रामक कृत्यों की संख्या का विश्लेषण करने के लिए एक अध्ययन का आयोजन कैसे कर सकते हैं। मात्रात्मक तरीके सबसे उपयुक्त हो सकते हैं ? आप यह कैसे सुनिश्चित करेंगे कि आपके परिणाम विश्वसनीय थे?

विश्लेषण को वर्गीकरण के रूप में देखा जा सकता है। घटक के हिस्सों में एकत्रीकरण, और आंकड़ों के हेर फेर को उत्तर प्राप्त करने के लिए अनुसंधान परियोजना के आधार पर प्रश्नों के विशेष विश्लेषण का पहलू व्याख्या है । विश्लेषण

के परिणामों को लेकर, शोध के लिए प्रासंगिक संदर्भ निकालना व्याख्या की प्रक्रिया में शामिल होता है।

संबंधों का अध्ययन करना, और प्रबंधकीय रूप उपयोगी निष्कर्ष निकालना ये संबंध प्राप्त आंकड़ों के विश्लेषण के अंत का प्रतितिधित्व करता है। रिपोर्ट तैयार करने के अलावा अनुसंधन प्रक्रिया, के अन्य पहलू से पहले पूर्ण किया जाता है ताकि उचित विश्लेषण किया जा सके और अनुसंधान के सवालों का उत्तर दिया जा सकता है।

22.3 आंकड़ों के विश्लेषण की प्रकिया

नमूना डेटा से विश्लेषण करने तक की समग्र प्रक्रिया को शोधन की प्रक्रिया के रूप में देखा जा सकता है जिसमें कई अलग और अनुक्रमिक कदम शामिल हैं जिन्हें तीन व्यापक चरणों में पहचाना जा सकता है:

1. **सारणीकरण :** इसमें वांछित सूचना के लिए उपयुक्त श्रणियों की पहचान करना, उनमें आंकड़ों को कमबद्ध करना, प्रतिकियाओं की प्रारंभिक गणना करना, और वर्णन की अर्थव्यवस्था प्रदान करने के लिए उपाय सारांशों का प्रयोग करना और समझने की सुविधा है। सारणीकरण प्रक्रिया में, उचित श्रेणियों में वांछित जानकारी को सांकेतिक करने, प्रतिकियाओं की प्रारंभिक गणनाएं, और आंकड़ों के वर्णनात्मक सारांश तैयार करने के लिए परिभाषित की जाती है।
2. **अवधारणाओं को तैयार करना** : इसमें प्रासंगिक चर, उनके मापदंड़ों उनके मतभेदों और उनके संबंधों से संबंधित आंकड़ों से प्राप्त उत्प्रेरणों का उपयोग करने हेतु धारणा तैयार करना शामिल है। इस परिकल्पना को सांख्यिकीय रूप से परीक्षण करने के लिए निष्कर्ष निकालना है जो सांख्यियकीय रूप से महत्वपूर्ण हैं।
3. **निष्कर्ष निकालना** : इसमें महत्वपूर्ण चर, उनके मापदंड़ों उनके मतभेदों और उनके बीच के रिश्तों के बारे में निष्कर्ष निकालना शामिल है।

22.4 आंकड़ों के वर्गीकरण और सारणीयन

आंकड़ों का विश्लेषण और व्याख्या में सबसे बुनियादी कदम वर्गीकरण और सारणीकरण है। वर्गीकरण विभिन्न वर्गो में आंकड़ों को व्यवस्थित करने का एक तरीका है, जो कि एक निश्चित रूप में एकत्रित आंकड़ों के लिए एक सुसंगत संरचना पद्रान करता है, जो उनका उपयोग सबसे व्यवस्थित और प्रभावी तरीके से करता है। यह विभिन्न वर्गों के अंतर्गत सांख्यिकीय आंकड़ों को समूहित करने की प्रक्रिया है। गुणों की एकरूपता वर्गीकरण के लिए आधार मानदंड है, और आंकड़ों का समूह समानता के अनुसार किया जाता है। सार्थक प्रस्तुति ओर विश्लेषण के लिए एकत्र किए गए आंकड़ों में विविधता होने पर वर्गीकरण आवश्यक हो जाता है। हालांकि आंकड़ों के सजातीय प्रस्तुति के संबंध में, वर्गीकरण आनावश्यक हो सकता है।

आंकड़ों के वर्गीकरण का उद्देश्य :

सामान्य विशेषताओं के समावर्ती समूह के तहत समूह विषम डेटा के लिए, विभिन्न समूहों की सुविधा समानता के आधार पर निश्चित करता है ं।

- प्रभावी तुलना की सुविधा के लिए, जटिल, तर्कसंगत, सजातीय और सुगम रूप में जटिल,
- बेतरतीब और विखरे हुए आंकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए,
- जटिल डेटा की स्पष्टता और सादगी बनाए रखने के लिए,
- स्वतंत्र और निर्भर चर की पहचान करने ओर उनके संबंध स्थापित करने के लिए,
- प्रभावी और तार्किक विश्लेषण के लिए,
- विविध आंकड़ों के लिए एक एकत्रीय प्रकृति स्थापित करना;
- तार्किक और प्रभावी मात्रा का ठहराव बनाने के लिए एक अच्छा वर्गीकरण में स्पष्टता, एकरूपता, पैमाने की समानता, उद्देश्यपूर्णता, सटीकता, स्थिरता, लचीलेपन और असंबद्धता होना चाहिए।

वर्गीकरण दो प्रकार के होते हैं, जैसे मात्रात्मक वर्गीकरण, जो चर या मात्रा के आधार पर है; और गुणात्मक वर्गीकरण,; जो विशेषताओं के अनुसार है। पूर्व चर को समूहित करने का तरीका है, एकजुट समूहों में चर को मापते हुए कहते हैं, जबकि बाद के समूह में विशेषताओं या गुणों के आधार पर आंकड़ों का वर्गीकरण कई वर्गीकरण या द्वितीयक वर्गीकरण का हो सकता है। पूर्व कुछ गुणवत्ता या गुणों के आधार पर कई (दो से अधिक) समूहों को बनाने का तरीका है, जबकि बाद में एक निश्चित गुणवत्ता की मौजूदगी या अनुपस्थिति के आधार पर दो समूहों में वर्गीकरण होता है। विभिन्न आय (कक्षा अंतराल) समूहों के तहत एक कारखाने के श्रमिकों को समूहित करना कई वर्गीकरण के अंतर्गत आता है; और कुशल श्रमिकों और अकुशल श्रमिकों में दो समूह बनाने में द्वितीयक वर्गीकरण है। इस प्रकार के वर्गीकरण के सारणीबद्ध रूप को सांख्यिकीय श्रंखला के रूप में जाना जाता है। उततरदाताओं की सभी विशेषताओं को सूचीबद्ध करें जिन पर आपकों लगता है कि संतुष्टि का स्तर निर्भर करता है। मात्रात्मक, गुणात्मक, बहुविध और द्वितीयक में प्रतिवादी के प्रत्येक विशेषता को वर्गीकृत करें। वर्गीकृत आंकड़ों को तालिकाबद्ध रूपों में व्यवस्थित किया जा सकता है जिसे कॉलम और पंक्तियों में समायोजित किया जाता है। निरूपण डेटा को व्यवस्थित करने का सबसे आसान तरीका है, इसे सबसे आसान तरीके से समझ सकें। यह आसानी से समझने योग्य रूप में संख्यात्मक आंकड़ों के पेश करने का सबसे व्यवस्थित तरीका है यह डेटा की एक स्पष्ट और सरल प्रस्तुति की सुविधा देता है। सारणीकरण की प्रक्रिया में निम्नलिखित कदम शामिल है;

- वर्गीकरणः एकत्रित की गई जानकारी को कोडित करने के लिए उपयुक्त श्रेणियां निर्धारित करें।
- सांकेतिक : प्रतिवादी के उत्तरों में कोड असाइन करे।
- आंकड़ों की फाइल बनाएंः कंप्यूटर में डेटा दर्ज करें और डेटा फाइल बनाएं।
- त्रुटि जांचनाः कोडिंग या डेटा एंट्री में त्रुटियों की पहचान करने के लिए सरल टैबुल्य विश्लेषण का प्रदर्शन करके त्रुटियों के लिए डेटा फाइल की जांच

करें। एक बार त्रुटियों की पहचान की जाती है, तो श्रेणियों को तोड़ने के लिए आंकड़ों को पुनः मिलाया जा सकता है ।

- नया चर जेनरेट करें: समंक चर द्वारा नए चरों की गणना की जा सकती है जो कि गुणा, योग या अन्यथा चर को बदलते हैं।
- भार डेटा उपवर्ग: भार अक्सर नमूना उपसमूहों के प्रतिनिधित्व को समायोजित करने के लिए उपयोग किया जाता है ताकि वे जनसंख्या में पाए गए अनुपात से मेल खाए ।
- सारणी: विश्लेषण में शामिल प्रत्येक चर की प्रतिक्रिया का सारांश।

