BCM-106

व्यावसायिक सांख्यिकी और गणित

BUSINESS STATISTICS & MATHEMATICS

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय

विश्वविद्यालय मार्ग तीनपानी बाई पास, ट्रांसपोर्ट नगर के पीछे, हल्द्वानी- 263139

फोन नं: (05946)-261122, 261123, 286055

टोल फ्री नं.: 1800 180 4025

फैक्स नं.: (05946)-264232, ई-मेल: info@uou.ac.in, som@uou.ac.in

http://www.uou.ac.in

www.blogsomcuou.wordpress.com

पाठयक्रम समन्वयक

डॉ. गगन सिंह , वाणिज्य विभाग, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

इकाई लेखन	**इकाई संख्या**
डॉ. ओ पी वर्मा, वाणिज्य विभाग, हिमाचल प्रदेश विश्वविद्यालय, शिमला	1-5
डॉ. उमेश मैया, प्रबन्ध एवं वाणिज्य विभाग, फर्स्ट ग्रेड कॉलेज, उडुपी, कर्नाटक	6-11
प्रोफेसर रामेन्दू रॉय, प्रबन्ध अध्ययन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद	12-14
डॉ. गगन सिंह, वाणिज्य विभाग, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी	15-17

संपादन

प्रोफेसर रामेन्दू रॉय
प्रबन्ध अध्ययन विभाग,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

डॉ. गगन सिंह,
वाणिज्य विभाग,
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

अनुवाद

डॉ. धर्मनाथ उरांव, अर्थशास्त्र विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद	1-17

आई एस बी एन : BCM-106-1(001680)
कॉपीराइट : उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय
प्रकाशन वर्ष : **2017**

Published by : उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल – 263139
Printed at : Mittal Enterprises, Delhi

बी सी एम -106 व्यावसायिक सांख्यिकी और गणित

BCM-106 BUSINESS STATISTICS AND MATHEMATICS

खण्ड-1 **सांख्यिकी और केंद्रीय प्रवृत्ति के माप (Statistics and Measure of Central Tendency)**

इकाई-1 सांख्यिकी-एक परिचय (Statistics-An introduction)

इकाई-2 आंकड़ों के प्रकार व संकलन (Types and Collection of Data)

इकाई-3 आवृत्ति वितरण, रेखाचित्र और बिंदुरेखा (Frequency Distribution, Charts and Graphs)

इकाई-4 समांतर माध्य व मध्यिका (Arithmetic Mean and Median)

इकाई-5 बहुलक एवं अन्य स्थानिक माप (Mode and Other Measures of Location)

खण्ड-2 **विचरण के माप और काल श्रेणी का विश्लेषण (Measures of Variation and Time Series Analysis)**

इकाई-6 अपकिरण व इसके माप (Dispersion and Their Measures)

इकाई-7 विषमता, परिघात, पृथुशीर्षत्व और माप (Skewness, Moments, Kurtosis and Measures)

इकाई-8 सहसंबंध विश्लेषण (Correlation Analysis)

इकाई-9 प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

इकाई-10 सूचकांक (Index Numbers)

इकाई-11 काल श्रेणी विश्लेषण (Time Series Analysis)

खण्ड-3 **प्रायिकता और सैद्धांतिक वितरण (Probability and Theoretical Distribution)**

इकाई-12 प्रायिकता सिद्धांत (Probability Theory)

इकाई-13 क्रमचय एवं संचय (Combination and Permutation)

इकाई-14 द्विपद, प्वॉयसन और प्रसामान्य वितरण (Binomial, Poisson and Normal Distribution)

खण्ड-4 **भारत में सांख्यिकीय प्रणाली (Statistical System in India)**

इकाई-15 प्रमुख सांख्यिकी (Vital Statistics)

इकाई-16 भारत में सांख्यिकीय व्यवस्था (Statistical Systems in India)

इकाई-17 भारत में शासकीय सांख्यिकी (Official Statistics in India)

इकाई 1 सांख्यिकीः एक परिचय

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- सांख्यिकी के अर्थ को समझ सकें।
- सांख्यिकी की विभिन्न विशेषताओं का वर्णन कर सकें।
- सांख्यिकी के महत्वपूर्ण विशेषताओं को जान सकें।
- सांख्यिकी के सीमाओं की पहचान कर सकें।

1.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी शब्द की उत्पति लैटिन शब्द 'स्टेट्स' अथवा इटालियन शब्द 'स्टैटिस्टा' या जर्मन शब्द स्टैटिस्टा' से लिया गया है, सभी का अर्थ 'राजनैतिक राज्य' होता है। शुरूआत में, सांख्यिकी एक देश के आर्थिक, राजनैतिक एवं जननांकी से संबंधित होते थी। लेकिन, वर्तमान में इस धारणा को बहुत पीछे छोड़ दिया है। आज के जीवन शैली में हमारे लिए सांख्यिकी का अत्यन्त महत्व है क्योंकि हमलोगों में से बहुत से लोग बिना किसी झिझक के सांख्यिकी विश्लेषण का प्रयोग करते हैं।

हाल के वर्षों में सांख्यिकी के विकास को मानव जीवन के प्रत्येक अवस्था में महसूस किया जा सकता है। सांख्यिकी केवल आकंड़ों के संग्रह एवं चित्र तथा सारणी के द्वारा प्रस्तुती तक हीं सीमित नहीं है, आज के इस अनिश्चितताओं के क्षण में अवलोकित आंकड़ों के माध्यम से विज्ञान आधारित निष्कर्षों एवं समस्त संभाव्य समस्या के समाधान तक पहुंचाने का जरिया बन गया है।

1.2 सांख्यिकी का अर्थ

सांख्यिकी का अर्थ एकवचन या बहुवचन के रूप में लिया जा सकता है। बहुवचन के रूप में, इसका अर्थ है अंकीय तथ्यों का संकलन। इस अर्थ में

लोग सांख्यिकी के बारे यहीं सोचते हैं की विभिन्न वर्षों में जनसंख्या या गेंहू का उत्पादन की मात्रा या किसी विशेष वर्ष में कितने श्रम घण्टे का क्षय हुआ है। उदाहरण के लिए, औसत, प्रतिशत एवं अंकीय तथ्यों से प्राप्त व्युतपन्न गुणांक को भी 'सांख्यिकी' के अर्थ में लिया जा सकता है।

एकवचन के अर्थ में, सांख्यिकी का अर्थ है आंकड़ों का संकलन, व्यवस्थिकरण, प्रस्तुतीकरण, विशलेषण एवं निर्वचन के विधियों को अपनाना। आगे, एकवचन में, सांख्यिकी का अर्थ है सांख्यिकीय विधि की व्याख्या करना। सांख्यिकी विधि, "एक दूरदर्शी यंत्र है जिसके द्वारा हम अपने पहूंच से ज्यादा दूर की चीज देख सकते हैं जिसे खुले आंख से नहीं देख सकते थे"। इस प्रकार, यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसके अन्तर्गत समंकों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, विशलेषण एवं निर्वचन किया जाता है।

1.3 बहुवचन या संख्यात्मक आंकड़ों के रूप में परिभाषा

"सांख्यिकी एक तथ्यों का संख्यात्मक कथन है जो किसी भी विभाग के पुनरीक्षण में एक दूसरे से संबंधित होते हैं।" **—बाउले**

"सांख्यिकी से हमारा तात्पर्य है मात्रात्मक आंकड़ों का बहुत से कारणो से अधिक हद तक प्रभावित होना।" **—यूल एव केण्डल**

"सांख्यिकी से हमारा आशय तथ्यों के उस समूह से है जो बहुत अधिक सीमा तक अनेक कारणों से प्रभावित होते है, जिन्हें अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना परिशुद्धता के उच्च स्तर के अनुसार की जाती है, जिन्हें व्यवस्थित ढंग से पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए संग्रह किया जाता है तथा जिन्हें एक दूसरे के तुलनात्मक रूप रखा जाता है।" **—होरिश सीक्रीस्ट**

होरिश सेक्रेस्टि द्वारा दी गई परिभाषा सबसे व्यापक परिभाषा है। उपर दी गई, प्रो. होरिश सेक्रस्टि की परिभाषा के अनुसार, इसके सांख्यिकी के प्रमुख विशेषताओं को निम्न रूप में विशलेषण किया जा सकता है—

(1) यह तथ्यों का समूह है। बहुवचन के रूप में, सांख्यिकी का संबंध किसी क्षेत्र से संबंधित आंकड़ों से है। लेकिन, आंकड़े सांख्यिकी के रूप तभी कहलायेगें जब उनमें निश्चित रूप से तथ्यों का समूह हो। इसका आशय है कि किसी छात्र विशेष द्वारा किसी एक विषय में अर्जित प्राप्तांक 75 प्रतिशत या किसी व्यक्ति का किसी विशेष तिथि में मृत्यु होना सांख्यिकीय मात्रा व आंकड़े नहीं है। किसी भी मात्रात्मक राशि को सांख्यिकीय आंकड़े होने के लिए मात्राओं का एक समुच्च या किसी निश्चित तथ्यों का एक समूह जैसे 50, 25, 75 इत्यादि या किसी कक्षा के विद्यार्थीयों के किसी विशेष परीक्षा में प्राप्तांक या किसी उत्पादक फर्म का दिये हुए समय में बिक्री पर प्रभाव आदि।

(2) यह बहुत से कारणों से उल्लेखनीय हद तक प्रभावित हो सकते हैं। आंकड़े, जिसे सांख्यिकी कहते हैं, जरूरी नहीं है कि स्थिर हों लेकिन परिवर्तनशील प्रकृति वाले होना अनिवार्य है। इसका मतलब यह है कि आंकड़े खुद के मान में विभिन्न समय, स्थान और दशाओं में परिवर्तन के लिए उत्तरदायी होने चाहिए। इसके आलावा आंकड़ों के मान में परिवर्तन साधनों की संख्या के बीच अर्न्तक्रिया का परिणाम होना

चाहिए और यह किसी एक दशा में, साधारणतया किसी एक कारण के द्वारा पता नहीं लगाया जा सकता हैं। क्योंकि, यह भौतिक विज्ञान या प्रायोगिक विधि की दशा में होता है। जैसे– रसायन विज्ञान में पानी, हाड्रोजन के दो अणुओं एवं ऑक्सीजन के एक अणुओं के समिश्रण के द्वारा प्राप्त किया जाता है, लेकिन सामाजिक विज्ञान में जैसे शिक्षा में किसी एक विशेष महाविद्यालय का परिणाम विभिन्न साधनों के बीच अर्न्तक्रिया पर निर्भर करता है, जैसे– विद्यार्थियों के शिक्षा का स्तर, मुल्यांकन का स्तर, निरीक्षण का स्तर और प्रश्नों का स्तर आदि। जिसके, प्रभावों का अलग–अलग अध्ययन नहीं किया जा सकता है। इस लक्षण के अनुसार, यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकी भौतिक तथा सामाजिक विज्ञान, दोनों को सामाहित किया जा सकता है।

(3) इसको संख्यात्मक रूप में प्रदर्शित किया जाना चाहिए। सांख्यिकी के अन्य लक्षण यह है कि समंकों को संख्यात्मक रूप में व्यक्त किया जाय जिससे इसकी गणना एवं मापन संभव हो सके। इसका मतलब है कि वह संमंक या तथ्य सांख्यिकी कहला सकता है जो कि किसी मात्रात्मक रूप में प्रदर्शित करने के योग्य हो जैसे– प्राप्तांक, 50, 60, 70 अथवा बिक्री (रूपये में) 2000, 15000, 75000 आदि। इसके अनुसार यह कहा जा सकता है कि गुणात्मक तथ्य जैसे– ईमानदारी, विशालता, महानता आदि, सांख्यिकी के मान नहीं होंगें जब तक कि इनकों किसी परिणात्मक व मात्रात्मक या उसके समरूप में बदल न दिया जाय।

(4) यह निश्चित रूप प्रमाणित या आंकलित योग्य होनी चाहिए। सांख्यिकी के अन्य लक्षण यह है कि, आंकड़े या तो गणना करने योग्य होना चाहिए अर्थात् जिसकी निश्चित रूप से गणना की जा सके या मापने योग्य हो या अनुमानित आकलन करने योग्य हो। यदि संमंक की संख्या या निरीक्षण का क्षेत्र बहुत बड़ा न हो तो संमंक का निश्चित गणना या माप पूर्णतया संभंव है और इस स्थिति में अन्तर या त्रुटि की कोई संभावना नहीं होती है। लेकिन यदि आंकड़े या जांच का क्षेत्र बहुत बड़ा या अनिश्चित हो तो इस दशा में संमंक की गणना करना पूर्णतया असंभव होगा। कुछ हद तक इस दशा में भी आंकड़ों का आंकलन किया जा सकता है परन्तु इसके गणना एवं मापन में कुछ अन्तर या गलतियां हो सकती है जोकि जितना संभंव हो उतना कम होना चाहिए। इसके लिए आंकड़ों का आंकलन तार्किक स्तर के यर्थातता के अनुसार होना चाहिए। तार्किक स्तर की यार्थतता, जांच के उद्‌देश्य और प्रकृति पर निर्भर करती है। उदाहरण के लिए, यदि यह एक नकम तथा लोहे की दशा हो तो इनको अनुमानित रूप से तौलने के लिए किलाग्राम का प्रयोग किया जाये तो यह पूर्णरूप से सही होगा। लेकिन, यदि यह सोने या हीरे की तरह किसी कीमती वस्तु की दशा हो तो यह ग्राम में भी तौलने पर भी भारी त्रुटि मानी जायेगी।

इस प्रकार जांच के उद्देश्य एवं प्रकृति को ध्यान में रखते हुए, तार्किक यर्थातता को बताना आवश्यक होता है।

(5) यह सुव्यवस्थित रूप में संकलित किया जाना चाहिए। सांख्यिकी के अन्य आवश्यक लक्षण यह है कि आंकड़े व्यवस्थित या विधिक रूप में इक्ट्ठा किया जाना चाहिए। क्योंकि अव्यवस्थित रूप से एकत्रित किए गये आंकड़े गलत निष्कर्ष या विश्लेषण दे सकते हैं। प्रो. सीक्रीस्ट के शब्दों में, ''मात्रात्मक सूचनाओं में भ्रम व भटकाव और अविवेकपूर्ण स्त्रोतों से लिया गये तथ्य संख्यात्मक होने के बावजूद सांख्यिकी नहीं हो सकता है।'' इस प्रकार एक अर्थपूर्ण स्तर की शूद्धता एंव पुष्टिपरक सांख्यिकीय परिणाम के लिए एक उचित योजना या अनुसूची तैयार कर किसी सैनिक या प्रशिक्षित अन्वेषक को आंकड़ो के एकत्रीकरण के लिए लगाना चाहिए।

6. इनका एकत्रीकरण एक पूर्व–निर्धारित उद्देश्य के लिए करना चाहिए। संमंक के अन्य विशेषता ये होने चाहिए कि, सांख्यिकीय आंकड़े पूर्वनिर्धारित उद्देश्य या लक्ष्य के अनुसार संकंलित किया जाना चाहिए। इसका अर्थ यह हुआ कि संमंकों के संकंलित करने से पूर्व हमें पूर्व निर्धारित उद्देश्य एंव लक्ष्य तैयार कर लेना चाहिए। काई भी संकंलित आंकड़े जो बिना पूर्वनिर्धारित उद्देश्य के की गई हो वो संमंक बाद में निर्धारित उद्देश्य के लिए उपयोगी नहीं हो सकती है। उदाहरण के लिए, यदि एक सनकी व्यक्ति, किसी चबूतरे में बैठकर, गाड़ियों की गिनती कर रहा है जो उसके पास से होकर गुजर रही है, तो यह सांख्यिकी की मात्रा या संमंक नहीं होगी, क्योंकि ऐसे आंकड़ों का संकलन करने के पीछे कोई उद्देश्य नहीं है।

7. इन्हें एक दूसरे के बीच संबंध रखने में योग्य होना चाहिए। यह अतिंम पर कम महत्व वाली विशेषता नहीं है। किसी आंकड़े को सांख्यिकी कहलाने के लिए, एक दूसरे के बीच सम्बन्ध स्थापित करने में सक्ष्म होना चाहिए। इसका मतलब है कि आंकड़े सजातीय विशेषता वाला होना चाहिए जिससे उनके बीच तुलना किया जा सके। विजातीय आंकड़े जैसे– रूपये में 10,000 की बिक्री, 60 प्रतिशत परिणाम, 50 मामले का अपराध, 30 किलो मीटर का लाभ आदि एक दूसरे के बीच कमी सम्बन्ध स्थापित नहीं कर सकता और नहीं विश्लेषण के लिए व्याख्या और तुलना कर सकता है, जो कि सांख्यिकी के विज्ञान का गुप्त उद्देश्य है।

इस प्रकार बहुवचन भाव में आंकड़ो के आवश्यक विशेषता की व्याख्या से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि सभी सांख्यिकी, संख्यात्मक आंकड़े होते हैं परन्तु सभी संख्यात्मक आंकड़े सांख्यिकी नहीं होते हैं। जब तक कि वे सभी आवश्यक विशेषताओं को सन्तुष्ट न करें जिनको उपर दर्शाया गया है।

1.4 एकवचन के अर्थ में परिभाषा या सांख्यिकीय विधि के अर्थ में सांख्यिकी

कुछ सांख्यिकीविद्, सांख्यिकी को एकवचन के अर्थ में परिभाषित करते हैं या सांख्यिकीय विधियों के रूप में संमंकों का संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना, विशलेषण एवं निर्वचन हीं सांख्यिकी कहलाता है।

''सांख्यिकी मात्रात्मक संमंकों के संकंलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना और निर्वचन के सिद्धान्त एवं तकनीक का अंग है।'' **—टर्टल**

''सांख्यिकी संख्यात्मक समंकों का संकलन, वर्गीकरण, विशलेषण एंव प्रस्तुतीकरण है।'' **—काक्स्टन एंव काउडेन**

''सांख्यिकी वह विज्ञान है जो विषय पर प्रकाश डालने के उद्‌देश्य से एकत्र किये गये आंकड़ों के संग्रहण, वर्गीकरण, प्रदर्शन, तुलना और व्याख्या करने का विवेचना करता है।'' **—सेलिंगमैन**

इन परिभाषाओं से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सांख्यिकी, संख्यात्मक तथ्यों के अध्ययन के लिए वैज्ञानिक विधियों का संकलन है।

साख्यिकी की विशेषताएं, सांख्यिकीय विधि या एकवचन के रूप मेंः—

सांख्यिकी को एक विज्ञान माना जाता है। जब सांख्यिकी का अध्ययन सांख्यिकीय विधि या एक वचन के अर्थ में उन सभी विधियों का प्रयोग किया जाता है जिसमें मात्रात्मक समंकों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, विशलेषण एवं निर्वचन को सम्मिलित किया जाता है।

इस प्रकार सांख्यिकीय विधि या सांख्यिकी एक विज्ञान के रूप में, की विशेषताएं निम्नलिखित हैं—

1. **समंकों का संकलनः** सांख्यिकी खोज व जांच में समंकों का संकलन प्रथम चरण होता है। समंकों के संकलन की तकनीक अध्ययन के उद्‌देश्य पर निर्भर करता है। आंकड़े हीं विश्लेषण के मुख्य आधार होते हैं, अतः इन्हें बहुत सावधानी पूर्वक संकलित किया जाना चाहिए। ये समंक इस प्रकार हों कि अध्ययन के उद्‌देश्य को पूरा करता हो।
2. **समंक का संगठनः** समंको के संकलन के बाद उसका संगठन उचित तरीके से हो जिसमें सम्पादन, वर्गीकरण एंव सारणीयन सम्मिलित होना चाहिए। सम्पादन अवांछनीय तत्वों को हटाने में सहायक होता है। समंकों का वर्गीकरण का अर्थ है कि किसी सामान्य विशेषता के आधार पर उन्हें कोई क्रम या विन्याश प्रदान करना। जबकि, सारणीय समंकों को पंक्तियों एवं स्तम्भों में व्वस्थित करती है।
3. **समंकों का प्रस्तुतीकरणः** समंकों के वर्गीकरण के उपरान्त उचित व योग्य तरीके से यानि चित्र या रेखाचित्र के माध्यम से प्रस्तुत किया जाता है।
4. **आंकड़ो का वि**श्लेषणः समंकों का विश्लेषण, इसके प्रस्तुतीकरण पर आधारित होता है। साधारण गणितीय तकनीकों का विश्लेषण में प्रयोग किया जाता है। इसमें केन्द्रीय प्रवृति के माप, अपकिरण की माप, सहसंबंध एवं प्रतीपगमन आदि सम्मिलित किये जाते हैं। विश्लेषण का मुख्य उद्‌देश्य, अर्थपूर्ण या उचित निष्कर्ष को प्राप्त करना होता है।

5. **निर्वचनः** सांख्यिकीय विधि में निर्वचन अंतिम चरण होता है। विश्लेषित आंकडों से अर्थ को व्यूतपन्न करना हीं निर्वचन कहलाता है। इसके अन्तर्गत सांख्यिकीय चिन्तन, कौशल एवं अनुभव को सम्मिलित किया जाता है। निर्वचन हीं विश्लेषित समंको से अंतिम निष्कर्ष निकालता या प्राप्त करता है।

1.5 सांख्यिकी के कार्य

इस अवस्था में सांख्यिकी विज्ञान एवं सांख्यिकविदों की भूमिका तथा इनकें कार्यों की जांच करना जरुरी हो जाता है। यदि उपरोक्त कथनों का विश्लेषण करें तथा हम सांख्यिकी के विज्ञान की कार्यों की निम्न रूप में पायेगें।

तथ्यों को व्यवस्थित रूप में संकलन एवं प्रस्तुत करना

सांख्यिकी का एक महत्वपूर्ण कार्य है कि तथ्यों एंव चित्रों का क्रमवार तरीके से संकलन करना तथा इस तरह से प्रस्तुत करना कि असानी से पढ़कर समझा जा सके। आंकड़ों के संग्रह की कई वैज्ञानिक विकसित तकनीक है जो अच्छे परिणाम देतें हैं, जैसे हैपगर्ड की समंक सग्रहण विधि। अतः समकों का संकलन बड़ी सावधानी से करना चाहिए। संग्रहित संमक बहुत हीं संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करने चाहिए। यदि आंकड़ें वृहत व सघन हो तब इसे समझने काफी कठिनाई होती है। ऐसे आंकड़े व चित्र व्यक्ति के मानसिक समझ के परे होते हैं। यदि आंकड़ों में समझने का गुण न हो तो इसका कोई उपयोग नहीं है। यदि भारत के सभी कपड़ा उद्योगों के उत्पादन संबंधी आंकड़ो के 10 वर्षों का अध्ययन करना चाहें, तो इनके उत्पादन में विचरण का विश्लेषण कठिन होगा। लेकिन, यदि सभी कपड़ा उद्योगों के प्रत्येक वर्ष के औसत उत्पादन के आकड़े उपलब्ध हो तो वो ज्यादा उपयोगी व अर्थपूर्ण होंगें।

1. **परिकल्पनाओं के रचना एवं जांच में सहायक**

   सांख्किीय विधियां विभिन्न प्रकार के परिकल्पनाओं की रचना एवं जांच के लिए बहुत उपयोगी है। सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र में इन परिकल्पनाओं की रचना एवं उनका जांच बहुत महत्वपूर्ण कार्य है। सांख्यिकीय विधि परिकल्पनाओं के जांच के प्रयोग से हम यह पता लगा सकते है कि वास्तव में भारतीय उपभोक्ता ब्राण्ड के प्रेमी हैं, या क्या वे वस्तु के प्रचलित कीमत से प्रभावित हैं, या क्या रेलवे के भाड़े में वृद्वि होना सड़क में भीड़ का कारण है और क्या सार्वजनिक क्षेत्र के प्रतिष्ठानों में आधिकारिक अतिथि के कारण भीड़ बढ़ी है।

2. **किसी विषिष्ट प्रकार के घटना संबंधी पूर्वानुमान में सहायक ताकि उनसे संबंधित योजनाएं एवं नीतियां बनाने में सहायक**

   बहुत से संस्थानों में विकास की योजनाएं, क्रियान्वयन से पूर्व तैयार की जाती है। यहां तक की सरकारें भी विकास योजनाएं क्रियान्वयन से पूर्व भविष्य में क्या होगा, इसका अनुमान लगाती चाहती है। हमारे देश में पंचवर्षीय योजना इसका अच्छा उदाहरण है। अगले पांच वर्षों के बारे में सोचते हुए, पूर्व में घटित व वर्तमान में क्या स्थिति है, के अधार पर नीतियां बनाई जाती है।

1. मानव अनुभव को बढ़ाने एवं व्यक्ति को अधिक चिन्तनशील बनाने के लिए
सांख्यिकी विज्ञान मानव व्यवहार को उत्कृष्ट एवं ज्ञान के माध्यम से समझने में सरल, ब्याख्या एवं एक एक व्यक्ति के क्रिया का दूसरे के क्रिया के प्रभाव के माप को आसान बना देता है। ज्ञान के बहुत सी शाखाएं सदैव व्यक्ति के पहुंच से बाहर था, परन्तु सुयोग्य एवं परिष्कृत तथा उच्च सांख्यिकी विधी से यह सरल हो गया है। यह एक ऐसा उपाय सुझाता है जिसके प्रयोग से, व्यक्ति किसी भी समस्या एवं उचित समस्याओं के सही दिशा की ओर सूचित करता है।

1.6 सांख्यिकी के उपयोग

प्राचीन काल के इतिहास से पता चलता है कि मिस्त्र एवं चीन के लोग सांख्यिकी का प्रयोग रिकार्ड रखने के लिए करते थे। 2000 बी. सी. पूर्व चीन के राज चाउ के शासन में सम्पूर्ण राजस्व एकत्रीकरण एवं सरकारी व्यय से संबंधित सूची के लिए सांख्यिकी काय प्रयोग किया जाता था। वे यूद्व के सीपाहियों के रिकार्ड की उपलब्धता संबंधी जानकारी रखते थे। आज सांख्यिकी एक महत्वपूर्ण ज्ञान का विषय बन गया है जिसका प्रयोग बहुत सारे क्षेत्रों में किया जा रहा है जैसे कृषि, उद्योग, मनोविज्ञान, इकोलाजी, अर्थशास्त्र, बीमा, व्यवसाय, व्यापार, सामाजशास्त्र, विज्ञान, योजना प्रबंधन, शिक्षाशास्त्र इत्याादि। ऐसा शायद ही कोई मानव व्यवहार का क्षेत्र होगा, जिसमें सांख्यिकी का प्रयोग नहीं होता हो। जिन क्षेत्रों में सांख्यिकी एवं प्रायकिता का प्रयोग हो रहा है उनमें लगातार बढ़ते हीं जा रहे हैं। विशेष रूप से विज्ञान, अर्थशास्त्र, मनाविज्ञान में अत्याधिक जैसे जैव सांख्यिकी, अर्थमिति एवं मनोसांख्यिकी इत्यादि।

व्यापार, वाणिज्य एवं उद्योग में सांख्यिकी: सांख्यिकी को व्यवसाय, वाणिज्य एवं उद्योग से संबंधित गतिविधियों के विशलेषण में अमूल्य माना जाता है। सांख्यिकीविद् आजकल सभी प्रगतिशील उद्योगों के प्रत्यक्ष गुणवता नियन्त्रण एवं बहुत अच्छे विज्ञापन तथा बिक्री पद्वति को अपनाने व तय करते हैं। किसी भी उत्पादन प्रक्रिया का मुख्य उद्देश्य होता है कि वस्तु की गुणवता को नियंत्रित किया जाय ताकि एक विशिष्टिकरण पुष्टि हो सके। व्यवसाय व व्यापार में सांख्यिकी का मुख्य जिम्मेवारी पूर्वानुमान का है, इसके लिए काल श्रेणी समंकों का विश्लेषण एवं सूचकांक का निर्माण किया जाता है। काल श्रेणी विशलेषण एक महत्वपूर्ण सांख्यिकीय औंजार है जिसका प्रयोग व्यवसाय में दिशा तथा संभावित वस्तुंओं के मांग का आकलन करने के लिये किया जाता है। इसके अतिरिक्त काल श्रेणी विशलेषण का प्रयोग मुख्य रूप से व्यवसाय में ''व्यापार चक्र'' के अध्ययन के लिए किया जाता है जिसे चार चरण, समृद्वि, अधोमुखी, अवसाद एवं पुनरूद्वार के नाम से जानते हैं। कीमत सूचकांक का अध्ययन व्यपारी व व्यवसायी को मुद्रा की क्रय शक्ति के विषय में विचार प्रदान करता है।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी: सांख्यिकी विशलेषण के सांख्यिकीय आंकड़े एवं उच्च तकनीक विभिन्न तरह के आर्थिक समस्याओं समाधान जैसे उत्पादन, उपभोग, आय का वितरण, सम्पति, कीमत, बचत, निवेश, बेराजगारी, निर्धनता आदि के

लिए महत्वपूर्ण हाथियार के रूप में प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, उपभोग से संबंधित आंकडों के विशलेषण, समाज के विभिन्न वर्गों के द्वारा वस्तुओं के उपभोग स्वरूप को प्रदर्शित करेगा। राष्ट्रीय आय एवं सम्पति के आंकड़े आय असमानता कम करने संबंधी नीतियां बनाने में सहायक हो सकती है। कीमत, मजदूरी, उपभोग, बचत एवं निवेश आदि से संबंधित आंकड़े विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक होती है।

आर्थिक सिद्वान्तों का विकास भी सांख्यिकी के प्रयोग से हीं संभव हो सका है। उदाहरण के लिए, विभिन्न आर्थिक नियम जैसे ''इन्जेल का उपभोग नियम'', ''आय वितरण का नियम'' आदि के बनाने में सांख्यिकी का प्रयोग वांछनिय है। काल श्रेणी विशलेषण, सूचकांक, पूर्वानुमान तकनीक एवं मांग विशलेषण कुछ ऐसे शक्तिशाली सांख्यिकी हथियार है, जिसका प्रयोग मुख्य रूप से आर्थिक योजना के निर्माण के लिये आर्थिक आंकड़ो के विशलेषण के द्वारा किया जाता है।

भौतिक एवं प्राकृतिक विज्ञान में सांख्यिकीः भौतिक एवं प्राकृतिक विज्ञान जैसे ज्योतिष विज्ञान, कृषि, जीव विज्ञान चिकित्सा, जैव विज्ञान, मेटरोलाजी, इत्यादि में अत्याधिक रूप से सांख्यिकी तकनीक प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, कृषि विज्ञान एवं जैव विज्ञान, आदि में सांख्यिकी आंकड़ो के प्रयोग से विभिन्न कारकों का जीवों व पौधों के वृद्वि एवं विकास में सूक्ष्म योगदान का अध्ययन किया जा सकता है। चिकित्सा विज्ञान के अन्तर्गत किसी दवा का, किसी व्यक्ति विशेष पर क्या प्रभाव पड़ा इसके अध्ययन के लिए सांख्यिकी विधि का विस्तार रूप से प्रयोग किया जाता है। हाल के वर्षों में सांख्यिकी का प्रयोग किसी जीव जगत के कुल संख्या के आकलन के लिए भी किया जाता है।

शोध में सांख्यिकीः शोध के क्षेत्र में सांख्यिकी का बड़ा महत्व है। विशेषरूप से ज्ञान की उत्कृष्टता इन्हीं सांख्यिकीय विधि के प्रयोग से हीं प्राप्त किया जाता है। व्यवहारिक बाजार एवं उत्पादन शोध में सांख्यिकी विधि का व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। यह विज्ञापन एवं उन्नति नीतियों, विकी पूर्वानुमान, नई उत्पाद निर्णय आदि को भी सम्मिलित करता है।

1.7 सांख्यिकी की सीमाएं

संख्यिकी का बृहत क्षेत्रों में उपयोगिता के बावजूद, इसकी पहचान को किसी जादूई यंत्र नहीं समझा जा सकता है जिससे सदैव समस्या का सही निदान मिल सके। सही तरीके से आंकड़ों के संकलन, आलोचनात्मक निर्वचन के बावजूद भी कुछ गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते है। अतः इसके सीमाओं और सांख्यिकी के संभावित गलत प्रयोग को जानना और भी आवयश्क हो जाता है। सांख्यिकी विज्ञान के महत्वपूर्ण सीमाएं निम्नलिखित हैं–

संख्यिकी व्यक्तिगत माप से संबंध नहीं रखताः चूंकि सांख्यिकी तथ्यों के समूह का वर्णन करता है, फलतः व्यक्तिगत माप का अध्ययन सांख्यिकी के विषय क्षेत्र से बाहर हो जाता है। जब आंकड़े समूह को मापते हैं तब सांख्यिकी होते हैं जबकि किसी व्यक्तिगत मद या घटना का अध्ययन करते हैं तो ये अलग अस्तित्व प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिए, किसी व्यक्ति विशेष द्वारा किसी दी

गई समय में अर्जित मजदूरी का अध्ययन सांख्यिकी नहीं है। लेकिन किसी उद्योग में कार्यरत मजदूरों के मजदूरी अध्ययन एक सांख्यिकी है। इसी प्रकार, किसी एक छात्र की प्राप्तांक या उचांई का अध्ययन सांख्यिकी का विषय क्षेत्र नहीं है परन्तु, औसत प्राप्तांक या औसत उंचाई एक सांख्यिकीय संर्दभ को प्रस्तुत करता है।

संख्यिकी केवल मात्रात्मक विशेषताओं की बात करता है: साख्यिकी संख्यात्मक तथ्यों का कथन है। वैसी विशेषताएं सांख्यिकी विशलेषण में शामिल नहीं किये जा सकते जिन्हें संख्या में व्यक्त नहीं किया जा सकता। इस प्रकार, गुणात्मक विशेषताएं जैसे ईमानदारी, क्षमता, बुद्विमता, अंधेपन एंव गूंगापन आदि का प्रत्यक्ष अध्ययन सांख्यिकी में संभव नहीं है। यद्यपि, इनका भी अध्ययन संभव हो सकता यदि इन्हें संख्यात्मक रूप में व्यक्त किया जाय। उदाहरण के लिए, एक लड़के की बुद्विमता की जांच उसके परीक्षा के प्राप्ताकं से किया जा सकता है।

सांख्यिकी निष्कर्ष औसत रूप में सत्य होते हैं: सांख्यिकीय विधि से प्राप्त निष्कर्ष सार्वभौमिक सत्य नहीं होते हैं, बल्कि कुछ शर्तों के साथ हीं सत्य हो सकते है। क्योंकि सांख्यिकी विज्ञान, प्राकृतिक विज्ञान के तुलना में अल्प सर्पूण विज्ञान है।

सांख्यिकी किसी एक समस्या के अध्ययन की एक विधि मात्रः सांख्यिकी तकनीक सभी परिस्थितियों में सुयोग्य निदान प्रदान नहीं करता है। प्रायः किसी समस्या के अध्ययन के लिए हमें देश की संस्कृति, धर्म एवं दर्शन का आवयश्क रूप से प्रयोग करना होता है। अतः सांख्यिकी निष्कर्ष किसी भी साक्ष्य के सम्पूरक के रूप में हो सकते हैं।

सांख्यिकी का गलत प्रयोग हो सगता है: सांख्यिकी की सबसे बड़ा कमी है कि इसका गलत इस्तेमाल हो सकता है। सांख्यिकी का गलत प्रयाग कई कारणों से हो सकता है। उदाहरण के लिए, यदि सांख्यिकी निष्कर्ष अपूर्ण सूचना पर आधारित हो तब गलत निष्कर्ष प्रदान कर सकता है। इस प्रकार, यह दलील देना कि बियर पीना दीर्घ आयु के लिए गलत आदत है क्योंकि 99 प्रतिशत व्यक्ति जो बियर का सेवन करते हैं वो 100 वर्ष से पूर्व मर जाते हैं एक सांख्यिकी के दोष को दर्शाता हैं, क्योंकि ऐसे बहुत से लोग हैं जो बियर का सेवन न करने के बावजूद जल्द ही मर जाते हैं। सांख्यिकी एक क्ले व रोगन की तरह है जिसे जैसा चाहे हम आकार दे सकते है चाहे वह गलत व सही हो।

1.8 सारांश

इस प्रकार, उपरोक्त विवेचना से यह स्पष्ट होता है कि हाल के दिनों में, सांख्यिकी का प्रयोग गहन एवं प्रभावी तरीके से सामाजिक जीवन में जैसे लिखने एवं पढ़ने की क्षमता मानव जीवन का अहम भाग हो गया है। इसे वृहत रूप से एंकवचन में सांख्यिकीय विधि तथा बहुवचन के रूप में साख्यिकीय समंक के नाम से जाना जाता है। सांख्यिकी जटिल आंकड़ों को भी सरल तरीके से समझने में मदद करता है। इसका प्रयोग तुलना करने, परिकल्पना की रचना एवं जांच, पूर्वानुमान एंव नीतियां बनाने में भी किया जाता है। शायद हीं ऐसा कोई क्षेत्र हो जिसमें सांख्यिकी का प्रयोग नहीं होता हो।

सांख्यिकी के महत्व को किसी राज्य से संबंधित कीमत, उत्पादन, उपभोग, आय, व्यय, निवेश, लाभ, जनसंख्या आदि प्रयोग के रूप में परीक्षण कर सकते हैं। सांख्यिकीय विधि का प्रयोग अर्थशास्त्र के सभी शाखाओं में सघन तरीके से किया जाता है। यह व्यवसाय प्रबंधन जैसे, उत्पादन, विपणन, वित्त एवं कर्मचारी के लिए भी बहुत उपयोगी है। हाल के कुछ दिनों में, भौतिक विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान एवं संगणक विज्ञान के क्षेत्र सांख्यिकी विधी के प्रयोग में निरन्तर विस्तार हो रहा है।

सांख्यिकी की उपयोगिता विभिन्न क्षेत्रों में होने के बावजूद अपनी सीमाओं से इसके विषय क्षेत्र एवं उपयोगिता सीमित हो जाते हैं। एक सांख्यिकविद्, साख्यिकी के नियम को कभी नहीं भूल सकते कि केवल औसत एवं उसी शुद्वता की प्रशंसा नहीं कर सकता जो प्रयोगात्मक विधि से प्राप्त है। एक छोटी सी गलती भी पूरे सांख्यिकी विधि व निष्कर्ष को गलत कर सकता है। उसे निष्पक्ष होकर एक सच्चे शोधार्थी के रूप कार्य करना चाहिए तभी एक अच्छे निष्कर्ष तक पहुंचा जा सकता है।

1.9 शब्दावली

- **सांख्यिकी आंकड़ेः** सांख्यिकी को बहुवचन के रूप में परिभाषित किया जाता है।
- **सांख्यिकी विधिः** सांख्यिकी को एकवचनत के अर्थ में परिभाषित करते है।

1.10 बोध प्रश्न

1. दिये गये कथन सत्य या गलत है बतायें

1. सांख्यिकी शब्द का अर्थ केवल संख्यात्मक आंकड़ों को इंगित करना है।
2. सांख्यिकी बहूत से कारणों से प्रभावित होते हैं
3. एक संख्यात्मक मूल्य सांख्यिकी नहीं है।
4. ''सांख्यिकी, एक गणना का विज्ञान है।'' यह एक व्यापक परिभाषा है।

2. बहुविकल्पीय चयन प्रश्न

1. निम्नलिखित में से कौन सा कथन सांख्यिकी के लिए सत्य नहीं है?

   क. सांख्यिकी कभी–2 सांख्यिकीविद्ों के द्वारा गलत प्रयोग होता है।

   ख. सांख्यिकी की शायद हीं कोई सीमाएं है।

   ग. साहसिक व्यापार के प्रबंधन में सांख्यिकी एक अनिवार्य शास्त्र है।
2. निम्नलिखित कथन में से कौन सांख्यिकी के बारे में उचित व्याख्या करता है।

   क. सांख्यिकी गणना का विज्ञान है।

   ख. सांख्यिकी औसत का विज्ञान है।

ग. सांख्यिकी, आंकड़ो का संकलन, संगठन, प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण के द्वारा एक उचित निष्कर्ष से संबंध रखता है।

1.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1 1. गलत 2. सही 3. सही. 4. गलत

2 1. ख 2. ग

1.12 स्वपरख प्रश्न

1. ''सभी सांख्यिकी संख्यात्मक आंकड़े है लेकिन सभी संख्यात्मक आंकड़े सांख्यिकी नहीं है'' वर्णन कीजिए।
2. संख्यिकी क्या है? इसके कार्य की व्याख्या कीजिए।
3. संख्यिकी के उपयोग एवं सीमाओं का उल्लेख कीजिए।

1.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons, Educational Publisher, New Delhi, India.
4. Digambar Patri, "Business Statistics", KaIyani Publishers, Ludhiyana, India.
5. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
6. R. P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac, Millan India ltd., Delhi, India.

*****

इकाई 2 आंकड़ो के प्रकार एवं संकलन

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- सांख्यिकीय विश्लेषण की लिए विभिन्न तरह के आंकड़ो की आवश्यकता को समझ सकें।
- प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ो के अर्थ को समझ सकें।
- प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों से संबंधित विधियां और उनके स्त्रोत का वर्णन कर सकें।
- किसी समस्या के अध्ययन हेतु प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ो का चुनाव कर सकें।

2.1 प्रस्तावना

किसी भी ज्ञान की शाखा के लिए आंकड़ें प्राथमिक आगत होतें हैं। आंकड़ों का संकलन अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के विषय से निर्धारित नहीं होते है। ये सभी क्षेत्रों के जांच के मूल कच्चे पदार्थ है। चिकित्सा क्षेत्र में लगे हुए व्यक्ति बिमारियों से संबंधित, संक्रमित लोगों एवं संबंधित उपचार के परिणाम आदि से संबंधित सूचना का एकत्रीकरण; राजनैतिक विज्ञान सें संबंधित लोग जनता की मतदान व्यवहार के बारे में सूचना एकत्रीकरण, सामाजशास्त्र को जाति व्यवस्था, अन्तर जातिय विवाह, नगरीकरण, दहेजप्रथा, महिलाओं की स्थिति आदि से संबंधित सूचनाओं की आवश्यकता होती है। कृषि विज्ञान उत्पादन की प्रवृति, फसल प्रारूप, शंकर प्रकार के बीजों वाली भूमि, गहन खेती आदि से संबंधित आंकड़े एकत्र करते हैं।

समंक हीं अर्थशास्त्र विषय का आधार है। आर्थिक समंक, आर्थिक नीतियों के निर्माण को प्रमुख आधार है। कोई भी उचित आर्थिक नीतियां जैसे निर्धनता उन्मुलन एवं बेरोजगारी, कीमत में वृद्धि को रोकना, विकास, विदेशी व्यापार, कृषि का विकास एवं उद्योग आदि में काफी कठिनाई होगी यदि इन आर्थिक

मुद्दों से संबंधित पूर्ण सूचनाएं सरकार को न मिले। किसी भी क्षेत्र के सामाजिक–आर्थिक समस्या के स्वभाव, क्षेत्र, कारण एवं प्रभाव से संबंधित आंकड़ें इन समस्याओं के तीव्र समाधान के लिए अप्रत्यक्ष साधन प्रदान करते है।

2.2 समंक संकलन की प्रारम्भिक बातें

किसी भी अच्छे एवं बेहतर आर्थिक नीतियों के निर्माण एवं उसकी सफलता समंकों की गुणवता व विश्वसनीयता पर निर्भर करती है जिनपर ये नीतियां आधारित है। किसी भी आर्थिक समंकों की विश्वसनियता एवं बेहतर गुणवता तय करने के लिए प्रमुख व सर्वोच्च विसवसनीय शोधार्थी या सरकारी विभागों को समंक संकलन कार्य में लगाया जाना चाहिए।

संमंकों के संकलन की पद्धतियां निम्नलिखित हैं जिसे स्पष्ट, उचित एवं प्रभावी रूप से तैयार किया जाना चाहिए।

1. परीक्षण का उद्देश्य स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ताकि समंक संकलन में लगे व्यक्तियों को भी अच्छी तरह से पता हो कि कौन से आंकड़े एकत्र किये जाने चाहिए।
2. समंक सकंलन का क्षेत्र, समय एवं स्वभाव जिसका सकंलन करना है, इसके पूरे तंत्र, पूर्ण रूप से निर्धारित होना चाहिए।
3. किसी भी सांख्यिकी परीक्षण के लिए समंक सकंलन से पूर्व यह तय कर लेना चाहिए कि आंकड़ों के प्रकार क्या है अर्थात् प्राथमिक और द्वितीयक आंकड़े।
4. किस प्रकार के आंकड़े व सर्वेक्षण करना है इसका निर्णय अध्ययन के प्रारम्भिक स्तर पर हीं तय कर लेना चाहिए। सर्वेक्षण संगणना या निदर्शन पर आधारित हो सकता है। किसी भी सर्वेक्षण के प्रकार का चुनाव परीक्षण की आवश्यकता पर निर्भर करता है।
5. सर्वेक्षण दल के सदस्यों का प्रशिक्षण सबसे महत्वपूर्ण कार्य तत्व है। समंकों का सकंलन एक परिकृष्त तकनीक है जिसके लिए सांख्यिकी ज्ञान, विशेषज्ञय एवं चातुर्य की आवश्यकता होती है। अप्रशिक्षित प्रगणक आंकड़ों के गुणवता को क्षति पहुंचा सकते हैं। गैरअनुभवी सर्वेक्षणक को भी अच्छी प्रशिक्षण के द्वारा समंकों के उच्च गुणवता को सकंलित किया जा सकता है।

2.3 आंकड़ों के प्रकार

किसी भी परीक्षण के लिए उद्देश्य एवं विषय क्षेत्र एकदम स्पष्ट होना चाहिए अर्थात् शोधकर्ता या अन्वेषक को निर्धारित कर लेना चाहिए कि आंकड़े किस स्त्रोत से लिया जाना है। आंकड़े दो तरीकों से एकत्रित किए जा सकते हैं;

1. आंकड़े स्वयं अन्वेषक या उनके द्वारा नियुक्त व्यक्ति के माध्यम से किये जा सकते हैं; और
2. प्रकाशित स्त्रोतों से भी वह आंकड़े एकत्र कर सकते हैं।

शोधाकर्ता व अन्वेषक द्वारा मूल स़्त्रोतों से एकत्रित समंक प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं। लेकिन, यदि शोधकर्ता अन्य स्त्रोतों से प्राप्त आंकड़ों का प्रयोग

करे तब ऐसे आंकड़े द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं। अतः आंकड़े दो प्रकार के होते हैं:

1. प्राथमिक समंक
2. द्वितीयक समंक

2.3.1 प्राथमिक समंक

ये समंक एक अन्वेषक या अभिकरण द्वारा पहली बार सांख्यिकीय अन्ज्ञवेषण के उद्‌देश्य से संकलित किया जाता है। ये प्रथम स्त्रोत की सूचनाएं होती हैं। प्रो. होरिश सेक्रीष्ट के अनुसार, ''...प्राथमिक समंक का अर्थ उन समंकों से है जो मूल व वास्तविक है, अर्थात् जिसमें छोटा या समूह नहीं बने हों, ये तत्व लिपिपद्ध या पदों को अंकों के रूप व्यक्त हो। ये आवश्यक रूप से कच्चे आंकड़े होते हैं।'' प्राथमिक समंक जो एक बार संकलित हैं और प्रकाशित या प्रयोग होने के बाद द्वितीय आंकड़े कहलाते हैं। जहां तक संभव हो सके प्राथमिक समंकों का प्रयोग किया जाना चाहिए इसके निम्नलिखत कारण है–

1. द्वितीयक स्त्रोत के समंक में त्रुटियां हो सकती है जब प्राथमिक स्त्रोतो से अंकों का लिपीकरण किया जा सकता है।
2. प्राथमिक स्त्रोतों में प्रयोग किये जाने वाले परिभाषा एवं संबंधित इकाईयों का उल्लेख होता है।
3. प्राथमिक स्त्रोतों के अन्तर्गत समंकों के संकलन में प्रयुक्त अनुसूची एवं न्यायदर्श के चयन संबंधी प्रक्रियाओं की प्रति प्रायः शामिल किया जाता है।
4. प्राथमिक स्त्रोत प्रायः समंकों को विस्तृत रूप में प्रस्तुत करता है।

प्राथमिक समंक के संकलन की विधियां

हम प्रायोगिक शोध में जब प्रयोग करते हैं तब प्राथमिक आंकड़े एकत्र करते हैं लेकिन वर्णनात्मक शोध के स्थिति में हम सर्वेक्षण का प्रयोग करते हैं भले हीं न्यायदर्श सर्वेक्षण या संगणना सर्वेक्षण हो। तब हम प्राथमिक समंक, अवलोकन या प्रतिवादी से एक रचना या दूसरी या व्यक्तिगत साक्षत्कार द्वारा प्रत्यक्ष संचार स्थापित करके एकत्रित कर सकते है। इस प्रकार, दूसरे शब्दों में, प्राथमिक समंक के संकलन के बहुत सी विधियां है विशेष रूप से सर्वे एवं वर्णनात्मक शोध के क्षेत्र में। कुछ महत्वपूर्ण विधियां निम्नलिखित हैः–

1. अवलोकन विधि
2. साक्षात्कार विधि
3. प्रश्नावली विधि
4. अनुसूची विधि
5. अन्य विधियां जो गांरटी कार्ड, वितरक अंकेक्षण, पैंन्ट्री अंकेक्षण, उपभोक्ता समुदाय, यांत्रिक युक्ति आदि।

अवलोकन विधि

अवलोकन विधि एक लोकप्रिय समंक सकंलन विधि है जिसका सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है विशेष रूप से व्यवहारिक विज्ञान के अध्ययन में। व्यक्ति एवं उनके व्यवहार किसी विशेष पसंद की स्थिति में किस प्रकार है, इसे सूचना एकत्र करने के लिए सामान्यतः प्रयोग किया जाता है। ऐसे बहुत से अध्ययन है

जिसके अन्तर्गत खरीदारी व्यवहार से संबंधित घटक जो इन्हें प्रभावित करते है, जैसे ब्राण्ड चुनाव एवं मात्रात्मक खरीदारी के लिए सलाह देने वाले कार्यकर्ताओं की उपलब्धता एवं उनकी निर्भरता। अवलोकन विधि के अन्तर्गत, अनवेन्षक अपने प्रत्यक्ष अवलोकन अर्थात प्रतिवादी से बिना कुछ पूछे हीं सूचनाएं प्राप्त करता है।

गुण: अवलोकन तकनीक अन्य समंक संकलन तकनीक के तुलना में कई अर्थों में काफी बेहतर तकनीक है।

1. इस विधि की सबसे बड़ी उपलब्धि यह है कि व्यक्तिग पक्षपात से मुक्त है, यदि अवलोकन सही तरीके से किया गया हो। अन्य तकनीकों से भिन्न, जो पूरी तरह अपने अतीत के चिन्तन या पूर्वाभास के स्वभाव से प्रभावित होती है, अवलोकन तकनीक में मानव के संभावित विद्यमान व्यवाहार है को लिपिबद्ध करना इसके गुण को और उत्कृष्ट बना देता है। इस प्रकार, यह आंकड़े एव प्रतिवादी के व्यवहार का सही चित्रण प्रस्तुत करता है जो पूर्व या बाद में प्रभावित होने वाले कारकों जैसे तनाव एवं चिन्ता से मुक्त होता है। यह ऐसे समंकों को तैयार करता है जो कटिन व्यवहारिक हल के लिए प्रत्यक्ष उपाय सुझाता है।
2. इस विधि से प्राप्त सूचनाएं वर्तमान परिदृश्य में क्या हो रहा है इसके बारे में बताता है; यह किसी पहले के व्यवहार एवं भविष्य के इरादे या मुद्रा द्वारा जटिल नहीं बनती है।
3. यह विधि प्रतिवादी के उतर की इच्छा के दृष्टि से स्वतंत्र होता है जैसा कि प्रतिवादी के सक्रिय सहयोग की अपेक्षा, साक्षात्कार एवं प्रश्नावली विधि के स्थिति में अपेक्षाकृत अल्प मांग होती है। आगे, यह विधि उस समय और महत्वपूर्ण हो जाती है जब प्रतिवादी अपने भावनाओं को किसी एक या अन्य कारणों के चलते मौखिक रूप में व्यक्त नहीं सकते हैं।

सीमाएं: इतने गुण होने के बावजूद, इस अवलोकन विधि के कुछ कमियां निम्नलिखित हैः

1. यह संभव नहीं है कि हर बार घटना के वक्त अन्वेषक मौजूद रहे, घटना के बारे मे पूर्वानुमान लगाने में कुछ अनदेखी स्थितियों को बेवजह सम्मिलित किया जा सकता है। उस समय घटना स्थल पर विरले व्यक्ति मौजूद होते हैं जिससे प्रत्यक्ष अवलोकन की रचना में व्यवधान उत्पन्न होता है जो सही एवं प्रभावी आंकड़े संकलित नहीं हो पाते हैं।
2. अवलोकन तकनीक के प्रयोग में, ये व्यवाहारिक कठिनाई है, क्योंकि एक घटना की अवधि निर्धारित होती है। उदाहरण के लिए, निजी एवं गोपनीय व्यवाहार को अवलोकित नहीं किया जाता है।
3. अवलोकन को पूरी तरह से मात्रात्मक रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है
4. यह एक खर्चिला विधि है।

5. इस तकनीक के द्वारा प्रद्धत सूचनाएं बहूत सीमित क्षेत्र के लिए हीं प्रयोग किया जा सकता है।

साक्षात्कार विधिः

समंक संकलन की साक्षात्कार विधि के अन्तर्गत मौखिक शाब्दिक प्रस्तुती के माध्यम से मौखिक शाब्दिक प्रतिवाद या उतर प्राप्त किया जाता है। इस विधि का प्रयोग प्रत्यक्ष व्यक्तिगत साक्षात्कार एवं अप्रत्यक्ष मौखिक साक्षात्कार द्वारा किया जा सकता है।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत साक्षात्कार

समंक संकलन की यह विधि, जिसमें वह व्यक्ति जिससे सूचना लेनी है अर्थात् प्रतिवादी से आमने–सामने सम्पर्क स्थापित कर पूरा किया जाता है। साक्षात्कारकर्ता, प्रतिवादी से सर्वे या समस्या से संबंधित प्रश्न पूछे जाते है। व्यक्तिगत साक्षात्कार दरवाजे–2 जाकर या सार्वजनिक स्थानों जैसे दूकान आदि के अनुसार सर्वेक्षण किया जाता है। सामान्यतः साक्षात्कार कर्ता का तरीका होता है कि स्वयं एक क्षमतावान प्रतिवादी की तरह व्यवहार करे और प्रतिवादी की सहयोग लेना सुनिश्चित करने की चेष्टा करे, पूर्व निर्धारित प्रश्नों का उतर प्राप्त हो सके। व्यक्तिगत साक्षात्कार थोड़ा महंगा होने के बावजूद ज्ञान, इरादा, जननांकीय विशेषता, व्यवहार, राय एवं जीवन शैली से संबंधित गंभीर सूचनाएं प्रदान करता है। भारत में इस विधि का बहुतायत प्रयोग किया जाता है और बहुत प्रभावी माना जाता है।

सामान्यताः व्यक्तिगत साक्षात्कार विधि में एक संरचनात्मक तरीके से सूचना एकत्र किये जाते हैं। ऐसे साक्षात्कार को हम संरचनात्मक साक्षत्कार कहते हैं। ऐसे साक्षात्कार में पूर्व निर्धारित प्रश्नों का प्रयोग करतें हैं एवं उच्च स्तरीय तकनीकों से प्रसारित या लेखा किया जाता है। इस प्रकार, साक्षात्कार कर्ता एक सरंचनात्मक साक्षातकार में निश्चत प्रक्रिया को पूरा करते हुए प्रश्नों रूप एवं उनके क्रम विन्यास का विशेष ध्यान रखता है। जैसे कि असरंचानात्मक साक्षात्कार में लोचपूर्ण प्रश्न रखे जाते हैं। असरंचनात्मक साक्षात्कार में, किसी पूर्व निर्धारित एवं मानक तकनीकों के व्यवस्थ द्वारा सूचनाएं एकत्रित नहीं किये जाते है। एक गैर–सरंचनात्मक साक्षात्कार में, साक्षात्कार कर्ता को काफी हद तक स्वतंत्रता होती है अर्थात् वो आवश्यकता अनुसार कुछ प्रश्नों को अनुसूची से हटा सकता है या कुछ प्रश्न और भी जोड़ सकता है। वर्णनात्मक एवं सूत्रात्मक शोध के अध्यय के स्थिति में असरंचनात्मक साक्षत्कार विधि के द्वारा सूचनाओं को एकत्र करना एक महत्वपूर्ण कदम होता है। लेकिन व्याख्यात्मक अध्ययन में संरचानत्मक साक्षात्कार विधि का ज्यादा प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह विधि लागत के दृष्टि से ज्यादा लाभकारी होता है और अपेक्षाकृत साक्षात्कार कर्ता के अल्प कौशल से भी काम चल जाता है।

गुणः व्यक्तिगत साक्षात्कार के लाभ हैंः

1. जब आंकड़े स्वयं अन्वेषक द्वारा एकत्र किये जाये तो उसमें सत्यता एवं विश्वसनीयता अधिक पाई जाती है।
2. यह अमूर्त परिघटनाओं, जैसे प्रतिवादी के मानसिक स्थिति एवं उनके इरादों से संबंधित भाव के अध्ययन में सहायक होता है।

3. यह विधि पूर्व में घटित किसी घटना के वास्तविक चित्र को प्रस्तुत करने में ज्यादा लाभकारी होता है क्योंकि वह व्यक्ति उस घटना के बारे में ज्यादा विश्वसनीय एवं सही सूचना साक्षात्कार कर्ता को देता है।
4. प्रत्येक पहलू से प्राप्त सूचनाओं की मात्रा अत्याधिक होती है।
5. एक योग्य एवं अनुभवी साक्षात्कार कर्ता, किसी व्यक्ति विशेष या व्यक्तियों के समूह से एक घटना से अति गोपनीय सूचनाएं भी प्राप्त कर सकता है जो किसी विधियों से संभव नहीं है।
6. यह प्रतिवादी के बहुगुणी पहलुओं वाले समस्याओं के स्वभाव एवं वातावरण के अध्ययन के लिए एक शक्तिशाली एवं उचित विधि है, जो उनके जीवन शैली को प्रभावित करते हैं। ऐसी स्थिति में साक्षात्कार प्रायः प्रतिवादी के घर पर हीं आयोजन किया जाता है।
7. वस्तुनिष्ठ सूचनाएं संरचनात्मक साक्षात्कार अनुसूची एवं मानक परिस्थितियों में वर्गीकरण पैमाने के प्रयोग कर आसानी से एकत्र किया जा सकता है।
8. यह विधि, बच्चों एवं निरक्षर प्रतिवादियों से सूचना एकत्र करने हेतु बहुत उपयोगी है जो अनवेन्षक को प्रतिवादी के आदत, चेहरे के भाव एवं स्वभाव को अवलोकन करने का अवसर प्रदान करता है।
9. प्रतिवादी के व्यक्तिगत विशेषता एवं वातावरण से संबंधित अन्य या पूरक सूचनाएं एकत्र करने हेतु अनवेन्षक को अवसर प्रदान करता है, जिसका प्रयाः निष्कर्षों के निर्वचन में बड़ा महत्व है। यह एक लचीला उपागम है, जो आवश्यकतानुसार नये प्रश्नों को जोड़ने व जांच करने को अवसर प्रदान करता है। इस तरह से यह विधि अन्य विधियों के तुलना में ज्यादा बेहतर व उत्कृष्ट है।
10. अनवेन्षक उन सूचनाओं को भी लेने का प्रयास करता है जो प्रायः नहीं दिये जाते हैं, इन्हें तुरंत एवं प्रतिक्रिया से प्राप्त करता है जो कि अन्य विधियों में इसकी कमी पायी जाती है।
11. जैसा कि साक्षात्कार एक प्रकार के पारस्परिक प्रात्साहक सामाजिक प्रतिक्रिया है, उसमें प्रतिवाद्वी के साथ मैत्रीपूर्ण व्यावहार की उम्मीद और बढ़ जाता है। यह किसी प्रश्न के अनुतरित होने की संभावना को कम कर देता है। उपरोक्त विशेषताओं के बावजूद एक समान एवं सजातीय सूचनाओं को एकत्र करने के लिए एक लाभकारी विधि है।

सीमांएः यद्यपि, साक्षात्कार तकनीक प्रतिवाद्वियों से सूचना एकत्र करने का सर्वोतम तकनीक है, इसके बावजूद निम्नलिखित आलोचनाओं से मुक्त नहीं हैः

1. लागत, उर्जा एवं समय की दृष्टि से यह तकनीक काफी खर्चीला है, क्योंकि विस्तृत क्षेत्रों में न्यायदर्श बिखरे हुए होते हैं। ऐसे में अनवेन्षक का न्यायदर्श से संबंध स्थापित नहीं हो पाने की संभावना होती है जो अत्याधिक व्यय के बावजूद कुछ भी अच्छा परिणाम नहीं दे सकता है।
2. व्यक्तिगत पूर्वाग्रह एवं पक्षपात की संभावना इस विधि में अन्य विधि के तुलना में ज्यादा है।

3. सक्षात्कारकर्ता को अच्छे से प्रशीक्षित एवं निरीक्षण किया जाना चाहिए अन्यथा वे वांछित सूचनाएं एकत्र करने के आयोग्य हो सकते हैं। अप्रशीक्षित या अल्प प्रशीक्षित व्यक्ति पूरे कार्य को बर्बाद कर सकते हैं।
4. अनवेन्षक एवं प्रतिवाद्वी के इरादों को प्रभावित करने वाले सामाजिक स्थिति तथा उनके वैचारिक बिन्दू भी सूचनाओं की गुणवता को प्रभावित करते हैं। अनवेन्षक के द्वारा प्रतिवाद्वी के साथ संबंध स्थापित करने में भी यह समस्या उत्पन्न करता है और इस प्रकार सूचना की गुणवता भी प्रभावित होती है। उदाहरण के लिए, एक निम्न सामाजिक स्थिति वाला अनवेन्षक, किसी धनी व्यक्ति से संर्पक स्थापित करने में संकोच करेगें, या हो सकता है कि सौहाद्रपूर्ण संबंध स्थापित उनसे नहीं कर पाये। दूसरी तरफ, वह अनवेन्षक को उतना महत्व न दे और इस प्रकार सही सूचनाएं प्राप्त नहीं की जा सकती है।
5. यदि सूचनादाता प्रतिपुरूष एवं विपरीत लिंग का हो, तब मनो सामाजिक कारक के कारण सूचनाएं निश्चित रूप से त्रुटिपूर्ण होगी। एक पुरूष/स्त्री, किसी स्त्री/पुरूष को सही सूचनाएं नही दे सकता है।
6. ऐसे बहुत से बातें हैं, जिन्हें पूरी तरह से शब्दों में व्यक्त या बोला नहीं जा सकता है; लेकिन उनपर काम किया जा सकता है या दिखाया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, यह किसी सीमित क्षेत्र/न्यायदर्श में प्रयोग किया जा सकता है, जब अध्ययन का क्षेत्र बहुत छोटे आकार का हो। इस तरह से, यह पूरे समग्र के विशेषताओं पर प्रकाश नहीं डालता है।

यद्यपि, साक्षात्कार तकनीक त्रुटि से मुक्त नहीं है, फिर भी, यह विधि काफी प्रभावी है जब किसी प्रशिक्षित, शिक्षित एवं अनुभवी अनुसंधान कर्ता द्वारा सावधानीपूर्वक प्रयोग किया जाय। साक्षात्कार विधि के सफलता पूर्वक लागू करने के लिए अनुसंधान कर्ता का चयन सावधानीपूर्वक करके उन्हें प्रशिक्षित एवं इसके बारे में बताया जाना चाहिए। अनुसंधानकर्ता को ईमानदार, विश्वासी, कठिन परिश्रमी, निष्पक्ष एवं उसे तकनीकी रूप से योग्य तथा आवश्यक व्यवहारिक अनुभव होना चाहिए। औचक क्षेत्र निरीक्षण, ये सुनिश्चित कर सकता है कि अनुसंधानकर्ता न तो धोखेबाज है, न ही किसी दिये गये निर्देशानुसार कार्य को कुशल तरीके से करने में विचलित होता है। यह विधि वृहत सर्वेक्षण के वजाय गहन क्षेत्र सर्वेक्षण के लिए ज्यादा उपयूक्त है। अतः इस विधि का प्रयोग वहां करना चाहिए जहां एक सीमित क्षेत्र का गहन अध्ययन करना हो।

अप्रत्यक्ष मौखि साक्षात्कार

संमंक संकलन की इस विधि के अन्तर्गत, अनुसंधान कर्ता उस तीसरे व्यक्ति से सूचना एकत्र करता है जो प्रत्यक्ष/अप्रत्यक्ष रूप से संबंधित व नजदीक है जिसके बारे में सूचना एकत्र करनी है। ऐसे में सूचनादाता अनिच्छुक रहता है जो कुछ गलत या कुछ बातें छुपा उस व्यक्ति के बारे में बता सकता है। उदाहरण के लिए, किसी जूआरी या नसेबाज या भ्रष्ट व्यक्ति से सही सूचनाएं एकत्र करना एक कठिन कार्य है जिनकी सामाजिक प्रतिष्ठा पहले से हीं बर्बाद

हो चुकी है। इसी प्रकार, पोलिस चोरी एवं हत्या के मामले में सुराग तलाशने के लिए उस तीसरे व्यक्ति से जानने का प्रयास करती है जो इसके बारे जानता हो। इन व्यक्तियों के बारे में सही चित्रण हेतु, उस व्यक्ति का साक्षात्कार किया जा सकता है और उनके जवाब को दर्ज किया जा सकता है जो उस तीसरे व्यक्ति/समस्या के बारे में पूर्ण जानकारी रखता हो; जो पक्षपात न हो; जो स्वयं को प्रस्तुत करने योग्य हो; एवं व्यक्ति तथ्य को किसी नया रूप देने हेतु प्रेरित नहीं हुआ हो। ऐसे व्यक्ति जिनसे साक्षात्कार किया जाता है उन्हें चश्मदीद गवाह कहते हैं एवं उनके उतर को रिकार्ड कर लिया जाता है। इस विधि का प्रयोग प्रायः किसी जांच समीति या जांच आयोग द्वारा किया जाता है।

इस विधि की सफलता के लिए यह आवश्यक है कि किसी एक व्यक्ति के तथ्य या साक्ष्य पर हीं विश्वास नहीं किया जाय; तथ्य की सत्यता एवं वास्तविक स्थिति को जानने के लिए हमें विभिन्न लोगों के विचार को भी सुनना चाहिए। ऐसे लोगों के चयन में अधिकतम अभ्यास करना चाहिए क्योंकि यहीं विचार अन्तिम निष्कर्ष तक पहुंचा सकता है।

गुणः इस विधि के गुण निम्नलिखित हैः

1. यह विधि वृहत क्षेत्र को सम्मिलित करता है।
2. यह संभव है कि सीमित समय, पैसे एवं मानव शक्ति में हीं एक बेहतर परिणाम दे सके।
3. यह विधि सामान्यतः मानव पक्षपात से मुक्त होता है अर्थात् साक्षात्कारकर्ता एवं उतरदाताओं दोनों हीं तरफ से।
4. यदि आवश्यकता पड़े तो, किसी दिये गये समस्या पर माहिरों के विचार एवं विशेषज्ञों के सूझाव को भी, जांच के अधिक प्रभावी एवं योग्य तरीकों से संपादन के लिए, प्रयोग किया जा सकता है।

सीमाएंः सूचना एकत्र करने की यह विधि भी त्रुटियों से मुक्त नहीं है।

1. निष्कर्ष गलत हो सकते हैं क्योंकि जो सूचनाएं प्राप्त की गई है वह प्रत्यक्ष नहीं बल्कि अप्रत्यक्ष व्यक्ति से प्राप्त की गई।
2. यदि चश्मदीद गवाहों में पक्षपात की भावना हो तब वे अपने पसंद की सूचनाएं सर्वप्रथम व सूची में उपर रखना चाहेगें।

दूरभाष सर्वेक्षण

दूरभाष सर्वेक्षण का प्रयोग सामान्यतया व्यक्तिगत साक्षात्कार के लिए किया जाता है, विशेषरूप से जब सूचनाएं अतिशीघ्र एवं मितव्ययी तथा वांछित सूचनाओं की मात्रा सीमित हो। दूरभाष साक्षात्कार ''संयोगात्मक'' शोध समस्याओं के स्थिति में ज्यादा बेहतर होता है जैसे दूरदर्शन देखना या रेडियो कार्यक्रम सूनना। इस प्रकार के अध्ययन के लिए कुछ दूरभाष उपभोक्ताओं के कॉल को न्यायदर्श के रूप रखते है और कार्यक्रम प्रसारित होने पर उन्हें बता देते हैं। जो व्यक्ति कॉल सून रहा होता है उन्हें बस कहते हैं ''आप अभी टी. वी. देख रहें हैं?'' और यदि हां तब ''कौन सा कार्यक्रम आप देख रहें हैं?'' अन्य प्रश्न जैसे ''कितनी बार आप इस कार्यक्रम को देखते हैं?'' ''इस कार्यक्रम को कौन प्रायोजित करता है?'' और इस तरह से पूछ सकते हैं।

गुणः

1. यह विधि व्यक्तिगत साक्षात्कार के तुलना में अधिक मितव्ययी है एवं अल्प समय खपत वाली विधि है।
2. यह डाक विधि के तुलना में अत्याधिक लचीला है।
3. व्यक्तिगत साक्षात्कार के वजाय दूरभाष के माध्यम से लोगों का सहयोग अक्सर प्रयुक्त आसानी से प्राप्त होती है। विशेषरूप से औद्योगिक सर्वेक्षण में यह सत्य है, जहां कार्यकारी दल अक्सर मिलने के लिए व्यस्त होते हैं और साक्षात्कारकर्ता को भी देख नहीं पाते हैं, जब वह उनको व्यक्तिगत तौर पर कॉल करे और यदि मिलने का समय न मिले, लेकिन दूरभाष माध्यम से जल्द हीं उनके पास पहुंच सकता है। आगे, दूरभाष के माध्यम से शाम के समय में व्यक्तिगत साक्षात्कार के लिए संबंध स्थापित किया जा सकता हैं जब अधिकाधिक लोग खाली रहते हैं।
4. डाक विधि के तुलना में उतर की प्राप्ति का दर अत्याधिक होता है; अनुतरित की दर सामान्यतया न्यूनतम रहता है।
5. उतरदाता को बिना कोई असुविधा देते हुए उतर को रिकार्ड किया जा सकता है।
6. साक्षात्कारकर्ता, आवश्यकता को अधिक आसानी से वर्णन कर सकता है।
7. सर्वेक्षण के समय यदि प्रतिवाद्वी से सम्पर्क हुआ तो लाभप्रद है नही ंतो उनसे सम्पर्क स्थापित नहीं किया जा सकता है इसके एक या अन्य कारण हो सकते हैं।
8. किसी भी क्षेत्र कर्मचारी की आवश्यकता नहीं होती है और आसानी से इसको प्रशासित किया जा सकता है। कुछ भी हो, संमंक संकलन यह विधि कमियों से मुक्त नहीं है। इनमें से कुछ को नीचे विन्दूवार दिया जा रहा है।

सीमाएंः

1. दूरभाष साक्षात्कार विधि की मूल कमी, उसका अपेक्षाकृत सीमित मात्रा में सूचनाओं को प्राप्त (अन्य विधियों के तुलना में) करना एवं किसी दूरभाष उपभोक्ताओं के न्यायदर्श में पक्षपात को मौजूद होना। ग्राहकों के संख्या के अलावा विभिन्न विशेषताएं हैं, विशेषरूप से आय एवं स्थानिक अवस्थिति संबंध में। न्यायदर्श मे आयोग्य गैर–ग्राहक को सम्मिलित करने से उतर गंभीर रूप से प्रभावित हो सकता है।
2. लागत के दृष्टि से यह बृहत भौगोलिक क्षेत्र को प्रतिबंधित करता है।
3. यह गहन सर्वेक्षण के लिए उचित नहीं है जहां विभिन्न प्रश्नों के बृहत उतर अपेक्षित हो।
4. अनुसंधानकर्ता के पक्षपात होने की संभावना अपेक्षाकृत अधिक है।
5. प्रश्न छोटा एवं बात करने के लिए उपर्युक्त होना चाहिए; शोध को नियंत्रित करना कठिन है।

6. उनकी गोपनीयता की रक्षा विशेष रूप से, आय से संबंधित प्रश्नों में, उत्पादों के स्वामित्व में, संबंधित प्रकृति या निवास, आदि पर लोगों की बढ़ती इच्छा एवं अपराधों के संख्या की बढ़ती हुई दर बहुत हद तक टेलीफोन सर्वेक्षण को रोकती है।

संवाददाताओं के माध्यम से सूचना व जानकारी

सामाचार पत्र, पत्रिका, इलेक्ट्रॉनिक मीडिया एवं अन्य एजेंसियों के द्वारा स्थानीय एजेंटों एवं संवाददाताओं के माध्यम से सूचना एकत्र करने की बहुत प्रचलित विधि है जिसका विभिन्न विषयों से संबंधित सूचनाएं नियमित आधार पर जरूरत पड़ती है। जांच एजेंसियां सूचना एकत्र करने के लिए क्षेत्र के आधार पर स्थानीय एजेंट या संवाददाताओं को नियुक्त करती है। ये व्यक्ति अपने संबंधित क्षेत्रों से सूचनायें एकत्र करते हैं एवं उसे सुसज्जित करके मुख्य कार्यालय पहुंचाते हैं। ज्यादतर भुगतान किये जाने वाले व्यक्ति होते हैं। कुछ सरकारी विभाग भी सूचना एकत्र करने के लिए इस तकनीक का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, मार्केटिंग समीति के कर्मचारियों द्वारा कृषि उत्पाद के कीमत जैसे अनाज, सब्जियां, फल, चारा, इत्यादि से संबंधित आकड़ें एकत्र किये जाते हैं। वे इन सूचनाओं को प्रसारित करने के लिए ऑल इण्डिया रेडियो एवं दूरदर्शन को भेज देते हैं।

गुणः

1. यह सूचना संकलन का सबसे मितव्ययी विधि है।
2. यह विधि वहां बहुत उचित है जहां सूचनाओं की आवश्यकता नियमित आधार पर है।
3. यह विस्तृत जांच या अनवेन्षण के लिए ज्यादा उपर्यूक्त है।
4. इस विधि के माध्यम से, संबंधित एजेंसिया या विभाग विभिन्न बिन्दूओं व मुदद्ों से संबंधित वृहत सूचनाएं एकत्र कर सकते हैं।
5. समय बीतने के साथ, स्थानिय एजेंसियां एवं संवाददाताएं अपने विषय में माहिर हो जाते हैं, वे विश्वसनीय एवं पूर्ण सूचनाएं प्राप्त करने में निपूण हो जाते हैं।

सीमाएंः

1. यह विधि आकस्मिक विषयों पर सामान्य सूचना प्राप्त करने के लिए अच्छी हो सकती है। यह उच्चस्तरीय एवं शोध आधारित विषयों के जांच व अनवेन्षण के लिए विश्वसनीय नहीं हो सकती है।
2. पुनः आकस्मिक आउटलुक, सूखी दिनचर्या, व्यक्तिगत पूर्वाग्रहों एवं व्यक्तिगत कारकों के कारण असत्य, अपूर्ण एवं गलत सूचनाएं मिल सकती है।
3. इस विधि के अन्तर्गत, सूचनाओं की गुणवता शिक्षा, सूचनाओं का स्तर, काम के प्रति प्रतिबद्धता, स्थानीय एजेंसियों एवं संवाददाताओं की विश्वसनीया तथा इमानदारी पर निर्भर करता है। दूर्भाग्य से, अधिकतर संवाददाताओं में इन गुणों व विशेषताओं का अभाव पाया जाता है।

प्रश्नावली विधिः

प्रश्नावली विधि सामाजिक वैज्ञानिक, शोधार्थी एवं उद्योग लोगों के बीच बहुत प्रचलित है। जहां सूचना एक बृहत क्षेत्र से संबंधित सूदूर इलाकों में रहकर एकत्र करना होता है ऐसे जगहों के लिए यह विधि काफी उपयोगी है।
एक प्रश्नावली, शोध या समस्या से संबंधित विभिन्न प्रश्नों का गुच्छ होता है। इसे सूचनादाता को डाक के माध्यम से भेज दिया जाता है। उतरदाता या सूचनादाता से यह आग्रह किया जाता है कि प्रश्नावली को अच्छे तरीके से भरकर पूनः वापस शोध एजेंसियों व व्यक्ति के पास भेज दें।

गुणः

1. प्रश्नावली विधि शोध या अनवेन्षण कार्य के लिए अन्य विधियों के तुलना में बहुत मितव्ययी विधि है।
2. यह विधि वहां ज्यादा उपर्यूक्त है जहां सूचनाओं की संख्या अधिक व लम्बी और वृहत क्षेत्र को सम्मिलित करना हो।
3. यह अनुसंधानकर्ताओं के प्रयास एवं समय दोनों को हीं बचाता है। इसे संमंक संकलन का सुविधाजनक विधि है।

सीमायेंः

1. इस विधि का कार्यक्षेत्र शिक्षित व्यक्तियों के लिए सीमित है जो विभिन्न प्रश्नों के अर्थ को आसानी समझ सकते हैं और सही सूचना चित्रित कर सकते हैं।
2. आंकड़े संग्रह की इस विधि के लिए उतरदाताओं से उच्च कोटि के सहयोग की आवश्यकता होती है। उतर के अनिश्चित होने की खतरा बना रहता है।
3. बहुत से उतरदाता अपूर्ण बिगड़ी हुई एवं गलत सूचनाएं भेज देते हैं। वे प्रश्नावली को बहुत हीं लापरवाही तरीके से भरते हैं। आकस्मिक आउटलुक, जो सामान्यतया अधिकतर अपरिचित उतरदाता की स्थिति में पाया जाता है, इस विधि के विशेष कमी को प्रदर्शित करता है।
4. बहुत से उतरदाता, प्रश्नवाली को ससमय नहीं भेजतें हैं। जिसके कारण एक समय सीमा में दिये गये अध्ययन कार्य एवं शोध योजनाएं प्रभावित हो सकती है।
5. यह देखा गया है कि इस विधि की सफलता प्रश्नावली की गुणवता पर निर्भर करती है। एक बेहतर एवं रोचक प्रश्नावली किसी निष्पक्ष उतरदाता को भी प्रभावी रूप से उतर देने के लिए प्रेरित कर सकता है और अन्वेंषक को अच्छे उतर प्राप्त हो सकते हैं।

प्रश्नावली का मसौदा तैयार

प्रश्नावली विधि से संमंकों का संकलन की सफलता मुख्य रूप से प्रश्नावली के मसौदे पर निर्भर करता है। प्रश्नावली के लिए उचित मसौदे को तैयार करना एक कला है। इसे तेज बुद्धि, बेहतर सोच एवं समृद्ध अनुभव के द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। इसे पूरा करने के लिए कोई विशेष नियम एवं बंधन नहीं जिसके अनुसार मसौदे तैयार किया जा सके।
प्रभावी एवं सफल तरीके से समंक संकंलन के लिए प्रश्नावली का मसौदा तैयार करते समय निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए।

1. सर्वप्रथम, प्रश्नावली को आकर्षक, स्वच्छ एवं साफ सुथरा तथा समझने योग्य होना चाहिए। ताकि, सूचनादाता इसे भरने में कोई बोझ महसूस न करे और यथाशीघ्र वापस भेज दे।
2. एक स्वपता लिफाफा जिसमें आवश्यक डाक टिकट लगा हो, प्रश्नावली के साथ निश्चित रूप संलग्न किया जाना चाहिए।
3. उतर की अनिश्चितता की खतरा को देखते हुए; जितनी आवश्यकता है उससे ज्यादा हीं लोगों को प्रश्नावली भेजा जाना चाहिए। उतरदाता को प्रोत्साहित करने के लिए भी कुछ सोचना चाहिए ताकि उनमें उतर देने के लिए प्रेरणा बढ़े।
4. प्रश्नावली विधि का उपयोग इस तरह की समस्याओं के लिए राहत दिया जाना चाहिए जिससें लोग उपयोगी उतर दे पायें। उदाहरण के लिए, कर्मचारी संघ वित आयोग से संबंधित प्रश्नावली का उतर यथाशीघ्र हीं भेज देते हैं।
5. यह उचित होगा कि प्रश्नावली में ऐसे प्रश्नों को जगह न दें जिसका उतर देने के लिए उतरदाता अनिच्छुक हो। कुछ अति गोपनीय प्रश्नों को नहीं पूछा जाना चाहिए।
6. प्रश्न छोटा, साधारण एवं आसान होना चाहिए।
7. ज्यादातर प्रश्नों का उतर वस्तुनिष्ठ होना चाहिए।
8. प्रश्नों का विन्यास व क्रम तार्किक रूप में होना चाहिए।
9. प्रश्न प्राय समूहों एवं उप–समूहों में विभाजित, एवं उप–समूह तथा सुविधा के लिए संख्या में हो सकते हैं, जिससे प्रतिवाद्वी एवं अन्वेंषक दोनों के लिए आसान हो सके।

अनुसूची के माध्यम से सूचना

इस विधि के अन्तर्गत प्रगणक या अन्वेंषक व्यक्तिगत रूप से अनुसूची लेकर सूचना एकत्र करते हैं जिसमें प्रश्न के गुच्छ होते हैं। प्रश्नावली विधि एवं अनुसूची में केवल इतना अन्तर है कि पहली विधि में प्रश्नावली उतरदाता को डाक के माध्यम से भेज दी जाती है जबकि दूसरे विधि में प्रगणक या अन्वेंषक स्वयं अनुसूची लेकर प्रतिवाद्वी के जाते हैं। प्रगणक स्वयं प्रतिवाद्वी से सम्पर्क स्थापित करता है। वे उतरदाताओं मैत्रीपूर्ण वातावरण में प्रश्न पूछते हैं एवं उन्हें लिख लेते हैं।

गुण:

1. यह सामाज के अशिक्षित वर्ग से सूचना एकत्र करने का सबसे प्रभावी एवं सफल विधि है।
2. इसमें उतर के अनिश्चित होने की सीमित संभावना बच जाती हैं। केवल कुछ ही ऐसे लोग होते हैं जो व्यक्गित साक्षात्कार देने से इनकार करते हैं।
3. संकलित समंकों की शुद्धता की कोटि एवं विश्वसनीयता का स्तर, प्रश्नावली विधि के तुलना में इस विधि में अत्याधिक होता है। प्रगणक या अन्वेंषक बातचीत के दौरान कुछ पूरक प्रश्न भी उतरदाता से पूछ सकता है एवं उन्हें चतुराई पूर्वक उन्हें जांच भी कर सकता है।

4. चूंकि, प्रगणक उतरदाता से उनके आवास में हीं संपर्क करता है, अतः वे उतरदाता के सामाजिक–आर्थिक परिवेश से विभिन्न प्रकार उपयोगी प्रश्न/सूचनाएं प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार के सूचनाएं अर्थशास्त्रीयों के लिए बहुत उपयोगी होता है जो लोगों के जीवन स्तर, निर्धनता, बेरोजगारी, ग्रामीणों के आर्थिक स्थिति, महिलाओं का विकास में भूमिका आदि के अध्ययन में व्यस्त/लगे हों।

सीमाएंः

1. अन्वेंषण की अन्य विधि के तुलना में अनुसूची विधि विशेष रूप से बहुत खर्चिला विधि है। प्रगणक को प्रत्येक व्यक्ति जो उस सर्वेक्षण से संबंधित हों उनसे व्यक्तिगत तौर से मिलना होता है। इस किया में अत्याधिक मौद्रिक, समय एवं प्रयास की आवश्यकता होती है।
2. इस विधि की सफलता प्रगणक की ज्ञान, प्रशिक्षण, विशेषज्ञता एवं अनुभव पर निर्भर करती है। इसमें बहुत विभिन्न विचारों एवं स्वभाव वाले बहुतायत लोगों को धैर्य के साथ संभालना पड़ता है। उस समय और विकट समस्या हो जाती है जब लोग इस योजना में रूची नहीं लेते हैं।
3. यह विधि बृहत अध्ययन के लिए उपयोगी नहीं होता है जहां एक विस्तृत क्षेत्र का अध्ययन करना होता है। यह सीमित अध्ययन क्षेत्र के लिए ज्यादा उपयुक्त होता है जहां इसका गहन अध्ययन करना होता है।
4. अनुसूची विधि सरकारी विभागों के लिए उपयुक्त नहीं होता है क्योंकि विभागीय प्रगणक इस विधि के लिए अनुपयुक्त हैं। वे बिना क्षेत्र में गये ही क्षेत्र के कार्य को करने में विशेषज्ञ होते हैं। यह विधि वैसे व्यक्तियों के हाथ से सफल होगी जो विश्वासी, कठिन परिश्रमी एवं जिम्मेवार लोग हों।

प्रश्नावली एवं अनुसूची विधि में अन्तर

प्रश्नावली एवं अनुसूची दोनों हीं विधियां एक ही तरह के हैं, कुछ तरीकों से अन्तर भी है। ये महत्वपूर्ण अन्तर निम्नलिखित हैंः

1. प्रश्नावली सामान्यतया उतरदाता को उतर देने के लिए लिफाफे में विहित पते पर भेजी जाती है जो प्रतिवाद्वी के बिना किसी सहायता से संभव नहीं हो सकता है। अनुसूची विधि में शोधकर्ता या प्रगणक स्वयं अनुसूची को भरता है जिसे आवश्यकता पड़ने पर निर्वचन भी करता है।
2. प्रश्नावली अपेक्षाकृत मितव्ययी विधि है अनुसूची के तुलना में विशेष रूप से प्रगणक की नियुक्ति, प्रशिक्षण एवं क्षेत्र भ्रमण के लिए मुद्रा की मात्रा के दृष्टि से।
3. अनुसूची के तुलना में प्रश्नावली में अनुतरित या गलत उतर की संभावना अधिक होती है।

4. अनुसूची के स्थिति में उतरदाता की पहचान स्पष्ट होती है जबकि प्रश्नावली की स्थिति में कभी–कभी स्पष्ट नहीं होता है कि किसने जवाब दिया है।
5. प्रश्नावली विधि में बहुत धीमी गति से उतर प्राप्त होते हैं कभी–कभी तो समय से प्रश्नावली को वापस भेजते हीं नहीं, फलतः शोध कार्य बाधित होता है लेकिन अनुसूची विधि में प्रगणक स्वयं अनुसूचियों को भरकर सूचनाएं एकत्र करता है जो ससमय से शोध कार्य सम्पादित हो पाता है।
6. प्रश्नावली विधि का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब उतरदाता साक्षर या सहयोग के लिए तैयार हो, जबकि अनुसूची के स्थिति में, जब प्रतिवाद्वी या उतरदाता निरक्षर हो तब भी उनसे सूचनाएं एकत्र की जा सकती है।
7. अनुसूची विधि के साथ–साथ अवलोकन विधि का भी प्रयोग किया जा सकता है परन्तु प्रश्नावली विधि में ये संभव नहीं है।

2.3.2 द्वितीयक आंकड़े

अधिकतर सांख्यिकी कार्य एवं आर्थिक शोध में द्वितीयक आंकड़ों का प्रयोग प्रमुख आगत के रूप में प्रयोग किया जाता हैं। द्वितीयक आंकड़े उस प्रकार के आंकड़े होते हैं जो वर्तमान प्रयोग कर्ता के द्वारा मौलिक रूप से एकत्र नहीं किये जाते हैं। ''आंकड़े जो किस दूसरे व्यक्ति द्वारा संकलित किये गये हो अर्थात् प्रयोगकर्ता दूसरी बार प्रयोग करता हो तो उसे द्वितीयक समंक कहते हैं।''

वे आंकड़े जो किसी प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोतों लिए गये हों और उनका अध्ययन में प्रयोग जाय तो द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, जनगणना के आंकड़े भारत सरकार द्वारा संकलित किया जाता है, लेकिन जब इसका प्रयोग किसी भी व्यक्तिगत शोधार्थी एवं अन्य संगठन और विभागों द्वारा अपने अध्ययन के लिए किया जाय तो वह द्वितीयक आंकड़े कहलायेगें। समंक जो किसी व्यक्ति, विभिन्न एजेंसियों, संस्थाओं एवं सरकारी विभागों द्वारा प्राथमिक आंकडों के विभिन्न तरीकों से संकंलित समंक प्राथमिक स्वभाव के हाते हैं। जब पहले से संकलित ये आंकड़े किसी दूसरे के द्वारा प्रयोग किया जाय तो वह द्वितीयक संमंक हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, एक व्यक्ति द्वारा किसी क्षेत्र विशेष के खेती प्रारूप से संबंधित आंकड़े एकत्र करता है। यह आंकड़े किसी दूसरे शोधकर्ता के द्वारा अपने शोध कार्य में प्रयोग करता है। पहले व्यक्ति या शोधार्थी द्वारा संग्रहित समंक प्राथमिक, जबकि दूसरे शोधार्थी के द्वारा संग्रहित समंक का प्रयोग द्वितीयक समंक कहलायेगा।

द्वितीयक संमंक सस्ता एवं प्रयोग के लिए आसान होता है। द्वितीयक समंक किसी व्यक्तिगत शोधकर्ता के लिए बहुत उपयोगी है क्योंकि सीमित संसाधन एवं समय, प्राथमिक समंक संकलन के लिए इजाजत नहीं देता है। लेकिन द्वितीयक आंकड़े शुद्धता एवं अनुपयुक्तता की समस्या से ग्रसित होता है।

द्वितीयक आंकड़ों के स्त्रोत

1. अर्न्तराष्ट्रीय संगठनों के प्रकाशन जैसे U.N.I. B.R. D., I.M.F., I.L.O. इत्यादि।
2. केन्द एवं राज्य सरकार के प्रकाशन।
3. विभिन्न जांच आयोगों एवं समीतियों के परिणाम एवं रिर्पोट।
4. व्यक्तिगत विद्यार्थी, शोधार्थी, शैक्षणिक एवं शोध संस्थान, विश्वविद्यालय आदि के द्वारा दिये परिणाम एवं प्रकाशन।
5. उद्योग एवं व्यापारिक संगठन जैसे FICCI, CII, PHDCCI, इत्यादि के प्रकाशन एवं रिर्पोट।
6. केन्द्रीय एवं व्यवसायिक बैंकों के रिर्पोट इत्यादि।
7. सामाजपत्र एवं पत्रिकाएं जैसे इकोनॉमिक्स टाइम्स, फाइनेंसियल टाइम्स, इकोनॉमिक एण्ड पॉलिटिकल वीकली इत्यादि।
8. बहुत सारे सरकारी विभाग अपने स्थिति एवं निष्पादन से संबंधित आंकड़े एंकत्रित एवं प्रकासित करते हैं। जैसे, कृषि विभाग, वाणिज्य, स्वास्थ्य, शिक्षा, आदि; विस्तृत जानकारी एकत्रित करते हैं एवं उनका पूस्तक या पत्रिका के रूप में प्रकाशन करते हैं।

अप्रकाशित स्त्रोत

वे द्वितीयक आकड़े जिन्हें अप्रकाशित स्त्रोत से एकत्र किये जाते हैं अप्रकाशित स्त्रोत कहलाते हैं। ऐसे बहुत से अध्ययन विश्वविद्यालय में शोधार्थी द्वारा किये जाते हैं जिनका प्रकाशन नहीं होता हैं। वे पुस्तकालय में हीं रखे होते हैं। सरकार एवं निजी कार्यालय के कार्यालीय रिकार्ड तथा फाइलों में कई सूचनाएं होती है जो वास्तव में प्रकाशित नहीं होती है, ये सभी अप्रकाशित स्त्रोत कहलाते हैं।

द्वितीयक आंकड़ों की सीमाएं

बाउले ने सच कहा है कि प्रकाशित सांख्यिकी का प्रयोग, किसी प्रत्यक्ष मूल्य पर, उसके अर्थ एवं सीमाओं को जाने विना सुरक्षित नहीं होगा–

1. यह भी संभव हो सकता है वर्तमान में जिस समस्या की जांच के लिए आंकड़े का प्रयोग किया जा रहा है हो सकता है द्वितीयक आंकड़े किसी अलग उद्देश्य के लिए संग्रहित किया गया हो। अतः एकत्रित सूचनाएं वर्तमान जांच के लिए उपयुक्त नहीं हो सकते हैं।
2. द्वितीयक समंक के सकंलन में जो प्रक्रियाएं अपनाई गई हो वो अनुचित हो।
3. अन्वेंषक के व्यक्तिगत पूर्वग्रह एवं पक्षपात व्यवहार से भी ये आंकड़े प्रभावित हुए हों।
4. समय अवधि जिसके लिए संमंक संकलित किये गये थे वह काफी छोटा या अल्प हो।

2.4 प्राथमिक समंक एवं द्वितीयक आंकड़ों में अन्तर

आधार	प्राथमिक आंकड़े	द्वितीयक आंकड़े
लगत	अधिक धन राशि की	अपेक्षाकृत कम धन की

कारक	आवश्यकता	आवश्यकता
स्त्रोत	अन्वेंषक एजेंसियां	कुछ अन्य अन्वेंषक एजेंसिया अपने प्रयोग के लिए संग्रहित करती हैं
समय कारक	अधिक समय की आवश्यकता होती है।	संग्रहण के लिए अल्प समय की आवश्यकता होती है
संगठन	एक वृहत संगठन की आवश्यकता	किसी संगठनात्मक व्यवस्था की आवश्यकता नहीं
सावधानी	कोई अतिरिक्त सावधानी की आवश्यकता नहीं	द्वितीय आंकड़ों के प्रयोग में विशेष ध्यान देने की जरूरत पड़ती है

2.5 प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों में चयन

शोधकर्ता को निश्चित रूप से यह तय करना चाहिए कि कब वह प्राथमिक या द्वितीयक आंकड़ों का प्रयोग करेगें। जब इन दोनों में से किसी एक को चयन करनी हो तो निम्नलिखित बातों को ध्यान में आवश्यक रखना चाहिए:

1. समस्या के स्वभाव एवं कार्यक्षेत्र को जान लेना चाहिए।
2. वितीय संसाधनों की उपलब्धता।
3. समय की उपलब्धता।
4. वांछित शुद्धता की कोटि।
5. अन्वेंषक की स्थिति अर्थात् व्यक्तिगत या निगम या सरकारी इत्यादि। प्राथमिक आंकड़े उन स्थितियों में किये जाने चाहिए जहां द्वितीय आंकड़े विशलेषण का आधार प्रदान नहीं करता हो।

2.6 सारांश

सांख्यिकीय आंकड़े निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं:

1. प्राथमिक आंकड़े मूल आंकड़े होते हैं जिन्हें पहली बार किसी विशेष स्त्रोत से अनुसंधानकर्ता स्वयं एकत्रित करते हैं। प्राथमिक आंकड़े प्रत्यक्ष व्यक्ति अनुसंधान, अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान, संवाददाताओं द्वारा सूचनाएं, प्रश्नावली विधि एवं अनुसूची के द्वारा सूचना के माध्यम से एकत्रित किया जा सकता है।
2. द्वितीयक आंकड़े ज्यादातर सांख्यिकीय एवं शोध कार्य के गहन अध्ययन के लिए प्रयोग किया जाता है। द्वितीयक आंकड़े मूलतः प्रयोग कर्ता द्वारा एकत्र नहीं किये जाते हैं। जब वर्तमान प्रयोगकर्ता आंकड़े किसी प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोतों से लेते हैं तो ऐसे आंकड़े को द्वितीयक आंकड़े कहते हैं।

   द्वितीयक आंकड़ों के बहुत से प्रकाशित एवं अप्रकाशित स्त्रोत हैं जैसे; रिपोर्ट, निष्कर्ष, सामाचारपत्र, पत्रिकाएं, शोध पत्र, शोध किताबें आदि।

द्वितीयक आंकड़े अपेक्षकृत आसानी से प्राप्त किये जा सकतें हैं एवं प्रयोग के लिए भी सस्ते होते हैं, लेकिन द्वितीयक आंकड़े कई विसंगतियों एवं अनुचितता से ग्रसित होतें हैं।

2.7 शब्दावली

प्राथमिक स्त्रोतः यह वो आंकड़े है जिन्हें प्रयोगकर्ता स्वयं एकत्रित करते हैं।
द्वितीयक स्त्रोतः ये वे आंकड़े होते हैं जो पहले से ही संग्रहित होते हैं जिसे किसी दूसरे व्यक्ति या एजेंसियों द्वारा एकत्र किये जाते हैं।
अन्वेंषकः जो व्यक्ति सूचना एकत्र करने का कार्य करता है उन्हें अन्वेंषक कहा जाता है।

2.8 बोध प्रश्न

रिक्त स्थानों को पूरा करें

1. जो आंकड़े अवलोकन द्वारा संग्रहित किये जाते हैं उन्हें ——————— कहते हैं।
2. प्राथमिक आंकड़े ———————— होते हैं जिन्हें प्रथम बार किसी विशेष स्त्रोत स्वयं संग्रहित किया जाता है।
3. द्वितीयक आंकड़े उस समय प्रयोग करना चाहिए जब ———————————
4. द्वितीयक आंकड़े —————————— हो सकते हैं।

2.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. प्राथमिक आंकड़े, 2. मूल आंकड़े, 3. आंकड़े जो अध्ययन की उद्देश्य एवं आवश्यकता को पूरा करे, 4. प्रकाशित एवं अप्रकाशित

2.10 स्वपरख प्रश्न

1. प्रश्नावली को परिभाषित करें ? प्रश्नावली के मसौदा तैयार करत समय किन बातों का महत्वपूर्ण ध्यान रखना चाहिए?
2. प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकडों का वर्णन करें। प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों में क्या अन्तर है?
3. प्राथमिक आंकड़े क्या हैं? प्राथमिक आंकड़ों के संकलन के विभिन्न विधियों का उल्लेख करें।
4. द्वितीयक आंकड़े के क्या गुण एवं अवगुण हैं? द्वितीयक आंकड़े के विभिन्न स्त्रोतों का उल्लेख करें।

2.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, “Fundamentals of Statistics”, Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, “Statistical Methods”, Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. Digambar Patri, “Business Statistics”, KaIyani Publishers, Ludhiyana, India.
5. Naval Bajpai, “Business Statistics”, Pearson publication, Delhi, India.
6. R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India ltd., Delhi, India.