22.5 आंकड़ों के विश्लेषण एवं व्याख्या के लिए मूल सांख्यिकी

सांख्यिकी आंकडों के विश्लेषण और व्याख्या के लिए मूलभूत उपकरण प्रदान करते हैं। आंकड़े सांख्यिकीय उपकरणों की मदद के बिना विश्लेषण भी हो सकते हैं, लेकिन निष्कर्षो का सामान्यीकरण विश्वसनीय नहीं हो सकता है । सांख्यिकीय उपायों के माध्यम से आंकडों का विश्लेषण अनुसंधान प्रश्नों के उत्तर प्रदान करता है। उचित प्ररिप्रेक्ष्य से विश्लेषण किए गए आंकड़ों की व्याख्या करना, अनुमान के महत्व और निहितार्थ के निर्धारण में मदद करता है। इस खंड में हम आंकड़ों की विश्लेषण और व्याख्या के लिए कुछ महत्वपूर्ण सांख्यिकीय उपायों की चर्चा करेंगे।

केन्द्रीय प्रवृत्तियों के उपाय : केंद्रीय प्रवृत्ति के उपाय बताते हैं कि एक केंद्रीय बिंदु के आसपास डेटा क्लस्टर कैसे मिल जाता है। केंद्रीय प्रवृत्ति के तीन मुख्य उपाय हैं: माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठंक ।

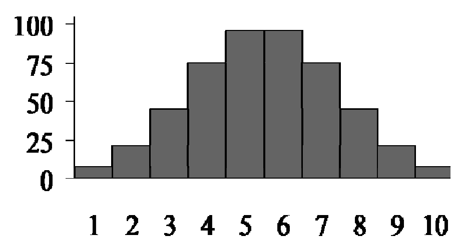
- **माध्य** : प्रत्येक समूह या स्थिति में माध्य किसी शर्त में सभी स्कोर जोड़कर और तब उस स्थिति में प्रतिभागियों की संख्या से विभाजित करके गणना की जाती है। मान लीजिए कि कोई शोर नहीं की स्थिति में में नौ प्रतिभागियो ंके स्कोर निम्नानुसार हैं : 2, 2, 4, 5, 7 ,3 4,3 और 6. इसका अर्थ कुल, जो 36 में विभाजित है, प्रतिभागियों की संख्या , जो 9 है। इस प्रकार, इसका अर्थ 4 है। माध्य का मुख्य लाभ यह है कि यह सभी स्कोर को ध्यान में रखता है। यह आम तोर पर केंद्रीय प्रवृत्ति का एक संवेदनशील उपाय है, खासकर यदि स्कोर सामान्य वितरण के समान होता है, जो एक घंटी के आकार का वितरण होता है जिसमें अधिकांश अंकों का माध्य समुच्चय के करीब होता है हालांकि, इसका अर्थ बहुत भ्रामक हो सकता है आगर वितरण सामान्य से स्पष्ट रूप से अलग है और एक या दो दिशा में एक या दो चरम स्कोर हैं। मान लीजिए कि आठ लोग गो–कार्ट में एक ट्रैक का एक चक्कर पूरा करते हैं। उनमें से सात के लिए, सेकंड (सेकंड्स) में दिए गए समय निम्नानुसार हैं: 25, 28, 29, 29, 34, 36, और 42, आठवें व्यक्ति का गार्ट–कार्ट टूट जाता है, और इसलिए ड्राइवर को इसे धावन पथ के चारों ओर धकेल दिया जाता है । इस व्यक्ति को चक्कर पूरा करने में 288 सेंकड लगते हैं। इससे 64 सेकंड का एक समग्र माध्य पैदा होता है यह स्पष्ट रूप से गुमराह कर रहा है, क्योंकि

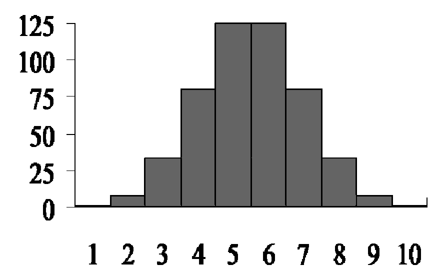
एक–दूसरे ने एक चक्कर को पूरा करने के लिए 64 सेकंड के करीब ले लिया और यह केंद्रीय प्रवृत्ति का प्रतिनिधित्व नहीं करता।

- **माध्यिका** : प्रत्येक परिस्थिति में प्रदर्शन के सामान्य स्तर का वर्णन करने का एक अन्य तरीका माध्यिका के रूप में जाना जाता है। यदि स्कोर की एक अजीब संख्या है, तो औसत मध्य अंक होता है, उसके बराबर अंक उससे उच्च और उससे कम होते हैं।
  माध्यिका का मुख्य लाभ यह है कि यह कुछ चरम अंकों से प्रभावित नहीं है, क्योंकि यह केवल वितरण के मध्य में अंक पर केंद्रित है। इसका फायदा यह है कि यह काम करने के लिए माध्य से आसान हो जाता है। मध्य की मुख्य सीमा यह है कि यह अधिकांश अंकों की उपेक्षा करता है, ओर इसलिए अक्सर माध्य से कम संवेदनशील होता है। इसके अलावा, यह हमेशा प्राप्त अंकों के प्रतिनिधि नहीं है, खासकर यदि केवल कुछ अंक होते हैं।
- **भूयिष्ठंक** : केंद्रीय प्रवृत्ति का अंतिम उपाय मोड है यह अक्सर होने वाा स्कोर या जहां परीक्षण में आवृत्ति की अधिकतम एकाग्रता है। मोड का मुख्य लाभ यह है कि यह एक दो चरम अंकों से अप्रभावित है और यह काम करने के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति का सबसे आसान उपाय हैं

अपकिरण के माप : अपकिरण के मापों से तात्पर्य यह है कि आंकड़ों का एक समूह कैसे फैला है। फैलाव के उपाय वर्णनात्मक आंकड़े बताते हैं कि स्कोर का एक समूह एक दूसरे के लिए कितना समान है। जितना अधिक स्कोर एक दूसरे के समान हैं उतना कम फैलाव का उपाय होगा। यदि स्कोर एक दूसरे के समान नहीं हैं या कम समान हैं तो फैलाव के बारे में जानकारी कई तरीकों से प्रस्तुत की जा सकती है। यदि यह ग्राफ या चार्ट में प्रस्तुत किया गया है, तो यह सामान्य प्रवृत्ति और फैलाव के बारे में जानकारी पेश करने की तुलना में लोगों को समझने में आसान हो सकता है।

Practice Exercise 3: In which of the following case the dispersion is more and why?





फैलाव आम तौर पर विचरण या मानक की मदद से मापा जाता है।

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X-\mu)^2}{N}$$

- **विचलन** : श्रेणी को सबसे बड़ा स्कोर के बीच अंतर के रूप में परिभाषित किया गया है और डेटा के सेट में सबसे छोटा स्कोर, एक्स्ट्रा लार्ज–एक्सएस अभ्यास अभ्यास : डेटा की सीमा 4 8 1 6 6 2 9 3 हैं 6 से 9 ?

उत्तर : सबसे बड़ा स्कोर (एक्सलएल) 9 है; सबसे छोटा स्कोर (एक्सएस) 1 है;

श्रेणी $X_L - X_S = 9 - 1 = 8$ है

भिन्नता को वर्ग विचलन के औसत के रूप में परिभाषित किया गया है यह ए वी 2 6 (एक्स पी) 2 के रूप में प्रतिनिधित्व किया गया एन

मानक विचलन = √विचरण

भिन्नता = मानक विचलन ^{2}

22.6 अनुसंधान रिपोर्ट तैयार करना

उद्देश्य ओर रिपोर्टो के प्रकारों के आधार पर, एक शोध रिपोर्ट में पहचाने जाने योग्य और विशिष्ट घटक हैं। पूरी रिपोर्ट को अध्याय शीर्षकों के साथ अलग–अलग अध्यायों में संकलित किया जाता है। प्रत्येक अध्याय को उपशीर्षक या अनुभागों में विभाजित किया जाना चाहिए। एक अनुसंधान रिपोर्ट में शीर्षकों और अध्याय के उपशीर्षकों के विस्तार का स्तर तकनीकी या व्यावसायिक रिपोर्ट की आवश्यकताओं पर निर्भर करता है।

शोध रिपोर्ट में निम्नलिखित विस्तृत अनुभाग हैं

1. **प्रारंभिक अनुभाग** : इसमें शीर्षक पृष्ठ, ट्रांसमिट के पत्र, प्राधिकरण का पत्र, कार्यकारी सांराश, सामग्री की तालिका, तालिका की सूची, आंकड़े और चार्ट, घोषणा और स्वीकृति की सूची शामिल है।
2. **परिचयात्मक अनुभाग**: इसमें समस्या का बयान, शोध उद्देश्यों, परिचय और गुंजाइश, शोध कार्य का योगदान आदि शामिल हैं।
3. **पृष्ठभूमि अनुभाग**: इसमें साहित्य, सैद्धांतिक ढांचा, अनुभव सर्वेक्षण आदि से अन्वेषण के प्रारंभिक परिणामों की समीक्षा शामिल है।
4. **कियाविधि अनुभाग** : इसमें अनुसंधान सेटिंग और डिजाइन, नमूनाकरण डिजाइन, आंकडों के संग्रह पद्धतियां, उपकरण और तकनीकों का उपयोग, आंकडों के विश्लेषण करने के लिए किया जाता है।
5. **निष्कर्ष** : इसमें व्याख्या और निष्कर्षो का संकलन होता है डेटा के विश्लेषण के बाद यह बताता है ।
6. **निष्कर्ष** : यह विश्लेषण के बाद के निष्कर्षो का प्रतिनिधित्व करता है ओर जांच – परिणाम। निष्कर्ष सारणी रूप में या अंदर प्रस्तुत किया जा सकता है सारांश बयान ।
7. **ग्रंथ सूची** : इस खंड में आंकडों के स्त्रोत और साहित्य की समीक्षा उचित उद्धरण, शैली संकलित होती है।
8. **परिशिष्ट** : इस खंड में सहायक दस्तावेज, सांख्यिकीय परीक्षण, जटिल तालिकाओं, रूपों ओर प्रश्नावली संलगन हैं।

हालांकि, किसी रिपोर्ट को किस तरह दिखना चाहिए, इसके विभिन्न अर्थ हैं। अनुसंधान का उद्देश्य जो कुछ भी हो, एक शोध रिपोर्ट हमेशा सटीक, केंद्रित ओर अच्छी तरह से संरचित हानी चाहिए। विशेष रूप से एक शोध रिपोर्ट में अनुवर्ती का संकलन शामिल होता है।

- **विषय या अनुसंधान** प्रश्न का परिचय और शोध कार्य में अध्ययन के उद्देश्यों और स्कोप पर विवरण अनुसंधान के संचालन के लिए अंतर्दृष्टि प्राप्त करने के लिए साहित्य की समीक्षा और सैद्धांतिक रूपरेखा अनुसंधान को पूरा करने के लिए अनुसंधान पद्धति का विवरण अनुसंधान में उपयोग किए जाने वाले नमूने और आंकडों का संग्रह, विधियो ंका तार्किक विवरण और आंकडों का विश्लेषण।
- आंकडों का विश्लेषण के बाद व्याख्या, निष्कर्ष
- निष्कर्ष अनुसंधान कार्य के दौरान शोधकर्ता द्वारा सामना की जाने वाली सीमाएं,
- शोध रिपोर्ट के इंडेंट
- उपयोगकर्ताओं को सुझाव और अनुशंसाएं
- संदर्भ और ग्रंथ सूची अनुबंध,
- एक शोध रिपोर्ट तैयार करते समय, अनुसंधान में अनुवर्ती कार्यवाई के लिए विचार किया जाना चाहिए।
- शोध कार्य का उद्देश्य स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए और रिपोर्ट में विवरण देना चाहिए।
- उद्देश्यों और गुंजाइश को विस्तृत नोट किया जाना चाहिए, अनुसंधान रिपोर्ट के उपयोगकर्ताओं की अपेक्षाओं को ध्यान में रखना चाहिए।
- रिपोर्ट अच्छी तरह से संगठित होना चाहिए।
- रिपोर्ट को ठीक से स्वरूपित किया जाना चाहिए।

शोधकर्ता एक शोध रिपोर्ट तैयार करने के तरीके में भिन्न होते हैं। शोधकर्ता की व्यक्तित्व, पृष्ठभूमि, विशेषज्ञता और जिम्मेदारी, निर्णयन प्रक्रिया प्रत्येक रिपोर्ट को एक अद्वितीय चरित्र देने के लिए इंटरैक्ट करते हैं। फिर भी, रिपोर्टिंग और डिजाइनिंग टेबल ओर ग्राफ (मल्होत्रा, 1999) के स्वरूपण और लेखन के लिए दिशा निर्देश हैं। निम्नलिखित एक दिशानिर्देश के रूप में किया गया है, जिसमें से शोधकर्ता अनुसंधान परियोजना के लिए प्रारूप का विकास कर सकता है।

अधिकांश अनुसंधान रिपोर्टो में निम्न तत्व शामिल होने है;

- शीर्षक पृष्ठ,
- ट्रांसमिट के पत्र,
- प्राधिकरण के पत्र,
- विषय – सूची,

- टेबल की सूची
- रेखाकंन की सूची;
- परिशिष्टों की सूची,
- परिशिष्ट की सूची,
- कार्यकारी सारांश,
    - प्रमुख निष्कर्ष
    - निष्कर्ष,
    - अनुशंसाएं
    - पृष्ठभूमि समस्या का बयान
- समस्या के लिए दृष्टिकोण,
- अनुसंधान रेखा – चित्र
- अनुसंधान डिजाइन का प्रकार
    - अनुसंधान डिजाइन के प्रकार
    - जानकारी की जरूरत
    - माध्यमिक स्त्रोतों से डेटा संग्रह
    - प्राथमिक स्त्रोतों से डेटा संग्रह
    - स्केलिंग तकनीक
    - प्रश्नावली विकास और प्रेटेस्टिंग
    - नमूनाकरण तकनीक
    - फील्ड कार्य
- डेटा विश्लेषण,
    - क्रिया विश्लेषण की योजना
- परिणाम
- सीमाएं और चेतावनियां
- निष्कर्ष और सिफारिशें
- परिशिष्ट
    - ग्रन्थसूची
    - प्रश्नावली और रूप
    - सांख्यिकी आउटपुट
    - सूचियॉ

यह प्रारूप किसी भी शोध रिपोर्ट के मानक प्रारूप है। परिणाम रिपोर्ट के कई अध्यायों में प्रस्तुत किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक राष्ट्रीय सर्वेक्षण में, समग्र विश्लेषण के लिए डेटा विश्लेषण किया जा सकता है और फिर चार भौगोलिक क्षेत्रों में से प्रत्येक का डेटा अलग से विश्लेषण किया जा सकता है यदि हॉ, तो परिणाम एक अध्याय की बजाय पांच अध्यायों में प्रस्तुत किए जा सकते हैं। आगे के खंड में हम अनुसंधान रिपोर्ट के प्रत्येक अनुभाग के विवरण को समझेंगे।