*****

इकाई 3 आवृति वितरण, चित्र एवं रेखाचित्र

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- आवृति वितरण के अर्थ एवं निर्माण को समझ सकें।
- आवृति वितरण से संबंधित शब्दों का वर्णन कर सकें।
- खण्डित एवं सतत् श्रेणी में अन्तर स्पष्ट कर सकें।
- विभिन्न विधियों के माध्यम से आवृति वितरण का चित्रमय एवं रेखाचित्र प्रदर्शन कर सकें।

3.1 प्रस्तावना

पूर्व के इकाई में, आप समंकों के सकंलन के बारे में जान चुके हैं। यहां आप जानेगें कि किस प्रकार से कच्चे आंकड़ों का प्रयोग आवृति वितरण के निर्माण में किया जाता है। आवृति वितरण सघन आंकड़ों को समूहीकरण करके सारणी में सूविधापूर्वक प्रस्तुत करने का तरीका है जिससे आंकड़े और अधिक आकर्षक दिखाई देते हैं। जबकि, सदैव इस तरह से सारणी के रूप में समंकों का प्रस्तुतीकरण एक आम इन्सान के लिए रोचक नहीं होता है। बहुत से अंक जो कभी–कभी भ्रम पैदा करने के साथ हीं उचित संदेश व अर्थ प्रस्तुत नहीं कर पाते हैं। साख्यिकी परिणामों को उचित एवं आकर्षक तरीके से प्रस्तुत करने का एक बेहतर तरीका है चित्र एवं रेखाचित्र या विन्दूरेखीय चित्र। इस अध्याय में, कुछ महत्वपूर्ण प्रकार के, चित्र एवं विन्दूरेखीय चित्रों की व्याख्या

करने की कोशिश की गई है जो प्रायः सांख्यिकीय समंकों के प्रस्तुतीकरण में प्रयोग किये जाते हैं।

3.2 आवृति वितरण का अर्थ

आवृति वितरण एक सुविधापूर्ण तरीका है जिसके द्वारा समंकों का सामूहीकरण कर सघन एवं बड़े आंकड़ों को सारणी के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। आवृति वितरण, दो प्रकार के होते हैं, खण्डित एवं सत्त्।

3.3 खण्डित आवृति वितरण (या असमूहित आंकड़े)

जब खण्डित चरों आवृति वितरण के रूप में प्रस्तुत करते हैं तब इसे खण्डित आवृति वितरण कहते हैं। एक खण्डित आवृति वितरण, खण्डित चरों के आंकड़ों के सभी संभावित मानों को, जो सगंत आवृतियों के रूप में सूचीबद्ध करके, सारणी के रूप में प्रस्तुत करता है।

यदि x कोई खण्डित चर के विभिन्न मानों को अर्थात् $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ तथा इनके संगत आवृतियां $f_1, f_2 \ldots\ldots\ldots f_n$ हो तब खण्डित आवृति निम्न रूप से प्रस्तुत किये जा सकते हैं:

(खण्डित चर)	X	:	x_1	x_2	………..	x_n
(संगत आवृति)	F	:	f_1	f_2	……….	f_n

उदाहरण के लिए

सारणी 3.1 खण्डित आवृति वितरण को प्रदर्शित करता है।

सारणी 3.1

बच्चों की संख्या का आवृति वितरण

बच्चों की संख्या	परिवारों की संख्या
0	16
1	40
2	30
3	10
4	4
कुल	100

3.3.1 खण्डित आवृति विरण का निर्माण

तीन स्तभों का प्रयोग करके एक खण्डित आवृति वितरण का निर्माण किया जा सकता है। प्रथम स्तभं में, हम सभी संभावित मानों को (अर्थात् वो लक्षण जिसका हमें मूल्यांकन या मापन करना है) छोटी संख्या या मानों से शुरूआत करते हुए उच्चतम संख्या को रख देते हैं। द्वितीय स्तभ का शीर्षक 'मिलान चिह्न' देते हैं तथा प्रत्येक मान के लिए एक उचित जगह के साथ मिलान चिन्ह संगत पंक्ति में रखते हैं। गणना की सुविधा के लिए हम प्रत्येक चार मिलान चिह्न क बाद पांचवें से तिर्यक बनाते हुए उन चारों मिलान चिह्न को काट दें जिसे 'गेट' भी कहते हैं। अन्त में तीसरे स्तंभ में, शीर्षक आवृति अंकित करते हुए सभी संगत मानों के मिलान चिह्नों की गणना करते हुए चरों की आवृति लिख देते हैं। आवृति वाले स्तभं में प्रत्येक मानों की संख्यां उस चर के

बारम्बारता या पुनरावृति को प्रदर्शित करता है जिसे हम आवृति के नाम से जानते हैं।

उदाहरणः दिये गये आंकड़े किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के गणित विषय में प्राप्तांक हैंः

45	25	32	18	25	35	32	45	18	25
50	48	32	40	45	32	18	25	45	18
25	18	45	25	35	48	35	45	25	50

उपरोक्त आंकड़ों से आवृति वितरण निम्न तरीके से बनाया जा सकता है।

सारणी 3.2

30 विद्यार्थियों का प्रांप्तांक का आवृति वितरण

प्राप्तांक	आवृति (विद्यार्थियों की संख्या)
18	5
25	7
32	4
35	3
40	1
45	6
48	2
50	2
कुल	**30**

3.4 सतत् आवृति वितरण

सतत् चरों को प्रस्तुत करने वाले आवृति वितरण को सतत् आवृति वितरण कहते हैं। सतत् आवृति वितरण, सतत् चरों के समंकों के सामूहिकरण द्वारा विभिन्न वर्गों में पदो के संख्या के अनुसार प्रत्येक वर्गों में सारणिक रूप में प्रस्तुत करता है।

उदाहरण के लिए, सारणी 3.3 में 100 छात्रों के ऊचांई जिसे सेन्टीमीटर में नापा गया है, सतत् आवृति वितरण के द्वारा प्रस्तुत किया गया हैः

सारणी 3.3

100 छात्रों के ऊंचाई (से.मी. में) का सतत् आवृति वितरण

ऊंचाई (सेन्टीमीटर में)	छात्रों की संख्या (आवृति)
155—156	4
157—158	8
159—160	18
161—162	28
163—164	20
165—166	14

167—168	6
169—170	2
कुल	100

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएं

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएं जो सतत् आवृति वितरण से संबंधित है जैसे कि सारणी 3.4 में दिखाया गया है अर्थात् किसी कक्षा के 60 छात्रों के एक समूह का वजन किलो ग्राम में अंकित किया गया।

सारणी 3.4

60 छात्रों के वजन का आवृति वितरण

वजन (किलो ग्राम में)	छात्रों की संख्या (आवृति)
30—34	3
35—39	5
40—44	12
45—49	18
50—54	14
55—59	6
60—64	2

वर्ग अन्तराल

एक वर्ग जो किसी अन्तराल को परिभाषित करे, वर्ग अन्तराल कहलाता है (या सामान्य वर्ग)। प्रत्येक वर्ग अन्तराल उनके दिये गये वर्ग सीमा के आधार पर चिन्हित् किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, सारणी 3.4 में प्रथम वर्ग में मानों की सीमा 30 से 34 समावेशी वर्ग है; द्वितीय वर्ग की सीमा 35 से 39 एक समावेशी वर्ग है।

वर्ग सीमा

किसी वर्ग अन्तराल की न्यूनतम एवं उच्चतम मानों को वर्ग की वर्ग सीमा कहते हैं। न्यूनतम संख्या वर्ग की निम्न सीमा तथा अधिकतम संख्या वर्ग की उच्च सीमा कहलाती है। उदाहरण के लिए, वर्ग अन्तराल 35—39 में, वर्ग सीमा 35 से 39 है, तथा छोटी संख्या 35, वर्ग की निम्न सीमा एवं बड़ी संख्या 39, वर्ग की उच्च सीमा है।

वर्गों के प्रकार

दो तरीके हैं जिसके आधार पर आंकड़ों को विभिन्न वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

वे हैं— (1) समावेशी विधि एवं (2) उपवर्जी विधि।

1. **समावेशी विधिः** संमंकों का विभिन्न वर्गों में इस प्रकार वर्गीकृत किये जाये कि प्रत्येक वर्ग की दोनों, निम्न एवं उच्च सीमा उसी वर्ग अन्तराल में हीं सम्मिलित किये जायें तब वर्गीकरण की इस विधि को समावेशी विधि कहते हैं। यहां, आंकड़ों का वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाता है कि किसी वर्ग की उपरी सीमा अगले वर्ग के निम्न

सीमा के बराबर न हो। उदाहरण के लिए, एक कक्षा में छात्रों के प्राप्तांक को इस प्रकार वर्गीकृत किया गया है, 0–9, 10–19, 20–29, ..., जहां, वर्ग अन्तराल 0–9, 0 से 9 तक सभी मानों को (दोनों समावेशी) सम्मिलित करता है। वर्ग अन्तराल 10–19, 10 से 19 तक के सभी मानों को सम्मिलित करता है, और इसी प्रकार अन्य भी किया जा सकता है। इस प्रकार, कुछ क्षण के लिए, यदि कोई छात्र 10 अंक अर्जित करता है, तब उसे 10–19 वाले वर्ग में सम्मिलित किया जायेगा।

2. **अपवर्जी विधिः** जब आंकड़ों का वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाय कि किसी वर्ग की उपरी सीमा, दूसरे वर्ग की निम्न सीमा बन जाय तब इसे अपवर्जी विधि कहते हैं। यहां, यह समझ लेना चाहिए कि वर्ग की उच्च व उपरी सीमा उस वर्ग अन्तराल से निकाल व अपवर्जित करके दूसरे वर्ग में सम्मिलित कर दिया जाता है जिसका निम्न सीमा पहले के उच्च सीमा के बराबर है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कक्षा के छात्रों के प्राप्तांक इस प्रकार हैं, 0–10, 10–20, 20–30, ... तब वर्ग अन्तराल 0–10, 0 या इसके बराबर तथा 10 से कम वाले सभी मानों को इस वर्ग अन्तराल में सम्मिलित किया जायेगा। वर्ग अन्तराल 10–20, सभी मानों को इसमें सम्मिलित करेगें जो 10 के बराबर हो पर 20 से कम हो और इसी प्रकार अन्य में भी। इस प्रकार, यदि एक छात्र परीक्षा में 10 अंक अर्जित करता है तो उसे 10–20 वाले वर्ग अन्तराल में सम्मिलित किया जायेगा है।

कक्षा सीमाएं (वर्ग सीमाएं)

वर्ग सीमा एक वर्ग की उच्च सीमा एवं तुरंत दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के बीच के आधी संख्या व मूल्य होती हैं। प्रत्येक वर्ग की एक उच्च सीमा एवं निम्न सीमा तथा वर्ग सीमा होती है। वर्ग सीमा को, उनके बीच विद्यमान अन्तराल ज्ञात करके भर सकते हैं।

यदि d एक वर्ग की उच्च सीमा एवं दूसरी वर्ग की निम्न सीमा के बीच का अन्तर है तब, वर्ग सीमा निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है,

$$\text{निम्न वर्ग सीमा} = \text{वर्ग की निम्न सीमा} - \frac{d}{2}$$

$$\text{उच्च वर्ग सीम} = \text{वर्ग की उपरी सीमा} + \frac{d}{2}$$

सारणी 3.4 में दिये आवृति वितरण, वर्ग की उपरी सीमा एवं दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के बीच अन्तर $d = 1$ है। इसे 2 से भाग देने पर 0.5 प्राप्त होगा और इसे वर्ग की निम्न सीमा से घटायें एवं दूसरे वर्ग की उपरी सीमा में जोड़े तो हमें नये वर्ग सीमा प्राप्त होंगें जैसा कि सारणी 3.5 में दिखाया गया है।

सारणी 3.5

60 छात्रों के वनज का आवृति वितरण

वर्ग अन्तराल	वर्ग सीमा	आवृति (छात्रों की

		संख्या)
30—34	29.5—34.5	3
35—39	34.5—39.5	5
40—44	39.5—44.5	12
45—49	44.5—49.5	18
50—54	49.5—54.5	14
55—59	54.5—59.5	6
60—64	59.5—64.5	2

यह ध्यान देने की बात है कि वर्ग सीमा सदैव दशमलव के बाद एक अंक लेता है जो अवलोकन लिए गये हैं। वर्ग सीमा को किसी इकाई में व्यक्त किया जाना चाहिए। यद्यपि, वर्ग सीमा को किसी इकाई में व्यक्त किया जाता है जो माप के लिए प्रयोग किये गये इकाई से छोटा होता है। उदाहरण के लिए, यदि वर्ग सीमा को पूर्ण संख्या में व्यक्त किया गया है। तब वर्ग सीमा को दहाई के इकाई और यदि सीमा दहाई में हो तो वर्ग सीमा सैकड़ा पर प्रस्तुत किया जाता है।

वर्ग आकार या चौड़ाई

किसी वर्ग सीमा के वर्ग अन्तराल की उच्चतम एवं न्यूनतम वर्ग के बीच अन्तर को हीं वर्ग आकार या चौड़ाई कहते हैं। उपरोक्त सारणी 3.5 में सभी वर्ग अन्तराल बराबर आकार के हैं। वास्तव में, वर्ग आकार 5 है।

वर्ग आवृति

किसी वर्ग विशेष में आने वाली सभी अवलोकनों की संख्या को हीं वर्ग आवृति कहते हैं, जिसे अंग्रेजी के अक्षर 'f' से इंगित किया जाता है। वर्ग आवृति को अशं या भाग, या कुल आवृति के प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। ऐसे वर्ग आवृति को हम सापेक्षिक वर्ग आवृति के नाम से जान सकते हैं। एक सापेक्षिक वर्ग आवृति वितरण, आवृतियों को अंश या प्रतिशत में व्यक्त करता है। सापेक्षिक वर्ग आवृति सारणी 3.6 में दिखलाया गया है।

सारणी 3.6

सापेक्षिक आवृति वितरण

वर्ग अन्तराल	वर्ग सीमा	वर्ग अंक (मध्य—विन्दू)	आवृति	सापेक्ष आवृति
30-34	29.5-34.5	32	3	3/60
35-39	34.5-39.5	37	5	5/60
40-44	39.5-44.5	42	12	12/60
45-49	44.5-49.5	47	18	18/60
50-54	49.5-54.5	52	14	14/60
55-59	54.5-59.5	57	6	6/60
60-64	59.5-64.5	62	2	2/60

वर्ग अंक (मध्य विन्दू)

किसी वर्ग सीमा या वर्ग अन्तराल के मान को हीं मध्य विन्दू कहते हैं।

इस प्रकार,

$$\text{मध्य विन्दू} = \frac{\text{वर्ग की निम्न सीमा + वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

सारणी 3.6 में दिये गये समंक के लिए 32, 37, 42, 47, 52, 57 एवं 62 वर्ग अंक या मध्य विन्दू है।

नोट

यह ध्यान देना चाहिए कि मध्य विन्दू का प्रयोग वर्ग के प्रतिनित्व मान के रूप में किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, सारणी 3.6 में, वर्ग अन्तराल 30–34 के लिए मध्य विन्दू 32 है जो उस वर्ग के सभी संख्याओं का प्रतिनिधित्व करता है।

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल

कोई भी वर्ग अन्तराल जिसके कोई निश्चित उच्च सीमा या निम्न सीमा नहीं दी गई हो, खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल कहते हैं।

उदाहरण के लिए, वर्ग जैसे 10,00 से कम वेतन, 65 वर्ष से अधिक आयु, 10 से कम प्राप्तांक इत्यादि, ये सभी खुले सिरे वाले वर्ग हैं जिनके वर्ग सीमा निर्धारित नहीं हैं।

संचयी आवृति वितरण

संचयी आवृति वितरण के दो प्रकार होते हैं (1) ''से कम'' संचयी आवृति वितरण एवं (2) ''से अधिक'' संचयी आवृति वितरण

(1) **''से कम'' संचयी आवृतिः** वैसे अवलोकन की संख्या जो उस वर्ग सीमा की वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा से निर्धारित होती है, से कम संचयी आवृति कहलाती है। इस प्रकार से कम संचयी आवृति से तात्पर्य है कि दिये गये वर्ग अन्तराल के आवृतियों का योग जिस वर्ग में आते हैं एवं सभी वर्गों के आवृतियां जिसके मध्य विन्दू दिये गये वर्ग से कम हों हों।

(2) **''से अधिक'' संचयी आवृतियांः** जब अवलोकनों की संख्या वर्ग अन्तराल के निम्न सीमा से अधिक के रूप में संचयी आवृति लिए जाते हैं तो उसे ''से अधिक'' संचयी आवृति कहते हैं। इस प्रकार, ''से अधिक'' संचयी आवृति वोले वर्ग अन्तराल कें सभी आवृतियों के योग लिए जाते हैं जो संगंत वर्ग के आवृति के रूप दिये हुए होते हैं और उनके अकं या वर्ग की निम्न से अधिक होते हैं।

ऐसे सारणी जिसमें संचयी आवृतियां सूचीबद्ध की जाती है, संचयी आवृति वितरण सारणी कहलाती है। सारणी 3.4 में दिये गये संमकों को सारणी 3.7 में संचयी आवृति वितरण के रूप में दिया गया है।

सारणी 3.7

संचयी आवृति वितरण

वर्ग अन्तराल	वर्ग सीमा	मध्य विन्दू	आवृति	संचयी आवृति (से कम)	संचयी आवृति (से अधिक)
30-34	29.5-34.5	32	3	3	57+3=60
35-39	34.5-39.5	37	5	3+5=8	52+5=57
40-44	39.5-44.5	42	12	8+12=20	40+12=52
45-49	44.5-49.5	47	18	20+18=38	22+18=40
50-54	49.5-54.5	52	14	38+14=52	8+14=22
55-59	54.5-59.5	57	6	52+6=58	2+6=8
60-64	59.5-64.5	62	2	58+2=60	2

3.4.1 सतत् आवृति वितरण का निर्माण

अब हम सतत् श्रेणी के निर्माण के प्रक्रियाओं की रूपरेखा तैयार करेंगें।

चरण 1. वर्ग संख्या का निर्धारणः सतत् आवृति वितरण के निर्माण में पहला कदम/चरण होता है कि उन वर्गों की संख्या निर्धारित किया जाय जिनका हमे समूहीकरण करना है। वर्गां की संख्या कितनी होगी इसके बदले में कोई स्पष्ट नियम नहीं है लेकिन सामान्यतया, वर्गों की संख्या न्यूनतम 5 से अधिकतम् 18 के बीच बदलते रहते हैं। वास्तव में, वर्गों की संख्या, संमंक विन्दू के संख्या एवं संकलित संमंकों के विस्तार व परासर पर निर्भर करता है। कुछ सांख्यिकीविद्व वर्गों की आवश्यक संख्या को निर्धारित करने के लिए '**Sturges' Rule** या **स्टर्जेज नियम**, का प्रयोग करते हैं।

$$K= 1+3.3 \log 10^{n}$$

जहां, K = आवश्यक वर्ग संख्या है।

n = दिये गये संमंक श्रेणी में अवलोकनों की संख्या।

यह बताना भी आवश्यक होगा कि वर्गों का चयन इस प्रकार से हो ताकि निम्नलिखित नियमों का पालन हो सके।

(1) सभी छोटे से बड़े अवलोकनों को निम्न से उच्च वर्ग में सम्मिलित किया जाना चाहिए।

(2) प्रत्येक पद मूल्य के लिए केवल एक और एक हीं वर्ग होना चाहिए।

चरण 2. प्रत्येक वर्ग के लिए अन्तराल या आकार निर्धारित करनाः एक बार वर्गों की संख्या निर्धारित हो गई तो अगले चरण में हमे यह तय करना होता है कि वर्ग अन्तराल या चौड़ाई क्या होगी। व्यवहार में, यह वांछित होता है कि सभी वर्ग के लिए वर्ग की चौड़ाई या अन्तराल सामान व बराबर हो। यदि वर्ग असामान अथवा बराबर न हो एवं अन्तराल भी अलग हो, तब हमें इसके निर्वचन में एक सामान वर्ग अन्तराल वाले वर्ग के तुलना में ज्यादा कठिनाई का सामना करना पड़ेगा। सामान्यतया कहा जाता है कि यदि संमंक माला के न्यूनतम पद मूल्य को उच्चतम पद मूल्य से घटा दिया जाये और उसे वर्गों की संख्या से विभाजित

किया जाये तो लगभग प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई या वर्ग अन्तराल प्राप्त हो सकता है। अर्थात्,

वर्ग अन्तराल = अधिकतम पद मूल्य–न्यूनतम पद मूल्य (और फिर लगभग)

वर्गों की कुल संख्या

$$= \frac{\text{विस्तार}}{\text{वर्गों की कुल संख्या}}$$

चरण 3. प्रत्येक वर्ग की आवृति का निर्धारणः अन्त में, प्रत्येक वर्ग में आने वाले अवलोकनों की गिनती करे एवं उचित संख्या को आवृति स्तंभ में लिपिबद्ध करें। प्रत्येक वर्ग के आवृति को प्राप्त करने के लिए **'मिलान चिन्ह'** के प्रयोग के लिए सुझाव दिया जा सकता है। ये तीन चरण हमें संमकों को सारणी एवं चित्रमय रूप से प्रस्तुत करने के बेहतर उपाय सुझाती है।

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़े 50 छात्रों के द्वारा किसी परीक्षा में अर्जित अंक को प्रदर्शित करता है।

29 28 16 23 22 10 8 15 16 23
29 29 22 15 24 9 5 4 15 24
21 24 16 14 21 13 6 2 23 22
24 21 27 13 20 8 4 3 24 20
22 18 23 23 17 7 6 1 16 17

उपरोक्त संमकों का प्रयोग करके आवृति वितरण सारणी बनाएं।

हलः सबसे पहले हम वर्गों की संख्या तय करेंगें जिसमें ये आंकड़े व्यवस्थित करने है। माना कि हम 6 वर्ग अन्तराल रखते हैं। वर्ग अन्तराल व आकार को निर्धारित करने के लिए वर्गों की संख्या से (अधिकतम पद मूल्य 29 एवं न्यूनतम पद मूल्य 1) परासर व विस्तार को विभाजित करते हैं।

विस्तार = अधिकतम् मूल्य– न्यूनतम मूल्य = 29-1= 28

$$\text{वर्ग अन्तराल} = \frac{\text{विस्तार}}{\text{वर्गों की संख्या}}$$

$$= \frac{28}{6} = 4.67$$ या दशमलव को लगभग 5 के बराबर।

सारणी 3.6

वर्ग अन्तराल	आवृति
1-5	6
6-10	7
11-15	7
16-20	8
21-25	17
26-30	5

इस प्रकार प्रत्येक वर्ग के लिए वर्ग आकार व अन्तराल 5 है। प्रथम वर्ग 1–5 के रूप में लेते हुए मिलान चिन्ह के मदद से आवृति वितरण सारणी का निर्माण कर सकते हैं जैसा कि ऊपर सारणी 3.8 में दिखाया गा है।

3.5 चित्र / बिन्दुरेखा

चित्र एवं बिन्दुरेखा संमकों के प्रस्तुतीकरण के लिए एक बहुत हीं रोचक, प्रभावी एवं आकर्षक विधि है। यह कि कोई उत्पादक एवं व्यवसायी क्यों अपने वस्तु एवं सेवा तथा उनके निष्पादन को दैनिक सामाचार पत्र, पत्रिकाएं, जर्नल आदि में चित्र के माध्यम से प्रस्तुत करें। चित्र एवं विन्दुरेखा दृश्य प्रभाव डालते हैं। बिन्दुरेखा संमंक को रोचक रूप प्रदान करता है। वह पक्षियों के आंखों के तरह पूरे समस्या को एक हीं नजर में देखकर समझने योग्य बनाता है। जब अकों को लगातार देखने पर बोरिंग महसूश होता है। बिन्दुरेखा चित्र इसे ज्यादा आर्कषक बना देता है। यह किसी चलत्रि व सिनेमा के कहानी को पढ़ने के वजाय देखने में ज्यादा अनन्ददायक अनुभूति कराता है।

चित्र एवं बिन्दुरेखा संमकों के तुलना के लिए काफी सहायक होते हैं। ये तुरंत एवं दृश्य तुलना में सहायक होते हैं।

3.5.1 बिन्दुरेखा एवं चित्र के प्रकार

1. दण्ड चित्र / बिन्दुरेख
2. आयताकार एवं वर्गाकार चित्र / बिन्दुरेखा
3. चित्र एवं मानचित्र
4. वृत चित्र

1. दण्ड चित्र

दण्ड चित्र एक बहुत ज्यादा उपयोग किया जाने वाला चित्र है। इन्हें दण्ड चित्र कहा जाता है क्योंकि इनकी रचना दण्ड या मोटे रेखाओं से किया जाता है। इनकी चौड़ाई सामान्य रूप से आकर्षित करती है। दण्ड चित्र में केवल लम्बाई या ऊंचाई के हीं साख्यिकीय मूल्य दिये जाते है।

दण्ड चित्र को ज्यादा पसन्द किया जाता है क्योंकि यह बनाने में बहुत सरल एवं आसान होता है। इसे सामान्य व्यक्ति भी आसानी से समझ सकते हैं। कभी–कभी दण्ड के जगह केवल रेखाएं हीं बना ली जाती है क्योंकि इससे कम स्थान में ज्यादा से ज्यादा आंकड़ों को चित्र में सम्मिलित किया जा सके।

दण्ड चित्र बनाते समय निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिएः

(1) सभी दण्डों की चौड़ाई या मोटाई एक सामान होना चाहिए।

(2) सभी दण्डों के बीच की दूरी बराबर रखानी चाहिए।

(3) दण्ड रेखाएं क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर किसी भी दिशा में हो सकते हैं परन्तु ऊर्ध्वाधर दण्ड चित्र को ज्यादा पसन्द किया जाता है।

(4) सभी दण्डों को एक हीं अक्ष या आधार रेखाओं में रखना चाहिए।

(5) चित्र सदैव स्वच्छ एवं सुन्दर होना चाहिए।

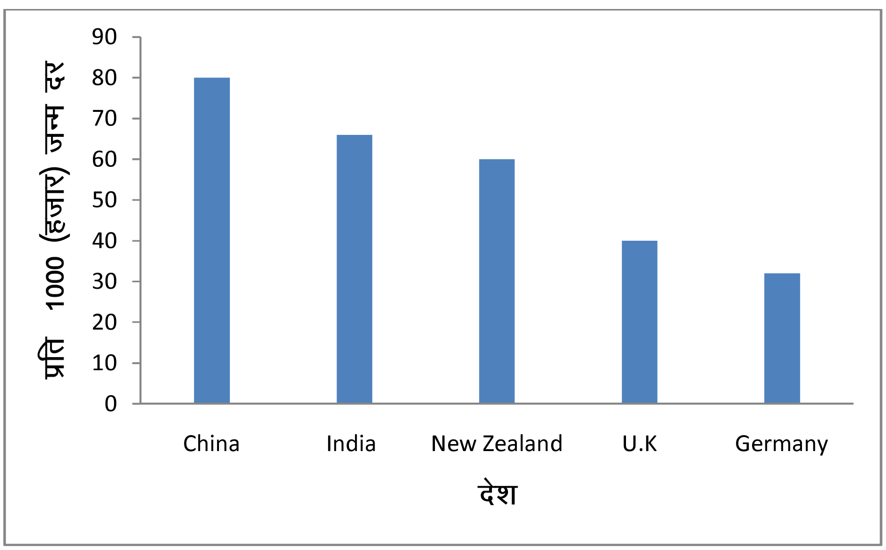
विभिन्न प्रकार के दण्ड चित्रों के बारे में नीचे विस्तृत चर्चा की जा रहीं है।

(1) साधारण दण्ड/रेखा चित्र: साधारण दण्ड चित्र केवल एक चर को प्रदर्शित करता है। पूरे चित्र में दण्ड की चौड़ाई एक हीं होती है केवल दण्ड की उंचाई या लम्बाई अवलोकनों के मूल्य या मान के अनुसार घटती या बढ़ती है।

हम एक उदाहरण लेते हैं जिससे साधारण दण्ड चित्र का निर्माण करते हैं।

उदाहरण: विभिन्न देशों में प्रति हजार जन्म दर निम्नलिखित है।

देश	जन्म दर	देश	जन्म दर
चीन	80	यूनाईटेड किंगडम	40
भारतं	66	जर्मनी	32
न्यूजीलैंड	60		

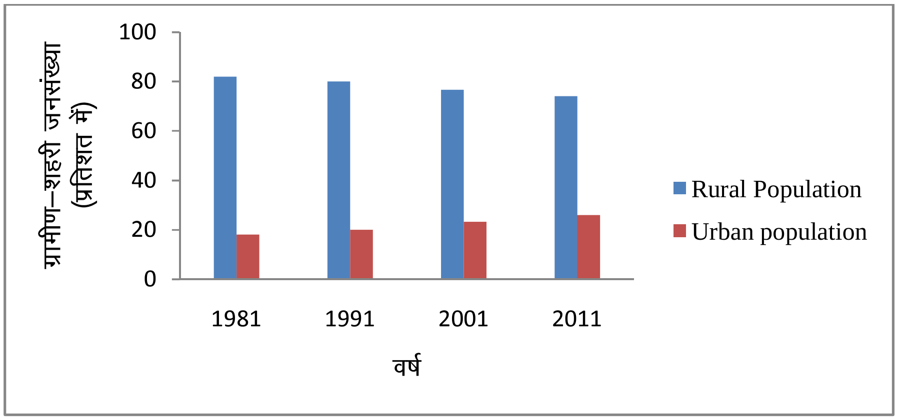


(2) बहु दण्ड चित्र: बहु दण्ड चित्र दो या दो से अधिक संबंधित चरों को निरूपित करने के लिए प्रयोग किया जाता है। अलग दण्ड, अलग विशेषताओं का प्रदर्शित करता है। विभिन्न प्रकार के छाया, रंग, रेखा, तीर्यक या चिन्हों का प्रयोग करके अलग विशेषताओं को निरूपित किया जा सकता है।

उदाहरणः निम्नलिखित सारणी 1981से 2011तक ग्रामीण–शहरी जनसंख्या अनुपात को प्रतिशत में दिया गया है।

ग्रामीण–शहरी जनसंख्या (प्रतिशत में) 1981-2011

वर्ष	ग्रामीण जनसंख्या	शहरी जनसंख्या
1981	82.0	18.0
1991	80.0	20.0
2001	76.7	23.3
2011	74.0	26.0

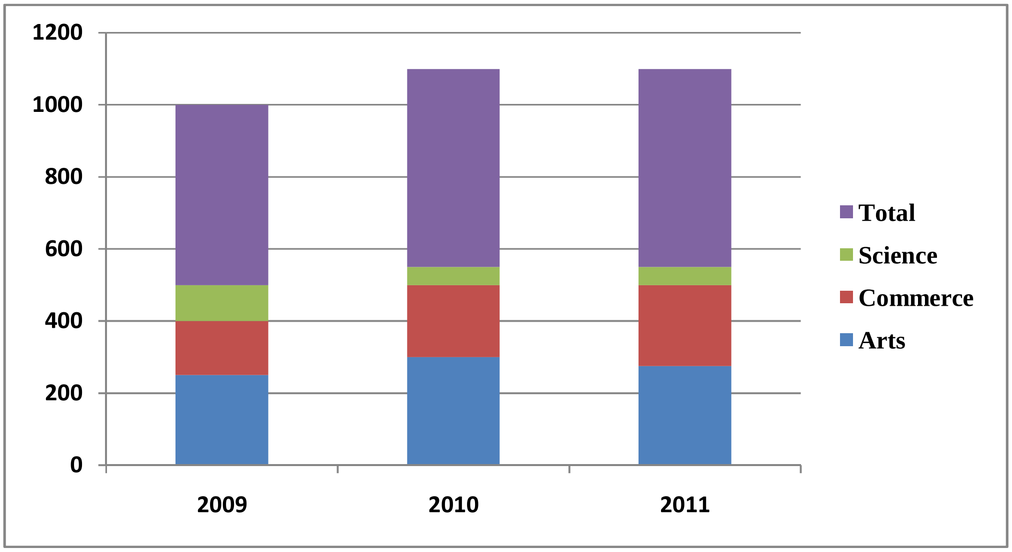


(3) अन्तर–विभक्त दण्ड चित्रः अन्तर–विभक्त दण्ड चित्र में, एक चर के मूल्य को एक दण्ड चित्र से दिखाया जाता है और बाद में चर के विभिन्न मदों के अनुपात में इसे विभक्त कर दिया जाता है। अन्तर–विभक्त दण्ड चित्र का प्रयोग सीमित है अर्थात् इसका प्रयोग वहां होता है जहां चरों की संख्या अपेक्षाकृत कम हो और उसके विभिन्न संघटकों को हीं प्रदर्शित करना हो। यदि मदों की संख्या अधिक होगी तो दण्ड चित्र कई सूचनाओं से ज्यादा भारित होगी, और सूचनाओं के खीचड़ी से दण्ड चित्र बोझिल व दुखदायी प्रतीत होगी।

उदाहरणः निम्नलिखित सारणी एक महाविद्यालय के विभिन्न संकायों में वर्ष 2009, 2010 एवं 2011 की लिए छात्रों की संख्या दी हुई है। संमंकों को अन्तर विभक्त दण्ड चित्र से प्रस्तुत करें।

संकाय अनुसार छात्रों का वितरण

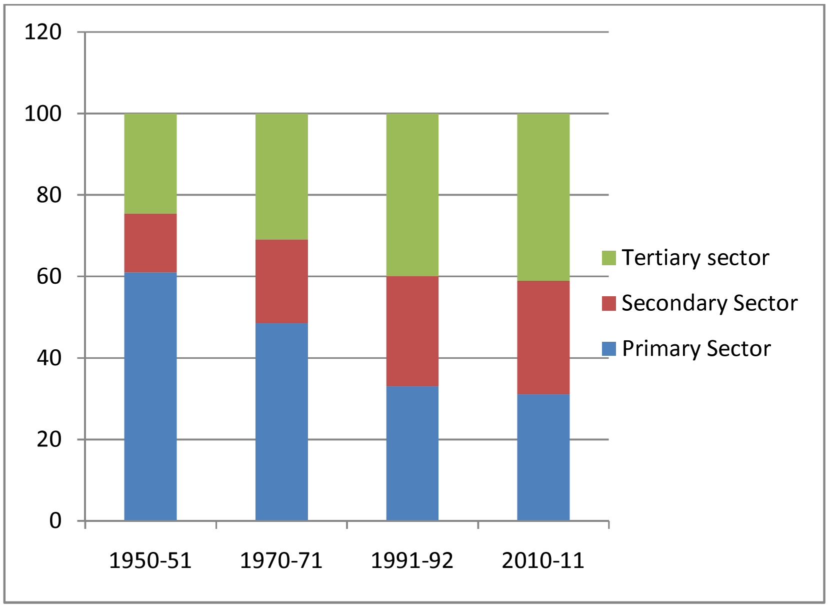
संकाय	**2009**	**2010**	**2011**
कला	250	300	275
वाणिज्य	150	200	225
विज्ञान	100	50	50
कुल	500	550	550



5. **प्रतिशत दण्ड चित्रः** प्रतिशत दण्ड चित्र तैयार करने के लिए दण्ड की लम्बाई को 100 के बराबर रखते हैं। तब विभिन्न मदों के प्रतिशत हिस्सों को विभिन्न उपखण्डों में प्रस्तुत किया जाता है। प्रतिशत दण्ड चित्र का प्रयोग उस स्थिति में ज्यादा उपयोगी होता हैं जहां विभिन्न संघटकों में बृहत विचलन पाया जाता है। इस प्रकार के चित्रों के लम्बाई तय कर ली जाती है जो एक मानक स्तर तक हो सकती है अर्थात् 100 के बराबर होता है। यह चित्र संमकों के सापेक्षिक परिवर्तन को दिखाने लिए उपयोगी होता है।

उदाहरणः निम्नलिखित सारणी 1950–51 से 2010–11 तक राष्ट्रीय आय में विभिन्न क्षेत्रों का योगदान को दिखलाया गया है। इन आंकड़ों को प्रतिशत दण्ड चित्र से प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	प्राथमिक क्षेत्र	द्वितीय क्षेत्र	तृतीय क्षेत्र
1950-51	61	14.5	24.5
1970-71	48.5	20.6	30.9
1991-92	33.0	27.0	40.0
2010-11	31.0	28.0	41.0

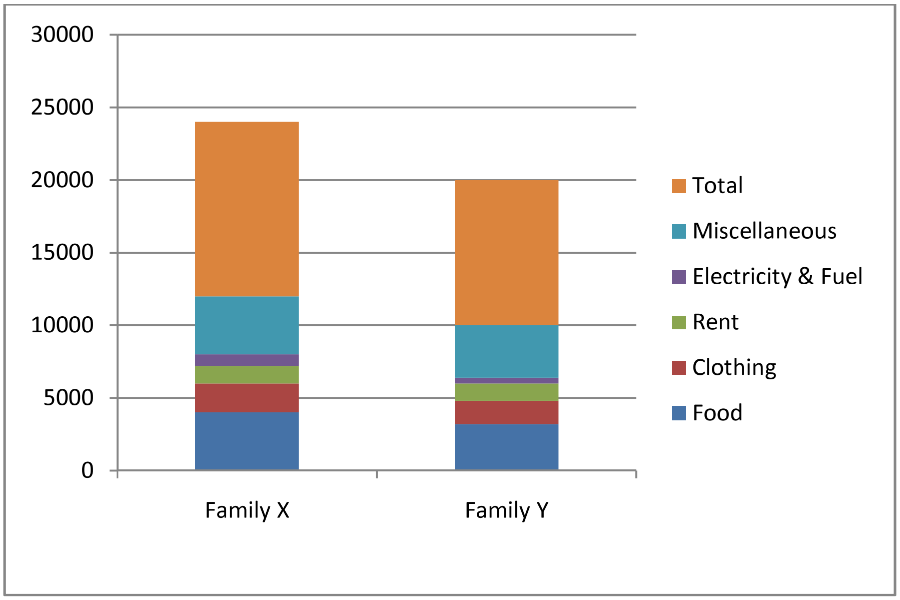


2. **आयत, वर्ग एवं वृत चित्र (द्विवीमीय चित्र):** एक वीमीय चित्र में केवल लम्बाई हीं महत्वपूर्ण होता है, दण्ड चित्र की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता है। एक सरल रेखा भी इस उदद्श्य को पूरा कर सकती है। लेकिन द्विवीमीय चित्र में लम्बाई एवं चौड़ाई दोनो को ध्यान दिया जाता है। दण्ड चित्र का क्षेत्रफल (लम्बाई × चौड़ाई) हीं संमंक को प्रस्तुत करता है। अर्थात् इसी कारण से, इसे क्षेत्रफल चित्र या समतल चित्र के नाम से भी जाना जाता है।

आयत चित्र: आयत चित्र लगातार हीं संमंक को प्रस्तुत करने का महत्वपूर्ण विधि होते जा रहा है। आयत चित्र बनाते समय दण्डचित्र की लम्बाई एवं चौड़ाई दोनों का ध्यान दिया जाता है। इस प्रकार के चित्र दो तरीकों से बनाया जा सकता है एक तो मूल आंकड़ों को ग्राफ पेपर अंकित करके तथा दूसरा उसके संघटन मूल्यों को प्रतिशत में परिवर्तित करके किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण स्पष्ट करते हैं कि दोनो विधियों से आयत चित्र बनाये जा सकत हैं।

उदाहरण: निम्नलिखित संमंक दो परिवारों के विभिन्न मदों से संबंधित मासिक व्यय को प्रदर्षित करता है। इन आंकड़ों को चित्र के माध्यम से प्रस्तुत करें।

व्यय की मदें	**परिवार X**	परिवार Y
भोजन या खाद्य पदार्थ	4000	3200
कपड़े	2000	1600
किराया	1200	1200
बिजली एवं ईंधन	800	400
विविध	4000	3600
कुल	**12,000**	**10,000**



वर्ग चित्र: वर्ग चित्र का निर्माण वहां बहुत ज्यादा उपयोगी होता है जिस स्थिति में श्रेणी के न्यूनतम एवं अधिकतम मूल्यों में अन्तर बहुत ज्यादा हो। दूसरे शब्दों में, जहां विभिन्न मदों के मूल्यों में बहुत ज्यादा अन्तर होते हों, ऐसे में वर्ग चित्र के द्वारा संमंक का प्रस्तुतीकरण ज्यादा उपर्युक्त होता है। वर्ग चित्र में, वर्ग दिये गये संमंक मूल्य के वर्ग मूल या विभिन्न मदों के वर्ग मूल पर आधारित होते हैं। वर्ग की भुजाएं, वर्गमूल के अनुपात में लिया जाता है। यहां तक, यदि चर मूल्यों का वर्ग मूल्य बहुत बड़ा हो तब किसी समापवर्तक से विभाजित किया जाता है ताकि वर्ग का पैमाना छाटा हो सके।

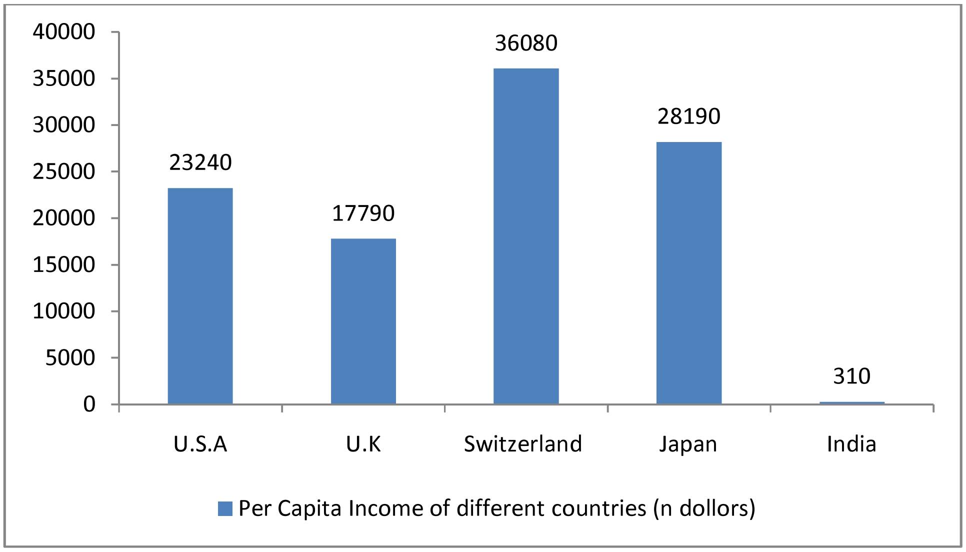
वर्ग चित्र के निर्माण की प्रक्रिया का निम्नलिखित उदाहरण से वर्णन किया जा सकता है।

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़े विभिन्न देशों के प्रति व्यक्ति आय को प्रस्तुत करते हैं। इन्हें वर्ग चित्र से निरूपित करें।

विभिन्न देशों के प्रति व्यक्ति आय

देश	प्रति व्यक्ति आय	वर्ग मूल	वर्गों के आकार (सेमी.)
अमेरिका	23240	152	3.04
यूनाईटेड किंगड्म	17790	133	2.66
स्विट्जरलैंड	36080	189	3.98
जापान	28190	167	3.34
भारत	310	17	0.34

नोट: वर्ग की भूजा के प्रत्येक संख्या के वर्ग मूल को 50 से भाग देने पर प्राप्त किया जा सकता है।



3. **वृत चित्र (Pie Diagram)**

वृत चित्र का प्रयोग गहनता से सरकार के वार्षिक बजट संबंधी मदों को प्रतिशत में उनके हिस्से के अनुसार दिखाया जा सकता है, सरकार के विभिन्न व्ययों को, सरकार को प्राप्त होने वाले राजस्व के स्त्रोत, देश के आयात एवं निर्यात में विभिन्न मदों का हिस्सा आदि को दिखलाने के लिए वृत चित्र का प्रयोग किया जाता है।

वृत चित्र बनाने के लिए निम्नलिखित चरणों का पालन किया जाना चाहिए।

1. सभी संख्या या दिये गये पदो के योग ज्ञात करें।
2. समग्र के योग से प्रत्येक के मद के हिस्से के अनुसार प्रतिशत में परिवर्तित करें।
3. वृत चित्र निर्माण करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग करके संमंक तैयार करें।

$$= \frac{Percentage\ share\ of\ a\ component\ \times 360}{100}$$

4. उदाहरण के लिए, माना कि एक संघटन का प्रतिशत हिस्सा $\times\ 40\%$ है, वृत में वृतखण्ड का क्षेत्र होगा,

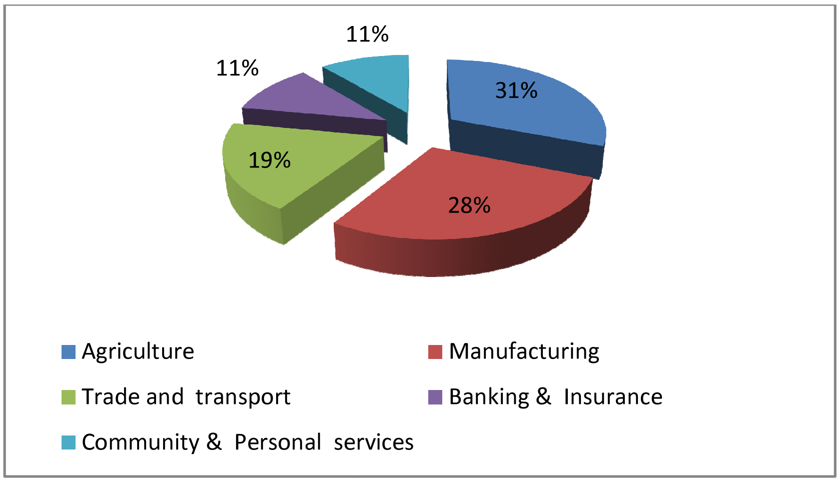
$$= \frac{40 \times 360}{100} = 144$$

5. कम्पास के मदद से सामान्य आकार के एक वृत बनाएं।
6. प्रोटेक्टर के सहायता से प्रत्येक संघटन व मद के लिए वांछित क्षेत्र को अंकित करें।

निम्नलिखित उदाहरण वृत चित्र की रचना को और स्पष्ट करती है।

उदाहरण: साधन लागत 1994–95 पर सकल घरेलू उत्पाद में विभिन्न क्षेत्रों के हिस्सा के वितरण को नीच दिया गया हैं, इन संमंकों की सहायता से वृत चित्र की रचना करें।

क्षेत्र	प्रतिषत हिस्सा	वांछित कोण
कृषि	31	$31 \times 3.6 = 111.6$
निर्माण	28	$28 \times 3.6 = 100.8$
व्यापार एवं यातायात	19	$19 \times 3.6 = 68.4$
बैंकिंग एवं बीमा	11	$11 \times 3.6 = 39.6$
सामूदायिक एवं व्यक्तिगत सेवा	11	$11 \times 3.6 = 39.6$
कुल योग	100	360



वृत चित्र उस स्थिति में ज्यादा उपयोगी होता है जहां संघटकों या मदों की संख्या 5 से 6 या 7 से कम हो। यदि मदों की संख्या अधिक हो या वृत के भाग बहुत अधिक हो अर्थात् 10 या 12 या अधिक हो, तब वृत चित्र का छोटा भाग हीं अत्याधिक भीड़ हो जायेगी। ऐसे में विभिन्न भागों का अलग करना लगभग कठिन हो जाता है। इस प्रकार वृत चित्र की सुन्दरता एवं इसके फायदे नहीं मिल पाते हैं।

4. पिक्टो ग्राफ या चित्रलेख

चित्रलेख, श्रेणी को उसके वास्तविक चित्र के रूप में सांकेतिक एवं व्यवस्थित तरीके से प्रस्तुत करती है। जैसा कि हम जानते हैं कि चित्र रोचक, आर्कषक एवं समझने में आसान होते हैं, वे आम व्यक्तियों के लिए संमंकों को बहुत हीं उपयोगी तरीके से प्रस्तुत करता है।

चित्रलेख बनाते समय निम्नलिखित विन्दुओं पर अत्याधिक ध्यान दिया जाना चाहिए।

1. जो संकेत चित्रलेख के लिए प्रयोग किये जा रहें हैं वो संमंक का प्रतिनिधित्व करता है। संकेत स्वयं व्याख्यात्मक होना चाहिए। उदाहरण

के लिए, देश में बढ़ती हुई मोटर कार की संख्या को हमे कार के चित्र से हीं निरूपित किया जाना चाहिए।

2. संकेत निश्चत रूप से स्पष्ट, संक्षेप एवं आर्कषक होना चाहिए।
3. अलग–अलग संकेतों के द्वारा चित्रलेख को चिन्हित किया जाना चाहिए।
4. चित्रलेख सरल, स्वच्छ एवं अर्थपूर्ण होना चाहिए।
5. चित्रलेख एक उचित आकार का होना चाहिए।
6. संमंक में वृद्धि या कमी को संकेतों के संख्याओं में भी वृद्धि या कमी होना चाहिए।
7. संमंक का पैमाना अर्थात् क्या और कितनी मात्रा में प्रस्तुत करनी है इसका वर्णन किया जाना चाहिए।

5. मानचित्र (Carto -Grams)

मानचित्र भौगोलिक स्थिति पर आधारित संमंक को प्रस्तुत करते हैं। विभिन्न प्रकार के संमंकों को मानचित्र में छाया, विन्दु, चित्रलेख, रंग आदि के द्वारा भौगोलिक इकाई या क्षेत्र से संबंधित आंकड़े प्रस्तुत किये जाते हैं।

3.6 आंकड़ों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

बिन्दुरेखीय विधि या ग्राफ के द्वारा संमंकों को आकर्षक एवं प्रभावी तरीके से प्रस्तुत करने का बहुत हीं प्रचलित माध्यम हो गया है। निम्नलिखित तरीके से संमंक को प्रस्तुत किया जा सकता हैः

1. आवृति आयत चित्र
2. आवृति बहुभुज
3. तोरण या ओजाईव वक्र या संचयी आवृति वक्र
4. काल श्रेणी बिन्दूरेख

3.6.1 आवृति आयत चित्र

बिन्दुरेख विधि संमंक प्रस्तुत करने का सबसे प्रभावी एवं सामान्य तरीका है। आवृति आयत चित्र का निर्माण सामान्यतया सतत् श्रेणी के संमंक में करते है। इसे उर्ध्वाधर दिशा में होती है। दण्ड चित्र से भिन्न, आयत आवृति चित्र में दण्डों के बीच कोई स्थान खाली नहीं होता है अर्थात् सभी आयत एक दूसरे से सटे होते हैं। दण्ड का क्षेत्रफल आवृति के अनुपात में होती है।

सतत् श्रेणी के आंकड़ों के वर्ग अन्तराल को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) में तथा संबंधित आवृतियों को लम्ब अक्ष (Y-अक्ष) में रखते हैं।

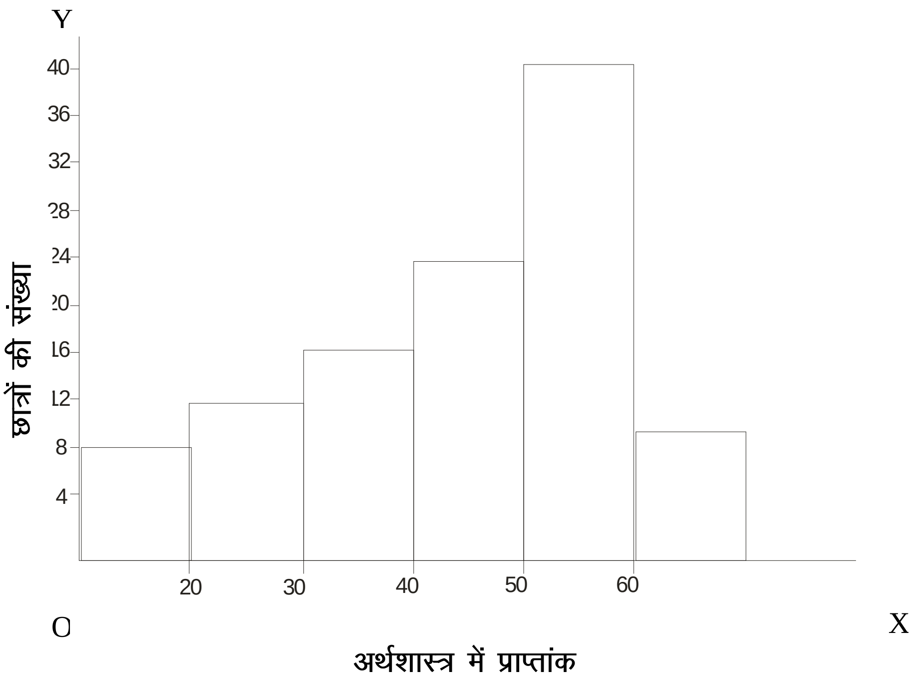
यह ध्यान रखना चाहिए कि दण्ड चित्र से भिन्न, आवृति आयत चित्र के लम्बाई एवं चौड़ाई दोनों को हीं समान महत्व देते हैं।

श्रेणी के प्रत्येक वर्ग के लिए, एक आयत की रचना की जाती है जिसकी चौड़ाई वर्ग अन्तराल एवं उंचाई आवृति मूल्य के अनुसार होती है।

सामान वर्ग–अन्तराल के लिए आवृति आयत चित्र

अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	8
10-20	12
20-30	16

30-40	24
40-50	40
50-60	10



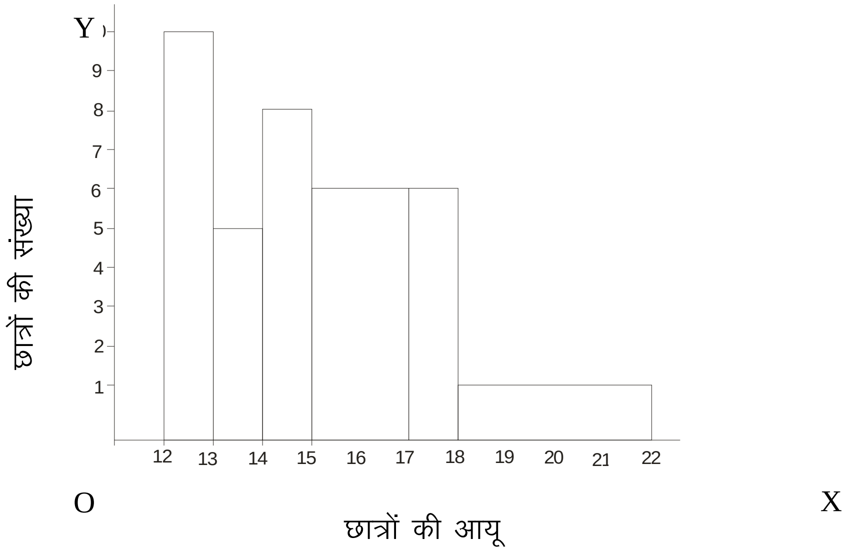
असामान वर्ग–अनतराल के लिए आवृति आयत चित्रः असामान वर्ग–अन्तराल के स्थिति में आवृतियों को सामायोजित किया जाता है। ऐसे वर्ग जिसका वर्ग अन्तराल न्यूनतम हो उसी को आधार मानकर आवृति को समायोजित करते हैं। सभी वर्ग के आवृतियों को न्यूनतम वर्ग अन्तराल के अनुसार समायोजित किया जाना चाहिए।

निम्नलिखित विवरण असमान वर्ग अन्तराल से आवृति आयत चित्र के निर्माण की प्रक्रिया को स्पष्ट करता है।

छात्रों के आयु (वर्षों में)	छात्रों की संख्या	सामायोजित आवृति
12-13	10	10
13-14	5	5
14-15	8	8
15-17	12	6
17-18	6	6
18-22	4	1

उपरोक्त स्थिति में, न्यूनतम वर्ग अन्तराल प्रथम वर्ग है। सभी वर्गों के आवृति जिनका वर्ग अन्तराल एक से अधिक है उनको प्रथम वर्ग के अनुसार सामायोजित करें। चौथे वर्ग की वर्ग अन्तराल अर्थात् 15–17 का अन्तराल दो है, इसलिए इसके आवृति को सामायोजित किया गया है। अन्तिम वर्ग के

वर्ग–अन्तराल 18–22 में चार का अन्तर है इसलिए इसे भी सामायोजित करके एक कर दिया गया है।

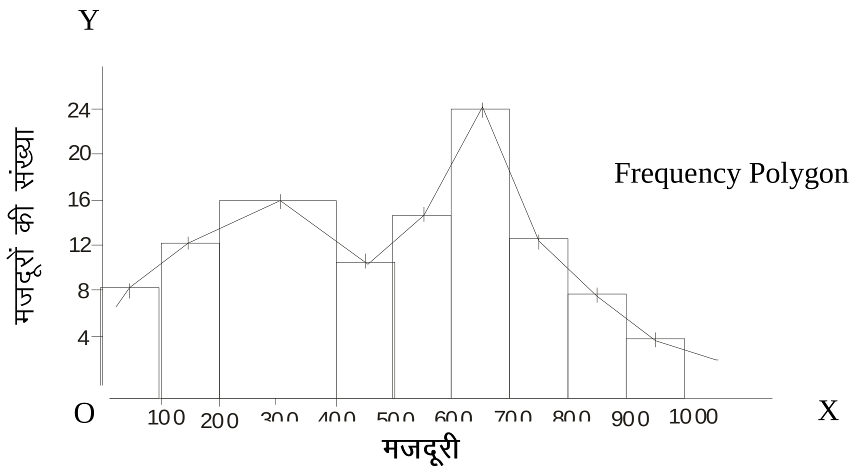


3.6.2 आवृति बहुभुज

यह आवृति वितरण को प्रस्तुत करने का दूसरा बिन्दुरेख विधि है। यह विभिन्न प्रकार के वितरणों के बीच तुलना करने के लिए उपयोगी तरीका है। आवृति बहुभुज दो तरीकें से बनाये जा सकते हैं। एक तो सर्वप्रथम आयत चित्र का निर्माण करें फिर आयतों के मध्य बिन्दुओं को जोड़कर आवृति बहुभुज का निर्माण कर सकते हैं। दूसरा की वर्ग अन्तराल के आवृति की उंचाई के केवल मध्य बिन्दु को अंकित करके उसे मिलाने से प्राप्त चित्र ही आवृति बहुभुज होगी।

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों से आवृति बहुभुज की रचना करें।

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
0-100	8
100-200	12
200-300	16
300-400	16
400-500	10
500-600	14
600-700	24
700-800	12
800-900	8
900-1000	6



3.6.3 तोरण या संचयी आवृति वक्र

ओजाईव या तोरण या संचयी आवृति वक्र की रचना श्रेणी के सभी आवृतियों को जोड़कर की जा सकती है। जब श्रेणी के सभी आवृतियां जोड़ी जाती है तब इसे संचयी आवृति कहते हैं। इन संचयी आवृतियों को ग्राफ पर अंकित करके तोरण वक्र की रचना की जा सकती है। तोरण वक्र की रचना निम्नलिखित विधियों से की जा सकती हैः

1. 'से कम' संचयी आवृति विधि
2. 'से अधिक' संचयी आवृति विधि।

'से कम' विधि में, वर्ग की उच्च सीमा को लिखते हैं और उनके आवृतियों को जोड़ते है। ऐसा करने से हमे उपर उठती हुई 'से कम' संचयी आवृति वक्र मिलेगी। दूसरे शब्दों में, 'से अधिक' विधि में वर्ग की निम्न सीमा लेते हैं। इस स्थिति में, हम कुल आवृति से शुरू करके घटते हुए आवृति की ओर बढ़ते हैं। इस प्रकार हम घटते हुए वक्र प्राप्त होता है।

निम्नलिखित उदाहरण से तोरण वक्र की रचना को स्पष्ट किया जा सकता है।

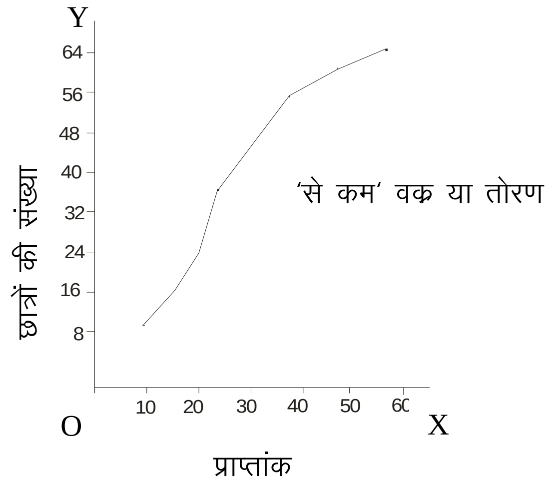
प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	10
10-20	14
20-30	16
30-40	12
40-50	8
50-60	4

सबसे पहले हम 'से कम' संचयी आवृति वितरण तैयार करते हैं।

'से कम' संचयी आवृति वितरण

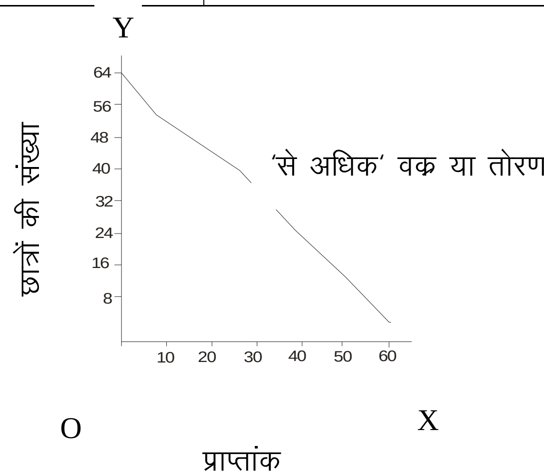
प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
10 से कम	10
20 से कम	24
30 से कम	40

40 से कम	52
50 से कम	60
60 से कम	64



'से अधिक' संचयी आवृति वितरण

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0 से अधिक	64
10 से अधिक	54
20 से अधिक	40
30 से अधिक	24
40 से अधिक	12
50 से अधिक	4



तोरण का प्रयोग (Uses of Ogives)

तोरण वक्र विशेष रूप से वहां ज्यादा उपयोगी सिद्ध होती हैं जब हम समंक के 'से कम' या 'से अधिक' प्रकार के चरों के संख्यात्मक या मात्रात्मक परिणाम को पसंन्द करते हो। अर्थशास्त्र के ऐसे बहुत से उदाहरण जहां हम

व्यक्तियों या मात्राओं के किसी दिये गये इकाई की सीमा 'से कम' या 'से अधिक' प्रकार की विशेषताओं की आवश्यकता होती है। जैसे कितने विद्यार्थी 60 से अधिक या कम अंक अर्जित किये हैं, कितने लोग निर्धनता रेखा से नीचे हैं इत्यादि का ग्राफ में अंकित करके तोरण वक्र बना सकते हैं।

किसी दिये गये मूल्य के लिए से कम या से अधिक बिन्दु को निर्धारित करने के लिए ओजाईव वक्र का प्रयोग महत्वपूर्ण हैं।

तोरण वक्र को प्रयोग दो या दो से अधिक श्रेणीयों के आवृति वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह ज्यादा उपयोगी है। तोरण वक्र कई स्थानिक मानों को बिन्दूरेख विधि से ज्ञात करने के लिए सहायक होते हैं। माध्यिका, चतुर्थक, दशमक् एवं शत्मक आदि का निर्धारण तोरण वक्र के माध्यम से किया जा सकता है।

3.7 काल श्रेणी बिन्दुरेख

जब संमंक को किसी दिये गये समय विन्दू या समय अवधि के निश्चित अन्तराल में हो तो उसे काल श्रेणी बिन्दुरेख कहते हैं। काल श्रेणी बिन्दुरेख का प्रयोग किसी चर मूल्यों में दिये गये समय अवधियों या अन्तराल में परिवर्तन की स्थित को प्रदर्शित करने के लिए करते हैं। इस प्रकार के ग्राफ में काल श्रेणी व समय अन्तराल को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) तथा चर मूल्यों को उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) पर अंकित किये जाते हैं। काल श्रेणी ग्राम समझने एवं बनाने में बहुत आसान होता है। इसके बावजूद, इस पकर के ग्राफ का प्रयोग गलत तरीके से किया जा सकता है क्योंकि इसमें लोचशीलता व्याप्त होते हैं। संमंक प्रस्तुतीकरण के अन्य विधियों के तुलना में इस विधि का प्रयोग करके, विभिन्न सामाजिक–आर्थिक चरों में परिवर्तनों को दैनिक सामाचार पत्र, पत्रिकाओं एवं अन्य मुद्रित माध्यम से सूचना प्रदान की जाती है।

काल श्रेणी ग्राफ की रचना दो पैमाने से किया जा सकता है।

1. प्राकृतिक पैमाना या गणीतीय पैमाने
2. लघुगणकीय पैमाने

इस अध्याय में जो ग्राफ प्रयोग किये गये हैं वा प्राकृतिक या गणीतीय पैमानों पर अधारित है क्योकि लघुगणकीय काल श्रेणी इस पाठ्यचर्या का हिस्सा नहीं है।

काल श्रेणी ग्राफ बनाने के सामान्य नियम

काल श्रेणी के निर्माण के समय निम्नलिखित सामान्य नियमों का पालन अवश्य रूप से करनी चाहिए।

1. समय कारक को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) तथा चर मूल्यों को उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) पर अंकित करना चाहिए।
2. उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) के लिए उचित पैमाने का प्रयोग किया जाना चाहिए जो चरों से संबंधित पूर्ण सूचनाएं इंगित हो सके। उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) पर लिए गये चरों के मान पूरे विन्दूरेख में सामान दूरी पर अवस्थित होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, पैमाने के प्रयोग में संगतता होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि एक सेन्टीमीटर के बराबर 100

चर मूल्य का पैमाना लिया गया हो तब पूरे ग्राफ के विशलेषण में सामान होना चाहिए।

3. प्रत्येक समय विन्दू के लिए संगत चर मूल्यों के लिए ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को अंकित करके सीधी रेखा से केवल मिला देना चाहिए।
4. यदि एक हीं ग्राफ के एक हीं समय बिन्दु से संबंधित एक से अधिक चर मूल्यों को प्रदर्शित करना हो तब अलग–2 बनावट या रंग के रेखाओं का प्रयोग किया जाना चाहिए ताकि रेखाओं में आसानी से भेद किया जा सके। यदि अलग–अलग रंग के रेखाएं बनाने में कठिनाई हो तो रेखाओं का ढ़ंचों के रेखाओं का प्रयोग किया जाना चाहिए। मोटे या पतले या छोटे बिन्दु वाले रेखाओं का प्रयोग करके ऐसे भिन्न रेखाएं बनाई जा सकती है।
5. मापक की इकाईयां दोनों हीं समय कारक साथ हीं साथ चर मूल्य दोनों की इकाईयां स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए एवं इस पैमाने को एक तरफ लिख देना चाहिए। यथा संभव चरों के माप की इकाई जिसे प्रायः उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) पर लिये जाते हैं, उन्हें क्षैतिज रूप में लिखना चाहिए।
6. यदि अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्यों के बीच ज्यादा विचलन हो एवं शून्य से अधिक दूरी पर हो तब एक अभाषी या गलत आधार रेखा खींच लेना चाहिए।

गलत आधार रेखा

जैसा कि हमने काल श्रेणी बिन्दुरेख बनाने सामान्य नियम में अध्ययन किया है कि उर्ध्वाधर रेखा (Y- अक्ष) शून्य से शुरू होता है। जबकि, यदि उर्ध्वाधर रेखा के चर मूल्य का न्यूनतम मूल्य बहूत अधिक या काफी उपर हो तब ऐसे में ग्राफ का आकार आसामान्य सा प्रतीत होता है। इसके कारण ग्राफ पेपर के बहुत से जगह बर्बाद होगें।

3.8 सारांश

बहुत से अधिक संमंकों को सारणी या समूह के रूप में सुविधापूर्ण प्रस्तुत करने का आवृति वितरण एक बेहतर तरीका है। दो प्रकार के आवृति वितरण होते हैं अर्थात् खण्डित एवं सतत आवृति वितरण। चित्र के रूप में संमंकों को प्रस्तुत करने का सबसे बेहतर, आकर्षक एवं प्रभावी विधि है। यह एक रोचक रूप प्रदान करता है जिससे पाठक को पढ़ने में आनन्द एवं रूचि पैदा करती है। इसका विशेष दृश्य प्रभाव पड़ता है।

चित्रों के प्रकार

1. दण्ड चित्र
2. आयताकार एवं वर्ग चित्र
3. वृत चित्र
4. चित्रलेख एवं मानचित्र

बिन्दुरेख विधि से संमंक को प्रस्तुत करना भी एक काफी चर्चित तरीका है जिसके माध्यम से सांख्यिकीय संमंक को बहुत प्रभावी एवं आकर्षक तरीके से

प्रस्तुत किया जा सकता है। आंकड़ों को बिन्दुरेख तरीके से प्रस्तुत करने के निम्नलिखित तरीके हैंः

1. आयत आवृति चित्र
2. आवृति बहुभुज
3. तोरण वक्र
4. काल श्रेणी

3.9 शब्दावली

- **तोरणः** संचयी आवृति वितरण के मदद से खीचीं गई रेखा को हीं तोरण कहते हैं।
- **वृत चित्रः** जब एक वृत को श्रेणी में निहित आवृति वितरण के अनुसार विभाजित किया जाय तब उसे वृत चित्र कहते हैं।
- **संचयी आवृति वितरणः** एक संमंकमाला के समस्त वर्ग के आवृतियों का योग जो उच्चतम सीमा से कम हो संचयी आवृति कहलाती है।

3.10 बोध प्रश्न

(A) खाली स्थानों को भरें

1. बिन्दुरेख सामान्यतया ————————में खींचे जाते हैं जबकि चित्र का निर्माण सामान्यतया ————————— में किया जाता है।
2. काल श्रेणी के बिन्दुरेख को ————————— कहते हैं जबकि, ग्राफ पेपर पर आवृति वितरण को —————————— कहते हैं।
3. आयत आवृति चित्र एक ———————— आवृति ग्राफ है।

(B) बताएं कौन गतल है और कौन सही

1. आवृति वितरण संमंक को संकेन्द्रीत करने में मदद करता है।
2. एक आवृति वितरण एक से अधिक चर मूल्यों को सम्मिलित करता है।
3. एक आवृति वितरण खण्डित के साथ हीं साथ सतत् श्रेणी भी हो सकता है।

3.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A) 1. ग्राफ पेपर, समतल पेपर, 2. आयत आवृति चित्र, आयत चित्र, 3. असंचयी

(B) 1. सही, 2. गलत, 3. सही

3.12 स्वपरख प्रश्न

1. आवृति वितरण को पारिभाषित करें। सतत् आवृति वितरण का निर्माण कैसे करते हैं?
2. चित्र एवं बिन्दुरेख अन्तर स्वष्ट करें। बिन्दुरेख के विभिन्न प्रकारों की विवेचना करें।

3.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.

2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. Digambar Patri, "Business Statistics", KaIyani Publishers, Ludhiyana, India.
5. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
6. R. P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India ltd., Delhi, India.

*****

इकाई 4 समानान्तर माध्य एवं माध्यिका

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- माध्य एवं माध्यिका शब्द के अर्थ को समझ सकें।
- एक आदर्श औसत के लिए जरूरी बातों का वर्णन कर सकें।
- विभिन्न विधियों की सहायता से सतत् एवं विखण्डित श्रेणी में माध्य एवं माध्यिका की गणना कर सकें।
- माध्य एवं माध्यिका, दोनों के गुण एवं अवगुण का ज्ञान प्राप्त कर सकें।
- वास्तविक जगत के व्यवसायिक समस्याओं में माध्य एवं माध्यिका के प्रयोग को प्रोत्साहित कर

4.1 प्रस्तावना

सारणी एवं चित्रमय प्रदर्शन समंकों के बारे में सामान्य विवरण प्रस्तुत करता है। जैसे भी हो, यह अक्सर सांख्यिकीय मापों सूविधा एवं उपयोग के लिए परिभाषित किया जाता है जो समंकों के विशेषताओं का वर्णन करता है। कुछ ऐसे साख्यिकीय माप परिभाषित हैं, कुछ अर्थों में, ये आकड़ों के बिल्कुल में अवस्थित होता है इसलिए, इसे केन्द्रीय प्रवृति की माप कहते हैं। केन्द्रीय

प्रवृति के माप के कुछ महत्वपूर्ण माप माध्य, माध्यिका, बहुलक, गुणोतर माध्य एवं हरात्मक माध्य हैं।

औसत एक दिए गए आकड़ों के परारसर के अधीन एकल मान अर्थात् यह समंकों के श्रेणियों का प्रतिनिधित्व करता है। चूंकि, औसत किसी स्थान में समंकों परासर के अन्तर्गत होता हैं, इसे थोड़े समय के लिए केन्द्रीय प्रवृति की माप कहते हैं।

4.2 एक अच्छे औसत की आवश्यक शर्तें

चूंकि, औसत एकल मान राशि है जो पूरे श्रृखंला में अकेला होता है, ये वांछित है कि औसत निम्नलिखित विशेषताओं को आवश्य रूप से पूरा करें:

1. **इसे सख्ती से परिभाषित किया जाना चाहिएः** एक औसत को सख्ती से परिभाषित किया जाना चाहिए ताकि इसका केवल एक हीं निर्वचन किया जा सके। अन्य शब्दों में, ऐसा कोई भी बात अन्वेंषक के विवेक पर नहीं छोड़ना चाहिए।
2. **इसे समझने में आसानी एंव गणना करने में सामान्य होना चाहिएः** एक औसत समझने में आसान होना चाहिए तथा गणना में कोई जटिलता शामिल नहीं होना चाहिए। हालांकि, यह अन्य लाभ की कीमत पर पूरा नहीं किया जाना चाहिए। उदाहरण, यदि अति शुद्ध परिणाम की जरूरत हो तो किसी अन्य कठिन औसत का प्रयोग किया जाना चाहिए।
3. **इसे सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिएः** यह तार्किक है कि एक औसत, जिसके पूरे समूह के लिए एक मान हो, सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिए।
4. **यह आगे बीजगणितीय व्यवहार करने योग्य होना चाहिएः** हमारे पास इस प्रकार औसत होना चाहिए कि उसकी उपयोगिता को बढ़ाने के लिए भविष्य में गणितीय व्यवहार किया जा सके। उदाहरण के लिए, यदि हमे एक औसत तथा संख्याओं के विभिन्न समूह दिये हों, तब हम उन समूह से संयुक्त औसत या माध्य निकाल सके।
5. **इसे अनावश्यक रूप से चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होना चाहिएः** एक **आदर्ष** औसत को श्रेणी में मौजूद किसी भी चरम बिन्दुओं या बहुत छोटी एवं बहुत बड़ी मूल्य से प्रभावित नहीं होना चाहिए।
6. **इनमें निदर्शन स्थिरिता होनी चाहिएः निदर्शन स्थिरिता** से तात्यर्प्य है कि यदि हम एक की आकार के विभिन्न दैव **निदर्शन** किसी समग्र से लें और औसत की गणना करें तब हमें लगभग वहीं औसत या उतर प्राप्त हो।

इसका अर्थ नहीं है कि, जैसे भी, पर अलग **निदर्शन** से प्राप्त औसत के मूल्य में अन्तर न हो।

4.3 सामानान्तर माध्य

सामानान्तर माध्य या साधारण माध्य एक बहुचर्चित केन्द्रीय प्रवृति की माप है। इसी कारण से इसे सामान्य अर्थ में औसत या माध्य कहते हैं।

परिभाषाः अवलोकनों के समुच्य के सामानान्तर माध्य, सभी अवलोकनों के योग को अवलोकनों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त राषि के बराबर होता है।
उदाहरण के लिए, 5 अवलोकनों वाले समुच्च 14, 16, 19, 25 एवं 21 का सामानान्तर माध्य है,

$$\frac{14+16+19+25+21}{5}=\frac{95}{5}=19$$

अतः अभीष्ठ सामानान्तर माध्य 19 है।

4.3.1 व्यक्तिगत अवलोकनों या श्रेणी से सामानान्तर माध्य की गणना

N अवलोकनों के समुच्य $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ (जरूरी नहीं कि सभी अलग हो), को $\overline{X}$ से इंगित करते हैं।

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n}{N}=\frac{\sum X}{N}$$

समग्र का चिन्ह $\sum X$ को सामान्य चिन्ह $\sum_{i=1}^{n} X_i$ से लिया गया है। $\sum X$, छोटा रूप का प्रयोग उन समस्त अवलोकनों के योग के लिए करेगें जिन्हें इसमें सम्मिलित किया गया है।

उदाहरणः दिये गये संख्याएं 10 छात्रों के एक कक्षा में लिए गये जांच परीक्षा के प्राप्तांक हैं।
प्राप्तांक हैं : 12, 8, 17, 13, 15, 9, 18, 11, 6, 1, 11 सामानान्तर माध्य ज्ञात करें।

हलः सामानान्तर माध्य प्राप्त करने के लिए प्राप्तांकों के योग को छात्रों की संख्या से विभाजित किया जाए।
इस प्रकार,

$$\overline{X}=\frac{\sum X}{N}=\frac{12+8+17+13+15+9+18+11+6+1}{11}=\frac{121}{11}=11,$$

अतः अभीष्ठ औसत प्राप्तांक 11 है।

लघु विधिः यदि दिये गये अवलोकन x का मान बहुत बड़ा हो, तब सामानान्तर माध्य ज्ञात करने जिस विधि का प्रयोग करते हैं, उसे हीं लधु विधि कहते हैं। लघु विधि से सामानान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरण हो सकते हैं।

चरण 1. माना कि A कोई संख्या हैं, जिसे कल्पित माध्य कहते हैं। किसी भी एक संख्या को दिये गये श्रेणी में से कल्पित माध्य के रूप में चुना जा सकता है। जो भी हो, यह x के मान के लिए श्रेणी में से हींबी के संख्या को लिया जाता है। इसके अलावा, जरूरी नहीं की x हीं एक मान हो।

चरण 2. $d = x-A$, की गणना करें, जो X से A का विचलन है।

चरण 3. सामानान्तर माध्य का सूत्र इस प्रकार है,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N}$$

उदाहरणः दिये गये समंक 7 छात्रों के उंचाई को सेन्टी मीटर में को दिखलाया गया है।

164, 159, 167, 169 165 170, 168

(क) प्रत्यक्ष विधि एवं (ख) लघु विधि से सामानान्तर माध्य ज्ञात करें।

हलः

सामानान्तर माध्य की गणना

क्रम संख्या	उंचाई (सेमी) **X**	**A=165 D=X-A**
1	164	−1
2	159	−6
3	167	2
4	169	4
5	165	0
6	170	5
7	168	3
n=7	$\sum X = 1162$	$\sum d = 7$

(क) प्रत्यक्ष विधिः $\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{1162}{7} = 166 \quad cm$.

(ख) लघु विधिः $\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 165 + \frac{7}{7} = 165 + 1 = 166 \ cm$.

4.3.2 खण्डित श्रेणी में सामानान्तर माध्य की गणना

खण्डित श्रेणी में अन्तर्गत, जहां चर X का माना X_1, X_2, ... Xn है तथा इसके संगत आवृति f_1, f_2, ..., fn है। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके सामानान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

(क) प्रत्यक्ष विधि, या

(ख) लघु विधि

प्रत्यक्ष विधिः इस विधि के अनुसार सामानान्तर माध्य इस प्रकार निकाले जा सकते हैं,

$$\overline{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + ... + f_n X_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$$

जहां, $N = \sum f =$ कुल आवृति

लघु विधिः इस विधि के अनुसार सामानान्तर माध्य इस प्रकार निकाले जा सकते है,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

जहां, A= कल्पित माध्य, d=X- A ,एवं N= $\sum f$

उदाहरणः दिये गये खण्डित श्रेणी के संमक से सामानान्तर माध्य ज्ञात करें।

X: 200, 300 400 500 600 700
F: 8 12 20 10 6 4

हलः सामानान्तर माध्य की गणना

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{24600}{60} = 410$$

X	f	fX
200	8	1600
300	12	3600
400	20	8000
500	10	5000
600	6	3600
700	4	2800
कुल	$N = \sum f = 60$	$\sum fX = 24600$

उदाहरणः नीचे दिये गये समंक एक उद्योग के 200 कर्मचारियों के दैनिक मजदूरी (रूपय में) है:

दैनिक मजदूरी (रूपय में): 100 140 170 200 250
कर्मचारियों की संख्या : 50 20 60 40 30

(क) प्रत्यक्ष विधि एवं (ख) लघु विधि से औसत दैनिक मजदूरी ज्ञात करें।

हलः सामानान्तर माध्य की गणना

दैनिक मजदूरी X	श्रमिकों की संख्या f	A=170 d=X-A	fd
100	50	-70	-3500
140	20	-30	-600
170	60	0	0
200	40	30	1200
250	30	80	2400
	$N = \sum f = 200$		$\sum fd = 500$

(ख)लघु विधिः इस विधि के अनुसार दैनिक औसत मजदूरी हैः

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 170 + \frac{-500}{200} = 170 - 2.5 = Rs.167.50$$

अतः अभिष्ठ औसत दैनिक मजदूरी 167.50 रूपये है।

4.3.3. सतत् श्रेणी में सामानान्तर माध्य की गणना

स्तत् श्रेणी की स्थिति में, सामानान्तर माध्य ज्ञात करने के निम्नलिखित तरीकों का प्रयोग किया जा सकता है।

1. प्रत्यक्ष विधि
2. लघु विधि एवं
3. चरण विचलन विधि

प्रत्यक्ष विधिः यदि $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Mn$ श्रृखंला के मध्य–विन्दू है, तथा $f_1, f_2, \ldots\ldots.., fn$ संगत आवृतियां है तब इस विधि से सामानान्तर माध्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\overline{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \ldots + f_n m_n}{f_1 + f_2 + \ldots. + f_n} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{\sum fm}{N}$$

जहां, $N = \sum f$, आवृतियों के योग

$A =$ कल्पित माध्य, $d = m\text{-}A$, कल्पित माध्य का मध्य विन्दू से विचलन,

लघु या अप्रत्यक्ष विधिः यदि $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Mn$ श्रृखंला के मध्य–विन्दू है, तथा $f_1, f_2, \ldots\ldots.., fn$ संगत आवृतियां है एवं $A =$ कल्पित माध्य हो, तब इस विधि से सामानान्तर माध्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

जहां, $N = \sum f$, आवृतियों के योग

$A =$ कल्पित माध्य, $d = m\text{-}A$, कल्पित माध्य का मध्य विन्दू से विचलन,

चरण विचलन विधिः सतत् आवृति वितरण, जिसमें सभी वर्गों के वर्ग अन्तराल बराबर हो तब सामानान्तर माध्य निकालने के लिए एक सरलीकृत व्यंजक का प्रयोग कर सकते हैं,

$$d' = \frac{m - A}{C}$$

जहां, m मध्य विन्दू, c वर्ग अन्तराल, A कल्पित माध्य है। इस विधि के अनुसार, सामान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times C$$

उदाहरणः निम्नलिखित समंको से सामानान्तर माध्य ज्ञात करें।

प्राप्तांकः 0—10 10—20 20—30 30—40 40—50 50—60

छात्रों की संख्याः 5 7 8 14 10 6

हलः सामानान्तर माध्य की गणना

प्राप्तांक X	मध्य विन्दू M	छात्रों की संख्या f	Mf
0-10	5	10	50
10-20	15	14	210
20-30	25	16	400
30-40	35	28	980
40-50	45	20	900
50-60	55	12	660
		$N=\sum f=100$	$\sum Mf=3200$

प्रत्यक्ष विधिः सामानान्तर माध्य,

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{N} = \frac{3200}{100} = 32$$

अतः अभीष्ठ सामानान्तर माध्य 32 है।

अप्रत्यक्ष या लघु विधि से सामानान्तर माध्य की गणना

प्राप्तांक X	मध्य विन्दु M	छात्रों की संख्या f	A=35 (m-A) d	C=10 $d'=\frac{m-A}{C}$	fd	fd'
0-10	5	10	-30	-3	-300	-30
10-20	15	9	-20	-2	-180	-18
20-30	25	25	-10	-1	-250	-25
30-40	35	30	0	0	o	0
40-50	45	16	10	1	160	16
50-60	55	10	20	2	200	20
		$N=\sum f=100$			$\sum fd=-370$	$\sum fd'=-37$

अप्रत्यक्ष या लघु विधिः सामानान्तर माध्य,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 35 + \frac{-370}{100} = 35 - 3.70 = 31.30$$

पद या चरण विचलन विधिः सामान्तर माध्य,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times C = 35 + \frac{-37}{100} \times 10$$

$$= 35 - 3.70 = 31.30$$

अतः प्रत्यक्ष, अप्रत्यक्ष या लघु विधि एवं पद या चरण विचलन विधि से प्राप्त सामानान्तर माध्य 31.30 है।

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल में सामानान्तर माध्य की गणना

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल में माध्य तब तक ज्ञात नहीं किया जा सकता जब तक कि वर्ग अन्तराल को निर्धारित नहीं किया जाये। इस स्थिति में खुल वर्ग के लिए उसके तुरंत पहले या बाद जो लागू हो उसके अनुसार ही मान्यता रख कर हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित वर्ग अन्तराल एवं संगत आवृति वितरण में देख सकते हैं,

प्राप्तांक:	10 से कम	10-20	20-30	30-40	40-50	50 से अधिक
छात्रों की संख्या:	10	9	25	30	16	10

उरोक्त स्थिति में, वर्ग अन्तराल सभी में बराबर है अर्थात् समान वर्ग हैं इसलिए प्रथम वर्ग की निम्न सीमा के लिए 0 एवं अन्तिम वर्ग के उपरी सीमा के लिए 60 रखना ज्यादा उचित होगा। अतः प्रथम वर्ग अन्तराल 0–10 तथा अन्तिम वर्ग अन्तराल 50–60 होगा।

एक दूसरा उदाहरण लेते हैं जिसमें दूसरा वर्ग अन्तराल 20, तीसरा 30, चौथा 40 है। दूसरे शब्दों मे 10 अंक की वृद्धि प्रत्येक वर्ग अन्तराल में हो रहीं है।

प्राप्तांक :	10 से कम	10-30	30-60	60-100	100 से अधिक
छात्रों की संख्या:	10	15	25	30	20

यदि उपरोक्त स्थिति में प्रथम वर्ग की निम्न सीमा 0 तथा अन्तिम वर्ग की उच्च सीमा 150 रखें या मानें तब सही होगा अन्यथा हमारा परिणाम गलत हो सकता है। इस प्रकार, प्रथम वर्ग 0–10 एवं अन्तिम वर्ग 100–150 होगा।

यदि वर्ग अन्तराल में समानता नहीं होती है अर्थात् असमान रूप से परिवर्तित हो रहे हों तब इसके प्रथम वर्ग की निम्न सीमा तथा अन्तिम वर्ग की उच्च सीमा निर्धारित करने का प्रयास नहीं करना चाहिए। अतः यह कहा जा सकता है कि ऐसे खुले सिरे वाले श्रृखंलाओं में सामानान्तर माध्य नहीं ज्ञात करना चाहिए। ऐसी स्थिति में, केन्द्रीय प्रवृति की अन्य माप जैसे माध्यिका या बहुलक का प्रयोग किया जाना चाहिए।

4.3.4 सामानान्तर माध्य की विशेषताएः

अब हम (बिना उपपति) के हीं सामानान्तर माध्य के कुछ महत्वपूर्ण विशेषताओं की चर्चा करेगें।

विशेषता 1. दिये गये अवलोकनों के समूह से प्राप्त सामानान्तर से यदि प्रत्येक अवलोकन से अन्तर निकालर या विचलन का योग शून्य होगा। अर्थात् $\sum(X-\overline{X})=0$

उपरोक्त विशेषता का उल्लेख हम निम्नलिखित उदाहरण से देख सकते हैं

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों के मदद से विशेषता 1 को सिद्ध करें।

X : 2 3 4 5 6

हलः माध्य से पदों के विचलन

$$\overline{X} = \sum \frac{X}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

X	X- $\overline{X}$
2	-2
3	-1
4	0
5	1
6	2
$\sum X = 20$	$\sum (X - \overline{X}) = 0$

इस प्रकार, माध्य से पदों के विचलन का योग 0 है।

विशेषता 2. माध्य से लिए गए विचलनों का वर्ग का योग न्यूनतम होता है।

$$\sum (X - \overline{X})^2 = Least$$

उपरोक्त विशेषता का वर्णन निम्नलिखित उदाहरण मे दिये आंकड़ों से किया जा सकता है।

X: 2 4 6 8 10

हलः कल्पित माध्य A, एवं सामानान्तर माध्य $\overline{X}$, से विचलनों के वर्ग का योग, A = 4 एव A=8

X	$(X-\overline{X})^2$	$(X-4)^2$	$(X-8)^2$
2	16	4	36
4	4	0	16
6	0	4	4
8	4	16	0
10	16	36	4
$\sum X = 30$	$\sum (X-\overline{X})^2 = 40$	$\sum (X-4)^2 = 60$	$\sum (X-8)^2 = 60$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

यहां, माध्य से लिए विचलनों के वर्ग का योग 40 है। जबकि, कल्पित माध्य A से लिए गये विचलनों के वर्गों का योग 60 है जो वास्तविक माध्य के विचलन से अधिक है।

विशेषता 3. यदि दिये गये प्रत्येक अवलोकनों में k, राशि वृद्धि या कमी हो तब नये सामानान्तर माध्य में भी k राशि के बराबर वृद्धि या कमी होगी।

अर्थात्, यदि Y= X+k, तब $\overline{Y} = \overline{X} + k$

इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा वर्णन किया जा सकता है।

उदाहरणः दिये गये 5 अवलोकनों 5, 10, 15, 20 एवं 25 का सामानान्तर माध्य है,

$$\frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

जबकि, यदि प्रत्येक पद में राशि 3 के बराबर वृद्धि या जोड़ दिया जाये तब, ये संख्याएं होगी 8, 13, 18, 23 एवं 28 और उनके योग $= 8 + 13 + 18 + 23 + 28 = 90$

$$\text{एवं सामानान्तर माध्य} = \frac{90}{5} = 18$$

इस प्रकार हमनें देखा कि नई सामानान्तर माध्य जो 18 है पहले के माध्य 15 से 3 अधिक है जो विशेषता 3 को सिद्ध करती है।

विशेषता 4: यदि दिये गये सभी अवलोकनों को किसी स्थिर राशि k से गुणा किया जाये तो प्राप्त नई सामानान्तर माध्य भी k गुणा होगी।

इसे स्पष्ट करने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण का प्रयोग जा सकता है।

उदाहरणः एक समूह या समूच्च के 5 अवलोकनों, 2, 4, 6, 8, एवं 10 के सामानान्तर माध्य हैं,

$$\frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

यदि प्रत्येक पद या अवलोकन को स्थिर राशि 2 से गुणा किया जाय तो नये पद 4, 8, 12, 16, एवं 20 होगें तथा इनके सामानान्तर माध्य हैं,

$$\frac{4+8+12+16+20}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

इस प्रकार नई सामानान्तर माध्य का मूल्य 12 है जबकि, पहले का 6। अतः उपरोक्त विशेषता सिद्ध होती है।

विशेषता 5: $\sum X = N\overline{X}$ $\qquad \overline{X} = \frac{\sum X}{N}$

गलत माध्य को सही करना

सही माध्य को ज्ञात करने के लिए अन्तिम विशेषता बहुत महत्वपूर्ण है जब एक, दो या अधिक अवलोकनों के गलत मान अंकित हो गये हों। उदाहरण के लिए, माना कि हमने n अवलोकनों के लिए माध्य $\overline{X}$ आंकलित किये गये हैं और बाद में यह पता चलता है कि दो अवलोकनों X_1 एवं X_2, को गलत अंकित किया गया था। अब, यह आवश्यक है कि त्रुटि रहित या सही माध्य ज्ञात करने के लिए इस त्रुटि का हटा कर सही अवलोकनों को शामिल किया जाय। विशेषता 5 का प्रयोग का प्रयोग करते हुए सबसे पहले त्रुटियुक्त अवलोकनों के समग्र या योग $N\overline{X}$ ज्ञात कर लें। इसके बाद, त्रुटियुक्त समग्र में से दोनों गलत अवलोकनों X_1 एवं X_2 को घटाते हुए दोनों सही अवलोकनों X_1 एवं X_2 को, समग्र में जोड़कर n से भाग देने पर हमें अभीष्ठ सही माध्य प्राप्त होगें।

उदाहरणः 100 विद्यार्थियों के औसत प्राप्तांक 40 है। बाद में यह पता चलता है कि 53 के जगह 83 अंकित किया गया है।

सही प्राप्तांक का पता को जोड़कर सही औसत प्राप्तांक ज्ञात करें।

हलः हमें दिया गया है, N = 100 एवं $\overline{X}$ = 40

$$\overline{X}=\frac{\sum X}{N},\therefore \sum X = N\overline{X}=100\times 40=4000$$

लेकिन, $\sum X$ ये सही नहीं हैं। वास्तव में,

सही $\sum X = 4000$ - गलत प्राप्तांक मूल्य + सही प्राप्तांक

$$=4000-83+53=3970$$

सही माध्य, $$\overline{X}=\frac{\sum X}{N}=\frac{3970}{100}=39.7$$

अतः सही माध्य 39.7 है।

संयुक्त माध्य (Combined Mean)

यदि दो या दो से अधिक समुच्च के संमकों के सामानान्तर माध्य पता हो तब हम इनका संयुक्त माध्य ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि N_1 एवं N_2 अवलोकनों की संख्या हो एवं $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$ इन अवलोकनों संगत माध्य को प्रदर्शित करते हैं, तब माध्य $\overline{X}$ या $\overline{X_{12}}$, संयुक्त अवलोकनों, $N_1 + N_2$ के संयुक्त माध्य निम्न प्रकार के हो सकते हैं—

$$\overline{X}=\overline{X_{12}}=\frac{N_1\overline{X_1}+N_2\overline{X_2}}{N_1+N_2}$$

संमकों के दो समुच्च के परिणाम को दो से अधिक समुच्च के लिए सामान्यीकरण किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि $\overline{X_1}, \overline{X_2}$........., $\overline{X_k}$ विभिन्न समुच्च के माध्य हैं तथा n_1, $+n_2+$.......... n_k प्रत्येक समुच्च के अवलोकनों की संख्या हो, तब, n_1+n_2 + ...+ n_k समुच्च के अवलोंकनों के संयुक्त माध्य निम्नलिखित हो सकते हैं,

$$\overline{X}=\overline{X}_{1,2.....k}=\frac{N\overline{X_1}}{N_1}\frac{+}{+}\frac{N_2\overline{X}_2}{N_2}\frac{+.....+}{+}\frac{N_k\overline{X}_k}{N_k}$$

अब हम उपरोक्त सूत्र का प्रयोग निम्नलिखित उदाहरण के मदद से स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरणः निम्नलिखित संमकों से संयुक्त माध्य ज्ञात करें।

	श्रेणी X	श्रेणी Y
सामानान्तर माध्य	12	20
मदों की संख्या	80	60

हल: हमे दिया गया है, $\overline{X_1}=12$ $\overline{X_2}=20$

$n_1=80$ $n_2=60$

∴ संयुक्त माध्य $\left(\overline{X}\right)=\dfrac{n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2}}{n_1+n_2}$

$$=\frac{80 \text{ X } 12+60 \text{ X } 20}{80+60}=\frac{960+1200}{140}=\frac{2160}{140}=15.43$$

उदाहरणः बी. कॉम तृतीय वर्ष के ती खण्डों अ, ब, एवं स में संगत छात्रों की संख्या 50, 40, 60 है। इन तीन खण्डों के लिए संगत औसत प्राप्तांक 85, 60, एवं 65 ज्ञात किये गये हैं। जबकि, खण्ड अ के एक छात्र का प्राप्तांक शून्य के जगह 50 अंकित किया गया था। सभी संमंकों का संयुक्त सामानान्तर माध्य ज्ञात करें।

हलः

प्रश्न में दिये गये सूचना को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

छात्रों की संख्या	N_1=50	N_2=40	N_3=60
सामानान्तर माध्य	$\overline{X_1}=85$	$\overline{X_2}=60$	$\overline{X_3}=65$
	$\sum X_1=4250$	$\sum X_2=2400$	$\sum X_3=3900$

खण्ड अ के छात्र के एक छात्र के प्राप्तांक 0 के जगह पर 50 अंकित किया गया था। अतः $\sum X_1$ को सही करने की आवश्यकता है। वास्तव में,

$$\therefore \text{ शुद्धतम } \sum X_1=4250-50+0=4200$$

$$\therefore \text{ शुद्धतम } \overline{X_1}=\frac{Corrected\sum X_1}{N_1}=\frac{4200}{50}=84$$

तीनों खण्डों के संयुक्त माध्य इस प्रकार हैं,

$$\overline{X}=\frac{N_1\overline{X_1}+N_2\overline{X_2}+N_3\overline{X_3}}{N_1+N_2+N_3}=\frac{50\times 84+40\times 60+60\times 65}{50+40+60}$$

$$=\frac{4200+2400+3900}{150}=\frac{10500}{150}=70$$

4.3.5 सामानान्तर माध्य के गुण एवं सीमाएं

गुणः सामानान्तर माध्य के निम्नलिखित गुण हैं:

1. यह निश्चित रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए।
2. यह गणना में आसान एवं समझने में सामान्य होता है।
3. यह सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।
4. यह भविष्य के गणितीय संक्रियाएं करने के योग्य होते हैं।
5. अन्य माध्यों के तुलना में सामानान्तर माध्य, निदर्शन उच्चावचन से कम प्रभावित होता है।

सीमाएंः सामानान्तर माध्य के निम्नलिखित कमियां हैं–

1. यह चरम मूल्यों से बहुत प्रभावित होता है।
2. खुले सिरे वाले वर्गों में वर्ग अन्तराल के आकार के बिना मान्यताओं के माध्य नहीं ज्ञात किया जा सकता है।
3. यह न तो अवलोकन न हीं रेखाचित्र के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है।
4. यह गुणात्मक या परिणात्मक संमंक जैसे ईमानदारी, सून्दरता, बुद्धिमता आदि के माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता है।
5. यह गलत निष्कर्ष दे सकता है यदि लिए गये आंकड़ों के विषय में विस्तृत सूचना प्राप्त न हों।

4.3.6 भारित सामानान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

यदि दिये गये संमंकमाला में सभी पद सामान महत्व के नहीं होते हैं तब हम भारित सामानान्तर माध्य निकालते हैं, जहां पदों के मूल्य के महत्व दिये गये हो। उदाहरण के लिए, यदि किसी उद्योग में काम करने वाले श्रमिकों के औसत मजदूरी ज्ञात करनी हो तो साधारण सामानान्तर माध्य से औसत ज्ञात करना गलत होगा क्योंकि इसमें अधिक वेतन पर काम करने वाले श्रमिकों की संख्या कम तथा कम वेतन पर काम करने वाले कर्मचारियों कि संख्या ज्यादा होगी। अतः यहां भारित सामानान्तर माध्य ज्ञात करना ज्यादा श्रेयसकर होगा। इस स्थिति में साधारण सामानान्तर माध्य से प्राप्त औसत का मूल्य अधिक होगा जो अधिक वेतन का प्रतिनिधत्व करेगा। इस प्रकार, ऐसे स्थिमि में वितरण के समंकमाला के संगत भार दिये होने चाहिए जो उनके उपयोगिता पर आधारित हों।

परिभाषाः यदि $w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots w_n$ अवलोकन $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ के संगत भारित सामानान्तर माध्य, $\overline{X}_w$ से इंगित किया जाता हैं। जो इस प्रकार हैं,

$$\overline{X}_w = \frac{w_1 X_1 + W_2 X_2 + \ldots. + w_n X_n}{w_1 + w_2 + \ldots w_n} = \frac{\sum wX}{\sum w}$$

यदि सभी अवलोकनों के भार सामान व बराबर दिये हों तब n मदों के साधारण सामानान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

उदाहरणः एक उम्मीदवार द्वारा अर्द्ध वार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्रातांक निम्नलिखित हैं। अंग्रेजी 46 प्रतिशत, सांख्यिकी 67 प्रतिशत, लागत लेखाकंन 72 प्रतिशत, अर्थशास्त्र 58 प्रतिशत, आय कर 53 प्रतिशत। यह तय किया गया है कि अंग्रेजी एवं सांख्यिकी को अन्य विषयों के तुलना में दूगुना भार दिया जायेगा। साधारण सामानान्तर माध्य एवं भारित सामानान्तर माध्य क्या होगें?

हलः माना कि X विभिन्न विषयों में प्राप्तांक को प्रतिशत में प्रदर्शित करने वाला चर है।

साधारण एवं भारित सामानान्तर माध्य की गणना

विषय	प्राप्तांक (%) (X)	भार (w)	wX
अंग्रेजी	46	2	92

संख्यिकी	67	2	134
लागत लेखांकन	72	1	72
अर्थशास्त्र	58	1	58
आय कर	53	1	53
	$\sum X=296$	$\sum w=7$	$\sum wX=409$

साधारण सामानान्तर माध्य $= \overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{296}{5} = 59.2\%$

भारित सामानान्तर माध्य $= \overline{X}_w = \frac{\sum wX}{\sum w} = \frac{409}{7} = 58.43\%$

4.4 माध्यिका (MEDIAN)

माध्यिका एक स्थानिक औसत है जिसका सांख्यिकीय विशलेषण में वृहत प्रयोग किया जाता है। जब संमंकमाला को बढ़ते एवं घटते क्रम में रखने व सजाने पर माध्यिका वितरण श्रेणी के मध्य में स्थित होता है। दूसरे शब्दों में, माध्यिका वह मूल्य होता है जो पूरे श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। इस प्रकार माध्यिका की स्थिति में, माध्यिका मूल्य से कम पदों की संख्या एवं माध्यिका मूल्य से अधिक पद या अवलोकनों की संख्या बराबर होती है। इस प्रकार माध्यिका के चर मूल्य के परिभाषित किया जा सकता है जो पदों की संख्या से अधिक एवं उससे कम अर्थात् दोनों तरफ बराबर होते हैं। यदि मदों या अवलोकनों की संख्या विषम हो तब माध्यिका को ज्ञात करने में कोई समस्या नहीं होती है। यदि अवलोकनों की संख्या एक सम संख्या हो तब माध्यिका श्रेणी के बिल्कुल बीच में नहीं होगी। इस स्थिति में, माध्यिका का मूल्य कोई भी मान हो सकता है। इसलिए, माध्यिका का मूल्य दूविधा में होगा।

4.4.1 व्यक्तिगत अवलोकन या श्रेणी में माध्यिका की गणना

किसी दिये गय श्रृंखला में माध्यिका को ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले हमें मदों व अवलोकनों को बढ़ते क्रम या घटते क्रम में व्यवस्थित करें और फिर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना चाहिएः

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{N+2}{2}\right) \text{वां पद मूल्य}$$

$$\text{या, } M = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{वां पद मूल्य}$$

(a) विषम संख्या वाले श्रृंखला या संमंकमाला

यदि अवलोकनों की संख्या विषम हो तब, संमंकमाला का मध्य मूल्य हीं माध्यिका होगी जिसे मदों को उनके मूल्य के अनुसार बढते एवं घटते क्रम में सजाने के बाद प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरणः निम्नलिखित संमंकमाला के मूल्य से माध्यिका की गणना कीजिए।

X:	42	75	85	101	145	175	210	250	300

हलः सर्वप्रथम दिये गये उपरोक्त चर मूल्यों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित करें।

माध्यिका की गणना

X:	42	75	85	101	145	175	210	250	300

यहां, $N = 9$

इसलिए, माध्यिका या, $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

या, $M = \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$= \left(\frac{10}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$= 5$ वां पद मूल्य अर्थात् 145

अतः अभीष्ट माध्यिका श्रृंखला का 5वां पद 145 है।

(b) सम संख्या वाले संमंकमाला

सम संख्या वाले संमंकमाला के स्थिति में, माध्यिका मध्य अवलोकनों के माध्य ज्ञात करके गणना की जा सकती है जो अवलोकनों को बढ़ते या घटते क्रम में सजाने के बाद मध्य के दो अवलोकनों के मूल्यों के माध्य ज्ञात करके प्राप्त किया जा सकता हैं।

माध्यिका = दो मध्य अवलोकनों के माध्य का मूल्य। दिये गये संमंक 5, 10, 15, 20, 25, 30 से माध्यिका = ½ (15+20) वां मूल्य=17.5।

उदाहरणः दिये गये संमंकमाला के मूल्य से माध्य की गणना करें।

Wages (Rs.) :	360	320	280	220	260	200	180	400

हलः

मूल्यों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।

माध्यिका की गणना

Wages (Rs.) :	360	320	280	220	260	200	180	400

यहां, $N = 8$

इसलिए, माध्यिका या, $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

या, $M = \left(\frac{8+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$= \left(\frac{9}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$= 4.5$ वां पद मूल्य

$$4.5 \text{ वां पद मूल्य } = \frac{4th\ item - 5th\ item}{2}$$

इस प्रकार, माध्यिका $= \frac{260+280}{2} = \frac{540}{2}$ = 270 रूपये।

4.4.2 खण्डित श्रेणी में माध्यिका की गणना

खण्डित श्रेणी में आवृतियां होती हैं, इसमें माध्यिका को ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि कुल आवृतियों को दो बराबर भागों में बांटना है।

चरणः

1. आंकड़ों को बढ़ते या घटते क्रम में सजायें।
2. संचयी आवृति की गणना करें।
3. मध्य पद के मूल्य को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें।

   माध्यिका या, M = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य
4. कुल संचयी आवृति वाले स्तम्भ में $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां के बराबर या उससे अधिक संचयी आवृति को ज्ञात करते हैं।
5. उस संचयी आवृति के संगत चर व पद को चिन्हित् करें, वहीं अभीष्ट माध्यिका होगी।

इसे एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरणः दिये गये संमंकों के माध्यम से माध्यिका की गणना करें।

पद मूल्यः	105	110	115	120	125	130	135
आवृतिः	2	3	4	6	10	5	2

हलः माध्यिका की गणना

पद मूल्यः (X)	आवृतियां (f)	संचयी आवृति (cf)
105	2	2
110	3	5
115	4	9
120	6	15
125	10	25
130	5	30
135	2	32
	N=32	

माध्यिका या, M = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

या, M = $\left(\frac{32+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$$= \left(\frac{33}{2}\right) \text{ वां पद मूल्य}$$

$$M = 16.5 \text{ वां पद मूल्य}$$

संचयी आवृति स्तभं में देखने पर 16.5वां पद का मूल्य 125 है जो एक अभीष्ट माध्यिका है।

4.4.3 सतत् श्रेणी में माध्यिका की गणना

सतत् श्रृंखला में, माध्यिका की गणना प्रत्यक्ष विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है। इस स्थिमि में, माध्यिका वर्ग अन्तराल के अन्तर्गत आती है अर्थात् एक वर्ग अन्तराल के उच्च सीमा एवं निम्न सीमा के बीच में आता है। वास्तविक मूल्य के लिए, माध्यिका की गणना एक सूत्र के माध्यम से ज्ञात करते हैं। इस स्थिति में, माध्य की भांति, हम यह कल्पना करते हैं कि पूरी संमकमाला सामान वर्ग अन्तराल में वितरित हैं।

चरणः

1. वर्ग अन्तराल को बढ़ते क्रम मे व्यवस्थित करें।
2. माध्यिका के सूत्र का प्रयोग करके, $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद ज्ञात करें।
3. माध्यिका पद वाले माध्यिका वर्ग को ज्ञात करें।
4. वर्ग अन्तराल निर्धारित होने के उपरान्त निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

जहां, M = माध्यिका, L= माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा, cf= माध्यिका वर्ग से तुरंत पूर्व वर्ग की संचयी आवृति या वैसे सभी वर्गों के आवृतियों के योग जो माध्यिका के वर्ग के आवृति से कम हैं।

f = माध्यिका वर्ग की साधारण आवृति।

i = माध्यिका वर्ग का वर्ग अन्तराल।

उदाहरणः निम्नालिखित आवृति वितरण से माध्यिका की गणना कीजिए।

वर्ग अन्तराल (X)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250
आवृति (X):	44	60	36	44	8

हलः माध्यिका की गणना

X	f	Cf
0-50	44	44
50-100	60	104
100-150	36	140
150-200	44	184
200-250	8	192

	N=192	

M= $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = $\left(\frac{192}{2}\right)^{th}$ पद का आकार

M = 96वां पद वाले समूह का आकार या वर्ग अन्तराल एवं 96वां पद 50—100 वाले वर्ग अन्तराल व समूह में आता है।

माना कि हम अब मान का प्रक्षेपण करें,

यहां, L = 50, cf = 44, f = 60, i = 50, N= 192

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 50 + \frac{\frac{192}{2} - 44}{60} \times 50$$

मध्यिका, M = 50 + 43.33

अतः माध्यिका, M = 93.33।

समावेषी श्रृंखला (Inclusive Series)

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों से माध्यिका ज्ञात करें।

मजदूरी (रूपये में)	**50-69**	**70-89**	**90-109**	**110-129**	**130-159**
श्रमिकों की संख्या **(f)** :	18	75	21	10	41

हलः माध्यिका मजदूरी की गणना

मजदूरी (रूपये में)	श्रमिकों की संख्या **(f)**	**cf**
50-69	18	18
70-89	75	93
90-109	21	114
110-129	10	125
130-159	41	165
	N=165	

M= $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = $\left(\frac{165}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = 82.2वां पद एवं 82.2वां पद 70—89 वर्ग अन्तराल में आता है।

लेकिन, वास्तविक वर्ग सीमा 69.5—89.5 (सामावेशी प्रकार की श्रेणी को पहले अपवर्जी श्रृंखाला में परिवर्तित किया जाना चाहिए) है,

यहां, L = 69.5, cf = 18, f = 75, i = 20, N= 165

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 69.5 + \frac{\frac{165}{2} - 18}{75} \times 20$$

मध्यिका, M = 69.5 + 17.2

अतः अभीष्ट माध्यिका मजदूरी, M = 86.7 रूपये।

खुले सिरे वाले वर्ग (Open End Classes)

उदाहरणः निम्नलिखित मजदूरी के वितरण से माध्यिका को चिन्हित करें।

मजदूरी (रू.)	Below 100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000	1000 & above
श्रमिकों की संख्या	1	16	38	58	60	46	22	15	15	7	12

हलः माध्यिका मजदूरी की गणना,

M= $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = $\left(\frac{290}{2}\right)^{th}$ पद का आकार =

145[वां] पद एवं 145[वां] पद 400–500 वर्ग अन्तराल में आता है।

मजदूरी (रू.) X	श्रमिकों की संख्या **f**	**cf**
1-100	1	1
100-200	16	17
200-300	38	55
300-400	58	113
400-500	60	173
500-600	46	219
600-700	22	241
700-800	15	256
800-900	15	271
900-1000	7	278
1000-1100	12	290
	N=290	

प्रक्षेपण के द्वारा,

यहां, L = 400, cf = 113, f = 60, i = 100, N= 290

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 400 + \frac{\frac{290}{2} - 113}{60} \times 100$$

$$M = 400 + \frac{145 - 113}{60} \times 100$$

$$M = 400 + \frac{32}{60} \times 100$$

$$M = 400 + 53.33$$

अतः अभीष्ट माध्यिका मजदूरी, M = 453.33 रूपये।

उदाहरणः सांख्यिकी पत्र मे 65 छात्रों के प्राप्तांक का वितरण निम्नलिखित दिये गये हैं, माध्यिका प्राप्तांक की गणना करें।

प्राप्तांक (सेअधिक):	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	65	63	40	40	18	7

हलः चूंकि आंकड़े संचयी आवृति वितरण के रूप में दी है, इस आवृति वितरण को निम्नलिखित रूप में व्यवस्थित किया जाना चाहिएः

माध्यिका की गणना

प्राप्तांक	आवृतियां (f)	Cf. (से कम)
20-30	65-63=2	2
30-40	63-40=23	25
40-50	40-40=0	25
50-60	40-18=22	47
60-70	18-7=11	58
70 and above	7	65

M= $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = $\left(\frac{65}{2}\right)^{th}$ पद का आकार = 32.5$^{वां}$ पद एवं 32.5$^{वां}$ पद 50–60 वाले वर्ग अन्तराल में आता है।

यहां, L = 50, cf = 25, f = 60, i = 10, N= 65

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 50 + \frac{\frac{65}{2} - 25}{22} \times 10$$

$$M = 50 + \frac{7.5}{22} \times 10$$

$$M = 50 + 3.41$$

अतः अभीष्ट माध्यिका प्राप्तांक, M = 53.41 है।

4.4.4 माध्यिका का चित्रमय स्थान

किसी श्रेणी की चित्रमय प्रदर्शन के अन्तर्गत तोरण रेखा खींचकर, माध्यिका मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है। इसे निम्नलिखित दा विधियों से किया जा सकता हैः

1. 'से कम' या 'से अधिक' तोरण वक की रचना द्वारा चित्रमय प्रदर्शन करके।

2. 'से कम' एवं 'से अधिक' तोरण वक के चित्रमय प्रदर्शन क द्वारा एक साथ रचना करके हम माध्यिका मूल्य को ज्ञात कर सकते हैं।

1. **'से कम' या 'से अधिक' तोरण वक से माध्यिका**

इस विधि में, सर्वप्रथम दिये गये आवृति वितरण को 'से कम' एवं 'से अधिक' संचयी आवृति में परिवर्तित करतें हैं और 'से कम' एवं 'से अधिक' तोरण वक की रचना चित्रमय प्रदर्शन के द्वारा रचना किया जाता है। श्रेणी के N/2 वां पद का निर्धारण (रेखाचित्र के Y अक्ष), लम्ब डालते हुए आवृति वक या तोरण वक से मिलाते हैं। माध्यिक मूल्य वह विन्दू होगी जो Y-अक्ष एवं X- अक्ष के संगत मूल्य X- अक्ष (आधार रेखा) को काटती हो।

उदाहरणः निम्नलिखित श्रृंखला के लिए चित्रमय विधि द्वारा माध्यिका मूल्य ज्ञात करें।

मजदूरी (रू.)	**0-100**	**100-200**	**200-300**	**300-400**	**400-500**	**500-600**	**600-700**	**700-800**
श्रमिकों की संख्या	4	6	10	10	25	22	18	5

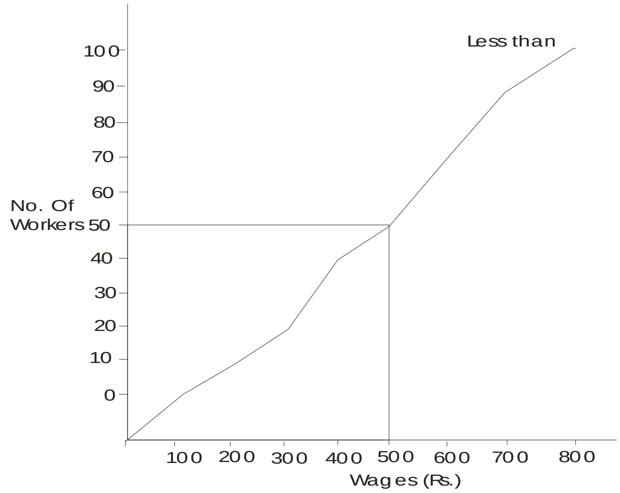
हलः से कम तोरण का प्रयोग के द्वारा माध्यिका की गणना के लिए निम्नलिखित चरण हो सकते हैं।

1. दिये गये श्रृंखला को 'से कम' संचयी आवृति वितरण में परिवर्तित करके इसे ग्राप पेपर पर अंकित करें।
2. N/2 वां पद ज्ञात करें एवं इसे Y-अक्ष पर अंकित तथा चिन्हित् करें।
3. Y-अक्ष के अंकित विन्दू से लम्ब खींचते हुए तोरण रेखा विन्दू E से मिलाएं।
4. विन्दू E से संगत मान का X- अक्ष में अध्ययन करें, प्राप्त मूल्य हीं अभीष्ट माध्यिका मजदूरी होगी।

1. 'से कम' तोरण के माध्यम से माध्यिका निकालना

मजदूरी	**संचयी आवृति (श्रमिकों की संख्या)**
से कम (रूपये में) 100	4
से कम (रूपये में) 200	10
से कम (रूपये में) 300	20
से कम (रूपये में) 400	30
से कम (रूपये में) 500	55
से कम (रूपये में) 600	77
से कम (रूपये में) 700	95
से कम (रूपये में) 800	100

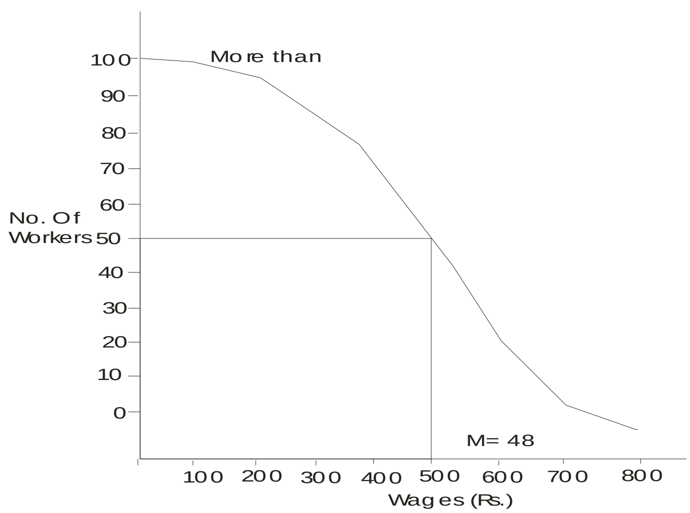
माध्यिका = 48



2. 'से अधिक' तोरण के द्वारा माध्यिका

मजदूरी (रूपये में)	संचयी आवृति (श्रमिकों की संख्या)
100 से अधिक	100
200 से अधिक	96
300 से अधिक	90
400 से अधिक	80
500 से अधिक	70
600 से अधिक	45
700 से अधिक	23
800 से अधिक	5
100 से अधिक	0

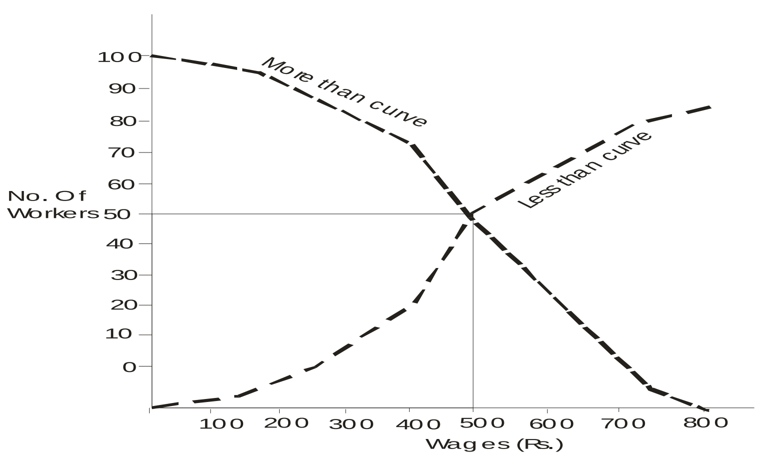
माध्यिका = 48



3. दोनों तोरण का एक साथ प्रयोग करके माध्यिका का आंकलन

4. इस विधि में, दोनों तोरण की रचना साथ–2 ग्राफ पर करते हैं और X- अक्ष तथा Y-अक्ष, दोनों के संगत मानों के मिलान विन्दू से आधार रेखा पर लम्ब डालकर माध्यिका का ज्ञात कर सकते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है।
5. माध्यिका के आंकलन के लिए 'से कम एवं से अधिक' तोरण का प्रयोग उक साथ करते हैं।

मजदूरी	संचयी आवृति (श्रमिकों की संख्या)	मजदूरी	संचयी आवृति (श्रमिकों की संख्या)
से कम (रूपये में) 100	4	से अधिक (रूपये में) 100	100
से कम (रूपये में) 200	10	से अधिक (रूपये में) 200	96
से कम (रूपये में) 300	20	से अधिक (रूपये में) 300	90
से कम (रूपये में) 400	30	से अधिक (रूपये में) 400	80
से कम (रूपये में) 500	55	से अधिक (रूपये में) 500	70
से कम (रूपये में) 600	77	से अधिक (रूपये में) 600	45
से कम (रूपये में) 700	95	से अधिक (रूपये में) 700	23
से कम (रूपये में) 800	100	से अधिक (रूपये में) 800	5
से कम		से अधिक (रूपये में) 100	0



4.4.5 माध्यिका के गुण एवं अवगुण

गुण: माध्यिका के निम्नलिखित विशेषताएं हैं:

1. यह कठोरता से परिभाषित है।
2. यह गणना करने में आसान एवं समझने में सामान्य होता है।
3. यह खुले सिरे वाले वर्ग वितरण में भी आंकलित किया जा सकता है।

4. स्थानिक माध्य होने के कारण, यह चरम मूल्यों से ज्यादा प्रभावित नहीं होता है। उदाहरण के लिए, दिये गये संमंक 10, 15, 20, 25 एवं 130 में माध्यिका मूल्य 20 है जबकि माध्य 40 है। अतः जब श्रृंखला में प्रायः चरम मूल्य दिये हों तो अन्य केन्द्रीय प्रवृति के माप में से माध्यिका का प्रयोग ज्यादा संतोषजनक परिणाम दे सकते हैं।
5. यह परिमाणात्मक या गुणात्मक आंकड़ों के संबंध में भी ज्यादा उपयोगी होता है।
6. यह कभी–2 सामान्य अवलोकन या रेखाचित्र के माध्यम से भी ज्ञात किया जा सकता है।

अवगुणः माध्यिका के निम्नलिखित अवगुण हैंः

1. स्थानिक माध्य या औसत हाने के कारण यह सभी अवलोकनो या पदों से संबंधित नहीं होते हैं।
2. यह आगे गणितीय संक्रियाओं के लिए उपर्यूक्त नहीं होता है। अतः हम दो या दो से अधिक समूहों के लिए संयुक्त माध्यिका का ज्ञात नहीं कर सकते हैं।
3. ये सामानान्तर माध्य के तुलना में, निदर्शन उच्चावचन से ज्यादा प्रभावित होता है।
4. माध्यिका की गणना के लिए, यह आवश्यक होता है कि समंकों को बढ़ते एवं घटते क्रम में व्यवस्थित किया जाय।

4.5 सारांश

केन्द्रीय प्रवृति की माप या औसत वह सांख्यिकी तकनीक है जो श्रृंखला के किसी एक मूल्य को ज्ञात किया जाता है और पूरे समूह का प्रतिनिधित्व करता है।

एक अच्छे केन्द्रीय प्रवृति के माप की विषेश्तायें

एक बेहतर औसत को निश्चित रूप से समझने में आसान, गणना में सरल, कठोरता से परिभाषित, सभी अवलोकनों पर आधारित, निदर्शन उच्चावचन से न्यूनतम प्रभावित, चरम मूल्यों से अल्प प्रभावित एवं भविष्य के सांख्यिकी प्रयोग के लिए उचित होना चाहिए।

सामानान्तर माध्य

इसे सामान्यतया औसत या माध्य के रूप में जानते हैं। इसे श्रृंखला के मदों की संख्या से अवलोकनों के योग को विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है।

माध्यिका

यह श्रृंखला के मध्य मूल्य से संबंधित होता है। यह एक स्थानिक औसत होता है। यदि श्रृंखला के सभी अवलोकनों को बढते या घटते क्रम में व्यवस्थित किया जाय तो श्रृंखला का मध्य मूल्य हीं माध्यिका होता है।

4.6 शब्दावाली

माध्यः किसी संमंक श्रेणी के सभी अवलोकनों के योग को, अवलोकनों की संख्या से विभाजित करके माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

भारः वितरण के अवलोकनों को उनके उपयोगिता के आधार पर महत्व देना।

4.7 बोध प्रश्न

सही या गलत

1. सामानान्तर माध्य किसी भी प्रकार के श्रेणीयों में ज्यादा उपयुक्त होता है।
2. सामानान्तर माध्य, वितरण के चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होते है।
3. माध्य वितरण के प्रत्येक एवं सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. गलत, 2. गलत, 3. सत्य

4.9 स्वपरख प्रश्न

1. एक अच्छे औसत के माप के कौन से आदर्श शर्त हैं?
2. माध्य एवं माध्यिका के माप के विभिन्न स्थितियों की चर्चा करें जिसका हम प्रयोग करते हैं।
3. निम्नलिखित सारणी के में दिये गये समंकों से माध्यिका एवं माध्य की गणना करें।

प्राप्तांक (से अधिक)	छोत्रों की संख्या
70	7
60	18
50	40
40	40
30	63
20	66

उत्तरः माध्यिका = 53.41, माध्य = 50.85

4. माध्य एवं माध्यिका की विशेषताओं एवं सीमाओं की चर्चा करें।

4.10 संदर्भ पुस्तकें

1. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. Digambar Patri, "Business Statistics", KaIyani Publishers, Ludhiyana, India.
5. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
6. R. P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India ltd., Delhi, India.

*****

इकाई 5 बहुलक एवं अन्य स्थानिक माप

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

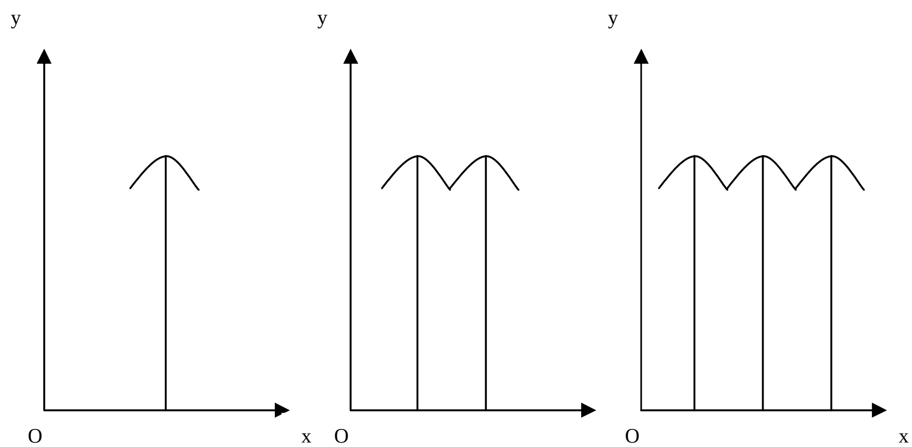
- बहुलक एवं अन्य स्थानिक मापों के अर्थ को समझ सकें।
- बहुलक, चतुर्थक, दषमक् एवं शतमक् की गणना कर सकें।
- ऐसे स्थानिक मापों के विशेषताओं को ज्ञान एवं इनका व्यवहारिक जीवन में प्रयोग कर सकें।

5.1 प्रस्तावना

पिछले इकाई में, आपने माध्य एवं माध्यिका के मदद से किस प्रकार केन्द्रीय मूल्य को ज्ञात करते हैं। यहां, इस इकाई में बहुलक एवं अन्य स्थानिक माप की चर्चा करेंगें। जब दिये गये वितरण से अति परिशुद्ध एवं ठेठ स्थानिक मान की आवश्यकता हो, तब बहुलक का प्रयोग कर सकते हैं। यह विषमता या आसामान वितरण की स्थिति में एक अर्थपूर्ण केन्द्रीय प्रवृति की माप है, जैसा कि यह अधिकतम विन्दूओं के संकेन्द्रण की स्थिति सूचित या प्रदर्शित करता है। इसप्रकार, बहुलक एक बहुचर्चित पद है जो किसी श्रेणी में एक बिन्दु के इर्द–गिर्द अधिकतम आवृतियों की सघनता हो। जब हम 'औसत छात्र', 'औसत पट्टे की आकार', 'औसत आकार के जूते' आदि की बात करते हैं तो इसका अर्थ या संबंध बहुलक से होता है। जब हम कहते हैं कि एक छात्र की औसत मासिक व्यय 5000 रूपये है, इसका अर्थ हुआ कि अधिकतर छात्रों की प्रति

मासिक व्यय 5000 रूपये है। यह बहुलक का मूल्य हो जो विशेष या ठेठ रूप या आधूनिक प्रणाली के अनुकूल श्रेणी का मूल्य होता है।

5.2 बहुलक का अर्थ (Meaning of Mode)



बहूलक माध्यिका की तरह एक स्थानिक मापक है। श्रृंखला में सर्वाधिक बार आने वाली आवृति का पद हीं बहुलक मूल्य है। इसका आशय यह हुआ कि जो पद श्रृंखला में अधिकतम बार पाया जाये तो उसे हीं श्रृंखला का बहुलक कहते हैं। मॉड शब्द की उत्पति, फ्रेंच शब्द 'ला मॉड' से हुई है जिसका अर्थ है आधूनिक प्रणाली के अनुकूल या सुप्रसिद्ध परिघटनाएं। बहुलक किसी भी चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है। यह गणना करने में आसान होता है एवं प्रचलित वस्तु के निर्धारण में मदद करता है। बहुलक को उस मूल्य के रूप में जान सकते हैं जो प्रायः बारम्बार परिलक्षित होती है। संमकों को हम किसी भी प्रारूप में रख सकते हैं। यदि कोई मूल्य अन्य मूल्यों के तुलना में अधिक बार श्रृंखला में परिलक्षित होती है उसे एक बहुलकीय श्रृंखला कहलाती है। श्रृंखला में दो अलग मूल्यों के बराबर होने एवं उनके अधिकतम आवृतियां होने के कारण इसे द्विबहुलक कहते हैं। इस प्रकार हम त्रिबहुलक या बहुभूष्यिटिक वितरण को भी परिभाषित किया जा सकता है। यदि श्रृंखला के सभी पद विशेष (व्यक्तिगत श्रेणी के स्थिति में) या अलग प्रतीत हो तब उस वितरण में बहुलक अनुपस्थित होगा या भूष्यिटक अज्ञात होगा।

5.3 बहुलक गणना की विधियां

बहुलक मूल्य को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित महत्वपूर्ण विधियों से किया जा सकता हैः

1. दिये गये श्रेणी में समूहीकरण विधि के माध्यम से अधिकतम आवृति वाले मूल्यों का पहचान करके बहुलक का निर्धारण।
2. प्रक्षेपण विधि के माध्यम से बहुलक की गणना
3. बिन्दुरेखीय विधि से बहुलक की गणना
4. माध्य एवं माध्यिका से बहुलक का आंकलन।

5.3.1 व्यक्तिगत श्रृंखला में बहुलक की गणना

यदि प्रत्येक पद श्रेणी में एक हीं बार आए, तब उस श्रेणी में कोई बहुलक नहीं होगें। श्रेणी में किसी एक पद का अधिक बार या अधिकतम आवृति हीं बहुलक होता है। यह सामान्यतया अवलोकन कर ज्ञात किया जा सकता है। यदि व्यक्तिगत श्रेणी में पदों की संख्या अधिक हो तो उसे खण्डित या सतत् श्रेणी में परिवर्तित करें, जहां से बहुलक ज्ञात किया जा सकता है। व्यक्तिगत श्रेणी के स्थिति में, बहुलक को अवलोकन के द्वारा या फिर खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करके ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणः निम्नलिखित छात्रों के प्राप्तांकों के आंकड़ों से बहुलक की गणना कीजिये।

क्रम संख्या	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
प्राप्तांक	10	27	24	12	27	27	20	18	15	30

हलः यह अवलोकन से पात हैं कि प्राप्तांक 27 सबसे ज्यादा बार अर्थात् श्रृंखला में 3 बार आते हैं। अतः श्रेणी के लिए बहुलक मूल्य प्राप्तांक 27 है।

5.3.2 खण्डित श्रेणी में बहुलक की गणना

खण्डित श्रेणी में, बहुलक, सामान्यतया अवलोकन या समूहीकरण विधि से ज्ञात किया जा सकता है। अवलोकन विधि से तात्पर्य है कि उस मूल्य को ध्यान से श्रेणी में ढूढंना या देखना, श्रृंखला में ज्यादा बार या बहुत सघन रूप से परिलक्षित होते हैं।

उदाहरणः

X:	**100**	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**
f:	5	8	15	7	4	5

उपरोक्त श्रृंखला से, यह स्पष्ट होता है कि बहुलक आकार या मूल्य 120 है। यह मूल्य 120 अधिकतम बार श्रेणी में पाया जाता है अर्थात् 15 बार। लेकिन, त्रुटियां होने की भी संभावना हैं जहां इस पद मूल्य के पहले या इसके बाद वाले पद मूल्य की आवृतियों में बहुत ज्यादा अन्तर तो नहीं है अर्थात् एक तरफ बहुत कम आवृति तथा दूसरे तरफ बहुत सघन संकेन्द्रण तो नहीं है। ऐसे स्थिति में समूहीकरण विधि का प्रयोग ज्यादा वांछित होगा, जिसमें बहुलक को निर्धारित करने के लिए एक 'समूही सारणी' एवं एक 'विशलेषण—सारणी को तैयार करना होता है।

समूही सारणीः एक समूही सारणी के छः स्तंभ हो सकते हैः

स्तंभ 1. मूल आवृतियों को इसमें लेते हैं एवं अधिकतम आवृति को घेर दिया जाता है।

स्तंभ 2. आवृतियों को दो का जोड़ा बनाकर लिख लिया जाता है।

स्तंभ 3. प्रथम पद के आवृति को छोड़कर, दो के आवृति को जोड़ा बनाकर जोड़ लिया जाता है।

स्तंभ 4. तीन आवृतियों का गुच्छ बनाकर जोड़ लिया जाता है।

स्तंभ 5. प्रथम पद के आवृति को छोड़कर, तीन आवृतियों के गुच्छ को जोड़कर लिख लिया जाता है।

स्तंभ 6. प्रथम दो संगत पदो ंके आवृति को छोड़कर एवं तीन आवृतियों को जोड़ कर लिख लिया जाता है।

प्रत्येक स्थिति में अधिकतम योग के लें एवं इसे गोला करें या खाने में रखें या रेखाकंन करें। एक बार जब समूहीकरण सारणी तैयार हो जाय, फिर उसी के आधार पर विश्लेषण सारणी का भी निर्माण करें। इन सभी छः स्थितियों के, अधिकतम आवृतियों को ले एवं संगत खानों में प्रविष्ट करें।

उपरोक्त की सभी प्रक्रियाएं निम्नलिखित उदाहरण के मदद से दिखलाया जा सकता है।

उदाहरणः

निम्नलिखित समंकों से बहुलक की गणना करें।

उंचाई (इंच में):	56	58	59	60	61	62	63	64	66	68
व्यक्तियों की संख्या:	3	7	6	9	20	22	24	5	3	1

हलः एक बार अवलोकन से यह प्रतीत होता है कि 63 श्रेणी का बहूलक है क्योंकि यह श्रेणी में अधिकतम बार आता है अर्थात् 24। जबकि, अधिकतम आवृति एवं उसके तुरंत पूर्व के आवृति के बीच अन्तर बहुत कम है, फलतः हमें एक समूही सारणी एवं विश्लेषण सारणी तैयार करना होगा जैसा की नीचे दिखाया गया है।

समूही सारणी

उंचाई (इंच में):	स्तंभ 1	स्तंभ 2	स्तंभ 3	स्तंभ 4	स्तंभ 5	स्तंभ 6

56 58 59 60 61 62 63 64 66 68	3 7 6 9 20 22 24 5 3 1	10 15 42 29 4	13 29 46 8	16 51 32	22 66 9	35 51

विश्लेषण सारणी

स्तंभ संख्या	56	58	59	60	61	62	63	64	66	68
स्तंभ 1							1			
स्तंभ 2					1	1				
स्तंभ 3						1	1			
स्तंभ 4				1	1	1				
स्तंभ 5					1	1	1			
स्तंभ 6						1	1	1		
कुल				1	3	5	4	1		

चूंकि, मद 62 श्रेणी में अधिकतम बार आता है अर्थात् 5, अतः दिये गये संमंकमाला के लिए बहुलक मूल्य 62 या बहुलक उंचाई 62 इंच है।

5.3.3 सतत् आवृति वितरण में बहुलक की गणना

सतत् आवृति वितरण के स्थिति में, पहला कदम या चरण होता है बहुलक वर्ग का चयन या निर्धारण करना, अर्थात् वह वर्ग जिसकी संगत आवृति अधिकतम हो। यह सामान्य अवलोकन या समूही विधि के अन्तर्गत समूही सारणी एवं विश्लेषण सारणी तैयार करके किया जा सकता है। बहुलक मूल्य को निम्नलिखित प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

बहुलक, Z या Mo = $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

जहां, L= बहुलक वर्ग की निम्न सीमा,

f_1= बहुलक वर्ग की आवृति,

f_0= बहूलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृति,

f_2= बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृति,

i= बहुलक वर्ग की वर्ग अन्तराल का आकार

बहुलक गणना के लिए उपरोक्त सूत्र को विभिन्न रूप में रख सकते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है:

बहुलक = $L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$

जहां, $\Delta_1 = f_1 - f_0$ = बहुलक वर्ग की आवृति– बहूलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृति

$\Delta_2 = f_1 - f_2$ = बहुलक वर्ग की आवृति– बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृति

टिप्पणी: यह टिप्पणी की जा सकती है कि उपरोक्त सूत्र जो बहुलक मूल्य के गणना के लिए दी गई है निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित हैं:

1. आवृति वितरण आवश्यक रूप से सतत् एवं अपवर्जी प्रकार का होना चाहिए जिसमें कोई पश्च्तित न हों। यदि दिये गये आंकड़े सतत् वर्ग के रूप में न हो, तब यह आवश्यक है कि उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करने से पूर्व सतत् प्रकार के वर्ग अन्तराल में प्रवर्तित किया जाना चाहिए।
2. दिये गये वर्ग अन्तराल पूरी श्रृंखा में एक सामान होना चाहिए अर्थात, सभी वर्गों के वर्ग अन्तराल एक हीं होना चाहिए। यदि ये वर्ग असामान हों तब इस मान्यता को मानकर सभी वर्ग को सामान रूप से वितरित हो सके।

उदाहरण: निम्नलिखित वितरण के लिए बहुलक की गणना कीजिए:

वर्ग अन्तराल:	0-80	80-160	160-240	240-320	320-400	400-480
आवृति:	8	7	16	24	15	7

हल:

अधिकतम आवृति 24 के संगंत वर्ग अन्तराल 240–320 है। अतः बहुलक वर्ग 240–320 हैं। बहुलक गणना के लिए प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करें।

बहुलक, या Mo = $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

जहां, L= बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 240

f_1= बहुलक वर्ग की आवृति = 24

f_0= बहूलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृति = 16

f_2= बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृति = 15

i= बहुलक वर्ग की वर्ग अन्तराल का आकार = 80

बहुलक =

$$240 + \frac{24-16}{48-16-15} \times 80 = 240 + \frac{8}{17} \times 80 = 240 + 37.65 = 277.65$$

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों से बहुलक की गणन कीजिए:

X:	0-5	5-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f:	128	150	520	464	398	324	178	44

हलः चूंकि वर्ग अन्तराल असामान है, हमें आवश्यक रूप से वर्ग एवं आवृतियों को सामायोजित करके एवं सामान वर्ग अन्तराल बनाना चाहिए। अवलोकन के द्वारा, हम पाते हैं कि बहुलक 10–20 वाले वर्ग में आता है।

X	f
0-10	278 f_o
10-20	520f_1
20-30	464f_2
30-40	398
40-50	324
50-60	178
60-70	44

यहां,

L=10, f_0=278, f_2=464, i=10, f_1=520

अवलोकन के द्वारा: बहुलक 10–20 वाले वर्ग में होंगें।

बहुलक, या Mo = $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

$$Mo = 10 + \frac{520 - 278}{1040 - 278 - 464} \times 10$$

$$Mo = 10 + \frac{242}{298} \times 10$$

$$Mo = 10 + \frac{2420}{298}$$

$$Mo = 10 + \frac{2420}{298}$$

Mo = 10 + 8.12

Mo = 18.12

द्वि–बहुलक वितरण

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों से बहुलक मूल्य को ज्ञात करें।

वजन	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90

(किग्रा):								
व्यक्तियों की संख्या:	4	6	20	32	33	17	8	2

हलः

अवलोकन के द्वारा, यह पता नहीं चलता कि कौन सा वर्ग बहुलक वर्ग एवं बहुलक मूल्य है, अतः हमें समूही विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित सारणीयां बनायें।

समूह सारणी

<table>
<tr><th>वनज (किग्रा):</th><th>व्यक्तियों की संख्या:f</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th><th>cf</th></tr>
<tr><td>10-20</td><td>4</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">26</td><td rowspan="8">30
82</td><td rowspan="8">58
58</td><td rowspan="8">85
27</td><td>4</td></tr>
<tr><td>20-30</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>30-40</td><td>20</td><td rowspan="2">52</td><td rowspan="2">65</td><td>30</td></tr>
<tr><td>40-50</td><td>32</td><td>62</td></tr>
<tr><td>50-60</td><td>33</td><td rowspan="2">50</td><td rowspan="2">25</td><td>95</td></tr>
<tr><td>60-70</td><td>17</td><td>112</td></tr>
<tr><td>70-80</td><td>8</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2"></td><td>120</td></tr>
<tr><td>80-90</td><td>2</td><td>122</td></tr>
</table>

विश्लेषण सारणी

स्तंभ संख्या	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
I					x			
II			x	x				
III				x	x			
IV				x	x	x		
V		x	x	x	x	x	x	
VI			x	x	x			
कुल		1	3	5	5	2	1	

यह एक द्वि–बहुलक है। अतः बहूलक ज्ञात करने के लिए अप्रत्यक्ष आनुभावि सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

बहुलक = 3माध्यिका–2 माध्य,

माध्यिका = $\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{वां}}$ पद का आकार जो 40–50 वर्ग में आता है

= $\left(\frac{122}{2}\right)^{\text{वां}}$ पद का आकार = $61^{\text{वां}}$ पद का आकार

यहां, L = 40, $\frac{N}{2} = 61$, $cf = 30$, $f = 32$, $i = 10$

M = $L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i = 40 + \frac{\frac{122}{2} - 30}{32} \times 10$

$$M = 40 + \frac{61 - 30}{32} \times 10 = 40 + \frac{310}{32} = 40 + 9.688 = 49.688$$

माध्य की गणना के लए; माना कि कल्पित माध्य = 55; i.e. A=55

वजन x	f	मध्य–विन्दू m	d’= $\left[\frac{m-A}{C}\right]$	fd'
10-20	4	15	-4	-16
20-30	6	25	-3	-18
30-40	20	35	-2	-40
40-50	32	45	-1	-32
50-60	33	55	0	0
60-70	17	65	+1	17
70-80	8	75	+2	16
80-90	2	85	+3	6
	N=122			Σfd’=-67

अब,

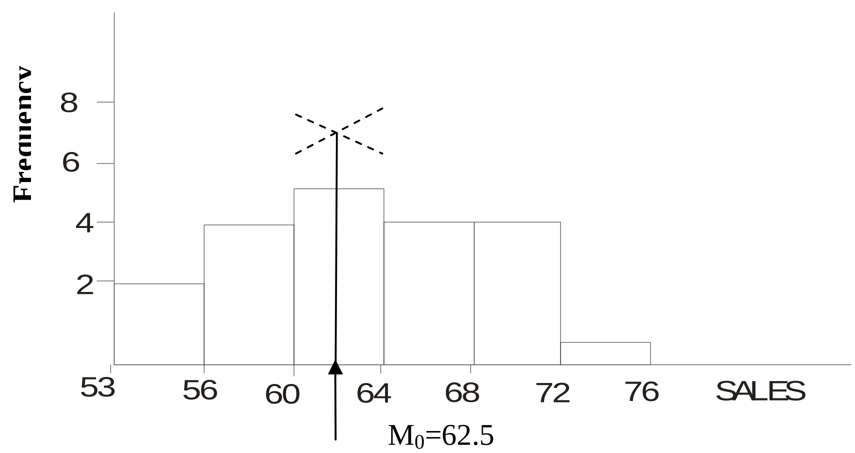
$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times C = 55 + \frac{-67}{122} X\ 10 = 55 - \frac{670}{122} = 55 - 5.492 = 49.508$$

अतः माध्य, $\overline{X} = 49.508$

चूंकि, बहुलक =3M-2 $\overline{X}$

3(49.688)-2(49.508)=149.064-99.016=50.048.

अतः अभीष्ट बहुलक वनज 50.048 किलो ग्राम है।



5.3.4 चित्रमय विधि से बहुलक मूल्य की गणना

चित्रमय विधि से बहुलक मूल्य की गणना करने की प्रक्रिया को संक्षेप में निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है:

1. संमंकों से आयात चित्र खींचे, सबसे लम्बी आयत हीं बहुलक वर्ग होगा।
2. सबसे उंची आयत चित्र के दाहिने कोने एवं बायें कोने से दो विकर्ण खीचें, बायें से खींचे गये विकर्ण को लम्बी आयत के सटे दाहिनी आयत के बायें कोने एवं लम्बी आयत से सटे बायें आयत के दाहिने कोने से मिला दें।

3. दोनो विकर्ण जिस विन्दू पर एक दूसरे को प्रतिछेदित करती है उस विन्दू से आधार रेखा X – अक्ष पर लम्ब डालते हैं। X – अक्ष के रेखा में चिहिन्त मूल्य हीं वांछित बहुलक मूल्य होगा।

उदाहरणः निम्नलिखित आंकड़ों के वितरण के लिए विन्दूरेखीय विधि से बहुलक की गणना करें।

बिकी (इकाई में):	**53-56**	**57-60**	**61-64**	**65-68**	**69-72**	**73-76**
दिनों की संख्या:	2	4	5	4	4	1

हलः नीचे दिये गये चित्र के अनुसार उपरोक्त आंकड़ों का प्रयोग करके आयत चित्र बनायें एवं अन्य रेखाएं भी बनायें जिससे बहुलक की गणना की जा सके। चित्र के अनुसार, बहुलक मूल्य 62.5 है जैसे की उपरोक्त में किया गया है।

5.3.5 बहुलक के गुण एवं सीमाएं

बहुलक के गुणः

1. बहुलक मूल्य को समझने एवं गणना करने में आसान होते हैं। बहुलक को अवलोकन के द्वारा भी चिन्हित किया जा सकता है।
2. बहुलक मूल्य वितरण के चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है। खुले–सिरे वाले आवृति वितरण में भी बहुलक मूल्य की गणना की जा सकती है।
3. बहुलक का प्रयोग मात्रात्मक के साथ–साथ गुणात्मक आंकड़ों के वर्णन करने के लिए प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, इसका मूल्य का प्रयोग उपभोक्ताओं के विभिन्न प्रकार के उत्पादों के रूचि की तूलना करने के लिए किया जाता है, जैसे सिगरेट, साबून, टूथपेस्ट, या अन्य उत्पाद।

बहुलक की सीमाएंः

1. बहुलक को एक कठोरतापूर्ण माप नहीं है जैसे इसके मूल्य को कई विधियों से प्राप्त किया जा सकता है।
2. इसे बहु–भूयिष्टक आवृति वितरण में बहुलक वर्ग का पता लगाना कठिन हो जाता है।
3. बीजगणितीय संक्रियाओं के लिए बहुलक एक उचित मापक नहीं है।
4. यदि किसी संमंकमाला में एक से अधिक बहुलक के स्थिति में, इसके मूल्य का निर्वचन एवं तूलना करने में कठिनाई होती है।

5.4 अन्य स्थानिक माप

माध्यिका वह मूल्य है जो श्रेणी को दो बराबर भागों में विभक्त करता है। हम उन स्थानिक मूल्यों को निकालना चाहते हैं जो श्रेणी को चार (चतुर्थक) या पांच (पंचमक्) या छः (षष्टमक्) या आठ (अष्टमक्) या दस (दशमक्) या सौ (शत्मक्) या n बराबर भागों में विभाजित करता हो। ऐसे माप को चतुर्थक, पंचमक्, षष्टमक्, अष्टमक, दशमक्, शतमक् आदि कहलाते हैं। ये

सभी मापक, माध्यिका के माप पर निर्भर करता है। चतुर्थक, दशमक् एवं शत्मक् के गणना के लिए सभी क्रियाएं वहीं हैं जो माध्यिका के गणना में प्रयोग की जाती है।

5.4.1 विभिन्न श्रृंखलाओं में चतुर्थक की गणना

चतुर्थक एक श्रृंखला को चार बराबर भागों में विभाजित करता है। किसी भी श्रृंखला के लिए, ती चतुर्थक हो सकते हैं। प्रथम एवं निम्न चतुर्थक (Q_1). Q_1, किसी वितरणर को इस प्रकार विभावित करता है कि पूरे वितरण का एक–चौथाई भाग (25%), पद इससे कम एवं तीन चौथाई भाग पद (75%), इससे अधिक होते हैं।

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी के लिए:

(Or M)

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां}}$ पद का आकार

खण्डित श्रेणी के स्थिति में, N के लिए, संचयी आवृति ज्ञात करते हैं फिर उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करके प्रथम चर्तुथक की गणना कर लेते हैं।

सतत् श्रेणी के लिए,

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां}}$ पद का आकार

यह वर्ग अन्तराल के आकार को स्पष्ट करता है, जहां Q_1 आता है, Q_1 मूल्य के प्रक्षेपण के लिए, हम सूत्र का प्रयोग करत हैं,

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i$$

जहां, $Q_1 \rightarrow$ निम्न चर्तुथक या प्रथम चर्तुथक

$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमे Q_1 आता है।

$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या

$cf \rightarrow$ चतुर्थक वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृति

$f \rightarrow Q_1$ वर्ग की आवृति

$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

द्वितीय चतुर्थक (Q_2) वर्ग की माध्यिका के रूप में: इसके बारे में पहले ही चर्चा की जा चूकी है।

तीसरा या उच्च चतुर्थक (Q_3)= Q_3 दिये गये आवृति को इस प्रकार विभाजित करता है कि कुल वितरण का तीन–चौथाई या 75% भाग इससे कम या नीचे होता है एवं कुल वितरण का केवल एक चौथाई या 25% भाग हीं इससे अधिक होता है।

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में, तृतीय चतुर्थक निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं,

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

खण्डित श्रेणी के स्थिति में, संचयी आवृति ज्ञात करते हैं फिर जिस वर्ग में संचयी आवृति आती है वहीं पद हीं तृतीय चतुर्थक होगा।

सतत् श्रेणी के लिए

सतत् श्रेणी में, माध्यिका एवं प्रथम चतुर्थक के हीं तरह, वास्तविक मूल्य का प्रक्षेपण वर्ग अन्तराल से करके निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

यह उस वर्ग को निश्चित करता है जिसमें Q_3 आता है।

Q_3 के वास्तविक मूल्य को निर्धारित करने के लिए इसके प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करेंगें।

$$\mathbf{Q_3} = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

जहां, $Q_3 \rightarrow$ निम्न चर्तुथक या प्रथम चर्तुथक

$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमे Q_3 आता है।

$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या

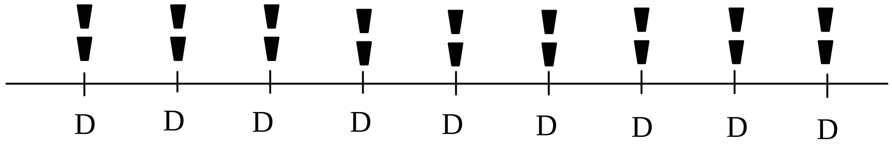
$cf \rightarrow$ चतुर्थक वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृति

$f \rightarrow$ Q_3 वर्ग की आवृति

$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

5.4.2 विभिन्न श्रृंखलाओं में दशमक् (D) की गणना

दशमक, पूरे श्रृंखला को 10 बराबर भागों में विभाजित करता है। किसी दिये गये श्रेणी में कूल 9 दशमक् हो सकते हैं, जैसे कि चतुर्थक में तीन चतुर्थक होते हैं। दशमक् का विस्तार D_1 से D_9 तक होता है।



व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में दषमक् की गणना

$$D_1 = \left(\frac{N+1}{10}\right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

जहां, D_1 = प्रथम दशमक्, N = पदों की संख्या
खण्डित श्रेणी में N अवलोकनों के दशमक् ज्ञात करने के लिए, संचयी आवृति की गणना करके उपरोक्त सूत्र से प्राप्त संगत पद को हीं प्रथम दशमक् रूप में चयन कर लेते हैं।

सतत् श्रेणी में दशमक् की गणना

सतत् श्रेणी में दशमक् को निर्धारित करने के लिए, केवल हम $\left(\frac{N}{10}\right)$ वां पद की गणना करते हैं।

इस प्रकार सतत् श्रेणी में, दशमक् के मूल्य को प्रक्षेपण से पूर्व, हमें संबंधित वर्ग समूह को निर्धारित करते हैं जिसमें वे आते हैं। दशमक् 1 से दशमक् 9 तक के निर्धारण के लिए निम्नलिखित कियाएं करते हैं।

1. $D_1 = \left(\frac{N}{10}\right)$ वां पद का आकार
2. $D_4 = 4\left(\frac{N}{10}\right)$ वां पद का आकार
3. $D_7 = 7\left(\frac{N}{10}\right)$ वां पद का आकार
4. $D_9 = 9\left(\frac{N}{10}\right)$ वां पद का आकार

ये सभी वर्ग समूह को निर्धाति करते हैं जिसमे यह आता हैं, इसके बाद वास्तविक दशमक् मूल्य को प्रक्षेपित करते हैं उदाहरण के लिए, यदि हम D_7 को ज्ञात करना चाहते हैं तब,

$$\mathbf{D_7} = L + \frac{\frac{7N}{10} - cf}{f} \times i$$

जहां, $D_7 \rightarrow$ निम्न चर्तुथक या प्रथम चर्तुथक
$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमे D_7 आता है।
$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या
$cf \rightarrow$ दशमक् वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृति
$f \rightarrow D_7$ वर्ग की आवृति
$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

इसी प्रकार, $$\mathbf{D_9} = L + \frac{\frac{9N}{10} - cf}{f} \times i$$

5.4.3 विभिन्न श्रृंखलाओं में शतमक् (P) की गणना

शतमक् वह राशि होती है जो पूरे श्रृंखला को 100 बराबर भागों में विभाजित करते हैं। किसी भी संमंकमाला या श्रेणी के

लिए 99 शतमक् हो सकते हैं जिसे P से निरूपित करते हैं। इसका विस्तार P_1 से P_{99} तक होते हैं। विभिन्न स्थानिक मापों के बीच संबंधों को नीचे उल्लेख किया गया है।

P_{25}	P_{50}	P_{75}
(Q_1)	(Q_2)	(Q_3)
$(D_{2.5})$	(M)	$(D_{7.5})$
	(D_5)	

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में शतमकः

विभिन्न शतमक् के लिए:

$P_1 = \left(\frac{N+1}{100}\right)$ वां पद का आकार,

$P_{50} = 50\left(\frac{N+1}{100}\right)$ वां पद का आकार,

$P_{80} = 80\left(\frac{N+1}{100}\right)$ वां पद का आकार

$P_{99} = 99\left(\frac{N+1}{100}\right)$ वां पद का आकार

खण्डित श्रेणी में शतमक् को निर्धारित करने के लिए संचयी आवृति को ज्ञात करते हैं फिर उपरोक्त सूत्र का प्रयोग कर पद का आकार को संचयी आवृति में देख लेते हैं।

सतत् श्रेणी मे शतमक् की गणना

सतत् श्रेणी में, शतमक् को व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी की तरह निर्धारित नहीं किया जा सकता हैं। सतत् श्रेणी में, हमें शतमक् के वास्तविक मूल्य को प्रक्षेपित निम्नलिखित सूत्र के मदद से करते हैं:

$$P_1 = \left(\frac{N}{100}\right) \text{ वां पद का आकार}$$

शतमक् 20 का निर्धारण जिस वर्ग में आता है:

$$P_{20} = \left(\frac{N}{100}\right) \text{ वां पद का आकार}$$

यह उस समूह को निर्धारित करता है जिस वर्ग या समूह में वांछित शतमक् आता है।

$$P_{20} = L + \frac{20\left(\frac{N}{100}\right) - cf}{f} \times i$$

हम चतुर्थक, दशमक एव शतमक् कैसे ज्ञात करते हैं इसे उदाहरण के मदद से समझ सकते हैं।

उदाहरणः नीचे दिये गये संमंकों के लिए Q_1, Q_3 D_5, P_{25} ज्ञात कीजिए।

सांख्यिकी विषय में प्राप्तांकः 15 21 26 30 40 45 50 54 60 65 70

हलः

प्राप्तांक

15 $\quad Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{वां}$ पद का आकार

21 $\quad = \left(\frac{11+1}{4}\right)^{वां}$ पद का आकार

26 $\quad = \left(\frac{12}{4}\right)^{वां}$ पद का आकार या $3^{रा}$ पद मूल्य =26

$Q_1 = 26$

30

40 $\quad$ इस प्रकार, $Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{वां}$ पद का आकार

45 $\quad = 9^{वां}$ पद का आकार = 60

50 $\quad$ अतः, तृतीय चतुर्थक का मूल्य $Q_3=60$ है।

54

60

65

<u>70</u>

N=11

$$D_5 = 5\left(\frac{N+1}{10}\right)^{वां} \text{ पद का आकार}$$

$$= 5\left(\frac{11+1}{10}\right)^{वां} \text{ पद का आकार} = 6^{वें} \text{ पद का आकार} = 45$$

अतः पांचवे दशमक् का मूल्य 45 अंक है।

$$P_{25} = 25\left(\frac{11+1}{100}\right)^{वां} \text{ पद का आकार}$$

$$= 25\left(\frac{11+1}{100}\right)^{वां} \text{ पद का आकार}$$

= 3रा पद मूल्य का आकार =26

P_{25}=26

अतः पच्चीसवें शतमक् का मूल्य 26 है।

खण्डित श्रेणी में चतुर्थक, दशमक् एवं शतमक् की गणनाः

उदाहरणः नीचे दिये गये संमंकों से Q_1, Q_3, D_3, एवं P_{70} की गणना करें।

X :	10	20	30	40	50	60	70
Y :	2	3	5	10	5	3	2

हल:

x	**f**	**cf**
10	2	2
20	3	5
30	5	10
40	10	20
50	5	25
60	3	28
70	2	30

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ वां पद का आकार

$= \left(\frac{30+1}{4}\right)$ वां पद का आकार

= 7.75 पद

इस प्रकार, जब संचयी आवृति वाले स्तंभ में देखेंगें जिस संचयी आवृति में 7.75 पद आता है अर्थात् 10 और इसके संगत पद 30 हीं प्रथम चतुर्थक होगा।

अतः, Q_1 = 30

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ वां पद का आकार

$= 3\left(\frac{30+1}{4}\right)$ वां पद का आकार = $\left(\frac{93}{4}\right)$ वां पद का आकार

= 23.25 वां पद का आकार अर्थात् 50

Q_3 =50

$D_3 = 3\left(\frac{N+1}{10}\right)$ वां पद का आकार

$= 3\left(\frac{30+1}{10}\right)$ वां पद का आकार

= 9.3 वां पद का आकार = 30

इस प्रकार, D_3 = 30

P_{70} = $70\left(\frac{N+1}{100}\right)$ वां पद का आकार

= 21.3 वां पद का आकार = 50

सतत् श्रेणी में चतुर्थक, दशमक एवं शतमक की गणना

उदाहरण: निम्नलिखित संमंकों से निम्न एवं उच्च चतुर्थक, तृतीय **दषमक** एवं 20वां **शतमक** पद ज्ञात कीजिए।

मध्य बिन्दु	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5
आवृति	7	18	25	30	20

हल: चूंकि हमें श्रेणी के मध्य विन्दू दिये गये हैं अतः हमें सर्व प्रथम विभिन्न वर्गों के निम्न सीमा एवं उच्च सीमा ज्ञात करेंगें। इन सीमाओं को ज्ञात करने के लिए दो मध्य बिन्दु के अन्तर को 2 से भाग देने के बाद भागफल से मध्य विन्दू को घटाने पर निम्न सीमा तथा जोड़ने पर उसी वर्ग की उच्च सीमा प्राप्त होगी। $\frac{7.5-2.5}{2}=\frac{5}{2}=2.5$ । इस प्रकार, प्रथम वर्ग 0–5, द्वितीय वर्ग 5–10 आदि होगें।

Q_1, Q_2, D_3, P_{20} की गणना

वर्ग समूह	f	c.f
0-5	7	7
5-10	18	25
10-15	25	50
15-20	30	80
20-25	20	100
	N=100	

निम्न चतुर्थक, Q_1 = $\frac{N}{4}$ वां पद का आकार = $\frac{100}{4}$ = 25 वां पद का आकार

Q_1 प्रथम चतुर्थक, 5-10 के अन्तर्गत आता है।

$$Q_1 = L+\frac{\frac{N}{4}-cf}{f}\times i$$

यहां, हमें दिया गया हैं, L = 5, N/4 =25, c.f. = 7, f = 18, I = 5

$$Q_1 = 5+\frac{25-7}{18}\times 5$$

Q_1 = 5 + 5 = 10

उच्च चतुर्थक, Q_3, $\frac{3N}{4}$ पद का आकार = $\frac{3\times100}{4}$ = 75 वां पद का आकार

Q_3 पद 15-20 वाले वर्ग में आता है।

$$Q_3 = L+\frac{\frac{3N}{4}-cf}{f}\times i$$

यहां, हमें दिया गया हैं, L = 15, N/4 =75, c.f. = 50, f = 30, i = 5

$$Q_3 = 15+\left(\frac{75-50}{30}\right)\times5=15+4.17=19.17$$

तृतीय दशमक् D_3= $\frac{3N}{10}^{th}$ वां पद का आकार = $\frac{3\times100}{10}$ = 30वां पद

D_3 के लिए 30वां पद 10-15 वाले वर्ग में आते हैं।

$$D_3 = L+\frac{\frac{3N}{10}-cf}{f}\times i$$

जहां, L = 10, 3N/10 = 30, cf =25, f = 25, I =5

$$D_3 = 10+\frac{30-25}{25}\times5$$

D_3 = 10 + 1 = 11

अतः तृतीय दशमक का मूल्य 11 है।

बीसवीं शतमकः–

$$P_{20} = 20\left(\frac{N}{100}\right)$$ वां पद का आकार

$$P_{20} = 20\left(\frac{100}{100}\right)$$ वां पद का आकार = 20वां पद

$$P_{20} = L+\frac{\frac{20N}{100}-cf}{f}\times i$$

जहां, L = 5, 20N/100 = 20, cf =7, f = 18, i =5

$$P_{20} = 5+\frac{20-7}{18}\times5$$

$$P_{20} = 5+3.61 = 8.61$$

अतः अभीष्ठ बीसवीं शतमक का मूल्य 8.61 है।

5.5 सारांश

(a) **बहुलकः** बहुलक किसी अवलोकन के श्रेणी का वह मूल्य होता है जिसकी आवृति अधिकतम होता है। दूसरे शब्दों में, बहुलक चर का वह मूल्य होता है जो श्रेणी में अधिकतम बार मौजूद होता है।

(b) **चतुर्थक:** चतुर्थक वह मूल्य होता है जो श्रेणी या कुल आवृति को चार बराबर भागों में विभक्त करता है।

(c) **दशमक:** दशमक वह मूल्य होता है जो पूरे श्रेणी या कुल आवति को 10 बराबर भागों में विभाजित करता है।

(d) **शतमक: शतमक** वह मूल्य है जो पूरे श्रेणी या कुल आवृति को 100 बराबर भागों में बांटता हैं।

5.7 शब्दावली

- **द्वि–बहुलक वितरण:** वितरण जिसमें दो बहुलक मूल्य हो।
- दशमक: आवृति को 10 बराबर समूहों में विभाजित करता है।

5.8 बोध प्रश्न

1.

(i) बहुलक वह मूल्य होता है जो प्रायः श्रेणी के वितरण के मध्य मे स्थित होता है।

(ii) बहुलक, जूते के आकार को मापने का एक बेहतर औसत है।

(iii) सतत् श्रेणी में बहुलक को गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते है।

बहुलक, या $Mo = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

2. नीचे के सारणी से Q_1, D_7, P_{52} की गणना करें।

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
f	5	12	18	10	5

3. निम्नलिखित वितरण से बहुलक की गणना करें।

प्राप्तांक	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
छात्रों की संख्या	12	18	22	27	17	23	19	8

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (i) गलत, (ii) सत्य, (iii) सत्य
2. $Q_1 = 162.5$, $D_7 = 300$, $P_{52} = 250$

3- बहुलक = 46.6

5.10 स्वपरख प्रश्न

1. बहुलक के गुण एवं सीमाओं का उल्लेख करें।
2. बहुलक क्या हैं? चित्रमय तरीके से इसे कैसे चिन्हित् किया जाता है।

5.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.

2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. Digambar Patri, "Business Statistics", KaIyani Publishers, Ludhiyana, India.
5. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
6. R. P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India ltd., Delhi, India.

*****

इकाई 6 अपकिरण एवं उनके माप

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- दिये गये आवृति वितरण के समुच्च का चतुर्थक विचलन ज्ञात कर सकें।
- दिये गये संमक के माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन के बीच अन्तर बता सकें।
- विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकें।

6.1 प्रस्तावना

एक आवृति वितरण, यद्यपि मूल्य औसत के इर्द–गिर्द होना चाहिए जिसमें से अधिकतर में से भिन्न या अलग होते हैं। कुछ वितरण में, कछ में यह अन्तर कम तो कुछ में अन्तर बहुत अधिक होते हैं। औसत से किसी मूल्य के विचलन के विशेषता को हीं विचलन या अपकिरण कहा जाता है।
आपको अलग–2 आवृति वितरण भिन्न–भिन्न अन्तर प्रस्तुत करते हैं। कुछ क्षण के लिए, छात्रों के आयू में विचलन, किसी उद्योग के कर्मचारी के आयू में विचलन छात्रों के आयू के विचलन के तुलना में अधिक होगें है। पहली स्थिति में, मूल्य या छात्रों की आयू 16 से 20 वर्ष के बीच हो सकत हैं। दूसरी स्थिति में, विचलन का विस्तार 20 से 60 वर्ष तक हो सकता है।

इस प्रकार, आपको विभिन्न आवृति वितरण के विचलन की कोटि भी अलग होगी। विचलन की कोटि को विचलन के माप द्वारा निरूपित किया जाता है।

एक वितरण जिसका विचलन कम हो, वह कमजोर माप होगी एवं वह वितरण जिसमें अधिक विचलन हो, वह अधिक सशक्त माप कहलाती है।
इसक इकाई में आप विचलन, विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन के बारे में अध्ययन करेंगें।

6.2 विचलन

विचलन (अपकिरण) किसी मूल्य से औसत के विचलन की विशेषता है। विचलन की कोटि को विचलन के माप से निरूपित किया जाता है। विचलन की माप को मापने के विभिन्न माप निम्नलिखित हैं जिनका प्रायः प्रयोग किया जाता है–

1. विस्तार (Range)
2. चतुर्थक विचलन (अर्द्ध–अर्न्तर चतुर्थक विस्तार, Q.D.)
3. माध्य विचलन (M.D.)
4. प्रमाप विचलन (S.D.)

उपरोक्त चार विचलनों में से, प्रमाप विचलन सबसे ज्यादा प्रयोग किया जाने वाला माप प्रमाप विचलन है।
उपरोक्त विचलन के सभी मापों को विचलन के निरपेक्ष माप के नाम से जानते है। निरपेक्ष माप आपवृति वितरण में विचलन की कोटि को परिलक्षित करता है। जबकि, दो या दो से अधिक आवृति वितरण में विचलन को तुलना करनी हो तो विचलन के सापेक्षिक माप को परिभाषित किया जाता है। सापेक्षिक माप जो उपरोक्त सभी विचलन के निरपेक्ष मापों से संबंधित है, वे निम्नलिखित है–

1. विस्तार का गुणांक
2. चतुर्थक विचलन का गुणांक
3. माध्य विचलन का गुणांक
4. विचलन का गुणांक

सापेक्ष माप, मापक इकाई से स्वतंत्र होते हैं। और इसलिए, तुलना के लिए ज्यादा उपयोगी होता है।

6.2.1 एक अच्छे विचलन के माप की वांछित विशेषताएं

(विचलन के अच्छे माप के वांछित बातें)

1. यह समझने में आसान होना चाहिए। इसे गणना करने की पद्धति एकदम सरल होना चाहिए।
2. यह कठोरता पूर्वक परिभाषित किया जाना चाहिए।
3. इसे सभी मूल्यों व पदों पर आधारित होना चाहिए।
4. यह आसामान्य चरण मूल्यों से अधिक स्तर तक प्रभावित नहीं होना चाहिए।
5. इसे आगे, बीजगणितीय संक्रियाओं लायक होना चाहिए।
6. इसे स्थाई होना चाहिए।

6.3 विस्तार (Range)

विस्तार श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य के अवलोकनों के बीच अन्तर होता है।

यदि H श्रेणी के अधिकतम मूल्य वाली अवलोकन हो तथा L श्रेणी का न्यूनतम मूल्य वाली अवलोकन हो तब विचलन का विस्तार, $R = H - L$
विचलन के सापेक्ष माप जिसका प्रयोग आवृति वितरणों के बीच तुलना करने के लिए करते हैं, विस्तार का गुणांक कहते हैं। यह R का गुणांक हैं।

अर्थात, विस्तार का गुणांक, $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{H - L}}{\mathbf{H + L}}$

विस्तार को समझना सरल है। इसे गणना करना आसान है। जब आंकड़ों के गहन अध्ययन या विश्लेषण की आवश्यकता न हो तब विस्तार का प्रयोग किया जा सकता है। वस्तु उद्योग जहां सांख्यिकीय गुणवता नियंत्रण की आवश्यकता होती है, विस्तार का प्रयोग किया जाता है।
चूंकि, विस्तार चरम मूल्यों पर आधारित होते हैं, इसलिए इनमें उच्चावचन ज्यादा होता है। यह असामान्य चरम मूल्यों से बहुत ज्यादा प्रभावित होता है, फलतः इसे अध्ययन व शोध कार्य में लागू नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 1

10 पूर्व विश्वविद्यालय छात्रों के आयू से संबंधित संमंक से विस्तार एवं विस्तार के गुणांक ज्ञात करें।

आयू (वर्ष में): 16, 18, 18, 16, 18, 20, 17, 19, 16, 24

हलः श्रेणी के उच्चतम मूल्य एवं न्यूनतम मूल्य हैं, H = 24 वर्ष एवं L = 16 वर्ष।

अतः विस्तार, R = H – L = 24 – 16 = 8 वर्ष।

विस्तार का गुणांक –

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{H - L}}{\mathbf{H + L}} = \frac{24 - 16}{24 + 16} = \mathbf{0.2}$$

6.4 चतुर्थक विचलन (अर्द्ध–अन्तर चतुर्थक विस्तार)

विस्तार या परास की सबसे बड़ी कमजोरी है कि यह चरम मूल्यों पर आधारित है, फलतः असामान्य मूल्यों से काफी हद तक प्रभावित होती है। इन त्रुटियों को चतुर्थक विचलन में विशुद्ध किया जाता है। यह केवल न्यूनतम एवं उच्चतर चतुर्थक पर आधारित होते हैं, इस प्रकार चतुर्थक विचलन निम्न रूप से है–

$$\mathbf{Q.D.} = \frac{\mathbf{Q_3 - Q_1}}{\mathbf{2}}$$

जहां, Q. D. = चतुर्थक विचलन

Q_3 = तृतीय या उच्चतम चतुर्थक

Q_1 = प्रथम् या न्यूनतम चतुर्थक

चतुर्थक पर आधारित विचलन के सापेक्ष माप को चतुर्थक विचलन का गुणांक कहते हैं। ये निम्नलिखित है–

चतुर्थक विचलन गुणांक, (Coefficient of $\mathbf{Q.D.}) = \dfrac{\mathbf{Q_3 - Q_1}}{\mathbf{Q_3 + Q_1}}$

चतुर्थक विचलन की गणना आसानी से की जा सकता है। यह श्रेणी के अवलोकनों के आसामान्य चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित नहीं होते हैं।

लेकिन, चतुर्थक विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होते हैं। साथ हीं, गणितीय संक्रियाओं के लिए सुविधाजनक नहीं होता है।

उदाहरण 2

निम्नलिखि संमंकों के लिए, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन के गुणांक की गणना कीजिए।

प्रत्येक टोकरी में फलों की संख्याः 36, 43, 30, 37, 38, 35, 29, 38, 35, 32, 35, 36

हलः चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए, हमें सर्वप्रथम निम्न चतुर्थक एवं उच्चतम चतुर्थक ज्ञात करना होगा।

स्तंभः 29, 30, 32, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 38, 38, 43

न्यूनतम चतुर्थक है,

$$Q_1 = \left[\frac{(n+1)}{4}\right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$Q_1 = (3.25)^{\text{वां}}$ पद मूल्य

$Q_1 = 32 + 0.25\ (35\text{-}32) = 32.75$

उच्चतम चतुर्थक है,

$$Q_3 = \left[\frac{3(n+1)}{4}\right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$Q_3 = (9.75)^{\text{वां}}$ पद मूल्य

$Q_3 = 32 + 0.75\ (38\text{-}37) = 37.75$

इस प्रकार चतुर्थक विश्लेषण,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{37.75 - 32.75}{2}$$

= 2.5 फल/प्रति टोकरी।

चतुर्थक विचलन के गुणांक,

$$Coefft.\ Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{37.75 - 32.75}{37.75 + 32.75} = \mathbf{0.0709}$$

उदाहरण 3

किसी आदर सत्कार प्रबधंन के कक्षा का विभिन्न दिनों में छात्रों की उपस्थिति के वितरण को निम्नलिखित सारणी द्वारा दिया गया है।

छात्रों की उपस्थिति	75	76	77	78	79	80
दिनों की संख्या	13	24	27	21	11	2

हलः

प्रथम चतुर्थक,

$$Q_1 = \left[\frac{(n+1)}{4}\right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$Q_1 = (24.75)^{\text{वां}}$ पद मूल्य = 76

छात्रों की उपस्थिति	दिन	संचयी
75	13	13
76	24	37
77	27	64
78	21	85
79	11	96
80	2	98
कुल	98	

तीसरा चतुर्थक,

$$Q_3 = \left[\frac{3(n+1)}{4}\right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$Q_3 = (74.25)^{\text{वां}}$ पद मूल्य = 78

इस प्रकार चतुर्थक विश्लेषण,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{78-76}{2} = 1$$

चतुर्थक विचलन के गुणांक,

$$Coefft.\, Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{78-76}{78+76} = \mathbf{0.0}1299$$

उदाहरण 4

निम्नलिखित वितरण छात्रों के प्राप्तांक को प्रदर्शित करता है, इनका प्रयोग कर चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक गुणांक ज्ञात करें।

प्राप्तांक	0—19	20—39	40—49	50—59	60—69	70—79	80—89
छात्रों की संख्या							

हलः

सामावेशी प्रकार के वर्ग अन्तराल को अपवर्जी प्रकार के वर्ग अन्तराल में परिवर्तित करते हैं।

	परिवर्तित वर्ग—अन्तराल	आवृति	से कम संचयी आवृति c.f.
	(-0.5) – 19.5	15	15
Q_1 --- वर्ग	$\boxed{19.5 – 39.5}$	31	46
	39.5 – 49.5	19	65
Q_3 ---- वर्ग	$\boxed{49.5 – 59.5}$	15	80
	59.5 – 69.5	8	88
	69.5 – 79.5	7	95
	79.5 – 89.5	7	102
	Total	102	–

यहां, $\frac{N}{4}=\frac{102}{4}=(25.5)$ वां मूल्य का वर्ग अन्तराल, 19.5 – 39.5 है।
अतः, Q_1 --- के लिए वर्ग अन्तराल 19.5 – 39.5 है।
और इसलिए, $l = 19.5$, m = 15, c = 20 और f = 31.
प्रथम चतुर्थक,

$$Q_1 = l + \left[\frac{\left(\frac{N}{4} - m\right) \times c}{f}\right] = 19.5 + \left[\frac{(25.5 - 15) \times 20}{31}\right] = \mathbf{26.274}$$

तीसरे चतुर्थक के लिए,

$$\frac{3N}{4} = 3 \times \frac{102}{4} = 76.5$$

Q_3 ---- के लिए वर्ग अन्तराल 49.5-59.5 है।

$l = 49.5$, m = 65, c = 10 एवं f = 15

$$Q_3 = l + \left[\frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right) \times c}{f}\right] = 49.5 + \left[\frac{(76.5 - 55) \times 10}{15}\right] = \mathbf{57.167}$$

चतुर्थक विचलन,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{57.167 - 26.274}{2} = 15.4465$$

चतुर्थक विचलन के गुणांक,

$$Coefft.\ of\ Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{57.167 - 26.274}{57.167 + 26.274} = \mathbf{0.3702}$$

उदाहरण 5

निम्नलिखित वितरण 100 विद्यार्थीयों के बुद्धिमता क्षमता दी गई। चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करें।

बुद्धिमता क्षमता (I.Q.)	से कम 80	से कम 90	से कम 95	से कम 100	से कम 105	से कम 110	से कम 130
छात्रों की संख्या	2	16	33	55	77	95	100

हलः

यहां, से कम संचयी आवृति दी गई है अतः हमें सर्वप्रथम सामान्य आवृति वितरण ज्ञात करना है।

Class interval	Frequency	Cumulative Frequency
Less than 80	2	2
80 – 90	14	16

	$\boxed{90-95}$	17	33
	95 – 100	22	55
Q_3 –class →	$\boxed{100-105}$	22	77
	105 – 110	18	95
	110 – 130	5	100
	Total	100	–

यहां, N = 100। चूंकि $\frac{N}{4}=25$ वां पद मूल्य का वर्ग अन्तराल 90 – 95, अर्थात् Q_1 --- वर्ग है।

अतः, $l=90$, c = 5, f = 17 एवं m = 16,

इस प्रकार प्रथम चतुर्थक,

$$Q_1 = l+\left[\frac{\left(\frac{N}{4}-m\right)\times c}{f}\right] = 90+\left[\frac{(25-16)\times 5}{17}\right] = 92.65$$

चूंकि, $\frac{3N}{4}=75$ वां पद मूल्य का वर्ग अन्तराल 100–105, अर्थात् Q_3 --- वर्ग है।

अतः $l=100$, c = 5, f = 22 एवं m = 55,

इस प्रकार प्रथम चतुर्थक का मान,

$$Q_3 = l+\left[\frac{\left(\frac{3N}{4}-m\right)\times c}{f}\right] = 100+\left[\frac{(75-55)\times 5}{22}\right] = 104.55$$

चतुर्थक विचलन का मान,

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{104.55-92.65}{2}=5.95$$

चतुर्थक विचलन के गुणांक का मान,

$$Coefft.of\ Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}=\frac{104.55-92.65}{104.55+92.65}=0.0603$$

6.5 माध्य विचलन

माध्य विचलन से तात्पर्य है कि केन्द्रीय माध्य से दिये गये श्रेणी के अवलोकनों से विचलन जिसे केन्द्रीय माध्य विचलन से माध्य विचलन की निरपेक्ष माप कहा जाता है। इस प्रकार, अवलोकन $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ के सामानान्तर माध्य से विचलन निम्नलिखित है,

$$M.D.(\bar{x})=\frac{\sum|x-\bar{x}|}{n}$$

सारणी आंकड़ों की स्थिति में, (खण्डित के साथ–साथ सतत् श्रेणी में भी), सामानान्तर माध्य से माध्य विचलन निम्न प्रकार से है,

$$M.D.(\bar{x})=\frac{\sum f\left|x-\bar{x}\right|}{N}$$

किसी श्रेणी के माध्यिका 'M' से माध्य विचलन को निम्न रूप से इंगित किया जा सकता है,

$$M.D.(M)=\frac{\sum\left|x-M\right|}{n}$$

सारणिक आंकड़ों की स्थिति में, माध्यिका से माध्य के विचलन निम्न रूप से हो सकता है, $M.D.(M)=\dfrac{\sum f\left|x-M\right|}{N}$

यहां, $\left|x_1-\bar{x}\right|,\left|x_2-\bar{x}\right|,\left|x_3-\bar{x}\right|...........\left|x_n-\bar{x}\right|$ आदि में गणितीय या ऋणात्मक चिन्हों को नकार दिया गया है। माध्य से लिए गये, विचलनों के चिन्हों को अनदेखा कर दिया जाता है क्योंकि चिन्हों को सम्मिलित करने पर इसके बीज गणितीय योग शून्य के बराबर होता।

माध्य विचलन को किसी भी केन्द्रीय प्रवृति के माप जैसे माध्य, माध्यिका, बहुलक आदि से विचलन निकालकर माध्य की गणना किया जा सकता है। लेकिन, माध्य विचलन न्यूनतम् होता है यदि इसे माध्यिका (माध्यिका के न्यूनतम संबंधी गुण) से मापी गयी हो। इसी कारण से, सामान्यतया माध्य विचलन, माध्यिका से को ज्यादा प्रयोग में लाया जाता है।

माध्य विचलन से संबंधित, माध्य विचलन के गुणांक को भी परिभाषित किया जा सकता है। माध्य एवं माध्यिका से लिये गये माध्य विचलन के गुणांक क्रमशः,

$$Coefft\ .\ of\ \ M.D.(\bar{x})=\frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}}$$

$$Coefft\ .\ of\ \ M.D.(M)=\frac{M.D.(M)}{M}$$

उदाहरण 6

माध्य से माध्य विचलन एवं माध्य से माध्य विचलन गुणांक की गणना करें।

प्लांट की उंचाई (सेन्टीमीटर में): 140, 147, 143, 146, 144।

हलः

$$\text{माध्य, } \bar{x}=\frac{\sum x}{n}$$

x	$\left\|x-\bar{x}\right\|$
140	4
147	3
143	1
146	2
144	0
720	10

$$\text{माध्य} = \frac{720}{5} = \mathbf{144\ cms.}$$

माध्य से माध्य विचलन

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum|x-\bar{x}|}{n} = \frac{10}{5} = 2\ cms.$$

$$Coefft.\ of\ M.D.(\bar{x}) = \frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}} = \frac{2}{144} = 0.0139$$

उदाहरण 7: माध्यिका से माध्य विचलन की गणना कीजिये।

बेचे गये टी. वी. सेट की संख्याः 18, 16, 16, 19, 12, 14, 20

हलः

Array (x)	$\lvert x-M \rvert$
12	4
14	2
16	0
16	0
18	2
19	3
20	4
कुल	15

$$M = \left[\frac{(n+1)}{2}\right]^{\text{वां}} \text{ पद स्तंभ में}$$

माध्यिका से माध्य विचलन

$$M.D.(M) = \frac{\sum|x-M|}{n}$$

उदाहरणः

माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करें।

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
छात्रों की संख्या	2	10	20	15	10	3

हलः

वर्ग अन्तराल	आवृति (f)	संचयी आवृति c.f.	मध्य बिन्दु x	$\lvert x-M \rvert$	$f\lvert x-M \rvert$
0 – 10	2	2	5	24	48
10 – 20	10	12	15	14	140
20 – 30	20	32	25	4	80
30 – 40	15	47	35	6	90
40 – 50	10	57	45	16	160

50 – 60	3	60	55	26	78
कुल	**60**				**596**

यहां, $\frac{N}{2}=30.$

अतः वर्ग 20–30 माध्यिका वर्ग का वर्ग अन्तराल है।

और इसलिए, $l = 20$, c = 10, m = 12 and f = 20

इसलिए माध्यिका,

$$M = l+\left[\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)\times c}{f}\right] = 20+\left[\frac{(30-12)\times 10}{20}\right] = 29$$

माध्यिका से माध्य विचलन

$$M.D.(M)=\frac{\sum f|x-M|}{N}=\frac{596}{60}=9.93$$

मध्यिका से माध्य विचलन गुणांक का मूल्य,

$$Coefft.\,of\,M.D.(M)=\frac{M.D.(M)}{M}=\frac{9.93}{29}=0.3424$$

अतः माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक का वांछित मूल्य 0.3424 है।

6.6 प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

परासर या विस्तार केवल श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम पद मूल्य पर आधारित होती है। चतुर्थक विचलन केवल चतुर्थक पर आधारित होता है। लेकिन, लेकिन ये माप श्रेणी के सभी मापों पर आधारित नहीं होते हैं। यद्यपि, माध्य विचलन श्रेणी के सभी अवलोकनों पर आधारित होते हैं, किन्तु यह गणितीय विवेचना के लिए सुविधाजनक नहीं होता है। और इसीलिए, हम प्रमाप विचलन की गणना करते हैं जो सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।

किसी के श्रेणी अवलोकनों के वे धनात्मक वर्ग मूल जिसे सामानान्तर माध्य से विभिन्न पदों से लिए गये विचलनों के वर्ग से प्राप्त किया जाता हैं, प्रमाप विचलन कहलाते हैं। इसे सिग्मा 'σ' से इंगित कया जाता हे।

इस प्रकार, यदि $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ किसी श्रेणी के पद मूल्य हों तब, प्रमाप विचलन निम्न रूप से निरूपित किये जा सकते हैं,

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

किसी सारणीकृत संमंक (खण्डित के साथ–साथ सतत् श्रेणी) में हों तब श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन है,

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}}$$

प्रमाप विचलन के वर्ग को हीं प्रसरण कहते हैं।

इस प्रकार, यदि $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ किसी श्रृंखला के चर मूल्य हों तब, प्रसरण को निम्न रूप से इंगित किया जा सकता है,

$$Var(x) = \sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

यह श्रेणी के सामानान्तर माध्य का विभिन्न पदों से लिए गये विचलनों के वर्ग का माध्य है।

प्रमाप विचलन की गण्ना करने के लिए निम्नलिखित गणितीय सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$ कच्चे व व्यक्तिगत श्रेणी के लिए,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$ सारणीकृत संमंक या खण्डित एवं सतत् श्रेणी के लिए

यदि किसी श्रेणी के चर के मूल को a एवं पैमाने c से परिवर्तित किया जाय, अर्थात्, यदि $u = \frac{x-a}{c}$ तब इसे निम्न रूप से दिखाया जा सकता है,

$$S.D.(x) = c \times S.D.(u)$$

एवं यह भी, $Var(x) = c^2 \times Var(u)$

प्रमाप विचलन के लिए, यह ध्यान चाहिए कि प्रसरण केन्द्रीय माध्य का विभिन्न पदों से लिए गये विचलनों के वर्ग का माध्य है।प्रसरण को सारणीयन वर्ग इकाई में किया जाता है। प्रमाप विचलन, इसी प्रसरण का वर्ग मूल होते हैं, अतः यह माध्य के इर्द–गिर्द अवलोकनों के फैलाव को, संमंक के हीं इकाई में मापा जाता है।

प्रमाप विचलन को और अधिक स्पष्ट तरीके से व्यक्त किया जाता है कि प्रमाप विचलन वह मूल्य होता है जिसे माध्य का चरों से लिए गये विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्ग मूल (RMS-Root Mean Square) होता है। उदाहरण के लिए, एक समग्र में 4, 8 पद हैं जिसका माध्य 6 है एवं माध्य से लिए गये विचलन –2, 2 हैं। इन विचलनों के वर्ग 4, 4 हैं एवं इन विचलनों के वर्ग का औसत या माध्य अर्थात् इनके (प्रसरण), 4 है। अतः प्रमाप विचलन का मूल्य 2 हैं। इस स्थिति में, समग्र के 100 प्रतिशत चर या अवलोकन के मूल्य एक प्रमाप विचलन के माध्य को इंगित करते हैं।

प्रमाप विचलन सांख्यिकीय अपकिरण का सबसे सामान्य माप है, जो यह मापने का प्रयास करता है कि किसी समंकों के समग्र में चर मूल्य किस प्रकार वितरित व अवस्थित व फैले हुए है। यदि संमंक विन्दू या चर मूल्य विल्कुल माध्य के आस–पास हों तब प्रमाप विचलन न्यूनतम होगें। साथ हीं, यदि अधिक चर मूल्य माध्य से काफी दूर अवस्थित हो या फैले हों तब प्रमाप विचलन का मूल्य अधिकतम होगें। यदि सभी चर मूल्य माध्य से सामान दूरी पर केन्द्रित हो या अवस्थित हो तब प्रमाप या मानक विचलन के मान शून्य होगें।

एक बड़ा मानक विचलन इंगित करता है कि संमंक मूल्य माध्य से काफी दूरी पर अवस्थित है जबकि, छोटा या न्यूनतम मानक विचलन, संमंक विन्दू के माध्य के इर्द गिर्द संकेन्द्रण को प्रदर्शित करता है।

वित में, प्रमाप विचलन दिये गये सुरक्षा के साथ जोखिम व आपातकालीन स्थितियों (प्रसिद्ध होटलों में स्टॉक, बॉण्ड्स, सम्पति आदि हो सकते हैं), या पोर्टफोलियो के जोखिम की सूरक्षा का प्रतिनिधित्व करता है। जोखिम एक महत्वपूर्ण घटक है जिससे पोर्टफोलियो में निवेश का किस प्रकार योग्य तरीके प्रबन्धन किया जा सके क्योंकि, यह सम्पतियों एवं/पोर्टफोलियो से निवेशक को मिलने वाले आय जो निवेश निर्णय पर गणितीय आधारित विचलन को निर्धारित किया जाता है।

उदाहरण 9

निम्नलिखित 5 बच्चों के उंचाई को सेन्टीमीटर में दिया गया है। प्रमाप विचलन की गणना करें।

उंचाई (सेंमी): 130, 137, 136, 142, 135

हलः (प्रत्यक्ष विधि के द्वारा)

X	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$u=x-135$	u^2
130	– 6	36	– 5	25
137	1	1	2	4
136	0	0	1	1
142	6	36	7	49
135	– 1	1	0	0
680		74	5	79

श्रेणी के लिए सामानान्तर माध्य, $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{680}{5}=136\ cms$.