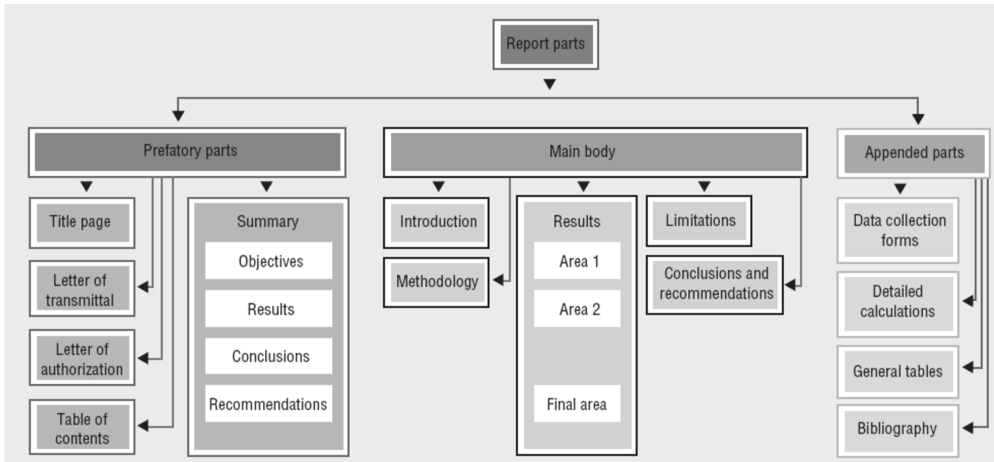
- **शीर्षक पेज;** शीर्षक पृष्ठ में अनुसंधान का आयोजन करने वाले शोधकर्ता या संगठन के बारे में रिपोर्ट, सूचना (नाम और टेलीफोन) का शीर्षक, उस ग्राहक का नमा जिसके लिए रिपोर्ट तैयार की गई थी और रिलीज की तिथि शामिल होनी चाहिए।
- **प्रसारण के पत्र;** एक औपचारिक रिपोर्ट में आम तौर पर ट्रांसमीटर से एक पत्र होता है जो रिपोर्ट को ग्राहक को भेजता है और इसका सारांश देता है।
- **जॉच परिणाम;** पत्र को आगे की कार्यवाई की आवश्यकता को भी पहचानना चाहिए क्लाइंट का हिस्सा, जैसे निष्कर्षो का क्रियान्वयन या आगे क्या अनुसंधान किया जा सकता है।
- **प्राधिकरण के पत्र;** प्राधिकरण का एक पत्र ग्राहक द्वारा प्रोजेक्ट शुरू होने से पहले शोधकर्ता को लिखा जाता है। यह परियोजना के साथ आगे बढ़ने के लिए शोधकर्ता को अधिकृत करता है। और इसके दायरे और अनुबंध की शर्तो को निर्दिष्ट करता है। अक्सर, ट्रांसमिट के पत्र में प्राधिकरण के पत्र को संदर्भित करने के लिए न्र्याप्त है। हालांकि, कभी—कभी यह रिपोर्ट में प्राधिकरण के पत्र की एक प्रति को शामिल करना आवश्यक है।
- **विषय सूची;** सामग्रियों की तालिका में शामिल विषयों को सूचीबद्ध करना चाहिए और उपयुक्त पृष्ठ संख्याएं। ज्यादातर रिपोर्ट में, केवल प्रमुख शीर्षक ओर उपशीर्षक शामिल हैं। सामग्रियों की सारणी के बाद तालिकाओं की एक सूची, ग्राफ की सूची, परिशिष्टों की सूची, और प्रदर्शन की सूची के बाद होती है।
- **कार्यकारी सारांश;** कार्यकारी सारांश रिपोर्ट का एक अत्यंत महत्वपूर्ण अंग है, क्योंकि यह अक्सर रिपोर्ट का एकमात्र हिस्सा है जो अधिकारियों ने पढ़ा है । सारांश में संक्षिप्त रूप से समस्या, दृष्टिकोण और शोध डिजाइन को बताया जाना चाहिए जो अपनाया गया था। एक सारांश अनुभाग प्रमुख परिणाम, निष्कर्ष और सिफारिशों के लिए समर्पित होना चाहिए। बांकी रिपोर्ट के बाद कार्यकारी सारांश लिखा जाना चाहिए।
- **समस्या की परिभाषा;** रिपोर्ट के इस खंड में समस्या की पृष्ठभूमि सामने आती है, निर्णयन प्रक्रिया और उद्योग विशेषज्ञों के साथ विचार विमर्श पर प्रकाश डाला जाता है, द्वितीयक आंकड़ों के विश्लेषण, गुणात्मक अनुसंधान और जिन कारकों पर विचार किया गया था, उनके बारे में चर्चा की गई। इसके अलावा, इसमें प्रबंधन निर्णयों की समस्या और विपणन अनुसंधान समस्या का एक स्पष्ट बयान होना चाहिए। समस्या के लिए, दृष्टिकोण पर इस खंड में व्यापक चर्चा करनी चाहिए जो समस्या को हल करने में अपनाया गया था। इस खंड में सैद्धांतिक आधारों का विवरण भी शामिल होना चाहिए जो अनुसंधान को निर्देशित करते हैं।
- **अनुसंधान रेख चित्र;** शोध डिजाइन पर अनुभाग में यह बताया गया कि शोध कैसे किया गया था। इस में शामिल अनुसंधान डिजाइन की प्रकृति, आवश्यक

जानकारी, माध्यमिक और प्राथमिक स्त्रोतों से डेटा संग्रह, स्केलिंग तकनीक, प्रश्नावली विकास और पूर्व परीक्षण, नमूनाकरण तकनीक और क्षेत्रीय काम शामिल होना चाहिए। इन विषयों को गैर–तकनीकी, आसान–समझने के तरीके से प्रस्तुत किया जाना चाहिए। तकनीकी विवरण इस परिशिष्ट में शामिल किया जाना चाहिए। रिपोर्ट के इस खंड में चयनित विशिष्ट विधियों का औचित्य होना चाहिए।

- **समंक विश्लेषण;** इस खंड में समंक विश्लेषण की योजना का वर्णन होना चाहिए और डेटा विश्लेषण रणनीति ओर तकनीकों का इस्तेमाल किया जाना चाहि।
- **परिणाम;** यह खंड आम तौर पर रिपोर्ट का सबसे लंबा हिस्सा है और इसमें कई अध्याय शामिल हो सकते हैं। अक्सर, न केवल कुल स्तर पर बल्कि उपसूमह (बाजार खंड, भौगोलिक क्षेत्र, आदि) स्तर पर भी प्रस्तुत किया जाता है। परिणामों को एक सुसंगत और तार्किक तरीके से व्यवस्थित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, अस्पतालों के स्वास्थ्य देखभाल विपणन सर्वेक्षण में, परिणाम चार अध्यायों में प्रस्तुत किए गए थे। एक अध्याय ने समग्र परिणामों को प्रस्तुत किया, एक और भौगोलिक क्षेत्रों के बीच मतभेंदों की जांच की, एक तिहाई ने लाभ और गैर–लाभकारी अस्पतालों के बीच मतभेद प्रस्तुत किए, और चौथे ने बिस्तर की क्षमता के अनुसार मतभेद प्रस्तुत किए। परिणामों की प्रस्तुति सीधे मार्केटिंग रिसर्च समय के घटकों के लिए तैयार की जानी चाहिए और जानकारी की पहचान की जानी चाहिए। पाठ में चर्चा की गई प्रमुख निष्कर्षो के साथ, विवरण तालिका और ग्राफ में प्रस्तुत किए जाने चाहिए।
- **सीमाएं और चेतावनियॉ;** सभी अनुसंधान परियोजनाओं में समय, बजट, और अन्य संगठनात्मक बाधाओं के कारण सीमाएं हैं। इसके अलावा, द्वविपक्षीय अनुसंधान डिजाइन विभिन्न प्रकार की त्रुटियों के मामले में सीमित हो सकते हैं ओर इनमें से कुछ गंभीर हो सकते हैं। इस खंड को सटीक देखभाल और एक संतुलित परिप्रेक्ष्य के साथ लिखा जाना चाहिए। एक तरफ, शोधकर्ता को यह सुनिश्चित करना चाहिए कि प्रबंधन परिणामों पर अधिक निर्भर नहीं करता है या उन्हें अनपेक्षित उद्देश्यों के लिए इस्तेमाल करता है। दूसरी ओर, इस खंड को अनुसंधान में उनके आत्मविश्वास को कम करना चाहिए या इसके महत्व को कम से कम कम करना चाहिए।
- **निष्कर्ष ओर सिफारिशें;** सांख्यिकीय परिणामों का एक मात्र सारांश प्रस्तुत करना पर्याप्त नही है प्रमुख निष्कर्ष पर आने के लिए, समस्या को हल करने के लिए शोधकर्ता को परिणामों के प्रकाश में परिणामों की व्याख्या करनी चाहिए। परिणामों और निष्कर्षो के आधार पर, शोधकर्ता निर्णय निर्माताओं को सिफारिश कर सकता है। कभी–कभी शोधकर्ताओं को सिफारिशें करने के लिए नहीं कहा जाता क्योंकि वे केवल एक क्षेत्र का शोध करते हैं। लेकिन यदि

सिफारिश की जाती है तो उन्हें प्रबंधकीय निर्णय लेने में निवेश के रूप में व्यावहारिक, क्रिया योग्य और सीधे उपयोग करने योग्य होना चाहिए।

निम्नलिखित आरेख की मदद से एक शोध रिपोर्ट का मुख्य भाग चित्रित किया जा सकता है।



- विचारों के बाद अनुसंधान रिपोर्ट लिखते समय ध्यान में रखा जाना चाहिए।
- एक विशिष्ट पाठक या पाठकों के लिए एक रिपोर्ट लिखी जानी चाहिए,
- रिपोर्ट को पाठकों के तकनीकी परिष्कार और परियोजना मे दिलचस्पी के साथ–साथ उन परिस्थितियों को ध्यान में रखना चाहिए जिनके तहत वे रिपोर्ट पढ़ेंगे ओर वे इसका उपयोग कैसे करेंगे।
- तकनीकी शब्दावली और शब्दगण से बचना चाहिए जैसा कि एक विशेषज्ञ ने व्यक्त किया, ''आपकी रिपोर्ट के पाठकों में व्यस्त लोग हैं; और उनमें से बहुत कुछ एक शोध रिपोर्ट, एक कप कॉफी और एक शब्दकोष एक बार में संतुलन कर सकते हैं। ''अगर कुछ तकनीकी शर्तो से बचा नहीं जा सकता है, तो उन्हें परिशिष्ट में संक्षिप्त रूप से परिभाषित करें। अक्सर शोधकर्ता को परियोजना में तकनीकी परिष्कार और रूचि के विभिन्न स्तरों के साथ कई ऑडियंस की जरूरतों को पूरा करना होगा।
- अलग–अलग पाठकों के लिए रिपोर्ट में अलग–अलग अनुभाग शामिल करके या पूरी तरह से अलग रिपोर्ट तैयार करने से ऐसी विवादित जरूरतों को पूरा किया जा सकता है।

22.7 अनुसंधान रिपोर्ट के प्रकार

ऐसे कई तरीके हैं जिनके द्वारा शोध रिपोर्ट को वर्गीकृत किया जा सकता है। schiendler और कूपर ने निम्नलिखित प्रकार के अनुसंधान रिपोर्ट का सुझाव दिया

- **(लघु रिपोर्ट)** इसे अनौपचारिक रिपोर्ट भी कहा जाता है। छोटी रिपोर्ट एक पृष्ठ पर प्रस्तुत तथ्यों के एक छोटे से बयान से लेकर कई पन्नों पर एक लंबी प्रस्तुति के लिए हो सकती है। लघु, अनौपचारिक, रिपोर्ट आम तौर पर एक पत्र या ज्ञापन के रूप में प्रस्तुत की जाती है। औपचारिक रिपोर्ट के

विपरीत, जिसमें पहले व्यक्ति का उपयोग आम तौर पर होता है पूर्ण निष्पक्षता के लिए इस प्रकार की रिपोर्ट तब उचित जब समस्या सीमित गुंजाइश के साथ अच्छी तरह से परिभाषित है और अच्छी तरह से संरचित हो।

- **अनौपचारिक व लंबी रिपोर्ट;** यह सामान्य रूप से प्रकृति में औपचारिक है स में शामिल है : कवर, शीर्षक पृष्ठ, सामग्री पृष्ठ, transmittal के पत्र (कवर पत्र), सांराश परिचय, रिपोर्ट का शरीर, सिफारिशों के साथ या बिना निष्कर्ष, परिशिष्ट, ग्रंथसूची सूचकांक

यह कई बार मुद्रित होता है और इसमें बाध्य होता है हार्डकवर से एक किताब की तरह कवर होता है जब यह बहुत लंबा होता है, एक परिचय के बाद उसके मुख्य बिंदुओं का सारांश दिया गया है।

शैली में, लंबी या औपचारिक रिपोर्ट सामान्य है और टोन में सीमित है। लेखक आम तौर पर पहले व्यक्ति (मैंया हम) का उपयोग नहीं करते हैं, लेकिन ऐसे कुछ तरीकों से तीसरे व्यक्ति के संदर्भ का इस्तेमाल करते हैं '' यह पाया गया '' और '' लेखकों की राय है'' आदि।

लंबी रिपोर्ट दो प्रकार की होती है;

- **तकनीकी रिपोर्ट;** इन प्रकार की शोध रिपोर्ट अकादमिक या शोधकर्ताओं के लिए तैयार की जाती है। इसके विवरणों में पूर्ण दस्तावेज शामिल हैं इस रिपोर्ट में विश्लेषण और व्यापक हैं ।
- **प्रबंधन रिपोर्ट;** इसे व्यवसाय रिपोर्ट के रूप में भी समझा जाता है ओर उन लोगों के लिए तैयार किया जाता है जो शोध पद्धति के बारे में जागरूक नहीं है। इन प्रकार की रिपोर्ट विशेष रूप से विशिष्ट समस्या पर केद्रित होतीहै और कार्यप्रणाली से संबंधित कम चिंतित होती है। यह इस तरह तैयार है कि यह निष्कर्ष और सिफारिशों के साथ त्वरित रीडिंग को प्रोत्साहित कर सके।

22.8 एक अच्छी रिपोर्ट के लक्षण

एक अच्छी शोध रिपोर्ट को लिखित रूप में अपनी प्रस्तुति में निम्नलिखित मानदंडों को पूरा करना होगा। रिपोर्ट में एकत्र की गई जानकारी प्रासंगिक और केंद्रित परिणाम, वांछित परिणाम प्राप्त करने के लिए होनी चाहिए। रिपोर्ट को सटीक पूर्वनिर्धारित लक्ष्यों और उद्देश्यों का पालन करना चाहिए।

- रिपोर्ट में हमेशा कार्यकारी सारांश होना चाहिए।
- रिपोर्ट में अनुसंधान की पद्धति भी होनी चाहिए।
- रिपोर्ट में प्रश्नावली का वर्णन होना चाहिए।
- रिपोर्ट को तद्नुसार बदला जाना काफी लचीला होना चाहिए ।
- स्पष्ट सूचना को आसानी से समझा जाना चाहिए।
- रिपोर्ट को स्पष्ट लेखन और एक स्पष्ट संदेश के साथ पढ़ने में आसान होना चाहिए।
- यह पूर्ण ओर संक्षिप्त होना चाहिए।

- यह सूचना के प्रत्येक टुकड़े के लिए सही होना चाहिए और सत्यापन के योग्य है।

22.9 निष्कर्ष लेखन

निष्कर्ष भाग एक साथ टाई, अुनसंधान, रिपोर्ट के शरीर में शामिल विभिन्न मुद्दों को एकीकृत, और यह सब के अर्थ पर टिप्पणी करने के लिए है। इसमें विषय चर्चा के साथ–साथ अनुशंसाएं, भावी प्रवृत्तियों की भविष्यवाणी, और आगे की शोध की आवश्यकता के परिणामस्वरूप किसी भी निहितार्थ को शामिल करना है।

इसे अपने तर्क के सभी हिस्सों को एक साथ खींचना चाहिए और पाठकों को अपने फोकस में केंद्रित करना चाहिए कि आपने अपने परिचय में और केंद्रीय विषय पर रेखांकित किया है। यह आपके निबंध को एकता का भाव देता है।

कभी भी कोई नई जानकारी शामिल न करें। आम तौर पर केवल लंबाई में एक पैराग्राफ होता है, लेकिन एक विस्तारित निबंध (3000+शब्द) में निबंध के विभिन्न हिस्सों को एक साथ खींचने के लिए दो या तीन पैराग्राफों बेहतर हो सकता है। इसे निबंध के समग्र गुणवत्ता और प्रभाव में जोड़ें। यह इस विषय के बारे में आपका अंतिम विवरण है; इस प्रकार यह पाठकों पर एक महान प्रभाव डाल सकता है।

निष्कर्ष में शामिल हो सकते है;

- अंग में प्रस्तुत तर्को का सारांश और यह कैसे निबंध प्रश्न से संबंधित है।
- विषय के जवाब में परिचय में प्रस्तुत किए गए मुख्य बिन्दु को पुनः सौंपना। इस दृश्य के निहितार्थ या परिणाम के रूप में हो सकता है।
- यह एक वाक्य से शुरू होता है जो मुख्य विषय को संदर्भित करता है जिसे रिपोर्ट में शरीर में चर्चा की गई थी।
- यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि ये वाक्यों के पूर्ववर्ती पैराग्राफ से भी लिंक हो।
- यह आपके तर्क का एक संक्षिप्त सारांश के द्वारा समर्थित हो सकता है और मुख्य कारणों /कारकों की पहचान कर सकता है जो आपको उस प्रश्न से संबंधित है जो आपको संबोधित करने के लिए कहा गया है।
- यदि प्रश्न के दो या अधिक भाग हैं, तो अपने निष्कर्ष में प्रत्येक भाग के लिए प्रतिक्रियाओं को शामिल करना सुनिश्चित करें।
- अंत में, शुरूआत में उपयोग किए जाने वाले निर्णायक बयान को मजबूत करने के लिए एक या दो वाक्य जोड़ना एक अच्छा विचार है। यह पाठक को दिखाता है कि आपने जो कुछ किया है लिखित रूप में एकता का भाव देते हैं।
- अतिरिक्त तत्व जो कि जोड़ा जा सकता है भविष्य में भविष्य के रूझान पर अटकलों के लिए सिफारिशें शामिल हैं;
- निष्कर्ष आपके शब्दों में होना चाहिए।
- सीधा कोटेशन, या अन्य स्त्रोतों के संदर्भ से बचने की कोशिश करें।

22.10 लेखन अनुशंसाएं, सिफारिशें और सीमाएं

अनुसंधान परिणामों के प्रकाश में किए जाने वाले कार्यो के बारे में सिफारिशों को भी एक रिपोर्ट का एक महत्वपूर्ण पहलू माना जाता है। यह व्यक्तिपरक बयान है जो प्रबंधकों को अनुसंधान कार्य के निष्कर्षो के आधार पर किए जाने वाले कार्यवाई के सुझाव के बारे में निर्णय लेने में मदद करता है। सिफारिश प्राथमिक उत्पाद के रूप में चयन करने के लिए एक उत्पाद, विज्ञापन, स्थिति, बाजार क्षेत्रों को जोड़ने या छोड़ने के लिए संबंधित हो सकती है। सुझाव या सिफारिशों को लिखते समय डेटा और इसके व्याख्याओं के साथ तर्कसंगति आवश्यक है। सीमाएं अनुसंधान कार्य में बाधाओं को दर्शाती हैं जो निष्कर्षों पर प्रभाव पैदा कर सकते हैं।