श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन, $\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{74}{5}}$

$$=\sqrt{14.8}=3.85\ cms.$$

अप्रत्यक्ष विधि के द्वाराः

यहां, मूल चार के मान को सूविधाजनक चर मूल में परिवर्तित करते हैं।

इस प्रकार, माना कि u = x – a = x – 135. (यहां, c = 1)

तब, प्रमाप विचलन है, $\sigma_x=\sigma_u$

$$=\sqrt{\frac{\sum u^2}{n}-\left(\frac{\sum u}{n}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{79}{5}-\left(\frac{5}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{14.8}=3.85\ cms.$$

उदाहरण 10

एक दुकान में प्रतिदिन प्रेसर कुकर के बिक्री से संबंधित संमंकों का प्रयोग करके मानक विचलन की गणना कीजिए।

कूकर की संख्या	12	13	14	15	16	17	18	19
दिनों की संख्या	1	0	4	12	20	15	6	2

हलः (प्रत्यक्ष विधि के द्वारा)

x	f	fx	fx^2
12	1	12	144
13	0	0	0
14	4	56	784
15	12	180	2700
16	20	320	5120
17	15	255	4335
18	6	108	1944
19	2	38	722
कुल	60	969	15749

प्रमाप विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{15749}{60} - \left(\frac{969}{60}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6608} = 1.289\, cookers$$

अप्रत्यक्ष विधि के द्वाराः

x	f	u = x - 16	fu	fu^2
12	1	-4	-4	16
13	0	-3	0	0
14	4	-2	-8	16
15	12	-1	-12	12
16	20	0	0	0
17	15	1	15	15
18	6	2	12	24
19	2	3	6	18
कुल	60	-	9	101

प्रमाप विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{60} - \left(\frac{9}{60}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6608} = 1.289\, cookers$$

उदाहरण 11

नीचे व्यक्तियों के डायस्टोलिक रक्त चॉप के आवृति वितरण दिये गये हैं, इन संमकों का प्रयोग करके मानक विचलन एवं प्रसरण ज्ञात करें।

रक्त चॉप (मी.मी.)	78-80	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90
व्यक्तियों की संख्या	3	15	26	23	9	4

हलः

अप्रत्यक्ष विधि से मानक विचलन की गणना

वर्ग अन्तराल	आवृति (f)	मध्य बिन्दु (x)	$u=\frac{x-83}{2}$	fu	fu^2
78 – 80	3	79	-2	-6	12
80 – 82	15	81	-1	-15	15
82 – 84	26	83	0	0	0
84 – 86	23	85	1	23	23
86 – 88	9	87	2	18	36
88 - 90	4	89	3	12	36
Total	80	-		32	122

मानक विचलन,

$$\sigma = c\times\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N}-\left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = 2\times\sqrt{\frac{122}{80}-\left(\frac{32}{80}\right)^2}$$

$$=2\times\sqrt{1.525-0.16}=2\times 1.168=2.336\,mm$$

प्रसरण,

$$\sigma^2 = c^2\times\left[\frac{\sum fu^2}{N}-\left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2\right] = 4\times\left[\frac{122}{80}-\left(\frac{32}{80}\right)^2\right]$$

$$=4\times 1.325=5.46\,(mm.)^2$$

6.6.1 प्रमाप विचलन की विशेषताएं

1. मानक विचलन मूल के परिवर्तन से स्वतंत्र है पर पैमाने के परिवर्तन से चर मूल्य के निष्कर्ष में परिवर्तन हो सकता है।
2. किसी भी संमकमाला वा श्रृंखला के अवलोकनों के लिए, प्रमाप विचलन $\sigma \geq 0$.
3. किसी श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन अन्य मूल–माध्य–वर्ग (RMS) से कम होता है।

4- माना कि किसी श्रेणी के पदों की संख्या n_1, माध्य $\bar{x}_1$ एवं मानक विचलन σ_1। साथ हीं दूसरे श्रेणी के पदों की संख्या n_2, माध्य $\bar{x}_2$ एवं प्रमाप विचलन σ_2. तब, इन दो श्रेणीयों n_1 एवं n_2 के संयुक्त मानक विचलन निम्नलिखित है–

$$\sigma=\sqrt{\frac{n_1\left(\sigma_1{}^2+d_1{}^2\right)+n_2\left(\sigma_2{}^2+d_2{}^2\right)}{n_1+n_2}}$$

जहां,

$d_1=\bar{x}_1-\bar{x}$, $d_2=\bar{x}_2-\bar{x}$,

एवं $$\bar{x}=\frac{n_1\,\bar{x}_1+n_2\,\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

उदाहरण 12

एक श्रेणी के 10 अवलोकनों के सामानान्तर माध्य 40 एवं उसका मानक विचलन 3 है। एक दूसरे श्रेणी के 5 अवलोकनों के सामानान्तर माध्य 46 एवं प्रमाप विचलन 2 है। उपरोक्त सूचनाओं का इस्तेमाल करके संयुक्त प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

हलः

यहां, $n_1=10$, $n_2=5$, $\bar{x}_1=40$, $\bar{x}_2=46$, $\sigma_1=3$ एवं $\sigma_2=2$. मना कि $\bar{x}$ एवं σ संयुक्त माध्य तथा संयुक्त प्रमाप विचलन हो तब,

$$\bar{x}=\frac{n_1\,\bar{x}_1+n_2\,\bar{x}_2}{n_1+n_2}=\frac{10\times40+5\times46}{10+5}=\frac{630}{15}=42$$

$$d_1{}^2=\left(\bar{x}_1-\bar{x}\right)^2=\left(40-42\right)^2=4$$

$$d_2{}^2=\left(\bar{x}_2-\bar{x}\right)^2=\left(46-42\right)^2=16$$

दिये गये दोनों श्रेणीयों के संयुक्त प्रमाप विचलन,

$$\sigma=\sqrt{\frac{n_1\left(\sigma_1{}^2+d_1{}^2\right)+n_2\left(\sigma_2{}^2+d_2{}^2\right)}{n_1+n_2}}=\sqrt{\frac{10\left(9+4\right)+5\left(4+16\right)}{10+5}}$$

$$=\sqrt{15.33}=3.92$$

6.6.2 विचरण के गुणांक (Coefficient of Variation)

विचरण के गुणांक, विचरण का एक सापेक्षिक माप है। इसका प्रयोग आवृति वितरणों में विचरण का तुलना करने के लिए किये जाते है। यह एक प्रमाप विचलन है जिसे माध्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, विचरण के गुणांक, $C.V.=\frac{S\tan dard\ \ deviation}{arithmetic\ \ mean}\times100$

$$=\frac{\sigma}{x}\times100$$

विचरण के गुणांक मूल्य, किसी इकाई के माप से मूक्त होता है।

एक उच्चम विचरण गुणांक के मूल्य, इंगित करता है कि श्रेणी के अवलोकनों में विचरण की कोटि अधिकतम है एवं न्यूनतम विचरण गुणांक का मूल्य, श्रृंखला में अल्प विचलन को परिलक्षित करता है।

उदाहरण 13

उदाहरण 11 में दिये गये वितरण से विचरण के गुणांक की गणना कीजिए।

हलः

अभ्यास 11 में दिये गये वितरण का प्रमाप विचलन हैं, $\sigma = 2.336\,mm.$

श्रेणी का सामानान्तर माध्य, $\bar{x} = a + \frac{c\sum fu}{N} = 83 + \frac{2 \times 32}{80} = 83.8\,mm.$

इस प्रकार, विचरण गुणांक, $C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100 = \frac{2.336 \times 100}{83.8} = 2.79\%$

अतः दिये गये अभ्यास का अभीष्ठ विचरण गुणांक 2.79 प्रतिशत है।

उदाहरण 14

किसी दो क्रिकेट खिलाड़ीयों द्वारा दस पारियों में बनाये गय दौड़ निम्नलिखित दिये गये हैं।

परियां	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
खिलाड़ी A	31	48	13	51	38	43	50	36	47	82
खिलाड़ी B	51	5	12	83	37	112	42	18	79	20

1. दो खिलाड़ीयों में किस खिलाड़ी का औसत अंक या दौड़ बेहतर है?
2. इनमें से किस खिलाड़ी के स्कोर में निरन्तरता या संगतता अधिक है।

हलः

यहां, दोनों खिलाड़ियों में से जिस खिलाड़ी के स्कोर का औसत या सामानान्तर माध्य अधिकतम होगा वहीं बेहतर खिलाड़ी होगा। वह, वो खिलाड़ी होगा जिसके स्कोर के विचरण गुणांक न्यूनतम हो उसी के खेल में संगतता विद्यमान हो सकते हैं।

खिलाड़ी A

दौड़ (x)	x^2
31	961
48	2304
13	169
51	2601
38	1444
43	1849
50	2500
36	1296
47	2209
82	6724
439	22057

स्कोर का सामानान्तर माध्य, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{439}{10} = 43.9$

स्कोर का प्रमाप विचलन, $\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{22057}{10}-\left(\frac{439}{10}\right)^2}=16.69$$

स्कोर का विचरण गुणांक,

$$C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100=\frac{16.69\times 100}{43.8}=38.02\%$$

खिलाड़ी B

दौड़ (x)	x^2
51	2601
5	25
12	144
83	6889
37	1369
112	12544
42	1764
18	324
79	6241
20	400
459	**32301**

स्कोर का सामानान्तर माध्य, $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{459}{10}=45.9$

खिलाड़ी बी के स्कोर का प्रमाप विचलन, $\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{32301}{10}-\left(\frac{459}{10}\right)^2}=33.52$$

खिलाड़ी के स्कोर के विचरण गुणांक,

$$C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100=\frac{33.52\times 100}{45.9}=73.03\%$$

संख्यिकी उपकरण	खिलाड़ी A	खिलाड़ी B	टिप्पणियां
औसत स्कोर	43.9	45.9	माध्य (B) > माध्य (A) ∴B ज्यादा बेहतर निष्पादन करता है
विचरण	38.02%	73.03%	C.V. (A) < C.V. (B)

गुणांक			∴ खिलाड़ी A, बेहतर संगतता से निस्पादन करता है।

उदाहरण 15

नीचे होटल उद्योग के कर्मचारियों के मासिक वेतन से संबंधित वितरण दिये गये है।

1. किस होटल में कुल वेतन बिल सर्वाधिक है?
2. किस होटल की औसत वेतन अधिक है?
3. ऐसा कौन होटल है जिसके वेतन में विचरण सर्वाधिक है?

वेतन (रूपये में)	400-600	600-800	800-1000	1000-1200	1200-1400	Total
होटल A	4	18	25	2	1	50
होटल B	10	20	42	18	10	100

हलः

मध्य–विन्दू	$u=\frac{x-500}{200}$	होटल A			होटल B		
		f	fu	fu^2	f	fu	fu^2
500	0	4	0	0	10	0	0
700	1	18	18	18	20	20	20
900	2	25	50	100	42	84	168
1100	3	2	6	18	18	54	162
1300	4	1	4	10	10	40	160
कुल		50	78	152	100	198	510

होटल A:

$$\bar{x}=a+\frac{c\sum fu}{N}=500+\frac{200\times 78}{50}=Rs.812$$

$$\sigma=c\times\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N}-\left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2}=200\times\sqrt{\frac{152}{50}-\left(\frac{78}{50}\right)^2}=Rs.155.70$$

कुल वेतन बिल,

$$N\bar{x}=50\times 812=Rs.40600$$

वेतन का विचरण गुणांक,

$$C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100=\frac{155.70\times 100}{812}=19.17\%$$

होटल B**:**

$$\bar{x}=a+\frac{c\sum fu}{N}=500+\frac{200\times 198}{100}=Rs.896$$

$$\sigma=c\times\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N}-\left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2}=200\times\sqrt{\frac{510}{100}-\left(\frac{198}{100}\right)^2}=Rs.217.2$$

कुल वेतन बिल,

$$N\bar{x} = 100 \times 896 = Rs.\ 89600$$

वेतन का विचरण गुणांक,

$$C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100 = \frac{217.2 \times 100}{896} = 24.24\%$$

इस प्रकार, हमारे पास प्राप्त परिणाम है,

	होटल A	होटल B	टिप्पणी
वेतन बिल	40600 रूपये	89600 रूपये	होटल B में वेतन बिल अधिकतम है।
औसत वेतन	812 रूपये	896 रूपये	होटल B में औसत वेतन अधिकत है।
C.V.	19.17%	24.24%	होटल B के कर्मचारियों के वेतन में विचरण अधिका है।

6.7 सारांश

इस इकाई में हमने सांख्यिकी में विचरण के अवधारणा को विभिन्न संख्यात्मक उदाहरणों के माध्यम से अध्ययन किया। इसमें हमने परासर, चतुर्थक विचलन, प्रत्येक को उचित उदाहरण के मदद से अवधारणाओं की व्याख्या किया। इकाई के अन्त में, हमने माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन का भी अध्ययन किया। उचित उदाहरण के मदद से माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन गणना करने के चरण का भी वर्णन किया गया है।

आपने केन्द्रीय प्रवृति के माप के अतिरिक्त किसी संमंकमाला के अपकिरण या विखराव के वांछित संख्यात्मक उदाहरण के साथ अध्ययन किया है। वह माप जो किसी संमंकमाला के आंकड़ों के बीच बिखराव को हीं अपकिरण का माप कहते हैं।

श्रेणी का परासर, अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्य के अन्तर को हीं परासर कहते हैं। यह स्पष्ट है कि परासर एक प्रदर्शनात्मक माप है जो श्रृंखला के विखराव को अधिकतम एवं न्यूनतम् मूल्य के अन्तर के रूप में व्यक्त करता है। अब आप यह भी जान चुके है कि संमंक के बिखराव के किसी मात्रा को मापने के लिए अपकिरण के माप का उपयोग किया जा सकता है। ऐसे कुछ अपकिरण के माप, परासर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन आदि हैं। एक सांख्यिकीय अपकिरण की माप एक वास्तविक संख्या शून्य है अर्थात् सभी संमंक एक प्रकार के हों एवं यह विखराव बढ़े जैसे हीं संमंक में विविधता बढे। यह शून्य से कम नहीं हो सकता है। अपकिरण के माप के ज्यादतर माप की इकाईयां वहीं है जिसमें मापा गया है। दूसरे शब्दों में, यदि किसी चर मूल्य का मापक इकाई, मीटर या सेकेण्ड हो तब अपकिरण के माप भी इसी इकाई में होता है।

6.8 शब्दावाली

- **विचरण (अपकिरण):** यह चर मूल्य के औसत से विचलन की विशेषता है।
- **परासरः** यह संमंकमाला के अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्यों के अन्तर

को दर्शाता है।

- **माध्य विचलनः** माध्य विचलन किसी संमंकमाला के केन्द्रीय मूल्यों या औसत का चर मूल्यों से निरपेक्ष विचलन को प्रदर्शित करता है।
- **प्रमाप विचलनः** प्रमाप विचलन किसी संमंकमाला के धनात्मक माध्य का वर्ग मूल है जिसे श्रेणी के मूल्यों से सामानान्तर माध्य का वर्ग विचलन के माध्य के रूप में गणना की जाती है।

6.9 बोध प्रश्न

1. .... श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य के अवलोकनों के बीच अन्तर होता है।
2. ....में गणितीय या ऋणात्मक चिन्हों को नकार दिया गया है।
3. प्रमाप विचलन के वर्ग को हीं .... कहते हैं।
4. विचरण के गुणांक, विचरण का एक .... माप है।

6.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. विस्तार **2.** माध्य विचलन **3.** प्रसरण **4.** सापेक्षिक

6.11 स्वपरख प्रश्न

1. एक वितरण का उच्चतम एवं न्यूनतम चतुर्थक क्रमशः 76 रूपये एवं 47 रूपये हैं। चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करें।

उतरः यहां, $Q_3 = Rs.76$ एवं $Q_1 = Rs.47$.

अतः चतुर्थक चिलन,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{76-47}{2} = Rs.14.50$$

चतुर्थक विचलन के गुणांक

$$Coefft.\ of\ Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{76-47}{76+47} = 0.2358$$

2. एक आवृति वितरण में दूल्हनों के आयू का न्यूनतम एंव उच्चतम चतुर्थक का योग 44 वर्ष तथा दोनों चतुर्थकों का अन्तर 6 वर्ष है। इनके आयू का चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करें।

उतरः यहां, $Q_3 + Q_1 = 44\ years$

$Q_3 - Q_1 = 6\ years.$

अतः दूल्हनों के आयू का चतुर्थक गुणांक –

$$Coefft.\ of\ Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{6}{44} = 0.1364$$

3. एक सर्वेक्षण के 80 योजनागत एवं 60 गैर–योजनागत परिवारों के बच्चों के संख्या से संबंधित आंकड़े निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं।

	Q_1	Q_2	Q_3

योजनागत परिवार	1	2	2
गैर–योजनागत परिवार	3	4	6

योजनागत एवं गैर–योजनागत परिवारों के बच्चों के संख्या में विचरण की तुलना कीजिए।

उतरः चूंकि चतुर्थक हमें पता है, इसलिए इनमें विचलनों की तुलना चतुर्थक विचलन गुणांक का प्रयोग करके किया जा सकता है,

$$Coefft.\,of\,Q.D.\,(Planned) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{2-1}{2+1} = 0.3333$$

$$Coefft.\,of\,Q.D.\,(unplanned) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{6-3}{6+3} = 0.3333$$

इस प्रकार, बच्चों के संख्या में विचरण दोनों हीं परिवारों योजनागत एवं गैर–योजनागत, में सामान है।

4. नीचे 65 महिलाओं के प्रथम बार गर्भावती होने के उम्र से संबंधित वितरण नीचे दिया गया है। माध्य विचलन की गणना करें।

आयू (वर्ष में)	स्त्री (f)	मध्य विन्दू -x	fx	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
18 – 22	20	20	400	4	80
22 – 26	30	24	720	0	0
26 – 30	11	28	308	4	44
30 – 34	3	32	96	8	24
34 – 38	1	36	36	12	12
कुल	65	-	1560		160

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1560}{65} = 24\ years$$

माध्य से माध्य विचलन,

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum f\lvert x-\bar{x}\rvert}{N} = \frac{160}{65} = 2.462\ years$$

अतः स्त्रीयों के प्रथम गर्भावती के आयू का माध्य विचलन 2.462 है।

5. आठ चूहों के पूछों की लम्बाई का औसत एवं प्रमाम विचलन मूल्य क्रमशः 4.7 सेमी. एवं 0.8 सेमी. पाई गई है। बाद में, यह पता चलता है कि एक चूहे के पूंछ की लम्बाई गलती से 3.6 सेमी. है जबकि वास्तव में इसकी लम्बाई 6.3 सेमी. है। इस त्रुटि को सही करते हुए, सही माध्य एवं प्रमाप विचलन की गणना कीजिए।

उतरः हमें दिया है, $\bar{x} = 4.7$ and $\sigma^2 = (0.8)^2 = 0.64$

$$\therefore \sum x = n\bar{x} = 8 \times 4.7 = 37.6$$

साथ हीं, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$

$$\therefore 0.64 = \frac{\sum x^2}{8} - \left(\frac{37.6}{8}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\sum x^2}{8} = 22.73$$

$$\therefore \sum x^2 = 8 \times 22.73 = 181.84$$

नया योग = (पूराना योग) – (त्रुटि प्रविष्टी) + (सही प्रविष्टी)

= 37.6 – 3.6 + 6.3 = 40.3

नये वर्ग का योग = (पूराने वर्ग का योग) – (त्रुटि प्रविष्टी)^2 + (सही प्रविष्टी)^2

$$= 181.84 - (3.6)^2 + (6.3)^2 = 208.57$$

नई प्रमाप विचलन $= \frac{\sum x}{n} = \frac{40.3}{8} = \mathbf{5.0375\ cms.}$

नई $S.D. = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{208.57}{8} - \left(\frac{40.3}{8}\right)^2} = \mathbf{0.8336}$

6. निम्नलिखित आंकड़े दो पर्यटन उद्योग के कर्मचारियों के वेतन से संबंधित है।

	उद्योग 'अ'	उद्योग 'ब'
कर्मचारियों की संख्या	80	110
सामानान्तर माध्य	2320 रूपये	2160 रूपये
प्रमाप विचलन	120 रूपये	122 रूपये

1. किस उद्योग में वेतन मद में होने वाली व्यय अधिकतम है?
2. कौन से उद्योग में श्रमिकों की औसत मजदूरी सर्वाधिक है?
3. किस उद्योग के श्रमिकों के वेतन में विचरण ज्यादा है?

उतरः **उद्योग 'अ':**

वेतन मद में कुल व्यय,

$$N\bar{x} = 80 \times 2320 = Rs.185600.$$

विचरण गुणांक मूल्य,

$$C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100 = \frac{120 \times 100}{2320} = 5.17\%$$

उद्योग 'ब':

वेतन मद में कुल व्यय,

$$N\bar{x} = 110 \times 2160 = Rs.237600.$$

विचरण गुणांक मूल्य,

$$C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100=\frac{122\times 100}{2160}=5.65\%$$

इस प्रकार हमे निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं–

	उद्योग 'अ'	उद्योग 'ब'	टिप्पणी
कुल वेतन	185600 रूपये	237600 रूपये	कुल व्यय की मात्रा उद्योग 'ब' में अधिक है।
औसत वेतन	2320 रूपये	2160 रूपये	औसत वेतन उद्योग 'अ' में सर्वाधिक है।
C.V.	5.17%	5.65%	वेतन में विचलन उद्योग 'ब' में सर्वाधिक है।

7. इन आंकड़ों n = 72, $\sum x=713.4$ and $\sum x^2=9047.34.$ का प्रयोग करके विचरण गुणांक की गणना करें।

उत्तरः $$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{713.4}{72}=9.9083$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{9047.34}{72}-\left(\frac{713.4}{72}\right)^2}$$

$$=\sqrt{125.6575-981751}=\sqrt{27.4824}=5.2424$$

$$C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100=\frac{5.2424\times 100}{9.9083}=52.91\%$$

इस प्रकार संमंकमाला का विचरण गुणांक मूल्य **52.91%** है।

8.

i) यदि, C.V. = 22% एवं यदि, S.D. = 4, तब सामानान्तर माध्य की गणना कीजिए।

ii) यदि, C.V. = 5.3% एवं यदि, $\bar{x}=126$, तब, प्रमाप विचलन की गणना करें।

उत्तरः i) हमें दिया है, $C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100$

$$\therefore 22=\frac{4\times 100}{\bar{x}}$$

एवं, $$\bar{x}=\frac{4\times 100}{22}=18.182$$

ii) हमें दिया है, $C.V.=\frac{\sigma}{x}\times 100$

$$\therefore 5.3=\frac{\sigma\times 100}{126}$$

एवं, $$\sigma=\frac{5.3\times 126}{100}=6.678$$

9. विचलन को संक्षिप्त रूप से वर्णन करें। उत्तरः खण्ड 6.2 को देखें।

10. माध्य विचलन से आप क्या समझते हैं? उत्तरः खण्ड 6.5 को देखें।

11. दिये गये संख्याओं 77, 73, 75, 70, 72, 76, 75, 72, 74, 76 से प्रमाप

विचलन की गणना करें।

X	$X = X - \overline{X}$ $\overline{X}:74$	X^2
77	3	9
73	– 1	1
75	1	1
70	– 4	16
72	– 2	4
76	2	4
75	1	1
72	– 2	4
74	0	0
76	2	4
$\Sigma X = 740$	$\Sigma(X - \overline{X}) = 0$	$\Sigma x^2 = 44$

सामानान्तर माध्य: $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

$= \frac{740}{10}$

$= 74$

प्रमाप विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{44}{10}}$$

$$= \sqrt{4.4}$$

$$= 2.10$$

6.12 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics, Goon, Guptha and Dasguptha, World Press Limited, Calcutta.
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.
5. www.wikipedia.com

*****

इकाई 7 विषमता, परिघात एवं ककुदता/ पृथुशीर्षत्व

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- प्रसरण एवं विचलन के गुणांक की गणना कर सकें।
- 'लॉरेंज वक्र' का प्रयोग करके औसत से विचरण ज्ञात कर सकें।
- आघूर्ण के अवधारणा एवं उसके महत्व का वर्णन कर सकें।
- कार्ल पीर्यसनस् के विषमता की माप कर सकें।
- बॉवले एवं केली के विषमता के माप में अन्तर कर सकें।
- पृथुशीर्षत्व के बारे में चर्चा कर सकें।

7.1 प्रस्तावना

पिछले इकाई में, आपने अपकिरण के माप का अध्ययन किया है। वर्तमान इकाई में, आप प्रसरण, आघूर्ण, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व का वितरण एवं विचलन की माप के लिए प्रयोग के बारे में अध्ययन करेगें। पूरे श्रृंखला के माप को हीं आघूर्ण कहते हैं जिसके विशेषता का निर्वचन जब करते हैं, तब यह वितरण के बनावट के बारे में सूचनाओं का अम्बार प्रदान करता है। यह भी देखेंगें की सामानान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन श्रेणी के दो पहले सदस्य हैं। सममितता एवं पृथुशीर्षत्व हैं ऐसे दो उच्चतम सदस्य है जिन्हें श्रेणी से प्राप्त किया जाता है। यद्यपि, आघूर्ण की अवधारणा एक उच्च गणितीय रूप है, जिसके प्रारम्भिक परिचय, उसके भौतिक महत्व की चर्चा भी इस इकाई में होगी। विषमता एवं पृथुशीर्षत्व ऐसे शब्द है जो वितरण के स्वरूप एवं सममितता को प्रदर्शित करता है। विषम या 'स्कूयड' शब्द का प्रयोग उस स्थिति के लिए किया जाता है कि वितरण के कुछ पद हैं जो भिन्न या किसी एक तरफ हीं संकेन्द्रीत है। जब स्वरूप की बात करते हैं तो आवृति या प्रायकिता वितरण, विषमता वितरण की असममितता के बारे में जिक्र करता है। पृथुशीर्षत्व संमंकमाला या वितरण के चपटेपन को मापने यंत्र है।

7.2 प्रसरण एवं विचलन के गुणांक

प्रसरण एक समंकमाला के विभिन्न चर मूल्यों का, माध्य से विचलनों या अपकिरण का माप है। प्रसरण विभिन्न चर मूल्यों का उसके माध्य से लिए गये विचलनों के वर्गों के औसत का गणितीय प्रत्याशा है।

इस प्रकार, प्रमाप विचलन के वर्ग को हीं प्रसरण कहते हैं और इसे प्रमाप विचलन के माध्यम से ज्यादा स्पष्ट करते हैं। इससे स्पष्ट है कि इसकी विशेषता भी वहीं है जो प्रमाप विचलन की विशेषता है।

जैसे कि यह स्पष्ट है कि प्रमाप विचलन या इसका वर्ग अर्थात् प्रसरण भी दो वितरणों में तुलना करने में असफल होंगें, यदि वे अलग–अलग इकाईयों में दिये हों या उनके माध्य अलग इकाई में हो। इस प्रकार, एक परीक्षा के प्राप्तांक का प्रमाप विचलन 5 एवं माध्य प्राप्तांक 30 है तथा दूसरे परीक्षा के प्राप्तांक का माध्य 90 है। स्पष्ट है कि, दूसरे परीक्षा के प्राप्तांक में परिवर्तनशीलता बहुत कम है। ऐसे समस्याओं को ध्यान देने के लिए, हमें विचलन के गुणांक V, को परिभाषित एवं प्रयोग किया जाना चाहिए।

उदाहरण 7.1 किसी एक श्रृंखला के पारियों में दो बल्लेबाजों A और B के द्वारा बनाये गये दौड़ या स्कोर निम्नलिखित दिये गये हैः

A	12	115	6	73	7	19	119	36	84	29
B	47	12	76	42	4	51	37	48	13	0

दोनों में से कौन एक बेहतर रन बनाने वाला है? किसके खेल में ज्यादा संगतता है?

हलः दोनों बल्लेबाजों A और B में कौन बेहतर रन बनाने वाला है उसे जानने के लिए हमे दानों खिलाड़ीयों के बल्लेबाजी औसत ज्ञात करना होगा। दोनों में से जिसका औसत ज्यादा होगा, वह एक बेहतर बल्लेबाज होगा।

बल्लेबाज की संगतता को ज्ञात करने के लिए हमें विचलन के गुणांक को ज्ञात करना होगा। जिस खिलाड़ी का विचलन गुणांक कम होगा, वह एक संगत खिलाड़ी होगा।

बल्लेबाज A			**बल्लेबाज B**		
Scores x	X	X^2	Scores	X	X^2
12	-38	1,444	47	14	196
115	+65	4225	12	-21	441
6	-44	1936	76	43	1849
7	-43	1849	-4	-29	841
19	-31	961	51	18	324
119	+69	4761	37	4	16
36	-14	196	48	15	225
84	+34	1156	13	-20	400
29	-21	441	0	-33	1089
Σx =500		17498	Σx =330		5462

बल्लेबाज A: बल्लेबाज B:

$\bar{x} = \frac{500}{10} = 50$ $\bar{x} = \frac{300}{10} = 33$

$s = \frac{\sqrt{17498}}{10} = 41.83$ $s = \frac{\sqrt{5462}}{10} = 23.37$

$v = \frac{41.83x\ 100}{50}$ $v = \frac{23.37x\ 100}{33}$

= 83.66 प्रतिशत् = 70.8 प्रतिशत्

बल्लेबाज A एक बेहतर बल्लेबाज है क्योंकि उसका औसत रन 50, दूसरे बल्लेबाज B के औसत स्कोर 33 से अधिक है। लेकिन बल्लेबाज B, एक संगत खिलाड़ी है क्योंकि उसका विचलन गुणांक 70.8 इकाई है जो बल्लेबाज A के गुणांक 83.66, से कम है।

उदाहरणः निम्नलिखित सारणी सन् 1914 एवं 1918 में एक महाविद्यालय में हुए नमांकन छात्रों के उम्र के वितरण को दिया गया है। ज्ञात कीजिए कि दोनों में से किस समूह में ज्यादा परिर्वतनशीलता है?

उम्र	**छात्रों की संख्या**	
(वर्षों में)	1914	1918
15	-	1
16	1	6
17	3	34
18	8	22
19	12	35
20	14	20
21	13	7
22	5	19
23	2	3
24	3	-
25	1	-
26	-	-
27	1	-

हलः सर्व प्रथम हमें निम्नलिखित आवृति सारणी का निर्माण करते हैं–

चर मूल्य	1914 (कल्पित माध्य आयु, X_A= 21)				1918 (कल्पित माध्य आयु X_B= 19)			
X	f_A	$d_A = X - X_A$	$f_A d_A$	$f_A d^2_A$	f_B	$d_B = X - X_B$	$f_B d_B$	$f_B d^2_B$
15	0	-6	0	0	1	-4	-4	16
16	1	-5	-5	25	6	-3	-18	54
17	3	-4	-12	48	34	-2	-68	136

18	8	-3	-24	72	22	-1	-22	22
19	12	-2	-24	48	35	0	0	0
20	14	-1	-14	14	20	1	20	20
21	13	0	0	0	7	2	14	28
22	5	1	5	5	19	3	57	171
23	2	2	4	8	3	4	12	48
24	3	3	9	27	0	5	0	0
25	1	4	4	16	0	6	0	0
26	0	5	0	0	0	7	0	0
27	1	6	6	36	0	8	0	0
	63		+28	299	147		+103	
			-51				-9	495

समूह 1914,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^{'1}}{N} - \frac{\left[\sum(fx')\right]^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{299-}{63}\left(\frac{-51}{63}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{4.476-0.655=\sqrt{4.091}} = 2.02$$

$$\bar{x} = 21 + \left(\frac{-51}{63}\right) = 21-8 = 20.2$$

विचलन गुणांक, $V = \frac{2.02}{20.30}x100$

$$= \frac{202}{20.2} = 10$$

अतः समूह 1914 के लिए माध्य आयु = 20.2, प्रमाप विचलन = 2.02 , एवं विचलन गुणांक, V = 10% है।

समूह 1918:

$$\sigma = \sqrt{\frac{495}{147}-\left(\frac{-9}{147}\right)^2} = \sqrt{3.3673-0.0037}$$

$$= \sqrt{3.3636} = 1.834$$

$$\bar{x} = 19+\left(\frac{-9}{147}\right)$$

विचलन गुणांक, V = 19-0.06 =18.94

$$V = \frac{1.834}{18.94}x100 = 9.68$$

अतः समूह 1918 के लिए माध्य आयु = 19.94, प्रमाप विचलन = 1.834 , ,एवं विचलन गुणांक, V = 9.68% है।

उपरोक्त गणना से प्राप्त परिणाम से हम कह सकते हैं कि समूह 1914 के विचलन गुणांक 10 है जबकि समूह 1918 का विचरण गुणांक 9.68 है जो प्रथम समूह से कम है। फलतः समूह 1914 में परिवर्तनशीलता अधिक है।

उदाहरणः निम्नलिखित संमंक एक महाविद्यालय में पढ़ने वाले छात्र एवं छात्राओं के उचाईं दिये गये हैं

मद	छात्र	छात्राएं
संख्या	72	38
औसत उचाईं (इंच में)	68	61
वितरण का प्रसरण	9	4

आपको निम्नलिखि चीजें ज्ञात करना हैं।

(a) किस लिंग में, छात्र या छात्रा के व्यक्तिग उंचाई में ज्यादा परिवर्तनशीलता है?

(b) छात्र एवं छात्राओं के संयुक्त औसत उंचाई क्या है?

(c) छात्र एवं छात्राओं के उचाईं का संयुक्त प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

(d) संयुक्त विचरण गुणांक (C.V.) की गणना करें।

हलः

(a) छात्रों के उचाईं का विचरण गुणांक, C.V. = $\frac{o^1}{\overline{\overline{x}}^2} x100 = \frac{\sqrt{9}}{68} x100 = 4.41\%$

छात्रों के उचाईं का

विचरण गुणांक, C.V.,

$$\frac{o^1}{\overline{\overline{x}}^2} x100 = \frac{\sqrt{4}}{61} x100 = 3.28\%$$

उपरोक्त गणना से हम पाते हैं की छात्रों के उंचाई में छात्राओं के अपेक्षा ज्यादा परिवर्तनशीलता है।

(b) छात्र एवं छात्राओं का संयुक्त औत उंचाई,

$$\overline{x} = \frac{N_1 \overline{x}_1 + N_2 \overline{x}_2}{N1 + N_2}$$

$$= \frac{72 \times 68 \times 38 \times 61}{72 + 38} = \frac{7214}{110} = 65.58$$ इंच लगभग।

(c) छात्र एवं छात्राओं के उंचाई का संयुक्त प्रमाप विचलन हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात करके कर सकते हैं,

$$o_{12}^2 = \frac{N_1 o_1^2 + N_2 o_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1 \left(\overline{x} - \overline{x}_1\right)^2 + N_2 (\overline{x} - \overline{x}) N^2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{72x9x38x4}{72 + 38} + \frac{72(65.58 - 68)^2 + 38(65.58 - 61)^2}{72 + 38}$$

$= \frac{2018.794}{110} = 18.35$

$o_{12} = 4.28$ इंच।

(d) संयुक्त परिवर्तनशीलता $= \frac{o}{x} \times 100 = \frac{4.28}{65.68} \times 100 = 6.53$

उदाहरण 7.4: एक सह–शिक्षा महाविद्यालय, जिसमें लड़के एवं लड़कियां अलग–अलग समूह बनाते हैं, स्थापना दिवस के दिन सभी लोग एक साथ मिलकर कार्य करत हैं। लड़के एवं लड़कियों के लिए अलग तथा संयुक्त प्रमाप विचलन की गणना करें। दोनो समूहों में से किसमें सजातियता का गुण ज्यादा है?

प्रत्येक समूह द्वारा मिनट में दिये गये श्रम दान	लड़कियों की संख्या	लड़कों की संख्या
60	20	120
55	60	100
50	100	200
45	450	355
40	450	350
35	300	500
30	250	350
25	100	20

प्रत्येक समूह द्वारा मिनट में दिये गये श्रम दान (X)	X` $= \frac{x-45}{5}$	लड़कियों की संख्या f_1	$f_1x`$	f_1x^2	लड़कों की संख्या f_2	$f_2x`$	$f_2x`^2_2$
60	+3	20	60	180	120	360	1080
55	+2	60	120	240	100	200	400
50	+1	100	100	100	200	200	200
45	0	450	0	0	355	0	0
40	-1	450	-450	450	350	-350	350
35	-2	300	-600	1200	500	-1000	2000
30	-3	250	-750	2250	350	-1050	3150
25	-4	100	-400	1600	20	-80	320
कुल योग		**1730**	**-1920**	**6020**	**1995**	**-1720**	**7500**

लड़कियों के समूह:

$$\overline{X_2} = 45 - \frac{1920}{1730} x5 = 45 - 5.55 = 39.45$$

$$o_1 = \sqrt{\frac{6020}{1730} - \left(\frac{-1920}{1730}\right)^2} x5 \sqrt{3.4798 - 1.2317} x5 = 1.5x5 = 7.5$$

$$V_1 = \frac{7.5}{39.45} x100 = 19.0\%$$

लड़कों का समूह:

$$\overline{X_2} = 45 - \frac{1720}{1995} x5 = 45 - 4.31 = 40.69$$

$$o_1 = \sqrt{\frac{750}{1995} - \left(\frac{-1720}{1995}\right)^2} x5\sqrt{3.7594 - 10.7434} x5$$
$$= 117366x5 = 8.68$$

$$V_2 = \frac{8.68}{40.69} x100 = 21.34\%$$

लड़की एवं लड़कों के संयुक्त माध्य,

$$\overline{X} = \frac{1730x39.45 + 1995x40.69}{1730 + 1995}$$

$$= \frac{149424.78}{3725} = 40.11$$

$d_1 = 0.66$ एवं $d_2 = -0.58$

$$o_{12}^2 = 1730(7.5)^2 + 1995(8.68)^2 + 1730(0.66)^2 + 1995(-0.58)^2$$

अतः ऐसा कुछ भी सबूत नहीं दिखता जिनसे ये कहा जा सके कि किसी एक श्रेणी सजातीयता के गुण परिलक्षित हो।

उदाहरण 7.5: निम्नलिखित सतत् श्रेणी के आवृति वितरण से अप्रत्यक्ष विधि के द्वारा ज्ञात सामानान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन के मूल्य क्रमशः 135.3 लबस एवं 9.6 लबस है।

X	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	कूल
आवृति (f)	2	5	8	18	22	13	8	4	80

वास्तविक वर्ग अन्तराल का निर्धारण करें।

हलः प्रमाप विचलन की गणना निम्नलिखित रूप से किया जा सकता हैः

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	**कुल**
आवृति (f)	2	5	8	18	22	13	8	4	80
f(X)	-8	-15	-16	-18	0	13	16	12	-16
$f(X^2)$	32	45	32	18	0	13	32	36	208

प्रमाप विचलन = $i \times \sqrt{\frac{\sum f(x)}{n} - \left(\frac{\sum f(x)}{n}\right)^2}$

उपरोक्त दिये गये मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

9.6 = $i \times \sqrt{\frac{208}{80} - \left(\frac{-16}{80}\right)^2}$ = $i \times \sqrt{2.6 - 0.04}$

$$9.6 = i\times\sqrt{2.56}=i\times1.6$$

$$i = \frac{9.6}{1.6} = 6$$

सामानान्तर माध्य = $A+\frac{\sum f(x)}{n}\times1$

प्रश्न में दिये गये मूल्य का प्रयोग करने पर,

$$135.3 = A+\frac{-16}{80}x6 = A-1.2$$

$$A=135.3+1.2=136.5$$

A या कल्पित माध्य का मध्य विन्दू X से संगत अन्तर 0 क बराबर है। जैसे कि अध्ययन की श्रेणी सतत् प्रकार की है जिसका वर्ग अन्तराल 6 है अतः X = 0 के लिए वर्ग अन्तराल होगा 136.5-3 से 136.5 + 3, अर्थात् 133.5-139.5। दूसरा इससे निम्न वर्ग अन्तराल 133.5-6 अर्थात् 127.5 से 133.5.

इसी प्रकार अन्य वर्ग अन्तराल की भी गणना की जा सकती है। इस प्रकार अन्य वर्ग अन्तराल निम्नलिखित हैं,

109.5-115.5 115.5-121.5 121.5-127.5 127.5-133.5
133.5-139.5 139.5-145.5 145.5-151.5 151.5-157.5

समग्र प्रदर्शन का निर्धारण

यदि प्रत्येक विद्यार्थी विभिन्न विषयों में परीक्षा लिखते हैं तो उनके द्वारा प्राप्तांक के आधार पर योग्यता तय करना उचित नहीं होगा। ऐसा इसलिए भी हैं क्योंकि विभिन्न विषयों के अंक के विस्तार या फैलाव और साधन व माध्यम अलग होते हैं। परीक्षा के प्राप्तांक में फैलाव भार को जन्म देता हैं जिससे अधिक अंक अर्जित करने वाले को बढ़त प्राप्त होता हैं जहां विस्तार अधिक हो और उनके लिये नुकसान होता है जिसने अधिक अंक अर्जित किये परन्तु अंक का फैलाव न्यूनतम होती है।

वह विधि जिसके द्वारा त्रुटि अंक या मूल्य को मानक स्कोर में परिवर्तित किया जाता है उसे निम्नलिखित सूत्र से दिखाया जा सकता है,

Z-स्कोर (मानक स्कोर) = $\frac{X-\mu}{\sigma}$,

विचलन के इस माप को जो किसी विन्दू या चर मूल्य से माध्य के विचलन को प्रमाप विचलन से भाग देने प्राप्त मूल्य को हीं Z-स्कोर कहते हैं। यह विभिन्न विषयों के विचलनों अर्थात् माध्य एवं प्रमाप विचलन को सही करता है।

इस प्रकार Z-स्कोर का प्रयोग करके किसी छात्र के विभिन्न विषयों में सत्य सापेक्षिक निस्पादन ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 7.6: निम्नलिखित दो छात्रों A एवं B के द्वारा दो विषयों अर्थशास्त्र एवं वाणिज्य के प्राप्तांक दिये गये हैं:

उम्मीदवार	प्राप्तांक		
	अर्थशास्त्र	वाणिज्य	कुल

A	84	75	159
B	74	85	159

1. अर्थशास्त्र के लिए औसत 60 एवं प्रमाप विचलन 13।
2. वाणिज्य के लिए औसत 60 एवं प्रमाप विचलन 11।

उपरोक्त दोनों में से किसका उपलब्धि बेहतर है। Z-स्कोर का प्रयोग करके मूल्यांकन करें।

हलः A एवं B छात्रों के Z-स्कोर निम्नलिखित दिये गये हैं:

Z- स्कोर *A:* अर्थशास्त्र........ $\frac{84-160}{13} = 1.85$

वाणिज्य.......... $\frac{75-50}{11} = 2.27$

$\Big\}$ 4.12

B: अर्थशास्त्र $\frac{74-60}{13} = 1.08$

वाणिज्य $\frac{85-50}{11} = 3.28$

$\Big\}$ 4.26

उपरोक्त गणाना से स्पष्ट है कि B छात्र की उपलब्धि ज्यादा है अतः वह एक बेहतर छात्र हैं।

7.3 लॉरेंज वक्र

लॉरेंज वक्र औसत से विभिन्न चर मूल्यों के विचलनों को मापने की रेखाचित्र विधि है। इसका प्रयोग सर्वप्रथम डॉ. लॉरेंज द्वारा आय व सम्पति में विषमता को मापने के लिए किया गया था। लेकिन, इसका प्रयोग इसी तरह के मापों में प्रयोग किया जा सकता है विशेष रूप से व्यापार के विभिन्न समूहों के बीच लाभ अर्जन का तुलनात्मक अध्ययन कर सकते हैं। यह एक *संचयी प्रतिशत वक्र* होता है। इसमें दिये गये विभिन्न दिये गये मदों को जोड़ते हुए संचयी आवृति ज्ञात करके उसका कुल संख्या के सापेक्ष संचयी प्रतिशत ज्ञात करते हैं फिर उन्हें ग्राफ पेपर पर अंकित करते हैं, ये मद सम्पति, लाभ या कुल आय आदि से संबंधित हो सकते हैं।

लॉरेंज वक्र की रचना करने के लिए निम्नलिखित चरणों को आवश्यक रूप से पूरा किया जाना चाहिए:

1. प्रत्येक चरों के विभिन्न समूहों को प्रतिशत में परिवर्तित करें। इस प्रकार, यदि देश के लोगों के विभिन्न समूहों में आय के वितरण को जानना है तो सर्वप्रथम उन्हें कुल जनसंख्या के सापेक्ष प्रत्येक समूह को प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना चाहिए; साथ हीं संबंधित आय को भी इसी प्रकार प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना चाहिए।
2. प्रथम चरण से प्राप्त दो समुच्चों के प्रतिशत को संचयी प्रतिशत ज्ञात करने के लिए इनका संचयी योग निकालें।
3. उपरोक्त दो चरों के संचयी प्रतिशत को Y अक्ष एवं X अक्ष में प्लाट या अंकित करें। Y अक्ष का पैमाना कटान विन्दू 0 से शूरू होकर उपर की ओर 100 तक तथा X अक्ष का पैमाना कटान विन्दू 100 से शूरू

होकर अपनी दाहिनी ओर 0 मूल्य तक होगी। अर्थात् कटान विन्दू पर Y का मूल्य शून्य एवं X का मूल्य 100 के बराबर होगें।

4. Y अक्ष के विन्दू 100 से एवं X अक्ष के विन्दू 0 को सीधी रेखा से मिलाने पर प्राप्त रेखा हीं समान वितरण की रेखा कहा जाता है। यहीं रेखा बताती है कि दिये गये संमंकमाला के चरों में विचलन की मात्रा क्या है या उसमें असामानता का स्तर कितना है।

5. दिये गये संमंकमाला के प्रतिशत संचयी मूल्य को ग्राप पेपर पर अंकित करके उस सामान्य रेखा से मिला देना चाहिए।

इस प्रकार, पांचवें चरण में प्राप्त की गई रेखा यदि सामान वितरण की रेखा से अधिक दूरी पर अवस्थित है तो वितरण में विचलन अधिक होगा जो बृहत असामानता को प्रदर्शित करगें।

उदाहरण 5.7: निम्नलिखित सारणी में दो शहरों A एव B के लागों के आय को दिया गया है। संमकों को रेखाचित्र के द्वारा प्रदर्शित करें जिससे आय के वितरण में असामातना के स्तर ज्ञात हो सके।

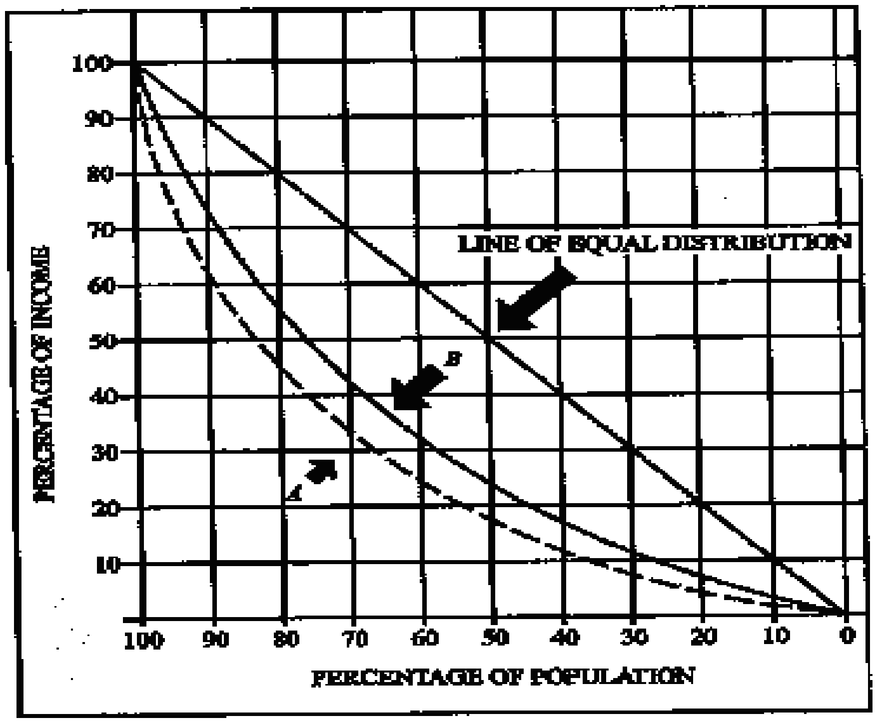
शहर A		शहर B	
व्यक्ति	मजदूरी (दैनिक)	व्यक्ति	मजदूरी (दैनिक)
100	75	50	80
100	100	70	120
100	150	30	60
100	225	25	140
100	325	100	200
100	375	45	200
100	450	30	140
100	600	80	460
100	850	20	120
100	1850	50	480
1000	5000	500	2000

हलः सर्वप्रथम हम संचयी प्रतिशत निम्नलिखित तरीके से करते हैं:

शहर **A**				शहर **B**			
व्यक्ति		मजदूरी (दैनिक)		व्यक्ति		मजदूरी (दैनिक)	
संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत
100	10	75	1.5	50	10	80	4
200	20	175	3.5	120	24	200	10
300	30	325	6.5	150	30	260	13
400	40	550	11	175	35	400	20
500	50	875	17.5	275	55	600	30
600	60	1250	25	320	64	800	40
700	70	1700	34	350	70	940	47
800	80	2300	46	430	86	1400	70

900	90	3150	63	450	90	1520	76
1000	100	500	100	500	100	2000	100

उपरोक्त संमंक को निम्नलिखित तरीके से रेखाचित्र में अंकित करते हैं जो प्रतिदिन मजदूरी के वितरण में असामानता को प्रदर्शित करता है,



7.4 आघूर्ण या परिघात

आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहां 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र विन्दू पर घूमने की प्रवृति या क्षमता कितनी है। बल F_1 का काउंटर दक्षिणावर्त पल F_1x_1 एवं बल F_2 का काउंटर दक्षिणावर्त पल F_2x_2 है।

एक आवृति वितरण के लिए हम X को मूल विन्दू 0 से दूरी के रूप में कल्पना कर सकते हैं, एक बल जो आवृति (f) के बराबर है क्रिया X से संबंधित है और इस प्रकार मूल विन्दू 0 के लिए आघूर्ण $\Sigma(x)$ के बराबर होगें। यदि पूरे वितरण में सभी के योगदान को सम्मिलित किया जाये, तब आघूर्ण को $\Sigma f(x)$ से प्रदर्शित किया जाता है। यह किसी केन्द्र विन्दू पर लिवर के परिक्रमा को प्रदर्शित करेगा। इसमें शामिल पदों के योगदान को सहीं (चूंकि हम वितरण के आकार को निश्चित करना चाहते हैं) करने के लिए हम Σf से भाग देते हैं अर्थात् कुल पदों की संख्या से भाग देते हैं। इस प्रकार, प्रथम परिघातः शून्य के सापेक्ष, v/ *(nu one prime)*

$$v`_1 = \frac{\sum f(x)}{\sum f}$$

इसी प्रकार यंत्र विद्या की तरह, हम उच्च कोटि के आघूर्ण को भी उसके आवृति f का गुणा X के घात से करके प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$v`_2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f}, \quad v`_3 = \frac{\sum fx^3}{\sum f},,$$

और अन्य आघूर्ण भी प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार, आघूर्ण के लिए सामान्य सूत्र,

$$v`_r = \frac{\sum fx^r}{\sum f}$$

आघूर्ण की गणना मूल विन्दू से गणना करने के बावजूद किसी अन्य विन्दू X_o के सापेक्ष भी परिघात की गणना किया जा सकता है (उस बात के बारे में लीवर पट्टी को केन्द विन्दू के बराबर बनाकर कर सकते हैं). तब,

$$v_r = \frac{\sum f(x - x_o)^r}{\sum f}$$

इस प्रकार, v', v_r का एक विशेष स्थिति है, जहां, $X_o = 0$। आघूर्ण की श्रृंखला $x - x$ के लिए अर्थात् माध्य के सापेक्ष आघूर्ण का विशेष महत्व है जिसे μ ('म्यू') से प्रदर्शित किया जाता है,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\sum f(x - \bar{x})^r}{\sum f}$$

माध्य के सापेक्ष आघूर्ण

माध्य के सापेक्ष आवृति वितरण के आघूर्ण का विशेष महत्व है। प्रथम केन्द्रीय आघूर्ण 0 (शून्य) एवं शून्यवां (0$^{वां}$) आघूर्ण, \i एक या 1 के बराबर होता है। माध्य के सापेक्ष द्वितीय कन्द्रीय आघूर्ण, आवृति का प्रसरण के बराबर अर्थात् प्रसरण होता है।

शून्यवां (0$^{वां}$) आघूर्ण μ_0 का निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता है,

$$\mu_0 = \frac{\sum f(x - \bar{x})^0}{\sum f}$$

लेकिन किसी भी संख्या या व्यंजक का घात शून्य होने पर उसका मान एक होता है, इससे यह बात स्पष्ट है कि,

$$\mu_0 = \frac{\sum f}{\sum f} = 1$$

सभी प्रकार के वितरण या श्रेणियों के लिये यह सत्य है।

इसी प्रकार, $$\mu_1 = \frac{\sum f(x - \bar{x})}{\sum f}$$

लेकिन, माध्य के परिभाषा के अनुसार, माध्य $\bar{x}$ के विभिन्न पदों से विचनों का योग शून्य के बराबर होता है अर्थात् $\sum f(x-\bar{x})$ का मान शून्य होगा और $\mu_1 = 0$। यह सभी श्रेणीयों के लिए सत्य है।

दूसरा, $\mu_2 = \sum f\overline{(x-x)^2} / \sum f$ जो प्रसरण के परिभाषा को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार,

$$\mu_o = 1$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = 0^2$$

जो सभी प्रकार के श्रेणीयों के लिए सत्य है।

यहां एक अन्य बात है जिसे आघूर्ण के संदर्भ में उद्धृत करना जरूरी है। हम यह देख चुके हैं कि माध्य से विचलन से कम राशियों का योग माध्य से विचलन के अधिक राशियों का योग बराबर होता है। यह ये प्रदर्शित करता है कि विचलनों के ऋणात्मक एवं धनात्मक चिन्ह् निरस्त हो जाते हैं। यह सभी वितरणों में होता है भले वो सममित या असममित प्रकार के श्रेणी हो, जिसके विचलनों के घात एक के बराबर हो।

यदि माध्यों से लिए गये विचलनों के घात एक सम संख्या हो, तब सभी विचलनो के मूल्य धनात्मक होगें एवं इन्हें आगे रद करने की जरूरत नहीं है।

जब माध्यों से लिए गये विचलनों के घात कोई विषम संख्या एक को छोड़कर हो और ऋणात्मक विचलनों का योग धनात्मक विचलनों के योग के बराबर हो, तब श्रेणियां सममितीय कहलायेगी। इस प्रकार, सममिमीतीय वितरण के लिए केवल,

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_5 = 0, \quad \mu_7 = 0, \text{ इत्यादि।}$$

इन्हीं कारणों से इन आघूर्णों को सममितता की माप कहा जाता है।

उदाहरण 7.8 निम्नलिखित संमंकों से माध्य के सापेक्ष प्रथम चार आघूर्णों की गणना करें।

वर्ग अन्तरालः	0-10	10-20	20-30	30-40
आवृति :	1	3	4	2

हलः सर्वप्रथम हम आवृति सारणी का निर्माण निम्नलिखित तरीके से करें।

वर्ग अन्तराल	X	F	X^1	$X' = \frac{X-25}{10}$	FX^1	FX^2	FX^3
0-10	5	1	-2	-2	4	-8	+16
10-20	15	3	-1	-3	3	-3	+3
20-30	25	4	0	0	0	0	0
30-40	35	2	1	2	2	2	+2

किसी माध्य के सापेक्ष आघूर्ण,

$$V_1 = \frac{-3\times10}{10} = -3,$$

$$V_2 = \frac{9}{10} \times 10^2 = 90,$$

$$V_3 = \frac{-9}{10} \times 10^3 = -900,$$

$$V_4 = \frac{21}{10} \times 10^4 = 21000$$

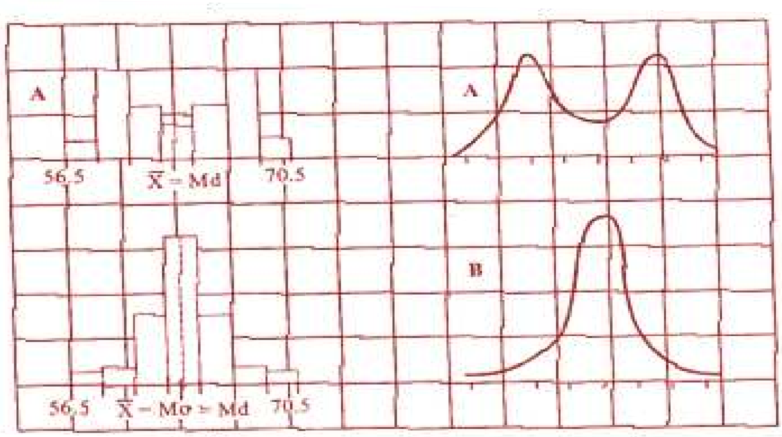
7.5 विषमता

जब कोई आवृति वितरण सममितीय नहीं है तो वैसे श्रेणी या श्रृंखला को हीं असममितीय या विषमता कहते हैं। सममितता के स्वभाव एवं असममितता के प्रकार को निम्नलिखित उदाहरण से व्याख्या किया जा सकता है।

निम्नलिखित सारणी एक महाविद्यालय के छात्रों के उंचाई को प्रदर्शित कर रहा है:

वर्ग अन्तराल	A (f)	B (f)	C (f)	D (f)
56.5-58.5	5	3	0	4
58.5-60.5	25	5	4	8
60.5-62.5	15	20	40	20
62.5-64.5	10	44	24	24
64.5-66.5	15	20	20	40
66.5-68.5	25	5	8	4
68.5-70.5	5	3	4	0
N	100	100	100	100
माध्य (me)	63.5	63.5	63.5	63.5
माध्यिका (Md)	63.5	63.5	63	64
बहुलक (Mo)	-	63.5	61.9	65.1

उपरोक्त आंकड़ों के आवृति आयत चित्रएवं संगत वक्र निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं,



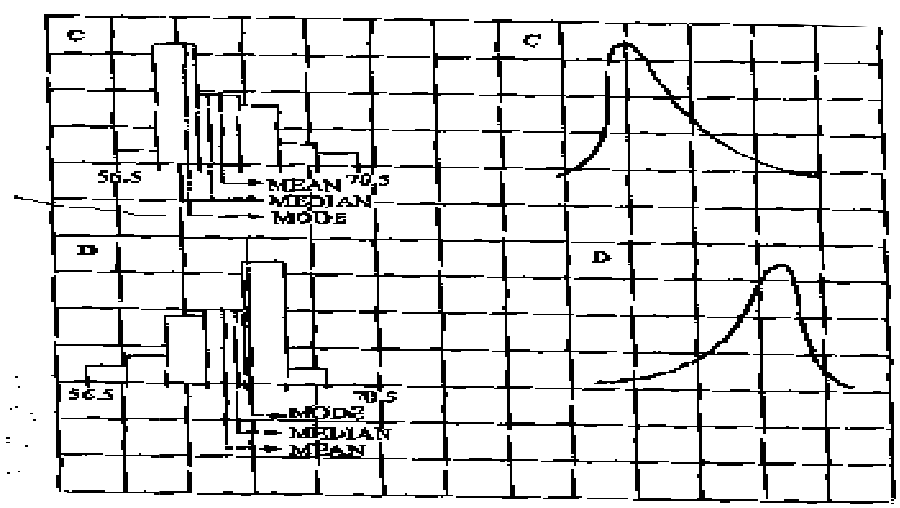
उपरोक्त दिये गये चार आवृति वितरण एवं संगत चित्र का अवलोकन करने पर हमे निम्नलिखित रोचक बातें पता चलती हैं।

वक्र के बनावट, आवृति आयत चित्र एवं दोनों श्रेणियां, A और B में पदों के बराबर दूरी पर वितरत व अवस्थित होना श्रेणी के सममितता को दर्शाता है। यदि इन वक्रों या आवृति आयत वक्र के माध्य के विन्दू से मोड़े तो दोनों हीं हिस्सा एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेगी। श्रृंखला B में, केन्द्रीय प्रवृति के सभी माप एक हीं तरह या एक हीं अर्थात माध्य, माध्यिका एवं बहुलक का मूल्य 63.5 है। श्रेणी A में, जो एक द्विपद्व वितरण के स्वभाव को चरित्रार्थ करता है, के माध्य एवं माध्यिका के मूल्य एक अर्थात् 63.5 है।

श्रृंखलाएं C एवं D असममितता वाले स्वभाव के हैं। यह आवृति आयत चित्र एवं वक्र के बनावट से साक्ष्य मिलता है और माध्यिका के बराबर दूरी से पदों की संख्या बराबर नहीं है। इन वितरणों के तीनों केन्द्रीय प्रवृति के मापों के मूल्य भिन्न–2 आकार के हैं।

वितरण C एवं D में असममितता के अन्तर वाले विन्दूओं का ध्यान पूर्वक अध्ययन किया जाना चाहिए। वितरण C में, जहां माध्य का मूल्य 63.5, माध्यिका के मूल्य 63 से अधिक है और बहुलक का मूल्य 61.9 है, फलतः वक्र और दाहिने ओर खींची हुई प्रतीत होता है। आवृति वितरण D में, बहुलक मूल्य 65.1, माध्यिका के मूल्य 64 एवं माध्य के मूल्य 63.5 से अधिक है। फलतः चित्र में वक्र बायें के ओर ज्यादा खींचा हुआ प्रतीत होता है।

दूसरे शब्दों में, यदि श्रेणी में चरम विचलन उच्च मूल्य के तरफ हो तब वक्र की पूंछ दाहिनी ओर अधिक लंबी होगी जो रेखा को माध्यिका मूल्य के स्थान से माध्य को भी बहुलक के तरफ खींचती हुई प्रतीत होगी। यदि, न्यूनतम विचरण, न्यूनतम मूल्यों के ओर होगी तब पूंछ की लम्बाई बांयी ओर अधिक होगी और माध्यिका एवं माध्य, बहुलक से बायें तरफ ज्यादा खींची हुई अवस्थित होगी।



चित्रः वितरण C एवं D के लिए आवृति आयत चित्र एवं वक्र

सममितीय आवृति वितरण में न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक माध्यिका से बिल्कुल बराबर दूरी पर अवस्थित होते हैं, इसलिए दशमक एवं शत्मक में भी यहीं लक्षण पाये जाते हैं। इसका मतलब यह हुआं कि असममिती प्रकार का हो तब उच्चतम एवं न्यूनतम चतुर्थक माध्यिका से असामान दूरी पर अवस्थित होती है।

उपरोक्त विवेचना से, हम विषमता की जांच के सारांश निम्न रूप से रेखांकित कर सकते हैं:

1. जब आवृति वितरण के रेखाचित्र, सममितता वक्र को प्रदर्शित नहीं करता है।
2. जब केन्द्रीय प्रवृति की तीनों माप के मान एक दूसरे से भिन्न हों।
3. जब माध्यिका से धनात्मक विचलनों का योग एवं ऋणात्मक विचलनों के योग का मूल्य एक दूसरे के बराबर न हो।
4. जब माध्यिका से चतुर्थकों की दूरी असामान हो।
5. जब दशमक एवं शतमक के संगत जोड़े माध्यिका से बराबर दूरी पर अवस्थित नहीं हो।

विषमता के माप

उपरोक्त जांच के आधार पर निम्नलिखित विषमता के माप को विकसित किया गया है:

1. केन्द्रीय प्रवृति के तीनों मापों के बीच संबंध— प्रायः इसे कार्ल पीयरसन का विषमता माप के नाम से जानते हैं।
2. विषमता के चतुर्थक माप— इसे बॉवले का विषमता के माप के नाम से जानते हैं।
3. विषमता के शतमक् माप— इस माप को केली के विषमता के माप के नाम से जानते हैं।
4. आघूर्णों पर आधारित विषमता के माप।

उपरोक्त सभी माप हमे विषमता के दोनों चीजें दिशा एवं हद को बताता है।

कार्ल पीर्यसन का विषमता माप

यह पहले हीं दिखाया गया है कि पूर्ण सममितीय वितरण के स्थिति में केन्द्रीय प्रवृति की सभी माप जैसे, माध्य, माध्यिका एवं बहुलक सभी एक विन्दू पर अवस्थित होते हैं। जैसे हीं कोई वितरण सममितीता से दूर खींचती जाती है तो माध्य एवं बहुलक के बीच अन्तर बढ़ता जाता है। कार्ल पीयर्सन ने इनके बीच अन्तर को हीं विषमता के माप के लिए सुझाव दिया है। अतः विषमता के निरपेक्ष माप = माध्य–बहुलक। इस सूत्र के (+) या (-) चिन्ह् हीं सिद्ध करता है कि विषमता दिशा किस तरफ है। यदि इसका मूल्य धनात्मक हो, तब चरम विचलन वितरण के उच्च मूल्यों के तरफ होती हैं। यदि इसका मान ऋणात्मक है, तब यह प्रदर्शित करता है कि चरम विचरण न्यूनतम मूल्यों के ओर झुका हुआ होता है।

पीर्यसन का विषमता गुणांक

पिछले गद्यांश में माध्य एवं बहुलक में अन्तर को विषमता के निरपेक्ष माप के रूप में बताया गया है। एक निरपेक्ष विषमता के माप का प्रयोग दो या दो से अधिक वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए प्रयोग नहीं किया जा सकता है इसके लिए निम्नलिखित कारण हैं:

1. दो श्रेणीयों में, विषमता के माप के सामान आकार होने के बावजूद, उसके अलग–2 महत्व हो सकते है क्योंकि एक वितरण के अल्प विचरण एवं दूसरे वितरण जिसमें अधिक विचरण हो, दोनो भिन्न हैं।

2. दो विभिन्न श्रेणियों के मापने की इकाई एक हीं हो सकती है।

विषमता के माप को उचित बनाने के लिए, यह आवश्यक है कि जो भी विचरण से संबंधित रूकावटें एवं माप की इकाई को दूर करना है। ऐसा हम माध्य एवं बहुलक के अन्तर को प्रमाप विचलन से भाग देकर किया जा सकता है। प्राप्त परिणाम या मान हीं पीर्यसन का विषमता गुणांक कहलाता है। इस प्रकार, पीर्यसन का विषमता गुणांक का सूत्र है,

$$\text{विषमता का गुणांक} = \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\text{Standard Deviation}}$$

चूंकि, हम देख चुकें है कि मध्यम रूप से वितरित श्रेणी इस प्रकार है कि,

बहुलक = माध्य–3 (माध्य–माध्यिका)

उपरोक्त सूत्र में से हम बहुलक के मूल्य को हटा देगें ता हमे निम्न सूत्र प्राप्त होगें,

$$\text{विषमता का गुणांक} = \frac{\text{बहुलक – माध्य–3 (माध्य –माध्यिका)}}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

$$= \frac{\text{बहुलक –माध्य +3 (माध्य – माध्यिका)}}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

$$= \frac{\text{3 (माध्य – माध्यिका)}}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

सूत्र में बहुलक को हटा कर माध्यिका को रखना आवश्यक होता है क्योंकि कई बार इसे ज्ञात करना कठिन है और काफी हद तक समूहीकरण त्रुटि से प्रभावित होता है जो एक अवास्तविक उतर प्रस्तुत करता है।

उदाहरण 7.9: निम्नलिखित आंकड़ों से विषमता की गणना करें:

उंचाई (ईचं में)	58	59	60	61	62	63	64	65
व्यक्तियों की संख्या	10	18	30	42	35	28	16	8

हलः उंचाई एक सतत् चर है अतः 58″ के राशि को निश्चित रूप से वर्ग अन्तराल 57.5″–58.5″ के रूप में एवं 59″ को 58.5″–59.5″ तथा अन्य को भी इसी प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

उंचाई (ईचं में)	व्यक्तियों की संख्या (f)	X^1	X^2 from 61	X^3	संचयी आवृति
58	10	-3	-30	90	10
59	18	-2	-36	72	28
59.5”-60-60.5”	30	-1	-30	30	58
60.5”-61-61.5”	42	0	0	0	100

62	35	1	35	35	135
62.5”-63-63.5”	28	2	56	112	163
63.5”-64-64.5”	16	3	48	144	179
65	8	4	32	128	187
	187		171	611	
			+75		

माध्य $= 61+\frac{75}{187} = 61.4.$ माध्यिका $= 60.5 +\frac{35}{65} = 61.4.$

$$\sigma = \sqrt{\frac{611}{187}-\left[\frac{75}{187}\right]^2} = \sqrt{3.27-0.16} = \sqrt{3.11} = 1.76$$

विषमता = 61.4-61.04 = 0.36 इंच।

विषमता के गुणांक $= \frac{0.36}{1.76} = 0.205$

साथ हीं माध्यिका की भी गणना करेगें,

माध्यिका = $\frac{187}{2}$वां पद का आकार = 93.5वां पद मूल्य

विषमाता = $60.5+\frac{1\times 35.5}{42} + 3(0.05) = 0.15$ इंच।

विषमता = 3(61.4-61.35) = 3(0.05) = 0.15 इंच।

विषमता के गुणांक $= \frac{0.15}{1.76} = 0.09$

दोनों हीं विषमता के गुणांक का मूल्य अलग–2 है, इसका मुख्य कारण है कि बहुलक के गणना करने में निहित कठिनाई।

बॉउले के (चतुर्थक) विषमता माप

उपरोक्त विषमता के माप के दोनों विधियों, का अध्ययन पूरे श्रृंखला के विशलेषण में ध्यान रखना होगा। लेकिन, विषमता के निरपेक्ष के साथ–साथ सापेक्ष माप को भी श्रृंखला से हीं प्राप्त किया जा सकता है। अतएव, न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक को हीं इसके माप के लिए सामान्यतया प्रयोग किया जाता है। सममितता श्रृंखला में, दोनों हीं चतुर्थक, न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक, माध्यिका मूल्य से बिल्कूल बराबर दूरी पर अवस्थित होती है, अर्थात्,

माध्यिका – Q_1 = Q_3 – माध्यिका

दूसरे शब्दों में, माध्यिका का मूल्य Q_1 एवं Q_3 के माध्य के मूल्य के बराबर होता है। विषम आवृति वाले श्रेणियों में, चतुर्थक माध्यिका से सामान दूरी पर अवस्थित नहीं होती है बल्कि, पूरे असममितता वाले श्रृंखला में चरम सीमा के

ओर अवस्थित होते हैं। बॉउले ने उपरोक्त तथ्यों के आधार पर विषमता के माप के निम्नलिखित सूत्रों का सूझाव दिया है,

$$\text{निरपेक्ष } SK = (Q_3 - Me) - (Me - Q_1)$$
$$= Q_3 + Q_2 - 2\,Me$$

यदि श्रेणी में चतुर्थक विचलन माध्यिका से बराबर या सामान दूरी पर अवस्थित होते हैं, अर्थात् $(Q_3 - Md) = (Md - Q_,)$, तब SK = 0। यदि Q_1 की माध्यिका से दूरी, Q_3 के माध्यिका से दूरी के तुलना में अधिक हो, तब ऋणात्मक विषमता पाई जाती है। यदि स्थिति इसके विपरीत हो, तब यह धनात्मक विषमता होगी।

यदि मापक इकाई किसी दूसरे इकाई में होती है तो इसे तुलना योग्य बनाने के लिए निरपेक्ष माप को सापेक्ष माप में परिवर्तित करना आवश्यक हो जाता है। हम अर्न्तचतुर्थक विस्तार को हर के रूप में व्यंजक में रखकर विषमता के गुणांक निम्न रूप से प्राप्त कर सकते हैं,

$$\text{सापेक्षिक विषमता माप } (SK) = \frac{Q_3 + Q_3 - 2Md}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{(Q_3 - Md) - (Md - Q_1)}{(Q_3 - Md) - (Md - Q_1)}$$

यदि श्रृंखला के माध्यिका एवं न्यूनतम चतुर्थक मूल्य एक दूसरे के बराबर हो, तब विषमता का मूल्य (+1) के बराबर है। यदि माध्यिका एवं उच्चतम चतुर्थक मूल्य एक दूसरे के बराबर हो, तब विषमता का मूल्य (−1) के बराबर है।

विषमता के इस माप को कठोरता से परिभाषित किया जाता है एवं आसानी से गणना योग्य होता है। आगे, ऐसे विषमता के माप का लाभ है कि इसका मूल्य (+1) से (−1) के बीच होता है जिसका परिणाम बहुत से आवशकताओं के प्रर्याप्त संवेदनशीलता को पूरा करता है। इस माप की आलोचना का मुख्य कारण है कि श्रृंखला के सभी पद मूल्यों को गणना में सम्मिलित नहीं किया जाता है जिसके कारण चरम भी वितरण को प्रभावित कर सकता है।

उदाहरण 7.10: उदाहरण 7.9 में दिये गये सारणी का प्रयोग करके चतुर्थक के मदद से विषमता का गुणांक की गणना करें।

हलः उदाहरण 7.9 के सारणी से हमें प्राप्त है,

$$Q_1 = \frac{N}{4}^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार} = \left[\frac{187}{4}\right] = 46.75^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार}$$

$$= 59.5 + \frac{18.75}{30}$$

$$= 59.5 + 0.63 = 60.13$$

$$Q_3 = \frac{3N}{}^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार } \left[= \frac{3\times187}{} = 140.25^{\text{वां}} \right] \text{ पद मूल्य का आकार}$$

4 4

$= 62.5 + \frac{5.25}{28}$

= 62.5+0.19 = 62.69

विषमता = 62.69+ 60.13-2(61.35) = 0.12 (चूकिं, $SK = Q_3 + Q_2 - 2\ Me$)

विषमता के गुणांक = $\frac{0.12}{2.56}$ = 0.047

केली का (शतमक्) विषमता माप

बॉउले के विषमता माप में मौजूद त्रुटि को दूर करने के लिए, जिसमें चरम मूल्य सम्मिलित नहीं होते हैं। इस माप को और बृहत करते हुए दो शतमक् का प्रयोग करते हैं जो माध्यिका से सामान दूरी पर अवस्थित होते हैं। केली ने विषमता की माप के लिए निम्नलिखित सूत्र का सुझाव दिया हैः

$$SK = P_{50} - \frac{P_{90} + P_{10}}{2}$$

or $$SK = D_5 - \frac{D9 + D1}{2}$$

यद्यपि, इस माप का व्यवहारिक प्रयोग तो है हीं साथ–2 सैद्धान्तिक रूप से भी काफी महत्वपूर्ण प्रतीत होती है।

उदाहरण 7.11: निम्नलिखित संमंक से कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक की गणना कीजिए।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0 से अधिक	150	50 से अधिक	70
10	140	60	30
20	100	70	14
30	80	80	0
40	80		

हलः सर्व प्रथम हमे निम्नलिखित प्रकार से आवृति सारणी का निर्माण करते हैं:

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	मध्य विन्दू	$\overline{X}$ =(X-A)/10 (A=35)	$F(x^1)$	$F(x^2)$	संचययी आवृति (cf)
0-10	10	5	-3	-30	90	10
10-20	40	15	-2	-80	160	50
20-30	20	25	-1	-20	20	70

				-130		
30-40	0	35	0	0	0	70
40-50	10	45	1	10	10	80
50-60	40	55	2	80	160	120
60-70	16	65	3	48	144	136
70-80	14	75	4	56	224	150
	150			194	808	
				+64		

उपरोक्त सारणी से हमे ज्ञात है, $\sum f = 150$, $\sum F(x^1) = 64$ और $\sum F(x^2) = 808$

चूंकि, वितरण एक द्विपद प्रकार का है इसलिए कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए हमें माध्य, माध्यिका एवं प्रमाप विचलन की गणना करना होगा।

$$\overline{X} = 35 + \frac{64}{150} \times 10 = 35 + 4.27 = 39.27$$

माध्यिका $= \frac{150}{2}$ वां, पद मूल्य का आकार

$$= 40 + \frac{10 \times 5}{10} = 40$$

प्रमाप विचलन, $(\sigma) = i \times \sqrt{\frac{\sum f(x^{`2})}{N} - \left[\frac{\sum f(X`)}{N}\right]^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{808}{150} - \left[\frac{64}{150}\right]^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{5.387 - 0.182}$$

$$= 10 \times 2.28 = 22.8$$

विषमता का माप = $\frac{3(X\text{-माध्यिका})}{\sigma} = \frac{3(39.27-45)}{22.8}$

$$= \frac{3(-5.73)}{22.8} = \frac{-17.19}{22.8} = -0.75$$

उदाहरण 7.12: निम्नलिखित संमकों से चतुर्थक विचलन एवं विषमता गुणांक की गणना कीजिए।

पद मूल्य का आकार	:	5–7	8–10	11–13	14–16	17–16
आवृति	:	14	24	38	20	4

हलः सर्वप्रथम हमें निम्नलिखित आवृति सारणी का निर्माण करना चाहिएः

वर्ग आकार	आवृति	संचयी आवृति
4.5-7.5	14	14
7.5-10.5	24	38
10.5-13.5	38	76
13.5-16.5	20	96
16.5-19.5	4	100

उपरोक्त सारणी से दिया है,

$$Q_1 = 7.5 + \frac{3x37}{24} = 8.87$$

$$Q_3 = 10.5 + \frac{3x37}{38} = 10.5 + \frac{111}{38} = 10.5 + 2.92 = 13.42$$

माध्यिका = $10.5 + \frac{3x12}{38} = 10.5 + \frac{36}{38} = 10.5 + 0.947 = 11.447$

प्रमाप विचलन = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13.42 - 8.87}{2} = \frac{4.55}{2} = 2.275$

विषमता = $\frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{13.42 + 8.87 - 22.89}{13.42 - 8.87}$$

$$= \frac{-0.6}{4.55} = -0.13$$

उदाहरण 7.13 एक दिये गये आवृति वितरण से निम्नलिखित परिणाम दिये गये हैं:

माध्य = 45.00; माध्यिका = 48.00

विषमता गुणांक = - 0.4

आपसे आग्रह है कि प्रमाप विचलन की गणना करें।

हलः प्रमाप विचलन की गणन निम्न रूप से किया जा सकता है,

विषमता = $\frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\sigma}$

$$-0.4 = \frac{3(45-48)}{o};$$

-0.4σ= -9; $\sigma = \frac{9}{0.4} = 22.5$

उदाहरण 7.14: एक वितरण के लिए कार्ल पीयर्सन विषमता गुणांक मूल्य है। इसका प्रमाप विचलन 6.5 एवं माध्य 29.6 हैं। वितरण के लिए बहुलक एवं माध्यिका की गणना करें।

हलः हम दिये गये वितरण के लिए बहुलक एवं माध्यिका की गणना के लिए निम्न रूप से किया जा सकता है:

$$\text{विषमता गुणांक} = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\sigma}$$

$$0.32 = \frac{29.6 - \text{बहुलक}}{6.5}$$

$$6.5 \times 0.32 = 29.6\ \text{बहुलक}$$

$$\text{बहुलक} = 29.6 - 2.08 = 27.52$$

$$\text{विषमता गुणांक} = \frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\sigma}$$

$$0.32 = \frac{3(29.6 - \text{माध्यिका})}{6.5}$$

$$6.5 \text{x} 0.32 = 88.8 - 3\ \text{माध्यिका}$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{88.8 - 2.08}{3} = 28.91$$

उदाहरण 7.15 आपको एक उद्योग की औद्योगिक विवाद निपपटारे की पूर्व एवं उपरान्त की स्थिति दी गई है। श्रमिकों एवं प्रबंधकों के दृष्टि से होने वाले लाभ एवं हानि की स्थिति पर टिप्पणी करें।

मदें	पूर्व	उपरान्त
श्रमिकों की संख्या	2400	2350
औसत मजदूरी	45.5	47.5
माध्यिका मजदूरी	49.0	45.0
प्रमाप विचलन	12	10

हलः उपरोक्त संमंकों के आधार निम्नलिखित बातें सामने आते हैं:

1. **रोजगारः** चूंकि कार्य में लगे श्रमिकों की संख्या निपटारे के उपरान्त, पूर्व के तुलना में कम है जो यह इंगित करता है कि कुछ श्रमिक पहले के तुलना में बेरोजगार हो गये हैं। यह श्रमिकों के दृष्टि या हित के बिल्कूल हीं विरूद्ध है।
2. **मजदूरी :** निपटारे के उपरान्त कुल मजदूरी में होने वाला व्यय 2350 × 47.5 = 1,11,625.0 रूपये है; विवाद निपटारे के पूर्व मजदूरी मद में होने वाला व्यय 2400 × 45.5 = 1, 09,200.0 रूपये हैं।
   इसका आशय है कि श्रमिक गण पूरे समूह के दृष्टि से निपटारे के उपरान्त, पूर्व की स्थिति से बेहतर स्थिति में हैं और उधर श्रमिकों की उत्पादकता में कमी होने के कारण कुल उत्पादन कम हो गया है जो प्रबंधक के लिए गलत संकेत है।
3. **मजदूरी संरचना में सामानताः** निपटारे के पूर्व एवं उपरान्त श्रमिको मजदूरी में सामानत के स्तर या रूप को जानने के लिए हमें दोनों अवधियों में औसत एवं मजदूरी प्रमाप विचलनों के विचलन गुणांक की तुलना करके पता लगा सकते हैं।

निपटारे के पूर्व, विचरण गुणांक = $\frac{12 \times 100}{45.5}$ = 26.4 %

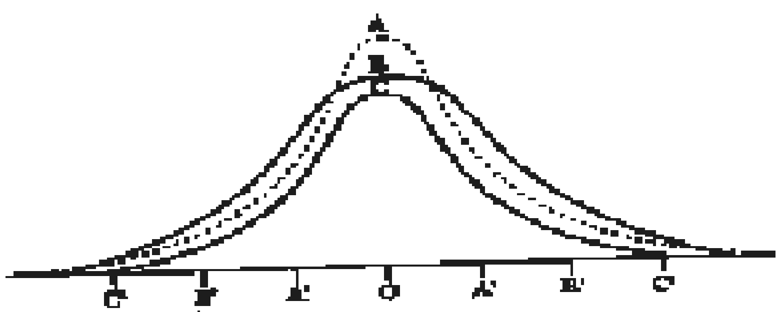
निपटारे के उपरान्त, विचरण गुणांका = $\frac{10 \times 100}{47.5}$ = 21.05%

उपरोक्त विचरण गुणांकों से स्पष्ट होता है कि तुलनात्मक दृष्टि से श्रमिकों को मिलने वाली में विषमता अल्प है। ऐसी स्थिति श्रमिकों एवं प्रबंधन दोनों के लिए लाभकारी एवं अच्छी है।

4. **वेतन संरचना का स्वरूपः** यदि औसत एवं माध्यिका मजदूरी की तुलना करें तो हम पाते हैं की पूर्व के स्थिति में 50 प्रतिशत श्रमिक औसत से अधिक मजदूरी पाते थे अर्थात 45.5 रूपये। लेकिन विवाद निपटारे के बाद 50 प्रतिशत से अधिक श्रमिकों को औसत मजदूरी 45.5 रूपये से कम मजदूरी मिलता है। इसका मतलब यह हुआ कि विवादों का निपटारा सही तरीके से नहीं हुआ या फिर निपटारों से सभी श्रमिकों को लाभ नहीं मिल रहा है। केवल 50 प्रतिशत श्रमिक हीं हैं जिन्हें बढ़े हुए मजदूरी राशि का लाभ मिल पा रहा है।

7.6 ककुदता/ पृथुशीर्षत्व

हम लोगों ने एक आवृति वितरण को उसके केन्द्रीय प्रवृति के माप, परिवर्तनशीलता एवं असममितता के गुण के अनुसार परिभाषित या उसकी विशेषता को बताते रहे हैं। ऐसा हीं आवृति वितरण की एक और गुण या विशेषता है जिसे आवृति के नुकीलापन के विशेषता के रूप में जानते हैं। नीचे दिये गये चित्र को ध्यान से देखिये जिसमें तीन A, B और C सममितीय वक्र दिये गये हैं।



चित्रः A, B और C सममितीय वक्र

A = कूट ककुदी, B = मध्य ककुदी, C= चर्पट ककुदी

वर्ग की उतलपन गुण से तीनों हीं वक्र में काफी विषमताएं है, वितरण के इस गुण को हीं कार्ल पीयर्सन ने ककुदता या पृथुशीर्षत्व का नाम दिया है। ककुदता दिये गये वक्र में से सामान्य वितरण वाले वक्र के तुलना में कौन से वक्र की उपरी भाग नुकीला या चर्पट या मध्य नुकीला है, इसी का माप करता है। यदि एक वितरण में कोई वक्र प्रसामान्य वक्र के सापेक्ष, अपेक्षाकृत चपटा है

तो इसे हीं ककुदता कहते हैं। जब कोई वक्र या बहुभुज अपेक्षाकृत ज्यादा नुकीला हो तो उसे कुट ककुदी कहते हैं।

कोई विषम वक्र जिसका प्रसामान्य वक्र या उतल पन की कोटि सामान्य वक्र की तरह हो तो उसे कार्ल पीयर्सन ने मध्य ककुदी का नाम दिया है। उपरोक्त चित्र में वक्र B एक मध्य ककुदी वक्र है। यदि एक वितरण का माध्य से प्रमाप विचलन वक्र के केन्द्र की ओर तथा अन्य मूल्य उसके पूंछ के तरफ चलन करता हो तो सामान्यता यह एक नुकीला या कुट की भांति प्रतीत होती है, जिसे कुट ककुदी कहा जाता है। जैसा कि उपरोक्त चित्र में वक्र A कुट ककुदी को प्रदर्शित करते हैं। वहीं दूसरी तरफ यदि कुछ स्थितियों में श्रेणी के बहुलक के इर्द–गिर्द कुछ पद मूल्य हों और दोनो तरफ आधे भाग में शेष पद मूल्य वितरित हो तब ऐसे वक्र को चर्पट वक्र कहते हैं, जैसे कि उपरोक्त चित्र में वक्र C को प्रदर्शित किया गया है।

ककुदता की माप निम्न रूप से किया जा सकता है,

$$\beta_2 = \alpha_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \text{ or } \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

सामान्य वक्र में, β_2 तीन के बराबर होते हैं। यदि β_2 का मान तीन से ज्यादा तब वक्र अधिक नुकीला होगी, यदि यह तीन से कम हो तब यह वक्र सामान्य वक्र के तुलना में ज्यादा चर्पट होगी।

उपरोक्त सूत्र को निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$K + \acute{\alpha}_4 - 3 = \frac{\mu 4}{\mu^4} - 3$$

यदि K कोई धनात्मक संख्या है, तब इसका अर्थ हुआ कि वैसे पद जिनका मान माध्य के समीप हैं उनकी संख्या सामान्य वक्र वाले वितरण में अधिक है। यदि K एक ऋणात्मक संख्या है, तब वक्र सामान्य वितरण वाली वक्र के तुलना में उपरी भाग ज्यादा चर्पट होगा।

विषमता एवं ककुदता के माप को भी ग्रीक अक्षर, गामा (γ),

$$\gamma_1 = \beta_1 = \frac{\mu 4}{\sigma 3} = \alpha 3$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu^4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\beta^2 - 3\mu_2^2}{\mu_2^2}$$

यहां γ_1 एवं γ_2 विषमता तथा पृथुशीर्षत्व के क्रमशः माप हैं। यदि γ_1 का मान 0 से अधिक हो तब इसका परिणाम होगा कि वितरण में धनात्मक विषमता विद्यमान हैं; यदि γ_1 का मान 0 से कम हो तब वितरण में ऋणात्मक विषमता के उपस्थिति का लक्षण है एवं γ_1 के 0 के बराबर होने पर किसी प्रकार के विषमता के अनुपस्थिति की स्थिति को प्रदर्शित करेगें।

इसी प्रकार, यदि वक्र कुट ककुदी हो, तब γ_2 का मान धनात्मक होगा; यदि γ_2 का मान ऋणात्मक हो तब वितरण चर्पट ककुदी प्रकार की होगी और मध्य ककुदी के स्थिति में γ_2 का मूल्य बिल्कुल शून्य के बराबर होगा।

उदाहरण 7.16 निम्नलिखित आवृति वितरण से प्रथम चार आघूर्णों, β_1 एवं β_2 की गणना करें।

वर्ग आकार	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
आवृति	1	4	8	19	35	20	7	5	1

हलः माना की कल्पित माध्य A = 32 है,

वर्ग आकार	Multiple	आवृति F	(X^1)	$F(X^1)$	$F(X^2)$	$F(X^3)$	$F(X^4)$	संचयी आवृति
10-14	12	1	-4	-4	16	-64	256	1
15-19	17	4	-3	-12	36	-108	324	5
20-24	22	8	-2	-16	32	-64	128	13
25-29	27	19	-1	-19	19	-19	19	32
30-34	32	35	0	0	0	0	0	67
35-39	37	20	1	20	20	20	20	87
40-44	42	7	2	14	28	56	112	94
45-49	47	5	3	15	45	135	405	99
50-54	52	1	4	4	16	64	256	100
कुल		$\Sigma f = 100$		$\Sigma f(X^1) = +2$	$\Sigma fX`^2 = +212$	$\Sigma fX`^3 = +20$	$\Sigma fX`^4 = +1520$	

$$V_1 = \frac{\Sigma fX`x\,(C1)}{\Sigma f} = \frac{2 \times 5}{100} = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$V_2 = \frac{\Sigma fX`^2 x\,(C1)^2}{\Sigma f} = \frac{212 \times 5^2}{100} = \frac{212 \times 25}{100} = 53$$

$$V_3 = \frac{\Sigma fX`^3 x\,(C1)^3}{\Sigma f} = \frac{20 \times 5^3}{100} = \frac{20 \times 125}{100} = 25$$

$$V_4 = \frac{\Sigma fX`^4 x\,(C1)^4}{\Sigma f} = \frac{1520 \times 5^4}{100} = \frac{1520 \times 625}{100} = 9500$$

$\mu_1 = V_1 - V_1 = 0$

$\mu_2 = V_2 – V^2_1 = 53- (0.1)^2 =53-0.1 = 52.99$

$\mu_3 = V_3 – 3V_2\, V_1 + V^3_1$

$=25 -3 \times 53 \times (0.1) +2(0.1)^2 =25-15.9+0.002=9.102$

$\mu_4 = V_4 - 4V_3 V_1 + 6 V_2 V^3_1 - 3 V^4_1$

$= 9500 - 4 \times 25 \times (0.1) + 6 \times 53 \times (0.1)^2 - 3(0.1)^2$

$= 9500 - 10 + 3.18 - 0.0003 = 9493.1797$ or 9493.18

Corrected $\mu_2 = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$ (जहां, h वर्ग अन्तराल है।)

$= 52.99 - \frac{5^2}{12} = 52.99 - 22.083 = 50.91$

Corrected $\mu_3 = \mu_3 = 9.1$

Corrected $\mu_4 = \mu_4 - \frac{h^2}{2}\mu_4 + \frac{7h^4}{240}$

$= 9493.18 - \frac{25}{12} \times 52.99 \times \frac{7x(5)^4}{240}$

$= 9493.18 - 662.375 + 18.23 - 8849.03$

$\beta_1 = \frac{\mu^2_3}{\mu^3_2} = \frac{(9.1)^2}{(50.91)^3} = 0.000627$

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2_2} = \frac{88849.03}{(50.91)^3} = 3.414$

$y_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{0.000627} = 0.25$

$y_2 = \beta_2 - 3 = 3.414 - 3 = 0.414$

उदाहरण 7.17 एक वितरण के प्रथम चार केन्द्रीय परिघात 0, 2.5, 0.7, एवं 18.75 है। वितरण में विषमता एवं ककुदता की जांच करें।

हलः किसी सममितीय वितरण में विषमता को मापने के लिए γ_1 या α_3 का प्रयोग किया जाता है जिसका मान शून्य के बराबर होता है। चूंकि दिये गये समस्या में इसका मूल्य 0.7 के बराबर हैं, फलतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि वितरण सममितीय वितरित नहीं है। लेकिन, विषमता के स्तर एवं दिशा को पता लगाने के लिए निम्नलिखित स्थिरांकों का प्रयोग करते हैं,

$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\alpha^3}$

$\alpha^3 = \sqrt{\frac{\mu^2_3}{\mu^3_2}} = \sqrt{\frac{(0.07)^2}{(2.5)^3}} = \sqrt{0.031} = 0.18$

चूंकि, $\alpha_3 = 0.18$ है, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वितरण सममितीय नहीं हैं लेकिन धनात्मक विषमता त्र 0ण्18 विद्यमान है।

ककुदता की जांच के लिए β_2 का प्रयोग करते हैं। सामान्य स्थिति में β_2 का मान तीन के बराबर होता हैं। यदि इसका मान तीन से अधिक हो, तब वक्र

की उपरी भाग ज्यादा नुकीला होगा, यदि इसका मान तीन से कम हो तब वक्र का उपरी भाग ज्याद चर्पट होगा।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\alpha^4} = \frac{\mu_4}{\alpha^4} = \frac{18.75}{(2.5)^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3$$

चूंकि, $\beta_1 = 3$ है अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वक्र मध्य ककुदी है।

7.7 सारांश

इस इकाई में महत्वपूर्ण परिभाषाएं एवं अवधारणाएं जिनके बारे में अध्ययन किया है उसका पुनरावृत करेगें। लॉरेंज वक्र औसत से पदों के विचलनों को मापने का रेखाचित्रीय विधि है। यह एक प्रतिशत संचयी आवृति वक्र है। आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहां 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र विन्दू पर घूमने की प्रवृति या क्षमता कितनी है। एक आवृति वितरण में माध्य के सापेक्ष आघूर्ण का विशेष महत्व है। माध्य से लिए गये वितरण के प्रत्येक पद से विचलनों का बीजगणितीय योग 0 के बराबर होता है। 0 को छोड़कर अन्य सभी विषम आघूर्णों का प्रयोग असममितता के माप के लिए किया जा सकता है।

यदि कोई आवृति वितरण सममितीय नहीं है, तब यह विषमता कहलाती है। विषमता के माप हैं के अन्तर्गत कार्ल पीयर्सन के विषमता माप, विषमता के चतुर्थक माप, विषमता के शतमक् माप एवं परिघातों पर आधारित विषमता माप को सम्मिलित किया जाता हैं। किसी वितरण के माध्य एवं बहुलक के बीच अन्तर को विषमता का निरपेक्ष माप कहते हैं। कार्ल पीयर्सन विधि में, श्रृंखला के सभी पद मूल्यों को सम्मिलित किया जाता है जबकि, बॉउले के विधियों में चरम मूल्यों या पदों को नकार या सम्मिलित नहीं करते हैं। ककुदता की माप यह प्रदर्शित करता है कि किसी वितरण का वक्र सामान्य वक्र के अपेक्षा उपर कितना नुकीला या उपर कितना चर्पट है।

7.8 शब्दावली

- **प्रसरणः** प्रमाप विचलन के वर्ग को हीं प्रसरण कहते हैं, इसे σ^2 के द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जिसकी विशेषता वहीं है जो प्रमाप विचलन की है।
- **लॉरेंज वक्रः** यह एक रेखाचित्र विधि है जो औसत से पदों के विचलनों के माप को प्रस्तुत करता है।
- **विषमताः** किसी आवृति वितरण के असममितता को वास्तविक मूल्य के दैव चर माप है।
- **ककुदताः** किसी वितरण के कुट या नुकीलापन की माप है।

7.9 बोध प्रश्न

(A) खाली स्थानों को भरें

1. ———————— प्रमाप विचलन का वर्ग है।

2. ———————— एक रेखाचित्र विधि है जो औसत से पदों के विचलनों के माप को प्रस्तुत करता है।
3. माध्य से लिए गये वितरण के प्रत्येक पद से विचलनों का बीजगणितीय योग ———— होता है।
4. जब माध्यों से लिए गये विचलनों के घात कोई ———————— संख्या (एक को छोड़कर) हो और ऋणात्मक विचलनों का योग धनात्मक विचलनों के योग के बराबर हो, तब श्रेणियां सममितीय कहलायेगी।

(B) सत्य या असत्य।

1. प्रसरण एवं प्रमाप विचलन के विशेषताएं अलग–2 होती है।
2. लॉरेंज वक्र की रचना करने में, विभिन्न समूहों के चरों को प्रतिशत में प्ररिवर्तित किया जाना चाहिए।
3. आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहां 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र विन्दू पर घूमने की प्रवृति या क्षमता कितनी है।
4. विषम परिघातों (एक को छोड़कर) का प्रयोग सममितता के माप के लिये किया जा सकता है।
5. जब कोई आवृति वितरण सममितीय हो, तब इसे विषमता कहा जाता है।
6. जैसे हीं एक वितरण से सममितता प्रतिस्थापित होती हैं, वितरण का माध्य, माध्यिका एवं बहूलक भी प्रतिस्थापित होती है।

7.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A)

1. प्रसरण, 2. लॉरेंज वक्र, 3. 0, 4. विषम, 5. सामान दूरी, 6. ककुदता।

(B) 1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. असत्य, 6. सत्य।

7.11 स्वपरख प्रश्न

1. विचरण के गुणांक के महत्व को बताएं।
2. लॉरेंज वक्र के निर्माण में सम्मिलित चरणों के बताएं।
3. केन्द्र या मूल विन्दू के सापेक्ष विभिन्न आघूर्णो को परिभाषित करें।
4. किसी वितरण में माध्य के सापेक्ष परिघातों का विशेष महत्व है। वर्णन कीजिए।
5. विषमता के विभिन्न मापों को सूचीबद्ध करें।
6. केली के विषमता माप का उल्लेख करें।
7. वर्णन करें कि ककुदता कैसे किसी वितरण के वक्र को मापता है।

7.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics, Goon, Guptha and Dasguptha, World Press Limited, Calcutta.
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.
5. www.wikipedia.com

*****

इकाई 8 सहसंबंध विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- विभिन्न प्रकार के सहसंबंधों के मध्य अन्तर स्पष्ट कर सकें।
- साधारण, आंशिक एवं बहुगुणी सहसंबंध तथा शोध में उनके प्रयोग का वर्णन कर सकें।

8.1 प्रस्तावना

प्रायकिता सिद्धान्त एवं साख्यिकी में, सहसंबंध को सहसंबंध गुणांक कहते हैं जो दो दैव चरों के बीच रैखिक सहसंबंध के दिशा एवं क्षमता व शक्ति को प्रदर्शित करता है। सामान्य सांख्यिकी के प्रयोग में, सहसंबंध का अर्थ है कि दो चरों में स्वतंत्र रूप से प्रतिस्थापित होना। सहसंबंध दो चरों के बीच संबंध (धनात्मक या ऋणात्मक, पूर्ण) को मापता या बताता है।

8.2 सहसंबंध

जब आंकड़े दो या दो से अधिक चरों से संबंधित दिये हों, तब इन चरों से संबंधित विचलन का अध्ययन किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक महाविद्यालय के छात्रों के उंचाई या लम्बाई (X) एवं वजन (Y) से संबंधित संमक में हम यह ज्ञात करते हैं कि कौन छात्र है जिसका लम्बाई और वजन दोनों हीं अधिक हैं। साथ हीं, ऐसे छात्र जिनकी लम्बाई एवं वजन दोनों हीं

कम है। चरों में पाये जाने वाले इस प्रकार के विचलन को हीं सहसंबंध कहते हैं। सहसंबंध निम्न प्रकार के हो सकते हैं,

1. साधारण सहसंबंध
2. बहुगुणी सहसंबंध
3. आंशिक संहसंबंध

साधारण सहसंबंध दो चरों में होने वाले विचरणों से संबंधित है। बहुगुणी सहसंबंध एवं आंशिक सहसंबंध तीन या तीन से अधिक चरों में होने वाले विचरणों से संबंधित सहसंबंध है।

इस इकाई में, हम साधारण सहसंबंध के बारे में अध्ययन करेगें, अर्थात् दो चरों के बीच सहसंबंध का अध्ययन करेगें।

दो चरों को सहसंबंधित कहेगें यदि उनमें परिर्वतन या विचलन इस प्रकार हो कि

1. एक चर का उच्च मूल्य दूसरे चर के उच्च मूल्य से संबंधित तथा एक चर के निम्न मूल्य दूसरे चर के निम्न मूल्य के साथ परिवर्तित होते हैं।

या

2. एक चर का उच्च मूल्य दूसरे चर के निम्न मूल्य से एवं एक चर के निम्न मूल्य से उच्च मूल्य के बीच संबंध को प्रदशित करता हो। सामान्यतया, यह देखा जा सकता है, जो लोग लम्बे होते हैं उनका वजन भी अधिक होता है जबकि छोटे लोगों के वजन भी कम होते हैं। इस प्रकार, किसी व्यक्ति की उंचाई या लम्बाई (X) एवं वजन (Y) में विचलन एक दूसरे से संबंधित होते हैं। और इसलिए, वे एक दूसरे से संबंधित है।

दूसरी तरफ, सब्जीयों का उत्पादन (X) एवं कीमत (Y) दोनों के बीच विपरीत विचलन होते हैं। यहां, अधिक उत्पादन होने पर, सब्जीयों के कीमत कम होगें।

8.2.1 सहसंबंध के प्रकार

सहसंबंध धनात्मक (प्रत्यक्ष) होगें यदि चरों में विचलन एक हीं दिशा में होते हैं, अर्थात् यदि दोनों चरों में वृद्धि या कमी एक साथ होते हों।

सहसंबंध ऋणात्मक (विपरीत) होगें यदि चरों में परिवर्तन विपरीत दिशा में हों, यदि जब एक चर में वृद्धि होने पर, दूसरे चर में कमी हो तब इसे ऋणात्मक सहसंबंध कहते हैं।