22.11 संदर्भ, अंत नोट्स, फुट नोट्स लिखन

अनुसंधान में हमें ज्ञान के संबंधित क्षेत्रों में कुछ अंतदृष्टि प्राप्त करने के लिए माध्यमिक स्त्रोतों और साहित्य की समीक्षा का उपयोग करना होगा। साहित्य की समीक्षा मौजूदा शोध पर एक महत्वपूर्ण नजर है जो आपके द्वारा किए जाने वाले काम के लिए महत्वूपर्ण है। एक साहित्य की समीक्षा के संदर्भ में, ''साहित्य '' का अर्थ है कि आपके शोध की समस्या को समझने और उसकी जांच करने के लिए आपके द्वारा किए गए कार्यो से संबंधित है। साहित्य के कुछ महत्वपूर्ण स्त्रोत हैं—

- **जर्नल लेख;** वे अक्सर साहित्य की समीक्षा में उपयोग किए जाते हैं क्योंकि वे अनुसंधान के लिए अपेक्षाकृत संक्षिप्त, अप–टू–डेट प्रारूप प्रस्तुत करते हैं और क्योंकि सभी सम्मानित पत्रिकाएं रेफ्रिड हैं।
- **पुस्तकें;** पाठ्य पुस्तकों को आपके साहित्य की समीक्षा में शामिल करने के लिए उपयोगी होने की संभावना नहीं है क्योंकि वे शिक्षण के लिए हैं न कि अनुसंधान के लिए, बल्कि वे एक अच्छा प्रारंभिक बिंदु पेश करते हैं जिससे अधिक विस्तृत स्त्रोत मिल सकते हैं।
- **सम्मेलन की कार्यवाही;** ये नवीनतम अनुसंधान, या अप्रकाशित शोध है जो प्रदान करने में उपयोगी हो सकते हैं। सरकार कॉर्पोरेट रिपोर्ट; कई सरकारी विभागों ओर निगमों शोध करते हैं। अध्ययन के अपने क्षेत्र के आधार पर, उनके प्रकाशित निष्कर्ष जानकारी का एक उपयोगी स्त्रोत प्रदान कर सकते हैं।
- **समाचार पत्र;** हालिया रूझानों, खोजों या परिवर्तनों के बारे में जानकारी देने वाले समाचार पत्र भी अधिक उपयोगी होते हैं।
- **शोध और शोध प्रबंध;** ये जानकारी के उपयोगी स्त्रोत हो सकते हैं।
- **इंटरनेट;** यह सूचना का सबसे तेजी से बढ़ रहा स्त्रोत है, लेकिन प्रासंगिक जानकारी को फिल्टर करने के लिए हमें सतर्क रहना होगा। इस साहित्य को अनुसंधान रिपोर्ट में सही तरीके से संदर्भित किया जाना है। जब आप इनका संदर्भ लेते हैं तो किसी अन्य लेखक से (जो कहें, आपने एक लेखक के सिद्धांत, राय, विचार, उदाहरण, निष्कर्ष या निष्कर्ष निकाले हैं) आपको अपने

स्त्रोतों को स्वीकार करना और उद्धत करना होगा। यह महत्वपूर्ण है कि आप लेखक के स्वयं के शब्दों का प्रयोग करते हैं या नहीं।

अनुवर्ती माध्यमिक डेटा के स्त्रोतों को स्वीकार करने के कारण हैं और आपके शोध में निष्कर्ष :

- यदि दिखाने के लिए कि आपने अपने क्षेत्र के हित में प्रकाशित शोध को पढ़ और समझ लिया है आप जो लिख रहे हैं उसे अधिकार देने के लिए;
- अपने तर्क को मजबूत करने के लिए;
- अपने विचारों का समर्थन करने के लिए;
- आप क्या लिख रहे हैं इसकी जानकारी या पृष्ठभूमि प्रदान करने के लिए;
- साहित्य चोरी के आरोप से बचने के लिए
- यदि आप स्त्रोतों को स्वीकार नहीं करते हैं तो आपकों साहित्यिक चोरी का आरोप लगाया जा सकता है। साहित्यिक चोरी किसी अन्य व्यक्ति के विचारों का उपयोग करने का कार्य है जैसे कि वे स्वयं के हैं यह अकादमिक शिष्टाचार का बहुत ही गंभीर उल्लंधन है। आपकी असाइनमेंट को असफल चिन्ह दिया जाएगा, और अत्यधिक मामलों में, आप कॉपीराइट के उल्लंधन के कानूनों के तहत मुकदमा कर सकते हैं। इससे कोई फर्क नहीं पड़ता कि क्या मूल शब्द या विचार प्रकाशित लेखक या किसी अन्य छात्र के हैं, आपको अपनी सूचना या सामग्री का श्रोत देना चाहिए।

स्त्रोतों को स्वीकार करने का एक से अधिक तरीका है सामान्य व्यवस्था फुटनोटिंग सिस्टम और लेखन–तिथि प्रणाली(अक्सर हार्वर्ड प्रणाली के रूप में जाने जाते हैं) हैं अधिकांश शोधकर्ता लेखक –तिथि प्रणाली को पंसद करते हैं। लेकिन जो भी सिस्टम आप उपयोग करते हैं, आपको लगातार पालन करना चाहिए।

संदर्भो के बजाय कभी–कभी ग्रंथ सूची शब्द का भी उपयोग किया जाता है यद्यपि तकनीकी रूप से संदर्भ सूची, ग्रंथ सूची के समान नहीं होती है, फिर भी अध्ययन के संबंध में उनके बीच कोई अंतर नहीं होता है। वे अलग–अलग नामों के साथ एक ही बात हैं कुछ लोग इसे संदर्भ सूची करते हैं, और दूसरे इसे ग्रैबियोग्राफी करते हैं, लेकिन वहीं नियम लागू होते हैं। आपकी संदर्भ सूची/ग्रंथसूची को पूर्ण ओर सटीक विवरण प्रदान करना चाहिए, क्योंकि यह वह साधन है जिससे पाठक आपके स्त्रोतों का अनुसरण कर सकता है। अनुसंधान रिपोर्ट में मानक संदर्भ के कुछ उदाहरणों का पालन करें।

1. डायर, सी। (1995); मनोविज्ञान में शोध शुरू करना ऑक्सफोर्ड; ब्लैकवेल।
2. ईसेनक, एम.डब्ल्यू. (1994) व्यक्तिगत मतभेदः सामान्य और असामान्य हॉव; यूकेः मनोविज्ञान प्रेस
3. लोलैंड , जे। (1976), 'सामाजिक जीवन करनाः प्राकृतिक सेटिग्स में मानवीय संपर्क का गुणात्मक अध्ययन ; न्यूयॉर्क : विले

संदर्भ लिखने के लिए सामान्य दिशा निर्देश निम्नानुसार हैः

- एक प्रविष्टि में लेखक (लेखक), प्रकाशन की तारीख (दैनिक या साप्ताहिक प्रकाशनों के लिए पूर्ण तारीख, केवल दूसरे लोगों के लिए वर्ष), शीर्षक विवरण, प्रकाशक विवरण शामिल होना चाहिए।
- प्रविष्टियां उपनाम के वर्णानुक्रम में होनी चाहिए।
- पुस्तकों ओर पत्रिकाओं के शीर्षक इटैलिक में होना चाहिए (या रेखांकित जहां इटैलिक फॉन्ट उपलब नहीं हैं)।
- पुस्तकों और पत्रिकाओं के शीर्षक, शीर्षक मामले में होना चाहिए (यानी सभी महत्वपूर्ण शब्द एक पंजीकृत प्रारंभिक अक्षर हैं)।
- लेखों या अध्याय शीषकों के शीर्षक वाक्य के मामले में होना चाहिए (यानी केवल पहला शब्द या विशिष्ट संज्ञाएं एक पूंजी होनी चाहिए)।
- पुस्तक शीर्षक में संस्करण (प्रथम के अलावा) और शीर्षक पृष्ठ (जैसे श्रंखला, अनुवादक, मूल शीर्षक) पर दिए गए अन्य विवरण शामिल होना चाहिए।
- जर्नल शीर्षक में लेख, संख्या, और आलेख के पेज नंबर शामिल होना चाहिए।

मानक सम्मेलनों के संदर्भ में, वहां बहुत सारे शैली के अंतर हैं:

- दिनांक कोष्ठक में या नहीं हो सकता है।
- वस्तुओं के बीच चिन्ह भिन्न हो सकता है।
- अनुच्छेद खिताब उल्टे अल्पविराम का उपयोग नहीं कर सकते हैं या हो सकता है।
- पहले नाम पूर्ण या कम से कम संक्षिप्त हस्ताक्षर में दिए जा सकते हैं।
- संयुक्त लेखकों के नाम और या एक एम्परसेंड (&) द्वारा अलग किए जा सकते हैं।
- शोध रिपोर्ट में संदर्भो का हवाला देते हुए व्यक्तियों या संगठनों को यह शैलीगत मतभेदों में से कुछ ही चुन सकते हैं।