सब्जीयों के उत्पादन (X) एवं कीमत (Y), दोनों में ऋणात्मक सहसंबंध होते हैं।

यदि चरों में परिवर्तन या विचरण प्रदर्शित नहीं हो, दानो चरों में कोई सहसंबंध नहीं होगा। इस प्रकार, रूपये के मूल्य (X) एवं वायुमण्डलीय ताप (Y) के बीच कोई सहसंबंधन नहीं है।

यदि चरों में पूर्ण रैखिक संबंध प्रदर्शित हो, तब उन्हें पूर्ण सहसंबंध कहते हैं। पूर्ण सह संबंध धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं।

8.2.2 सहसंबंध और करणीय संबंध

दो चरों के बीच पाये जाने वाले 'कारण और प्रभाव' के संबंध को हीं करणीय संबंध कहते हैं। इस प्रकार, विद्युतीय वस्तुओं के उत्पाद एवं उसके

कीमत के बीच करणीय संबंध परिलक्षित होता हैं। यहां, उत्पादन में वृद्धि के कारण उत्पादित वस्तु के बाजार कीमत में कमी आती है।
यहां तक कि जब चरों के बीच कोई करणीय संबंध न हो तब भी सहसंबंध हो सकता है। एक क्षण के लिए, भारत की जनसंख्या एवं चीन की जनसंख्या के बीच भी विचरणीय सहसंबंध परिलक्षित होता हैं। लेकिन, वे किसी प्रकार के करणीय संबंध प्रदर्शित नहीं करते हैं। ऐसे सहसंबंध जिनमें करणीय संबंध की अनुपस्थित हो, उसे गैर–भावना या निरर्थक या नकली या अभासी सहसंबंध है।

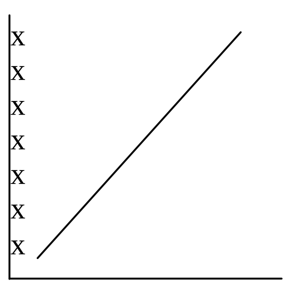
8.2.3 सहसंबंध के माप

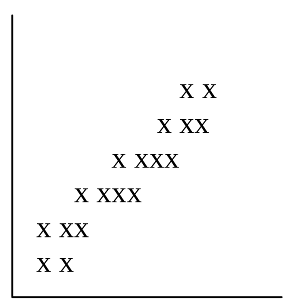
दो चरों के बीच सहसंबंध के कोटि को निम्नलिखित माप का प्रयोग करके ज्ञात कर सकते हैं–

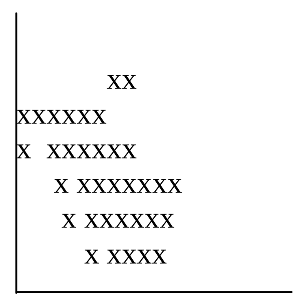
1. विक्षेप चित्र
2. कार्ल पीयर्सन (गूणनफल आघूर्ण) का सहसंबंध गुणांक
3. स्पीर्यमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक

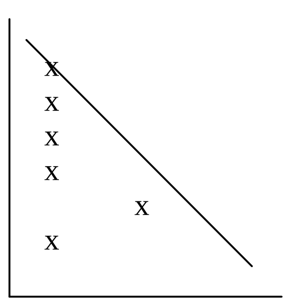
8.2.4 विक्षेप चित्र

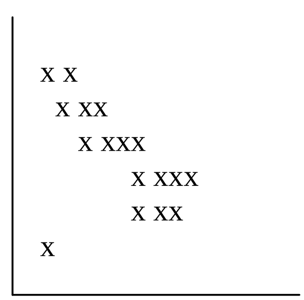
विक्षेप चित्र एक द्विपद आकड़ों को प्रस्तुत करने का बिन्दुरेखीय विधि है। यहां, द्विपद् समंकों को के n जोड़े मूल्यों को, n बिन्दुओं के द्वारा xy-समतल पर प्रदर्शित किया जाता है। दोनों चरों को, दो अक्षों के साथ, संगत जोड़े को बिन्दुओं रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

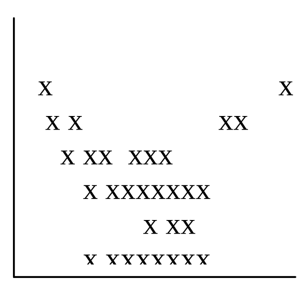

पूर्ण धनात्मक सहसंबंध $(r = +1)$


धनात्मक सहसंबंध $(r > 0)$


कोई सहसंबंध नहीं


पूर्ण ऋणात्मक सहसंबध $(r = -1)$


ऋणात्मक सहसंबंध $r < 0$


गैर–रैखिक सहसंबंध

उपरोक्त बिन्दुरेखीय चित्र में वितरण का स्वरूप का प्रयोग करके हम चरों के बीच सहसंबंध के कोटि का अनमान लगाया जा सकता है।
विक्षेप चित्र में–

1. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर बिन्दुओं को मिलाने से एक धनात्मक ढाल प्राप्त हो (उपर की ओर जाने वाली रेखा), तब चरों के बीच धनात्मक और पूर्ण सहसंबंध कहलाते हैं।
2. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर बिन्दुओं को मिलाने से एक ऋणात्मक ढाल प्राप्त हो (नीचे की ओर जाने वाली रेखा), तब चरों के बीच ऋणात्मक और पूर्ण सहसंबंध कहलाते हैं।
3. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर एक रेखा के आस पास बिन्दुओं का गुच्छ धनात्मक ढाल के रूप में हो, तब चरों के बीच धनात्मक सहसंबंध पाये जाते हैं।
4. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर एक रेखा के आस पास बिन्दुओं का गुच्छ ऋणात्मक ढाल के रूप में हो, तब चरों के बीच ऋणात्मक सहसंबंध पाये जाते हैं।
5. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर चर मूल्य के बिन्दु पूरे समतल में बिखरे हों, तब चरों के बीच कोई सहसंबंध नहीं होगा।
6. जब समतल या ग्राफ पेपर पर बिखरे बिन्दु को मिलाने से कोई असंरेखीय रेखा प्राप्त हो, तब चरों के बीच पाये जाने वाले संबंध को गैर–रेखीय सहसंबंध कहते हैं।

8.2.5 कार्ल पीयर्सन (आघूर्ण गुणनफल) का सहसंबंध गुणांक

यह दो चरों के बीच पाये जाने वाले रैखिक संबंध का माप है। यह दो चरों के बीच पाये जाने वाले सहसंबंधों के कोटि को दर्शाते हैं। दो चरों x एवं y के सहसंबंध गुणंक को 'r_{xy}' या 'r' से प्रदर्शित किया जाता है।

कार्ल पीयर्सन के दो चरों x एवं y के सहसंबंध गुणंक निम्नलिखित है,

$$r_{xy} = \frac{\text{सहप्रसरण } (x,\ y)}{\sqrt{\text{प्रसरण } (x) \times \text{ प्रसरण } (y)}} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)}{\sqrt{\left[\frac{1}{n}\sum\left(x-\bar{x}\right)^2\right]\times\left[\frac{1}{n}\sum\left(y-\bar{y}\right)^2\right]}}$$

गणना के लिए, उपरोक्त सूत्र का सरलीकृत रूप निम्नलिखित है,

$$r = \frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\times\left[n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2\right]}}$$ व्यक्तिगत या गैर–समूही आंकड़े के लिए

$$r = \frac{N\sum\sum fxy-\left(\sum fx\right)\left(\sum fy\right)}{\sqrt{\left[N\sum fx^2-\left(\sum fx\right)^2\right]\times\left[N\sum fy^2-\left(\sum fy\right)^2\right]}}$$ सतत् श्रेणी के लिए

8.2.6 सहसंबंध गुणांक का निर्वचन

1. 'r' के धनात्मक मूल्य चरों के बीच धनात्मक सहसंबंध को प्रदर्शित

करता है।

2. 'r' के ऋणात्मक मूल्य चरों के बीच ऋणात्मक सहसंबंध को प्रदर्शित करता हैं।
3. r = +1 का अर्थ हे कि चरों के बीच पूर्ण धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है।
4- r = –1 का अर्थ हे कि चरों के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध पाया जाता है।
5- r = 0 (या निम्न) का अर्थ हैं कि चरों के बीच कोई सहसंबंध नहीं हैं।

8.2.7 सहसंबंध गुणांक की विशेषताएं

1. सहसंबंध गुणांक, चरों के किसी भी माप के इकाई से पूरा स्वतंत्र होता है।
2. सहसंबंध गुणांक चरों के मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र होते हैं।
3. सहसंबंध गुणांक के मूल्य –1 एवं +1 के बीच होता हैं।

बहुत सारे लेखकों ने सहसंबंध गुणांक के निर्वचन के लिए दिशा निर्देश सुझाव दिया है। उदाहरण के लिए, कोहिन (1988) ने मनोविज्ञान शोध में सहसंबंध गुणांक के निर्वचन को निम्नलिखित सारणी के द्वारा दिया गया है,

सहसंबंध	**ऋणात्मक**	**धनात्मक**
निम्न कोटि	–0.29 to –0.10	0.10 to 0.29
मध्यम कोटि	–0.49 to –0.30	0.30 to 0.49
उच्च कोटि	–1.00 to –0.50	0.50 to 1.00

जैसा कि कोहिन ने स्वयं अवलोकन किया और पाया कि ऐसे सभी कुछ स्थितियों में पूरी कठोरता से लागु नहीं होती है। क्योंकि सहसंबंध के गुणांक का निर्वचन किस उद्देश्य एवं किस स्तर तक प्रयोग किया जाना है उन सभी बातों पर निर्भर करता है। सहसंबंध मूल्य 0.9 भी बहुत कम हो सकता है यदि इसका जांच कड़े भौतिक नियमों के साथ उच्च कोटि के औंजारो का प्रयोग करके किया गया है। लेकिन यहीं जांच सामाजिक विज्ञान के लिए जहां बहुत सार जटिल कारकों के योगदान का अध्ययन किया जाता है वहां उच्च कोटि के सहसंबंध हो सकते हैं।

उदाहरण 1

दस छात्रों में से पांच छात्रों के सांख्यिकी एवं आदर भाव विषयो के बीच आघूर्ण गुणनफल सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

छात्र	1	2	3	4	5
सांख्यिकी	4	7	8	3	4
आदर भाव	5	8	6	3	5

हल : प्रत्यक्ष विधि से,

माना कि x सांख्यिकी तथा y आदर भाव का प्राप्तांक है एवं दोनों के बीच

सहसंबंध निम्न प्रकार से है,

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right] \times \left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

x	y	x^2	y^2	xy
4	5	16	25	20
7	8	49	64	56
8	6	64	36	48
3	3	9	9	9
4	5	16	25	20
26	27	154	159	153

$$= \frac{5 \times 153 - 26 \times 27}{\sqrt{\left[5 \times 154 - (26)^2\right] \times \left[5 \times 159 - (27)^2\right]}}$$

$$= \frac{765 - 702}{\sqrt{[770 - 676] \times [795 - 729]}} = \frac{63}{\sqrt{94 \times 66}} = 0.7988$$

अतः छात्रों के दो विषयों साख्यिकी एवं आदर भाव विषयों के प्राप्तांक में उच्च कोटि का धनात्मक सहसंबंध परिलक्षित होता है।

उदाहरण 2

नीचे 8 व्यक्तियों एवं उनके पत्नियों के ऊँचाई दिया गया हैं। संमकों का प्रयोग करके पति एवं पत्नियों के ऊँचाई के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

पति (cms.)	164	176	178	184	175	167	173	180
पत्नी (cms.)	158	164	165	171	163	156	163	169

हलः (लघु या अप्रत्यक्ष विधि)

माना कि X पतियों के उंचाई एवं Y पत्नियों के ऊँचाई को प्रदर्शित करते हैं। एवं माना कि U = X-A = X-170 एवं V = Y- B = Y- 160। यहां, A = 170 एवं A = 160 के लिए नई मूल विन्दू है।

X	Y	U=X-170	V=X-160	U^2	V^2	UV
164	158	-6	-2	36	4	12
176	164	6	4	36	16	24
178	165	8	5	64	25	40
184	171	14	11	196	121	154
175	163	5	3	25	9	15
167	156	-3	-4	9	16	12
173	163	3	3	9	9	9
180	169	10	9	100	81	90
कुल	=	37	29	475	281	256

चूंकि सहसंबंध गुणांक मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से बिल्कुल स्वतंत्र है। फलतः चर X एवं Y के लिए जो सहसंबंध होगें उसी तरह U एवं V के बीच सहसंबंध निम्न रूप से ज्ञात किया जा सकता है।

$$r = \frac{n\sum uv - \left(\sum u\right)\left(\sum v\right)}{\sqrt{\left[n\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2\right] \times \left[n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{8 \times 356 - 37 \times 29}{\sqrt{\left[8 \times 475 - (37)^2\right] \times \left[8 \times 281 - (29)^2\right]}}$$

$$= \frac{1775}{\sqrt{2431 \times 1407}} = 0.9598$$

इस प्रकार पति एवं पत्नियों के ऊँचाई के बीच उच्च कोटि के सहसंबंध पाया जाता है।

उदाहरण 3

निम्नलिखित संमंकों का प्रयोग करके X एवं Y चरों के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

X	218	220	236	225	220	227	228
Y	12.3	12.7	12.0	12.2	12.7	12.1	12.0

हलः

माना कि, Let $u = x - 220$ एवं $v = y - 12.0$

x	y	$u = x - 220$	$v = y - 12.0$	u^2	v^2	uv
218	12.3	-2	0.3	4	0.09	-0.6
220	12.7	0	0.7	0	0.49	0
236	12.0	16	0	256	0	0
225	12.2	5	0.2	25	0.04	1.0
220	12.7	0	0.7	0	0.49	0
227	12.1	7	0.1	49	0.01	0.7
228	12.0	8	0	64	0	0
		34	2.0	398	1.12	1.1

चूंकि सहसंबंध गुणांक मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से बिल्कुल स्वतंत्र है। फलतः चर X एवं Y के लिए भी मूल के परिवर्तन के इकाई से स्वतंत्र होगें।

$$r = \frac{n\sum uv - \left(\sum u\right)\left(\sum v\right)}{\sqrt{\left[n\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2\right] \times \left[n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{7 \times 1.1 - 34 \times 2}{\sqrt{\left[7 \times 398 - (34)^2\right] \times \left[7 \times 1.12 - (2)^2\right]}}$$

$$=\frac{-60.3}{\sqrt{1630\times3.84}}=-0.7622$$

अतः चरों के बीच उच्च कोटि का ऋणात्मक सहसंबंध है।

उदाहरण 4

कच्चे स्कोर विधि से सहसंबंध r की गणना करें।

X	20	16	12	8	4
Y	22	14	4	12	8

हलः

X	Y	X^2	Y^2	XY
20	22	400	484	440
16	14	256	196	224
12	4	144	16	48
8	12	64	144	96
4	8	16	64	32
ΣX = 60	**ΣY = 60**	**$\Sigma X^2 = 880$**	**$\Sigma Y^2 = 904$**	**ΣXY = 840**

r के लिए दिये गये सूत्र का प्रयोग करते हुए संगत मानों को रखते हुए सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है,

$$r=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\times\left[n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$r=\frac{5(840)-(60)(60)}{\sqrt{5(880)-(60)^2}\sqrt{5(904)-(60)^2}}=0.70$$

$$r=\frac{600}{\sqrt{4400-3600}\sqrt{4520-3600}}$$

$$r=\frac{600}{\sqrt{800\times920}}$$

$$r=\frac{600}{857.9}$$

r = 0.6994 = 0.70

उदाहरण 5

निम्नलिखित संमंकों के लिए कार्ल पीयर्सन का सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

वर्ष	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
उत्पादन का सूचकांक	100	102	104	107	105	112	103	99
कर्मचारियों की संख्या	15	12	13	11	12	12	19	26

हलः

कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना करें,

वर्ष	उत्पादन का सूचकांक X	$X-\overline{X}$ $= x$	x^2	कर्मचारियों की संख्या (Y)	$Y-\overline{Y}$ y	y^2	xy
1985	100	– 4	16	15	0	0	0
1986	102	– 2	4	12	– 3	9	+6
1987	104	0	0	13	– 2	4	0
1988	107	+3	9	11	– 4	16	– 12
1989	105	+1	1	12	– 3	9	-3
1990	112	+8	64	12	– 3	9	– 24
1991	103	– 1	1	19	+4	16	– A
1992	99	– 5	25	26	+11	121	– 55
	ΣX = 832	**Σ*x* = 0**	**Σ*x*²= 120**	**ΣY = 120**	**Σ*y* = 0**	**Σ*y*² = 184**	**Σ*xy* = - 92**

$$X = \Sigma X / N = 832/8 = 104$$
$$Y = \Sigma Y/N = 120/8 = 15$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} = r = \frac{-92}{\sqrt{120 x 184}} = -0.619$$

इस प्रकार उत्पादन सूचकांक एवं कर्मचारियों के बीच कार्ल पीयर्सन सहसंबंध ऋणात्मक है।

उदाहरण 6:

निम्नलिखित संमंकों से सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

X	50	60	58	47	49	33	65	43	46	68
Y	48	65	50	48	55	58	63	48	50	70

हल:

कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना,

X	X - 50 =	dx^2	Y	Y – 55=	dy^2	dx dy
50	0	0	48	– 7	49	0
60	+10	100	65	+10	100	+100
58	+8	64	50	– 5	25	-40
47	– 3	9	48	– 7	49	+21
49	– 1	1	55	0	0	0
33	– 17	289	58	3	9	– 51
65	+15	225	63	8	64	+120
43	– 7	49	48	– 7	49	+49
46	– 4	16	50	– 5	25	+20
68	+18	324	70	15	225	+270

ΣX = 519	Σdx = +19	Σdx^2 = 1077	ΣY = 535	Σdy = 5	Σdy^2 = 595	$\Sigma dxdy$=489

सहसंबंध r को ज्ञात करने के लिए सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$r = \frac{N\sum dxdy - \sum dx.\sum dy}{\sqrt{N\sum dx^2 - (\sum dx)^2}.\ \sqrt{N\sum dy^2 - (\sum dy)^2}}$$

$$r = \frac{10\times 489 - (19)(5)}{\sqrt{10\times 1077 - 19\times 19}\sqrt{10\times 595 - 5\times 5}}$$

$$r = 0.611$$

8.3 स्पीर्यमैन का कोटि सहसंबंध

माना कि हम पांच विद्यार्थियों के सांख्यिकी एवं गणित में प्राप्तांक को जानते हैं। इन प्राप्तांकों के बीच सहसंबंध ज्ञात करने के बावजूद, हमने माना कि निम्नलिखित रूप से आगे बढ़ते हैं:

सांख्यिकी विषय में प्राप्तांक के अनुसार उनको क्रम देते हैं। साथ हीं उनके प्राप्तांक के अनुसार गणित में भी क्रम या कोटि प्रदान करते हैं। तब, इन दो समुच्चयों के कोटि के बीच सहसंबंध को हीं कोटि सहसंबंध कहते हैं। इस कोटि के लिए गणना की गई सहसंबंध गुणांक को हीं स्पीर्यमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक कहते हैं।

द्विपद चरों में, यदि चरों के मूल्यों को बढ़ते या घटते क्रम में कोटि देते हैं, तो इनके कोटियों के बीच सहसंबंध को हीं कोटि सहसंबंध कहते हैं। इन कोटियों के लिए गणना की गई सहसंबंध को हीं स्पीर्यमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक कहते हैं। इसे ρ (रॉ) से इंगित किया जाता है। यदि R_1 एवं R_2 अध्ययन के अर्न्तगत कोटियों की दो विशेषताएं हैं और यदि $d = R_1 - R_2$ इन कोटियों का अन्तर है, तब कोटि सहसंबंध गुणांक निम्न रूप से निकाला जा सकता है,

$$\rho = \mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{6}\sum \mathbf{d}^2}{\mathbf{n}^3 - \mathbf{n}}\right)$$

चूंकिं ρ कोटियों बीच एक आघूर्ण गुणनफल सहसंबंध गुणांक है, इसका मूल्य −1 से +1 के बीच होता है।

कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक की गणना तभी की जा सकती है जब अध्ययन के अन्तर्गत दिया गया राशि मात्रात्मक हो (उन्हें संख्या के रूप में व्यक्य किया जाना चाहिए)। लेकिन, स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध की गणना गुणात्मक प्रकार के विशेषता वाले आंकड़ों के अध्ययन भी की जा सकती हैं। यदि इनमें दो विशेषताओं के आधार पर इकाईयों को कोटि देना संभव हो तो कोटि सहसंबंध गुणांक कहते हैं। इसकी गणना क्रमसूचक संख्या में भी किया जा सकता है।

सहसंबंध का 't' जांच

't' जांच का प्रयोग सहसंबंध गुणांक के जांच के लिए किया जाता है। छः व्यस्क व्यक्तियों के लम्बाई एवं ऊँचाई से संबंधित दैव न्यायदर्श दिये हुए हैं,

उंचाई	(cm)	170	175	176	178	183	185
वजन	(kg)	57	64	70	76	71	82

यह मानना बुद्धिमानी होगी कि दिये गये चर सामान्य वितरित हैं, इसलिए इन दानों चरो के बीच साहचर्य को देखने के लिए कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है, r = 0.875।

कार्ल पीर्यसन के समग्र सहसंबंध गुणांक के लिए परिकल्पना जांच

H_0: p= 0 ; यह प्रदर्शित करता है कि समग्र में मौजूद चरों के बीच काई सहसंबंध नहीं है।

H_1: p>0; यह इंगित करता है कि समग्र के चरों के बीच धनात्मक सहसबंध है (ऊँचाई में वृद्धि का सहचार्य वजन में वृद्धि के साथ है)।

सार्थतक का स्तर 5 प्रतिशत है,

सांख्यिक 't' जांच = $r\frac{\sqrt{n-2}}{1-r^2} = 0.875\frac{\sqrt{6-2}}{1-0.875^2}$ = 3.61

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर एवं 4 स्वतंत्रता कोटि पर सारणिक मूल्य (6-2) = 2.132

चूंकि आंकलित मूल्य सारणिक मूल्य से अधिक हैं इसलिए नकारात्मक परिकल्पना अस्वीकार होगी तथा वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकार होगी है। अर्थात् ऊँचाई एवं वनज, दोनों चरों के बीच धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है।

उदाहरण 7

निम्नलिखित 8 छात्रों के खानपान प्रौद्योगिकी एवं फ्रांट कार्यालय प्रबंधन के प्राप्तांक दिये गये हैं। कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

खानपान प्रौद्योगिकी	25	43	27	35	54	61	37	45
फ्रांट कार्यालय प्रबंधन	35	47	20	37	63	54	28	40

हलः कोटि सहसंबंध को ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले, छात्रों के दो विषयों में प्राप्तांक के कोटि को निम्नलिखित तरही से ज्ञात करें।

प्राप्तांक		कोटि		$d=R_1-R_2$	d^2
x	y	R_1	R_2		
25	35	8	6	2	4
43	47	4	3	1	1
27	20	7	8	-1	1
35	37	6	5	1	1
54	63	2	1	1	1
61	54	1	2	-1	1
37	28	5	7	-2	4
45	40	3	4	-1	1
					$\sum d^2=14$

कोटि सहसंबंध गुणांक,

$$\rho = 1 - \left(\frac{6\sum d^2}{n^3 - n} \right) = 1 - \left(\frac{6 \times 14}{8^3 - 8} \right) = 1 - \frac{84}{504}$$

$$= 1 - 0.1667 = 0.8333$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि खानपान प्रौद्योगिकी एवं फ्रांट कार्यालय प्रबंधन विषयों में प्राप्तांक के बीच उच्च कोटि के सहसंबंध विद्यमान है।

उदाहरण 8

छः विद्यार्थियों के स्पोंट एवं अध्ययन के कोटि निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं। कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

छात्र	1	2	3	4	5	6
खेल में कोटि	1	2	3	4	5	6
अध्ययन में कोटि	4	5	6	2	1	3

हलः

R_1	R_2	$d = R_1 - R_2$	d^2
1	4	-3	9
2	5	-3	9
3	6	-3	9
4	2	2	4
5	1	4	16
6	3	3	9
			$\sum d^2 = 56$

कोटि सहसंबंध गुणांक,

$$\rho = 1 - \left(\frac{6\sum d^2}{n^3 - n} \right) = 1 - \left(\frac{6 \times 56}{6^3 - 6} \right) = 1 - 1.6 = -0.6$$

इस प्रकार खेल एवं अध्ययन विषयों में प्राप्तांकों के कोटि सहसंबंध गुणांक ऋणात्मक हैं।

उदाहरण 9

किसी कोर्स में 10 प्रशिक्षु के शुरूआती एवं अंत के कोटि को निम्न प्रकार से दिया गया हैं।

प्रशिक्षु	:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	:	1	6	3	9	5	2	7	10	8	4
Y	:	6	8	3	7	2	1	5	9	4	10

स्पीर्यमैन कोटि सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिए।

हलः

X	Y	d	d^2	$\rho = 1 - \left[\frac{6\,\Sigma d^2}{N(N^2 - 1)} \right]$
1	6	–5	25	

6	8	–2	4	$=1-\left[\frac{6\times 100}{10\times 99}\right]$
3	3	0	0	=1 – 0.6061
9	7	2	4	= 0.3939
5	2	3	9	
2	1	1	1	
7	5	2	4	
10	9	1	1	
8	4	4	16	
4	10	–6	36	
Total	**–**	**$\Sigma d = 0$**	**$\Sigma d^2 = 100$**	

उदाहरण 10:

X :	21	36	42	37	25
Y :	47	40	37	42	43

उपरोक्त दिये गये संमक के लिए कोटि सहसंबंध ज्ञात करें।

हलः

X	Y	X	Y	d	d^2	
21	47	5	1	4	16	$\rho=1-\left[\frac{6\,\Sigma d^2}{N\left(N^2-1\right)}\right]$
36	40	3	4	– 1	1	$=1-\left[\frac{6\times 38}{5\times 24}\right]$
42	37	1	5	– 4	16	= 1 – 1.9
37	42	2	3	– 1	1	= – 0.9
25	43	4	2	2	4	
Total	**–**	**–**	**–**	**0**	**38**	

8.4 आंशिक सहसंबंध

आंशिक सहसंबंध का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जहां चरों की संख्या तीन और चार हों। तीन चर जैसे, आय, ऊँचाई एवं वजन हो सकते हैं। ऐसे स्थिति में आंशिक सहसंबंध का प्रयोग किया जा सकता है। उंचाई एवं वजन में सहसंबंध, आयु को स्थिर रखते हुए ज्ञात किया जा सकता है। आयु एक महत्वपूर्ण कारक है जो उंचाई एवं वजन के बीच पाये जाने वाले सहसंबंध को और मजबूती प्रदान करते हैं। आंशिक सहसंबंध का प्रयोग आयु के प्रभाव को स्थिर के लिए किया जाता है। इसके अन्तर्गत एक चर के प्रभाव को अन्य

दो चरों के बीच मौजूद सहसंबंध के सापेक्ष आंशिक रूप से अलग किया जाता है। इस सांख्यिकीय तकनीक को हीं आंशिक सहसंबंध कहते हैं।
चर x एवं y के बीच सहसंबंध को r_{xy} से इंगित किया जाता है।
आंशिक सहसंबंध को $r_{12.3}$ से प्रदर्शित किया जाता है। यहां चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध है जबकि तीसरा या 3रा चर को स्थिर रखा गया है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} . r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2} \; X \sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$r_{12.3}$ = 3रा चर को स्थिर रखते हुए चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध।
r_{12} = चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध।
r_{13} = चर 1 एवं 3 के बीच सहसंबंध।
r_{23} = चर 2 एवं 3 के बीच सहसंबंध।

इसी तरह:

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12} . r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2} \; X \sqrt{1-r_{23}^2}}$$ और

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12} . r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2} \; X \sqrt{1-r_{13}^2}}$$

उदाहरण 11
निम्नलिखित संमंकों का प्रयोग करके तीसरे चर या 3रा चर को स्थिर रखते हुए प्रथम एवं द्वितीय चर अथवा 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध ज्ञात करें।

$r_{12} = 0.7$; $r_{13} = 0.6$; $r_{23} = 0.4$

उतरः $$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} . r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2} \; X \sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$r_{12.3} = \frac{0.7-(0.6)(0.4)}{\sqrt{1-(0.6)^2} \times \sqrt{1-\;(0.4)^2}}$$

$r_{12.3} = 0.625$

उदाहरण 12
निम्नलिखित आंकड़ो की मदद से $r_{23.1}$ एवं $r_{13.2}$ का ज्ञात करें।
उतर: (0.137 and 0.367)

$$r_{23.1} = \frac{0.40-(0.60)(0.51)}{\sqrt{1-(0.60)^2} \times \sqrt{1-(0.51)^2}}$$

$r_{23.1} = 0.137$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\ X\ \sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$r_{13.2} = \frac{(0.51)-(0.60)(0.40)}{\sqrt{1-(0.6)^2} \times \sqrt{1-(0.51)^2}}$$

$r_{13.2} = 0.367$

8.5 बहुगुणी सहसंबंध

बहुगुणी सहसंबंध में तीन या चार चर मौजूद हो सकते हैं। आश्रित चर X_1 X_2 X_3 X_4 को से इंगित करते हैं और अन्य चरों को X_2, X_3, X_4 इत्यादि से प्रदर्शित किया जाता है। गुप्ता एस. पी. ने स्पष्ट किया है, ''रैखिक बहुगुणी सहसंबंध के गुणांक को R_1 से प्रदशित करते है और इसमे मौजूद अन्य चरों को सबस्क्रिप्ट जोड़कर दिखाया जा सकता है। इस प्रकार, $R_{1.234}$ रैखिक सहसंबंध गुणांक को प्रस्तुत करता है जिसमें X_1 एक आश्रित चर है जिसका सहसंबंध X_2, X_3, X_4 हैं। आश्रित चर का सबस्क्रिप्ट सदैव बिन्दु के बांयें ओर लिखा जाना चाहिए।''

बहुगुणी सहसंबंध के गुणांक r_{12}, r_{13}, एवं r_{23} को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता हैः

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{13}^2}}$$

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{12}^2}}$$

बहुगुणी सहसंबंध $R_{1.23}$ का गुणांक वहीं है जो $R_{1.32}$ के गुणांक हैं।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक का मूल्य 0 से 1 के बीच होते हैं। यदि बहुगुणी सहसंबंध गुणांक का मुल्य 1 के बराबर हो तब इसका अर्थ है कि चरों के बीच पूर्ण सहसंबंध विद्यमान है। यदि यह 0 के बराबर है, तब यह प्रदर्शित करता है कि चरों के बीच कोई रैखिक सहसंबंध नहीं है। इस प्रकार बहुगुणी सहसंबंध के मूल्य सदैव धनात्मक होते हैं जिसका विस्तार +1 से 0 के बीच होता है।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक को हम $R_{1.23}$ का वर्ग निकालकर प्राप्त किया जा सकता है। अतः $R_{1.23}$ का वैकल्पिक सूत्र हैः

$R_{1.23}=\sqrt{r_{12}^2+r_{13.2}^2(1-r_{12}^2)}$ या

$R_{1.23}^2=r_{12}^2+r_{13.2}^2(1-r_{12}^2)$

इसी प्रकार, $R_{1.24}$ एवं $R_{1.34}$ के लिए भी वैकल्पिक सूत्र को प्राप्त किया जा सकता है।

निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग बहुगुणी सहसंबंध ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है जिसमें तीन स्वतंत्र चर हैं।

$R_{1.234}=\sqrt{1-(1-r_{14}^2)(1-r_{13.4}^2)(1-r_{12.34}^2)}$

बहुगुणी सहसंबंध विशलेषण वह माप है जो दिये गये चरों के बीच सहसंबंध को स्थापित या पता लगाने का कार्य करता है। इस विशलेषण में एक चर जो आश्रित है का अन्य स्वतंत्र चरों के बीच साहचर्य की कोटि को जानने के लिए उत्सुक रहते हैं।

उदाहरण 13

निम्नलिखित शून्य–क्रम के सहसंबंध गुणांक दिये गये हैं।

$r_{12} = 0.98$; $r_{13} = 0.44$; $r_{23} = 0.54$

प्रथम चर को अश्रित एवं अन्य दो चरों, द्वितीय एवं तृतीय को स्वतंत्र मानते हुए बहुगुणी सहसंबंध की गणना करें। (Source: Gupta S.P, Statistical Methods).

हलः

प्रथम चर एक आश्रित चर है।

द्वितीय एवं तृतीय चर स्वतंत्र हैं।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक $R_{1.23}$ के सूत्र का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$R_{1.23}=\sqrt{\frac{r_{12}^2+r_{13}^2-2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$R_{1.23}=\sqrt{\frac{(0.98)^2+(0.44)^2-2(0.98)(0.44)(0.54)}{1-(0.54)^2}}$$

$R_{1.23} = 0.986$

8.6 सारांश

इस इकाई में हमने उदाहरणों की सहायता से विभिन्न प्रकार के सहसंबंधों का विस्तृत अध्ययन किया है। दूसरा स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक का अध्ययन उचित उदाहरण के द्वारा चर्चा की गई। वास्तविक मूल्य के प्रवृति की विशेषता है कि आकलित मूल्य के बिल्कुल करीब होना है इसका अर्थ है कि प्रतीपगमन एवं उसी तरह के बेहतर उदाहरण से व्याख्या की गई है।

चित्र की सहायता से विक्षेप रेखाचित्र के अवधारणा का अच्छे तरह से व्याख्या

किया गया है। कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक को उल्लेख स्पष्ट उदाहरणों के माध्यम से किया गया है।

सांख्यिकी में, आश्रित होने का अर्थ है कि दो या दो से अधिक चरों या संमक समुच्चयों के बीच सांख्यिकीय संबंध का होना। सहसंबंध का मोटे तौर पर अर्थ है सांख्यिकी संबंधों में निर्भरता।

निर्भरता से संबंधित एक प्रचलित भौतिक उदाहरण है कि पिता पुत्र के बीच संबंध का पाया जाना, और उत्पाद की मांग एवं उसके कीमत के बीच सहसंबंध का होना। सहसंबंध एक उपयोगी विधि है जिसका प्रयोग पूर्वानुमान को निर्देशित करने के लिये किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक विद्युत उपयोगिता का उत्पादन मिल्ड दिनों में कम क्षमतावान होगा जो विद्युत के मांग एवं मौसम के बीच सहसंबंध को दर्शाता है। इस उदाहरण में, एक कारणीय संबंध को प्रदर्शित करता है, क्योंकि चरम मौसम में अधिक गर्मी से ठण्डा एवं ठण्डे में गर्मी करने के लिए अधिक विद्युत की आवश्यकता होती है, जबकि सांख्यिकीय निर्भरता कारणीय संबंध को प्रदर्शित करने के लिए उचित नहीं है।

8.7 शब्दावली

- **सहसंबंधः** दो चरों के बीच संबंध को हीं सहसंबंध कहते हैं।
- **विक्षेप रेखाचित्रः** यह द्विपद संमकों के बिन्दु रेखीय प्रदर्शन है।
- **बहुगुणी सहसंबंधः** यदि सहसंबंध में तीन या इससे अधिक चर मौजूद हों तब इसे बहुगुणी सहसंबंध कहते हैं।

8.8 बोध प्रश्न

खाली जगहों को भरें

1) .... एवं आंशिक सहसंबंध तीन या तीन से अधिक चरों में होने वाले विचरणों से संबंधित सहसंबंध है।
2) जब एक चर में वृद्धि होने पर, दूसरे चर में कमी हो तब इसे .... सहसंबंध कहते हैं।
3) जब समतल या ग्राफ पेपर पर बिखरे बिन्दु को मिलाने से कोई असंरेखीय रेखा प्राप्त हो, तब चरों के बीच पाये जाने वाले संबंध को .. .. कहते हैं।
4) सहसंबंध गुणांक के मूल्य .... के बीच होता हैं।
5) चर x एवं y के बीच सहसंबंध को .... से इंगित किया जाता है।

8.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1)	बहुगुणी सहसंबंध	2)	ऋणात्मक	3)	गैर–रेखीय सहसंबंध
4)	–1 एवं +1	5)	r_{xy}		

8.10 स्वपरख प्रश्न

1. एक द्विपद संमकमाला में, x एवं y, $Var(x)=49, Var(y)=9$ तथा $Cov(x,y)=-17.5.$ है। x एवं y के बीच सहसंबंध ज्ञात करें।

उत्तरः चरों के बीच सहसंबंध गुणांक,

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x) \times Var(y)}} = \frac{-17.5}{\sqrt{49 \times 9}} = -0.833$$

इस प्रकार दोनों चरों के बी उच्च कोटि का ऋणात्मक सहसंबंध है।

2. एक द्विपद संमंकमाला में, x एवं y के 10 अवलोकनों से संबंधित सूचनाएं दी गई हैए $\sum x = 56, \sum y = 138, \sum x^2 = 1357, \sum y^2 = 2136$ and $\sum xy = 836$ । x एवं y, के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

उत्तरः चरों के बीच सहसंबंध गुणांक,

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right] \times \left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{10 \times 836 - 56 \times 138}{\sqrt{\left[10 \times 1357 - (56)^2\right] \times \left[10 \times 2136 - (138)^2\right]}} = 0.1286$$

3. चर x एवं y, दोनों पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध है। यह भी दिया है, $S.D.(x) = 4.3$ और $S.D.(y) = 0.47$. तब, $Cov(x,y)$. चरों के बीच सहप्रसरण ज्ञात करें।

उत्तरः चूंकि चर x एवं y, के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध r = -1 है।

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x) \times Var(y)}}$$

$$-1 = \frac{Cov(x,y)}{4.3 \times 0.47}$$

और इसलिए,

$$Cov(x,y) = (-1) \times 4.3 \times 0.47 = -2.021$$

4. 6 होटलों के दो सम्ताह में बिक्री का विवरण निम्नलिखित रूप से दिया गया है। स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

होटल	1	2	3	4	5	6
प्रथम सप्ताह की बिक्री	60	110	65	40	70	20
प्रथम सप्ताह की बिक्री	90	100	80	30	70	20

उत्तरः

होटल		कोटि		$d = R_1 - R_2$	d^2
x	y	R_1	R_2		
60	90	4	2	2	4
110	110	1	1	0	0
65	80	3	3	0	0
40	30	5	5	0	0

70	70	2	4	-2	4
20	20	6	6	0	0
					$\sum d^2=8$

स्पीर्यमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक,

$$\rho=1-\left(\frac{6\sum d^2}{n^3-n}\right)=1-\left(\frac{6\times 8}{6^3-6}\right)$$

$$=1-0.2286=0.7714$$

प्रथम सप्ताह के बिक्री एवं दूसरे सप्ताह के बिक्री के बीच उच्च कोटि का धनात्मक सहसंबंध है।

5. 8 छात्रों के दो विषयों अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के प्रतिशत प्राप्तांकों कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

प्राप्तांक

अर्थशास्त्रः	50	60	65	70	75	40	70	80
सांख्यिकीः	80	71	60	75	90	82	70	50

उतरः माना कि X = अर्थशास्त्र में प्राप्तांक है।

Y = सांख्यिाकी में प्राप्तांक हैं।

X	**Y**	**X**	**Y**	**d**	**d^2**
50	80	7	3	4	16
60	71	6	5	1	1
65	60	5	7	– 2	4
70	75	3.5	4	– 0.5	0.25
75	90	2	1	1	1
40	82	8	2	6	36
70	70	3.5	6	–2.5	6.25
80	50	1	8	–7	49
कुल	–	–	–	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 113.5$

$$\rho=1-\left[\frac{6\left\{\Sigma d^2+\frac{m(m^2-1)}{12}\right\}}{N(N^2-1)}\right]$$

जब, $m = 2 \quad \frac{m(m^2-1)}{12}=0.5$

$$\rho = 1 - \left[\frac{6(113.5+0.5)}{8(8^2-1)} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{6 \times 144}{8 \times 63} \right]$$

= 1 – 1.3571

= – 0.3571

6. आठ विद्यार्थीयों के लेखाकंन (X) एवं सांख्यिकी (Y) विषयों में प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं। कोटि सहसंबंध ज्ञात करें।

X :	15	20	28	12	40	60	20	80
Y :	40	30	50	30	20	10	30	60

हलः

X	X	Y	Y	d	d^2
15	7	40	3	4	16
20	5.5	30	5	0.5	0.25
28	4	50	2	2	4
12	8	30	5	3	9
40	3	20	7	– 4	16
60	2	10	8	– 6	36
20	5.5	30	5	0.5	0.25
80	1	60	1	0	0
				0	81.5

$$\rho = 1 - \left[\frac{6\left\{ \Sigma d^2 + \frac{m(m^2-1)}{12} + \frac{m(m^2-1)}{12} + ... \right\}}{N(N^2-1)} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{6(81.5+0.5+2)}{8(8^2-1)} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{6 \times 84}{8 \times 63} \right]$$

= 1 – 1 = 0

7. निम्नलिखि सारणी में 100 छात्रों के बुद्धिमता जांच के उपरान्त आयु की आवृतिया एवं संगत प्राप्तांक दिये गये हैं।

आयु वर्ष में → प्राप्तांक ↓	18	19	20	21	कुल
10 – 20	4	2	2	–	8
20 – 30	5	4	6	4	19

30 – 40	6	8	10	11	35
40 – 50	4	4	6	8	22
50 – 60	–	2	4	4	10
60 – 70	–	2	3	1	6
Total	**19**	**22**	**31**	**28**	**100**

आयु एवं प्राप्तांको के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञाता करें।

हलः

Y → X ↓	18	19	20	21	f	dy	fdy	fdy^2	fdxdy
15	4	2	2	–	8	–2	–16	32	4
25	5	4	6	4	19	–1	–19	19	–9
35	6	8	10	11	35	0	0	0	0
45	4	4	6	8	22	1	22	22	18
55	–	2	4	4	10	2	20	90	24
65	–	2	3	1	6	3	18	54	15
f	19	22	31	28	100		25	167	52
dx	–1	0	1	2					
fdx	–19	0	31	56	68				
fdx^2	19	0	31	112	162				
fdxdy	9	0	13	30	52				

सहसंबंध गुणांक,

$$r=\frac{N\,\Sigma dx\,dy-\Sigma dx\,\Sigma dy}{\sqrt{N\,\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}\,\sqrt{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}}$$

$$=\frac{100\times52-68\times25}{\sqrt{100\times162-(68)^2}\,\sqrt{100\times167-(25)^2}}$$

$$=\frac{5200-1700}{\sqrt{16200-4628}\,\sqrt{16700-625}}$$

$$=\frac{3500}{107.57\times126.78}=0.2566$$

चूंकि सहसंबंध मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र होते हैं,

अतः चरों के बीच सहसंबंध, r(x, y) = 0.25

8. निम्नलिखित संमंकमाला से कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें, जहां कीमत श्रेणी के लिए कल्पित माध्य 20 एवं मांग श्रेणी के लिए कल्पित माध्य 70 का प्रयोग करें।

कीमत	:	14	16	17	18	19	20	21	22	23
मांग	:	87	78	70	75	66	67	62	58	60

उतरः–

x	y	dx = (x – 20)	dy = (y – 70)	dx^2	dy^2	dxdy
14	84	– 6	14	36	196	– 84
16	78	– 4	8	16	64	– 32
17	70	– 3	0	9	0	0
18	75	– 2	5	4	25	– 10
19	66	– 1	– 4	1	16	4
20	67	0	– 3	0	9	0
21	62	1	– 8	1	64	– 8
22	58	2	– 12	4	144	– 24
23	60	3	– 10	9	100	– 30
		– 10	– 10	80	618	– 184

$$r = \frac{N\,\Sigma dxdy - \Sigma dx\,\Sigma dy}{\sqrt{N\,\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}\,\sqrt{N\,\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

$$= \frac{9(-184) - (-10)(-10)}{\sqrt{10\times 80 - (-10)^2}\,\sqrt{10\times 618 - (-10)^2}}$$

r = – 0.954

9. निम्नलिखित संमंकमाला कीमत एवं मांगी गई मात्रा से संबंधित हैं, कार्ल पीर्यसन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें, (43, 105), (54, 98) (85, 53) (91, 95) (59, 84) (95, 40), (68, 73) (29, 59) (73, 63) (72, 52)।

उतरः

x	y	dx	Dy	dx^2	dy^2	dxdy
43	105	– 25	32	625	1024	– 800
54	98	– 14	25	196	625	– 350
85	53	17	– 20	289	400	– 340
91	95	23	– 24	529	576	– 552
59	84	– 9	11	81	121	– 99
95	40	27	– 33	729	1089	– 891
68	73	0	0	0	0	0

29	59	11	– 14	121	196	– 154
73	63	5	– 10	25	100	– 50
72	52	4	– 21	16	441	– 84
		39	**– 54**	**2611**		**– 3320**

dx = x – 68 dy = y – 73

उपरोक्त समस्या के लिए निम्नलिखित सूत्र के माध्यम से सहसंबंध गुणांक ज्ञात कर सकते हैं,

$$r = \frac{10\times(-3320)-39\times(-54)}{\sqrt{10\times2611-(39)^2}\ \sqrt{10\times4572}-(-54)^2}$$

$$= \frac{-33200+2106}{\sqrt{26110-1521}\sqrt{45720-2916}}$$

$$= -0.959$$

10. सहसंबंध के विभिन्न प्रकारों का उल्लेख उचित उदाहरण के साथ करें।
11. निम्नलिखित सारणी में 8 श्रमिकों को दैव निदर्शन से चयन करके उनका अभिक्षमता स्कोर एवं उत्पादकता सूचकांक अंकित किया गया है।

अभिक्षमता स्कोर:	57	58	59	59	60	61	62	64
उत्पादकता सूचकांक :	67	68	65	68	72	72	69	71

अभिक्षमता स्कोर एवं उत्पादकता सूचकांक के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

हलः

x-अभिक्षमता स्कोर; y- उत्पादकता सूचकांक,

$X-\overline{X}$ और $Y-\overline{Y}$ एक पूर्णांक एवं छोटा है।

अतः निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है।

$\Sigma X = \Sigma(X-\overline{X})=0$ और $\Sigma Y = \Sigma(Y-\overline{Y})=0$ माध्य की विशेषता है।

X	Y	$X = X-\overline{X}$ $\overline{X}=60$	$Y = Y-\overline{Y}$ $\overline{Y}=69$	XY	X^2	Y^2
57	67	– 3	– 2	6	9	4
58	68	– 2	– 1	2	4	1
59	65	– 1	– 4	4	1	16
59	68	– 1	– 1	1	1	1
60	72	0	3	0	0	9
61	72	1	3	3	1	9
62	69	2	0	0	4	0
64	71	4	2	8	16	4
Σx = 480	Σy = 552	Σx = 0	Σy = 0	Σxy = 24	$\Sigma x^2 = 36$	$\Sigma y^2 = 44$

$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{480}{8} = 60$; $\overline{Y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{552}{8} = 69$

अतः कार्ल पीर्यसन का सहसंबंध गुणांक,

$$r = \frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2}\sqrt{\Sigma Y^2}}$$,जहां, $\Sigma x = 0$ और $\Sigma y = 0$

$$= \frac{24}{\sqrt{36}\sqrt{44}}$$

$$= 0.6030$$

इस प्रकार अभिक्षमता स्कोर एवं उत्पादकता सूचकांक के बीच मध्यम कोटि का धनात्मक सहसंबंध है।

12. नीचे दिये गये x–विज्ञापन व्यय एवं वस्तुओं के y–बिक्री से संबंधित संमंक दिये गये हैं, सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

x:	10	12	18	8	13	20	22	15	5	17
y:	88	90	94	86	87	92	96	94	88	85

हलः

X	Y	XY	X^2	Y^2
10	88	880	100	7744
12	90	1080	144	8100
18	94	1692	324	8836
8	86	688	64	7396
13	87	1131	169	7569
20	92	1840	400	8464
22	96	2112	484	9216
15	94	1410	225	8836
5	88	440	25	7744
17	85	1445	289	7225
$\Sigma X = 140$	$\Sigma Y = 900$	$\Sigma XY = 12718$	$\Sigma X^2 = 2224$	$\Sigma Y^2 = 81130$

कार्ल पीर्यसन का सहसंबंध गुणांक,

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{10 \times 12718 - 140 \times 900}{\sqrt{10 \times 2224 - (140)^2}\sqrt{10 \times 81130 - (900)^2}}$$

$$= \frac{1180}{\sqrt{2640}\sqrt{1300}}$$

$$= 0.6370$$

8.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics, Goon, Guptha and Dasguptha, World Press

Limited, Calcutta.
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.
5. www.wikipedia.com

*****

इकाई 9 प्रतीपगमन विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- प्रतीपगमन विश्लेषण का निर्वचन कर सकें।
- प्रतीपगमन में विश्लेषण में कैसे मान्यताएं होती है, का वर्णन कर सकें।
- साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल का वर्णन कर सकें।
- विक्षेप आरेख एवं न्यूनतम वर्ग विधि को परिभाषित कर सकें।
- प्राक्कलित समीकरण के शूद्धता का आकलन कर सकें।
- प्राक्कलित प्रमाप त्रुटि की गणना एवं निर्वचन कर सकें।

9.1 प्रस्तावना

पिछले इकाईयों में, आपने प्रसरण, परिघातों, विषमता, ककुदता एवं सहसंबंध के निर्धारण के बारे में अध्ययन किया है। वर्तमान इकाई में, आप

प्रतीपगमन के विश्लेषण के बारे में अध्ययन करेगें। यह एक गणितीय प्रक्रिया है जिसमें अवलोकनों का प्रयोग करके बेहतर मेल वाली रेखा को प्राप्त करने के उद्देश्य से संमंकों के द्वारा चरों के व्यवहार के बारे में प्राक्कलन और पूर्वानुमान करते है। इस तकनीक का प्रयोग दो या दो से अधिक चरों और एक चरों का पूर्वानुमान एक या एक से अधिक चरों के आधार पर करना है। जब प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किसी चर के पूर्वानुमान या भविष्यवाणी करते हैं, तब सदैव यह कल्पना करते हैं कि आश्रित एवं स्वतंत्र चरों के बीच वास्तविक संबंध पाया जाता है। वह चर जिसका अनुमान या भविष्यवाणी करनी है आश्रित तथा चर जिसके आधार पर भविष्यवाणी की जाती है स्वतंत्र चर कहलाती है। आप विक्षेप आरेख, न्यूनतम वर्ग विधि एवं प्रमाप त्रुटि का प्राक्कलन के बारे में भी सीखेगें। प्रमाप त्रुटि का प्राक्कलन का विकास सांख्यिकीविद्ों के द्वारा प्राक्कलित समीकरण के विश्वसीनियता को मापने के लिये किया गया है। प्रमाप त्रुटि का प्राक्कल मूल्य का अधिक होना, दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस पास अधिक अपकिरण या विक्षेप का होना प्रदर्शित करता है। लेकिन, यदि प्राक्कलित प्रमाप विचलन मूल्य शून्य के बराबर हो तब प्राक्कलित समीकरण 'पूर्ण' प्राक्कलक होगी अर्थात् आश्रित चर के लिए शत प्रतिशत सत्य प्राक्कलन होगा ।

9.2 प्रतीपगमन विश्लेषण

'प्रतीपगमन' या 'रेग्रेसन' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम, 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन ने किया था। इन्होंने हीं सर्वप्रथम प्रतीपगमन का विश्लेषणात्मक अध्ययन पिताओं और पुत्रों की उंचाईयों का अध्ययन करते समय उन्होंने यह देखा कि लम्बे पिताओं के पुत्र लम्बें एवं ठिगने पिताओं के पुत्र भी ठिगने होते है, परन्तु लम्बे पिताओं के पुत्रों की औसत उंचाई उनके पिताओं की औसत उंचाई से कम होती है तथा ठिगने पिताओं के पुत्रों की औसत उंचाई उनके पिताओं की औसत उंचाई से अधिक होती है। उन्होंने प्रतीपगमन शब्द को किसी एक चर के मदद से दूसरे चर के अनुमान लगाने की प्रक्रिया का नाम दिया। उन्होंने बहुगुणी प्रतीपगमन शब्द का भी प्रयोग किया जिसके मदद से एक से अधिक चरों के मदद से एक से अधिक चरों का अनुमान लगाया जा सकता है। इस प्रकार, जब चरों के बीच बहुत अच्छा संबंध हो तब यह संभंव है कि एक चर मूल्य (ज्ञात चर/स्वतंत्र चर) का प्रयोग करके दूसरे चर (अज्ञात चर/आश्रित चर) का अनुमान या पूर्वानुमान लगाया जा सके। उदाहरण के लिए, एक बैंककर्मी बैंक में लोगों के जमाओं का अनुमान प्रति व्यक्ति आय के अनूसार लगा सकता है जहां बैंक अपना व्यवसाय करती है। एक बाजार प्रबधंक विज्ञापन व्यय को बढ़ाने का सुझाव, इसके फलस्वरूप बिक्री में होने वाले वृद्धि के उम्मीद या प्रत्याशा के आधार पर हीं दे सकता है। इसी प्रकार, एक अस्पताल अधीक्षक रोगियों के लिए बिछावन की जरूरत का अनुमान उस क्षेत्र में निवास करने वाली जनसंख्या के अनुसार कर सकता है। इस प्रकार के अनुमान के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। एक अन्वेन्षक प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग उन सिद्धान्तों के जांच के लिए कर सकता है जहां कारण एवं प्रभाव के संबंध पाया जाता है। ये सभी स्थितियां

व्याख्या करती हैं कि प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग एक सांख्यिकीय औंजार के रूप किया जाता है विशेष रूप से व्यापार एवं उद्योगों में पूर्वानुमान के समस्या को निपटाने के लिए।

9.2.1 प्रतीपगमन विश्लेषण में मान्यताएं

जब हम प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किसी प्रकार के भविष्यवाणी के लिए करें तब सदैव इन मान्यताओं को ध्यान में रखना चाहिए कि:

(a) स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच वास्तविक संबंध होना चाहिए।

(b) आश्रित चरों का मूल्य दैव हो लेकिन स्वतंत्र चरों के मूल्य एक स्थिर राशि होना चाहिए, जिसे प्रयोगकर्ता द्वारा त्रुटिरहित एव ंविशेष छानबीन के बात प्राप्त हो।

(c) चरों के बीच संबंध की दिशा स्पष्ट एंव सहीं होना चाहिए। इसका मतलब है कि आश्रित चर, स्वतंत्र चर का फलन होना चाहिए। उदाहरण के लिए, जब हम कहते हैं कि विज्ञापन बिक्री में वृद्धि लाता हैं, तब हम यह कहते हैं कि बिक्री भी विज्ञापन में प्रभाव डालती है।

(d) शर्तें जो स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच प्राक्कलित की गई है वह भी वहीं होना चाहिए जिसे प्रतीपगमन मॉडल के प्रयोग के उपरान्त प्राप्त हो। दूसरे शब्दों में, इसका अर्थ सामान्य है कि पूरे प्रतीपगमन समीकरण के गणना में चरों के बीच पाया जाने वाला संबंध यथावत रहे।

(e) विश्लेषण का प्रयोग जिस परिसर के लिए किया जा रहा है वह यथावत रहना चाहिए अर्थात समय अवधि या विहित चरों की संख्या आदि में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहिए।

9.2.2 साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल

साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल के स्थिति में एक चर का प्रयोग एक हीं अज्ञात चर के अनुमान के लिए रैखिक संबंध की मान्यता के आधार पर किया जाता है अर्थात् चरों के बीच संबंध का निम्न प्रकार का रूप हो सकता हैं, $Y = a + bX$.

वह चर जिसका अनुमान या भविष्यवाणी करनी है, आश्रित चर एवं वह चर जिसके आधार पर भविष्यवाणी करनी है, उसे स्वतंत्र चर कहते हैं।

साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल[1] या प्रतीपगमन रेखा का निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$Y_i = a + bX_i + e_i$$

जहां, Y_i एक आश्रित चर।

X_i एक स्वतंत्र चर है।

e_i एक अप्रत्याशित दैव चर है।

(सामान्यतया इसे रेजिडेविल या त्रुटि पद कहा जाता हैं)

(a) 'a', Y–अवरोध को प्रस्तुत करता है, अर्थात् अवरोध यह आश्रित चर के मूल्य को बताता है, जब स्वतंत्र चर का मूल्य शून्य होता है। लेकिन इसका व्यवहारिक अर्थ तभी है जब स्वतंत्र चर का संभावित मूल्य शून्य हो।

(b) ‘b’, एक अचर राशि है जो प्रतीपगमन रेखा के ढाल को बताता है। रेखा का ढाल स्वतंत्र चर के मूल्य में इकाई के बराबर परिर्वतन के फलस्वरूप, आश्रित चर में होने वाले के मूल्य को बताता है।

यदि दो अचर राशि (जैसे a एवं b) ज्ञात या पता हो, तब Y (*Y* से प्रदर्शित करते हैं और V-हैट पढ़ा जाता है) का भविष्यवाणी e_i के मूल्य के आकार पर निर्भर करती है। यदि मॉडल में, e_i के सभी मान बहुत बड़े हो तब हमारा प्राक्कलन बहुत अच्छा नहीं होगा लेकिन जब इनके सापेक्षिक मूल्य छोटा हो, तब अनुमानित मूल्य (*Y*), वास्तविक राशि के मूल्य (Y_i) के काफी करीब होगी।

प्रतीपगमन मॉडल के अवरोध एवं ढाल का प्राक्कलन या प्रतीगमन मॉडल के समीकरण का प्राक्कलन

प्रतीपगमन मॉडल में दो अचर राशियां या प्राचल ‘a’ एवं ‘b’ > 0, सामान्यतया पूरे समग्र में अज्ञात होते हैं और इनका प्राक्कलन दिये गये न्यायदर्श के सूचना के आधार पर किया जाता है। इसके प्राक्कलन के लिये निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं:

(a) विक्षेप आरेख विधि एवं

(b) न्यूनतम वर्ग विधि

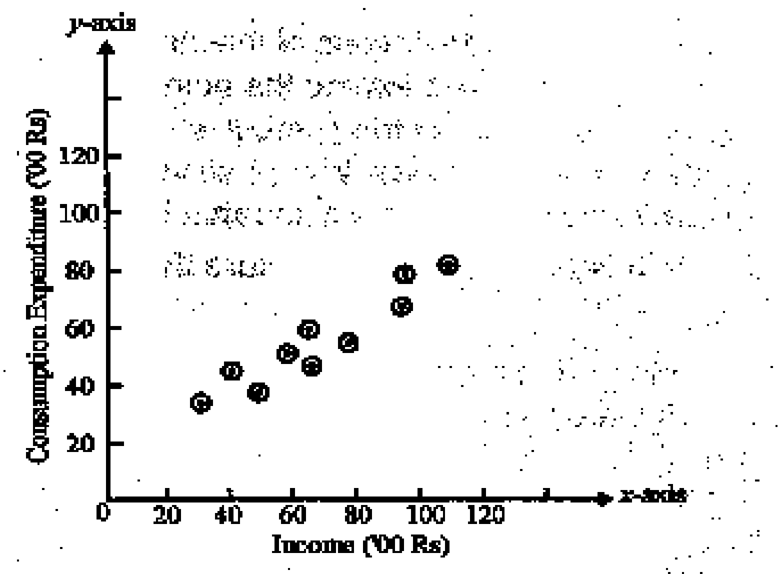
9.2.3 विक्षेप आरेख विधि

यह विधि विक्षेप आरेख के प्रयोग के बारे में बताती है जिसे विक्षेप विन्दू भी कहा जाता है। *विक्षेप आरेख* एक बिन्दुरेख प्रदर्शन है जिसमें दो श्रेणीयों के ज्ञात चरों को अंकित किया जाता है, अर्थात् ग्राफ पेपर में स्वतंत्र चर को X-अक्ष में अंकित करते हैं और वह चर जिसका हमें प्राक्कलन करनी है अर्थात् आश्रित चर राशि को Y-अक्ष में अंकित किया जाता है। बिन्दुरेख चित्र बनाने के लिए निम्नलिखित दिये गये सूचनाओं का प्रयोग कर सकते हैं:

आय (X) (सौ रूपये में)	उपभोग व्यय (Y) (सौ रूपये में)
41	44
65	60
50	39
57	51
96	80
94	68
110	84
30	34
79	55
65	48

विक्षेप आरेख स्वंय, आश्रित चर के भविष्यवाणी के लिए उपयुक्त नहीं होता है। भविष्यवाणी करने या अनुमान करने के लिए दो चरों के बीच औपचारिक संबंध को भी जानना आवश्यक होता है। इस उद्‌देश्य के लिए, विक्षेप आरेख में हम

मापक या पटरी लें और उस बिन्दु से एक सीधी रेखा खींच लें और प्रकार हम कथित रेखा के लिए अवरोध विन्दू एवं ढाल प्राप्त किया जा सकता है। और इस रेखा को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है, $Y_i = a + bX_i$ । इस समीकरण की सहायता से के दिये गये X के मूल्य से Y का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। पर इस विधि की कुछ कमियां है। उदाहरण के लिए, यदि पांच व्यक्तियों ने अलग–अलग सीधी रेखाएं एक ही विक्षेप रेखा में खींचेगें तो, यह संभव है कि दये गये दो प्राचलों ‘a’ एवं ‘b’ के लिए अलग–2 मान प्राप्त हो सकते हैं, विशेष रूप से जब एक हीं विक्षेप आरेख में बिन्दु बिखरे हों। अतः केवल इसी विधि का प्राक्कलन करने में प्रयोग नहीं किया जा सकता है। एक अधिक सूव्यवस्थित एवं सांख्यिकीय विधि की आवश्यकता है जो अनुमान समीकरण के अचर राशियों का प्राक्कलन किया जा सके। एक सबसे अच्छा फिट वाली रेखा की रचना न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके किया जा सकता है।



चित्र 9.1 विक्षेप आरेख

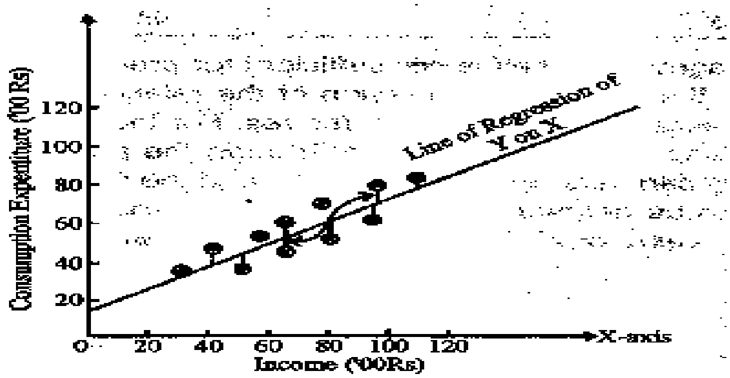
9.2.4 न्यूनतम वर्ग विधि

विक्षेप आरेख के द्वारा फिटिंग रेखा की न्यूनतम वर्ग विधि वह विधि है जो फिटिंग रेखा से चरों के उर्ध्वाधर विचलनों के वर्ग को न्यूनतम करता है। दूसरे शब्दों में, फिटिंग रेखा विक्षेप आरेख के विन्दूओं से इस प्रकार गुजरती है कि उन उर्ध्वाधर विन्दूओं से लिया गया विचलनों का वर्ग न्यूनतम होगा।

न्यूनतम वर्ग मापदंड को निम्नलिखि चित्र का संदर्भ लेकर आसानी से समझा जा सकता है, जहां पूर्व के विक्षेप चित्र का ही पुनः निर्माण, एक रेखा के साथ किया गया है जो संमंकों को न्यूनतम वर्ग रेखा के फिटिंग रेखा के अनुसार प्रस्तुत करता है।

नीचे चित्र में विभिन्न उर्ध्वाधर विन्दूओं का फिटिंग रेखा से विचलन के न्यूनतम वर्ग को छोटी रेखा से जोड़ते हुए दिखलाया गया है। इन विचलनों को ‘e’ के

प्रतीक से इंगित किया जायेगा। 'e' का मूल्य प्रत्येक विन्दूओं के साथ परिवर्तित या बदलते जायेगें।



चित्र 9.2 विक्षेप आरेख प्रतीपगमन रेखा एवं 'e' को इगिंत करने वाली छोटी रेखा

कुछ स्थितियों में यह धनात्मक होगें, जबकि अन्य स्थितियों में यह ऋणात्मक भी हो सकती है। यदि बनाये गये रेखा न्यूनतम वर्ग रेखा है, तब $\sum e_i$ का मूल्य यथासंभव न्यूनतम होगें। क्योंकि ये इसका लक्षण है इसलिए इस विधि को न्यूनतम वर्ग विधि कहते हैं।

चूंकि हम उर्ध्वाधर बिन्दु से रेखा के विचलनों के वर्ग को न्यूनतम होने की बात करते हैं यह एक प्रश्न है जिसका वर्णन करना आवश्यक है। यदि हम वास्तविक मूल्य Y से y प्राक्कलित मूल्य का विचलन (Y-y) या e के रूप में निरूपित करें तब यह कहना तार्किक होगा कि $\sum(Y-\hat{Y}) or \sum_{i=1}^{n} e_{i'}$ का संभवतः छोटा मूल्य प्राप्त हो। जबकि, केवल $\sum(Y-\hat{Y}) or \sum_{i=1}^{n} e_{i'}$ या Ye का हीं जांच गलत हो सकते हैं, क्योंकि, e के कुछ मान ऋणात्मक तथा कुछ मान धनात्मक हो सकते हैं। इस प्रकार, बड़े धनात्मक एवं ऋणात्मक मान एक दूसरे को निरस्त कर सकते हैं। लेकिन, e_i के बड़े मूल्य उसके चिन्ह् के लिए कोई आदर नहीं होती है, जो अनुमान के कमजोर पक्ष को धोतित करता है। यहां तक यदि $\sum_{i=1}^{n} |e_1|$ के समस्त चिन्हों को त्याग दे ंतो भी समस्या बनी रहेगी।

अतः मानक प्रक्रिया या विधि है कि विचलन के सभी अवलोकनों के पदों का वर्ग करके उसके चिन्ह् को खत्म कर सकते हैं। पदों को स्क्वूयरिंग या वर्ग करने के दो उद्देश्य हो सकते हैं, जैसेः

(a) यह बड़ी त्रुटि को खत्म (या दण्डित) करती है और

(b) यह धनात्मक एवं ऋणात्मक मूल्य के प्रभाव को समाप्त कर सकती है (चूंकि वर्ग करने पर ऋणात्मक त्रुटियां धनात्मक हो जाती हैं)।

विभिन्न पदो ंके त्रुटियों के बड़े योगों का वर्ग करने से बेहतर है कि प्रत्येक छोटे त्रुटि वाले पदों का वर्ग निकाल कर उनका योग ज्ञात किया जाए। अतः प्रतीपगमन रेखा को ज्ञात करने के लिए हमें न्यूनतम विचलनों के वर्ग के समग्र

को प्राप्त करके हीं रेखा के अचर राशि का मान निकाल सकते हैं जैसे ‘a’ एवं ‘b’ को रेखा का अवरोध एवं ढाल के नाम से जानते हैं। यह पूरी प्रक्रिया हम निम्नलिखित सामान्य समीकरण के द्वारा किया जा सकता है:

$$\sum Y = na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

उपरोक्त दोनों समीकरणों में, ‘a’ एवं ‘b’ दो अज्ञात चर राशि हैं और अन्य सभी मूल्य जैसे; $\sum X, \sum Y, \sum X^2, \sum XY$ आदि न्यायदर्श के आंकड़ों से लिया गया गुणनफलों का योग एवं तिर्यक गुणनफलों का योग है। और समीकरण में ‘i’ का मतलब हैं न्यायदर्श में अवलोकनों की संख्या है। निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा न्यूनतम वर्ग विधि की व्याख्या किया जा सकता है।

उदाहरण 9.1 निम्नलिखित दिये गये सूचनाओं से न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके प्रतीपगमन रेखा $\hat{Y} = a + bX_i$ को फिट करें।

अवलोकन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आय (X)(’00 रू.)	41	65	50	57	96	94	110	30	79	65
उपभोग व्यय (Y)(’00 रू.)	44	60	36	51	80	68	84	34	55	48

हल: दिये गये संमंकों को न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके प्रतीपगमन रेख $\hat{Y} = a + bX_i$ के साथ फिट करना है। उपरोक्त दिये गये सामान्य समीकरणों के विभिन्न व्यंजको का प्रयोग करके के ‘a’ एवं ‘b’ दो अज्ञात चर राशि के मान को ज्ञात किया जा सकता है। दिये गये सारणी से हमें $\sum X, \sum Y, \sum X^2, \sum XY$ को पहले ज्ञात करना होगा।

प्रतीपगमन समीकरण के लिए समग्र की गणना

अवलोकन	आय (X) (’00 रू.)	उपभोग व्यय (Y) (’00 रू.)	XY	X^2	Y^2
1	41	44	1804	1681	1936
2	65	60	3900	4225	1600
3	50	39	1950	2500	1521
4	57	51	2907	3249	2601
5	96	80	7680	9216	6400
6	94	68	6392	8836	4624
7	110	84	9240	12100	7056
8	30	34	1020	900	1156
9	79	55	4345	6241	3025
10	63	48	3120	4255	2304
N=10	$\sum X = 687$	$\sum Y = 563$	$\sum XY = 42358$	$\sum X^2 = 53173$	$\sum Y^2 = 34223$

प्रतीपगमन रेखा के लिए दिये गये सामान्य समीकरण में उपरोक्त समग्रों का मान रखने पर हमे प्राप्त होगें,

$$563 = 10a + 687b$$
$$42358 = 687a + 53173b$$

इन दोनों समीकरणों का हल 'a' एवं 'b' के लिए करने पर हमें प्राप्त होगें

$a = 14.000$ and $b =$ 0.616

अतः, प्रतीप गमन के लिए आवश्यक समीकरण है,

$$\hat{Y} = a + bX_1$$

या, $$\hat{Y} = 14.000 + 0.616X_i$$

इस समीकरण को प्रतीपगमन रेखा Y के लिए X कहेगें जिसमें Y के मान को X के चर मूल्यों का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

प्राक्कलित समीकरण के शुद्धता की जांच

उपरोक्त कथित प्रतीपगमन रेखा को ज्ञात करने के उपरान्त, इसके शुद्धता के स्तर की जांच भी उतना हीं आवश्यक है। इस उद्देश्य को पूरा करने लिए जिस विधि का प्रयोग किया जा सकता है, वह एक गणितीय विशेषता हैं जिसके अन्तर्गत न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके रेखा को फिट किया जाता है जैसे, प्रत्येक अवलोकनों का रेखा से उर्ध्वाधर विचलनों का योग शून्य के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, जब प्राक्कलन समीकरण का प्रयोग करते हुए, $\sum(Y - \hat{Y})$ निकालते हैं तो यह शून्य के बराबर होता है, यदि ऐसा नहीं हैं, तब यह निश्चित है कि उसने समीकरण के आंकलन में कोई गलती नहीं की है।

अनुमान की समस्या

जब हम अनुमान या प्राक्कलन के बारे में बात करते हैं, हम सामान्यतया इंगित करता है कि यदि संबंध $Y_1 = a + bX + e_i$ पाया जाता है तब प्रतीपगमन समीकरण, $\hat{Y} = a + bX_1$ के Y चर मूल्य को प्राक्कलित करने के लिए X के विशेष मूल्य का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण 9.1 में, हम प्रतीपगमन समीकरण को प्रयोग आय एवं व्यय के आंकड़ों को लेते हैं,

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616X_i$$

इस समीकरण के आधार पर हम Y का X के लिए किसी भी दिये गये चर मूल्य का प्रयोग करके *बिन्दुओं का आकलन* किया जा सकता है। माना कि हम किसी व्यक्ति की आया 10,000 रूपये है और उसका उपभोग व्यय को ज्ञात करना चाहते हैं। हम उपरोक्त प्रतीपगमन समीकरण में, उपभोग व्यय को ज्ञात करने के लिए आय की मात्रा अर्थात् X = 100, को रखते हैं, तब

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616(100) = 75.60$$

इस प्रकार, प्रतीपगमन संबंध प्रदर्शित करता है कि एक व्यक्ति की आय यदि 10000 रूपये है तब उसका अनुमानित व्यय लगभग 7560 रूपये के बराबर होगा। लेकिन, यह एक प्राक्कलित या अनुमानित मूल्य है और यह संभंव है

उसी दिये गये आय के लिए वास्तविक व्यय अनुमानित या प्राक्कलित राशि से विचरित या विचलित हो सकती है। यदि वास्तव में ऐसा है तो हमारा अनमान या प्राक्कलन गलत हो सकता हैं, यह संभावना है कि इसका प्रयोग किया जाय तो किसी व्यक्ति के लिए और अधिक हो सकता है। ऐसे स्थिति में *अन्तराल आकलन* का प्रयोग ज्यादा श्रेयसकर होगा जो अनुमानित उपभोग व्यय के अन्तराल को बताता है। याद रखें अन्तराल जितना अधिक होग विश्वसनियता का स्तर उतना हीं अधिक होगा, लेकिन अन्तराल का आकार या चौड़ाई (या जिसे तकनीकि रूप से इसे प्राक्कलन की सुस्पष्टता कहते हैं) तय विश्वसनियता स्तर से संबंधित है और ये न्यायदर्श में विचरणशीलता (इस उदाहरण में उपभोग व्यय) के स्तर पर निर्भर करता है। इस विचरणशीलता का मापन त्रुटि पद 'e' के प्रमाप विचलन से किया जाता है, जो मानक त्रुटि के नाम से प्रचलित है।

9.2.5 अनुमान के मानक त्रुटि

अनुमान के मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकविद्ों ने प्राक्कलनों के समीकरण की विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है। प्रमाप विचलन के हीं तरह, $\hat{Y}$ का मानक त्रुटि (S.E.) माप, प्रतीपगमन रेखा के इर्द–गिर्द, Y क प्रेक्षण मूल्यों के विक्षेप या विचरणशीलता को मापता है। अनुमान के मानक त्रुटि (S.E. of $\hat{Y}$) का प्रयोग निम्न प्रकार से किया जा सकता है,

$$\text{S.E of } \hat{Y}(\text{or } S_e) = \sqrt{\frac{\sum (Y-\hat{Y})^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n-2}}$$

S.E of $\hat{Y}$(or S_e) = अनुमान के मानक त्रुटि

Y = Y का अवलोकित मूल्य

$\hat{Y}$ = Y का आकलित मूल्य

e = त्रुटि पद =(Y-$\hat{Y}$)

n = न्यायदर्श में उपलब्ध अलोकनों की संख्या।

नोटः उपरोक्त सूत्र में, n-2 n के स्थान पर का प्रयोग करते हैं क्योंकि न्यायदर्श में अवलोकनों का दो अचर राशि के लिए विचरणशीलता के आकलन में स्वतंत्रता की कोटि में खो जाती है। जैसा कि उपरोक्त स्थिति में 'a' एवं 'b' जिसके स्थान को उसी न्यायदर्श के अवलोकनो से ज्ञात किया जा सकता है।

विश्वसनीयता के आधारभूत माप के लिए S_e के वर्ग को हीं त्रुटि का प्रसरण के नाम से जानते है। प्रसरण मूल्य के अधिक होने पर, e के राशि का विशेष महत्व है और अनुमानित संमंक के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण की विश्वसनीयता भी कम होगी।

आकलन के मानक त्रुटि का निर्वचन और छोटे एवं बड़े न्यायदर्शों के लिए विष्वास की सीम के आकलन को ज्ञात करना

आकलन के मानक त्रुटि मूल्य के अधिक होने से तात्पर्य है कि अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के इर्द–गिर्द अधिक विक्षेपित या अपकिरण होना। यदि आकलन के मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो तब आकलित समीकरण आश्रित चरों के लिए एक 'पूर्ण' अनुमानक (अर्थात् शत् प्रतिशत सत्य अनुमानक) होगी।

बड़े न्यायदर्श के स्थिति में, अर्थात् जहां, n>30 एक न्यायदर्श में यह कल्पना की जाती है कि प्रेक्षण विन्दू प्रायः प्रतीपगमन रेखा के इर्द–गिर्द सामान्य रूप से वितरित है तब हमें यह प्राप्त हो सकता है,

सभी विन्दू 68% के अर्न्तगत आते हैं, $\hat{Y} \pm 1$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

सभी विन्दू 95.5% के अर्न्तगत आते हैं, $\hat{Y} \pm 2$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

सभी विन्दू 99.7% के अर्न्तगत आते हैं $\hat{Y} \pm 3$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

इसे निम्न रूप से कहा जा सकता है,

(a) Y के अवलोकित मूल्य, प्राक्कलित मूल्य $\hat{Y}$ के इर्द–गिर्द सामान्य रूप से वितरित हैं, और

(b) प्राक्कलित मूल्य $\hat{Y}$ के इर्द–गिर्द, प्रत्येक वितरण के लिए प्रसरण मूल्य एक हीं होगी।

छोटे न्यायदर्श के स्थिति में, अर्थात् जहां, n<30 हो, न्यायदर्श में वितरण का प्रयोग दो उपर्यूक्त सीमा को ज्ञात करते हैं जो निम्न रूप से किया जा सकता हैः

$$\text{उपरी सीमा} = \hat{Y} + 't'(SE_e)$$

$$\text{निम्न सीमा} = \hat{Y} - 't'\ (SE_e)$$

जहां, $\hat{Y}$ = X के ज्ञात मूल्य से, Y का प्राक्कलित मूल्य,

SE_e = प्राक्कलन का मानक त्रुटि

't' = निर्धारित विश्वास के स्तर पर दिये गये स्वतंत्रता की कोटि में 't' का सारणी मान।

9.2.6 साधारण प्रतीपगमन से संबंधित कुछ अन्य विस्तृत बातें

कभी–कभी हम Y के प्राक्कलन समीकरण को भी Y का X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण के रूप में जानते हैं, इसे निम्न रूप से लिख सकते हैं,

$$(\hat{Y} - \overline{Y}) = r\frac{o_y}{o_x}(X_i - \overline{X})$$

$$\hat{Y} = r\frac{o_y}{o_x}(X_i - \overline{X}) + \overline{Y}$$

जहां, $r = X$ एवं Y के बीच साधारण सहसंबंध के गुणांक

o_y = Y श्रेणी का प्रमाप विचलन

$o_x = X$ श्रेणी का प्रमाप विचलन

$\overline{X} = X$ का माध्य

$\overline{Y} =$ Y का माध्य

$\hat{Y} = Y$ के लिए प्राक्कलन

$X_i =$ किसी दिये गये X के मूल्य जिससे Y का प्राक्कलन किया जाना है।

यह निम्न सूत्र पर आधारित है अर्थात,

$$\hat{Y} = a + bX_i$$

X_i के गुणांक का निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है,

$$X_i \text{ का गुणांक} = b = r\frac{o_y}{o_x}$$

इसे Y का X पर आश्रित प्रतीपगमन गुणांक के नाम से भी जानते हैं,
Y का X पर आश्रित रेखा या,

$$b_{xy} = \frac{\sum Xy - n\overline{X}\overline{Y}x\sqrt{\sum Y^2 - n\overline{Y}^2}}{\sqrt{\sum Y^2 - n\overline{Y}^2}\sqrt{\sum X^2 - n\overline{X}^2}\sqrt{\sum X^2 - n\overline{X}^2}}$$

और, $a = -r\frac{o_y}{o_x}\overline{X} + \overline{Y}$

इसी प्रकार, X के प्राक्कलन समीकरण को भी X का Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण के रूप में जानते हैं, इसे निम्न रूप से लिख सकते हैं,

$$(\hat{X} - \overline{X}) = r\frac{o_x}{o_y}(Y - \overline{Y})$$

या, $$\hat{X} = r\frac{o_x}{o_y}(Y - \overline{Y}) + \overline{X}$$

और,

X का Y पर आश्रित प्रतीपगमन गुणांक (or b $_{xy}$) $r\frac{o_x}{o_y} = \frac{\sum XY - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum Y^2 - n\overline{Y}^2}$

यदि हमे दो प्रतीपगमन समीकरण हल के लिए दिये हों जैसे कि उपर बताया गया है, तब दो अचर राशि 'a' एवं 'b' के मदद से X एवं Y, के मूल्य को ज्ञात करेंगे फिर उसके बाद Y एवं X के मूल्य, तब हमें X का माध्य (अर्थात् $\overline{X}$) और का Y माध्य मूल्य (अर्थात् $\overline{Y}$) प्राप्त होता है।

यदि हमे दो प्रतीपगमन गुणांक (अर्थात्; b_{xy} और b_{yx}) दिये हों, तब इनके मूल्यों का प्रयोग करके सहसंबंध गुणांक, दोनों पदों या प्रतीपगमन गुणांकों के गुणनफलों का वर्गमूल निकाल कर ज्ञात कर सकते हैं जैसे कि नीचे दिया गया है,

$$r = \sqrt{b_{YX} b_{XY}}$$
$$= \sqrt{r\frac{o_y}{o_x}.r\frac{o_x}{o_y}}$$
$$= \sqrt{r.r} = r$$

सहसंबंध गुणांक r, के चिन्हों (±) का निर्धारण दिये गये प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्हो्ं के आधार पर किया जा सकता है। यदि प्रतीपगमन गुणांक का चिन्ह् ऋणाात्मक होगा तब सहसंबंध गुणांक r, के चिन्ह् भी (-) ऋणात्मक होगें और यदि प्रतीपगमन गुणांक के चिन्ह् धनात्मक होगें तो सहसंबंध गुणांक r, के चिन्ह् भी (+) धनात्मक होगें। यहां याद रखना आवश्यक है कि दोनों प्रतीपगमन गुणांक के चिन्ह् सामान होना चाहिए भले हीं वह ऋणात्मक या धनात्मक हो, क्योंकि इसी के चिन्ह् से हीं सहसंबंध के चिन्ह् भी निर्धारित होते हैं।

उदाहरण 9.2 निम्नलिखित सूचनाएं दी गई हैः

	X	f
माध्य	39.5	47.5
प्रमाप विचलन	10.8	17.8

X और Y के बीच साधारण सहसंबंध गुणांक = + 0.42

X और Y के प्राक्कलन समीकरण को ज्ञात करें।

हलः Y के प्राक्कलन समीकरण को निम्न रूप से प्राप्त किया जा सकता है,

$$(\hat{Y} - \overline{Y}) = r\frac{o_y}{o_x}(X_i - \overline{X})$$
$$\hat{Y} = r\frac{o_y}{o_x}(X_i - \overline{X}) + \overline{Y}$$
$$= 0.42\frac{17.8}{10.8}(X_i - 39.5) + 47.5$$
$$= 0.69X_i + 20.25$$

X के प्राक्कलन समीकरण को निम्न रूप से प्राप्त किया जा सकता है

$$\hat{X} - \overline{X} = r\frac{o_x}{o_y}(Y_i - \overline{Y})$$

या, $$\hat{X} = \mathrm{r}\frac{o_x}{o_y}(Y_i - \overline{Y}) + \overline{X}$$

या, $$= 0.42\frac{10.8}{17.8}(Y_i - 47.5) + 39.5$$
$$= 0.26Y_i - 12.25 + 39.5$$

$$=0.26Y_i + 27.25$$

उदाहरण 9.3: निम्नलिखित आंकड़े दिये गये हैं:

X का प्रसरण = 9

प्रतीपगमन समीकरण:

4X - 5Y + 33 = 0

20X- 9Y- 107 = 0

ज्ञात करें कि:

1. X और Y का माध्य मूल्य।
2. X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक।
3. Y का प्रमाप विचलन।

हल: 1. दो चरों X और Y के माध्य मूल्य को ज्ञात करने के लिए हमे दोनो प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप से हल करना होगा:

4X - 5Y + 33 = 0 ------------------(1)

20X- 9Y- 107 = 0 ------------------(2)

यदि समीकरण (1) को 5 से गुणा करते हैं तब हमे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

20X - 5Y + 33 = 0 ------------------(3)

20X- 9Y- 107 = 0 ------------------(2)

\-   +   -

\- 16Y = -272 समीकरण (2) को समीकरण (3) से घटाने पर

या Y = 17

समीकरण (1) में Y का मान रखने पर हम पाते हैं,

$$4X = - 33 + 5(17)$$

$$X = \frac{-33+85}{4} = \frac{52}{4} = 13$$

अतः, $\overline{X} = 13$ एवं $\overline{Y} = 17$

2. सहसंबंध गुणांक को ज्ञात करने के लिए सबसे पहले हम दो प्रतीपगमन समीकरणों में से एक प्रतीपगमन समीकरण को X के लिए प्राक्कलन समीकरण मान लिया जाय,

माना कि, 20X - 5Y + 33 = 0, X का प्राक्कलन समीकरण है तब,

$$\overline{X} = \frac{5Y_i}{4} - \frac{33}{4}$$

और, उपरोक्त समीकरण से हम प्रतीपगमन समीकरण से प्रतीपगमन गुणांक

$$b_{XY} = \frac{5}{4}$$

अब दूसरे समीकरण को Y के लिए प्राक्कलन समीकरण मानते हुए निम्न क्रियाकलाप करते हैं,

$$20X - 9Y - 107 = 0$$

या, $$\hat{Y} = \frac{20X_i}{9} - \frac{107}{9}$$

और, उपरोक्त समीकरण से हम प्रतीपगमन समीकरण से प्रतीपगमन गुणांक $b_{YX} = \frac{20}{9}$

यदि उपरोक्त समीकरण सहीं हैं तब सहसंबंध गुणांक निश्चित रूप से r के बराबर होगा,

$$r = \sqrt{5/4 \times 20/9} = \sqrt{25/9} = 5/3 = 1.6$$

जो असंभव है, क्योंकि किसी भी स्थिति में r का मूल्य 1 से अधिक नहीं हो सकता है। अतः हमें प्राक्कलन समीकरण बारे की गई परिकल्पना को बदलते हुए एवं इसे अदला–बदली करके, पुनः लिखने पर निम्नलिखित दो प्राक्कलन समीकरण प्राप्त होगें:

$$\hat{X} = \frac{9Y_i}{20} + \frac{107}{20}$$

एवं, $$\hat{Y} = \frac{4X_i}{5} + \frac{33}{5}$$

अतः $r = \sqrt{9/20x4/5}$

$= \sqrt{9/25}$

$= 3/5$

$= 0.6$

चूंकि, प्रतीपगमन गुणांक के धनात्मक चिन्ह् है, इसलिए हम $r = +0.6$ लेते हैं।

3. के लिए प्रमाप विचलन की गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है:

X का प्रसरण = 9 X का प्रमाप विचलन = 3

$$b_{XY} = r\frac{o_x}{o_y} = \frac{4}{5} = 0.6 = \frac{o_y}{3} = 0.2o_y$$

अतः $o_y = 4$

उदाहरण 9.4: Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा ज्ञात करें।

X :	1	2	3	4	5	8	10
Y :	9	8	10	12	14	16	15

हल:

X	Y	X^2	XY
1	9	1	9

2	8	4	16
3	10	9	30
4	12	16	48
5	14	25	70
8	16	64	128
10	15	100	150
33	**84**	**219**	**451**

N = 7 $\bar{x} = \frac{33}{7} = 4.7143;$ $\bar{y} = \frac{84}{7} = 12$

$$b_{yx} = \frac{N\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{N\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{7 \times 451 - 33 \times 84}{7 \times 219 - 33^2}$$

$$= \frac{3157 - 2772}{1533 - 1089}$$

$$= \frac{385}{444} = 0.8671$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा,

$$y - \bar{y} = b_{yx}\left(x - \bar{x}\right)$$

y – 12 = 0.8671 (x – 4.7143)

y = 0.8671 x + 7.9122

उदाहरण 9.5: उचित प्रतीपगमन रेखा के मदद से निम्नलिखित संमंकों का प्रयोग कर Y का मान ज्ञात करें जब X = 64 हो।

X :	65	66	67	67	69	71	72	70	65
Y :	67	68	69	68	70	70	69	70	70

हल:

x	y	dx	dy	dx^2	dxdy
65	67	– 3	– 2	9	6
66	68	– 2	– 1	4	2
67	69	– 1	0	1	0
67	68	–1	–1	1	1

69	70	1	1	1	1
71	70	3	1	9	3
72	69	4	0	16	0
70	70	2	1	4	2
65	70	– 3	1	9	– 3
612	**602**	**0**	**0**	**54**	**12**

$\overline{X} : \frac{\Sigma x}{n} = \frac{612}{9} = 68$ $\qquad$ $\overline{Y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{602}{9} = 69$

dx = x – 68 $\qquad$ dy = y – 69

$$b_{yx} = \frac{N\,\Sigma\,dx\,dy - \Sigma\,dx\,\Sigma dy}{N\,\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$$

$$= \frac{9 \times 12 - 0}{9 \times 54} = 0.2222$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$y - \bar{y} = b_{yx}\,(x - \bar{x})$$

y – 69 = 0.222 (x – 68) …………………. (1)

y = 0.222 x + 53.904

जब, x = 64 { समीकरण (1) से}

y – 69 = – 0.8888

अतः y = 68.112 है।

उदाहरण 9.6 निम्नलिखित संमंकों से दो प्रतीपगमन रेखाओं की गणना करें।

x :	10	12	13	12	16	15
y :	40	38	43	45	37	43

X को भी प्राक्कलित करें जब Y = 20 दी गई हो।

हलः

X	**Y**	**XY**	**X^2**	**Y^2**
10	40	400	100	1600
12	38	456	144	1444
13	43	559	169	1849
12	45	540	144	2025
16	37	592	256	1369
15	43	645	225	1849

78	246	3192	1038	10136

$$\overline{X}=\frac{\Sigma X}{N}=\frac{78}{6}=13.00$$

$$\overline{Y}=\frac{\Sigma Y}{N}=\frac{246}{6}=41.00$$

$$b_{xy}=\frac{N\,\Sigma xy-\Sigma x\,\Sigma y}{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}$$

$$=\frac{6\times3192-78\times246}{6\times10136-(246)^2}$$

$$=\frac{19152-19188}{60816-60516}$$

$$=\frac{-36}{300}=-\,0.1200$$

$$b_{yx}=\frac{N\,\Sigma xy-\Sigma x\,\Sigma y}{N\,\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}$$

$$=\frac{-36}{6\times1038-(78)^2}\ \text{from}\ b_{xy}$$

$$=\frac{-36}{6228-6084}=\frac{-36}{144}=-0.2500$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$y-\overline{y}=b_{yx}\left(x-\overline{x}\right)$$

y – 41 = – 0.25 (x – 13)

y – 41 = – 0.2500 x + 3.25

y = 44.25 – 0.25

y = 44.25 – 0.25 x

X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$x-\overline{x}=b_{xy}\left(y-\overline{y}\right)$$

$$=-0.1200(y-41)$$

जब Y = 20, तब X के मूल्य को प्राक्कलित करें

x – 13 = – 0.1200 y + 4.92

x = 17.92 – 0.12 × 20 {चूंकि, Y = 20 दिया गया है।}

x = 17.92 – 2.400

x = 15.52

उदाहरण 9.7: नीचे दिये गये संमंकों से निम्नलिखित को ज्ञात करें।

(a) दो प्रतीपगमन समीकरण

(b) दो विषयों गणित एवं सांख्यिकी के बीच प्राप्तांक में सहसंबंध गुणांक

(c) वह सांख्यिकी में वह सर्वोतम संभावित प्राप्तांक जब गणित विषय में प्राप्तांक 30 है।

गणित में प्राप्तांक (x): 25 28 35 32 31 36 29 38 34 32
सांख्यिकी में प्राप्तांक (y): 43 46 49 41 36 32 31 30 33 39

हलः

x	y	$x = x - \bar{x}$ $\bar{x} = 32$	$y = y - \bar{y}$ $\bar{y} = 38$	xy	x^2	y^2
25	43	– 7	5	– 35	49	25
28	46	– 4	8	– 32	16	64
35	49	3	11	33	9	121
32	41	0	3	0	0	9
31	36	– 1	– 2	2	1	4
36	32	4	– 6	– 24	16	36
29	31	– 3	– 7	21	9	49
38	30	6	– 8	– 48	36	64
34	33	2	– 5	– 10	4	25
32	39	0	1	0	0	1
320	**380**	**0**	**0**	**– 93**	**140**	**398**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{320}{10} = 32 \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{380}{10} = 38.00$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{-93}{398} = -0.2337$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{-93}{140} = -0.6643$$

(a) Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$y - \bar{y} = b_{yx}\left(x - \bar{x}\right)$$

$= – 0.6643 (x – 32)$

$= – 0.6643 x + 21.26$

$y = 59.26 – 0.6643 x$

(b) X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$x-\bar{x}=b_{yx}\left(y-\bar{y}\right)$

= – 0.2337 (y – 38)

x – 32 = – 0.2337 y + 8.88

x = 40.88 – 0.2337 y

$r=\pm\sqrt{b_{xy}\,.b_{yx}}$

$=-\sqrt{-0.2337\,x\,-0.6643}$

= – 0.3940

(c) X = 30 के दिये होने पर Y का मान ज्ञात करने के लिए, Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण में, X = 30 का मान रखने पर,

y = 59.26 – 0.6643 × 30

= 59.26 – 19.93

= 39.33

y≈ 39

अर्थात् सांख्यिकी विषय में, 39 सबसे संभावित प्राप्तांक है जो गणित विषय के प्राप्तांक 30 होने पर प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 9.8: नीचे दो चरों Y एवं X के लिए दिये गये सूचनाओं के आधार पर दो प्रतीपगमन रेखाएं एवं सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

N = 10 Σx = 20 Σy = 40; Σx^2 = 240; Σy^2 = 410; Σxy = 200

हल:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{N}=\frac{20}{10}=2.00$$

$$\bar{y}=\frac{\Sigma y}{N}=\frac{40}{10}=4.00$$

$b_{xy}=\dfrac{N\,\Sigma xy-\Sigma x\,\Sigma y}{N\Sigma y^2-\left(\Sigma y\right)^2}$, जैसे कि दिया है Σx ≠ 0 एवं Σy ≠ 0.

$$=\frac{10\times 200-20\times 40}{10\times 410-(40)^2}$$

$$=\frac{2000-800}{4100-1600}$$

$$=\frac{1200}{2500}=0.4800$$

$$b_{yx}=\frac{N\,\Sigma xy-\Sigma x\,\Sigma y}{N\Sigma x^2-\left(\Sigma x\right)^2}$$

$$=\frac{1200}{10\times 240-(20)^2}$$

$$= \frac{1200}{2000} = 0.6000$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$y - \bar{y} = b_{yx}\left(x - \bar{x}\right)$$

$$= 0.60\ (x - 2)$$

$$y - 4 = 0.60\ x - 1.20$$

$$y = 2.80 + 0.6000\ x$$

X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$x - \bar{x} = b_{xy}\left(y - \bar{y}\right)$$

$$= 0.480\ (y - y)$$

$$x - 2 = 0.480\ y - 1.92$$

$$x = 0.08 + 0.4800\ y$$

चरों के बीच सहसंबंध गुणांक,

$$r = \frac{N\Sigma xy - \Sigma x\, \Sigma y}{\sqrt{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{1200}{\sqrt{2000}\ \sqrt{2500}} = 0.5367$$

(or)

$$y = \pm\sqrt{b_{xy}\,.\,b_{yx}}$$

$$= \pm\sqrt{0.4800 \times 0.6000}$$

$$= \sqrt{0.288}$$

$$= 0.5367$$

9.3 सारांश

अब हम इकाई में वर्णन किये गये महत्वपूर्ण अवधारणाओं की पुनरावृति करते हैं। प्रतीपगमन उस प्रक्रिया का नाम है जिसके द्वारा एक चर के मदद से दूसरे चर का अनुमान या भविष्यवाणी किया जाता है। जब प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किया जाता है तब यह मान लिया जाता है कि स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच वास्तविक संबंध विद्यमान है। आश्रित चर के मूल्य दैव प्रकार के होगें लेकिन स्वतंत्र चर के मूल्य बिना किसी त्रुटि एवं प्रयोगकर्ता द्वारा चयन किया जाता है। यद्यपि, आश्रित चर स्वतंत्र का फलन होता है, और यह संबंध विश्लेषण दिये गये समय अन्तर्गत या परासर के संपूर्ण प्रक्रिया तक स्थिर रहता है।

सामान्य रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण में अनुमान या भविष्यवाणी के लिए एक हीं स्वतंत्र चर का प्रयोग, दोनो चरों के बीच रैखिक संबंध मानते हुए किया जाता है। प्रतीपगमन रेखा के अवरोध या इंटरसेप्ट एवं ढाल को ज्ञात करने के लिए दो विधियों विक्षेप आरेख एवं न्यूनतम वर्ग का प्रयोग किया जाता है। विक्षेप

आरेख के अन्तर्गत दो श्रेणियों के ज्ञात चरों को ग्राफ पेपर अर्थात् स्वतंत्र चर को X–अक्ष एवं आश्रित चर को Y–अक्ष में अंकित किया जाता है। रेखा फिट करने की न्यूनतम् वर्ग विधि (सर्वोपयूक्त रेखा या प्रतीपगमन रेखा) के अन्तर्गत विक्षेप आरेख वह विधि है जो उर्ध्वाधर विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करता है। जैसा कि उपर वर्णित प्रतीपगमन रेखा को ज्ञात करने के उपरान्त, उसकी सत्यता की जांच भी किया जा सकता है। इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए, न्यूनतम् वर्ग विधि के रेखा फिटिंग के गणितीय विशेषता का प्रयोग किया निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता है, उदाहरण के लिए, ऋणात्मक एवं धनात्मक चरों के अलग–2 योग का अंतर शून्य के बराबर होता है। मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है। प्रमाप विचलन के हीं तरह, मानक त्रुटि भी Y चर में विचरणशीलता को मापता है अथवा प्रतीपगमन रेखा के इर्द–गिर्द Y के अवलोकित मूल्य के विक्षेप को मापता व प्रदर्शित करता है। मानक त्रुटि के अधिक होने अर्थ है कि श्रेणी में अपकिरण का ज्यादा होना या दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस–पास विखरा होना। लेकिन यदि प्राक्कलन की मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो जाये तब प्राक्कलन समीकरण आश्रित चर के लिए एक संपूर्ण प्राक्कलक (शत प्रतिशत् सत्य अनुमानक) कहलायेगी।

9.4 शब्दावली

- **प्रतीपगमन विश्लेषणः** वैसा संबंध जिसका प्रयोग एक चर (वह अज्ञात चर आश्रित चर कहलाता है) के बारे में अनुमान एवं भविष्यवाणी किसी दूसरे चर या चरों (वह ज्ञात चर स्वतंत्र चर कहलाता है) के आधार पर किया जाता है।
- **विक्षेप आरेखः** वह आरेख जिसका प्रयोग दो ज्ञात श्रेणियों के चरों, अर्थात् स्वतंत्र चर को दिये गये सूचना के अनुसार, ग्राफ पेपर पर X–अक्ष एवं वह चर जिसका अनुमान करना है, अर्थात् आश्रित चर को Y–अक्ष में अंकित किया जाता है।
- **अनुमान के मानक त्रुटिः** मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है।

9.5 बोध प्रश्न

(A) खाली स्थानों को भरें।

i. 'प्रतीपगमन' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1877 में ————————— के द्वारा किया गया था।

ii. प्रतीपगमन विश्लेषण में, यह माना जाता है कि ————————— चरों एवं स्वतंत्रता चरों के बीच वास्तविक संबंध विद्यमान है।

iii. रेखा फिट करने की न्यूनतम् वर्ग विधि (सर्वोपयूक्त रेखा या प्रतीपगमन रेखा) के अन्तर्गत विक्षेप आरेख वह विधि है जो उर्ध्वाधर विचलनों के वर्गों के योग को —————————— करता है।

iv. अन्तराल आंकलन विधि में, अन्तराल जितना अधिक होगें हमें विश्वनीयता का स्तर भी ———————— हो सकते हैं।

v. मानक त्रुटि के ———————— प्रसरण के नाम से भी जानते हैं जो त्रुटि पद के विश्वसनीयता के आधारभूत माप है।

vi. मानक त्रुटि के अधिक होने अर्थ है कि श्रेणी में अपकिरण का ——— होना या दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस–पास विखरा होना।

(B) बतायें कि कौन सा कथन सत्य एवं कौन–सा कथन असत्य है।

i. आश्रित चर के मूल्य दैव प्रकार के होगें लेकिन स्वतंत्र चर के मूल्य बिना किसी त्रुटि एवं प्रयोगकर्ता द्वारा चयन किया जाता है।

ii. सामान्य रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण में अनुमान या भविष्याणी के लिए एक हीं स्वतंत्र चर का प्रयोग, दोनो चरों के बीच द्विघातीय संबंध मानते हुए किया जाता है।

iii. विक्षेप आरेख के अन्तर्गत दो श्रेणियों के ज्ञात चरों को ग्राफ पेपर अर्थात् स्वतंत्र चर को X–अक्ष एवं आश्रित चर को Y–अक्ष में अंकित किया जाता है।

iv. कुछ बड़े त्रुटियों के समग्रों के वर्ग को न्यूनतम करने से अच्छा है कि प्रत्येक विचलनों के वास्तविक पदों के वर्गों के समग्र को न्यूनतम् का चयन किया जाय।

v. मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है।

vi. यदि प्राक्कलन की मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो जाये तब प्राक्कलन समीकरण आश्रित चर के लिए एक संपूर्ण प्राक्कलक (शत प्रतिशत् सत्य अनुमानक) कहलायेगी।

9.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A)

i. सर फ्रांसिस गॉल्टन, ii. आश्रित, iii. न्यूनतम,
iv. अधिकतम, v. वर्ग, vi. अधिकतम

(B)

i. सत्य, ii. असत्य, iii. असत्य,
iv. सत्य, v. सत्य, vi. असत्य,

9.8 स्वपरख प्रश्न

1. प्रतीपगमन तकनीक के प्रयोग के लिए कौन सी महत्वपूर्ण मान्यताएं हैं?
2. विक्षेप आरेख विधि का वर्णन करें।
3. प्रतीपगमन मॉडल में अवरोध एवं ढाल के प्राक्कलन के लिए किस प्रकार न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग किया जाता है?
4. प्राक्कलन के मानक त्रुटि के माप क्या है?
5. एक प्राक्कलन के मानक त्रुटि का निर्वचन करें।

9.5 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics, Goon, Guptha and Dasguptha, World Press Limited, Calcutta.
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.
5. www.wikipedia.com

*****

इकाई 10 सूचकांक

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- समयानुसार आर्थिक चरों में किस प्रकार परिवर्तन होता है इसका वर्णन कर सकें।
- निर्देशांकों के तीन महत्वपूर्ण प्रकारों से परिचित हो सकें, कीमत सूचकांक, मूल्य सूचकांक एवं मात्रा सूचकांक का वर्णन कर सकें।
- सूचकांक के गलत प्रयोग से होने वाली समस्याओं का वर्णन कर सकें।
- विभिन्न प्रकार के सूचकाकों की गणना कर सकें।

10.1 प्रस्तावना

सूचकांक एक सांख्यिकीय माप है जो चरों या चरों से संबंधित समूह में परिवर्तन या अतंर को सामान्य रूप से प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है। यह अतंर वस्तु के भौतिक मात्रा, वस्तुओं के कीमत या ऐसे अवधारणाएं जिन्हें 'क्षमता', ''बुद्धिमता'' या सुन्दरता के रूप में हो सकते हैं। इनमें तुलना समय अवधियों के बीच, स्थानों के बीच, विषयवस्तु के बीच आदि में की जा सकती है। हम विभिन्न समयों या विभिन्न स्थानों या देशों के तुलनात्मक जीवन निर्वाह

लागत सूचकांक, विभिन्न वर्षों में उत्पादन की भौतिक मात्रा या विभिन्न सरकारी कार्यालय की क्षमता से संबंधित सूचकांकों आदि हो सकते हैं। जबकि, हम अपने विशिष्ट ध्यान को सूचकांकों के निर्माण, समयानुसार परिवर्तन को मापने तक सीमित रखते हैं।

10.2 सूचकांक–परिभाषा

सूचकांक वह संख्या होता है जिसका प्रयोग किसी विशिष्ट परिघटना के स्तर उसी प्रकार के घटनाओं से कुछ मानक अवधि के सापेक्ष अध्ययन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, सूचकांक वह संख्या है जिसका प्रयोग एक यंत्र की तरह वस्तुओं के किसी समूह के मूल्य, मात्रा, कीमत आदि के बीच, विभिन्न परिस्थितियों में तुलना करने के लिए किया जाता है, उदाहरण के लिए, किसी निश्चित स्थान या समय अवधि और किसी दूसरे स्थान या समय अवधि। जब तुलना किसी वस्तु के कीमत के संदर्भ में हो तब उसे कीमत सूचकांक कहते हैं, जब तुलना किसी वस्तु की भौतिक मात्रा से संबंधित की जाये तब इसे मात्रात्मक सूचकांक कहते हैं। अन्य सूचकांकों को भी इसी तरह से परिभाषित किया जाता है। सूचकांक विभिन्न स्थितियों में उत्पन्न होने वाले विचलनों के तुलना का माध्य या औसत है, उदाहरण के लिए समय में परिवर्तन या स्थान में परिवर्तन होना।

10.2.1 सापेक्षिक

किसी चरों के मूल्य का दिये गये वर्ष (या स्थान) को चर मूल्य के किसी निश्चत वर्ष से भाग देते हैं तब इसे सापेक्षिक माप कहते हैं और इसे सामान्यतः प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है।

1. **कीमत सापेक्षः** जब किसी दिये हुए वर्ष में वस्तु के कीमत को, किसी निश्चित वर्ष के आधार पर प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तब इसे हीं सापेक्ष कीमत कहा जाता है।

   माना कि एक वस्तु की कीमत भारत में वर्ष 2001 के लिए 95 रूपये प्रति किलोग्राम था और 2000 में इसका कीमत 80 रूपये प्रति किलोग्राम था।

   तब वर्ष 2001 के लिए सापेक्ष कीमत (वर्ष 2000 का प्रयोग आधार मानते हुए) हैः

   $$\frac{95}{80} \times 100 = 118.75\%$$

   अतः कीमत सापेक्ष 118.75 प्रतिशत है।

2. **उत्पादन सापेक्षः** यदि भारत में गेंहू का उत्पादन 2002 में 5,82,000 मेट्रिक टन एवं 2004 यह 6,96,00 मेट्रिक टन था, तब वर्ष 2002 गेहूं के उत्पादन को 100 मानते हुए, वर्ष 2004 के लिए सापेक्ष उत्पादन हैः

   $$\frac{696000}{582000} \times 100 = 119.6\%$$

   अतः सापेक्ष उत्पादन 119.6 प्रतिशत है।

3. **मात्रा सापेक्षः** एक वस्तु (q_1)का उपभोग दिये गये वर्ष को, किसी निश्चित वर्ष में उसी वस्तु (q_0)के उपभोग को प्रतिशत में व्यक्त करते हैं तब इसे मात्रा सापेक्ष कहते है।

इस प्रकार सापेक्ष मात्रा = $\frac{q_1}{q_0} \times 100$

4. **मूल्य सापेक्षः** यदि p_1 एवं q_1 क्रमशः किसी वस्तु की कीमत एवं मात्रा दिये हों, तथा p_0 एवं q_0 उसी वस्तु के क्रमश कीमत एवं मात्रा किसी निश्चित वर्ष के लिए दिये गये हो तब $V_1 = p_1q_1$ दिये या चालू वर्ष का मूल्य तथा $V_0 = p_0q_0$ दिये या आधार या निश्चित वर्ष के मूल्य होगें। दिये गये या चालू वर्ष के मूल्य का अनुपात निश्चित या आधार वर्ष के अनुपात $V_1 / V_0 \times 100 = p_1q_1 / p_0q_0 \times 100$ को सापेक्ष मूल्य कहते है।

उपरोक्त कीमत, उत्पादन, मात्रा या मूल्य आदि में समस्त परिवर्तन के प्रस्तुत सार को हीं तकनीक भाषा में सापेक्ष कहा जाता है।

10.2.2 सूचकांक का वर्गीकरण

सूचकांक के वर्गीकरण के विभिन्न अवधारणाएं हैं:

1. **चरों के आधार पर**
   - **(a)** **कीमत सूचकांकः** जब दिये गये चर कीमत है।
   - **(b)** **मात्रात्मक सूचकांकः** जब दिये गये चर मात्रा हो।
   - **(c)** **मूल्य सूचकांकः** जब चर मूल्य में दिये गये हो।
   - **(d)** **उत्पादन सूचकांकः** जब दिये गये चर उत्पादन को प्रस्तुत करता हो।
2. **खुदरा एवं थोक मूल्य सूचकांक के आधार पर**
   - **(a)** **जीवन लागत सूचकांकः** जहां हम खुदरा कीमत का प्रयोग करते हैं।
   - **(b)** **थोक मूल्य सूचकांकः** जहां हम थोक कीमत का प्रयोग करते हैं।
3. **भार पर आधारित या भार के आधार पर**
   - (a) साधारण या अभारित सूचकांक
   - (b) भारित सूचकांक
4. **जब मदों या वस्तुओं की संख्या एक से अधिक हो, तब हम एक हीं सूचकांक (संयुक्त सूचकांक) ज्ञात करते हैं। इसे निम्नलिखित चार तरीकों से कर सकते हैं:**
   - (a) सापेक्ष का साधारण औसत ज्ञात करके।
   - (b) सापेक्ष का भारित औसत ज्ञात करके।
   - (c) साधारण समूहीकरण विधि से।
   - (d) भारित समूहीकरण विधि से।

10.2.3 आधार वर्ष एवं चालू वर्ष

सूचकांक की गणना के लिए हमें दो वर्ष या स्थानों की आवश्यकता होती है। वह वर्ष जिसके मूल्य का हमे तुलना करनी है उसे चालू वर्ष या चालू

अवधि कहते हैं और वह निश्चित वर्ष जिससे तुलना मानक या 100 मानकर किया जाता है उसे आधार वर्ष या आधार अवधि कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि 2005 के कीमत की तुलना वर्ष 2004 के कीमत से किया जाए तब 2005, चालू वर्ष तथा 2004 आधार वर्ष कहलायेगें।

वर्ष 2005 के सूचकांक जो वर्ष 2004 पर आधारित है उसे सामान्यतया I_{01} या P_{01} से इंगित किया जाता है जहां 0 आधार वर्ष 2004 एवं 1 चालू वर्ष 2005 को सूचित करते हैं।

10.2.4 सूचकांक की मुख्य विशेषताएं

1. **संख्या में व्यक्तः** सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन को संख्या में व्यक्त करते हैं। जैसे परिवर्ततन के उदाहरण इस प्रकार हो सकते हैं उत्पादन में वृद्धि, कीमत में कमी आदि।
2. **प्रतिशत में व्यक्तः** सूचकांक को प्रतिशत में व्यक्त किया जाता हैं इसलिए इसके परिवर्तन की मात्रा या सापेक्ष को 100 का आधार मानकर ज्ञात करते हैं पर प्रतिशत में परिवर्तन को (%) से इंगित किया जाता है।
3. **सापेक्ष मापः** सूचकांक उनको मापता है जो प्रत्यक्ष रूप से माप के योग्य नहीं है।
4. **विशिष्ट औसतः** सूचकांक औसत के विशिष्ट स्थिति को प्रस्तुत करता है, अर्थात सामानय रूप में, भारित औसत। यह एक विशिष्ट प्रकार का औसत है, क्योंकि औसत चर के मापन इकाई अलग–अलग होते हैं। जबकि साधारण औसत वहां संभव होता है जहां चरों के मापन इंकाईयां एक प्रकार का है।
5. **तुलना का आधारः** सूचकांक स्वभाव से तुलना योग्य होते हैं। इनका तुलना समयान्तराल या जगहों के बीच आदि को तुलना के आधार के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

10.2.5 सूचकांक निर्माण के मुख्य चरण

सूचकांक के निर्माण को करने के लिए विभिन्न चरणों में व्याप्त कई समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिसका सावधानी पूर्वक परीक्षण करना चाहिए।

1. **सूचकांक के उ**द्देश्यः सूचकांक के निर्माण में कौन से चरण को लेना है वह सामान्यतया इसके उद्देश्य पर निर्भर करता है। अतः सूचकांक का उद्देश्य स्पष्ट एवं संक्षेप में परिभाषित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए थोक मूल्य के लिए साधारण सूचकांक के अन्तर्गत सामान्य कीमत स्तर को पक्ति या क्षैतिज रूप में होते हैं, जबकि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक लोगों के विभिन्न वर्ग के जीवन लागत या निर्वाह के स्तर के बारे में धारणा प्रस्तुत करता है।
2. **आधार व**र्ष का चयनः आधार वर्ष वह समय अवधि होती है जिसके सापेक्ष वर्तमान वर्ष के मूल्य की तुलना की जाती है। निम्नलिखित तीन प्रकार के आधार वर्ष होते हैं:

   (a) स्थिर आधार वर्ष (एकल अवधि)

(b) स्थिर आधार वर्ष (चयनित अवधि के लिए औसत)

(c) श्रृंखला आधार

जब आधार का चयन हो तब यह निश्चित होना चाहिए कि वह आधार स्थिर है या फिर श्रृंखला आधार हैं, एक स्थिर आधार के अन्तर्गत एक हीं अवधि होती है।

(d) आधार अवधि एक सामान्य अवधि होनी चाहिए। सामान्य अवधि से हमारा अभिप्रार्य है कि वह अवधि जो सभी प्रकार के असामान्य या दैव कारणों जैसे वितीय आपात, बाढ़, आकाल, भूकंप, श्रमिकों के हड़ताल, यूद्ध, आदि से मुक्त होना चाहिए।

(e) आधार अवधि वैसी होनी चाहिए जिस अवधि के लिए विश्वसनीय संख्यात्मक संमंक उपलब्ध होना चाहिए।

(f) चालू एवं आधार वर्ष के बीच बहुत अन्तर नहीं होना चाहिए अर्थात् आधार वर्ष को बहुत दूर का नहीं होना चाहिए।

यदि किसी एक समय अवधि को सामान्य समय अवधि के रूप में चयन करने में समस्या हो तब अच्छा होगा दिये गये समय अवधियों का औसत ज्ञात किया जाय।

यदि तुलना की आवश्यकता वर्ष से वर्ष के बीच में हो तब हमें श्रृंखला आधार का चयन किया जाना चाहिए। इस विधि में, 10 स्थिर आधार होते हैं जिनसे आगामी वर्षों के लिए मूल्यों का तुलना किया जा सके, लेकिन प्रत्येक वर्ष के मूल्य की तुलना उसके तुरन्त पहले वाले वर्ष के मूल्य से किया जाता है।

3. **वस्तुओं या मदों का चयन**

(a) पहली समस्या है कि वस्तुओं का चयन क्योंकि यह संभव नहीं है कि सभी मदों या वस्तुओं विश्लेषण में सम्मिलित किया जा सके। सूचकांक का उदेद्श्य होता है कि वस्तुओं के चयन के निर्णय में सहायता प्रदान करना।

(b) कौन सी वस्तुओं को जोड़ा जाय? एक सावधानी पूर्वक वस्तुओं का चयन निम्न प्रकार से किया जा सकता है:

i. यह लोगों के वास्तविक रूचि, आदत एवं रीति रिवाज को प्रस्तुत करता है।

ii. यह मानक गुणवता वाली होनी चाहिए और इनके गुणवता में कोई विशेष विचलन नहीं होना चाहिए।

iii. इसे आसानी से पहचाना एवं वर्णन किया जाना चाहिए।

iv. यह अदृश्य या अस्पर्श योग्य वस्तु नहीं होना चाहिए।

4. **प्रतिनिधित्व कीमत का चयनः** कीमत उद्धरण को संग्रह करते समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए:

(a) वस्तुओं के कीमत को उद्धृत करने के विधि।

(b) कीमत उद्धरण के प्रकार, यह थोक मूल्य है या खुदरा मूल्य है।

(c) उस स्थान का भी ध्यान दिया जाना चाहिए कि कहां से कीमत को उद्धृत किया गया है।

5. **भारांकन की व्यवस्थाः** 'भार' शब्द से तात्पर्य है कि सूचकांक के निर्माण में वस्तुओं को सम्मिलित करने हेतु सापेक्षिक महत्व को अंकित करना। भार देने की दो विधियां हो सकती हैः

(a) **अस्पष्ट विधिः** इस विधि में, वस्तु के कुछ प्रकार की कई किस्मों का अध्ययन में प्रयोग किया जाता है। ऐसे भार को हीं अस्पष्ट भार कहते हैं।

(b) **मुखर विधिः** इस विधि में, वजन वस्तुओं के एक जावक सबूत के आधार पर निर्धारित किये जाते हैं। एक उचित भार के चयन में ऐसे सबूत का चुनाव एक वृहत समस्या होती है। भार निर्धारण से संबंधित दूसरी समस्या है कि यह भार स्थिर हो या अस्थिर है।

6. **औसत का चुनावः** संयुक्त सूचकांक के लिए किसी भी औसत का चुनाव किया जा सकता है जैसे समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, माध्यिक एवं बहुलक आदि। औसत का प्रयोग उनके विभिन्न सापेक्षिक गुण एवं दोष पर निर्भर करता है। औसत भारांकित या अभारांकित हो सकते हैं।

7. **उचित सूत्र का चुनावः** यद्यपि सूचकांक गणना करने के विभिन्न सूत्र हैं पर उचित सूत्र का चुनाव भी एक विकट समस्या होती है। एक विशिष्ट सूत्र का प्रयोग विशिष्ट प्रकार के सूचकांक व स्थिति के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

10.3 सूचकांक की गणना करने की विधियां

सूचकांक निर्माण करने की विभिन्न विधियों का वर्गीकरण दो समूहों में किया जा सकता है।

(a) अभारित सूचकांक

(b) भारित सूचकांक

अभारित सूचकांक में सभी पदों के लिए समान भार मानते हैं लेकिन भारित सूचकांक में पदों को उनके सापेक्षिक महत्व के आधार पर भार दिया जाता है। अभारित सूचकांक को पुनः आगे दो विषयवस्तु में वर्गीकृत किया जाता हैः

(i) साधारण समूहीकरण विधि

(ii) सापेक्षिक विधि के साधारण औसत

भारित सूचकांक को पुनः आगे दो विषयवस्तु में वर्गीकृत किया जाता हैः

(i) भारित समूहीकरण विधि

(ii) सापेक्षिक विधि के भारित औसत

10.3.1 अभारित सूचकांक

1. **साधारण समूहीकरण विधिः** साधारण समूहीकरण विधि से सूचकांक निर्माण करने के लिए निम्न रूप से आगे बढ़ सकते हैंः

(i) प्रचलित वर्ष के वस्तु के कीमत का योग ज्ञात करते हैं, अर्थात Σp_1 ज्ञात करें।

(ii) आधार वर्ष के वस्तु के कीमत का योग की गणना करें, अर्थात Σp_0 ज्ञात करें।

(iii) आधार वर्ष के कीमत योग से प्रचलित वर्ष के कीमत योग को भाग देतें हैं और उन्हें 100 से गुणा करें अर्थात्

$$I_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} x100$$

यहां, I_{01} साधारण समूहीकरण सूचकांक है जहों (1) प्रचलित वर्ष एवं (0) आधार वर्ष को इंगित करता है।

गुणः यह सूचकांक निर्माण करने की सरलतम विधि है क्योंकि इसे समझना आसान है और गणना में भी सरल है।

अवगुणः

(i) यह अनुपयूक्त परिणाम देते हैं जब विभिन्न वस्तुओं के कीमत अलग–अलग इकाईयों में दिया गया हो।

(ii) चूंकि इस विधि में भार का प्रयोग नहीं करते है, फलत किसी वस्तु को उनके सापेक्षिक महत्व को ध्यान नहीं दिया जाता है।

(iii) इस विधि से गणना की गई सूचकांक बिना किसी वजह से हीं छोटी एवं बड़ी मूल्यों से प्रभावित होती है।

उदाहरण 1:

साधारण समूहीकरण विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संमंकों से कीमत सूचकांक ज्ञात करें।

वस्तुएं	**इकाई**	प्रति इकाई कीमत रूपये में	
		2000	2004
A	एक किलोग्राम	10	15
B	एक किलोग्राम	40	30
C	एक दर्जन	10	12
D	एक लिटर	5	13

हलः

प्रचलित वर्ष 2004 के लिए आधार वर्ष 2000 के सापेक्ष कीमत सूचकांक,

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$I_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} x100$$

जहां,

ΣP_1 = 2004 में कुल कीमत = 70

ΣP_0 = 2000 में कुल कीमत = 65

अतः

$$L_{01} = \frac{70}{65} \times 100 = 107.7$$

यह प्रदर्शित करता है कि आधार 2000 के तुलना प्रचलित वर्ष 2004 में कीमत

वृद्धि 7.7% की हुई है।

2. **साधारण औसत की सापेक्ष विधिः** इस विधि से सूचकांक के निर्माण के लिए निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता हैः

(a) प्रत्येक वस्तु के लिए सापेक्ष कीमत ज्ञात करते हैं
प्रचलित वर्ष के लिए सापेक्ष कीमत = $\frac{\text{प्रचलित वर्ष के लिए कीमत}}{\text{आधार वर्ष के लिए कीमत}} \times 100$

$$R = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(b) समान्तर माध्य, गुणोतर माध्य की गणना करें अर्थात, प्रथम विधि के (i), सापेक्षिक कीमत को ज्ञात करे और इसे L_{01} से इंगित करते हैं।

(a) जब समान्तर माध्य का प्रयोग करेंः

$$L_{01} = \frac{\sum R}{N} = \frac{\sum\left(\frac{P_1}{P_0} x100\right)}{N}$$

(b) जब गुणोतर माध्य का प्रयोग करते हैंः

$$L_{01} = Antilog\left(\frac{\sum log R}{N}\right)$$

गुण/फायदे

(i) यह वस्तुओं के इकाईयों जो कीमत के रूप में दी होती है उनसे प्रभावित नहीं होते हैं।

(ii) यह निरपेक्ष मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है क्योंकि इसमें कीमतों को सापेक्ष कीमत में परिवर्तित किया जाता है।

(iii) इसमें सभी पदों को बराबर महत्व दिया जाता है और बिना वजह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है।

(iv) इस विधि से गणना की गई सूचकांक इकाई जांच को संतुष्ट करता है।

अवगुण/सीमाएं

(i) जैसा कि यह एक अभारित औसत है फलत सभी मदों को समान महत्व दिया जाता है।

(ii) इस विधि से गणना की गई सूचकांक, आदर्श सूचकांक के शर्तों को पूरा नहीं करता है।

(iii) इस विधि में समान्तर माध्य को प्रयोग करने के कारण उच्च एवं निम्न कीमतों से प्रभावित होते हैं।

(iv) इस विधि गुणोतर माध्य के प्रयोग करने पर अधिक श्रम की आवश्यकता होती है।

10.3.2 भारित सूचकांक

साधारण अथवा अभारित सूचकांक में व्याप्त त्रुटियों को दूर करने के लिए, हम प्रत्येक वस्तुओं के कीमतों को उचित तत्व का प्रयोग करते हुए मात्रा या फिर राशि के रूप में भार देतें हैं जिन्हें आधार वर्ष में बेची गई हो। दूसरे शब्दों में, इस विधि में विभिन्न वस्तुओं को उनके समूह में महत्व के आधार पर भार दिया जाता है। ये भार उत्पादन के आकड़े, उपभोग के आंकड़े या वितरण के आंकड़े के रूप में हो सकते हैं। सूचकांक के निर्माण में मात्रात्मक भार को लिया जाता है। यदि w संबंधित वस्तु का भार है तब कीमत सूचकांक निम्न रूप में दिया जा सकता है,

कीमत सूचकांक, $P_{01} = \frac{\sum P_1 xw}{\sum P_0 xw} x100$

भारांकित सूचकांक को निम्नलिखित दो वर्गो में वर्गीकृत कर सकते हैं:

(i) भारित समूहीत सूचकांक

(ii) भारित औसत का कीमत सूचकांक

(i) भारित समूहीत सूचकांकः भारित समूहीत सूचकांक में विभिन्न वस्तुओं को उनके समूह में महत्व के आधार पर भार देते हैं और इन भारित राशियों का योग करके भारित समग्र ज्ञात किया जाता है। सूचकांक के निर्माण के लिए, वस्तुओं को भार भिन्न–भिन्न तरीके से दिया जाता है तथा उनका योग भी अलग तरीके से ज्ञाता किया जाता है। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण भारित समूहित सूचकांक निम्नलिखित दिये गये हैं:

लास्पर्य के कीमत सूचकांकः लास्पर्य का कीमत सूचकांक स्थिर आधार वर्ष वाले भार पर आधारित हैं। आधार वर्ष के मात्रा को भार के रूप में प्रयोग किया जाता है। लास्पर्य का सूत्र निम्न रूप से दिया गया है:

लास्पर्य के कीमत सूचकांक : $LP_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} x100$

जहां, P_1 = प्रचलित वर्ष का कीमत।

P_0 = आधार वर्ष का कीमत।

Q_0 = भार के रूप में प्रयोग की गई आधार वष की मात्रा।

इस सूचकांक में उपर की ओर पक्षपात प्रतीत होती है अर्थात् जब कीमत में वृद्धि हो तब उच्चें कीमत वाले वस्तुओं के उपभोग में कमी की प्रवृति परिलक्षित होती है। इस सूचकांक का व्यवहारिक कार्य में वृहत रूप से प्रयोग किया जाता है।

लास्पर्य का मात्रात्मक सूचकांक सूत्र निम्नलिखित है,

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} x100.$$

पाशे का सूचकांकः पाशे का सूचकांक निर्माण की विधि प्रचलित वर्ष के मात्रा पर आधारित है। प्रचलित वर्ष के मात्रा को इस विधि में भार के रूप में प्रयोग किया जाता है। पाशे के सूत्र को निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता हैः

पाशे का सूचकांक, $P_{01} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} x100$

जहां, P_1 = प्रचलित वर्ष का कीमत।

P_0 = आधार वर्ष का कीमत।

Q_1 = भार के रूप में प्रयोग की गई प्रचलित वर्ष की मात्रा।

यह सूचकांक नीचे की ओर पूर्वाग्रह से प्रभावित होती है। जहां वस्तुओं की संख्या अधिक होती है वहां इस विधि के सूत्र का बराबर व्यवहार में नहीं लाया जाता हैं।

पाशे के मात्रा पर आधारित सूचकांक को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है,

$$PQ_{01} = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} x100$$

डॉरबिष एवं बॉउले विधिः यह विधि लास्पर्य एवं पाशे विधि का संयुक्त है। यदि लास्पर्य एवं पाशे के विधि का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाये तो वह डॉरबिश एवं बॉउले के सूझाये गये सूचकांक प्राप्त होगा है। यह सूचकांक दोनों, आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष को भार के रूप मे गणना अन्तर्गत सम्मिलित करता है।

डॉरविश एवं बॉउले कीमत सूचकांक, $DP_{01} = \frac{LP_{01} + PP_{01}}{2} x100$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_0 Q_o} + \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}\right] x100$$

फिशर का आदर्श कीमत सूचकांकः फिशर के आदर्श सूचकांक लास्पर्य एवं पाशे के सूचकांक का गुणोतर माध्य होता है। फिशर ने लगभग 100 सूचकांक के सूत्रों का परीक्षण किये और इस सूत्र को व्यूत्पन्न किया जिन्हें आदर्श सूचकांक नाम दिया है।

फिषर का आदर्श कीमत सूचकांक,

$$FP_{01} = \sqrt{LP_{01} x PP_{01}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_0 Q_o} x \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}\right)} x100$$

गुणः

1. यह विधि नीचे एवं उपरी पूर्वाग्रह से मूक्त होता है।
2. इस विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष दोनों को सम्मिलित किया जाता है।
3. यह सूचकांक समय व्युत्क्रमण परीक्षण एवं तत्व व्युत्क्रमण परीक्षण दोनों को संतुष्ट करता है।

अवगुणः

1. यह सूत्र निर्वचन के लिए कठिन होता है।
2. यह सूचकांक गणना के लिए व्यवहारित सूत्र नहीं है क्योंकि अत्यधिक श्रम खपत करने वाली विधि है।
3. इस विधि में सूचकांक की गणना के कीमत एवं मात्रा दोनों वर्षों के दिये होने चाहिए।

10.3.3 मात्रात्मक सूचकांक

मात्रा सूचकांक औसत संचयन के मात्रा का मापता है और उत्पादित या बेची गई वस्तु की भौतिक मात्रा में तुलनात्मक अध्ययन योग्य बनाता है। ये सूचकांक भी भी साधारण या भारित होते हैं। भारित सूचकांक में मात्रा कीमत सूचकांक ज्ञात करते हैं। अतः मात्रा सूचकांक की गणना, उपरोक्त सूत्रों में 'P' के जगह 'Q' को परिवर्तित करके आसानी से ज्ञात किया जाता है।

10.3.4 मूल्य सूचकांक

मूल्य सूचकांक गणना में बहुत आसान है। मूल्य वस्तु की कीमत एवं मात्रा का गुणनफल होता है। एक साधारण मूल्य सूचकांक, प्रचलित वर्ष के मूल्य को आधार वर्ष के मूल्य से विभाजित करने से प्राप्त राशि के बराबर होता है। यदि मूल्य को 100 से गुणा करते हैं तब हमें मूल्य सूचकांक प्राप्त होता है। मूल्य सूचकांक की वांछित सूत्र निम्नलिखित हैः

मूल्य सूचकांक, $V = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0} x100$

साधारण मूल्य सूचकांक, $V = \frac{\sum V_1}{\sum V_0} x100$

जहां,

V_1 = प्रचलित वर्ष के मूल्य एवं

V_0 = आधार वर्ष के मूल्य

ऐसे सूचकांकों के भारित सूचकांक नहीं होते है क्योंकि यह कीमत या मात्रा में से किसी एक पर हीं केन्द्रीत नहीं होते हैं। ये सूचकांक बहुत प्रचलित नहीं है क्योंकि कीमत एवं मात्रा दोनों हीं स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता है।

10.3.5 जीवन लागत सूचकांक या उपभोक्ता सूचकांक

'जीवन लागत सूचकांक' को 'उपभोक्ता सूचकांक' के नाम से जानते हैं। जीवन लागत सूचकांक हीं देश में उपभोक्ता वस्तुओं के कीमतों में परितर्वन को मापता है। यह दिये गये समय अवधि में, किसी विशेष उपभोक्ता वस्तुओं

एवं सेवाओं के टोकरी के लिए भुगतान की जाने वाली औसत कीमत की माप है।

उपभोक्ता सूचकांक को इस प्रकार बनाया जाता है कि एक समय अवधि में किसी वस्तु एवं सेवाओं के विशेष मात्रा के कीमत में परिवर्तन के कारण अन्ततः उपभोक्ता के द्वारा की गई भुगतान का औसत माप है।

अलग–अलग व्यक्ति भिन्न–भिन्न वस्तुओं का उपभोग तो करता हीं है और एक हीं वस्तु के अलग–अलग अनुपात में भी उपभोग करते हैं। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक हमें विभिन्न क्षेत्रों में रहने वाले विभिन्न वर्ग के लोगों के जीवन स्तर पर वस्तु की मात्रा एवं कीमत में कमी के प्रभाव निर्धारित करने में सहायक होता है। उपभोक्ता कीमत सूचकांक एक महत्वपूर्ण माप है क्योंकि उच्च मजदूरी की मांग जीवन लागत सूचकांक पर आधारित होता हैं और बहुत से देशों में वेतन का निर्धारण उपभोक्ता मूल्य या जीवन लागत सूचकांक के अनुसार हीं करते हैं। जीवन लागत सूचकांक न तो व्यक्ति के जीवन निर्वाह स्तर को मापता है न हीं कीमत के अतिरिक्त अन्य कारणों से जीवन लागत में उच्चावचन को बताता हैं लेकिन, इसका मुख्य लक्ष्य होता हैं कि कीमत में परिवर्तन के फलस्वरूप देश के किसी विशेष वर्ग के द्वारा किसी निश्चित वस्तु एवं सेवाओं के मात्रा के लिए कितना भुगतान करता है, उसका पता लगाना है।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता

(i) यह मूद्रा की क्रयशक्ति, वास्तविक आय आदि में परिवर्तन कों मापने में उपयोगी है।

(ii) ये सरकार को मजदूरी नीति, कीमत नीति, करारोपण नीति एवं सामान्य आर्थिक नीति बनाने में सहायता पहुंचाते हैं।

(iii) किसी विशेष प्रकार के वस्तु एवं सेवाओं के बाजार कीमत का विश्लेषण उपभोक्ता सूचकांक के मदद से किया जा सकता है।

(iv) देश में कर्मचारियों के वेतन एवं श्रमिकों के मजदूरी का निर्धारण उपभोक्ता कीमत सूचकांक के आधार पर किया जाता है। इसलिए, यह मजदूरी संशोधन या महगांई भता निधारित करने के लिए यह बहुत सहायक है।

मान्यताएंः जीवन लागत सूचकांक कुछ मान्यताओं पर आधारित है, जो निम्नलिखित हैः

(i) **सामान आवश्यकताः** जिन व्यक्तियों के लिए इस सूचकांक का निर्माण किया जा रहा है उनकी आवश्यकताएं सामान होनी चाहिए।

(ii) **एक हीं वस्तुः** आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुएं एक हीं होनी चाहिए।

(iii) **वस्तु की मात्रा में कोई परिवर्तन नहींः** आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं एवं सेवाओं की मात्राओं में कोई परितर्वन नहीं होना चाहिए।

(iv) **एक हीं कीमत उद्धरणः** यह माना जाता है कि वस्तुओं की कीमत विभिन्न स्थानों में एक ही हो और इनमें अक्सर परिवर्तन नहीं होना चाहिए।

(v) **औसत में सत्यताः** जीवन लागत सूचकांक औसत रूप में सत्य होना चाहिए।

(vi) **प्रतिनिधि वस्तुएंः** जीवन लागत सूचकांक में सम्मिलित वस्तुएं एवं सेवाएं किसी वर्ग विशेष के उपभोग का प्रतिनिधित्व करती हो।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की सीमाएं

(i) उपभोक्ता मूल्य सूचकांक केवल परिघटना के सापेक्ष स्तर के सादृश्य संकेत मात्र है।

(ii) व्यक्ति के उपभोग स्वरूप में परिवर्तन को समायोजन का कोई लक्ष्य नहीं होता है।

(iii) किसी समय बिन्दु पर एक विशेष भौगोलिक क्षेत्र एवं व्यक्तियों के किसी निश्चत वर्ग में केवल आर्थिक परिवर्तन का संकेतक है।

(iv) वस्तुओं के चयन, कीमतों के चयन आदि में त्रुटि एवं पक्षपात की संभावना अधिक होती है।

जीवन लागत सूचकांक के निर्माण के विभिन्न सोपानः

(i) **व्यक्तियों के समूह का चयनः** व्यक्तियों के उस समूह का चयन करना आवश्यक होता है जिसके लिए यह निर्देशांक बनाया जाना है अर्थात् निर्धन या धनी, औद्योगिक श्रमिक, शिक्षक आदि और वह क्षेत्र जिसके बारे में सूचकांक बनाई जा रही है।

(ii) **सूचकांक का लक्ष्यः** सूचकांक के लक्ष्य स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, जब हम शिक्षक की बात करें, तब हमें स्पष्ट करना चाहिए कि वे महाविद्यालय शिक्षक हैं, विद्यालय शिक्षक या सभी वर्ग के शिक्षक।

(iii) **पारिवारिक बजट के परीक्षण का आयोजनः** अगला सोपान पारिवारिक बजट के परीक्षण के द्वारा उन वस्तुओं एवं सेवओं का निर्धारण जिनको इस सूचकांक में सम्मिलित करना है और उपभोग की वस्तुओं के कीमत तथा उसके मात्रा को भी पता लगाना है। इस प्रकार हम उपभोग की संरचना ज्ञात कर सकते हैं। विभिन्न मदों में किये जाने वाले व्यय को पांच वर्गो में वर्गीकृत किया जाता है, जिन्हे आगे पुनः उपवर्गो या उपसमूहों में विभाजित करते हैं। वे इस प्रकार हैः 1. भोजन, 2. कपड़ा, 3. ईंधन एवं प्रकाश, 4. आवास और 5 अन्य मदें।

(iv) **कीमत उद्धरण की प्राप्तिः** कीमत उद्धरण का एक अत्यन्त हीं महत्वपूर्ण एवं कठिन कार्य है क्योंकि कीमते जगह–जगह पर, एक दुकान से दूसरे दुकान एवं अलग–अलग व्यक्तियों के बीच बदलती है। कीमत उद्धरण के संग्रहण के समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिएः

(a) कीमत उद्धरण वहां से संग्रहित करें जहां से उपभोक्ता वस्तुओं एवं सेवाओं को सामान्यतया खरीदते हैं।

(b) खुदरा कीमत किसी निश्चित सूचीबद्ध वस्तुओं के स्थिर विशेष मात्रा के लिए ही होनी चाहिए।

(c) दानों, केन्द्रीय एवं खुले बाजार के कीमतों को गणना में सम्मिलित किया जाना चाहिए।

(d) यदि उपभोक्ता को किसी प्रकार की कीमत एवं मात्रा में छूट मिल रहीं हो तो उसका भी जिक्र किया जाना चाहिए।

(v) **व्यक्तियों की सूची या बनावट तैयार करनाः** एक बार जब वस्तु निर्धारित हो जाय तब अगला सोपान उन व्यक्तियों का सूची या वनावट तैयार करना जिन्हें न्यायदर्श में सम्मिलित करना है। सामान्यतय, जब पारिवारिक बजट का परीक्षण आयोजन करते हैं तब साधारण दैव निदर्शन का हीं प्रयोग करते हैं।

उपभोक्ता सूचकांक निर्माण करने की विधियां

उपभोक्ता सूचकांक निर्माण करने की तीन विधियां हैः

1. ***समग्र व्यय विधिः*** [यह विधि लास्पर्य के सूचकांक पर आधारित है, अर्थात् आधार वर्ष की मात्रा को भार के रूप में सम्मिलित किया जाता है। अर्थात् $(w = Q_0)$]

$$P01 = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} x100$$

$$\frac{\sum P_1 w}{\sum P_0 w} x100$$

i.

2. ***पारिवारिक बजट विधिः*** [यहां सापेक्षिक भार विधि का प्रयोग किया जाता है जहां भार आधार वर्ष का मूल्य (P_0Q_0) होता हैं जिसे V से इंगित करते हैं।]

$$P01 = \frac{\sum RV}{\sum V} \times 100 =$$

$$\frac{\sum\left[\left(\frac{P_1}{P_0} x100\right) x(P_0 Q_0)\right]}{\sum P_0 Q_0}$$

$$P01 = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

3. ***सापेक्षिक कीमत का भारांकित औसत***

माना कि, I = समूह सूचकांक और W = भार

तब, $P_{01} = \frac{\sum IW}{\sum W}$

10.4 सूचकांक की सीमाएं

इसमें कोई संदेह नहीं कि सूचकांक के तकनीक बहुती उपयोगी यंत्र है। लेकिन इनकी कुछ सीमाएं भी हैं जिन्हें निर्माण कर्ता को अवश्य हीं अपने दिमाग में रखना चाहिए।

मुख्य सीमाएं हैं:

(i) **अपूर्णः** सूचकांक एक अनुमान या लगभग संकेत मात्र है जो परिघटनाओं के सापेक्षिक स्तर को इंगित करता है। केवल कीमतों या समंकों के सग्रहण में हीं त्रुटियां नहीं हो सकती है अपितु, आधार वर्ष का चयन, प्रतिनिधि वस्तुओं का चयन एवं उपर्युक्त भार का चुनाव आदि में भी विसंगतियां हो सकती है।

(ii) **सूचकांक के निर्माण में समस्याएंः** सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित कठिनाईयां है जैसेः– आधार वर्ष का चयन, पदों या मदों का चयन, रूचि में परिवर्तन, फैशन में बदलाव, एक उचित औसत का चयन आदि।

(iii) **निदर्षन त्रुटिः** यह संभव नहीं है कि अध्ययन में हम सभी मदों को सम्मिलित कर सकें फलतः निदर्शन में त्रुटि का होना स्वाभाविक सा है। निदर्शन की कमियां सूचकांक के निर्माण में स्पष्ट रूप से झलकती है।

(iv) **सूचकांक में भी हेर–फेर किया जा सकता हैः** किसी अन्य सांख्यिकीय यंत्र के तरह हीं सूचकांक का भी वांछित निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए हेर–फेर किया जा सकता है। आधार वर्ष का चुनाव, विशिष्ट स्त्रोत से विशेष वस्तओं एवं उनके कीमतों के चयन में व्यक्ति अपने विचार अनुसार सूचकांक बना सकता है।

(v) **सीमित प्रयोगः** एक उद्देश्य के लिए बना सूचकांक किसी अन्य उद्देश्य या स्थान के लिए प्रयोग में लाया नहीं जा सकता है क्योंकि ऐसे में गलत निष्कर्ष प्राप्त हो सकते हैं।

(vi) **उपयुक्त एवं सही आंकड़ों का अभावः** सूचकांक संमंकों पर आधारित होते हैं। उपयुक्त एवं सहीं समंकं का निश्चित रूप से उपलब्ध नहीं होते हैं। अधिकतर स्थिति में, सूचकांक का निर्माण द्वितीय संमंकों के आधार पर ज्ञात किया जाता है। इन्हीं कारकों के चलते सूचकांक कई कमियों के शिकार होते हैं एवं विश्वसनीयता की मात्रा कुछ हीं स्तर तक होते हैं।

इन सीमाओं एवं कमीयों के बावजूद, आर्थिक एवं व्यवसाय के विभिन्न क्षेत्रों के क्रियाकलापों एवं विश्लेषण में इसका प्रयोग निश्चित अनुपात में बढ़ता हीं जा रहा है।

उदाहरण 2

निम्नलिखित संमंकों से गणना करें–

1. अभारित समान्तर माध्य सूचकांक
2. अभारित गुणोतर माध्य सूचकांक
3. प्रचलित वर्ष 2004 के लिए 1990 को आधार वर्ष मानते हुए अभारित समूहित कीमत सूचकांक।

वस्तुएं	प्रति क्विंटल कीमत रूपये में	
	1990	2004
चावल	600	1350
गेहूं	320	992
चीनी	1040	1560
दाल	540	3240

हलः

आधार वर्ष 1990, की कीमत को (P_0) से एवं प्रचलित वर्ष 2004 के कीमत को (P_1) से इंगित करते हुए गणना सारणी निम्नलिखि हैं:

वस्तुएं	आधार वर्ष की कीमत (P_0)	प्रचलित वर्ष कीमत (P_1)	**सापेक्षिक कीमत** $P = \frac{P_1}{P_0} x100$	**लघुगणक P**
चावल	600	1350	225	2.3522
गेहूं	320	992	310	2.4914
चीनी	1040	1560	150	2.1761
दाल	540	3240	600	2.7282
कुल	$\sum P_0 =$ **2500**	$\sum P_1 =$ **7142**	$\sum P =$ **1285**	$\sum \log P =$ **9.7979**

1. अभारित समान्तर माध्य सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum P}{n} = \frac{1285}{4} = 321.3$$

2. अभारित गुणोतर माध्य सूचकांक –

$$P_{01} = anti\log\left[\frac{\sum \log P}{n}\right] = anti\log\left[\frac{9.7979}{4}\right]$$

$$= anti\log 2.4495 = 281.5$$

3. अभारित समूहित कीमत सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} x100 = \frac{7142}{2500} x100 = 285.69$$

उदाहरण 3

निम्नलिखित संमकों से भारित समान्तर माध्य सूचकांक एवं भारित गुणोतर माध्य सूचकांक की गणना कीजिए।

वस्तुएं	प्रति इकाई कीमत रूपये में		भार
	आधार वर्ष	आधार वर्ष	
A	2	3	10
B	4	5	4
C	10	10	5
D	12	9	1

हलः

वस्तुएं	P_0	P_1	w	$P=\frac{P_1}{P_0}x100$	$w\,P$	$\log P$	$w \log P$
A	2	3	10	150	1500	2.1761	21.7610
B	4	5	4	125	500	2.0969	9.3876
C	10	10	5	100	500	2.0000	10.0000
D	12	9	1	75	75	1.8751	1.8751
कुल			**20**		**2575**		**42.0237**

भारित समान्तर माध्य सूचकांक –

$$P_{01}=\frac{\sum w\,P}{\sum w}=\frac{2575}{20}=128.75$$

भारित गुणोतर माध्य के सूचकांक –

$$P_{01}=anti\log\left[\frac{\sum w\log P}{\sum w}\right]=anti\log\left[\frac{42.0237}{20}\right]$$

$$=anti\log 2.1012=126.24$$

उदाहरण 4:

निम्नलिखित संमंकों का प्रयोग करके भारित सूचकांक की गणना करें।

वस्तुएं	भार	प्रति इकाई कीमत रूपये में	
		आधार वर्ष	चालू वर्ष
A	5	2.00	4.50
B	7	2.50	3.20
C	6	3.00	4.50
D	2	1.00	1.80

हलः

वस्तुएं	w	P_0	P_1	$P=\frac{P_1}{P_0}x100$	$w\,P$
A	5	2.00	4.50	225	1125
B	7	2.50	3.20	128	896
C	6	3.00	4.50	150	900
D	2	1.00	1.80	180	360
कुल	**20**				**3281**

भारित समान्तर माध्य सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum w P}{\sum w} = \frac{32381}{20} = 164.05$$

उदाहरण 5:

निम्नलिखित गणना करें।

1. लास्पर्य का कीमत सूचकांक
2. पाशे का कीमत सूचकांक
3. मार्शल– इजवर्थ कीमत सूचकांक
4. डॉरबिष–बॉउले कीमत सूचकांक
5. फिशर का कीमत सूचकांक
6. लास्पर्य का मात्रा सूचकांक
7. पाशे का मात्रा सूचकांक
8. मार्शल– इजवर्थ मात्रा सूचकांक
9. डॉरबिष–बॉउले मात्रा सूचकांक
10. फिशर का मात्रा सूचकांक

मदें	कीमत (प्रति क्विंटल रूपये में)		बेची गई मात्रा (क्विंटल में)	
	आधार वर्ष	प्रचलित वर्ष	आधार वर्ष	प्रचलित वर्ष
चावल	400	850	100	120
गेहूं	320	690	20	60
चीनी	720	1600	10	10
दाल	720	2100	10	20

हलः

मदें	p_0	p_1	q_0	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
चावल	400	850	100	120	40000	48000	85000	102000
गेहूं	320	690	20	60	6400	19200	13800	41400
चीनी	720	1600	10	10	7200	7200	16000	16000
दाल	720	2100	10	20	7200	14400	21000	42000
कुल					**60800** $(\sum p_0q_0)$	**88800** $(\sum p_0q_1)$	135800 $(\sum p_1q_0)$	**201400** $(\sum p_1q_1)$

लास्पर्य का कीमत सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum P_0q_0} x100 = \frac{135800}{60800} x100 = 223.36$$

पाशे का कीमत सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum P_0q_1} x100 = \frac{201400}{88800} x100 = 226.80$$

मार्शल– इजवर्थ कीमत सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} x100 = \frac{135800 + 201400}{60800 + 88800} x100 = 225.40$$

डॉरबिष–बॉउले कीमत सूचकांक

$$p_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma\, p_1q_0}{\Sigma\, p_0q_0} + \frac{\Sigma\, p_1q_1}{\Sigma\, p_0q_1}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{135800}{60800} + \frac{201400}{88800}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}[2.2336 + 2.2680]x100 = 225.08$$

फिशर का कीमत सूचकांक

$$P_{01} = \left[\sqrt{\frac{\Sigma\, p_1q_0}{\Sigma\, p_0q_0} \times \frac{\Sigma\, p_1q_1}{\Sigma\, p_0q_1}}\right]\times 100$$

$$= \left[\sqrt{\frac{135800}{60800} \times \frac{201400}{88800}}\right]\times 100 = 225.07$$

लास्पर्य का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} x100 = \frac{88800}{60800} x100 = 146.05$$

पाशे का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} x100 = \frac{201400}{135800} x100 = 148.31$$

मार्शल– इजवर्थ मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_0 + \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 + \sum q_0 p_1} x100 = \frac{88800 + 201400}{60800 + 135800} x100 = 147.61$$

डॉरबिष–बॉउले मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma\, q_1 p_0}{\Sigma\, q_0 p_0} + \frac{\Sigma\, q_1 p_1}{\Sigma\, q_0 p_1}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{88800}{60800} + \frac{201400}{135800}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}[1.4605 + 1.4831]x100 = 147.18$$

फिशर का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \left[\sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}\right] \times 100$$

$$= \left[\sqrt{\frac{88800}{60800} \times \frac{201400}{135800}}\right] \times 100 = 147.18$$

उदाहरण 6

निम्नलिखित दिये गये संमंक का प्रयोग करके, 1990 को आधार वर्ष मानते हुए, 2003 एवं 2004 प्रचलित वर्ष के लिए उचित कीमत सूचकांक की गणना करें।

वस्तुएं	कीमत (प्रति इकाई रूपये में)			मात्रा (इकाई)
	1990	**2003**	**2004**	**1990**
चावल	640	1550	1680	10
गेहूं	1020	1540	1680	4
चीनी	60	126	130	5
दाल	50	120	110	1

हलः

यहां, 1990 आधार वर्ष है जबकि 2003 एवं 2004 दो प्रचलित वर्ष है। चूकिं आधार वर्ष की मात्राएं दिये गये हैं अतः लास्पर्य का मात्रा सूचकांक ज्ञात करना ज्यादा श्रेयस्कर होगा।

वस्तुएं	P_0	P_1	P_2	q_0	p_0q_0	p_1q_0	p_2q_0
चावल	640	1550	1680	10	6400	15500	16800
गेहूं	1020	1540	1680	4	2040	3080	3220
चीनी	60	126	130	5	120	252	260
दाल	50	120	110	1	50	120	110
कुल					**8610**	**18952**	**20390**

आधार वर्ष 1990 को मानते हुए प्रचलित वर्ष 2003 के लिए लास्पर्य का कीमत सूचकांक–

$$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} x100 = \frac{18952}{8610} x100 = 220.09$$

आधार वर्ष 1990 को मानते हुए प्रचलित वर्ष 2004 के लिए लास्पर्य का कीमत सूचकांक–

$$P_{01} = \frac{\sum p_2 q_0}{\sum p_0 q_0} x100 = \frac{20390}{8610} x100 = 236.82$$

इस प्रकार आधार वर्ष 1990 के सापेक्ष प्रचलित वर्ष 2003 एवं 2004 के लिय कीमत सूचकांक क्रमशः 220.09 एवं 236.82 इकाई है।

उदाहरण 7:

निम्नलिखित आंकड़ों से कीमत सूचकांक की गणना करें।

वस्तुएं	कीमत रूपये में		वस्तु की मात्रा
	आधार वर्ष	प्रचलित वर्ष	प्रचलित वर्ष
A	120	150	20
B	80	80	10
C	40	30	20
D	100	140	5

हलः

चूकिं यहां आधार वर्ष की मात्राएं दी हुई है फलतः पाशे के कीमत सूचकांक की गणना करना ज्यादा उचित होगा।

वस्तुएं	p_0	p_1	q_1	p_0q_1	p_1q_1
A	120	150	20	2400	3000
B	80	80	10	800	800
C	40	30	20	800	600
D	100	140	5	500	700
कुल				**4500**	**5100**

पाशे के कीमत सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} x100 = \frac{510}{4500} x100 = 113.33$$

उदाहरण 8

निम्नलिखित आंकड़ों का प्रयोग करके फिशर का कीमत सूचकांक की गणना करें।

मदें	आधार वर्ष		प्रचलित वर्ष	
	कीमत	कुल मूल्य	कीमत	कुल मूल्य
A	50	100	60	180
B	40	120	40	200
C	100	100	120	120
D	20	80	25	100

हलः

यहां, **कुल मूल्य = कीमत × मात्रा।**

अतः सर्वप्रथम q_0 की मात्रा एवं q_1 के मात्रा को ज्ञात करने के लिए कुल मूल्य, $V_0 = p_0q_0$ एवं $V_1 = p_1q_1$ को क्रमशः p_0 तथा p_1 से भाग देने पर प्राप्त किया जा सकता है।

मदें	p_0	$V_0 = p_0q_0$	p_1	$V_1 = p_1q_1$	$q_0 = \frac{V_0}{P_0}$	$q_1 = \frac{V_1}{P_1}$	P_0q_1	P_1q_0
A	50	100	60	180	2	3	150	120

B	40	120	40	200	3	5	200	120
C	100	100	120	120	1	1	100	120
D	20	80	25	100	4	4	80	100
कुल		**400**		**600**			**530**	**460**

फिशर का कीमत सूचकांक–

$$P_{01} = \left[\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}\right] \times 100$$

$$= \left[\sqrt{\frac{460}{400} \times \frac{600}{530}}\right] \times 100 = 114.1$$

10.5 सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व

सूचकांक का प्राथमिक लक्ष्य है कि चरों के बीच या चर समूहों में सापेक्षिक माप या तिर्यक परिवर्तन की माप किया जा सके जिसे प्रत्यक्ष विधि के द्वारा मापा नहीं जा सके। सूचकांक का प्रमूख लक्ष्य है कि कीमत एवं मुद्रा की क्रय शक्ति का माप करता है जिससे अर्थशास्त्री विभिन्न वर्ष के बारे में गहन ध्यान प्राप्त करता है।

आज के दौर में सूचकांक का प्रयोग केवल कीमत में परिवर्तन को मापने के लिए हीं नहीं किया जाता है। आर्थिक तत्व जैसे मजदूरी, रोजगार, उत्पादन, व्यापार, मांग, पूर्ति, व्यवसाय की शर्तें, औद्योगिक क्रियाकलाप, वितीय समस्याएं आदि का अध्ययन सांख्यिकीय यंत्रों के द्वारा किया जाता है।

जैसे कि वायूदाब मापी वातावरण में वायू या गैस के दाब को मापती है उसी प्रकार सूचकांक भी आर्थिक दाब को मापता है अर्थात सूचकांक आर्थिक व्यवहार को मापता है फलतः इसे आर्थिक वायूदाब मापी कहते हैं।

संक्षेप में सूचकांक के मुख्य उपयोग को निम्नलिखित हैः

तुलनात्मक अध्ययनः सूचकांक में किये गये माप के आधार पर विभिन्न समय विन्दू या जगहों के बीच सापेक्ष परिवर्तन को मापने के लिए इसका प्रयोग किया जाता है। ये अलग–अलग स्वभाव को एक इकाई में जोड़ते हुए सार्थक मूल्य के रूप में व्यक्त करता है।

संमंक का सरलीकरणः सूचकांक आंकड़ों के जटिल माप को सरल माप में परिवर्तित करता है जिससे चरों में परिवर्तन को आसानी से समझा जा सके।

आर्थिक नीति एवं निष्कर्ष निरूपण के लिए दिशा निर्देश प्रदान करता हैः सूचकांक का प्रयोग कर्मचारियों के बढ़े हुए लागत सूचकांक के भार को कम करने के लिए, महंगाई भता, बोनस आदि के निर्धारण में प्रयोग किया जाता है। उत्पादन एवं बिक्री आदि के सूचकांक का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं से संबंधित देश के सामान्य औद्योगिकीरण के प्रगति को जानने के लिए किया जाता है। निवेश सूचकांक का प्रयोग स्टॉक बाजार के धारणा के विषय में जानकारी प्राप्त किया जा सकता है।

मुद्रा के क्रयशक्ति की मापः सूचकांक मुद्रा के क्रय शक्ति की माप है। मुद्रा कि क्रय शक्ति हीं देश के अर्थव्यवस्था की आधारभूत दशा को स्पष्ट करता है।

जीवन लागत सूचकांक परिवर्तन की माप: सूचकांक, विभिन्न समूहों के लोगों के जीवन लागत के परिवर्तन का माप है।

राष्ट्रीय आय: व्यवसाय स्थिति का सूचकांक एक देश के सामान्य आर्थिक गतिविधियों में परिवर्तन की माप एवं वास्तविक राष्ट्रीय आय के उच्चावचन के बारे में बताता है।

सरकार द्वारा जरूरी नियंत्रण: सूचकांक के आधार पर, सरकार कीमत आदि में नियत्रंण कर सकती है। निवेश, आय, रोजगार, व्यापार, उपभोग आदि से संबंधित निर्णय लेने में सूचकांक महत्वपूर्ण सहायता प्रदान करता है।

प्रकृति एवं प्रवृतियों को प्रकट करना: सूचकांक प्रकृति एवं प्रवृतियों को प्रकट करता है और भविष्य में आर्थिक प्रवृतियों के पूर्वानुमान में सहायक होते हैं।

अपस्फीति में सहायक: अपस्फीति की स्थिति में सूचकांक बहुत सहायक होता है अर्थात सूचकांक लोगों के वास्तविक आय का पता लगाने में सहायक होता है।

तुलनात्मक अध्ययन को संभव बनाना: सूचकांक का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं के कीमत में कुल विचलनों का तुलनात्मक अध्ययन के लिए किया जाता है जो विभिन्न इकाईयों में माप दिये होत हैं।

सार्वभौमिक उपयोगिता: सूचकाकों का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है, उदाहरण के लिए, सामाजशास्त्र, वाणिज्य, चिकित्सा, विज्ञान, अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान, शैक्षणिक शोध संगठन, जीवन बीमा निगम आदि।

सूचकांक की कुछ महतवपूर्ण विशेषताएं निम्नलिखित हैः

- सूचकांक के सापेक्ष परिवर्तन को प्रदर्शित करने के लिए प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।
- सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन को मापता है। वे चरों या चरों के समूह के मूल्य से संबंधित किसी समय अवधियों या स्थानों के बीच सापेक्ष परिवर्तन को मापता है।
- सूचकांक उन परिवर्तनों को मापता है जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता है।
- जीवन लागत, व्यवसाय गतिविधियों से संबंधित परिवर्तनों का प्रत्यक्ष माप नहीं हो सकता है। लेकिन, यह संभव है कि इन गतिविधियों में सापेक्षि परिवर्तन को चरों के मूल्य या तत्व जो इनको प्रभावित करता है।

10.6 सारांश

इस इकाई में आपने सूचकांक के अवधारणा के बारे में अध्ययन किया है, यहां सूचकांक के विभिन्न प्रकार के वर्गीकरण के बारे में भी अध्ययन किया है। सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व के बारे में बहुत सरल तरीके से वर्णन किया गया है। सूचकांक किसी संख्यात्मक आर्थिक आंकड़ों के कीमत या मात्रा का, किसी मानक या अधार मूल्य से तुलना को प्रदर्शित करता है। आधार को सामान्यतया 100 के बराबर मानते हैं और सूचकांक को आधार मूल्य के 100 गुणा अनुपात में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु की

कीमत या लागत, प्रचलित वर्ष 1970 में आधार वर्ष 1960 के सापेक्ष दूगुना है तब इसका अर्थ है, इसका सूचकांक 1960 में सापेक्ष 200 है। सूचकांक का प्रयोग विशेष रूप से व्यवसाय गतिविधियों, जीवन लागत एवं रोजगार का तुलना करने के लिये किया जाता है। वे अर्थशास्त्रीयों को व्यवसाय से संबंधित अवांछित आंकड़ों के प्रभाव को कम करके असानी से समझने योग्य बनाती है।

अर्थशास्त्र में सूचकांक सामान्यतया काल श्रेणी के सरांशित समूहों से संबंधित चरों को प्रदर्शित करते हैं। कुछ अर्थ में, जबकि, सूचकांक का प्रयोग किसी समय बिन्दु में भौगोलिक क्षेत्रों का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं। उदाहरण के लिए देश की क्रय शक्ति समता। सबसे अधिक चर्चित सूचकांक, उपभोक्ता कीमत सूचकांक है जो उपभोक्ताओं के खुदरा कीमत भुगतान के परिवर्तन के माप को प्रस्तुत करता है। इसके अतिरिक्त, जीवन लागत सूचकांक वह सूचकांक है जो समय अवधियों में सापेक्षि जीवन लागत में परिवर्तन की माप है। यदि जीवन लागत सूचकांक से भिन्न सोचें तो हम कहेगें कि बेहतर सूचकांक वह है जो अज्ञात उपयोगिता फलन से आसानी पूर्वक सूचकांक ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार बेहतर सूचकांक वह है जो जीवन लागत सूचकांक के लिए दिये गये परिस्थिति के सीमा में लगभग सटीक उतर या अनुमान प्रदान करते हैं।

सूचकांक समस्या से तात्पर्य है कि एक उचित सूचकांक के निर्माण में समय उपरान्त कीमत एवं मात्रा दोनों में होने वाले परिवर्तनों को मापने में आने वाली कठिनाईयों से है। एक क्षण के लिए, मुद्रा स्फीति के लिए कीमत सूचकांक के निर्माण में, अर्थव्यवस्था के वस्तु के कीमत के साथ–साथ उसके स्वभाव से संबंधित समस्या से है। वर्ष 1950 में बनाई गई सूचकांक, 1950 के हीं मानक वस्तुओं की टोकरी, वर्ष 2000 के लिए उचित नहीं होगा, क्योंकि इतने लम्बे अन्तराल के कारण ऐसी बहुत सी नई वस्तुओं उपभोग टोकरी में सम्मिलित या कुछ पूरानी वस्तुएं उपभोक्ता के समूह से हट गई होगी। इसके मात्रा एवं गुणवता में भी परिवर्तन हो सकते हैं।

इस तरह के समस्याओं का कोई आदर्श हल नहीं है। व्यवहार में खुदरा कीमत सूचकांक, उपभोक्तओं के ''वस्तु की टोकरी'' में लगातार कुछ वर्षो में परिवर्तन होते रहना चाहिए। फिर भी, वास्तव में बहुत से आर्थिक सूचकांक बड़े लम्बे अवधियों के लिए लिया जाता है जो सच में तुलना के लिए उपयुक्त नहीं रहता है और यह एक गम्भीर समस्या है जिसे शोधार्थी को आर्थिक इतिहास में अवश्य ध्यान रखना चाहिए।

10.7 शब्दावली

- **सापेक्ष कीमतः** जब किसी दिये हुए वर्ष में वस्तु के कीमत को, किसी निश्चित वर्ष के आधार पर प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तब इसे हीं सापेक्ष कीमत कहा जाता है।
- **आधार अवधिः** वह निश्चित वर्ष जिससे तुलना मानक या 100 मानकर किया जाता है, उसे आधार वर्ष या आधार अवधि कहते हैं।

- वह वर्ष जिसके मूल्य का हमे तुलना करनी है उसे चालू वर्ष या चालू अवधि कहते हैं।

10.8 बोध प्रश्न

रिक्त स्थानों को भरें:

1) ....वह संख्या है जिसका प्रयोग एक यंत्र की तरह वस्तुओं के किसी समूह के मूल्य, मात्रा, कीमत आदि के बीच, विभिन्न परिस्थितियों में तुलना करने के लिए किया जाता है ।
2) .... में हम खुदरा कीमत का प्रयोग करते हैं।
3) सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन को .... में व्यक्त करते हैं।
4) .... वह समय अवधि होती है जिसके सापेक्ष वर्तमान वर्ष के मूल्य की तुलना की जाती है।
5) भारित सूचकांक में पदों को उनके ....के आधार पर भार दिया जाता है।
6) पाशे का सूचकांक निर्माण की विधि .... के मात्रा पर आधारित है।
7) .... को 'उपभोक्ता सूचकांक' के नाम से जानते हैं।

10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

1)	सूचकांक,	2)	जीवन लागत सूचकांक	3)	संख्या
4)	आधार वर्ष	5)	सापेक्षिक महत्व	6)	प्रचलित वर्ष
7)	'जीवन लागत सूचकांक'				

10.10 स्वपरख प्रश्न

1. साधारण समूही विधि के प्रयोग करके निम्नलिखित संमकों से साधारण सूचकांक ज्ञात करें:

वस्तुएं	कीमत प्रति क्विंटल रूपये	
	आधार वर्ष, 2001	प्रचलित वर्ष, 2002
गेहूं	80	100
चावल	120	250
ग्राम	100	150
दाल	200	300

उत्तरः पूनः सारणी को सृजित करते हुए मानों को लिखने पर हम पाते हैः

वस्तुएं	कीमत प्रति क्विंटल रूपये	
	आधार वर्ष, 2001 (P_0)	प्रचलित वर्ष, 2002 (P_1)
गेहूं	80	100
चावल	120	250
ग्राम	100	150
दाल	200	300

कुल	$\Sigma P_0 = 500$	$\Sigma P_1 = 800$

आधार वर्ष 2001, एवं प्रचलित वर्ष 2002 के लिए कीमत सूचकांक,

$$I_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} x100$$

जहां,

ΣP_1 = प्रचलित वर्ष 2002 के लिए कीमतों का कुल योग = 800

ΣP_0 = आधार वर्ष 2001 के लिए कीमतों का कुल योग = 500

अतः

$$L_{01} = \frac{800}{500} \times 100 = 160$$

इसका आशय यह है कि कीमत में वास्तविक वृद्धि प्रचलित वर्ष 2002 में आधार वर्ष 2001 के सापेक्ष 60% है।

2. एक शहरी उद्योग के श्रमिकों से संबंधित सूचनाओं के मदद से उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना करें।

उपभोग की मदें	कीमत सूचकांक P	प्रतिषत व्यय
खाद्य पदार्थ	200	50
कपड़ा	175	10
ईंधन एवं बिजली	160	12
आवास	225	15
विविध	150	13

उत्तरः

उपभोग की मदें	कीमत सूचकांक P	w (भार)	Pw
खाद्य पदार्थ	200	50	10000
कपड़ा	175	10	1750
ईंधन एवं बिजली	160	12	1920
आवास	225	15	3375
विविध	150	13	1975
कुल		$\sum w = 100$	$\sum wP = 18995$

पारिवारिक बजट विधि से उपभोक्ता कीमत सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{\sum wP}{\sum P} = \frac{18995}{100} = 189.95$$

3. निम्नलिखित सूचकां के आधार वर्ष को 1990 के लिए परिवर्तित करें।

वर्ष	:	1982	1986	1990	1994	1998
सूचकांक (आधार वर्ष 1982)	:	100	140	200	260	320

उतरः

$$\text{नई सूचकांक} = \frac{Old\ index \times 100}{200}$$

वर्ष	1982	1986	1990	1994	1998
पूरानी सूचकांक (आधार 1982)	100	140	200	260	320
नई सूचकांक	$\frac{100 \times 100}{200} = 50$	$\frac{140 \times 100}{200} = 70$	100	130	160

4. सूचकांक का क्या अर्थ है?
5. सूचकांक के निर्माण मे आने वाली समस्याओं जैसे (i) आधार वर्ष का चयन, और (ii) भार के चुनाव, का उल्लेख करें।
6. सूचकांक क्या है? इसकी उपयोगिता को बताएं?
7. सूचकांक क्या है? सूचकांक की क्या विशेषताएं हैं?

10.11 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics – Goon, Guptha and Dasguptha – World Press Limited – Calcutta.
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.

*****

इकाई 11 काल श्रेणी विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- व्यापार पूर्वानुमान का वर्णन कर सकें।
- काल श्रेणी की व्याख्या कर सकें।
- काल श्रेणी के घटकों का वर्णन कर सकें।
- गणना प्रवृति का माप कर सकें।
- प्रवृति मापने की विधियों का उल्लेख कर सकें। ।

11.1 प्रस्तावना

स्वतः मांग के परिस्थितियों एवं प्रवृति में परिवर्तन प्रतियोगिता को और तीव्र करती हैं जो व्यसाय में केवल अनुमान तथा विषेष झुकाव से हीं नहीं किया जाता हैं बल्कि इन विषयों से संबन्धित संमंकों के प्रयोग करके विशलेषण से हीं प्राप्त किया जा सकता है। भविष्य हमारे लिए अज्ञात होते हैं। यहां तक प्रत्येक दिन हम आने वाले कल एवं अनिश्चितता के लिए निष्कर्ष लेने होते हैं। ऐसे व्यासाय मामलें में बड़े जोखिम होते हैं। सभी व्यवसायी, व्यापार गतिविधियों के संदर्भ में भविष्यवाणी करने के लिए मजबूर होते हैं।

आजकल व्यापारियों एवं अर्थशास्त्रियो के द्वारा किसी भी भविष्यवाणी से पूर्व उनसे संबंधित भविष्य के बारे में अनुमान या आंकलन करना होता है। उदाहरण के लिए, एक व्यवसायी यह जानने में रूचि रखते है कि अगले वर्ष या अगले पांच या दस वर्ष में उत्पादित वस्तुओं की मांग क्या हो सकती हैं जिससे अल्प उत्पादन या अनबिकी वस्तुओं के बर्बादी से बचा जा सके। इसी प्रकार, एक अर्थशास्त्री यह अनुमान लगाने में रूचि रखता हैं कि आने वाले वर्षों में बढ़ी हुई जनसंख्या से संबंधित समस्या के निदान हेतु उचित योजना बनाया जा सके, जैसे लोगों के लिए रोजगार, खाद्य आपूर्ति आदि। भविष्य के लिए अनुमान करने में पहला सोपान है कि बीते हुए समय या पूर्व के सूचनाओं को एकत्र करना है, जिससे भविष्य के बारे में अनुमाना किया जा सके। इस संदर्भ में हम सामान्यतया सांख्यिकीय आंकड़ों का प्रयोग करते हैं जो विभिन्न समय अन्तरालों में संग्रहित, अवलोकित या दर्ज की जाती है। इस प्रकार के संमंकों को सामान्य रूप से काल श्रेणी कहते हैं। इस प्रकार, जब हम संख्यात्मक आंकड़ों का अवलोकन विभिन्न समय विन्दूओं के अनुसार करते हैं तब इसे काल श्रेणी के नाम से जानते हैं।

11.2 व्यवसाय भविष्यवाणी

व्यापार भविष्यवाणी से तात्पर्य है कि पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक शर्तों के विश्लेषण से प्राप्त निष्कर्ष के आधार पर भविष्य में होने वाले व्यापार शर्तों में परिवर्तन की अति निकट संभावनाएं क्या है। भविष्यवाणी से तात्पर्य हैं कि भविष्य में किसी घटना के घटने की स्थिति का निश्चित आंकलन करने की प्रक्रिया से हैं और इस प्रक्रिया से प्राप्त कथन व संख्यात्मक तथ्य को हीं भविष्यवाणी के नाम से जानते हैं। भविष्य में होने वाले घटना का पता शायद हीं लग पाती हैं। किसी घटित होने वाले घटना को आश्वस्त करने के लिए एक व्यवस्थित भविष्यवाणी व्यवस्था काफी सहायक होती है। वैज्ञानिक व्यापार भविष्यवाणी के दो पक्ष होते हैं:

(i) **पूर्व की आर्थिक शर्तों का विश्लेषणः** इस उद्देश्य के लिए, श्रेणी के क्रियाशील घटकों का अध्ययन किया जाता है। निरपेक्ष प्रवृति यह प्रदर्शित करेगी कि किस प्रकार श्रेणी पूर्व परिवर्तित होती थी और भविष्य में लम्बे अवधि में क्या होने की संभावना है। चक्रीय उच्चावचन यह प्रदर्शित करता है कि क्या व्यापार क्रियाओं में तेजी या मन्दी की स्थिति किस प्रकार की होगी। मौसमी उच्चावचन यह इंगित करता है कि व्यापार गतिविधियों में किस प्रकार का मौसमी परिवर्तन होता हैं।

(ii) **वर्तमान आर्थिक स्थिति का विश्ले**षणः वर्तमान आर्थिक स्थिति के विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य उन कारकों का अध्ययन करना है जो पूर्व के गतिविधियों के अनुसार क्रमवार रूप से प्रभाव का अनुमान किया जा सके। ये कारक, नवप्रर्वतन, फैशन में परिवर्तन, आर्थिक एवं राजनैतिक क्षेत्र में परिवर्तन, सरकार की आर्थिक एवं मौद्रिक नीतियां, युद्ध आदि हैं। ये कारक व्यापर चक्र को प्रभावित और अवधि में परिवर्तन कर सकते हैं। अतः यह आवश्यक है कि भविष्य के संभावित प्रवृतियां वर्तमान की आर्थिक परिदृश्य को ध्यान में रखा जाय जो कई तरीके से प्रभावित कर सकती है।

11.2.1 व्यापार में पूर्वानुमान के उद्देश्य

पूर्वानुमान, मानवीय व्यवहार का अभिन्न लक्षण हैं। व्यवसायी भी भविष्य के बारे में सोचता एवं अनुमान करता है। व्यवसाय में सफलता उचित व सही पूर्वानुमान पर निर्भर करता हैं। वास्तव में, जब व्यवसायी व्यापार में प्रवेश करता है तभी यह भवष्यि के लिए पूर्वानुमान करने का प्रयास एवं अधिकाधिक मात्रा तक सफलता एवं विफलता का उतरदायित्व लेता है। भविष्य में कई घटनाएं पूर्व के भांति पूनर्रावृति होती हैं। यह एक अच्छी चीज है। क्योंकि, पूर्व, वर्तमान एवं भविष्य में समान तत्वों के अनुसार सतता हीं पूर्वानुमान की सफलता की संभावना को प्रदर्शित करती हैं। लेकिन, इतिहास सदैव पुनरावृति नहीं होती ठीक उसी प्रकार शायद हीं आर्थिक गतिविधियां भी अगली साल या अने वाले दस सालों में वहीं व्यवाहार करे जैसा की अनुमान या संभावना व्यक्त किया गया हो। ये सत्य है कि पूर्व की गतिविधियां प्रयाप्त मात्रा में भविष्य के पूर्वानुमान को न्यायोचित तरीके से करने में सहायता प्रदान करती हैं।

एक व्यवसायी केवल अनुमान के अनुसार निर्णय नहीं ले सकता है। पूर्वानुमान, व्यवसायी को लागत, बिक्री, उत्पादन, लाभ, पूंजी निवेश, कीमत

निर्धारण, उत्पादन में विस्तार, साख में प्रसार, बाजार का विकास, स्टॉक में वृद्धि और ऋण में कटौती से संबंधित प्रबंधकीय निर्णय लेने में मदद करते हैं जो कई तरह के अनिश्चितताओं से घिरे होते हैं। इस तरह के निर्णय हाथों–हाथ नहीं लिये जा सकते हैं। ये निश्चित रूप से भविष्य की परिस्थितियां वर्तमान के निहितार्थ पर अधारित होना चाहिए।

जब पूर्वानुमान करते हैं तब हमें यह जानना चाहिए कि भविष्य का सटीक पूर्वानुमान संभव नहीं हैं। सांख्यिकीय पूर्वानुमान वह यंत्र है जिसमें प्रायकिता के गणितीय सिद्धान्त का प्रयोग करके पूर्वानुमान में त्रुटियों के जोखिम को कम किया जा सकता है।

11.2.2 भविष्यवाणी, प्रक्षेपण और पूर्वानुमान

भविष्यवाणी, प्रक्षेपण एवं पूर्वानुमान शब्दों के प्रयोग में काफी भ्रम सा प्रतीत होता है। पूर्वानुमान पूरी तरह से अनुसंधान प्रक्रिया में पूर्व के संमंक श्रेणी पर आधारित होते हैं। यह एक शुद्ध यांत्रिक बहिर्वेशन है। प्रक्षेपण एक भविष्यवाणी है जहां बहिर्वेश मूल्य किसी निश्चित संख्यात्मक मान्यताओं पर अधारित होते हैं। पूर्वानुमान एक आंकलन है जो श्रृंखला से जोड़ती हैं जिसमें हम बर्हिजात कारकों में रूचि रखते हैं। पूर्वानुमान, बार्हिजात कारकों के भविष्य मूल्यों का प्रयोग करके प्रक्षेपण या भविष्यवाणी के माध्यम से किया जाता हैं और इनकी गणना आश्रित चरों के मदद से की जाती है।

11.2.3 व्यवसाय पूर्वानुमान की विशेषताएं

1. **पूर्व एवं वर्तमान के शर्तों पर आधारितः** व्यापार पूर्वानुमान, व्यवसाय के पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक स्थितियों पर आधारित होते हैं। भविष्य के पूर्वानुमान के लिए, व्यवसाय के पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक स्थितियों से संबंधित विभिन्न संमंक, सूचनाएं तथ्यों का विश्लेषण किया जाता है।
2. **गणितीय एवं सांख्यिकीय विधियों पर आधारितः** पूर्वानुमान की प्रक्रिया में गणितीय एवं सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग को सम्मिलित किया जाता है। इन विधियों का प्रयोग करके उन प्रवृतियों का पूर्वानुमान किया जा सकता है जो भविष्य में हो सकती हैं।
3. **अवधिः** पूर्वानुमान दीर्घ अवधि, लघु अवधि, मध्यम अवधि या किसी विशेष अवधि के लिए किया जा सकता है।
4. **भवि**ष्य का आंकलनः व्यापार पूर्वानुमान, भविष्य में होने वाले संभावित आर्थिक स्थितियों के बारे में पूर्वानुमान करता हैं।
5. **क्षेत्रः** पूर्वानुमान भौतिक के साथ–साथ वित्तीय भी हो सकते हैं।

11.2.4 पूर्वानुमान के सोपान या चरण

व्यापार उच्चावचन के पूर्वानुमान के अधीन निम्नलिखित सोपान सम्मिलित किये जाते हैं:

(a) **पूर्व में क्यों परिवर्तन होते हैं इसे समझनाः** एक अनुमान कर्ता के लिए सांख्यिकीय पूर्वानुमान के अन्तर्गत यह आधारभूत सिद्धान्त हैं कि पूर्व में निष्पादन से संबंधित संमंकों का प्रयोग किया जाय। वर्तमान दर एवं दर में परिवर्तन हीं पूर्वानुमान के लिए आधार तैयार करता हैं। यदि एक बार यह ज्ञात हो जाय तो विभिन्न गणितीय तकनीकों का विकास

करके आसानी से उनका प्रक्षेपण किया जा सकता हैं। यदि बिना पूर्व के परिवर्तन के कारणों को जाने बिना हीं व्यापार उच्चावचन का पूर्वानुमान किया जाय तो वह पूर्ण रूप से कृत्रिम होगा और पूरा परिणाम गणितीय सूत्र के प्रयोग पर आधारित होगी और श्रेणी में विसंगतीयां भी होगी।

(b) **उस अवस्था को निर्धारित करना जिससे व्यवसाय गतिविधिों को आसानी से मापा जा सकेः** व्यापार में उच्चावचन के परिवर्तन के कारण को जानने के उपरान्त, यह आवश्यक है कि व्यवसायिक गतिविधि की उस अवस्था को निर्धारित किया जाय जिसका हमें पूर्वानुमान करना है वह वर्तमान गतिविधि के स्तर को किस हद तक चालू रखता है।

(c) **संग्रहित एवं व्यवस्थित आंकड़े मापन यंत्र के रूप में प्रयोगः** सांख्यिकीय आंकड़ों के चयन एवं व्यवसाय उच्चावचन के कारणों के निर्धारण के बीच स्वतंत्र संबंध हैं। सांख्यिकीय आंकड़े तब तक विवेकशील या शुद्ध तरीके से एकत्रित एवं विश्लेषित नहीं किये जा सकते हैं जब जक कि व्यवसाय उच्चावचन को अच्छी तरह से समझा न जाय। यह महत्वपूर्ण है कि व्यवसाय उच्चावचन हो इस प्रकार से बताया जाय कि जिस कारण के लिए आंकड़े एकत्र किये जा रहें हो वह सुरक्षित रहे।

(d) **संमंक का विश्लेषणः** अन्त में, आंकड़ों का विश्लेषण, किस कारणों से परिवर्तन से हो रहें, इसी समझ के आलोक में हीं किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि यह महशूस किया जाता हैं कि दो आर्थिक शक्तियों के संयोग से परिवर्तन संभव है जब हमें सांख्यिकीय आंकड़ों के विशलेष के द्वारा निष्कर्ष के माध्यम से पूर्वानुमान किया जा सकता है कि भविष्य में परिवर्तन का स्वभाव क्या रहेगा। निष्कर्ष निकालने की इस विधि को पूर्वानुमान तकनीक कहा जाता हैं।

11.2.5 व्यवसाय पूर्वानुमान की विधियां

यद्यपि सभी व्यवसायी अपने व्यापार के स्थितियों के संबंध में पूर्वानुमान करते हैं। इधर कुछ वर्षों में पूर्वानुमान की वैज्ञानिक विधियां विकसित की गयी है। वैज्ञानिक पूर्वानुमान, सांख्यिकी पर आधारित है। प्रबंधकीय पूर्वामान की समस्या में बढ़ते हुए विविधता का नियंत्रण करने के लिए हाल के वर्षों में विभिन्न पूर्वानुमान तकनीकों का विकास हुआ है। पूर्वानुमान तकनीक में विविधता सामान्य विशेषज्ञयों के अनुमान से सघन समंक के जटिल विशलेषण में पाया जाता हैं। प्रत्येक तकनीक का विशेष उपयोग है और किसी विशेष परिस्थिति के लिए उचित तकनीक के चयन में सावधानी होनी चाहिए। पूर्वानुमान के विधियों का प्रयोग करने से पहले निम्नलिखित प्रश्नो का उतर दिया जाना चाहिएः

1. पूर्वानुमान का उद्देश्य क्या है और किस प्रकार इसका प्रयोग करना है?
2. जिस उद्देश्य के लिए पूर्वानुमान होगी उस व्यवस्था की गतिशीलता और घटक क्या है?
3. पूर्व की सूचनायें भविष्य के पूर्वानुमान क लिए कितना महत्वपूर्ण है?