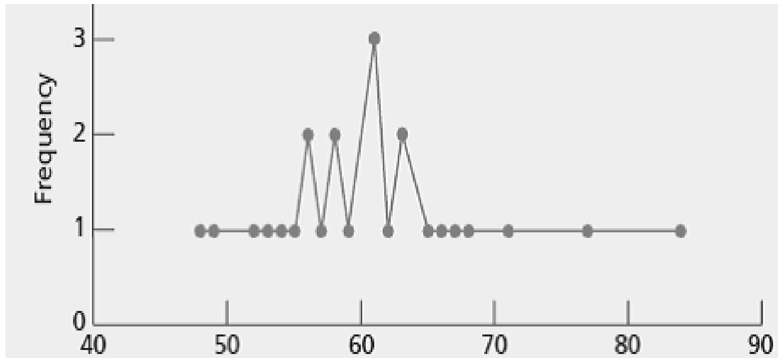
22.12 अनसंधान में कम्प्यूटर अनुप्रयोग

अनुसंधान में कम्प्यूटर का उपयोग इतना व्यापक है कि आज कंप्यूटर के बिना एक वैज्ञानिक अनुसंधान परियोजना को विकसित करना मुश्किल है। कंप्यूटर के उपयोग के बिना कई शोध अध्ययन नहीं किए जा सकते हैं, विशेषकर जटिल जटिलताएं, डेटा विश्लेषण और मॉडलिंग शामिल हैं। अनुसंधान के सभी चरणों में शोध में कम्प्यूटर प्रयोग किया जाता है – प्रस्ताव/बजट स्तर से निष्कर्ष प्रस्तुत करने के लिए;

हम कंप्यूटर और सूचना प्रौद्योगिकी के प्रयोंगों में अनुसंधान के रूप में अनुवर्ती कम्प्यूटर जानकारी और साहित्य की खोज और भंडारण में मदद करते हैं। कई सॉफ्टवेयर सांख्यिकीय विश्लेषण और नमूना आकार निर्धारण के लिए उपलब्ध हैं। यह विभिन्न उपकरणों और सॉफ्टवेयर का उपयोग करके एक पेशेवर रिपोर्ट तैयार करने में सहायता करता है। कंप्यूटर चार्ट और ग्राफ के साथ–साथ सांख्यिकीय

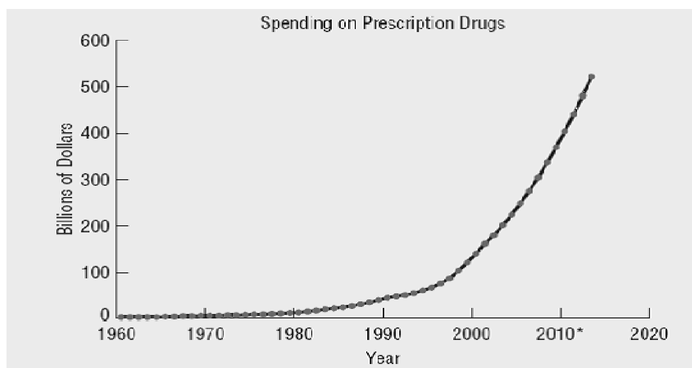
विश्लेषण के लिए डेटा के ग्राफिकल प्रस्तुति के लिए विभिन्न उपकरण ओर सॉफ्टवेयर प्रदान करता है। कुछ महत्वपूर्ण चार्ट जो कंप्यूटर सॉफ्टवेयर द्वारा उत्पन्न होते हैं और अनुसंधान में उपयोग किए जाते हैं, वे यहां चर्चा की जाती हैं:

आवृत्ति बहुभुज;



आंकड़ों को संक्षेप करने का एक तरीका आवृत्ति बहुभुज के रूप में है। यह चार्ट का एक सरल रूप है जिसमें कम से उच्च स्कोर एक्स–अक्ष या क्षैतिज अक्ष पर दर्शाए जाते हैं और विभिन्न स्कोरों के आवृत्तियों (प्रत्येक अंक प्राप्त करने वाले व्यक्तियों की संख्या के संदर्भ में) y - धुरी या ऊर्ध्वाधर अक्ष पर ।

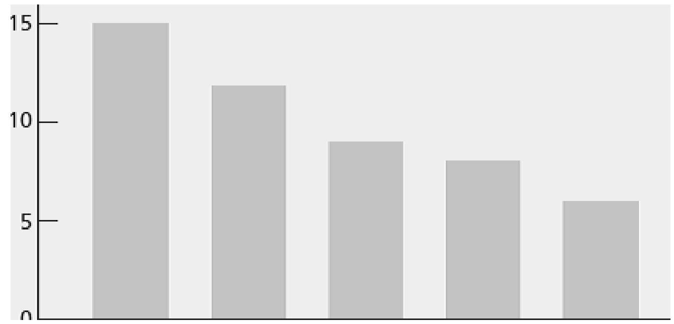
लाइन रेखांकन;



लाइन ग्राफ एक चर के संबंध को दूसरे के लिए दिखाते हुए उपयोगी होते हैं। निर्भर चर आमतौर पर ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दिखाया जाता है, और क्षितिज अक्ष पर स्वतंत्र चर। प्रिंट चार्ट में, समय एक होता है और प्रोस्पर्श्री ड्रग्स पर स्प्रेडिंग एक आश्रित चर है। ।

हिस्टोग्राम;

हिस्टोग्राम में, स्कोर को क्षैतिज अक्ष पर दर्शाया गया है और आवृत्तियों को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दिखाया गया है। आवृत्ति बहुभुज के विपरीत, हालांकि, आवृत्तियों को आयताकार स्तंभों द्वारा दर्शाया गया है। ये सभी कॉलम एक ही चौड़ाई हैं लेकिन समान आवृत्तियों के अनुसार ऊंचाई में भिन्नता है। ।



बार चार्ट में, श्रेणियों को क्षैतिज अक्ष के साथ दिखाया गया है, और आवृत्तियों को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दिर्शाया गया है। हिस्टोग्राम में निहित डेटा के विपरीत, बार चार्ट में श्रेणियां एक सार्थक तरीके से संख्यात्मक रूप से आदेश नहीं की जा सकती। हालांकि, उन्हें लोकप्रियता के आरोही (या अवरोही) आदेश में व्यवस्थित किया जा सकता है हिस्टोग्राम से एक और अंतर यह है कि एक बार चार्ट में आयताकार आम तौर पर एक दूसरे को नहीं छूते हैं।

अनुसंधान में सांख्यिकीय सॉफ्टवेयर;

ये आंकड़े सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए उपलब्ध वर्ज सॉफ्टवेय हैं अर्थात् एसपीएसएस, एसएएस, मायस्टैट, आर आदि। लेकिन सबसे व्यापक रूप से एसपीएसएस का प्रयोग डेटा विश्लेषण एसपीएसएस (सामाजिक विज्ञान के लिए सांख्यिकीय पैकेज) के लिए किया जाता है। यह एक कंप्यूटर सॉफ्टवेयर है जो आंकड़ों के सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए प्रयोग किया जाता है। यह गहन डेटा पहुंच और तैयारी, विश्लेषणत्मक रिपोर्टिंग, ग्राफिक्स और मॉडलिंग के लिए अनुमति देता है। एसपीएसएस में सांख्यिकीय और गणितीय कार्यो की संख्या, सांख्यिकीय प्रक्रियाओं की संख्या और एक बहुत ही लचीला डेटा हैंडलिंग क्षमता है। यह लगभग किसी भी प्रारूप में डेटा पढ़ा (उदा, अंकीय, अल्फान्यमेरिक, बाइनरी, डॉलर, दिनांक, समय प्रारूप, और स्प्रेड शीट/ डेटा बेस का उपयोग करके बनाई गई फाइलों को पढ़ सकता है।

निम्नलिखित कुछ सांख्यिकीय प्रक्रिया/तकनीकों का एक संक्षिप्त अवलोकन है जो SPSS के माध्यम से किया जा सकता है:

डेटा रूपांतरण, डेटा परीक्षा/ अन्वेषण, वर्णनात्मक सांख्यिकी (माध्य, माध्यका, मोड, रेंज एसडी, स्कावट, कर्टोसिस), आक्समिकता तालिकाओं (काइ स्क्वायर परीक्षण, सटीक परीक्षण), विश्वसनीयता परीक्षण, सहसंबंध (कार्ल पियर्सन रैंक सहसंबंध, कैंडल का परीक्षण), टी–टेस्ट (नमूना मतलब तुलना की परीक्षा, दो स्वतंत्र नमूना परीक्षण), सामान्य रैंकिग मॉडल (एनोवा , मोनोवा, दोहराया उपाय), एकाधिक रैकिंग पुनरावृत्ति, उपस्कर, लाभ प्रतिगमन, वक्र फिटिंग, लॉगलाइन रेग्रेसन, विभेदक विश्लेषण, कारक विश्लेषण, समूह विश्लेषण बहुआयामी स्केलिंग, जांच विश्लेषण, पूर्वानुमान/समय श्रृंखला, जीवन रक्षा विश्लेषण, गैर –पार्मेट्रिक विश्लेषण, ग्राफिक्स और ग्राफिकल इंटरफेस एमएस एक्सेल डेटा के आधार पर ग्राफ और चार्ट तैयार करने के लिए विभिन्न उपकरण प्रदान करता है। यह आंकड़ों के सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए उपकरण भी प्रदान करता है। मोइक्रोसॉफ्ट एक्सेल माइक्रोसॉफ्ट विंडोज और मैक