व्यवसाय पूर्वानुमान के महत्वपूर्ण विधियां निम्नलिखित हैः

11.2.5.1 व्यवसाय वायुदाबमापी

व्यवसाय सूचियों या सूचकांक का निर्माण व्यापारिक गतिविधियों के अध्ययन एवं विशलेषण करने के लिए किया जाता है जिसके आधार पर भविष्य की व्यवसायिक स्थितियों का पूर्वनिर्धारित किया जा सके। जैसा कि व्यवसाय सूचियां भविष्य की स्थितियों का सूचक है, इसलिए इसे *'व्यापार वायुदाबमापी' या आर्थिक वायुदाबमापी'* कहा जाता है। व्यवसाय वायुदाबमापी की सहायता से व्यवसाय स्थितियों के उच्चावचन का पता लगाते हैं और पूर्वानुमान करके समस्या से संबंधित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। व्यापार वायुदाबमापी निर्माण में सकल राष्ट्रीय उत्पाद, थोक कीमत, उपभोक्ता कीमत, औद्योगिक उत्पादन, स्टॉक कीमत, बैंक जमाएं आदि सम्मिलित की जाती हैं। इन सभी राशियों को एक विशेष सापेक्ष राशि में परिवर्तित किया जाता है। सापेक्ष को भार के रूप में ले सकते हैं और उनका औसत ज्ञात करते हैं। इस प्रकार प्राप्त सूचकांक हीं व्यवसाय वायुदाबमापी कहलाता है।

व्यवसाय वायुदाबमापी तीन प्रकार के होते हैं:

(i) **साधारण व्यापार गतिविधियों से संबंधित वायुदाबमापीः** इस व्यवसायिक गतिविधि का सामान्य सूचकांक कहते हैं जो व्यवसायिक गतिविधियों के व्यक्तिगत सूचकांकों के भारांकित या संयुक्त सूचकांकों को प्रदर्शित करता है। व्यवसायिक गतिविधियों के सामान्य सूचकांक के मदद से दीर्घ अवधि प्रवृतियों और देश के आर्थिक गतिविधियो के चक्रीय उच्चावचन को मापा जा सकता है लेकिन कुछ विशेष स्थितियों में दीर्घ अवधि प्रवृतियों एवं सामान्य प्रवृतियों में भिन्न होते हैं। इस प्रकार के सूचकांकों का प्रयोग देश के लिए आर्थिक नीतियां बनाने में प्रयोग किया जाता है।

(ii) **विशेष व्यवसाय या उद्योग के लिए व्यवसाय वायुदाबमापीः** इस प्रकार के वायुदाबमापी का प्रयोग व्यवसायिक गतिविधियों के सामान्य सूचकांक को सम्पूरक के रूप में प्रयोग किया जाता हैं और इनका निर्माण विशेष व्यवसाय या उद्योगों के भविष्य में होने वाले विचलन को मापने के लिए किया जाता है।

(iii) **व्यक्तिगत व्यवसायिक फर्म से संबंधित व्यवसाय वायुदाबमापीः** इस प्रकार के वायुदाबमापी का निर्माण किसी उद्योग के विशेष व्यक्तिगत फर्म के अनुमानित विचलन को मापने के लिए किया जाता है।

उपलब्धियांः

(a) व्यवसाय वायुदाबमापी विधि एक वैज्ञानिक एवं विश्वसनीय विधि है जिसका प्रयोग प्रबंधन शास्त्र में विभिन्न व्यवसायिक निर्णय विविध स्तरों में लेने के लिये किया जाता है।

(b) व्यवसाय वायुदाबमापी विधि, व्यवसाय में भविष्य के प्रवृति का पूर्वानुमान करने में सहायक होते हैं।

(c) व्यवसाय वायुदाबमापी, भविष्य व्यवसाय प्रवृतियों का सूचक है और उच्चावचन के गति का पूर्वानुमान करने में मदद करते हैं।

(d) यह विधि विभिन्न व्यवसाय समस्याओं के लिए सामाधान निकालने में भी मदद करता है जैसे बाजार का विकास, पूंजी निवेश, नये उपभोक्ता बाजार की खोज आदि।

कमियांः

(a) व्यवसायिक गतिविधि की सूचियां या सूचकांक का निर्माण करना एक कठिन कार्य है।

(b) अधिकतर स्थिति में, व्यवसायिक वायुदाबमापी असत्य, अपूर्ण एवं निर्णायक पूर्वानुमान देते हैं क्योंकि सूचकांकों का निर्माण असत्य एवं अप्रर्याप्त आंकड़ों से किया जाता है।

(c) व्यवसाय वायुदाबमापी, पूर्व के व्यवसाय का सूचक है और इस पर आधारित पूर्वानुमान एक गलत अनुमान दे सकते हैं।

(d) व्यक्तिगत उद्योग एवं फर्म के लिए अलग–अलग सूचकांक बनाये जाते हैं और फर्में जो पूर्णतया सामान्य सूचकांकों से भिन्न होते हैं।

11.2.5.2 काल श्रेणी विश्लेषण

काल श्रेणी विश्लेषण का भी प्रयोग व्यापार पूर्वानुमान के उद्देश्य के लिए किया जाता है। काल श्रेणी विश्लेषण के द्वारा पूर्वानुमान तभी संभव है जब व्यवसाय से संबंधित विभिन्न वर्षों के आंकड़े दिये गये हो जो निश्चित एवं मौसमी विचलन को प्रदर्शित करता हो। काल श्रेणी विश्लेषण से दीर्घ कालीन प्रवृति, निरपेक्ष प्रवृति, मौसमी एवं चक्रीय विचलन को निर्धारित, विश्लेषित और विभिन्न वर्षों के आकड़ों का अलग भी करता है।

गुणः

1. यह पूर्वानुमान का एक आसान तरीका व विधि है।
2. इस विधि के द्वारा विचलनों का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।
3. गणितीय मॉडल पर आधारित होने के कारण इससे हमे पूर्वानुमान के विश्वसनीय निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

कमियांः

1. यह विधि खर्चीला, जटिल एवं अधिक समय लेती है।
2. यह विधि केवल पूर्व के आंकड़ों पर आधारित होती हैं।
3. इस विधि का प्रयोग तभी संभव है जब बहुत से वर्षों के आंकड़े उपलब्ध हों।

11.2.5.3 बहिर्वेशन

बहिर्वेशन, व्यवसाय पूर्वानुमान का सरल विधि है। बहिर्वेशन के द्वारा, एक व्यवसायी भविष्य में अपनी वस्तुओं के मांग एवं कीमत प्रवृति को ज्ञात कर सकते हैं। बहिर्वेशन की सत्यतता दो कारकों पर निर्भर करता हैः

1. अंकों में उच्चावचन के बारे में ज्ञान होना।
2. समस्या से संबंधित तथ्यों के घटना के बारे में ज्ञान होना चाहिए।

इस प्रकार, बहिर्वेशन के लिए दो मान्यताएं आवश्यक रूप से होना चाहिए।

1. अंकों में एक अवधि से दूसरे अवधि में अचानक प्रवेश नहीं होना चाहिए।
2. समस्या में उच्चावचन निरन्तर एवं वृद्धि एवं कमी एक हीं क्रम में होना चाहिए।

बहिर्वेशन में हम मानते हैं कि विश्लेषण में सम्मिलित चर, वृद्धि के किसी स्थापित क्रम का पालन करती है। व्यवसाय पूर्वानुमान के उद्देश्य के लिये यह जरूरी है कि चरों के प्राचल एवं उचित प्रवृति वाले वक्र का सही तरीके से निर्धारित हो। ऐसे कुछ वक्र निम्नलिखित हैः

- **गणितीय प्रवृतिः** गणितीय प्रवृति की सीधी रेखा इस मान्यता पर आधारित होती है कि प्रत्येक वर्ष वृद्धि की राशि स्थिर व समान है।
- **अर्द्ध लघुगणक प्रवृतिः** ये मानता है कि प्रत्येक वर्ष वृद्धि स्थिर प्रतिशत में होती है। जैसे–जैसे वार्षिक लघुगणकीय वृद्धि स्थिर होती है, वैसे हीं इसे अर्द्ध लघुगणकीय पेपर पर खींचने पर एक सीधी रेखा प्राप्त होगी।
- **संषोधित घातीय वक्रः** वक्र का रूप दिया है $y = ab^x$ । यह संबंध घातीय फलन को प्रदर्शित करता है। यह मानता है कि प्रत्येक विकास की वृद्धि पूर्व वर्ष से दूसरे वर्ष तक स्थिर प्रतिशत में होगी।
- **उपस्कर वक्रः**

  $y = \frac{1}{ab^x + g}$, या $ab^x + g = \frac{1}{y}$

  ऐसे वक्र में दोनों तरफ अर्थात नीचे एवं उपर एसीम्पटोट होते हैं। इस प्रकार के वक्र का अध्ययन उद्यागों के वृद्धि के संदर्भ में किया जाता है जिसमें शुरूआती अवधियों में प्रायोगिक क्षण के उपरान्त, किसी विशेष उत्पाद में विशिष्टता होने एवं आर्थिक पैमाने या आर्थिक मितव्ययिता के कारण उत्पादन लागत में भी कमी आती है साथ हीं उत्पादन में तीब्र गति से वृद्धि को प्रदर्शित करता है।
- **गोम्पर्ज वक्रः** इसे निम्न रूप से निरूपित किया जा सकता है,

  $y_c = ab^{c^x}$

  लघुगणकीय रूप में हम निम्न रूप से दर्शा सकते हैं,

  $\text{Log } y_c = \log a + (\log b)\, c^x$

  यह निर्धारित करने के लिए कि किस वक्र का प्रयोग किया जाय, यह जरूरी है कि परिवर्तित चरों से विक्षेप चित्र की रचना की जाय।

गुणः

(a) यह विधि भविष्य में मांग एवं उत्पादन के पूर्वानुमान के लिए बहुत उपयोगी होती है।

(b) इस विधि का प्रयोग व्यवसाय पूर्वानुमान में अत्याधिक किया जाता है क्योंकि यह एक सरल विधि है।

(c) हम इस विधि से शुद्ध एवं विश्वसनीय परिणाम प्राप्त करते हैं क्योंकि यह एक गणीतीय विधि है।

कमियां:

(a) इस विधि का प्रयोग केवल इनके मान्यताओं के अनुसार हीं किया जा सकता है।

(b) यह विधि सरल न होकर विशेष तकनीक पर आधारित है क्योंकि इसे गणितीय सूत्र के मदद से हल किया जाता है।

(c) प्रवृति वक्र का चयन एक जटिल प्रक्रिया है।

11.2.5.4 प्रतीपगमन विश्लेषण

प्रतीपगमन उपागम पूर्वानुमान के समस्या के निदान हेतु बहुत से महत्वपूर्ण युक्ति प्रदान करता है। यह एक माध्यम है जिसके द्वारा हम उन संभावित चरों का चयन करते हैं जो एक जटिल अर्थव्यवस्था से संबंधित होती है, जो पूर्वानुमान के लिए उपयोगी हो। प्रतीपगमन संबंध के अन्तर्गत एक पूर्वानुमान या आश्रित चर एवं एक स्वतंत्र चर होते हैं इन्हें साधारण प्रतीपगमन कहते हैं जबकि बहुगुणी प्रतीपगमन में एक चर आश्रित होते हैं जिनका पूर्वानुमान करना होता है और बहुत से स्वतंत्र चर होते हैं। प्रतीपगमन समीकरण के आकलन के लिए प्रयोग किया जाने वाला सांख्यिकीय तकनीक सामान्यतः जटिल एवं समय–व्यय वाला होता है लेकिन आजकल बहुत से संगणक पैकेज उपलब्ध है जिससे साधारण एवं बहुगुणी प्रतीपगमन की गणना तुरंत एवं आसानी से किया जा सकता है।

11.2.5.5 आधूनिक अर्थमिथिक विधि

अर्थमितिक तकनीक, जिसका उद्‌भव अठारहवीं सदी में हुआ, का सर्वाधिक प्रचलन पूर्वानुमान के लिए हाल के वर्षों में किया जाने लगा है। अर्थमितिक शब्द से तात्पर्य है कि आर्थिक प्रमेय के पुनरीक्षण के क्रम में आर्थिक आंकड़ों के गणीतीय आर्थिक सिद्धांत एवं सांख्यिकीय प्रक्रिया का प्रयोग करना है। जो मॉडल प्रयोग किये जाते हैं वे युग्मपत समीकरण के रूप में होते हैं। समीकरण में प्रयोग की गई अचर राशि का मूल्य, सांख्यिकीय काल श्रेणी के अध्ययन के फलस्वरूप प्राप्त होता है एवं एक प्रर्याप्त मॉडल प्राप्त करने के लिए अधिक समीकरणों की आवश्यकता हो सकती हैं।

वर्तमान समय में, ज्यादतर अल्प–कालिक पूर्वानुमान में केवल थोड़े गुणात्मक सूचनाओं के साथ हीं सांख्यिकीय विधि का केवल प्रयोग किया जाता है। जबकि, वर्ष के अन्त जब आने लगते हैं तब बहुत सी कम्पनियां अपने बड़े व्यवसाय के पूर्वानुमान के लिए इन अर्थमितिक यंत्रों का प्रयोग करते हुए मॉडल का निर्माण करते हैं। हाल के दिनों में यह एक प्रचलित अर्थमितिक यंत्र बन गया है।

गुण:

(a) इस विधि से प्राप्त परिणाम उचित एवं विश्वसनीय होते हैं क्योंकि यह एक वैज्ञानिक विधि है जहां संगणक का प्रयोग किया जाता हैं।

(b) इस विधि में तथ्यों को विस्तृत एवं मात्रात्मक रूप व्यक्त की जाती हैं जिसमें समस्या से संबंधित विभिन्न पहलुओं का भी वर्णन किया जा सकता है।

अवगुण:

(a) यह विधि कठिन एवं जटिल है।

(b) इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब संमंकमाला के प्रर्याप्त श्रेणियां दी गई या उपलब्ध हो।

(c) प्रत्येक व्यवसायिक गतिविधि के लिए वृद्धिगत मॉडल का निर्माण करना एक कठिन कार्य है।

घातीय चौरसाई विधिः

इस विधि को अन्य विधि के तुलना में व्यवसाय पूर्वानुमान में बेहतर माना जाता है। घातीय चौसाई विधि एक विशेष प्रकार का भारित औसत विधि है और स्टॉक एवं बिक्री के अल्प–कालिक पूर्वानुमान के लिए अत्यंत उपयोगी विधि है।

भविष्यवाणी की उचित विधि का चयनः

एक उचित विधि का चयन कई कारकों पर निर्भर करता है जैसे– पूर्वानुमान का संदर्भ, ऐतहासिक आंकड़ों की उपयुक्तता एवं उपलब्धतता, शुद्धता का वांछित कोटि, पूर्वानुमान के लिए समय अवधि की आवश्यकता, कम्पनी के लिए पूर्वानुमान लागत लाभ एवं विश्लेषण के लिए उपलब्ध समय आदि। एक पूर्वानुमानक को उस तकनीक का प्रयोग करना चाहिए जो उपलब्ध आंकड़ों का समूचित उपयोग हो। इसके अतिरिक्त, जहां कम्पनी किसी वस्तु विशेष का पूर्वानुमान करना चाहती है, उस वस्तु के जीवन चक्र एवं उनके चरण को भी ध्यान दिया जाना चाहिए।

11.2.6 व्यवसाय पूर्वानुमान के सिद्धान्त

व्यवसाय के कुछ सिद्धान्त हैं जिन्हें पूर्वानुमान करते समय पालन करना चाहिए। इनमें से कुछ निम्नलिखित हैः

11.2.6.1 अनुक्रम या समय–अन्तराल सिद्धान्त

यह व्यवसाय पूर्वानुमान का एक महत्वपूर्ण सिद्धान्त है। यह इस मान्यता पर अधारित है कि व्यवसाय आंकड़ों में पश्चतीता एव नेतृत्व संबंध अर्थात् व्यवसाय में परिवर्तन क्रम अनुसार होता है न कि एक साथ होता है। विभिन्न गतिविधियों के बीच समय–अन्तराल होता है।

उदाहरण के लिए, जब सरकार घाटे की वित व्यवस्था का प्रयोग करती है तो यह स्फीतिक दबाव को जन्म देता है, जिससे लोगों की क्रय शक्ति बढ़ जाती है, क्योंकि थोक मूल्य कीमत तो बढेगें हीं साथ हीं खदरा मूल्य भी बढेगें। खुदरा कीमत में वृद्धि के साथ हीं जीवन निवार्ह स्तर भी बढेगी जो मजदूरी को बढाने की मांग भी बढ़ जायेगी। इस प्रकार, एक कारक अर्थात् अधिक मुद्रा का चलन, अर्थव्यवस्था के कई क्षेत्रों के आर्थिक गतिविधि को प्रभावित एक साथ न करके बल्कि लगातार या क्रमवार करेगी।

पूर्वानुमान की विश्वसनीयता समय अन्तराल के आकलन के साथ हीं उसकी शुद्धता पर निर्भर करती है।

गुणः

(a) इस विधि का प्रयोग ज्यादतर व्यवसाय पूर्वानुमान के लिए किया जाता है क्योंकि यह अतिशुद्ध परिणाम देता है।

(b) यद्यपि सिद्धान्त सांख्यिकीय तकनीकों पर अधारित है, फिर भी इसे समझना आसान है।

(c) दो अवधियों के बीच समय–अन्तराल का निर्धारण करना संभव है।

(d) इस तकनीक का प्रयोग सरकार अर्थव्यवस्था के आर्थिक स्थात्वि को निर्धारित, विभिन्न संभावित हानियों के नियंत्रित करके कर सकती है।

कमियां:

(a) यह विधि केवल क्रिया का अध्ययन करता है न कि प्रतिक्रिया का।

(b) इस विधि को शुद्ध नहीं कहा जा सकता है क्योंकि सांख्यिकीय तकनीक का प्रयोग करके सत्य के निकट परिणाम प्राप्त कर सकते हैं पर शत् प्रतिशत उचित परिणाम प्राप्त नहीं किया जा सकता है।

11.2.6.2 क्रिया और प्रतिक्रिया सिद्धान्त

यह सिद्धान्त दो मान्यताओं पर अधारित है: प्रत्येक क्रिया के प्रतिक्रिया होते हैं, और क्रिया की वास्तविक राशि का प्रभाव प्रतिक्रिया पर भी पड़ता है। इस प्रकार, सामान्य स्थिति में किसी समय अवधि में चावल के दाम में वृद्धि होने से लोगों की जीवन निर्वाह स्तर में कमी आयेगी। इस प्रकार, सिद्धान्त के अनुसार एक व्यवसायिक गतिविधि का निश्चित स्तर सामान्य, उपसामान्य या असामान्य हो सकते हैं अर्थात व्यापार की शर्तें सदैव एक सा नहीं होते हैं। इस प्रकार, हम व्यापार चक्र के चार अवस्थाओं को पाते हैं:

- समृद्धि,
- गिरावट,
- अवसाद, एवं
- सुधार।

गुण:

(a) यह अन्य सिद्धान्तों से बेहतर है।

(b) इस सिद्धान्त के माध्यम से हम अति विश्वसनीय परिणाम ज्ञात कर सकते हैं क्योंकि यह किसी घटना के क्रिया एवं प्रतिक्रिया के बारे में विशेष ध्यान अंकित करता है।

अवगुण:

(a) सामान्य स्तर को निर्धारण करना एक कठिन कार्य है।

(b) यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक क्रिया के बराबर प्रतिक्रिया हो।

11.2.6.3 आर्थिक ताल सिद्धान्त

यह सिद्धान्त एक आधारभूत मान्यता पर टिकी हुई जो यह कहती है कि इतिहास स्वयं पुनरावृति करती है और इसलिए यह मान्यता है कि सभी आर्थिक एवं व्यवसाय ताल क्रम में व्यवहार करते हैं। इस सिद्धान्त के अनुसार, सभी व्यवसायिक चक्र में कम या अधिक प्रवृति को जानने के लिए सांख्यिकीय और गणितीय विधि का प्रयोग करते हैं जो दीर्घकालीन प्रवृति के वृद्धि एवं कमी को प्रदर्शित करेगी।

यह एक मान्यता के आधार पर किया जा सकता है कि प्रवृति रेखा, व्यवसायिक गतिविधि के सामान्य वृद्धि या कमी को प्रदर्शित करती हो।

गुणः

(i) इसमें पूर्वानुमान पूर्व की शर्तों पर अधारित है इसलिए यह एक विश्वसनीय परिणाम प्रदान करते हैं।

(ii) इस विधि का प्रयोग दीर्घ–कालीन पूर्वानुमान के लिए सहायक होती है।

अवगुणः

(i) व्यापार चक्र के व्यवसायिक गतिविधियां पूर्ण आवधिक एवं पूर्वानुमान, सांख्यिकीय विधि के के अनुसार संतोषजनक नहीं होती है।

(ii) पूर्व की शर्तों को वर्तमान के तुलना में अधिक महत्व दिया जाता है।

11.2.6.4 विशिष्ट ऐतिहासिक सादृश्य

'इतिहास खुद को दोहराता है' यह इस सिद्धान्त का मुख्य आधार है। जो भी घटनाएं एक निश्चित स्थितियों के समुच्च के साथ पूर्व में घटित होती है वहीं घटनाएं भविष्य में भी होती है यदि शर्तें समान रहें। प्रश्न में दिये गये आंकड़ों से संबंधित काल श्रेणी का अच्छी तरह से छानबीन की जाती है और इससे उस अवधि को चयन की जाती है जो वहीं शर्तें हों जिसके लिए पूर्वानुमान किया जा रहा है। यह सिद्धान्त वर्तमान परिस्थिति के लिए पूर्वानुमान करते समय कुछ विशेष परिस्थितियों को समायोजित करने का प्रयास करता है परन्तु अधिकाधिक पूर्व के आंकड़ों पर निर्भर करता है।

गुणः

(a) यह एक सरल विधि है।

(b) जैसा कि भविष्य का पूर्वानुमान पूर्व के व्यवसायिक शर्तों पर आधारित होते हैं, फलतः हमें प्राप्त होने वाले पूर्वानुमान विश्वसनीय होगें।

अवगुणः

(a) इस विधि में पूर्वानुमान अनुमान या पूर्वाग्रह पर अधारित होते हैं न कि वैज्ञानिक विधियों पर क्योंकि ऐसा बहुत कम होता है कि पूर्व एवं वर्तमान की व्यवसायिक शर्तें एक हीं समान हो।

(b) यह बहुत कठिन है कि वर्तमान व्यवसाय शक्ति की तरह हीं पूर्व या भूतकाल की व्यवसाय शर्त का चयन किया जाय।

11.2.6.5 कॉस–कट विष्लेषण सिद्धान्त

यह सिद्धान्त वर्तमान आर्थिक शक्तियों के परस्पर क्रिया के विश्लेषण के अनुसार विकसित की गई है। इस विधि में, विभिन्न चरों के संयुक्त प्रभाव का अध्ययन नहीं किया जाता है। प्रत्येक घटकों के प्रभाव का अध्ययन अलग–अलग स्वतंत्र रूप से किया जाता है। इस सिद्धान्त के अन्तर्गत, पूर्वानुमान वर्तमान के आर्थिक व व्यवसायिक शर्तों के आधार पर विश्लेषण एवं निर्वचन किया जाता है क्योंकि पूर्व या भूतकाल का वर्तमान शर्तों से कोई अर्न्तसंबंध नहीं होता है।

गुणः

(a) वर्तमान शर्तों को भूतकाल या पूर्व के तुलना में ज्यादा पसन्द किया जाता है।

(b) तथ्य व्यक्तिगत रूप में विश्लेषण किया जाता है परन्तु ये समग्र के रूप में होते हैं।

(c) पूर्वानुमान काफी सत्यता के करीब होते हैं जैसे कि ये वर्तमान शर्तों पर निर्भर करता है।

अवगुणः

(a) प्रत्येक व्यक्तिगत तथ्यों का स्वतंत्र रूप से विश्लेषण करना बहुत कठिन है।

(b) यद्यपि पूर्व की तथ्यों को पूर्वानुमान में बराबर महत्व दिया जाता है लेकिन इस विधि में पूर्व को कोई महत्व नहीं दिया जाता है।

(c) इस तकनीक के आधार पर की गई पूर्वानुमान को विश्वनीय नहीं माना जाता है।

11.2.7 व्यवसाय पूर्वानुमान की उपयोगिता

व्यवसाय पूर्वानुमान अर्थव्यवस्था के प्रत्येक क्षेत्र में महत्वपूर्ण जगह बना चुकी है। व्यवसाय पूर्वानुमान, व्यवसायी एवं उद्योगपति को अपने गतिविधियों से संबंधित नीतियां बनाने एवं संबंधित योजना बनाने में काफी सहायक होते हैं। व्यवसायिक पूर्वानुमान के आधार पर व्यवसायी, उत्पाद या वस्तुओं के मांग, उत्पाद की कीमत, बाजार की शर्तें आदि का पूर्वानुमान कर सकता है। व्यवसायिक पूर्वानुमान के आधार पर व्यवसायिक निर्णय का पुनरीक्षण किया जा सकता है। व्यवसायिक पूर्वानुमान के निम्नलिखित लाभ हैः

1. **लाभ को बढ़ाने एवं हानि को कम करने में सहायकः** प्रत्येक व्यवसाय का मुख्य लक्ष्य है कि आय या लाभ को अधिक करना होता है, इसलिए भविष्य में वस्तुओं के कीमत एवं उसके मांग, उत्पादन लागत, उत्पादन एवं स्टॉक के स्तर आदि का पूर्वानुमान करके हीं व्यवसायी निर्धारित कर सकता है। इस प्रकार, व्यापार पूर्वानुमान को व्यापार सफलता की कुंजी कहा जाता है।
2. **प्रबंधन निर्णयः** व्यापार पूर्वानुमान के आधार पर हीं प्रबंधन निर्णय किये जाते हैं क्योंकि वर्तमान समय में प्रबंधन हीं अनिश्चितताओं के संदर्भ में निर्णय ले सकता है। व्यापार पूर्वानुमान भविष्य के शर्तों या स्थितियों का भी वर्णन करता है और प्रबंधन को शक्ति प्रदान करता है कि वह बेहतर विकल्प का चुनाव कर सके।
3. **प्रशासन में उपयोगीः** पूर्वानुमान के आधार पर हीं सरकार मुद्रा के चलन, आर्थिक, राजकोषीय एवं मौद्रिक नीतियों के व्यापार चक्र के दुष्प्रभाव को नियंत्रित करती है। इसलिए, पूर्वानुमान सरकार को भविष्य में होने वाले प्रत्याशित उच्चावचन को नियंत्रित करने में मदद करता है।
4. **पूंजी बाजार का आधारः** व्यवसायिक पूर्वानुमान पूंजी की आवश्यकता, स्टॉक एक्सचेंज एवं निवेशकों के स्वभाव आदि का आंकलन करने में मदद करते हैं।
5. **व्यापार चक्र को नियंत्रित करने में उपयोगीः** व्यापार चक्र में मंदी, व्यवसाय में अचानक परिवर्तन के कारण होती है जैसे कीमत में

परिवर्तन, व्यवसायिक जोखिम में वृद्धि, बेरोजगारी में वृद्धि आदि। एक क्रमवार व्यवसाय पूर्वानुमान के द्वारा व्यवसायी एवं सरकार व्यापार चक्र में मन्दी की स्थिति को नियंत्रित एवं काबू कर सकती है।

6. **लक्ष्य को प्राप्त करने के लिएः** व्यवसायिक पूर्वानुमान, व्यवसाय के उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए व्यवसायिक गतिविधि एक नियोजित योजना को पूरा करने का मार्ग सुझाता है।
7. **नियंत्रण के लिए सुविधाः** व्यवसायिक पूर्वानुमान के द्वारा काला बाजारी की प्रवृति, सट्टा प्रयोजन, गैर–आर्थिक गतिविधियां और भ्रष्टाचार आदि को नियंत्रित किया जा सकता है।
8. **समाज के लिए उपयोगिताः** व्यवसाय पूर्वानुमान के मदद से पूरे सामाज लाभान्वित होती हैं क्योंकि व्यवसायिक स्थिति में प्रतिकूल उच्चावचन को नियंत्रित किया जाता है।

11.2.8 व्यवसायिक पूर्वानुमान की सीमाएं

व्यवसायिक पूर्वानुमान सदैव सत्य नहीं हो सकते जिसके कई सीमाएं हैं जो निम्नलिखित हैः

1. पूर्वानुमान सदैव सत्य नहीं हो सकते क्योंकि ज्यादतर ये भविष्य के गतिविधियों पर आधारित होते हैं जो वास्तव में होगी, यह निश्चित नहीं है।
2. व्यवसायिक पूर्वानुमान सामान्यतया सांख्यिकीय एवं गणितीय विधियों का प्रयोग करके किया जाता है। लेकिन, इन विधियों का प्रयोग भविष्य में होने वाले अनिश्चितता को निश्चित करने का दावा नहीं कर सकता है।
3. व्यवसायिक पूर्वानुमान के सभी मान्यताएं एक साथ या युग्मपत रूप से संतुष्ट नहीं करती है। इस स्थिति मे पूर्वानुमान के परिणाम में विसंगतीयां हो सकती है।
4. पूर्वानुमान त्रुटि एवं विसंगति को पूर्ण रूप से विलुप्त करने की गारंटी नहीं देता है। यदि व्यवसायिक पूर्वानुमान गलत हो तब प्रबंधकीय निर्णय भी गलत होगी।
5. प्रायः आर्थिक परिवर्तन के जिम्मेवार कारकों का खोज एवं मापन करना एक कठिन कार्य होता है। अतः व्यवसायिक पूर्वानुमान एक अनावश्यक कार्य प्रतीत होता है।
6. व्यवसायिक पूर्वानुमान जोखिम का मूल्यांकन नहीं करता है।
7. पूर्वानुमान पूर्व के सूचनाओं एवं आंकड़ों के आधार पर किया जाता है और महसूश किया जाता है कि आर्थिक घटनाएं सामान शर्तों में हीं पुनरावृत होती हैं। लेकिन कई परिस्थितियां है जहां ये शर्तें पुनरावृत नहीं करती हैं।
8. व्यवसाय पूर्वानुमान एक सत्त प्रक्रिया नहीं है जब यह प्रभावी हो इस पर लगातार ध्यान देने की आवश्यकता है।

11.3 काल श्रेणी विश्लेषण

काल श्रेणी एक संख्यात्मक मूल्यों का समुच्च है जो दिये गये चरों के लगातार समय अवधियों को प्रदर्शित करता है। अर्थात् चरों के सापेक्ष दिये गये आंकड़ों को काल क्रम में रखते हैं। सामान्यतया समय अन्तराल समान लिया जाता है। उदाहरण के लिए, देश में गेहूं का वार्षिक उत्पादन, शहर के प्रति घंटा तापमान, मासिक बिजली बिल आदि। सभी आंकड़े जैसे, औद्योगिक उत्पादन, कृषि उत्पादन, निर्यात, आयात, दूग्ध उत्पादन आदि का को समयानुसार क्रम में सजा कर लिखा जा सकता है।

एक दिये गये काल श्रेणी में यह उम्मीद किया जाता है किः

(a) काल श्रेणी में विचलन या विचरण लाने वाले शक्तिओं का अध्ययन किया जाना चाहिए, और

(b) दिये गये समय अवधि में परिघटनाओं के व्यवहार के बारे में अध्ययन किया जाना चाहिए।

उदाहरण के लिए, एक दूर दर्शन उत्पादन कम्पनी की बिक्री को हजार के इकाई में निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है,

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010
बिक्री संख्या (हजार में)	12	14	16	12	10	18

उपरोक्त आंकड़ों का जब विश्लेषण करते हैं तब हमें बिक्री से संबंधित कुछ प्रवृतियां ज्ञात होती है। उदाहरण के लिए, कम्पनी यह जानना चाहेगी कि क्यों वर्ष 2008 एवं 2009 में दूरदर्शन के बिक्री में कमी आई और 2010 में पुनः बढ़ जाती है। अर्थात् कम्पनी उन विभिन्न शक्तियों को जानना चाहेगी जो बिक्री को प्रभावित करती है।

चयनित चरों के मूल्यों में परिर्वतन विभिन्न समय बिन्दुओं में कई शक्तियों के प्रभाव के कारण होता है। चरों के मूल्यों में होने वाले समस्त शक्तियों के विश्लेषण को सामान्यतया काल श्रेणी का विश्लेषण के नाम से जानते हैं। मोटे तौर पर चरों के मूल्य में परिवर्तन को चार प्रकार से चर्चा की जा सकती हैः

(a) परिवर्तन जो सामान्यतया चरों के मूल्यों या आंकड़ों में सामान्य प्रवृति से बढ़ती या घटती है।

(b) वैसा परिवर्तन जो जलवायु, मौसम की स्थिति, त्योहार आदि में परिवर्तन के कारण से होती है।

(c) परवर्तन जो आर्थिक मन्दी और तेजी के कारण होती हैं।

(d) परिवर्तन जो कुछ अप्रत्याशित शक्तियों जैसे बाढ़, संक्रमण, भूकंभ आदि के कारण होता है।

11.3.1 काल श्रेणी की उपयोगिता

काल श्रेणी के संभावित उपयोग निम्नलिखित हैः

1. विभिन्न समय अवधियों में चरों में परिवर्तन का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है। ये चर निर्यात से संबंधित आंकड़े, औद्योगिक उत्पादन की मात्रा आदि हो सकते हैं।
2. काल श्रेणी का प्रयोग करके पूर्वानुमान किया जा सकता है। प्रर्याप्त दीर्घकालीन अवधि में चरों में होने वाले विचलन एवं व्यवहार का अध्ययन किया जा सकता है, यह चरों के भविष्य व्यवहार को जानने में

भी मदद कर सकता है। जबकि, ऐसे पूर्वानुमान सार्थक तभी होते हैं जब पूर्वानुमान की अवधि एक सामान्य अवधि हो। उदाहरण के लिए, भारत सरकार पंचवर्षीय योजनाओं का निर्माण काल श्रेणी का अध्ययन एवं पूर्वानुमान करके हीं करते हैं।

3. काल श्रेणी का अध्ययन हमें चरों के उतरार्द्ध व्यवहार के विश्लेषण में भी सहायक होते हैं। ये उन शक्तियों के पहचान में भी मदद करती है जो इसके व्यवहार को प्रभावित करते हैं।

11.3.2 काल श्रेणी के घटक

किसी समय अवधि के व्यवहार को हीं काल श्रेणी अवधि की गति या चाल के नाम से जानते हैं। काल श्रेणी को निम्नलिखित चार घटकों में वर्गीकृत करते हैं।

11.3.2.1 दीर्घकालीन प्रवृति या निरपेक्ष प्रवृति

यह श्रेणी के सीधी या लगातार दीर्घकालीन वृद्धि या कमी को प्रदर्शित करती है। इस गति को प्रवृति वक्र के द्धारा समूहित किया जा सकता है। यदि यह वक्र एक सीधी रेखा है, तब इसे प्रवृति रेखा कहते हैं। यदि चरों में वृद्धि एक समय के दीर्घकालीन अवधि में हो तब इसे उपर की ओर प्रवृति कहते हैं। यदि चरों में कमी एक समय के दीर्घकालीन अवधि में हो, तब इसे नीचे की ओर प्रवृति कहते हैं। यदि चरों में परिवर्तन की गति सीधी रेखा के सापेक्ष उपर या नीचे की ओर घूमती रहे तब इसे रैखिक प्रति कहते हैं, अन्यथा इसे गैर रेखीय प्रवृति कहते हैं।

11.3.2.2 मौसमी परिवर्तन

जब काल श्रेणी संमंकों में एक वर्ष के लघु अवधि के समय में अवधिक स्वभाव एवं लगातार परविर्तन या विचलन हो तब इन्हें मौसमी विचलन कहते हैं। परिभाषा के अनुसार, इस प्रकार के विचलनों को सटीक और पूर्वानुमान किया जा सकता हैं।

उदाहरणः

(a) प्रत्येक वर्ष, वर्षा ऋतु के उपरान्त या शरद ऋतु में सब्जियों के कीमत में कमी तथा जैसे हीं गर्मी आती है इनके कीमत में वृद्धि हो जाती है।

(b) तेलीय फसलों के कटने के उपरान्त खाद्य तैल के बीज के कीमत में कमी आती है जबकि कुछ समय के उपरान्त इनके कीमत में वृद्धि हो जाती है।

11.3.2.3 चक्रीय विचलन

जब चरों के मूल्यों में कमी या वृद्धि लम्बे समय से दोलन की संगतता को प्रदर्शित कतही है तब इसे चक्रीय विचलन कहते हैं। चूंकि इसमें दोलन दीर्घकालीन समय अवधि में होते हैं इसलिए काल श्रेणी के आंकड़े एक वर्ष से ज्यादा अवधि के होते हैं। यह दोलन प्रवृति वक्र या प्रवृति रेखा के सापेक्ष होता है। एक चक्रीय अवधि, दो क्रमागत चोटियों या उंचाई या दो क्रमागत नांद के बीच के समय दूरी को इंगित करता है।

11.3.2.4 दैव विचलन

इसे अनियमित चलन या गति कहते हैं। वह गति जो सामान्यतया संक्षिप्त समय अवधि, बिना किसी क्रम और स्वभाव से अप्रत्याशित हो, अनियमित गति कीलाते हैं। इस प्रकार के गति के लिए किसी निश्चित समय अवधि या क्रम के होने कि निश्चितता नहीं होती हैं। उदाहरण के लिए राष्ट्रीय हड़ताल का खाद्य सामग्री, भूंकप का खाद्य पदार्थ पर प्रभाव आदि। इस प्रकार के काल श्रेणी के व्यवहार का अध्ययन करना बहुत कठिन कार्य होता है।

11.3.3 प्रवृति के मापने की विधियां

काल श्रेणी के प्रवृति को मापने के लिए निम्नलिखित विधियों का हम अध्ययन करेगें।

1. हस्तमुक्त या रेखीय विधि
2. अर्ध औसत विधि
3. गतिमान औसत विधि
4. न्यूनतम वर्ग विधि।

11.3.3.1 हस्तमुक्त या रेखीय विधि

यह प्रवृति वक्र खींचने की सबसे आसान व सरल विधि है। दिये गये चरों के मूल्यों को समय के सापेक्ष ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को प्लॉट करके उन्हें मिलाते हैं। काल श्रेणी के ग्रॉफ पर अवलोकन के द्वारा प्रवृति रेखा को फिट करते हैं। इस विधि से प्रवृति रेखा को मनमाने ढंग से फिटिंग किया जाता है। प्रवृति रेखा सामान्यतया इस तरह से खींची जाती है कि दोनों तरफ उच्चावचनों की संख्या लगभग बराबर होना चाहिए। प्रवृति रेखा एक चिकनी या स्वच्छ रेखा होनी चाहिए। हस्तमुक्त या रेखीय विधि कि कुछ सीमाएं हैं। वे इस प्रकार हैं:

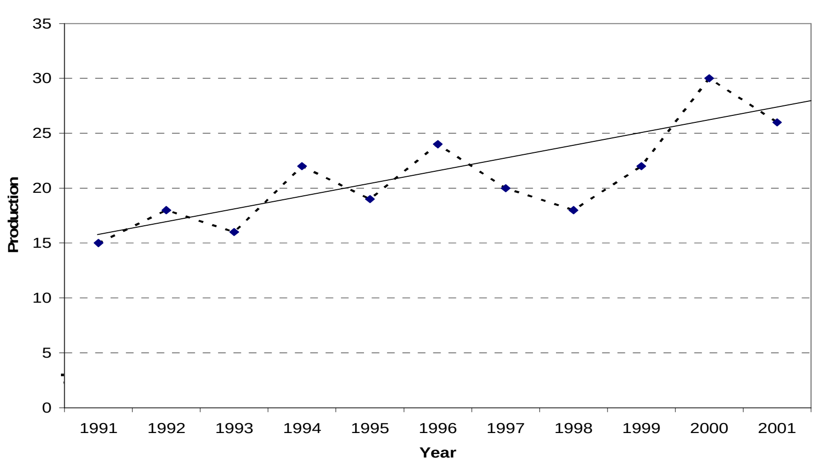
(a) यह व्यक्तिगत न्याय अथवा विचार पर निर्भर करता है।

(b) चूंकि प्रवृति वक्र मनमाने ढंग से खीचें जाते हैं फलतः इसका प्रयोग किसी भी प्रकार के पूर्वानुमान के लिए नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण: नीचे दिये गये संमंकों से हस्तमुक्त विधि से प्रवृति रेखा ज्ञात करें।

वर्ष	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
उत्पादन (लाख टन में)	15	18	16	22	19	24	20	28	22	30	26

हल:



11.3.3.2 अर्द्ध–औसत विधि

अर्द्ध औसत विधि के मदद से रैखिक प्रवृति की फिटिंग निम्नलिखित रूप से किया जाता हैः

(a) वर्षों **की संख्या सम होते हैंः** काल श्रेणी के आंकड़ों को दो बराबर भागों में विभक्त किया जाता है। प्रत्येक भागों के मदों या पदों का योग ज्ञात करके उसे पदों की संख्या से भाग देते हैं जिससे हमें दो सामान्तर माध्य ज्ञात होते हैं। प्रत्येक औसत को लिये गये समय अवधि के मध्य व केन्द्र में अंकित करते हैं जिससे इसे ज्ञात किया गया है और इसे ग्राफ पेपर में चिन्हित किया जाता है। इन बिन्दुओं को छूते हुए एक सीधी रेखा खींची जाती है। यह वांछित प्रवृति रेखा है।

(b) **वर्षों की संख्या वि**षमः जब वर्षों की संख्या विषम हो तब बीच के वर्ष को श्रेणी से विलुप्त कर दिया जाता है ताकि दो बराबर भागों में विभाजित किया जा सके। इसके उपरान्त प्रथम चरण के क्रियाओं की पुनरावृति की जाती है।

किसी भविष्य वर्ष के लिए प्रवृति मूल्य के पूर्वानुमान, अवधिक वृद्धि को वर्षों की संख्या से गुणा करके एवं दिये गये श्रृंखला के प्रवृति मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है।

गुणः

(a) यह एक सरल विधि है।

(b) पूर्व एवं भविष्य के वर्ष के आंकलन के लिए प्रवृति रेखा को दोनो तरफ फैलाया जा सकता है।

(c) यह एक उद्देश्य या व्यक्तिपरक विधि है, जिसे कोई भी व्यक्ति लागू करके एक हीं परिणाम प्राप्त कर सकता है।

अवगुणः

(a) अर्द्ध औसत विधि, प्लॉटेड ब्विन्दुओं के बीच सीधी रेखा के सम्बन्ध पर आधारित है जबकि वास्तव में ऐसा हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।

(b) यह विधि सामान्तर माध्य के सीमा से बनी है। यह विधि उस समय उपयुक्त नहीं होगी जहां श्रेणी के चरम चर मूल्य काफी छोटा या काफी बड़ा हो।

(c) यह आश्वासन नहीं देता है कि चक्रीय विचलन के प्रभाव को विमुक्त किया गया हैं।

11.3.3.3 चलायमान औसत की विधि

इस विधि का प्रयोग काल श्रेणी को स्वच्छ अथवा चिकना बनाने के लिए किया जाता है। अर्थात, चलायमान औसत की विधि से प्राप्त परिणाम, आंकड़ों में विचलन व उच्चावचन को अल्प या कम या आसान बना देना है।

(a) **जब चलायमान औसत की अवधि विषम होः** इस विधि से प्रवृति को ज्ञात करने के लिए, हम निम्नलिखित तरीकों का प्रयोग करते हैंः

(i) काल श्रेणी को प्राप्त करते हैं।

(ii) 3 वर्षों या 5 वर्षों आदि, जैसे चलायमान औसत का चयन करते हैं।

(iii) दिये गये समय अवधि के लिए चलायमान औसत की गणना करें।

यदि चलायमान औसत की चौड़ाई 3 वर्ष है अर्थात् **3 वर्षीय चलायमान औसत की गणना करते हुए, कुल चलायमान की गणना निम्न रूप से किया जाता हैः**

$a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + f...$

5–**वर्षीय** चलायमान औसत के लिए, कुल चलायमान की गणना निम्न रूप से की जाती हैः

$a + b + c + d + e, b + c + d + e + f, c + d + e + f + g,...$

जिस अवधि के लिए चलायमान औसत की गणना की जाती है उस स्पैन के केन्द्र में इसे लिखा जाता है।

(iv) चलायमान औसत की गणना, चलायमान कुल के द्वारा चलायमान औसत के अवधि की चौड़ाई एवं इनसे गणना की गई कुल चलायमान को अवधि के फैलाव के केन्द्र में अंकित यिा जाता है। इन चलायमान औसतों को प्रवृति मूल्य भी कहते हैं।

इन प्रवृति मूल्यों को प्लॉट करे (यदि इच्छा हो) तो वो प्रवृति वक्र ज्ञात किया जा सकता है जिसके मदद से प्रवृति की बढ़ती या घटती हुई स्वभाव को निर्धारित किया जा सकता है।

यदि आवश्यकता हो तो लघु–अवधि की उच्चावचन की गणना प्रवृति मूल्यों को वास्तविक मूल्यों से घटा कर प्राप्त की जा सकती है।

व्याख्यातमक उदाहरणः

तीन वर्षीय चलायमान औसत का प्रयोग करते हुए, प्रवृति मूल्य एवं लघु अवधि उच्चावचन की गणना निम्नलिखित समंकों के लिए करें।

वर्ष	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
उत्पादन (हजार टन में)	21	22	23	25	24	22	25	26	27

हलः प्रवृति मूल्यों की गणना

वर्ष	उत्पादन (हजार टन में) Y	*3-वर्षीय चलायमान समग्र*	*3- वर्षीय चलायमान औसत* Y_e	*लघु–कालिक उच्चावचन* $(Y\text{-}Y_c)$
1988	21	—	—	—
1989	22	66	22.00	0
1990	23	70	23.33	– 0.33

1991	25	72	24.00	1.00
1992	24	71	23.67	0.33
1993	22	71	23.67	– 1.67
1994	25	73	24.33	0.67
1995	27	79	26.33	0.67
1996	26	—	—	—

(b) **जब चलायमान औसत अवधि सम है:** जब चलायन औसत की अवधि सम हो (4—वर्ष आदि), तब हम चलायमान औसत की गणना निम्नलिखित चरणों से प्राप्त कर सकते हैं:

(i) काल श्रेणी को ज्ञात करें।

(ii) चलायमान औसत के अवधि के चौड़ाई को ज्ञात करें। माना की यहां चलायमान औसत की अवधि 4—वर्ष है।

(iii) 4—वर्षीय चलायमान समग्र की गणना करें और उनके फैलाव के बीचोबीच अंकित करें। चार वर्षीय चलायमान समग्र की गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है:

$a + b + c + d, b + c + d + e, c + d + e + f, \ldots$

(iv) 4—वर्षीय चलायमान औसत की गणना करें और उन्हें समय फैलाव के केन्द्र में अंकित करें। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि केन्द्र में अंकित करना असुविधाजनक होगा, क्योंकि चलायमान औसत इस तरह से रखे गये हैं कि वह मूल्य वास्तविक काल अवधि से सुमेल्लित नहीं होगें।

(v) दो—अवधि चलायमान औसत की चलायमान औसत की गणना करें एवं उन्हें मध्य अवधि पर अंकित करें। इस प्रक्रिया को चलायमान औसत का केन्द्रीकरण कहते हैं।

चलायमान औसत की विधि के गुण

(a) यह एक सरल विधि है।

(b) यह विधि वस्तुपरक अर्थ में है जिससे कोई भी व्यक्ति समस्या के हल करने पर एक हीं उतर प्राप्त होगा।

(c) इस विधि का प्रयोग करके निरपेक्ष प्रवृति के अतिरिक्त मौसमी विचलन, चक्रीय विचलन एवं अनियमित विचलन का भी निर्धारण किया जा सकता है।

(d) इस विधि में लोचशीलता का समावेश होता है अर्थात कुछ अंकों को संमंकों में जोड़ा जा सकता है क्योंकि पूरे गणना में कोई परिवर्तन नहीं होते हैं।

(e) यदि चलायमान औसत की अवधि, चक्रीय उच्चावचन के अवधि के साथ दिये गये आंकड़े सुमेल्लित हो तब ऐसे उच्चावचन स्वतः हीं विमूक्त हो जाते हैं।

सीमाएं:

(a) चर मूल्यों एवं काल या समय के बीच कोई फलनात्मक संबंध नहीं होते हैं। इस प्रकार, यह विधि समय के आधार पर चर मूल्यों के पूर्वानुमान एवं भविष्यवाणी में सहायक नहीं होते हैं।

(b) इस विधि के अन्तर्गत कुछ वर्षों के शुरूआती एवं कुछ वर्षों के अन्तिम में चर मूल्यों के प्रवृति नहीं प्रलक्षित होते हैं। उदाहरण के लिए, 5–वर्षीय चलायमान औसत में प्रथम दो वर्ष एवं अन्तिम दो वर्षों के लिए चरों के प्रवृति नहीं होगें।

(c) गैर–रेखीय प्रवृति के स्थिति में, इस विधि से ज्ञात की गई चर मूल्य एक अथवा अन्य दिशा में पक्षपात हो सकती है।

(d) चलायमान औसत के अवधि का चयन एक जटिल समस्या है। अतः अवधि के चयन करते समय विशेष ध्यान करना चाहिए, विशेष रूप से, जब उस अवधि में किसी प्रकार के व्यवसायिक चक्र नहीं होता हो।

11.3.3.4 न्यूनतम वर्ग की विधि

इस विधि के अन्तर्गत प्रवृति वक्र का निर्धारण गणितीय समीकरण के द्वारा बिठाया जाता है। यह विधि अधिक उचित एवं सटीक और इसका प्रयोग प्राय पूर्वानुमान के लिए भी किया जा सकता है। दिये गये संमंक माला का प्रयोग करके इस विधि से या तो सीधी रेखा या परवलय वक्र ज्ञात किया जा सकता है। माना कि y, Y का वास्तविक मूल्य है और Y_c, Y का आंकलित मूल्य है जिसे दिये गये समय चर मूल्य X के द्वारा ज्ञात किया जाता है।

माना कि $y= a + bx$ एक सीधी रेखा है जिससे प्रवृति को सज्जित करना है। a और b के मूल्यों को इस प्रकार ज्ञात किया जाये कि Y के वास्तविक एवं आंकलित मूल्यों के बीच अन्तर न्यूनतम् हो अर्थात् $\Sigma(y – y_c)^2$ न्यूनतम है, जहां $\Sigma(y - y_c) = 0$, की शर्त संतुष्ट होती हो, को हीं न्यूनतम वर्ग की विधि के नाम से जानते हैं। इस विधि से प्राप्त रेखा को **'सर्वोपयुक्त रेखा'** कहते हैं।

किसी दिये गये काल श्रेणी संमंक के लिए, प्रवृति रेखा ज्ञात करने हेतु, निम्नलिखित प्रासामान्य समीकरणों के मदद से a और b के मूल्यों को निकाला जाता है:

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

जहां, दिये गये काल श्रेणी के संमंकमाला के जोड़ों की संख्या है।

यहां, Y–अक्ष पर a रेखा का अवरोधन या इंटरसेप्ट है और b रेखा के ढ़ाल है, (यदि $b > 0$) हो तब, b को वृद्धि दर या (यदि $b < 0$) हो तो b घटते दर के नाम से भी जानते हैं। b, X के मूल्य में प्रति इकाई परिवर्तन के फलस्वरूप Y के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन को इंगित करता है।

प्रत्यक्ष विधि

(a) दिये गये वर्षों को प्राकृत संख्या (1, 2, 3,...) में परिवर्तित करें एवं इन्हें x से इंगित करें तथा Σx ज्ञात करें।

(b) x के मूल्य के वर्ग को ज्ञात करें और Σx^2 की गणना करें।

(c) x के संगत मूल्यों को y के मूल्यों से गुणा करें एवं Σxy को ज्ञात करें।

(d) y के मूल्यों को जोड़े और Σy को ज्ञात करें।

(e) इन मूल्यों को दोनों सामान्य समीकरणों में रखें और a और b के मूल्य के लिए हल करें।

(f) a और b के मूल्यों को $y = a + bx$ में रखें और तब x के विभिन्न मूल्यों के लिए प्रवृति मूल्यों ज्ञात करें।

लघु विधि

किसी दिये गये समय विन्दू को मूल मानते हुए प्रथम वर्ष से x चर की माप करें; लेकिन समय को मूल विन्दू के रूप में मध्य विन्दू से गणना करें ताकि $\Sigma x = 0$, जब $\Sigma x = 0$, तब सामान्य समीकरण निम्न रूप से हो सकते हैंः

$\Sigma y = Na$ अतः, $a = \frac{\sum y}{N}$ और

$\Sigma xy = b\Sigma x^2$ अतः, $b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$

गुणः

1. यह एक पूर्णतः वस्तुपरक् विधि है।
2. यह विधि पूरी समय अवधि के लिए प्रवृति मूल्य प्रदान करती है।
3. इस विधि का प्रयोग भविष्य के प्रवृति पूर्वानुमान के लिए किया जाता है क्योंकि प्रवृति रेखा मूल्यों एवं समय के बीच फलनात्मक संबंध को स्थापित करते हैं।

अवगुणः

1. इसमें बहुत सारे गणना की आवश्यकता होती है और एक जटिल एवं कठिन विधि प्रतीत होती है।
2. यहां तक एक भी पद मूल्य को जोड़ने के लिए नये समीकरण का निर्माण करना पड़ता है।
3. इस विधि के द्वारा भविष्य के पूर्वानुमान प्रवृति मूल्य, मौसमी, चक्रीय या अनियमित विचलन आदि पर आधारित पूर्वानुमान को नजर अंदाज करता है।

गैर–रेखीय प्रवृति

न्यूनतम वर्ग की विधि द्वारा एक अणुवृत आकार का वक्र या गैर–रेखीय वक्र फिटिंग

जब काल श्रेणी के आंकड़े रेखीय प्रवृति के समनूरूप नहीं हो तब हम गैर–रेखीय प्रवृति ज्ञात करते हैं। इसके लिए हम समीकरण निम्न रूप प्रयोग करते हैं,

$y - a + bx + ex^2 + dx^3 + ... + kx^n$, जिन्हें x चर में n कोटि के बहुपद कहते हैं, जहां $x \neq 0$ है।

माना कि अणुवृत आकार के वक्र

$y = a + bx + cx^2$,

जिसमें हमेशा की तरह सामान्य संकेत पद्धति मौजूद है।

a, b और c के मूल्यों का निर्धारण निम्नलिखित सामान्य समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$$
$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

यदि मूल विन्दू को एक उपयुक्त या उचित विन्दू से हम परिवर्तित करें जैसे कि $\Sigma x = 0$, तब सामान्य समीकरण के विघटित रूप निम्न प्रकार हो सकते हैः

$$\Sigma y = Na + c\Sigma x^2$$
$$\Sigma xy = b\Sigma x^2$$
$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + c\Sigma x^4$$

11.3.3.5 काल श्रेणी के लिए गणितीय मॉडल

सामान्यतया दो मॉडलों का प्रयोग इसके घटकों में एक समय श्रृंखला का अपघटन किया जाता है।

1. **योगात्मक मॉडलः** यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि अवलोकित मूल्य, काल श्रेणी के सभी चार घटकों का योग है, अर्थात्

   $Y = T + S + C + I,$

   जहां, Y = वास्तविक आंकड़े, T = प्रवृति मूल्य, S = मौसमी घटक, C = चक्रीय घटक, I = अनियमित घटक

   काल श्रेणी के अपघटन के लिए एडिटिव मॉडल यह मानता है कि सभी चार घटक एक दूसरे से स्वतंत्र होकर कार्य करते हैं। यह भी मानता है कि सभी चार घटकों में जुड़ने का चरित्र हो। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि प्रवृति मूल्य के केवल निरपेक्ष मूल्य हीं जोड़कर या घटाकर अवलोकित मूल्य तक पहुंचा जा सकता है।

2. **गुणात्मक मॉडलः** यह मॉडल मानता है कि अवलोकित मूल्य को काल श्रेणी के अन्य तीन घटकों के परिवर्तन की दर से प्रवृति (T) को गुणा करके ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्

   $$Y = t \times S \times C \times I.$$

   गुणा योग्य मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि सभी घटक एक दूसरे से स्वतंत्र हो यह आवश्यक नहीं है क्योंकि कई ऐसे कारक व कारण होते हैं जिसके चलते एक दूसरे को ये सभी प्रभावित करते हैं। यह भी मानता है कि सभी घटकों में गुणा करने का स्वभाव विद्यमान होते हैं। ***यह ध्यान दिया जा सकता है कि उपरोक्त मॉडल में प्रवृति के मूल्य को छोड़कर सभी घटक जो दाहिनी पक्ष में दिये गये हैं, परिवर्तन की दर या सूचकांक को प्रदर्षित करते हैं।***

काल श्रेणी से संबंधित अधिकतर आर्थिक एवं व्यवसायिक परिघटनाएं गुणोतर मॉडल को पालन करता हैं। सामान्यतया, एडिटिव मॉडल का प्रयोग बिरले हीं किया जाता है।

11.3.4 काल श्रेणी का संपादन

उपलब्ध संमंकों को उपयोगी बनाने के लिए इसमें आवश्यक समायोजन किया जाता है। कुछ महत्वपूर्ण समायोजन निम्नलिखित हैः

1. **काल विचरणः** यदि आंकड़े मासिक आधार पर दिये गये हो, तब समय विचरण के प्रभाव को जानने के लिए इसे समायोजन करना आवश्यक है क्योंकि वर्ष के प्रत्येक माह में दिनों की संख्या बराबर नहीं होती है। इस प्रकार के काल विचरण के समायोजन के लिए का दैनिक औसत से मासिक कुल को विभाजित करके $\frac{365}{12}$ से गुणा करते हैं, जो माह में औसत दिनों व दिवसों की संख्या को प्रदर्शित करेगें।
2. **जनसंख्या परिवर्तनः** जनसंख्या परिवर्तन में समायोजन करना तब ज्यादा आवश्यक हो जाता है जब चर, जनसंख्या परिवर्तन से प्रभावित होते हैं। यदि हम राष्ट्रीय आय से संबंाित आंकड़ों का अध्ययन करते हैं तब इस प्रकार के समायोजन आवश्यक हो जाता है। इस स्थिमि में, समायोजन, आय को संबंधित व्यक्तियों से भाग देकर किया जा सकता है। तब हम प्रतिव्यक्ति आय ज्ञात कर सकते हैं।
3. **कीमत परिवर्तनः** कीमत परविर्तन के लिए समायोजन आवश्यक होता है जब कभी हमारे पास वास्तविक मूल्य में परिवर्तन हो। चालू वर्ष के कीमत का आधार वर्ष के कीमत के अनुपात को पिचकाकर चालू मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है।
4. **फ्रेन्कः** एक मान्य निष्कर्ष को ज्ञात करने के क्रम में, उस आंकड़े का जिसका विश्लेषण करना है वह निश्चित रूप से तुलनीय योग्य होने चाहिए। जब हम काल श्रेणी के आंकड़ों का विश्लेषण करते हैं तब उसमें पूर्व के अवधियों या वर्षों के आंकड़े दिये होते है जिन्हें निश्चित रूप से सजातीय एवं तुलनीय होना चाहिए। अतः परिवर्तन के प्रभाव को जानने के लिए यथा संभव आंकड़ों का सजातीय एवं तुलनीय होना आवश्यक है।

11.3.5 आवर्त विचरण या मौसमी परिवर्तन का मापन

मौसमी विचरण को अलग एवं पहचानने के क्रम में, हम सबसे पहले काल श्रेणी में मौजूद प्रवृति, चक्रीय विचरण तथा अनियमित उच्चावचन आदि के प्रभाव को यथा संभव विमूक्त करते हैं। मौसमी विचरण को मापने की कुछ महत्वपूर्ण विधियां निम्नलिखित हैः

1. आवर्त विचरण निर्देशांक या आर्वत माध्य/औसत रीति
2. चल माध्य द्वारा आवर्त विचरण
3. श्रृंखला मूल्याअनुपात रीति
4. प्रवृति अनुपात रीति
5. चल माध्य अनुपात विधि

अब हम इनका अलग–2 चर्चा करेगें।

11.3.5.1 आवर्त माध्य रीति

इस विधि में हम निम्नलिखित सोपानों का प्रयोग करेगें:

(a) काल श्रेणी के आंकड़ों को वर्ष, माह या त्रैमासिक के अनुसार क्रम में रखते हैं।

(b) प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक या त्रैमासिक का समग्र ज्ञात करते हैं।

(c) प्रत्येक माह या त्रैमासिक के लिए औसत ज्ञात करते हैं। ये औसत माध्य एवं माध्यिका हो सकते हैं। सामान्यतया यदि कोई विशेष माध्य के लिए चिन्हित नहीं किया गया हो तब साधारण माध्य लेते हैं।

(d) माह या त्रैमासिक को औसत 100 के बराबर लेते हैं, माह या त्रैमासिक आर्वत निर्देशांक की गणना निम्नलिखित सूत्र के द्वारा की जा सकती है:

मासिक या त्रैमासिक आवर्त विचरण निर्देशांक =

$$\frac{\textit{Monthly (or quarterly) Average for the month (or quarter)}}{\textit{Average or monthly (or quarterly) averages}}$$

सांकेतिक रूप में,

प्रथम अवधि के लिए आवर्त निर्देशांक,

$$I_1 = \frac{\overline{S}_1}{\overline{S}} x100$$

जहां, S_1 = प्रथम अवधि का औसत

S = सभी अवधियों का औसत $\frac{\sum \overline{S}_j}{k}$

j = 1, 2, 3, 4, ….. k

k = 12 माह के लिए आंकड़े

= 4 त्रैमासिक के लिए आंकड़े

गुणः

1. यह एक अति सरल विधि है।
2. यह विधि वहां ज्यादा उपयोगी है जहां काल श्रेणी में काई निश्चित, प्रवृति नहीं पाया जाता है।

<u>अवगुण / सीमाएंः</u>

1. अधिकतर आर्थिक काल श्रेणीयां प्रवृति वाली होती हैं और इसलिए, मौसमी या आवर्त निर्देशांक की गणना इस विधि द्वारा की गई सूचकांक प्रवृति एवं आवर्त सूचकांक होती है।
2. काल श्रेणी में मौसमी विचरण के अलग करने वाली साधारण औसत रीति इस मान्यता पर आधारित है कि श्रेणियां केवल मौसमी एव अनियमित उच्चावचन से संबंधित है।
3. यह विधि सामान्य मौसमी विचरण को चित्रित नहीं करती हैं क्योंकि इसे मूल व वास्तविक आंकड़ों से प्राप्त किया जाता है जो केवल मौसमी विचरण से हीं नहीं अपितु बाकि अन्य तीन घटकों से भी प्रभावित होती है।

4. मूल आंकड़ों के श्रेणी में से चक्रीय विचरण के प्रभाव को औसत या माध्य प्रक्रिया से विमुक्त नहीं किया जा सकता है।

11.3.5.2 चल माध्य के द्वारा मौसमी विचरण

यह विधि *चल माध्य की प्रतिशत रीति* के नाम से भी जानी जाती है। इस विधि से आवर्त निर्देशांक की गणना करने की निम्नलिखित चरण हैं:

(i) आंकड़ों के चल माध्य की गणना की जाती है। यदि आंकड़े मासिक हों तब 12–मास चल माध्य, यदि वे त्रैमासिक हो, तब 4–त्रैमासिक चल माध्य की गणना की जायेगी। दोनों हीं स्थितियों में चल माध की समय अवधि सम संख्या होती है, अतः ये चल माध्य केन्द्र मे अवस्थित होते हैं।

(ii) योगात्मक मॉडल में, प्रत्येक मूल या वास्तविक मूल्य से, लघु कालिक उच्चावचन को ज्ञात करने के लिए संगत चलायमान औसत को घटाया जाता है:

(iii) $Y - T = S + C + I$

(iv) अलग सारणी बनाकर, मासिक या त्रैमासिक जैसे लघु कालिक उच्चावचन को पूरे वर्ष प्रत्येक माह या त्रैमासिक से जोड़कर और उनके औसत को प्राप्त किया जाता है। इन औसतों को प्रत्येक माह या त्रैमासिक के लिए आवर्त विचरण के नाम से जानते हैं।

(v) यदि हम अनियमित विचरण को पृथक मापना चाहते हैं तब अल्प–कालिक उच्चावचनों में से संगत मासिक या त्रैमासिक माध्य को घटाते हैं।

गुण एवं सीमाएं:

यह आवर्त विचरण के अध्ययन के लिए वृहत रूप से प्रयोग किया जाने वाला विधि है। यह विधि प्रवृति एवं चक्रीय विचरण को श्रेणी से विमूक्त करता है। यदि चक्र नियमित न हो तब उस स्थिति में यह विधि कुछ चक्रीय विचरण से प्रभावित होते हैं।

इस विधि की सबसे बड़ी कमजोरी है कि आवर्त निर्देशांक न तो श्रेणी के शुरूआत में होते हैं और न हीं अन्त में होते हैं फलतः सही निष्कर्ष प्राप्त नहीं हो पाता है।

11.3.5.3 श्रृंखला मूल्य अनुपात रीति

इस रीति के निम्नलिखित चरण हैं:

(i) प्रत्येक त्रैमासिक या मासिक मूल्य को उसके तुरंत पूर्ववर्ती त्रैमासिक या मासिक मूल्य से भाग देते हैं और परिमणा को 100 से गुणा किया जाती है। इन प्रतिशतों को हीं श्रृंखला मूल्य अनुपात रीति कहते हैं। इस प्रकार;

$$Link\,Relative = \frac{Current's\,Season\,Value}{Previous\,Season\,Value} x100$$

प्रथम पद के साथ कोई संगत श्रृंखला अनुपात नहीं होगी।

(ii) पूरे वर्ष का प्रत्येक मौसम के लिए औसत श्रृंखला अनुपात की गणना की जाती है। औसत श्रृंखला अनुपात के अलावा भी माध्यिका की गणना की जा सकती है।

(iii) इन औसत श्रृंखला, अनुपात को श्रृंखला मूल्य अनुपात में परिवर्तित किया जाता है। प्रथम श्रृंखला अनुपात के रूप में 100 को लिया जाता है।

प्रचलित श्रृंखला अनुपात = (औसत प्रचलित श्रृंखला अनुपात × पूर्ववर्ति वर्ष की श्रृंखला अनुपात)/100

(iv) प्रथम का द्वितीय श्रृंखला अनुपात की गणना अन्ति के श्रृंखला अनुपात के आधार पर की जाती हैः

प्रथम त्रैमासिक की श्रृंखला मूल्यानुपात = (प्रथम का औसत श्रृंखला मूल्यानुपात × अन्तिम का श्रृंखला अनुपात) / 100.

यह श्रृंखला मुल्यानुपात 100 के बराबर हो भी सकता है और नहीं भी। यह निरपेक्ष प्रवृति के कारण 100 के बराबर नहीं हो सकते हैं। यदि यह 100 के बराबर होता है तो चरण छः का पालन करें, यदि 100 के बराबर नहीं है तब चरण पांच फिर चरण चतुर्थ का पालन करें।

(v) चरण चतुर्थ में ज्ञात प्रथम पद के नये श्रृंखला मुल्यानुपात एवं 100 के मान्यता पर श्रृंखला मूल्यानुपात के बीच अन्तर की गणना करें। d को मौसमों की संख्या से भाग देने एवं परिणाम को 1, 2, 3 से गुणा करने तथा गुणफल को संगत $2^{रा}$, $3^{रा}$ एवं $4^{था}$ त्रैमासिक श्रृंखला से क्रमशः घटाते हैं। इन्हें शुद्ध या सत्य मूल्यानुपात कहते हैं।

(vi) चतुर्थ चरण में ज्ञात श्रृंखला मूल्यानुपात, यदि इसे शुद्ध श्रृंखला मूल्यानुपात क लिए सहीं करने की आवश्यकता नहीं है तब इन्हें समायोजित श्रृंखला मूल्यानुपात को औसत प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार प्राप्त निर्देशांक हीं वांछित आवर्त निर्देशांक है।

11.3.5.4 प्रवृति अनुपात रीति

इस विधि से आवर्त निर्देशांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सोपानों का पालन किया जाना चाहिएः

(i) न्यूनतम वर्ग विधि के द्वारा प्रवृति मूल्य को निर्धारित करें।

(ii) प्रवृति का अनुपात ज्ञात करने के लिए, मूल आंकड़ों को संगत प्रवृति मूल्य से विभाजित करें और इन अनुपातों को 100 से गुणा करें, अर्थात्,

$$\text{प्रवृति के अनुपात} = \left(\frac{\textit{Original Data}}{\textit{Trend value}}\right) \times 100$$

(iii) द्वितीय चरण में ज्ञात की गई प्रवृति के अनुपात से समानान्तर माध्य की गणना करें।

(iv) अन्त में सभी प्रवृति अनुपात को आवर्त निर्देशांकों में परिवर्तित करेगें। इसके लिए तृतीय चरण में ज्ञात सभी औसतों को जोड़ते हैं और उनका सामान्य औसत करते हैं। आवर्त निर्देशांक की गणना निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता हैः

$$\text{आवर्त निर्देशांक} = \left(\frac{Quarterly\ Averages}{General\ Average} \right) \times 100$$

11.3.6 काल श्रेणी का भविष्यवाणी विधि में प्रयोग

पांच प्रमुख विधियां हैं जिनमें काल श्रेणी का प्रयोग किया जाता हैः

1. **माध्य भाविष्यवाणीः** यह भविष्यवाणी का सबसे सरल विधि है जिसमें t समय अवधि के लिए, हम श्रेणी के उस मूल्य का भविष्यवाणी करते हैं जो श्रेणी के माध्य के बराबर होता है अर्थात्,

   $$\hat{yt} = \bar{y}$$

   इस विधि में प्रवृति एवं चक्रीय प्रभाव को गणना में सम्मिलित नहीं किया जाता है।
2. **सापेक्ष पूर्वानुमानः** इस विधि में हम जिस समय अवधि t के लिए मूल्य का पूर्वानुमान करते हैं, वह पूर्व अवधि में वास्तविक या मूल अवलोकित मूल्य के बराबर हाती हैं, अर्थात, समय अवधि (t-1) के लिए किया जाता है। यह निम्न परिणाम देते हैं,

   $$\hat{yt} = yt - v$$
3. **रैखिक प्रवृति पूर्वानुमानः** इसे निम्न रूप से प्रदर्शित करते हैं $y_t = a + bx$, जहां x को t के मूल्य से ज्ञात किया जाता है; a और b स्थिर राशि हैं। यह विधि न्यूनतम वर्ग रीति पर आधारित है जहां समय एवं प्रतिक्रिया मूल्य x के बीच फलनात्मक रैखिक सबंध मानते हुए उपरोक्त सूत्र से ज्ञात किया जाता है।
4. **गैर–रेखीय प्रवृति पूर्वानुमानः** इस विधि में न्यूनतम वर्ग रीति के द्वारा समय एवं प्रतिक्रिया मूल्य के बीच गैर–रेखीय संबंध पता चलता है। पूर्वानुमान मूल्य y_t, की गणना दिये गये समय अवधि t से गैर–रेखीय संबंध वाले सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जाता है।

   $y_t, \ = a + bx + cx^2,$

   जहां x–मूल्य की गणना के मूल्य से की जाती है और a, b, c स्थिरांक को सामान्य समीकरण से आंकलन कर सकते हैं।
5. **घातीय चिकनाई के साथ पूर्वानुमान।**

11.4 सारांश

इस इकाई में आपने व्यवसाय पूर्वानुमान के बारे में अध्ययन किया है। पूर्वानुमान में पालन किये जाने वाले विभिन्न सोपानों का सरलता से व्याख्या की गई है। भविष्य के लिए पूर्वानुमान का के आंकलन का प्रथम चरण पूर्व के समय अवधियों से सूचनाओं का एकत्र करना होता है। इस क्रम में हम सामान्यतया सांख्यिकीय आंकड़ों से हीं संबंध होता है जिसमें क्रमागत समय अन्तरालों में सूचनाएं एकत्र करना, अवलोकित या अंकित करना आदि हो सकते हैं। इस प्रकार, जब हम संख्यात्मक आंकड़ों का अवलोकन विभिन्न समय विन्दूओं में करते हैं तब अवलोकनों के ऐसे समुच्च को हीं काल श्रेणी के नाम से जानते हैं। आगे हम काल श्रेणी के विश्लेषण के अवधारणा को अच्छे

उदाहरण से चर्चा करेगें। क्रिया तथा प्रतिक्रिया सिद्धांत के गुण एवं अवगुण की व्याख्या बहुत सरलता से की गई है। बहिर्वेशन व्यवसाय पूर्वानुमान का सबसे सरल विधि है। बहिर्वेशन के द्वारा एक व्यवसायी उनके द्वारा उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं के मांग तथा भविष्य के कीमत प्रवृति के बारे में पूर्वानुमान करते हैं। आपने काल श्रेणी के प्रवृतियों को मापने की विभिन्न विधियों जैसे हस्तमुक्त या रेखीय विधि, अर्द्ध औसत विधि, चल औसत विधि, न्यूनतम वर्ग रीति आदि के बारे में अध्ययन किया है। चल औसत की रीति का प्रयोग काल श्रेणी में चिकानाई या शुद्धता लाने के लिए किया जाता है। यह संमंकों के उच्चावचन को चल औसत रीति द्वारा विशुद्ध व स्पष्ट बनाता है। इकाई के अन्त में हमने न्यूनतम वर्ग रीति के विभिन्न विधियों के गुण एवं अवगुणों की भी चर्चा विस्तार से की गई है।

11.5 शब्दावली

- **व्यवसाय पूर्वानुमानः** इससे तात्पर्य है कि पूर्व एवं वर्तमान के आर्थिक स्थितियों का भविष्य में होने वाले संभावित व्यवसायिक स्थितियों के बारे में पूर्वानुमान करने के उदेश्य से की गई सांख्यिकीय विश्लेषण है।
- **काल श्रेणीः** यह दिये गये क्रमिक समय अन्तरालों में, एक संख्यात्मक मानों का समुच्च होता है।
- **निरपेक्ष प्रवृतिः** इसका अर्थ है कि दिये गये श्रेणी में वृद्धिमान व कमी को दीर्घ अवधि में विशुद्धता एवं एकरूपता प्रदान करना।
- **आवर्त विचरणः** काल श्रेणी में ऐसा अविधिक विचरण जो एक वर्ष या लघु अवधि में लगातार होते हैं मौसमी विचरण कहतलाते हैं।

11.6 बोध प्रश्न

खाली स्थानों को भरें।

1) .... से तात्पर्य है कि पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक शर्तों के विश्लेषण से प्राप्त निष्कर्ष के आधार पर भविष्य में होने वाले व्यापार शर्तों में परिवर्तन की अति निकट संभावनाएं क्या है।
2) .... की सहायता से व्यवसाय स्थितियों के उच्चावचन का पता लगाते हैं और पूर्वानुमान करके समस्या से संबंधित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।
3) .... एक संख्यात्मक मूल्यों का समुच्च है जो दिये गये चरों के लगातार समय अवधियों को प्रदर्शित करता है।
4) जब काल श्रेणी संमंकों में एक वर्ष के लघु अवधि के समय में अवधिक स्वभाव एवं लगातार परविर्तन या विचलन हो तब इन्हें ....कहते हैं।

11.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

1) व्यापार भविष्यवाणी 2) व्यवसाय वायुदाबमापी 3) काल श्रेणी

4) मौसमी विचलन

11.8 स्वपरख प्रश्न

1. काल श्रेणी में प्रयोग किय जाने वाले पूर्वानुमान विधियों का उल्लेख करें।
2. काल श्रेणी के लिए गणितीय मॉडल का व्याख्या करें।
3. चलायमान औसत रीति की वर्णन करें।
4. व्यवसाय पूर्वानुमान के सिद्धान्तों की चर्चा करें।
5. व्यवसाय पूर्वानुमान के महत्व की व्याख्या करें।
6. काल श्रेणी के विभिन्न घटकों की चर्चा करें।
7. प्रवृति माप की रीतियों का वर्णन करें।

11.9 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Basic Statistics – Guptha and Dasguptha
2. Fundamentals of Business Statistics – Sanchethi and Kappor.
3. Quantitative Methods in Management – Srivastava, Shenoy and Guptha.
4. Business Statistics – Guptha and Guptha.

*****

इकाई 12 प्रायकिता सिद्धान्त

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- प्रायकिता से संबंधित कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझ सकें।
- प्रायकिता के अवधारणाओं के विभिन्न उपागमों का वर्णन कर सकें।
- प्रायकिता के निष्कर्षों से संबंधित विभिन्न नियमों को समझ सकें।

12.1 प्रस्तावना

आपने 'प्रायकिता' शब्द के बारे में निश्चित हीं सुना है। भविष्य अनिश्चित होते हैं और हम भविष्य में होने वाले वाले घटनाओं के बारे में काफी रूचि रखते है। इस होने कि संभावना को हीं सामान्तया प्रायिकता के नाम से जानते हैं। अनिश्चितता की दृष्टता में निर्णय लेने के लिए आजकल प्रायकिता सिद्धान्त को एक सहारा के रूप में निरन्तर प्रयोग किया जाता है।

प्रायकिता की उत्पति एक तरह से जुआ का ऋणी है। जुआरी गणितज्ञों से विभिन्न खेलों में उनके जीतने की संभावनाओं को जानना चाहता है। प्रायकिता सिद्धान्त की नींव दो फ्रांसिस गणितज्ञों, ब्लासे पास्कल एवं पियरे डि फेरमट ने रखी, जब प्रायकिता में दो पासे को 24 बार रोल किया जाय तो कम से कम दो छः स्कोर ज्ञात हो कि समस्या का हल ढुंढ रहे थे जिसे एक अन्य फ्रांसिस जुआरी चावंलियर डि मेर के द्वारा संपन्न कराया गया।

इस इकाई में, आप विभिन्न विचारों व बिन्दुओं से प्रायकिता के अवधाराणाओं एवं वांछित प्रायकिता की गणना के लिए विभिन्न नियमों के बारे में अध्ययन करेगें।

12.2 प्रायकिता की परिभाषा

प्रायकिता को समय–समय पद विभिन्न शिक्षाविद्ों अलग–अलग तरीके से परिभाषित किया जाता रहा है। इन विभिन्न प्रकार के परिभाषाओं को विभिन्न समूहों में वर्गीकृत किया गया है जैसे, 'चिरसम्मत परिभाषा', 'सांख्यिकीय या संख्यात्मक परिभाषा' एवं आधूनिक परिभाषा। यद्यपि किसी घटना के लिए प्रायकिता की गणना करने की कई विधियां हैं लिए एक चीज जो सारे विधियों में है वह प्रायकिता का मान, जो 0 से 1 के बीच होता है। यदि यह निश्चित हो कि कोई घटनाएं नहीं होगी तब प्रायकिता का मान 0 के बराबर होगा और यदि किसी घटना का घटित होना निश्चित हो तब उसकी प्रायकिता का मान 1 के बराबर होगी। अतः प्रायकिता का मान 1 के करीब हो तब उस घटना के घटित होने की संभावना अधिक होगी और यदि प्रायकिता का मान 0 के करीब हो तब उस घटना के घटित होने की संभावना बिल्कूल क्षीण हागी। दूसरी ध्यान देने वाली बात है कि एक अभ्यास या प्रयोग के अन्तर्गत घटित होने वाली घटनाओं के प्रायकिताओं का योग 1 के बराबर होती है। प्रायकिताओं को अनुपात या भिन्न या प्रतिशत में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, लड़की पैदा होने की प्रायकिता को 1/2 या 0.5 या 50.0% के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

12.2.1 प्रायकिता की परम्परागत परिभाषा

परम्परागत परिभाषा, प्रायकिता का एक पुरानी परिभाषा है। इस विधि को परम्परागत उपागम कहा जाता है क्योंकि इसका उद्भव एवं विकास ब्लाईस पास्कल जैसे शोधाकर्ताओं से हुआ है।

परम्परगत उपागम के अनुसार, 'प्रायकिता' शब्द को किसी घटित होने वाले घटना E को अनुकूल परिस्थितियों की संख्या E एवं समस्त परिस्थितियों की संख्या के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। सांकेतिक रूप में, इसे निम्न तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता हैः

$$P(E) = \frac{Number\ of\ favourable\ outcomes}{Total\ number\ of\ equally\ likely\ outcomes}$$

इसका अर्थ है कि किसी घटना m के घटित होने की संभावना है तथा n घटना के घटित नहीं होने को सूचति करता हो, तब घटना के घटित होने की प्रायकिता (P) को निम्न रूप से इंगित किया जा सकता हैः

$$P = \frac{m}{m+n}$$

सामान्यतया, पराम्परागत उपागम से गणना की गई प्रायकिता को भिन्न या दशमलव के रूप में प्रदर्शित करते हैं।

परम्परागत प्रायकित को सुस्पष्ट तरीके से समझने के लिए, आपको कुछ मौलिक शब्दों के अर्थ को जानना आवश्यक है जिनका इस संदर्भ में प्रयोग होगा। आईए ऐसे शब्दों का एक–एक करके चर्चा करें।

यादृच्छिक प्रयोगः यह एक ऐसी क्रिया है जिसके नतीजो का पूर्वानुमान निश्चित नहीं होते हैं। इसका अर्थ है कि एक यादृच्छिक प्रयोग ऐसा प्रयोग है जिसे किसी सजातीय शर्तों पर क्रिया को दोहराने पर कोई अद्वितीय परिणाम या नतीजा नहीं देगें बल्कि उनका सभी संभावित परिणाम एक हीं तरह के बहुत सारे हो सकते हैं। यहां, 'प्रयोग' शब्द का प्रयोग करते हैं क्योंकि नतीजे को अभी तक निर्धारित करना होता है, जबकि 'यादृच्छिक' शब्द इंगित करता है कि किसी विशेष नतीजे का आना या होना अनिश्चित होता है। उदाहरण के लिए, यदि हम एक सिक्का उछालते हैं तो उपर या तो चित या तो पट मिलेगा। दोनों हीं नतीजे संभव हैं, अतः एक सिक्के का उछालना एक 'यादृच्छिक प्रयोग' को प्रदर्शित करेगी।

परीक्षण और घटनाएंः प्रत्येक यादृच्छिक प्रयोग के निस्पादन को परीक्षण और एक यादृच्छिक प्रयोग के नतीजे को घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम एक सिक्के को चार बार उछालते हैं, तब हमारे पास प्रयोग के चार परीक्षण एवं उनके नतीजे मिलेगें, अर्थात चित या पट की प्राप्ति हीं घटना कहलाएगी। एक घटना जिसमें एकल नतीजे नीहित होते हैं, एक प्रयोग का एकल घअना कहलाती है; उदाहरण के लिए, एक यादृच्छिक प्रयोग के अन्तर्गत एक पासे को लुढकाने पर उपर में 2 का होना एक साधारण घटना है। एक घटना जिसमें एक से अधिक न्यायदर्श बिन्दु हों तो उसे संयुक्त घटना कहते हैं; उदाहरण के लिए, एक यादृच्छिक प्रयोग के अधीन एक पासे को लुढ़काने पर, उपरी भाग में आने वाले 'सभी सम संख्या' एक संयुक्त घटना को प्रदर्शित करता है क्योंकि यह एक प्रयोग के अधीन एक से अधिक नतीजों अर्थात् 2, 4, 6 से संबंधित/प्रदर्शित करता है।

अनुकूल घटनाएंः नतीजों की संख्या जो वांछित घटना के घटित होने को प्रदर्शित करता है, अनुकूल परिस्थिति या अनुकूल घटना कहलाती है; उदाहरण के लिए, एक पासे के रोलिंग यादृच्छिक प्रयोग में, यदि हम सम संख्याओं को प्राप्त करना चाहते हैं तब हमारे लिए अनुकूल घटनाएं व परिस्थितियां (2, 4 या 6) होगी।

समप्रायिक घटनाएंः एक नतीजे को समप्रायिक घटनाएं कहेगें यदि एक घटना के हाने की आशा दूसरी घटना के होने से कम या अधिक है तो सामान्यतः दोनों घटनाएं समप्रायिक कहलाती है। इसका अर्थ है कि सभी घटनाओं के घटित होने की संभावनाएं बराबर या समान है। उदाहरण के लिए, यदि हम एक सिक्का उछालें तो उपर चित या पट आने कि संभावना बराबर होगी या हानी चाहिए। इसका अर्थ है कि इस स्थिति में कुल समप्रायिक घटनाओं की संख्या 2 के बराबर होगी।

उदाहरण 1: एक पासे को उछालने या रोल करने पर उपर 1 आने की प्रायकिता क्या है?

हलः एक पासे छः भिन्न तल होते हैं, इसलिए पासे को एक बार रोल करने पर छः संभावनाएं हो सकती हैं और हमें अनुकूल नतीजा पासे के उपरी तल में 1 होना चाहिए। इसका अर्थ है कि हमारे लिए अनुकूल घटना 1 है। अतः,

पासे के उपरी तल पर 1 आने की प्रायकिता = $\frac{1}{6}$

उदाहरण 2: एक थैले में 2 लाल, 4 काला एवं 5 उजला गेंद रखे गये हैं। एक गेंद इसमें से निकाले जाते हैं। एक गेन्द निकाले जाते हैं तब उसके लाल होने की क्या प्रायकिता है?

हलः

कुल गेंदों की संख्या = 2 + 4 + 5 = 11

लाल गेंदों की संख्या = 2

$\therefore$ एक लाल गेंन्द निकालने की प्रायकिता = $\frac{2}{11}$

उदाहरण 3: एक अच्छी तरह से फेंटी हुई तास के गड्डी से एक कार्ड निकालते हैं, निकाले गये पती में 1. एक एटा एवं 2. एटा का बादशाह होने की प्रायकिता क्या है?

हलः

एक कार्ड के पैक व गड्डी में 52 पते होतें जिसमें चार तरह चिड़ी, काला पान, लाल पान एवं एटा, सभी के 13 पते होते हैं।

1. एक पते जो एटा हों के प्रायकिता = $\frac{13}{52} = \frac{1}{13}$
2. एटा के बादशाह की प्रायकिता = $\frac{1}{52}$

परम्परागत उपागम की सीमाएं

यद्यपि, प्रायकिता का परम्परागत उपागम समझने एवं लागू करने के लिए बहुत सरल है लेकिन इस विधि कि कुछ सीमाएं है जो निम्नलिखित हैं:

- इसका प्रयोग वहां नहीं किया जा सकता जहां घटनाओं के नतीजे समप्रायिक घटनाएं नहीं हो। उदाहरण के लिए, किसी विशेष दिन वर्षा हो भी सकती हैं नहीं भी हो सकती है लेकिन दोनों के हाने की संभावनाएं बराबर व समान नहीं है।
- वहां इस विधि का प्रयोग नहीं कर सकते जहां घटना के नतीजे अपरिमित हो और किसी एक प्रयोग के सभी संभावित नतीजे गणना योग्य नहीं है।

12.2.2 प्रायकिता की सांख्यिकीय या संख्यात्मक परिभाषा

प्रायकिता की सांख्यिकीय परिभाषा, परम्परागता प्रायकिता सिद्धान्त को प्रमाणिकता प्रदान करता है। इस उपागम का उद्‌भव ब्रिटिश सांख्यिकीविद् द्वारा सन् 1880 में जन्म एवं मृत्यु के जोखिम से व्यवसाय बीमा में हानि संबधि सांख्यिकीय आंकड़ों से प्रायकिता करने के साथ हीं हुआ। सांख्यिकीय या

संख्यात्मक उपागम प्रयोग के वृहत पैमाने पर अधिकाधिक बार अभ्यास पर आधारित है।

वॉन मीजेस के अनुसार ''यदि किसी प्रयोग को अधिक बार एक हीं तरहे के शर्त के साथ करें, तब घटना A के घटित होने की संख्या एवं प्रयोग की संख्या का अनुपात का सीमित मूल्य में प्रयोग के परीक्षण की संख्या जैसे बढ़ेगी, घटित होने वाली घटना A भी अनन्त होती जायेगी, इसे घटना A की प्रायकिता कहा जाता है।

अतः यदि n आयोजित की गई प्रयोग की संख्या एवं m घटना A के घटित होने की संख्या हो तब,

घटना A के घटने की प्रायकिता $= P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$

व्यवहारिक दृष्टि से, यह कभी संभव नहीं कि घटना की सीमा को इस विधि से ज्ञात किया जा सके। अतः हमें P(A) के मूल्य के करीब, अवलोकनों की बड़ी संख्या के आधार पर गणना करते हैं, जैसे कि, $P(A) = \frac{m}{n}$ ।

उदाहरण के लिए, यदि एक सिक्के को पराम्परागत उपागम के अनुसार उछाला जाये तो चित आने की प्रायकिता 1/2 है, क्योंकि सिक्के के एक उछाल में केवल दो संभावित नतीजे चित या पट होते है और उनके घटित होने की संभावना बराबर है।

इसलिए, यदि एक सिक्के को 4 बार उछाला जाय तब हमे 2 'चित' प्राप्त होना चाहिए। लेकिन व्यवहार में, ऐसा नहीं हो सकता है। यह संभव है कि सिक्के के चार उछाल में हमें एक भी चित न मिले या हम चार उछाल में पूरे चित हीं प्राप्त कर सकते हैं। लेकिन यदि इसक प्रयोग को बारबार एक लम्बें संख्या तक करें, उदाहरण के लिए हम सिक्के को 400 बार उछाले तब हम औसत रूप में 200 बार चित मिल सकते हैं।

उदाहरण 4: निम्नलिखित सारणी में 850 विद्यार्थियों के प्राप्तांक की बारम्बरता व वितरण दिये गये हैं।

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
छात्रों की संख्या	50	40	80	120	160	150	100	80	50	20

उपरोक्त समूह मे से किसी एक छात्र को यादृच्छिक तौर से चयन करते हैं। चयनित छात्र के प्राप्तांक कि प्रायकिता क्या होगी यदि प्राप्तांक–

1. 50 से कम, 2. 80 से अधिक एवं 3. 30 एवं 60 के बीच।

हलः

छात्रों की संख्या = 850

1. छात्रों की संख्या जिनका प्राप्तांक 50 से कम है = 50 + 40 + 80 + 120 + 160

= 450

$\therefore$ वांछित प्रायकिता $= \frac{450}{850} = 0.5294$

2. छात्रों की संख्या जिनका प्राप्तांक 80 से ज्यादा है = 50 + 20 = 70

$\therefore$ वांछित प्रायकिता $= \frac{70}{850} = 0.0823$

3. 30 से 60 के बीच अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या = 120 + 160 + 150 = 430।

$\therefore$ वांछित प्रायकिता $= \frac{430}{850} = 0.5058$

सांख्यिकीय उपागम की सीमाएं

सांख्यिकीय उपागम की मुख्य सीमा या कमजोरी है कि इसके अन्तर्गत समान स्थिति में बहुत अधिक संख्या तक प्रयोग को करना होता है लेकिन प्रयोगात्मक शर्तें सदैव एक जैसा एवं सजातीयता बने रहे यह आवश्यक नहीं हे।

12.2.3 प्रायकिता की आधुनिक या अभिगृहित परिभाषा

प्रायकिता की आधूनिक या अभिगृहित परिभाषा या उपागम परम्परागत उपागम का हीं विकसित रूप है जो प्रायकिता का मूल्यांकन करता है। इस उपागम का अविष्कार रूसी गणितज्ञ ए. एम. कोल्मोर्गोव ने 20वीं शताब्दी में की थी। प्रायकिता की आधूनिक या अभिगृहित उपागम समूच्च सिद्वान्त पर आधारित है।

माना कि S प्रतिदर्श समष्टि है। P(A), घटना A की प्रायकिता होगी यदि यह निम्नलिखित अभिगृहित को संतुष्ट करती होः

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) यदि $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं, तब उनके घटित होने की प्रायकिता निम्न प्रकार से हो सकती हैः

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n)$

प्रायकिता के इस अभिगृहित उपागम को सुस्पष्ट तरीके से समझने के लिए हमें निम्नलिखित शब्दों का अर्थ जानना आवश्यक हैः

प्रतिदर्श समष्टिः यह यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित नतीजों का समुच्च है। इसे प्रतीक S से प्रदर्शित या इंगित किया जाता है। प्रतिदर्श समष्टि के अन्तर्गत आने वाले सभी नतीजों को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं। एक प्रयोग से संबंधित प्रतिदर्श समष्टि ठीक उसी तरह से भूमिका निभाता है जैसे कि समुच्च सिद्धान्त में सामान्य प्रत्यय करते हैं। उदाहरण के लिए, एक सिक्का उछालने के यादृच्छिक प्रयोग में, दो संभावित परिणाम हो सकतें हैं, अर्थात् चित और पट; यदि इन्हें 'H' एवं 'T' से इंगित करें तब 'H' एवं 'T' प्रतिदर्श विन्दू कहलाएगें और इनके समुच्च को निम्नलिखित रूप से प्रदर्शित किये जायेगेंः

$S = \{H, T\}$

आधूनिक उपागम के अनुसार, एक घटना सभी संभावित वांछित परिणामों या नतीजों का समुच्च है।

पारस्परिक अपवर्जी घटनाएंः एक घटना पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं कहलाती है यदि एक साथ घटित न हो। इसका अर्थ है कि यदि एक घटना के घटित होने से अन्य घटनाओं के घटने की प्रायकिता को रोकता है तब उन्हें पारस्परिक अपवर्जी कहते हैं। दूसरे शब्दों में, पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं वे घटनाएं होती है जिनमें से एक के घटने से अन्य घटनाओं घटने की सम्भावना समाप्त हो जाती है। उदाहरण के लिए, एक सिक्का उछालने के यादृच्छिक प्रयोग में, 'चित' और 'पट' आने की घटनाएं एक पारस्परिक अपवर्जी है क्योंकि यदि 'चित' आता है, तो हम पट नहीं प्राप्त कर सकते हैं और यदि 'पट' आता है तो हम 'चित' प्राप्त नहीं कर सकते हैं। आधूनिक उपागम के अनुसार, यदि दो घटनाओं A और B के बीच कोई भी प्रतिदर्श बिन्दु या घटक कॉमन या एक जैसा या समान न हो तब वे पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं होगीं, अर्थात, $A \cap B = \emptyset$ ।

कुछ अन्य शब्द भी हैं जो प्रायः प्रायकिता के संदर्भ में प्रयोग किया जाता है। आपको इसके अर्थ जानने चाहिए जो निम्नलिखित हैः

सर्वागंपूर्ण घटनाएंः यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों व नतीजों के कुल संख्याओं को हीं प्रयोग के लिए सर्वागंपूर्ण घटनाएं कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक पासा फेंकने के यादृच्छिक प्रयोग में, हम सभी छः तलों में से एक तल अवश्य हीं प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, इस प्रयोग में सर्वागंपूर्ण घटनाओं की संख्या छः है। आधूनिक उपागम के अनुसार, एक प्रतिदर्श समष्टि के दो या दो से अधिक घटनाएं सर्वागंपूर्ण कहलाएगी यदि उनके समुच्च एक प्रतिदर्श समष्टि हैं। इस प्रकार घटनाएं $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots.. A_n$ सर्वागांपूर्ण हैं, यदि $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup An = S$, जहां, S, एक प्रतिदर्श समष्टि है।

स्वतंत्र एवं आश्रित घटनाएंः घटनाएं स्वतंत्र कहलाएगी यदि एक घटना के घटने से किसी दूसरे के परिणाम या नतीजों में कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा। उदाहरण के लिए, यदि हम एक सिक्के को कई बार उछालते हैं, तब प्रथम उछाल या अन्य किसी उछाल का परिणाम किसी अगले क्रमागत सभी उछालों के परिणामों पर कोई प्रभाव नहीं करेगें।

दूसरी तरफ, यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना के नतीजों में कुछ प्रभाव पड़ता है तब उन्हें आश्रित घटनाएं कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम तास के गड्डी से जिसमें 52 होते हैं से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकालते हैं तब प्राप्त पत्ता बादशाह होने की प्रायकिता 4/52 या 1/13 है। यदि हम पुनः दूसरा पत्ता उसी गड्डी से बिना प्रतिस्थापित किये निकालते है तब प्राप्त पत्ते की बादशाह होने कि प्रायकिता 3/51 होगी, क्योंकि पहले एक पत्ता जो बादशाह निकाले जाने के बाद गड्डी में केवले 3 बादशाह व कुल पत्ते की संख्या 51 हीं रह गई थी।

उदाहरण 5: एक जोड़े पासे को फेंकते हैं। दोनों पासों में एक हीं तरह की संख्या आने की प्रायकिता को ज्ञात करें।

हलः

यदि A समान अंक वाले जोड़े के घटना को प्रदर्शित करता है, तब

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

इस प्रकार, अर्थात् 6 परिणाम अनुकूल है जिसे A से प्रदर्शित करते हैं और कुल संभावित परिणामों की संख्या (अर्थात् सर्वागंपूर्ण घटनाए) 6×6 है $=$ 36

∴ वांछित प्रायकिता $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

उदाहरण 6: तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। ठीक एक चित आने की प्रायकिता को ज्ञात करें।

हलः

यदि H चित को प्रदर्शित करते हैं तथा T पट को प्रदर्शित करते हैं तब तीन सिक्कों को एक साथ उछालने से, प्रतिदर्श समष्टि के अर्न्तगत 8 संभावित परिणाम हो सकते हैं:

S = {*HHH*, *HHT*, *HTH*, *HTT*, *THH*, *THT*, *TTH*, *TTT*}

यदि A केवल एक चित आने की घटना को प्रदर्शित करता है, तब

A = {*HTT*, *THT*, *TTH*}

$P(A) = \frac{3}{8}$

12.3 प्रायकिता का योग नियम या प्रमेय

योग प्रमेय एक महत्वपूर्ण नियम है जो प्रायकिता के गणना संबंधी समस्याओं के समाधान में सहायता प्रदान करते हैं। इस प्रमेय के अनुसार, ''यदि एक घटना विभिन्न तरीके से हो सकती है जो पारस्परिक अपवर्जी है, तो इसके घटित हाने वाले प्रायकिताओं का योग इसके विभिन्न तरीके से घटित होने के प्रायकिता होगी।'' इसका मतलब है कि यदि A और B दो पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं, तब घटना A या B के घटित होने की प्रायकिता को निम्न प्रकार से होगी:

P (A or B) = P(A) + P(B)

समुच्च के सिद्धान्त के रूप में, यदि $(A \cap B) = \emptyset$, तब

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

इस नियम को किसी घटना के कोई भी संख्या के लिए सामान्यीकरण किया जा सकता है; अर्थात यदि तीन पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं A, B और C हैं तब घटनाएं A, B या C के हाने की प्रायकिता होगी:

$P (A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

यदि A और B दो घटनाएं एक हीं प्रतिदर्श समष्टि S, से संबंधित हैं, इसका अर्थ है कि यदि वे सभी घटनाएं पारस्परिक अपवर्जी नहीं हैं तब योग प्रमेय का प्रयोग करते समय इनमें जो समान पद हैं उन्हें घटा दिया जायेगा।

$P (A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

उदाहरण 7: एक तास के गड्डी से यादृच्छिक तरीके से एक पत्ते को निकालते हैं। इस पत्ते के बेगम या गुलाम होने की क्या प्रायकिता है?

हलः

बेगम निकालने की प्रायकिता $= \frac{4}{52}$ या $\frac{1}{13}$

गुलाम निकालने की प्रायकिता $= \frac{4}{52}$ या $\frac{1}{13}$

$\therefore$ गुलाम या बेगम निकालने की प्रायकिता $= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

उदाहरण 8: दो पासे को एक बार फेंकने पर दोनों तलों के योग का 8 या 11 होने की प्रायकिता को ज्ञात करें।

हलः

योग 8 आने के पांच तरीके हो सकते हैं:

1ला पासा: 2 3 4 5 6

2रा पास: 6 5 4 3 2

योग 8 प्राप्त करने की प्रायकिता $= \frac{5}{36}$

योग 11 आने के दो तरीके हैं

1ला पासा: 5 6

2रा पास: 6 5

योग 11 प्राप्त करने की प्रायकिता $= \frac{2}{36}$

अतः योग 8 या 11 प्राप्त करने की प्रायकिता $= \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$

उदाहरण 9: एक 52 पत्ते वाले कार्ड से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। निकाले गये पत्ते का रंग लाल या बादशाह हो इसकी क्या प्रायकिता है?

हलः

एक तास के गड्डी में कुल 26 लाल एवं 4 बादशाह के पत्ते होते हैं लेकिन गड्डी में दो ऐसे पत्ते होते हैं जो लाल के साथ–साथ बादशाह भी है।

लाय या बादशाह पत्ते निकालने की प्रायकिता $= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$ या $\frac{7}{13}$

12.4 शर्तयुक्त प्रायकिता

यादृच्छिक प्रयोग में, प्रयोग के नतीजे का ज्ञान बिना प्रयोग को निष्पादन किये प्राप्त नहीं होता है। लेकिन कभी–कभी यह संभव होता है कि एक प्रयोग के नतीजों के बाव्र में पहले से हीं आंशिक सूचनाएं ज्ञात हों। माना कि A और B दो ऐसी घटनाएं हैं कि $P(B) > 0$। तब किसी एक घटना B के घटने के बाद दूसरी घटना, A के घटने की प्रायकिता उसकी प्रतिबन्धित प्राययिकता कहलाती है, जबकि यह ज्ञात हो कि घटना B पहले हीं हो चुकी है। इस के रूप में लिखते हैं और ''प्रायकिता है कि A को होना है, B पहले हीं हो चुका है'' के रूप में पढ़ते हैं। इसके सुत्र का निम्न रूप से लिखा जा सकता है:

$$P(A / B) = \frac{No.of\ elements\ favourable\ to\ both\ A\ and\ B}{No.of\ elements\ favourable\ to\ B}$$

समुच्च सिद्धान्त के रूप में:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

उदाहरण 10: एक जोड़े पासे को उछालते हैं और दोनों के तलों के योग 7 के बराबर है। दोनों पासे में से एक में 3 आने की प्रायकिता क्या है?

हलः

माना कि A और B दो घटनाएं इस प्रकार हैं कि

B: दोनों पासे के तलों के संख्याओं का योग 7 है।

A: किसी एक पासे के तल में 3 है।

जब दोनों पासे को एक साथ फेंकते हैं तो संभावित कुल नतीजे हैं $6 \times 6 = 36$

P(B) = P{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)}= 6 / 36

(A∩B), को प्राप्त करने के लिए, A के अनुकूल नतीजों का चयन B के सभी अनुकूल नतीजों से करते हैं।

∴ P(A∩ B) = P{(4,3), (3,4)} = 2 / 36

∴ वांछित प्रायकिता = P(A/B) $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6}$ या $\frac{1}{3}$

12.5 प्रायकिता के गुणन नियम या प्रमेय

इस प्रमेय के अनुसार, दो घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायकिता, एक घटना होगी एवं प्रतिबन्धित प्रायकिता जिसके दूसरे घटना को होना है जबकि पहली घटना हो चुकी है के गुणन को हीं प्रायकिता के गुणन प्रमेय कहते हैं। इस गुण्न नियम का प्रयोग जब दो या दो से अधिक आश्रित घटनाओं के होने की क्रमागत प्रायकिताओं का गणना करना होता है। इस प्रकार, A और B दो घटनाएं हैं तब दोनों कि संयुक्त घटित होने की प्रायकिता निम्न रूप में होगीः

P(AB) = P(A) × P(B)

समुच्च सिद्धान्त के रूप में: P(A∩B) = P(A) **.** P(B/A) or P(A∩B) =P(B) **.** P(A/B)

यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएं हैं, तब P(A∩B) = P(A) . P(B)

उदाहरण 11: एक सिक्के के दो बार उछालने से दानों हीं स्थितियों में पट आने की क्या प्रायकिता है?

हलः

प्रथम उछाल में उपर पट आने की प्रायकिता = $\frac{1}{2}$

द्वितीय उछाल में उपर पट आने की प्रायकिता = $\frac{1}{2}$

∴ दोनों हीं उछाल में पट आने की प्रायकिता = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

उदाहरणः 52 पत्ते वाले तास गड्डी से 2 पत्ते प्रतिस्थापित (अर्थात् द्वितीय पत्ता तभी निकाले जाते हैं जब प्रथम पत्ते को उस गड्डी में वापस रख देते

हैं) करते हुए निकाल जाते हैं। निकाले गये दो पत्ते एक्का होने की प्रायकिता ज्ञात करें।

हलः

निकाले गये प्रथम पत्ते के एक्का होने की प्रायकिता $= \frac{4}{52}$

निकाले गये द्वितीय पत्ते के एक्का होने की प्रायकिता $= \frac{4}{52}$

∴ इसलिए दोनों निकाले गये पत्ते का एक्का होने की प्रायकिता $= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$

$= \frac{1}{169}$

उदाहरण 13: अच्छे से फेंटें गये 52 पत्ते वाले तास गड्डी से 4 पत्ते प्रतिस्थापित करते हुए क्रमागत तरीके से निकाले जाते हैं। 1. सभी चार पत्ते हुकुम के हैं, 2. उनमें से कोई भी पत्ता हुकुम का नहीं है, की प्रायकिता क्या है?

हलः

1. एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \frac{4}{52}$

∴ निकाले गये सभी पत्ते हुकुम के होगें की प्रायकिता $= \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{256}$

2. गैर–हुकुम या हुकुम के पत्ते न होने की प्रायकिता $= \frac{39}{52}$

∴ निकाले गये पत्ते हुकुम के नहीं है कि प्रायकिता $= \frac{39}{52} \times \frac{39}{52} \times \frac{39}{52} \times \frac{39}{52} = \frac{81}{256}$

उदाहरण 14: एक 52 पत्ते वाली तास गड्डी से दो पत्ते निकाले जाते हैं। प्रथम पत्ते के बादशाह एवं द्वितीय पत्ते के बेगम होने की प्रायकिता क्या है।

हलः

प्रथम पत्ते के बादशाह होने की प्रायकिता $= \frac{4}{52}$

यह प्रश्न में नहीं दिया है कि दूसरे पत्ते को निकालने से पूर्व प्रथम पत्ते को प्रतिस्थापित किया जाता है। इस प्रकार, जब दूसरा पत्ता प्रथम पत्ते के बिना प्रतिस्थापित किये निकाले जाते हैं तब दूसरे पत्ते के निकालने के लिए कुल संभावित नतीजों की संख्या 51 होगी न कि 52 ।

द्वितीय पत्ता के बेगम होने की प्रायकित $= \frac{4}{51}$

∴ प्रथम पत्ता बादशाह एवं द्वितीय पत्ता बेगम होने की प्रायकिता $= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51}$

$= \mathbf{\frac{4}{663}}$

उदाहरण 15: एक 52 पत्ते वाले तास गड्डी से दो क्रमागत पत्ते एक के बिना प्रतिस्थापन के दूसरा पत्ता निकालने पर बादशाह होने की प्रायकिता क्या होगी?

हलः

दो क्रमागत बादशाह पत्ते को बिना प्रतिस्थापन के निकालने की प्रायकिता $= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

उदाहरण 16: एक कक्षा में 80 विद्यार्थी हैं; जिसमें से 25 छात्राएं एवं 55 छात्र हैं; इनमें से 10 धनी हैं और बाकि निर्धन हैं; इनमें से 20 श्याम वर्ण से संबंधित हैं। धनी श्याम वर्ण वाले छात्राओं के चयन की प्रायकिता क्या है?

हलः

छात्राओं के चयन की प्रायकिता $= \frac{25}{80}$ या $\frac{5}{16}$

धनी छात्राओं के चयन की प्रायकिता $= \frac{10}{80}$ या $\frac{1}{8}$

श्याम वर्ण वाले छात्राओं के चयन की प्रायकिता $= \frac{20}{80}$ या $\frac{1}{4}$

$\therefore$ धनी श्याम वर्ण वाले छात्राओं की प्रायकिता $= \frac{5}{16} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{512}$

12.5.1 गुणन प्रमेय के लिए योग प्रमेय का अनुप्रयोग

कभी–2 हमें ऐसी स्थितियों का सामना करना होता हैं, जहां हमें दोनो, योग प्रमेय एवं गुणन प्रमेय का घटित होने वाले घटनाओं की प्रायकिता के गणना करने के लिए प्रयोग करना होता है। इसका प्रयोग आधारभूत रूप से उन स्थितियों में करते हैं जहां दो या दो से अधिक आश्रित घटनाएं एक से अधिक तरीकों से होते हैं, अर्थात, यहां घटित होने वाले घटनाओं के एक हीं समुच्च के एक से अधिक संयोग होते हैं।

उदाहरण 17: 3 लाल एवं 4 काले रंग के गेंद वाले थैले से 2 गेंद प्रतिस्थापित करते हुए निकाला जाता है। एक लाल एवं दूसरा काला गेंद होने की प्रायकिता ज्ञात करें।

हलः

प्रथम गेंद के लाल एवं द्वितीय गेंद के काला होने की प्रायकिता $= \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

प्रथम गेंद के काला एवं दूसरी गेंद लाल होने की प्रायकिता $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

$\therefore$ एक लाल एवं एक काले रंग के गेंद होने की प्रायकिता $= \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \mathbf{\frac{24}{49}}$

कभी–कभी हमें ऐसे स्थिति से निपटना होता है जहां हमें बहुत सारे घटित होने वाले घटनाओं में से एक घटना की प्रायकिता की गणना करना आवश्यक होता है। यदि हम ऐसे समस्याओं का हल करने के लिए साधारण गुणन प्रमेय का

प्रयोग करें, तब यह लम्बा एवं जटिल प्रक्रिया हो जाती हैं। इस स्थिति में, हम ऐसे समस्याओं को हल करने के लिए वैकल्पिक तरीकों का प्रयोग कर सकते हैं। हम जानते हैं किन्ही निश्चित घटनाओं के होने की प्रायकिता = 1 होती है। यदि $n_1, n_2, \ldots\ldots n_n$ घटित होने वाले स्वतंत्र घटनाओं के प्रायकिताओं को $P_1, P_2 \ldots\ldots\ldots Pn$, से प्रस्तुत करते हैं, तब $n_1, n_2, \ldots\ldots n_n$ घटनाओं में, कम से कम एवक घटना के घटित होने की प्रायकिता हैः

1 – P (किसी भी घटना के घटित न होना)

यदि किसी न घटित होने वाली घटना के प्रायकिता को q से इंगित किया जाय, तब $P = 1 - q$।

उपरोक्त विहित सूत्र का अनुप्रयोग करके, हम ऐसे समस्याओं का हल बहुत असानी एवं जल्दी से कर सकते हैं।

उदाहरण 18: राम 70 वर्ष तक जीवित रहेगें की प्रायकिता 2/3 है और श्याम जो उसका भाई है 70 वर्ष की आयू तक जीवित रहेगें की प्रायकिता 5/6 हैं। दोनों के 70 वर्ष के आयू तक पहुंचने से पूर्व मरने की क्या प्रायकिता है?