ओएस एक्स के लिए माइक्रोसॉफ्ट द्वारा विकसित एक स्प्रैडशीट एप्लिकेशन है। इसमें गणना, ग्राफिंग टूल्स, धुरी सारणी ओर विजुअल बेसिक नामक मैक्रो प्रोग्रामिंग भाषा अनुप्रयोगों किया जा सकता है।

अभ्यास : कंप्यूटर सिस्टम पर एमएस एक्सेल सॉफ्टवेयर के इस्तेमाल सीखना विभिन्न प्रकार के आलेख और चार्ट बनाने की कोशिश करें एमएस एक्सेल के विभिन्न सांख्यिकीय कार्यो और डेटा विश्लेषणत्मक उपकरणों का उपयोग करना सीखें।

22.13 रिर्सच रिपोर्ट लेखन में नैतिकता

रिपोर्ट की तैयारी और प्रस्तुति में अनुसंधान अखंडता से संबंधित अनेक मुद्दो को शामिल किया गया है। इन मुद्दों में छिपे हुए एजेंडा के अनुरूप, अनुसंधान डिजाइन के साथ समझौता करना, जानबूझकर आंकाड़ों का दुरूपयोग करना, आंकड़ों का गलतफहमी करना, शोध के परिणामों में बदलाव करना, व्यक्तिगत या कॉर्पेरेट दृष्टिकोण का समर्थन करने के उद्देश्य से परिणामों को गलत तरीके से समझा जाना और जानकारी रोकना शामिल है। रिपोर्ट तैयार करने और निष्कर्षो को प्रस्तुत करते समय शोधकर्ता को इन मुद्दों का समाधान करना चाहिए। ग्राहक, और अन्य हितधारकों के लिए अनुसंधान परिणामों का प्रसार उचित, ईमानदार, सटीक और पूर्ण होना चाहिए। अनुसंधान प्रक्रिया के सभी चरणों में शोधकर्ता उद्देश्य होना चाहिए। कुछ शोध प्रक्रियाओं और विश्लेषण कुछ भी नया या महत्वपूर्ण प्रकट नहीं कर सकते हैं।

यदि शोधकर्ता गलत विश्लेषण से निष्कर्ष निकालने का प्रयास करता है। तो इन उदाहरणों से नैतिक दुविधा उत्पनन हो सकती है। अनैतिक आचरण से बचने के लिए ऐसे मोहों का विरोध करना चाहिए। इस तरह, ग्राहकों को शोध निष्कर्षो के पूर्ण और सटीक प्रकटीकरण की भी जिम्मेदारी है और नैतिक तरीके से अनुसंधान परिणामों का उपयोग करने के लिए बाध्य है।

22.14 सांराश

इस खंड में हमने अनुसंधान रिपोर्ट तैयार करने और प्रस्तुति के उद्देश्यों के बारे में सीखा है। प्रासंगिक सॉफ्टवेयर की कार्य क्षमता के साथ कंप्यूटर के उपयोग पर भी चर्चा की जाती है। एक शोध रिपोर्ट के प्रारूप को इसके प्रमुख वर्गो की परिधि में वर्णित किया गया था।

22.15 शब्दावली

साहित्यिक चोरी : सूत्रों को स्वीकार किए बिना माध्यमिक डेटा की प्रतिलिपि बनाना।

SPSS : सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए एक सॉफ्टवेयर।

वर्गीकरण : समरूपता के आधार पर डेटा का समूह बनाना।

माध्य : केंद्रीय प्रवृत्ति का एक माप ।

मानक विचलन : फैलाव का एक माप ।

22.16 बोध प्रश्न

रिक्त स्थान भरें

1. अनुसंधान रिपोर्ट लिखना शुरू करने से पहले क्या तैयारी की आवश्यकता है?

(ए) डेटा का विश्लेषण और समझा जाना चाहिए
(बी) अनुसंधान या निष्कर्ष को समझना चाहिए
(सी) अनुसंधान रिपोर्ट संकलित करे की रूपरेखा ज्ञात है
(डी) से सभी

2. अगर हम लिंग के आधार पर आबादी को पुरूष और महिला के रूप में वर्गीकृत करते हैं, तो निम्न वर्गीकरण में से किसके अधीन आता है?
(ए) एकाधिक वर्गीकरण
(बी) डिकोटामस क्लासिफिकेशन
(सी) दोनों
(डी) इनमें से कोई नहीं

3. डेटा के वर्गीकरण के लिए बुनियादी मानदंड क्या है?
(ए) विविधता (बी) समरूपता
(सी) संगति (डी) सत्यापनीय

4. निम्न में से कौन सा डेटा की केंद्रीय प्रवृत्ति का एक उपाय नहीं है?
(ए) माध्य (बी) माध्यकां
(सी) मोड (डी) मानक विचलन

5. अनुसंधान रिपोर्ट के निम्नलिखित में से किस अनुभाग में हमें अनुसंधान कार्य की प्रश्नावली को जोडना चाहिए ं?
(ए) परिचय (बी) परिशिष्ट
(सी) डेटा विश्लेषण (डी) निष्कर्ष

6. एक अच्छा शोध रिपोर्ट की एक विशेषता के रूप में ''सत्यापन'' शब्द से आप क्या समझते हैं?
(ए) माध्यमिक डेटा के स्त्रोत की जांच हो सकती है
(बी) शोध रिपोर्ट में उल्लिखित शोध डिजाइन को पुनः प्रस्तुत किया जा सकता है।
(सी) दोनों ए और बी
(डी) इनमें से कोई नहीं

7. निष्कर्ष लिखते समय निम्नलिखित में से किस से बचना चाहिए?
(क) कोटेशन
(बी) अन्य स्त्रोतों के संदर्भ
(सी) अनुसंधान के उद्देश्य से काम से विचलन
(डी) उपरोक्त सभी

8. निम्नलिखित में से कौन सा शैक्षणिक शिष्टाचार का गंभीर उल्लंधन माना जाता है?
(ए) स्त्रोत को स्वीकार करने के साथ द्वितीयक डेटा का उपयोग
(बी) साहित्यिक चोरी
(सी) प्राथमिक डेटा संग्रह
(डी) उपरोक्त में से कोई भी नहीं

22.17 बोध प्रश्नों के उत्तर

(ए) 1. (डी), 2. (सी), 3 . (ए) , 4 . (डी), 5. (बी), 6 .(सी) ,7. (डी), 8 .(बी)

22.18 स्वपरख प्रश्न

1. समंक के निर्वचन और विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? इसके लिए क्या उपकरण उपयोग किए जाते हैं?
2. वर्गीकरण और सारणीकरण से क्या मतलब है?
3. मात्रात्मक और गुणात्मक डेटा विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? उदाहरणों के साथ चर्चा करें
4. एक शोध रिपोर्ट के प्रमुख अनुभाग क्या हैं? चर्चा करे ।
5. अनुसंधान रिपोर्ट के परिशिष्टों के हिस्से में क्या शामिल होना चाहिए? इसके उपयोग क्या हैं ?
6. एक अनुसंधान रिपोर्ट तैयार करने में क्या नैतिकता का पालन किया जाना चाहिए?
7. अनुसंधान में कंप्यूटर के उपयोग क्या हैं? विस्तार में चर्चा करें।

22.19 सन्दर्भ पुस्तकें

1. क्रेसवेल, जान , डब्ल्यू (2008) अनुसंधान अभिकल्पना, गुणात्मक, मात्रात्मक एवं मिश्रित विधियॉ पहुॅच मार्ग। न्यूवरी पार्क, सी0ए0 सेज प्रकाशन
2. मर्कजाक, जी0आर0 डेमटेयों, डी0एवं फेसटिनजर डी0 (2005), अनुसंधान अभिकल्पना एवं प्रणाली के मूलभूत, न्यूर्याक शहर, एन0वाय0 बिले।
3. इथराइड, डान ई0, (2004) । व्यावहारिक अर्थशस्त्र में अनुसंधान प्रणाली, दरियागंज, नई दिल्ली , बिले ब्लैक बैल ।
4. वर्घ , डी0 एवं केचन, डी0 (2009) रणनीति एवं प्रबन्ध में अनुसंधान प्रणाली, बिंगले, रू0 के0 एममारैड प्रकाशन समूह
5. सी0आर0कोठारी, अनुसंधान प्रणाली : न्यू ऐज, नई दिल्ली ।
6. एन0के0 मैल्होत्रा , विपणन अनुसंधान : पियरसन्स , नई दिल्ली।