हलः

राम के 70 वर्ष के आयू पहुंचने से पूर्व मरने की प्रायकिता $=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

श्याम के 70 वर्ष के आयू तक पहुंचने से पूर्व मरने की प्रायकिता $= 1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

∴ राम एवं श्याम के 70 वर्ष के आयू तक पहुंचने से पहले मरने की प्रायकिता $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

उदाहरण 19: एक उम्मीदवार को साक्षात्कार के लिए तीन कम्पनियां बुलाती है। प्रथम कम्पनी के लिए 5 उम्मीदवार, द्वितीय के लिए 10 उम्मीदवार, एवं तीसरी के लिए 8 उम्मीदवार हैं। किसी एक से कम किसी एक कम्पनी में नियुक्ति की क्या संभावनाएं है?

हलः

प्रथम कम्पनी में नियुक्त न होने की प्रायकिता $= 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

द्वितीय कम्पनी में नियुक्त न होने की प्रायकिता $= 1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

तृतीय कम्पनी मे नियुक्त न होने की प्रायकिता $= 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

∴ किसी भी कम्पनी में नियुक्त न होने की प्रायकिता $=\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}\times\frac{7}{8}=\frac{63}{100}$

अतः, कम से कम एक कम्पनियों में उम्मीदवार के नियुक्त होने की प्रायकिता

$$= 1-\frac{63}{100}=\frac{37}{100}$$

उदाहरण 20: जब एक जोड़े पासे को उछाला जाये जो प्राप्त परिणाम न तो दोनो तलों का योग 7 न तो 11 आने की क्या प्रायकिता है?

हलः

जब एक जोड़े पासे को उछाले जाये तब कुल संभावित नतीजों की संख्या = 6 × 6 = 36

दो पासे के दो तलों के योग 7 या 11 होने की प्रायकिता

= (दोनों तलों के योग 7 होने की प्रायकिता) + (दोनों तलों के योग 11 होने की प्रायकिता)

$$= P\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\} + P\{(6,5), (5,6)\}$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} \text{ या } \frac{2}{9}$$

∴ पासे के दोनों तलों के योग न तो 7 न हीं 11 होने की प्रायकिता = $1 - \frac{2}{9}$

$= \frac{7}{9}$

उदाहरण 21: लेखाशास्त्र के एक समस्या को तीन विद्यार्थियों A, B, और C को हल करने के लिए दी गई, जिसके हल करने की संभावना क्रमशः ½, ⅓ और ¼ है। समस्या के हल होने की प्रायकिता क्या है।

हलः

इस प्रश्न को तरीके से हल किया जा सकता हैः

साधारण गुणन प्रमेय के अनुसार

छात्र A के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायकिता $= \frac{1}{2}$

छात्र A के द्वारा समस्या हल न करने की प्रायकिता $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

छात्र B के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायकिता $= \frac{1}{3}$

छात्र B के द्वारा समस्या हल न करने की प्रायकिता $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

छात्र C के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायकिता $= \frac{1}{4}$

छात्र C के द्वारा समस्या हल न करने की प्रायकिता $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

छात्र A के द्वारा हल, B के द्वारा हल न करने एवं C के द्वारा हल न करने की प्रायकिता

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

छात्र A के द्वारा हल न करने, B के द्वारा हल करने एवं C के द्वारा हल न करने की प्रायकिता

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

छात्र A के द्वारा हल न करने, B के द्वारा हल न करने एवं C के द्वारा हल करने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

छात्र A के द्वारा हल करने, B के द्वारा हल करने एवं C के द्वारा हल न करने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

छात्र A के द्वारा हल करने, B के द्वारा हल न करने एवं C के द्वारा हल करने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

छात्र A के द्वारा हल न करने, B के द्वारा हल करने एवं C के द्वारा हल करने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

छात्र A के द्वारा हल करने, B के द्वारा हल करने एवं C के द्वारा हल करने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

$\therefore$ प्रश्न के हल होने की प्रायकिता $=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}$

$=\frac{18}{24}$ या $\mathbf{\frac{3}{4}}$

वैकल्पिक विधि

छात्र A, B, और C सभी के द्वारा प्रश्न हल करने में असफल हाने की प्रायकिता

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

प्रश्न हल होने की प्रायकिता $=1-\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि प्रश्न हल करने की वैकल्पिक विधि परम्परागत विधि से अधिक आसान है।

उदाहरण 22: एक व्यक्ति की पेट्रोल पम्प पर रूककर टायर चेक करने की प्रायकिता 0.12, उनके तेल जांच करने की प्रायकिता 0.29 एवं दोनों को जांच करने की प्रायकिता 0.07 है।

1. एक व्यक्ति की पेट्रोल पम्प पर रूककर न जांच न हीं तेल जांच करने की प्रायकिता क्या है?
2. व्यक्ति के टायर एवं तेल जांच करने की प्रायकिता ज्ञात करें।

हलः

1. व्यक्ति की पेट्रोल पम्प पर रूककर टायर जांचने या तेल जांचने की प्रायकिता

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A\cap B) = 0.12 + 0.29 – 0.07 = 0.34$

∴ व्यक्ति के द्वारा न तो पेट्रोल पम्प पर टायर जांच न हीं तेल जांचने की प्रायकिता

$= 1 – P(A\cup B) = 1– 0.34 = \mathbf{0.66}$

2. व्यक्ति द्वारा तेल चेक के साथ–साथ टायर चेक करने की प्रायकिता

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.07}{0.29} = \mathbf{\frac{7}{29}}$$

उदाहरण 23: एक पति एवं पत्नी, एक हीं प्रकार के दो रिक्त पदो ंके लिए साक्षत्कार में सम्मिलित होते हैं। पति के चयन होने की प्रायकिता 1/7 एवं पत्नि के चयन की प्रायकिता 1/5 है। प्रायकिता ज्ञात करें कि:–

(i) दोनों हीं चयन होगें।

(ii) कोई एक हीं चयन होगें।

(iii) कोई भी चयनित न हो।

(iv) कम से कम एक उनमें से चयन होगें।

हल:

पति के चयनित होने की प्रायकिता $= \frac{1}{7}$

पति के चयनित न होने की प्रायकिता $= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

पत्नी के चयनित होने की प्रायकिता $= \frac{1}{5}$

पत्नी के चयनित न होने की प्रायकिता $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

(i) उनमें से दोनो के चयनित होने की प्रायकिता $= \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{1}{35}}$

(ii) पति के चयन एवं पत्नी के चयन न होने की प्रायकिता $= \frac{1}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$

पति के चयन न होने तथा पत्नी के चयन होने की प्रायकिता $= \frac{6}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{35}$

∴ दोनों में से किसी एक के चयन होने की प्रायकिता $= \frac{4}{35} + \frac{6}{35} = \mathbf{\frac{10}{35}}$

(iii) उनमें से किसी का भी चयन न होने की प्रायकिता $= \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{24}{35}}$

(iv) उनमें से किसी एक के चयन होने की प्रायकिता

= 1 – P(उनमें से किसी का भी चयन न होना)

$= 1 - \frac{24}{35} = \mathbf{\frac{11}{35}}$

12.6 कमचय एवं संचय का प्रायकिता के लिए अनुप्रयोग

कभी–कभी क्रमचय एवं संचय तकनीक का अनुप्रयोग करके प्रायकिता से संबंधित जटिल समस्याओं का हल बहुत आसानी से किया जा सकता है। इस तकनीक के बारे में आप इकाई 13 में अध्ययन करेगें। इस खण्ड के अध्ययन से पूर्व, आपको अगले इकाई से क्रमचय एवं संचय के संख्या को गणना करने के लिए आधारभूत नियम को समझ लेना चाहिए।

उदाहरण 22: 50 टिकट वाले लॉटरी में 1 से 50 तक संख्या अंकित टिकटों में से दो टिकट एक साथ निकाले जाते हैं। प्रायकिता ज्ञात करें किः

(i) चयन किये गये टिकटों की संख्या अभाज्य है।

(ii) निकाले गये टिकटों में से कोई भी अभाज्य संख्या वाली नहीं हो।

(iii) अभाज्य संख्या वाली एक हीं टिकट है।

हलः

50 टिकटों में से दो टिकट चयन करने की तरीके $^{50}C_2$

∴ संभावित नतीजों की कुल संख्या $= {}^{50}C_2 = \frac{50!}{2!.48!} = 1225$

(i) 1 से 50 के बीच 15 अभाज्य संख्याएं, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 और 47 हैं। इस प्रकार, 15 अभाज्य संख्याओं में 2 अभाज्य संख्या चयन करने के तरीक $^{15}C_2$ है।

∴ 15 में से 2 अभाज्य संख्याओं के चयन के तरीके हैं $= {}^{15}C_2 = \frac{15!}{2!.13!} =$ 105

∴ दोनों हीं टिकट अभाज्य संख्या वाले होने की प्रायकिता $= \frac{^{15}C_2}{^{50}C_2} = \frac{105}{1225} = \frac{3}{35}$

(ii) यदि कोई भी टिकट अभाज्य संख्या वाली नहीं है, तब दोनों हीं चयनित टिकट गैर–अभाज्य होगीं जिनके चयन होने के तरीके $^{35}C_2$ हैं।

∴ 2 गैर अभाज्य संख्याओं के चयन करने के तरीकों की संख्या = $^{35}C_2$

$= \frac{35!}{2!.33!} = 595$

∴ कोई भी टिकट अभाज्य संख्या नहीं होने की प्रायकिता $= \frac{^{35}C_2}{^{50}C_2} = \frac{595}{1225} = \frac{17}{35}$

(iii) यदि एक टिकट एक अभाज्य संख्या वाली है, तब दूसरी टिकट निश्चित रूप से गैर अभाज्य संख्या वाली होगी। इस प्रकार, 2 वैसे टिकट निकालते हैं जिसमें से एक अभाज्य एवं एक गैर अभाज्य संख्या वाले टिकट निकालने की तरीके निम्न रूप से है,

$^{15}C_1 \times {}^{35}C_1 = 15 \times 35 = 525$

∴ केवल एक टिकट जिसकी संख्या एक अभाज्य होगी की प्रायकिता $= \frac{525}{50_{C_2}}$

$$= \frac{525}{1225} = \frac{3}{7}$$

उदाहरण 23: छात्रों के एक समूह में, 3 लड़के एवं 3 लड़कियां हैं। समूह में से चार छात्रों का चयन यादृच्छिक तरीके से किये जाते हैं। 3 लड़के एवं 1 लड़की या 3 लड़की एवं 1 लड़के चयन करने की प्रायकिता ज्ञात करें।

हलः

छात्रों की कुल संख्या = 3 + 3 = 6

6 छात्रों में से 4 के चयन करने के तरीकों की संख्या = $^6C_4 = 15$

3 छात्र एवं 1 छात्रा के चयन के तरीकों की संख्या = $^3C_3 \times {}^3C_1 = 1\times3 = 3$

6 छात्रों के समूह में से 4 छात्र, 3 लड़के एवं 1 लड़की चयन करने की प्रायकिता

$= \frac{3}{15}$ या $\frac{1}{5}$

1 लड़का एवं 3 लड़कियां चयन करने के तरीकों की संख्या $= {}^3C_1 \times {}^3C_3 = 1\times3 = 3$

∴ 6 छात्रों के समूह में 4 छात्रों, 1 छात्र एवं 3 छात्राओं को चयन करने की प्रायकिता

$= \frac{3}{15}$ या $\frac{1}{5}$

∴ 3 छात्र एवं 1 छात्रा या 1 छात्र एवं 3 छात्रा चयन करने की प्रायकिता

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{2}{5}}$

उदाहरण 24: एक थैला जिसमें 10 साने एवं 8 चांदी के सिक्के हैं। लगातार थैले से लगातार 3 सिक्के इस प्रकार निकाल जाते हैं किः 1. दूसरी बार निकालने से पूर्व निकाली सिक्के प्रतिस्थापित करते हैं, 2. दूसरी बार सिक्के निकालने से पूर्व प्रतिस्थापित नहीं करते हैं। प्रत्येक स्थिति में, ज्ञात करें कि प्रथम बार निकालने पर 3 सिक्के सोने के हो और दूसरे बार निकालने पर 3 सिक्के चांदी हों।

हलः

1. दूसरी बार सिक्के निकालने से पहले प्ररितस्थापित करते हैं।

पहली बार मे 3 सोने निकालने की तरीकों की संख्या = $^{10}C_3$

18 सिक्कों में से पहली बार निकाले गये 3 सोने के सिक्कों की प्रायकिता = $\frac{10_{C_3}}{18_{C_3}} = \frac{120}{816} = \frac{5}{34}$

दूसरी बार 3 चांदी के सिक्के निकालने की तरीकों की संख्या = $^8C_3$

18 सिक्कों में से दूसरी बार 3 चांदी के सिक्के निकालने की प्रायकिता = $\frac{^8C_3}{^{18}C_3}$

$= \frac{56}{816} = \frac{7}{102}$

∴ प्रथम बार में 3 सोने के एवं दूसरी बार में 3 चांदी सिक्के निकालने की प्रायकिता

$= \frac{5}{34} \times \frac{7}{102} = \mathbf{\frac{35}{3468}}$

2. दूसरी बार सिक्के निकालने से पूर्व प्रतिस्थापित करते है।

प्रथम बार 3 सोने के सिक्के निकालने के तरीकों की संख्या = $^{10}C_3$

18 में से प्रथम बार 3 सोने के सिक्के निकालने की प्रायकिता = $\frac{^{10}C_3}{^{18}C_3} = \frac{120}{816}$

$= \frac{5}{34}$

दूसरी बार 3 चांदी के सिक्के निकालने के तरीकों की संख्या = $^8C_3$

15 सिक्कों में से दूसरी बार 3 चांदी के सिक्के निकालने की प्रायकिता = $\frac{^8C_3}{^{15}C_3} = \frac{56}{455} = \frac{8}{65}$

∴ प्रथम बार में 3 सोने के सिक्के एवं दूसरी बार में 3 चांदी के सिक्के निकालने की प्रायकिता

$= \frac{5}{34} \times \frac{8}{65} = \mathbf{\frac{4}{221}}$

उदाहरण 25: एक कम्पनी के 20 व्यक्तियों में पांच स्नातक हैं। यदि तीन व्यक्तियों को यादृच्छिक रूप से चयन किया जाता हैं, क्या प्रायकिता होगी कि 1. वे सभी स्नातक है, 2. कम से कम उनमें से एक स्नात है?

हलः

1. 20 में से 3 व्यक्तियों को चयन करने की तरीकों की संख्या = $^{20}C_3 = \frac{20!}{3!17!} = 1140$

   5 स्नातक में से 3 को चयन करने के तरीकों की संख्या = $^5C_3 = \frac{5!}{3!2!}$ $= 10$

   ∴ चयनित सभी व्यक्ति स्नातक होने की प्रायकिता = $\frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$

2. यदि चयनित व्यक्तियो में से कोई भी स्नातक नहीं इसका अर्थ है 15 गैर–स्नातक में से हीं तीन व्यक्ति चयनित होगें। इन्हें $^{15}C_3$ तरीकों से चयनित किया जा सकता है।

   15 गैर–स्नातक व्यक्तियों में से 3 व्यक्तियों के चयन के तरीकों की संख्या = $^{15}C_3$

   $= \frac{15!}{3!12!} = 455$

गैर–स्नातक व्यक्तियों के चयन की प्रायकिता = $\frac{455}{1140} = \frac{91}{228}$

∴ कम से कम एक स्नातक व्यक्ति के चयन होने की प्रायकिता = 1 – P (गैर–स्नातक)

$$= 1 - \frac{91}{228} = \frac{\mathbf{137}}{\mathbf{228}}$$

12.7 बेय्ज प्रमेय

बेय्ज प्रमेय का अनुप्रयोग उन स्थितियों में किया जाता है जहां हमे अतिरिक्त सूचना प्राप्त होने के बाद प्रायकिता में पुनरीक्षण की आवश्यकता होती है। इस प्रकार के पुनरीक्षित प्रायकिता के गणना के लिए सूत्र का प्रस्ताव सर्वप्रथम थॉमस बेय्ज द्वारा की गई ओर इसका प्रकाशन 1763 में हुआ। इसका प्रयोग केवल उस स्थिति में किया जाता है जहां प्रतिदर्श समष्टि को दो या दो से अधिक पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं के रूप में विभाजित या वर्गीकृत किया जा सके। यदि $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots A_n$ आदि n पारस्परिक अपवर्जी एवं सर्वांगपूर्ण या निःशेषी घटनाओं के साथ गैर शून्य प्रायकिताएं हैं, और E कोई दूसरी घटना के साथ $P(E) > 0$ है, तब घटना $A_{i=1,2,3,\ldots.n}$ के घटित होने की प्रतिबन्धित प्रायकिता, जबकि E पहले हीं घटित हो चुकी है, को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता हैः

$$P(Ai / E) = \frac{P(Ai)P(E/Ai)}{P(A1)P(E/A1)+P(A2)P(E/A2)+\ldots+P(An)P(E/An)}$$

बेय्ज सूत्र में, प्रायकिताएं $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots, P(A_n)$ जो पहले से बिना प्रयोग के निष्पादन किये हीं ज्ञात व पता है, ***प्राथमिक प्रायकिताएं,*** अर्थात् 'तथ्य से पूर्व' प्रायकिता के रूप में जाने जाते हैं। प्रायकिताएं $P(A_1/E), P(A_2/E), \ldots\ldots\ldots P(A_n/E)$; जिनकी गणना प्रतिदर्श सूचना के अनुसार की जाती हैं, ***उतरार्द्ध प्रायकिताएं*** या 'तथ्य के उपरान्त' प्रायकिताएं के नाम से जाने जाते हैं। इस प्रकार, बेय्ज सूत्र हमें उतरार्द्ध प्रायकिताओं के गणना के लिए विशेष यंत्र या तकनीक प्रदान करता है।

उदाहरण 26: एक कम्पनी के पास स्कूटर बनाने की दो इकाईयां या प्लांट हैं। प्रथम प्लांट 70% एवं दूसरा प्लांट 30% स्कूटर बनाते हैं। प्रथम प्लांट द्वारा निर्मित 80 एवं दूसरी प्लांट द्वारा निर्मित 90 स्कूटर उच्च मानक वाले हैं। एक स्कूटर का चयन यादृच्छिक तरीके से चुने जाते हैं और पाते है कि वह उच्च मानक वाले स्कूटर हैं। इसकी क्या संभावना है कि यह दूसरी प्लांट से चयनित हुई है?

हलः

हम मान लेते हैं कि A_1: प्रथम प्लांट द्वारा निर्मित स्कूटर

A_2: दूसरी प्लांट द्वारा निर्मित स्कूटर

E: उच्च मानक वाली स्कूटर

उपरोक्त दी गई सूचना से स्पष्ट है कि A_1 और A_2 पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हैं और प्र"नानुसार हमें ज्ञात है

$P(A_1) = 0.70$ $P(A_2) = 0.30$ $P(E/A_1) = 0.80$

$P(E/A_2) = 0.90$

यहां दिया गया है कि चयनित स्कूटर उच्च मानक वाली है, हमे उस प्रायकिता को ज्ञात करना है कि स्कूटर दूसरी प्लांट से चयनित हुई है अर्थात् हम को ज्ञात करना चाहत हैं। बेय्ज प्रमेय या सूत्र का प्रयोग करने पर हम पाते हैं,

$$P\,(A_2\,/\,E) = \frac{P(A2)P(E/A2)}{P(A1)P(E/A1)+P(A2)P(E/A2)}$$

$$= \frac{(0.30)(0.90)}{(0.70)(0.80)+(0.30)(0.90)} = \frac{0.27}{0.83} = \mathbf{0.325}$$

उपरोक्त उदाहरण के दिये गये प्रायकिताओं से संबंधित सूचनाओं के सरांश को सारणी के रूप में निम्नलित तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता हैः

उतरार्द्ध प्रायकिताओं की गणना

घटनाएं	**प्राथमिक प्रायकिता** *P(Ai)*	**प्रतिबंधित प्रायकिता** *P(E / Ai)*	**संयुक्त प्रायकिता** *P(Ai∩ E)*	**उतरार्द्ध प्रायकिता** *P(Ai / E)*
(1)	(2)	(3)	(4) =(2)×(3)	(5) = (4) / P(E)
A_1 A_2	0.70 0.30	0.80 0.90	0.56 0.27	$\frac{0.56}{0.83}$ = 0.67 $\frac{0.27}{0.83}$ = 0.33
कुल	1.00		P(E) = 0.83	1.00

12.8 सारांश

इस इकाई में हमने प्रायकिता सिद्धान्त के बारे में अध्ययन किया। सामान्य शब्दों में, 'प्रायकिता' शब्द को एक घटना E के अनुकुल नतीजों की संख्या एवं कूल संभावित नतीजों के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। प्रायकिता की संख्यात्मक या सांख्यिकीय प्रायकिता प्रायकिता के परम्परागत सिद्धान्त की संगतता को बताती है। यह बड़ी संख्या वृहत संख्या में बार–बार प्रयोग के आयोजन पर आधारित होती है। प्रायकिता की आधूनिक उपागम प्रतिदर्श समष्टि एंव प्रतिदर्श बिन्दु के अवधारणा पर आधारित है। विभिन्न शब्द, जैसे, यादृच्छिक प्रयोग, घटनाएं, पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं, समप्रायिक घटनाएं, स्वतंत्र एवं आश्रित घटनाएं, प्रतिदर्श समष्टि आदि की व्याख्या उदाहरण सहित की गई है। आपने प्रायकिता के गणना से संबंधित विभिन्न नियमों का भी अध्ययन किया है। प्रायकिता के योग प्रमेय के अनुसार, दो घटनाओं A और B में से कम से कम एक के घटित होने की प्रायकिता को से $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ प्रदर्शित किया जा सकता है। यदि A और B दो पारस्परिक अपवर्जी घटनाएं हों तब A या B के घटित होने की प्रायकिता को $P(A) + P(B)$ से दिखलाया जा सकता है। प्रायकिता के गुणन प्रमेय के अनूसार, दो घटनाओं A और B के एक साथ घटित होने की प्रायकिता को $P(A) \times P(B)$ से इंगित किया जा सकता है। प्रतिबन्धित

प्रायकिता की गणना, घटना A के लिए जबकि घटना B पहले हीं घटित हो चुकी है, को $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ से निरूपित करते हैं। कभी–कभी प्रायकिता के योग एवं गुणन दोनों प्रमेय का प्रयोग एक साथ आव"यक या वांछित प्रायकिता के गणना के लिये किया जाता है। क्रमचय एवं संचय तकनीक का भी प्रयोग प्रायकिता से संबंधित जटिल समस्याओं के समाधान के लिये किया जाता है। बेय्ज प्रमेय का अनुप्रयोग उन स्थितियों में किया जाता है जहां हमे अतिरिक्त सूचना प्राप्त होने के बाद प्रायकिता में पुनरीक्षण की आवश्यकता होती है। वह प्रायकिता जो प्रयोग के निष्पादन से पहले हीं ज्ञात होता है प्राथमिक प्रायकिता कहलाते हैं और प्रायकिता जिसमें अतिरिक्त सूचना के बाद पुनरीक्षित प्रायकिता को उतरार्द्ध प्रायकिता कहते हैं।

12.9 शब्दावली

- **प्रायकिताः** अनुकूल नतीजों या परिणामों का कुल संभावित परिणामो के साथ अनुपात।
- **परीक्षणः** एक प्रयोग का निष्पादन।
- **अनुकुल घटनाएंः** घटित होने वाले घटनाओं के अनुकुल नतीजों की संख्या।
- **समप्रायिक घटनाएंः** वे घटनाएं जिसके घटित होने के बराबर संभावनाएं है।
- **सर्वांगपूर्ण घटनाएंः** यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की कुल संख्या।
- **प्रतिदर्श समष्टिः** एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों के समुच्च।
- **पारस्परिक अपवर्जी घटनाएंः** वे घटनाएं जो एक साथ घटित नहीं हो सकती है।
- **स्वतंत्र घटनाएंः** वे घटनाएं जिसके परिणाम किसी अन्य परिणामों से प्रभावित नहीं होते हैं।
- **आश्रित घटनाएंः** वे घटनाएं जिसके परिणाम किसी अन्य परिणमों से प्रभावित होते हैं

12.11 बोध प्रश्न

(A) रिक्त स्थानों को भरें–

(i) प्रायकिता सिद्धान्त की नींव फ्रांसिस गणितज्ञ ———————— के द्वारा रखी थी।

(ii) किसी भी घटना की प्रायकिता निश्चित हीं ——————— के बीच होती है।

(iii) वे घटनाएं जो एक साथ घटित नहीं हो सकती है ——————— कहलाती है।

(iv) चिरसम्मत उपागम का अनुप्रयोग वहां नहीं किया जा सकता जहां सभी परिणा ———————— नहीं है।

(v) प्रायकिता को ———————— किया जाता है।

(B) सत्य और असत्य बताएंः

(i) प्रायकिता के आधूनिक उपागम का विकास रूसी गणितज्ञ ए. एम. कोल्मोर्गोव ने की थी।

(ii) यदि A और B दो घटनाएं स्वतंत्र हैं, दोनों घटनाओं के घटित होने की प्रायकिता P(A) + P(B) होगी।

(iii) यादृच्छिक तरीके से चयन किये गये लीप वर्ष में 53 रविवार होने की पायकिता 1/7 है।

(iv) वह प्रायकिता जिसमें एक प्रयोग के निष्पादन से पहले ही परिणाम ज्ञात हो, बेय्ज प्रमेय में इसे 'प्राथमिक प्रायकिता' कहते हैं।

(v) यदि किसी घटना के नहीं घटित होने की प्रायकिता को q से इंगित करें तब P = 1+ q होता हैं।

12.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A)

(i) ब्लेज पास्कल, (ii) 0 और 1, (iii) पारस्परिक अपवर्जी, (iv) समप्रायिक, (v) बेय्ज

(B)

(i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य

12.13 स्वपरख प्रश्न

1. प्रायकिता के अवधारणा के विभिन्न उपागमों का वर्णन करें।
2. प्रायकिता को परिभाषित करें और प्रायकिता के योग तथा गुणन प्रमेय की चर्चा करें।
3. एक थैले में 1 से 20 तक के क्रम संख्या अंकित किये गये 20 टिकट रखे गये हैं जिसमें से यादृच्छिक रूप से एक टिकट निकाला जाता है। प्रायकिता ज्ञात करें कि निकाले गये टिकट की संख्या 4 या 9 का गुणक हो? [7/30]
4. एक कलश में से यादृच्छिक तरीके से एक मार्बल निकाले जाते हैं जिसमें 7 लाल, 5 उजला एवं 8 नीला मार्बल है। प्रायकिता ज्ञात करें कि निकाले गये मार्बल (i) नीला, (ii) लाल न हो, (iii) लाल या उजला, (iv) न तो लाल हो न हीं नीला
   [(i) 2/5, (ii) 13/20, (iii) 3/5, (iv) ¼]
5. एक जोड़े पासे को फेकें जाते हैं। दोनों तलों में आने वाले संख्याओं के योग 10 से अधिक आने की क्या प्रायकिता है? [1/12]
6. एक दराज में 50 बोल्ट एवं 150 नट हैं। बोल्ट एवं नट दोनों में से आधे–आधे जंगयुक्त हो गये हैं। यदि एक अंश उसमे से यादृच्छिक रूप से निकालत हैं, तब इसके जंगयुक्त या एक बोल्ट होने की क्या प्रायकिता है। [5/8]

7. एक ठेकेदार को सड़क निर्माण के ठेका मिलने की प्रायकिता 4/9 तथा पानी टंकी निर्माण करने की प्रायकिता 5/7 है। दोनों ठेकों में कम से कम एक के मिलने की क्या प्रायकिता है? [53/63]
8. A, 70 प्रतिशत स्थितियों में सत्य एवं B, 80 प्रतिशत स्थितियों में सत्य बोलते हैं। कितना प्रतिशत ऐसी स्थिति होगी कि दोनों हीं एक दूसरे के बिपरीत कथन प्रस्तुत करेंगें। [38%]
9. एक जोड़े पासे को रॉल किया जाता है। यदि दोनों पोसे के उपरी तल का योग 9 है तब ज्ञात करें एक पासे के उपरी तल पर 3 अंकित होने की क्या प्रायकिता होगी। [1/2]
10. तीन वाहन चालकों के शराब पीने के उपरान्त सुरक्षा पूर्वक गाड़ी चलाने की प्रायकिता क्रमशः 1/2, 1/4 एवं 1/5 है। यदि वे पार्टी से निकलने के बाद घर के लिए लौटते हैं तब तीनों एक साथ दूर्घटना ग्रस्त होगें इसकी क्या प्रायकिता क्या है? इसकी क्या प्रायकिता क्या होगी की कम से कम एक चालक सुरक्षापूर्वक घर लौटेगें। [3/10, 7/10]
11. एक थैला जिसमें 4 उजली एवं 2 काली गेंद है। एक दूसरी थैला जिसमें 3 उजला एवं 5 काला गेंद है। यदि प्रत्येक थैले से एक–एक गेंद यादृच्छिक तरीके से निकाले जाते हैं, तब प्रायकिता ज्ञात करें कि (i) दोनों हीं गेंद उजले हों, (ii) दोनों हीं काले गेंद हो एवं (iii) एक उजली तथा एक काली हो। [(i) 1/4, (ii) 5/24, (iii) 13/24]
12. एक कक्षा में 10 लड़के औ 8 लड़कियां हैं। तीन छात्रों की एक समिति बनाई जाती है। चयनित छात्रों की प्रायकिता क्या हो, कि समिति में (i) सभी लड़के हों, (ii) सभी लड़कियां हों, (iii) एक लड़का एवं 2 लड़कियां हो, और (iv) कम से कम एक लड़की आवश्य हो।
[(i) 5/34, (ii) 7/102, (iii) 35/102, (iv) 29/34]
13. 52 पत्ते वाले ताश गड्डी से 4 पत्ते एक साथ निकाले जाते हैं। सभी ताश के पत्ते एक हीं रगं के होगें इसकी प्रायकिता ज्ञात करें।
[44/4165]
14. एक थैला जिसमें 4 लाल एवं 7 हरे रंग गेंद है और एक दूसरी थैला जिसमें 8 लाल एवं 4 हरे गेंद हैं। एक थैला यादृच्छिक तरीके से चयन करते हैं और एक हीं बार में इससे दो गेंद निकालते हैं। प्रायकिता ज्ञात करें कि चयनित गेंदों में से एक लाल एवं दूसरा हरे रंग का गेंद हो। [82/165]
15. एक बीमा कम्पनी 2,000 स्कूटर चालक, 4,000 कार चालक एवं 6,000 ट्रक चालक का बीमा करती है। दूर्घटना होने की प्रायकिता क्रमशः 0. 01, 0.03 और 0.15 है। इन बीमित व्यक्तियों में से एक दूर्घटनाग्रस्त हो जाता है। यह प्रायकिता क्या होगी कि दूर्घाटनाग्रस्त व्यक्ति एक स्कूटर चालक है? [1/52]
16. प्रायकिता को परिभाषित करें।
17. प्रतिबन्धित प्रायकिता क्या है?
18. बेय्ज प्रमेय को प्रायकिता में वर्णन करें।

19. स्वतंत्र घटनाओं एवं आश्रित घटनाओं के बीच अन्तर स्पष्ट करें।

12.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad
2. Thukral J.K., *'Business Statistics'* Taxmann Publications, New Delhi
3. Goel Ajay, Goel Alka, *'Mathematics and Statistics'* Taxmann Publications, New Delhi

*****

इकाई 13 क्रमचय एवं संचय

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- क्रमचय के अवधारणा को समझ सकें।
- संचय के अवधारणा को समझ सकें।
- क्रमचय एवं संचय के तकनीक का अनुप्रयोग कर सकें।

13.1 प्रस्तावना

पूर्व के इकाई में, आपने प्रायकिता के सिद्धान्त का अध्ययन किया है एवं इसके विभिन्न नियमों के अनुप्रयोग के बारे में जाना। आईए अब गणित के सबसे आसान एवं रोचक तकनीक के बारे में चर्चा करें। व्यवहारिक जीवन में, ऐसे बहुत से परिस्थितियां होती है जहां यह संभव है कि एक विशेष गतिविधि को कई तरीके से हल किया या उसका सामाधान किया जा सकता है। इसका अर्थ है कि एक विशेष समस्या का हल कई तरीके से किया जा सकता है या एक विशेष स्थिति का सृजन किया जा सकता है।

इस तरह के तरीकों को ज्ञात करने के लिए, हमे क्रमचय एवं संचय के तकनीक का प्रयोग करना चाहिए। यह संचयात्मक विश्लेषण के भाग हैं। यह प्रायकिता से संबंधित जटिल समस्याओं के हल के लिए भी काफी सहायक होते हैं। क्रमचय तरीकों के क्रम या श्रेणी की तो संचय चयन के तरीकों की बात करता है।

इस इकाई में, आप क्रमचय एवं संचय के आधारभूत अवधारणाओं एवे उनसे संबंधित विभिन्न प्रकार के स्थितियों से समस्याओं का अध्ययन करेगें।

13.2 क्रमचय

'क्रमचय' शब्द का अर्थ है क्रम या विन्यास। जैसा कि आप जानते हैं, विन्यास या व्यवस्था का संबंध क्रम या श्रेणी से है। अतः, क्रमचय के विधि को प्रयोग वहां किया जाता है जहां समस्या में क्रम या श्रेणी का ध्यान देना आवश्यक या महत्वपूर्ण है। आपको सदैव याद रखना चाहिए कि क्रमचय में किसी भी पिण्ड या वस्तु को दोहराना वर्जित है। उदाहरण के लिए, आपको 'X', 'Y' एवं 'Z' को विभिन्न क्रम में सजाना है। अब इन वर्ण अक्षरों या वर्णमालाओं को निम्नलिखित तरीके से सजाया जा सकता है:

XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX

लेकिन अक्षरों को दोहराना वर्जित है, इसलिए XXY या XZZY या YXY जैसे विन्यास संभव नहीं है क्योंकि विन्यास में प्रत्येक पद एक हीं बार लिखा या शामिल किया जा जसता है।

अतः, विन्यास जिसे दिये गये पदों या वस्तुओं को एक साथ या कुछ पदों को बिना पुनरावृति के बनाये जाने वाले क्रम या श्रेणी को हीं क्रमचय कहते हैं। n वस्तु के r पद या वस्तु को एक बार लेने अर्थात् n वस्तु में से r पदों या वस्तुओं के क्रमचय को ${}^nP_r$ से प्रदर्शित करते हैं। एक और महत्वपूर्ण बात है जिसे याद रखना चाहिए कि (${}^nP_r$) प्रतीक का अर्थ तभी सार्थक है जब केवल $n>0$, $r \geq 0$ और $n \geq r$ संभव या दिया हो।

13.2.1 गुणकीय संकेतन

क्रमचय से संबंधित आगे, नियमों की चर्चा करने से पूर्व हमें 'गुणकीय' शब्द के अर्थ को जान लेना चाहिए। प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को n! से प्रदर्शित या निरूपित करते हैं और इसे 'n गुणकीय' के रूप में पढ़ते हैं। इसे निम्नलिखि रूप से प्रदर्शित किया जाता है:

$n! = n\times(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times 4\times3\times2\times1$

अतः

$1! = 1$

$2! = 2\times1 = 2$

$3! = 3\times2\times1 = 6$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

यह इसी प्रकार से अन्य प्राकृत संख्याओं के लिए भी लागू होगें।

गुणकीय संकेतन केवल पूर्ण संख्या के लिए हीं परिभाषित है और ऋणात्मक पूर्णाकों के लिए यह परिभाषित या लागू नहीं होता है। आपको हमेशा याद रखना चाहिए कि $0! = 1$।

13.2.2 n विभिन्न पदों का s क्रमचय

सबसे पहले, उस स्थिति को लेते हैं जब हमें क्रमचय की संख्या को ज्ञात करना होता हैं जिसमें सभी वस्तु या तत्व अलग–अलग या भिन्न हैं। इसका अर्थ है, दिये गये समस्या में किसी भी तत्व या वस्तु की पुनरावृति नहीं

होती है। हम इस स्थिति को दो समूहों में निम्नलिखित तरीके से वर्गीकृत कर सकते हैः

n सभी विभिन्न पदों का एक साथ कमचय लेना

n सभी विभिन्न तत्वों को एक साथ एक समय लेने पर क्रमचय की संख्या n! है।

यदि हमें n सभी विभिन्न तत्वों के क्रमचय की संख्या ज्ञात करनी हो, जब सभी तत्व या वस्तु एक साथ लिया जाये तब पहला स्थान n के किसी भी एक पद से भरा जा सकता है। इसका आशय है कि प्रथम स्थान को भरने के n तरीके हैं। जब पहला स्थान भर लिया गया तब दूसरा स्थान भरने के लिए (n-1) तरीके हैं। इसका अर्थ है कि प्रथम दो स्थानों को भरने के लिए n(n-1) तरीकें हैं क्योंकि दोनो हीं स्थान एक दूसरे से संबंधित हैं। जब प्रथम दो स्थान भरे गये तब तीसरे स्थान को भरने के लिए (n-2) तरीके शेष बचे हैं। क्योंकि संबद्धता होते हैं, इसलिए तीसरे स्थान को भरने के लिए n(n-1)(n-2) तरीके है। इस प्रक्रिया को तब तक दोहराते हैं जब तक कि अन्तिम स्थान तक नहीं पहुंचते हैं। अतः n स्थानों को n विभिन्न या अलग–अलग तत्वों या वस्तुओं से निम्नलिखित तरीके से भर सकते हैः

$n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\ldots\times4\times3\times2\times1= n!$

उदाहरण 1: 'DELHI' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं ज्ञात करें?

हलः चूंकि, दिये गये शब्द में पांच अलग–अलग अक्षर दिये गये हैं जैसे, 'D', 'E', 'L', 'H' और 'I'। अब इन 5 अक्षरों को 5! तरीके से विन्यास किया जा सकता है।

अतः, वांछित शब्दों की संख्या = 5! = 5×4×3×2×1=**120**

उदाहरण 2: 'KANPUR' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं?

हलः चूंकि, दिये गये शब्द में 6 अलग–अलग अक्षर दिये गये हैं जैसे, 'K', 'A', 'N', 'P' 'U' और 'R'। अब इन 6 अक्षरों को 6! तरीके से विन्यास किया जा सकता है।

अतः, वांछित शब्दों की संख्या = 6! = 6×5×4×3×2×1=**720**

उदाहरण 3: 6,348 (छः हजार तीन सौ अड़तालिस) संख्या से चार अंकों वाली कितनी संख्याएं बनाई जा सकती है?

हलः चूंकि, दिये गये संख्या में चार अलग–अलग अंक हैं जैसे, 6, 3, 4, एवं 8। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = 4! = 4×3×2×1= **24**

n विभिन्न पदों में से r का कमचय लेना

n विभिन्न पदों में से r पदों का क्रमचय की संख्या ^nP_r है, जहां, $r < n$ सदैव लागू हो।

जब हमें n विभिन्न पदों के क्रमचय की संख्या ज्ञात करनी हो, जहां सभी दिये गये पद अलग–अलग है और एक समय में केवल r पदों को हीं लियाा जाता है तब क्रमचय ज्ञात करने के लिए ^nP_r सूत्र का प्रयोग करते हैं। सूत्र ^nP_r के विस्तार रूप को निम्न रूप में लिखा जा सकता हैः

$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

यदि r = n हो, तब यह सूत्र ^nP_n में परिवर्तित हो जायेगें जो n! के बराबर होगी। इसके बारे में पूर्व के खण्ड में चर्चा की जा चूकी है।

उदाहरण 4: 'NAGPUR' शब्द से तीन अक्षर वाले कितने शब्द बनाएं जा सकते हैं?

हलः यहां शब्द में 6 अक्षर दिये गये हैं और इन 6 अक्षरों में से हमें 3 अक्षरों का चयन करना है। इसका चयन $^6P_3$ तरीके से किया जा सकता है।

वांछित तरीकों की संख्या = $^6P_3$

$$= \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = \mathbf{120}$$

उदाहरण 5: चार अपरिचित समिति को एक बस में, जिसमें छः स्थान या सीट खाली है। कितने तरीके से वे उन सीटों में बैठ सकते हैं।

हलः यहां चार लोगों के लिए छः सीट या स्थान खाली है। चार व्यक्ति इन छः सीटों में $^6P_4$ तरीके से बैठ सकते हैं। अतः,

वांछित बैठने के तरीकों क संख्या = $^6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$

$$= \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \mathbf{360}$$

उदाहरण 6: एक पक्ति में पांच छात्रों को कितने तरीके से खड़ा किया जा सकता है?

हलः पांच छात्र एक पक्ति में $^5P_5$ तरीके से खड़ा हो सकते हैं। अतः,

वांछित पंक्ति में खड़ा होने की संख्या $= \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!}$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{1} = \mathbf{120}$$

उदाहरण 7: सात छात्रों को एक पक्ति में किस प्रकार खड़ा किया जा सकता है जबकि उनमें से दो विशेष छात्र सदैव एक साथ खड़े हों?

हलः यदि दो छात्र सदैव एक साथ खड़े होते हैं तब वे एक इकाई के रूप में व्यवहार किये जा सकते हैं। अब कुल दिये गये 7 छात्रों में से 6 इकाई रह जाते हैं। इन 6 इकाईयों को $^6P_6$ तरीके से सजाया या विन्यास किया जा सकजा है। इन सभी विन्यासों में वे दो विशिष्ट छात्र हमेशा एक साथ खड़े होगें। अब इन दो विशिष्ट छात्रों को उन्हीं में $^2P_2$ तरीके से विन्यास किया जा सकता है। ये दोनो हीं क्रियाएं एक साथ होती हैं; इसलिए यहां गुणन प्रमेय का अनुप्रयोग करते हैं। अतः,

वांछित बैठने के तरीकों की संख्या = $^6P_6 \times {}^2P_2$

$$= 6! \times 2!$$

$$= 720 \times 2 = \mathbf{1,440}$$

उदाहरण 8: एक पंक्ति में 9 किताबों को किस प्रकार से सजाया या रखा जाय कि तीन विशिष्ट किताबें कभी भी एक दूसरे के साथ नहीं आते या होते हैं?

हलः उन तरीकों को ज्ञात करने के लिए कि कोई भी तीन विशिष्ट किताबें एक साथ न हों हमें दो चीजों को ज्ञात करना होगाः (क) पंक्ति में किताबों को विन्यास करने के कुल तरीकों की संख्या एवं (ख) विन्यास के तरीकों की संख्या जब वे तीनो विशिष्ट किताबें एक साथ होते हैं।

नौ किताबों को विन्यास करने के कुल तरीकों की संख्या = ${}^9P_9$ = 9! = 3,62,880

विन्यास के तरीकों की संख्या जब तीन विशिष्ट किताबें सदैव एक साथ हो = ${}^7P_7 \times {}^3P_3$

$= 7! \times 3! = 5,040 \times 6 = 30,240$

अतः विन्यास के तरीकों की संख्या जब वे तीनों विशिष्ट किताबें सदैव एक साथ न हो,

= 3,62,880 – 30,240= **3,32,640**

उदाहरण 9: दिये गये 'MARKETING' शब्द के अक्षरों को कितने प्रकार से विन्यास किया जाय किः

(i) अक्षर M, शब्द के शुरूआत में हो

(ii) शब्द की शुरूआत अक्षर M से तथा अन्त G से हो

(iii) अक्षर T एवं I सदैव एक साथ हों

(iv) अक्षर T एवं I कभी भी एक साथ न हो

(v) स्वर अक्षर सदैव एक साथ हो

हलः 'MARKETING' शब्द में कुल 9 अलग–अलग अक्षर दिये गये हैं।

(i) इस स्थिति शब्द के शुरूआत में M होता है। इसका अर्थ हुआ कि M का स्थान स्थिर है। इसलिए, हमें दिये गये अक्षरों की शेष संख्या 8 है।

अतः विन्यास के वांछित तरीकों की संख्या = ${}^8P_8$ = 8! = 8×7×6×5×4×3×2×1 = **40,320**

(ii) इस स्थिति में, यह दिया गया है कि शब्द कीी शुरूआत अक्षर M से तथा अन्त G से होती है; इसका अर्थ है कि इन दोनो अक्षरों का स्थान स्थिर है। इसलिए, हमें केवल 7 शेष बचे अक्षरों का हीं विन्यास करना है,

अतः वांछित विन्यास करने के तरीकों की संख्या = ${}^7P_7$ = 7! = 7×6×5×4×3×2×1

= **5,040**

(iii) चूंकि यहां दिया है कि दो अक्षर T एवं I सदैव एक साथ होते हैं; इसलिए वे एक इकाई के रूप में व्यवहार किये जायेगें। ये 9 अक्षर दिये होने के बावजूद 8 हीं गिने जायेगें जिनको ${}^8P_8$ तरीके से विन्यास किया जा सकता है। अब, इन दो अक्षरों T एवं I को आपसे में विन्यास ${}^2P_2$ तरीके से कर सकते हैं।

अतः वांछित तरीकों की संख्या = ${}^8P_8 \times {}^2P_2$

$= 8! \times 2! = 40,320 \times 2$

$= \mathbf{80,640}$

(iv) यह ज्ञात करने के लिए कि अक्षर T एवं I कभी भी एक साथ न हो; हमे सभी अक्षरों के विन्यास करने के कुल तरीकों की संख्या एवं विन्यास के तरीकों की संख्या जब दोनो अक्षर एक साथ हों, की गणना करनी होगी।

सभी अक्षरों को सजाने व विन्यास करने के तरीकों की संख्या = $^9P_9 = 9! = 3,62,880$

विन्यास के तरीकों की संख्या अक्षर T एवं I जब सदैव एक साथ हों,

$= {}^8P_8 \times {}^2P_2$

$= 8! \times 2! = 40,320 \times 2 = 80,640$

विन्यास के तरीकों की संख्या जब अक्षर T एवं I सदैव एक साथ नहीं होते हैं,

$= 3,62,880 - 80,640 \quad = \mathbf{2,82,240}$

(v) इस शब्द में कुल तीन स्वर अक्षर ‘A’, ‘E’ और ‘I’ दिये गये हैं। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = $^7P_7 \times {}^3P_3$

$= 7! \times 3!$

$= 5,040 \times 6 = \mathbf{30,240}$

उदाहरण 10: 300 से अधिक मूल्य वाले 3 अंकों कि 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, से कितनी संख्याएं बनाई जा सकती यदि किसी भी अंक की पुनरावृति नहीं हो?

हलः उपरोक्त समस्या में 8 अंक दिये गये हैं। यहां 3 अंको वाली 300 से अधिक संख्या तभी होगी जब संख्या की शुरूआत 3, 4, 5, 6, 7, या 8 से हो। इसका अर्थ है कि प्रथम अंक का चुनाव इन्हीं 6 अंकों में से हीं किया जाना चाहिए। इनका चयन $^6P_1$ तरीके से किया जा सकता है। जब प्रथम अंक का चयन हो गई हो, तब अन्य दो अंकों का चयन शेष 7 अंकों में से $^7P_2$ तरीके से किया जा सकता है। अतः,

वांछित चयन करने की संख्या = $^6P_1 \times {}^7P_2$

$$= \frac{6!}{(6-1)!} \times \frac{7!}{(7-2)!}$$

$$= \frac{6!}{5!} \times \frac{7!}{5!}$$

$= 6 \times 42 = \mathbf{252}$

उदाहरण 11: 7 लड़कियों एवं 5 लड़को को कितने प्रकार से विन्यास या सजाया जाये कि कोई भी दो लड़के एक साथ खड़े न हो?

हलः चूंकि, यहां प्रश्न में दिया है कि कोई भी दो लड़के एक साथ खड़ा नहीं हो सकते हैं, इसका अर्थ है कि एक लड़का दो लड़कियों के बीच खड़े होते

हैं। 7 लड़किया पक्ति में 7! तरीके से खड़ी होती हैं। 7 लड़कियों के बीच 8 खाली स्थान होगें जो निम्न तरह से हो सकते हैं:

___G___G___G___G___G___G___G___

अब 5 लड़को को 8 स्थानों में $^8P_5$ तरीके से खड़ा किया जा सकता है। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = $7! \times {}^8P_5$

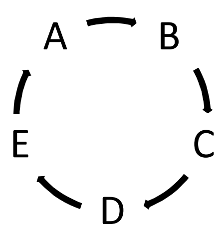
$= 5{,}040 \times 6{,}720 = \mathbf{33868800}$

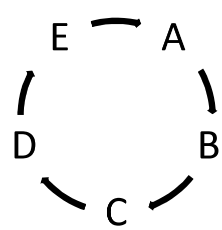
13.2.3 चक्रीय क्रमचय

पदों कों पक्ति या चक्रीय क्रम में सजाया जाता है। पक्तियों में विन्यास किये गये क्रमचयों की संख्या चक्रीय विन्यास में किये गये तरीकों से चक्रीय क्रमचयों की संख्या अलग या भिन्न होती है, अर्थात् वस्तुओं को चक्रीय रूप में सजाते हैं। यह अन्तर आने के पीछे सही तथ्य है कि इसमें कोई शुरूआती बिन्दु एवं कोई अन्तिम विन्दू नहीं होते हैं। इस अवधारणा को समझने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण को लेते हैं। माना कि आपको पांच लोगों के लिए बैठने कि व्यवस्था करनी है, जैसे A, B, C, D और E। अब, यदि इन पांच लोगों को पक्ति के रूप में बैठाये ंतो 120 विभिन्न तरीके से बैठाया जा सकता है। अब, कुल विन्यास में से 2 निम्नलिखित विभिन्न विन्यास के बारे में विचार करें:

(1) A—B—C—D—E & (2) E—A—B—C—D

ये दोनों हीं विन्यास भिन्न है चूकिं वे पक्तियों में बैठे हैं। अब, चलिए आप इन्हें वृत के रूप में मानते हुए विन्यास करें। उपरोक्त दो व्यवस्थाओं को वृत के रूप में निम्नलिखित तरीके से विन्यास किया जा सकता है:





यदि आप इसे ध्यान से देखें, आप महसूश करेगें कि दोनों हीं व्यवस्थाएं एक हीं तरह के हैं क्योंकि इसमें कोई भी प्रारभिंक या अन्तिम बिन्दु नहीं है। इन व्यवस्थाओं में अन्तर तभी होगा जब लोगों के क्रम को परिवर्तित किया जाय। अतः चक्रीय क्रमचय के स्थिति में, सबसे पहले, एक वस्तु को एक जगह में रखते हैं और अन्य वस्तुओं के सापेक्षिक स्थान व स्थिति इसी प्रथम वस्तु के स्थान व स्थिति पर निर्भर करता है। इसलिए, अब आपको यह स्पष्ट हो चुका है कि *n* वस्तु वाले चक्रीय क्रमचय के स्थिति में, किसी एक वस्तु का स्थान

निश्चित या स्थिर होता है और इसलिए (n-1) वस्तुएं शेष बचतें हैं जिन्हें (n-1)! तरीके से विन्यास या क्रम में सजाया जा सकता है। इस प्रकार,

n वस्तुओं वाले चक्रीय क्रमचय = (n-1)!

उदाहरण 12: एक गोल या वृतिय मेज के चारों तरफ 4 लड़कियों को किस प्रकार बैठाया जा सकता है?

हल: यह दिया है कि 4 लड़किया एक मेज के चारो तरफ बैठती हैं; इसका अर्थ है कि वे वृतीय क्रम में बैठे हैं। इस लिए,

वांछित तरीकों की संख्या = (4-1)! = 3! = 3×2×1 = **6**

उदाहरण 13: 6 बच्चों एवं 6 व्यस्कों को कितने प्रकार से एक गोल मेज के चारों तरफ से बैठाया जाय कि कोई भी दो बच्चे एक साथ न बैठते हों?

हल: माना कि बच्चे पहले बैठते हैं। चूंकि बच्चे वृतीय क्रम मे बैंठते हैं; अतः 6 बच्चे (6-1)! = 5! तरीके से बैठ सकते हैं। जब 6 बच्चे वृतीय क्रम में बैठते हैं, तब इन बच्चों के बीच 6 स्थान रिक्त बचते हैं और उन स्थानों 6 व्यस्क 6! तरीकों से बैठ सकते हैं। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = 5! × 6!

= 120 × 720 = **86,400**

उदाहरण 14: एक गोल मेज के चारो तरफ 4 पुरूष एवं 3 महिलाओं के किस तरीके से बैठाया जाय ताकि सभी तीन महिलाएं एक साथ बैठती हों?

हल: चूंकि तीनो महिलाएं सदैव एक साथ बैठती हैं; अतः कुल 5 स्थान (4 स्थान पुरूषों के लिए एवं 1 स्थान महिलाओं के लिए) रिक्त हैं जिन्हें 5! तरीके से विन्यास किया जा सकता है और 3 महिलाओं को आपस में हीं 3! तरीके से बैठाया जा सकता है। अतः,

बैठने के वांछित तरीकों की संख्या = 5! ×3! = 120 × 6 = **720**

उदाहरण 15: एक गोल मेज के चारो तरफ 4 पुरूष एवं 3 महिलाओं के किस तरीके से बैठाया जाय ताकि सभी तीन महिलाएं एक साथ कभी नहीं बैठती हों?

हल: प्रश्न में यह दिया है कि 4 पुरूष एवं 3 महिलाएं एक गोल मेज के चारों तरफ बैठे हैं; अतः वे 7! तरीके से बैठ सकते हैं और इसकी गणना उपर के प्रश्न में की जा चुकी है कि 3 महिलांए सदैव एक साथ बैठने के तरीकों की संख्या =720 है। अतः,

बैठने के वांछित तरीकों की संख्या = 7! – 720

= 5,040 - 720 = **4,320**

13.2.4 सभी वस्तुओं के भिन्न न होने पर क्रमचय

अभी तक हमने उन स्थितियों की चर्चा की जहां सभी n वस्तुएं होते हैं, अर्थात् कोई दो या अधिक तत्व व वस्तु एक समान नहीं होते हैं। आईए एक ऐसी स्थिति पर विचार करे जहां सभी n वस्तु में से, p वस्तु एक प्रकार, q वस्तु दूसरे प्रकार, r वस्तु तीसरे प्रकार के और शेष सभी वस्तुएं अलग या विभिन्न प्रकार के होते हैं। इस स्थिति में, क्रमचय के संख्या की गणना निम्नलिखित सूत्र से किया जायेगा:

$$\frac{n!}{p!\ q!\ r!}$$

उदाहरण 16: 'ALLAHABAD' शब्द से कितना शब्द बनाया जा सकता है?

हलः 'ALLAHABAD' शब्द में कुल 9 अक्षर हैं जिसमें अक्षर 'A', 4 बार पुनरावृत होती है, 'L' दो बार और शेष सभी अक्षर अलग व भिन्न है। अतः,

वांछित शब्दों की संख्या = $\frac{9!}{4!\ 2!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4!}{4!2!}$ = **7,560**

उदाहरण 17: 'COMMITTEE' शब्द से कितना शब्द बनाया जा सकता है?

हलः 'COMMITTEE' शब्द में कुल 9 अक्षर हैं जिसमें अक्षर 'A', 2 बार पुनरावृत होती है, 'T' दो बार, 'E' भी दो बार प्रयोग हुई और शेष सभी अक्षर अलग व भिन्न है। अतः

वांछित शब्दों की संख्या = $\frac{9!}{2!\ 2!2!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}$ = **45,360**

उदाहरण 18: 'STATISTICS' शब्द से कितने शब्द बनाया जा सकते है?

हलः 'STATISTICS' शब्द में कुल 10 अक्षर है जिसमें 'S', तीन बार पुनरावृति होती है, 'T' तीन बार पुनरावृत होती है, 'I' दो बार पुनरावृत होती है और शेष सभी अक्षर भिन्न हैं। अतः,

वांछित शब्दों की संख्या = $\frac{10!}{3!3!\ 2!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1\times2\times1}$ = **50,400**

उदाहरण 19: 'MATHEMATICS' शब्द से कितने शब्द बनाया जा सकते है जिसमें स्वर अक्षर सदैव एक साथ होते हों?

हलः 'MATHEMATICS' शब्द में कुल 11 अक्षर हैं और इस 11 अक्षरों में 4 स्वर अक्षर ('A' दो, 'E' एक और 'I' एक) है। प्रश्न में यह दिया गया है कि सभी स्वर अक्षर एक साथ हैं, इसलिए उन्हें एक इकाई के रूप में ध्यान रखा जा सकता है। यहां कुल इकाई 8 हो जायेगी, इसके बावजूद कि कुल 11 इकाई दिये गये हैं। 8 इकाईयों में से 7 इकाई व्यंजन ('M' दो, 'T' दो, 'H' एक, 'C' एक और 'S' एक) है और स्वर अक्षर का एक इकाई है। चूंकि, इन 8 इकाईयों में, 'M' और 'T' दो बार पुनरावृत होते हैं, इसलिए इन्हें निम्नलिखित तरीके से विन्यास या क्रम में सजाया जा सकता हैः

$$\frac{8!}{2!\ 2!} = 10{,}080$$

4 स्वर अक्षर ('A' दो, 'E' एक और 'I' एक) को आपस में विन्यास निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता है:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

अतः, वांछित शब्दों की कुल संख्या = 10,080 × 12 = **1,20,960**

उदाहरण 20: दिये गये अंक 3, 2, 2, 0, 3, 2, 5, से दस लाख से अधिक कितनी संख्या बनाई जा सकती है?

हलः प्रश्न में यह दिया गया है कि संख्याएं निश्चित तौर पर दस लाख (अर्थात् 10,00,000) से अधिक होने चाहिए। इसका अर्थ है कि प्रत्येक संख्या 7 अंक या अधिक अंक वाली होनी चाहिए। प्रश्न में, सात अंक (जिसमें से '3' दो बार, '2' तीन बार, '0' एक और '5' एक बार) दिये गये हैं। इन सात अंकों को निम्नलिखित तरीके से क्रम या विन्यास में सजाया जा सकता है:

$$\frac{7!}{2!3!} = 420$$

यदि संख्या की शुरूआत शून्य से हो, तब यह दस लाख से कम होगी और इन संख्याओं का निश्चित रूप से अस्वीकार की जानी चाहिए। शून्य से शुरूआत होने वाली संख्याओं की संख्या है:

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

अतः वांछित संख्याओं की संख्या = 420 - 60 = **360**

13.3 संचय

अब तक, आपने क्रमचय की आवधारणा को निश्चित रूप से समझ चुके है। यह आपको स्पष्ट हो जाना चाहिए कि क्रमचय का प्रयोग उन स्थितियों में किया जाता है जहां पदों का क्रम या विन्यास महत्वपूर्ण होता है। लेकिन, कुछ समय हमें ऐसे स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहां पदों की क्रम या श्रेणी महत्वपूर्ण नहीं होती वजाय कि केवल पदों का चयन महत्वपूर्ण होता है। ऐसे स्थिति में, संचय के विधि का अनुप्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, माना कि आपको आठ किताबों को अलमारी मे रखनी हैं और उन 8 में से 5 किताबें खानों में सजाना है। इस स्थिति में, आप क्रमचय के संख्या की गणना करेगें क्योंकि किताबों को सजाते समय, किताबों के क्रम या विन्यास का होना आवश्यक या महत्वपूर्ण हैं। अब माना कि आपको 8 किताब में से केवल 5 किताब का चयन करना है। यह संचय की समस्या है और क्रमचय का नहीं क्योंकि यह आवश्यक नहीं कि कौन सी किताबें सबसे पहली चुनी जाती हैं और कौन सी बाद में। यहां केवल इस बात पर ध्यान देना है कि कौन सी 5 किताबें चयन की जाती है। इसका अर्थ है कि केवल चयन होना ज्वाद महत्वपूर्ण है, उसके चयन होने का विन्यास आवश्यक नहीं है। अतः, विभिन्न समूह का प्रत्येक पद या चयन जिसका चयन किया जा सकता है, बिना वस्तुओं के क्रम या विन्यास को ध्यान देते हुए कुछ या सभी वस्तुओं के चयन को हीं संचय कहते हैं।

13.3.1 n भिन्न पदों में से r का संचय

दिये गये n पदों में से r पदों के चयन को ${}^nC_r$ से निरूपित किया जाता है और इसे निम्नलिखित रूप से वर्णन किया जाता है:

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

आपको सदैव याद रखना चाहिए कि ${}^nC_r$ अर्थपूर्ण तभी है जब $n > 0$, $r > 0$ और $n \geq r$ ।

यहां n और r दोनों को शून्य से अधिक होना चाहिए क्योंकि कुल उपलब्ध या दिये गये संख्या और वांछित चयन की जाने वाली संख्या दोनों हीं ऋणात्मक नहीं हो सकती है। इसी प्रकार n सदैव r अधिक या कम से कम r के बराबर होना चाहिए लेकिन n से r कम नहीं हो सकता है क्योंकि यह संभव नहीं है कि वांछित रूप से चयन की जाने वाली वस्तुओं की संख्या, दी गई पदों की संख्या या उपलब्ध संख्या से अधिक हो जाय।

उदाहरण 21: 6 सदस्यों में से 4 सदस्यों वाली कितनी समितियां बनाई जा सकती है?

हलः प्रश्न में यह दिया गया है कि 6 सदस्य मे से 4 सदस्य वाली समितियों का निर्माण करना है। इसका अर्थ है कि यह संचय की स्थिति है और क्रमचय कि स्थिति नहीं हैं क्योंकि केवल सदस्यों का चयन होना ज्यादा महत्वपूर्ण है। उनके चयन का क्रम या विन्यास ज्यादा महत्वपूर्ण नहीं है। दिये गये 6 सदस्यों में से 4 सदस्य वाली समिति का निर्माण ${}^6C_4$ तरीके से किया जा सकता है। अतः,

वांछित सदस्यों के चयन के तरीकों की संख्या = ${}^6C_4$

$$= \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!}$$

$$= \frac{6\times5\times4!}{4!\times2\times1} = \mathbf{15}$$

उदाहरण 22: 12 छात्रों में से 5 छात्रों का दल कितने तरीके से बनाया जा सकता है?

हलः 12 छात्रों में से 5 छात्रों के दल का निर्माण ${}^{12}C_5$ तरीकों से किया जात सकता है। अतः,

वांछित छात्रों के दल के निर्माण के तरीके = ${}^{12}C_5$

$$= \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!}$$

$$= \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{5\times4\times3\times2\times1\times7!} = \mathbf{792}$$

उदाहरण 23: एक परीक्षा पत्रक में 10 प्रश्न दिये गये हैं। कितने विभिन्न तरीकों से एक परीक्षार्थी 5 प्रश्नों का चयन कर सकता है?

हलः परीक्षा पत्रक में दिये गये 10 में से कोई भी 5 प्रश्न का चयन कर सकता है। 10 प्रश्न में से 5 प्रश्न चयन तरीके से कर सकते हैं। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = ${}^{10}C_5$

$$= \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!}$$
$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5\times4\times3\times2\times1\times5!} = \mathbf{252}$$

उदाहरण 24: 6 भद्र पुरूषों एवं 4 महिलाओं से 5 सदस्यी समिति बनाने के कितने तरीके हो सकते हैं जबकि प्रत्येक समिति में 2 महिलओं को सम्मिलित करना अनिवार्य है?

हलः यह प्रश्न में दिय है कि 5 सदस्यीय समिति में दो महिलाओं का चयन होना अनिवार्य है; इसका अर्थ हुआ कि समिति में दो महिलाएं एवं तीन पुरूष आवश्य रूप से होगें। 4 में से 2 महिलाओं का चयन $^4C_2$ तरीके से किया जा सकता है और 6 में से 3 पुरूषों का चयन $^6C_3$ तरीके से कर सकते हैं। अतः पांच सदस्यीय समिति को बनाने के लिए वांछित तरीकों की संख्या = $^4C_2 \times {}^6C_3$

$$= \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{6!}{3!(6-3)!}$$
$$= \frac{4!}{2!\times2!} \times \frac{6!}{3!\times3!}$$
$$= 6 \times 20 = \mathbf{120}$$

उदाहरण 25: 6 पुरूषों एवं 4 महिलाओं में से 5 सदस्यों वाली समिति कितने तरीकों से बनाय जा सकते हैं यदि कम से कम 2 महिला सदस्य समिति में आवश्य हीं होने चाहिए?

हलः चूंकि, यह प्रश्न में दिया है कि प्रत्येक समिति में कम से कम दो महिलाएं निश्चित रूप से होने चाहिए; इसका अर्थ है कि समितियां निम्नलिखित तरीके से बनाएं जा सकते हैं:

1. 2 महिलाएं एवं 3 पुरूषों की समिति, या
2. 3 महिलाएं एवं 2 पुरूषों की समिति, या
3. 4 महिलाएं एवं 1 पुरूषों की समिति

अतः समिति बनाने की वांछित तरीकों कि संख्या

$$= ({}^4C_2 \times {}^6C_3) + ({}^4C_3 \times {}^6C_2) + ({}^4C_4 \times {}^6C_1)$$
$$= (6\times20) + (4\times15) + (1\times6)$$
$$= 120 + 60 + 6$$
$$= \mathbf{186}$$

उदाहरण 26: एक प्रश्न पत्र में तीन खण्ड हैं–खण्ड अ, खण्ड ब एवं खण्ड स। खण्ड अ में 4 प्रश्न, खण्ड ब में 5 प्रश्न एवं खण्ड स में 6 प्रश्न सम्मिलित हैं। एक परीक्षार्थी 7 प्रश्नों का चयन कितने तरीकों से करे कि प्रत्येक खण्ड में से कम से कम 2 प्रश्न निश्चित रूप से चयन किया जा सके।

हलः चूंकि, प्रश्न में यह दिया है कि परीक्षार्थी प्रत्येक इकाई में से 2 प्रश्न का चयन करते हैं; अतः 7 प्रश्नों का चयन निम्नलिखित ढंग से किया जा सकता है:

1. 2 प्रश्न खण्ड अ से, 2 प्रश्न खण्ड ब से एवं 3 प्रश्न खण्ड स से चयन करता है, या

2. 2 प्रश्न खण्ड अ से, 3 प्रश्न खण्ड ब से एवं 2 प्रश्न खण्ड स से चयन करता है, या
3. 3 प्रश्न खण्ड अ से, 2 प्रश्न खण्ड ब से एवं 2 प्रश्न खण्ड स से चयन करता है।

अतः वांछित प्रश्नों के चयन के तरीकों की संख्या

$$= ({}^4C_2 \times {}^5C_2 \times {}^6C_3) + ({}^4C_2 \times {}^5C_3 \times {}^6C_2) + ({}^4C_3 \times {}^5C_2 \times {}^6C_2)$$
$$= (6 \times 10 \times 20) + (6 \times 10 \times 15) + (4 \times 10 \times 15)$$
$$= 1200 + 900 + 600$$
$$= \mathbf{2700}$$

उदाहरण 27: एक व्यक्ति अपने रात्रि भोज आयोजन में 6 मित्रों को कितने तरीके से बुलाए कि तीन या तीन से अधिक मित्र निश्चित तौर से आयोजन में उपस्थित रहें।

हलः चूंकि प्रश्न में यह दिया हुआ है कि तीन या उससे अधिक मित्र निश्चित तौर से आयोजन या पार्टी में उपस्थित रहें, अतः, यह संभव है कि

3 मित्र उपस्थित रहें, या
4 मित्र उपस्थित रहें, या
5 मित्र उपस्थित रहें, या
6 मित्र उपस्थित रहें,

अतः, वांछित तरीकों की संख्या $= {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$$= 20 + 15 + 6 + 1$$
$$= \mathbf{42}$$

उदाहरण 28: 'MATHEMATICS' शब्द से 4 अक्षरों के चयन के तरीकों को ज्ञात करें, जिससे कि सार्थक शब्द बनाया जा सके।

हलः 'MATHEMATICS' शब्द में कुल 8 भिन्न अक्षर (2 'M', 2 'A', 2'T', 1 'H', 1 'E', 1 'I', 1 'C' और 1 'S') हैं। प्रश्न में यह दिया है कि 4 अक्षरों का चयन किया जाता है। इनका चयन निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता हैः

1. 8 भिन्न अक्षरों में से 4 भिन्न अक्षरों का चयन किया जा सकता है। इसका चयन तरीके से किया जा सकता है।
2. तीन अक्षरों के जोड़े दिये गये हैं, अर्थात् (M,M), (A,A) and (T,T)। इन जोड़ों में से, एक जोड़े का चयन ${}^3C_1$ तरीके से किया जा सकता है। यदि ऐ जोड़े का चयन किया जाता है, इसका अर्थ है कि 2 अक्षरों का चयन किया जाता है और शेष 2 अक्षरों का चयन 7 भिन्न अक्षरों में से ${}^7C_2$ तरीके से किया जा सकता है। इस स्थिति में, संभावित चयन करने के तरीकों की संख्या ${}^3C_1 \times {}^7C_2$ होगा।
3. 4 अक्षरों का चयन करते समय, यह भी संभव है कि 2 भिन्न जोड़े का चयन किया जाता है। उनका चयन ${}^3C_2$ तरीके से किया जा सकता है।

अतः वांछित चयन के तरीकों की संख्या

$$= {}^8C_4 + {}^3C_1 \times {}^7C_2 + {}^3C_2$$

$= 70 + 63 + 3$

$= \mathbf{136}$

उदाहरण 29: 'MATHEMATICS' शब्द के 4 अक्षरों के विन्यास कितने तरीकों से किया जा सकता है?

हल: शब्द से 4 अक्षरों का विन्यास निम्नलिखित वैकल्पिक ढंग से किया जा सकता है:

1. 4 अक्षरों का चयन एवं उनका विन्यास के $({}^8C_4 \times 4!)$ तरीके से ज्ञात कर सकते हैं या
2. अक्षरों के चयन एवं एक जोड़े एक हीं अक्षर तथा 2 भिन्न अक्षरों के विन्यास के $({}^3C_1 \times {}^7C_2 \times \frac{4!}{2!})$ तरीके से ज्ञात कर सकते है, या
3. अक्षरों का चयन एवं एक प्रकार के अक्षर वाले दो भिन्न जोड़े के चयन के $({}^3C_2 \times \frac{4!}{2!2!})$ तरीक हैं।

अतः वांछित तरीकों की संख्या

$$= {}^8C_4 \times 4! + {}^3C_1 \times {}^7C_2 \times \frac{4!}{2!} + {}^3C_2 \times \frac{4!}{2!2!}$$

$$= 1680 + 756 + 18$$

$$= \mathbf{2454}$$

उदाहरण 30: 6 लड़कों एवं 6 लड़कियों में से 5 खिलाड़ियों वाले दल के निर्माण के कितने तरीके हो सकते हैं यदि दल में लड़कियों की संख्या अधिकतम 3 हो सकती है?

हल: प्रश्न में यह दिया हुआ है कि 5 खिलाड़ीयों वाले दल में अधिकतम 3 लड़कियां हो सकती है; इसका अर्थ है कि दल का निर्माण निम्नलिखित ढंग से किया जा सकता है:

i) 3 लड़कियां एंव 2 लड़के $({}^6C_3 \times {}^6C_2)$ or

ii) 2 लड़कियां एंव 3 लड़के $({}^6C_2 \times {}^6C_3)$ or

iii) 1 लड़की एंव 4 लड़के $({}^6C_1 \times {}^6C_4)$ or

iv) कोई लड़की नहीं एंव 5 लड़के $({}^6C_5)$

अतः वांछित दल निर्माण करने के तरीकों की संख्या,

$$= {}^6C_3 \times {}^6C_2 + {}^6C_2 \times {}^6C_3 + {}^6C_1 \times {}^6C_4 + {}^6C_5$$

$$= 300 + 300 + 90 + 6$$

$$= \mathbf{696}$$

13.3.2 प्रतिबंधित संचय

संभावित संचय के संख्या को गणना करते समय; कुछ विशेष स्थितियों में, कुछ प्रतिबन्ध लगाये जा सकते हैं। इन प्रतिबंधों या शर्तों का संचय के संख्या के गणना से पूर्व हमें ध्यान देना चाहिए। मुख्यतः दो प्रकार के भिन्न या अलग प्रतिबंध या शर्त हैं:

1. ये उस प्रकार के प्रतिबन्ध हो सकते हैं जिसमें कुछ ***विशेष वस्तुएं सदैव मौजूद या घटित*** होते हैं। माना कि, आप n में से r वस्तुओं का चयन करते हैं और यह दिया है कि p एक विशेष वस्तु है जो सदैव

घटित/मौजूद होती है। इसका अर्थ है कि r को चयन करते समय; p विशेष वस्तु को सदैव सम्मिलित किया जाना चाहिए। चूंकि, यह अनिवार्य है कि p विशेष वस्तु को सदैव सम्मिलित करना हैं, अतः, आपको शेष वस्तुओं, $(n – p)$ में से हीं केवल $(r – p)$ का चयन करना है।

इस प्रकार, n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को किसी समय विशेष में चयन करते हैं जिसमें p विशेष वस्तु सदैव सम्मिलित है, को ${}^{n-p}C_{r-p}$ से निरूपित करते हैं।

2. एक दूसरे प्रकार का प्रतिबन्ध है जिसमें **कुछ विशेष वस्तएं कभी भी सम्मिलित नहीं करते** हैं। माना कि, आप n में से r वस्तुओं का चयन करते हैं और यह दिया है कि p एक विशेष वस्तु है जो कभी भी घटित नहीं या सम्मिलित नहीं होती है। इसका अर्थ है कि r को चयन करते समय; p विशेष वस्तु को कभी भी सम्मिलित नहीं किया जाना चाहिए। चूंकि, यह अनिवार्य है कि p विशेष वस्तु को कभी भी सम्मिलित नहीं करना हैं, अतः, आपको शेष वस्तुओं, $(n – p)$ में से हीं केवल r वस्तुओं का चयन करना है।

इस प्रकार, n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को किसी समय विशेष में चयन करते हैं जिसमें p विशेष वस्तु को कभी भी सम्मिलित नहीं किया जाता है, को ${}^{n-p}C_r$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण 31: एक परीक्षार्थी 9 प्रश्नों में से 6 प्रश्नों का चयन कितने तरीके से कर सकता है यदि पहला एवं दूसरा प्रश्न को हल करना अनिवार्य है दिया गया हो?

हलः एक परीक्षार्थी को 9 प्रश्नों में से 6 प्रश्न का चयन करन है और यह उनके लिए अनिवार्य है कि प्रथम एवं द्वितीय प्रश्न को हल करे; इसका अर्थ है कि उसे वास्तव में केवल 4 प्रश्नों का ही चयन, शेष बचे 7 = (9–2) प्रश्नों में से करना है।

अतः प्रश्न चयन करने के वांछित तरीकों की संख्या $= {}^{9-2}C_{6-2}$

$$= {}^{7}C_4$$

$$= \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!}$$

$$= \mathbf{35}$$

उदाहरण 32: शिक्षकों एवं 20 छात्रों में से 2 शिक्षकों एवं 5 छात्रों का समूह कितने तरीके से बनाया जा सकता है यदि एक विशेष शिक्षक समूह में शामिल होने से माना कर चुकें हैं?

हलः चूंकि, एक विशेष शिक्षक ने समूह में शामिल होने से इन्कार कर चुके हैं; इसका अर्थ है कि दो शिक्षकों का चयन 9 = (10–1) में से हीं करना है और 20 में से 5 छात्रों का भी चयन करना है। अतः,

वांछित शिक्षकों एवं छात्रों को चयन करने के तरीको की संख्या

$$= {}^{10-1}C_2 \times {}^{20}C_5$$

$$= {}^{9}C_2 \times {}^{20}C_5$$

$$= \frac{9!}{2!(9-2)!} \times \frac{20!}{5!(20-5)!}$$

$$= \frac{9!}{2!7!} \times \frac{20!}{5!15!}$$

$$= \frac{9\times8\times7!}{2\times1\times7!} \times \frac{20\times19\times18\times17\times16\times15!}{5\times4\times3\times2\times1\times15!}$$

$= 36 \times 15504$

= **5,58,144**

13.3.3 सभी वस्तुओं के भिन्न न होने पर संचय

यहां कुछ प्रमेय हैं जो आपको संचय सें संबंधित कुछ विशेष समस्याओं के हल के लिए सहायक सिद्ध हो सकते हैं। यह प्रमेय बताता हैं कि यदि कुछ या सभी n भिन्न वस्तुओं का चयन एक समय में एक साथ करें तब संचय की संख्या $2^n–1$ होगी।

विभिन्न संचयों के चयन करने की स्थिति में, एक विशेष तत्व का चयन किया या नहीं किया जा सकता है। इसका अर्थ है कि एक तत्व को तरीके से सुलझाया जा सकता है, दोनों में से कोई एक अर्थात इसे सम्मिलित या सम्मिलित नहीं किया जा सकता है। प्रथम पद के तरह हीं दूसरे पद को भी सम्मिलित किया या नहीं किया जा सकता है। इसका अर्थ है कि द्वितीय पद से भी दो तरह के सौदा हो सकते हैं और प्रत्येक तरीके जो प्रथम पद से सम्बद्ध होतें हैं वैसे हीं पत्येक तरीके द्वितीय तरीके से भी सम्बद्ध होगें। अतः इन दो पदों से सौदा या परिणाम निकालने के तरीकों की संख्या $=2\times2= 2^2$ है।

यदि इस प्रक्रिया को हम पदों के लिए दोहराते हैं तब तरीकों के कुल संख्या = 2^n है।

लेकिन यहां एक और स्थिति को इसमें सम्मिलित करते हैं जिसमें कोई भी पद को सम्मिलित नहीं किया जाता है। अतः

संचय की वांछित संख्या = $2^n –1$

अब, माना कि आपको उन वस्तुओं के संचय की संख्या ज्ञात करना हैं जिसमें सभी n पद व वस्तुएं भिन्न नहीं; p वस्तुएं एक प्रकार की है, q वस्तुएं दूसरे प्रकार की है, r वस्तुएं तीसरे प्रकार की है और बाकि सब ऐसे हीं है। ऐसे स्थिति में, एक समय में वस्तुओं के किसी भी संख्या के संचय के कुल संख्या $(p + q + r + \ldots\ldots.)$, निम्न प्रकार से होगीः

$(p + 1)(q +1)(r+1)\ldots\ldots.. –1$

उदाहरण 33ः एक विद्यार्थी को परीक्षा में उतीर्ण होने के लिए चारों विषय में उतीर्ण होना आवश्यक है। कितने तरीकों से वह अनुतीर्ण हो सकता है?

हलः इस समस्या का हल दो में से किसी भी एक तरीके, परम्परागत विधि या आप उपर में वर्णित प्रमेय का प्रयोग करके कर सकते हैं। यहां, हम दोनो विधियों से समस्या का हल करेगें ताकि दोनों में अन्तर दिखाया जा सके

लेकिन वास्तविक व्यवहार में आप दोनों में से किसी भी एक विधि का प्रयोग करके समस्या का हल करेगें।

परम्परागत विधि

चूंकि, प्रश्न में यह दिया हुआ है कि परीक्षा उतीर्ण करने के लिए छात्र को सभी चारों विषयों में उसे उतीर्ण होना है, अतः वह परीक्षा में अनुतीर्ण हो सकता है यदिः

वह एक विषय में अनुतीर्ण रहे, या

वह दो विषयों में अनुतीर्ण रहे, या

वह तीन विषयों में अनुतीर्ण रहे, या

वह सभी चार विषयों में अनुतीर्ण रहे

अतः वांछित तरीकों की संख्या = $^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$

$= 4 + 6 + 4 + 1$

$= \mathbf{15}$

प्रमेय का अनुप्रयोग

एक छात्र एक विषय में उतीर्ण या अनुतीर्ण हो सकता है। इसका अर्थ है कि विषयों के साथ दो स्थितियां हो सकती हैं और एक छात्र को सभी चार विषयों के परीक्षा में सम्मिलित होना होगा; अतः चार विषयों के साथ हल करने के कुल 2^4 तरीके हो सकते हैं। लेकिन एक और स्थिति को सम्मिलित करना है कि छात्र सभी चार विषयों में उतीर्ण होता है। छात्र के परीक्षा में अनुतीर्ण होने के संभावित तरीकों के गणना करते समय; हमें सभी चार विषयों में पास होने की स्थिति को बाहर रखना चाहिए। अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = $2^4 - 1$

$= 16 - 1 = \mathbf{15}$

उपरोक्त हल से आप देखेगें कि दोनों हीं विधियों में उतर समान है; अतः, आप दोनो विधियों में से किसी एक का चयन अपने इच्छा अनुसार कर सकते हैं। लेकिन इस संदर्भ में एक और जरूरी बात है कि प्रमेय का प्रयोग, परम्परागत विधि के तुलना में कम समय में हल प्रदान करता है। इस प्रकार यह एक बेहतर विकल्प है।

उदाहरण 34: एक प्रश्न पत्र में 5 प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक के लिए एक विकल्प है। कितने तरीके से एक परीक्षार्थी एक या एक से अधिक प्रश्न का हल कर सकते हैं।

हलः एक प्रश्न के हल करने के लिए 3 तरीक से किया जा सकता है—दोनों में से एक, प्रश्न का हल करें या इसके वैकल्पिक को हल करे या दोनों में से का भी हल न करें। इन तीनों वैकल्पि तरीकों का अनुप्रयोग सभी 5 प्रश्नों के हल करने के लिए कर सकते हैं और वे सभी एक दूसरे से सम्बधित हैं। अतः 5 प्रश्नों को हल करने के कुल तरीके हो सकते हैं। लेकिन, यह संख्या एक स्थिति को सम्मिलित करता है जिसमें किसी भी प्रश्न का उतर नहीं दिया जाता है।

अतः,

वांछित तरीकों की संख्या = $3^5 - 1$

$= 243 - 1$

$= \mathbf{242}$

अब, यह निश्चित रूप से स्पष्ट हो गया होग आपको कि प्रमेय को किसी भी वैकल्पिक संख्या के लिए सामान्यीकरण किया जा सकता है।

13.4 सारांश

इस इकाई में, हमने गुणन संकेतक, क्रमचय एवं संचय के अवधारणा का अध्ययन किया। क्रमचय का प्रयोग वहां किया जाता है जब पदों या तत्वों को क्रम में सजाया जाना होता है, अर्थात् उनके क्रम या श्रेणी को ज्यादा महत्व दिया जाता है जबकि संचय का प्रयोग वहां किया जाता है जहां चयन के क्रम व श्रेणी महत्वपूर्ण नहीं होते हैं। इसके संबंध में कुछ महत्वपूर्ण नियम निम्नलिखत हैं:

1. n भिन्न पदो ंके एक समय में हीं सभी पदों को लेने पर क्रमचय की संख्या n! है।
2. n भिन्न पदों में से एक समय में r पदों को सम्मिलित करने पर क्रमचय की संख्या निम्न होती है: $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
3. जहां सभी n वस्तु में से, p वस्तु एक प्रकार, q वस्तु दूसरे प्रकार, r वस्तु तीसरे प्रकार के और शेष सभी वस्तुएं अलग या भिन्न प्रकार के होते हैं,तब क्रमचय के संख्या की $\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$ है।
4. n वस्तओं के चक्रीय क्रमयच की संख्या (n–1)! होती है।
5. भिन्न वस्तुओं के पदों को एक समय पर एक साथ लेने पर संचय की ^nC_r, संख्या हैं अर्थात् . $\frac{n!}{r!(n-r)!}$
6. n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को किसी समय विशेष में चयन करते हैं जिसमें p विशेष वस्तु सदैव सम्मिलित हों के क्रमचय की संख्या $^{n-p}C_{r-p}$ होती हैं।
7. n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को किसी समय विशेष में चयन करते हैं जिसमें p विशेष वस्तु को कभी भी सम्मिलित नहीं किया जाता है, के क्रमचय की संख्या $^{n-p}C_r$ होती हैं।
8. यदि कुछ या सभी n भिन्न वस्तुओं का चयन एक समय में एक साथ करें तब संचय की संख्या $2^n–1$ होगी।

13.5 शब्दावली

- **क्रमचयः** वस्तुओं को क्रम या विन्यास में सजाने का तरीका है।
- **संचयः** वस्तुओं के चयन की तरीके जिसमें क्रम या विन्यास को ध्यान नहीं दिया जाता है।

13.6 बोध प्रश्न

(A) रिक्त स्थानों को भरें:

1. n भिन्न पदो ंको एक समय में एक साथ लेने पर क्रमयचय की संख्या––– होती है।

2. विभिन्न समूह का प्रत्येक पद या चयन जिसका चयन किया जा सकता है, बिना वस्तुओं के क्रम या विन्यास को ध्यान देते हुए कुछ या सभी वस्तुओं के चयन को हीं ———————— कहते हैं।
3. प्रमेय —————— का प्रयोग उस समय करते हैं जब संचय की संख्या, कुछ या सभी n भिन्न वस्तुओं का चयन एक समय में एक साथ करते हैं।

(B) **सत्य एवं असत्य**

1. n भिन्न वस्तुओं के एक समय में सभी पदों को लेने पर वृतीय क्रमचय की संख्या n! होगी।
2. संचय के गणना में पदों या वस्तुओं के क्रम या श्रेणी का बहुत महत्व है।
3. 5 लड़कियों को एक पक्ति में सजाकर बैठने के कुल तरीकों की संख्या 5! है।
4. n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को किसी समय विशेष में चयन करते हैं जिसमें p विशेष वस्तु सदैव सम्मिलित है, के संचय के संख्या को $^{n-p}C_p$ से निरूपित करते हैं।
5. ^nC_r का विस्तार $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ के बराबर होते हैं।

13.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A)

1. n! 2. संचय, 3. 2^n-1

(B)

1. असत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. असत्य

13.8 स्वपरख प्रश्न

1. 'क्रमचय' से आप क्या समझते हैं? क्रमचय के गणना से संबंधित विभिन्न नियमों का वर्णन करें।
2. 'संचय' से आप क्या समझते हैं? संचय के गणना से संबंधित विभिन्न नियमों का वर्णन करें।
3. 'NAGPUR' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? [720]
4. 'COMPUTER' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? [40320]
5. 'VARANASI' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? [6720]
6. 'MANAGEMENT' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? [226800]
7. 'LOGARITHMS' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? [5040]

8. 5, 6, 7, 8, 9, अंकों से 3 अंकों वाली कितनी संख्याएं बनाई जा सकती है? [60]
9. सात व्यक्तियों को एक गोल मेज के चारों तरफ कितने तरीके से बैठाया जा सकता है? [720]
10. 5 लड़के एवं 5 लड़कियों को एक मेज के चारों तरफ कितने तरीके से बैठाया जाय कि 2 लड़के एक साथ व अगल–बगल नहीं हो? [2880]
11. 'NAGPUR' शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से सजाया जाय कि स्वर अक्षर सदैव एक साथ हो एवं स्वर अक्षर एक साथ न हो? [1440, 3600]
12. 'HEXAGON' शब्द के अक्षरों को कितने तरीके से सजाया जाय कि शब्द का शुरूआत 'H' एवं 'N' अन्त से हो? [120]
13. 15 खिलाड़ियों के समूह में से 11 खिलाड़ियों के एक दल का निर्माण कितने तरीके से किया जा सकता है? [1365]
14. एक ट्रक कम्पनी के पास 8 ट्रक एवं 6 चालक उपलब्ध हैं जब 4 ट्रक के लिए मांग प्राप्त होती है, कितने तरीके से ट्रक एवं चालकों का चयन किया जाये की उनकी आवश्यकता पूरी हो सके? [1050]
15. 7 भद्र पुरूषों एवं 4 महिलाओं से 5 सदस्यीय समिति का निर्माण कितने तरीके से किया जा सकता है यदि निश्चित रूप से मात्र दो महिलाएं हीं समिति में सम्मिलित किये जाते हैं? [120]
16. पुरूष एवं 6 महिलाओं में से 5 सदस्यीय समिति बनाना है। इसे बनाने के तरीकों के संख्या को ज्ञात करें कि समूह में से चयनित समिति में (i) पुरूष एवं 2 महिलाएं, (ii) 2 पुरूष, (iii) कोई महिला नहीं, (iv) कम से कम एक महिला हो, (v) 3 से अधिक पुरूष नहीं। [(i) 150, (ii) 200, (iii) 1, (iv) 461, (v) 401]
17. खिलाड़ियों के समूह से 11 क्रिकेट टीम जाते हैं जिसमें 4 गेंदबाज और 2 विकेट कीपर हैं। कितने तरीकों से टीम का निर्माण किया जाय कि टीम का मिश्रण (i) 3 गेंदबाज एवं 1 विकेट कीपर हों (ii) कम से कम 3 गेंदबाज और 1 विकेट कीपर हो। [(a) 960, (b) 960 + 840 +420 + 252 = 2472]
18. एक छात्र को उतीर्ण होने के लिए सभी पांच विषयों में उतीर्ण होना है। कितने तरीकों से वे अनुर्तीण हों सकते हैं? [31]
19. एक उम्मीवार को 10 प्रश्नों में से 6 को हल करना आवश्यक है जो दो समूहों में विभाजित हैं, प्रत्येक समूह में 5 प्रश्न है और उन्हें प्रत्येक समूह में से, चार से अधिक प्रश्नों का चयन करने की अनुमति नहीं हैं।

कितने तरीकों से वे प्रश्नों का चयन कर पायेगें?
[200]

20. एक फर्म में 4 सीटें व पद खाली हैं जिसके लिए 25 उम्मीदवार प्रत्यावेदन करते हैं। कितने तरीकों से उनका चयन किया जाये कि (i) यदि एक विशेष उम्मीदवार सदैव सम्मिलित होते हैं, (ii) यदि एक विशेष उम्मीदवार सदैव बाहर रखे जाते हैं? [(i) 2024, (ii) 10626]
21. 21 उजली एवं 19 काली गेंदों को किसी पंक्ति में कितने तरीके से सजाया जाय कि एक पक्ति में दो काली गेंदें एक साथ न हो सके?
[15
40]
22. 'EQUATION' शब्द से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं जिसके शुरूआत एवं अन्त में एक व्यंजक हो?
[4320]
23. 'क्रमचय' शब्द का क्या अर्थ है?
24. 'संचय' शब्द से क्या तात्पर्य है?
25. प्रतिबंधित संचय क्या है?
26. क्रमचय एवं संचय के मध्य अन्तर सपष्ट करें।

13.9 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Sancheti D.C and Kapoor V.K., '*Business Mathematics*', Sultan Chand & Sons, New Delhi.
3. Goel Ajay and Goel Alka, *'Mathematics and Statistics'*, Taxman, New Delhi.

*****

इकाई 14 द्विपद, प्रसामान्य एवं प्वॉयसन वितरण

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- सैद्धान्तिक वितरण को संकल्पना के रूप को समझ सकें।
- द्विपद बंटन के आधारभूत मान्यताओं, अचर मूल्य एवं विशेषताओं को जान सकें।
- प्रसामान्य वक्र की विशेषताएं एवं प्रसामान्य वक्र के अधिनस्त क्षेत्र को जान सकें।
- प्वॉयसन वितरण के मान्यताओं, अचर मूल्य एवं अनुप्रयोग या उपयोगिता तथा दिये गये आवृति वितरण के साथ फिट कर सकें।

14.1 प्रस्तावना

पूर्व के इकाई में, आपने प्रायकिता के सिद्धान्त एवं क्रमचय तथा संचय के संकल्पना का अध्ययन किया। ये तकनीक एवं विधियां अपको एक घटना के होने की संभावना को ज्ञात करने एवं किसी कार्य के सम्पादित होने के संभावित तरीकों या एक समूह के सृजन की गणना करने मे सहायक होता है। स्थिति के सुस्पष्ट दृष्टि को ज्ञात करने के लिए, कभी–कभी हम किसी निश्चित घटना के संभावित आवृतियों का पता लगाना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में, हम एक संभावित आवृति वितरण को बनाना चाहते हैं।

गणितीय रूप में, यह संभव है कि इस प्रकार के वितरण बनाया जाए और इन्हें हीं सैद्धान्तिक वितरण के नाम से जानते हैं। इस प्रकार के सबसे महत्वपूर्ण एवं प्रचलित सैद्धान्तिक वितरण, द्विपद, प्रसामान्य एवं प्वॉयसन वितरण आदि हैं। इस इकाई में आप इन तीन प्रकार के वितरणों का अध्ययन करेगें।

14.2 द्विपद वितरण

द्विपद बंटन एक खण्डित यादृच्छिक चर के प्रायकिता वितरण के सबसे अधिक प्रचलित रूप है। द्विपद बंटन को बर्नौली बंटन या वितरण के नाम से भी जानते हैं क्यांकि इस वितरण का सर्वप्रथम अध्ययन एक स्विस गणितज्ञ जेम्स बर्नौली के द्वारा 1700 ई. में किया था। द्विपद प्रायकिता वितरण एक गणितीय मॉडल का अध्ययन करता है जिसमें एक प्रयोग को कई बार दोहराया जाता है, जहां प्रत्येक प्रयोग या निरीक्षण के निष्पादन को हीं जांच या परीक्षण कहलाता हैं।

14.2.1 द्विपद वितरण की मान्यताएं

एक द्विपद वितरण की चार प्रमुख मान्यताएं या शर्तें हैं जिन्हें निश्चित रूप से पूरा किया जाना चाहिए। इसका अर्थ है कि द्विपद वितरण का विकास निम्नलिखित मान्यताओं के समुच्य के अधिनस्त किया जाता हैः

(a) परीक्षणों की संख्या (‘n’) सीमित, स्थिर और छोटा होता हैं। इसका अर्थ है यादृच्छिक परीक्षण एक निश्चित संख्या में बार–बार निष्पादित करते हैं।

(b) प्रत्येक परीक्षण के दो संभावित परिणाम हो सकते हैं जो कि पारस्परिक अपवर्जी होते हैं। ये पारस्परिक अपवर्जी परिणाम को ‘सफलता’ और ’असफलता’ के नाम से जानते हैं। यदि काई घटना घटित होती है तो उसे सफल या सफलता (p) और यदि घटना घटित नहीं होती है तो इसे असफल या असफलता (q) कहते हैं।

(c) एक परीक्षण से दूसरे परीक्षण तक सफलता की प्रायकिता स्थिर रहती है। यदि एक परीक्षण के सफलता की प्रायकिता को से ‘p’ प्रदर्शित किया जाय एवं असफलता को से ‘q’ इंगित किया जाय तब ‘q = 1 – p’ और ‘p’ तथा ‘q’ दोंनो हीं प्रत्येक परीक्षण में स्थिर रहेगें।

(d) सभी परीक्षण एक दूसरे से स्वतंत्र हैं। इसका अर्थ हैं कि एक परीक्षण का परिणाम दूसरे परीक्षण के परिणाम को प्रभावित नहीं करते हैं।

14.2.2 द्विपद वितरण के प्राचल या अचर मूल्य

द्विपद वितरण के कुछ महत्वपूर्ण प्राचल या अचर मूल्य होते हैं जो निम्नलिखित हैः

- **माध्यः** $\mu = np$
- **प्रमाप विचलनः** $\sigma = \sqrt{npq}$
- **माध्य के सापेक्ष प्रथम आघूर्णः** $\mu_1 = 0$
- **विचरण या प्रसरण या माध्य के सापेक्ष द्वितीय आघूर्णः** $\mu_2 = npq$
- **माध्य के सापेक्ष तृतीय आघूर्णः** $\mu_3 = npq(q - p)$

उपरोक्त वर्णित सभी संबंध द्विपद वितरण के स्थिति में सदैव सत्य हाते हैं। अतः, इन्हें द्विपद वितरण का प्राचल या अचर मूल्य कहते हैं।

14.2.3 द्विपद वितरण की विशेषताएं

द्विपद वितरण के विशेषता का अर्थ है कि द्विपद वितरण वक्र आकार व बनावट से संबंधित लक्षण या गुण। इसका अर्थ है कि जब द्विपद वितरण को ग्राफ पेपर पर प्लॉट किया जाये, तब हम निम्नलिखित प्रवृति का अवलोकन कर सकते हैं:

- ❖ जब p का मूल्य कम होगा अर्थात् (p=0.1),, तब द्विपद बंटन दाहिनी ओर विषम होती है।
- ❖ जैसे–जैसे p में वृद्धि होती हैं विषमता (सममितता का अभाव) कम होती जाती है।
- ❖ जब p= 0.5 है, तब द्विपद बंटन एक सममितीय वितरण कहलाती है।
- ❖ जब p का मूल्य 0.5 से अधिक होगा तब द्विपद बंटन बायीं ओर अधिक विषम होती है। उदारहण के लिए p का मूल्य 0.3 या 0.7 दोनों का अर्थ एक हीं केवल p एव q के मान आपस में अदल–बदल जाता है। यह किसी भी p एव q के सम्पूरक जोड़ों के लिए या लागू होता है।

14.2.4 द्विपद विस्तार

आईए, हम द्विपद विस्तार के संकल्पना एवं प्रक्रिया को समझते हैं। माना कि हम दो सिक्कों (X और Y) को हवा में उछालते हैं। दोनों में से किसी एक में उपर की ओर चित या पट आयेगा। इसका अर्थ है कि एक सिक्के के स्थिति में केवल दो हीं पारस्परिक अपवर्जी संभावित परिणाम हो सकते हैं क्योंकि यदि उपर की ओर चित आता है तो पट उपर नहीं आ सकता है और विलोमशः। इस प्रकार, दो सिक्कों X और Y को हवा में उछालने की स्थिति में चार संभावित संयुक्त परिणाम आ सकते हैं।

- ➢ X और Y, दोनों में चित, या
- ➢ X में चित और Y में पट, या
- ➢ X में पट और Y में चित, या
- ➢ X में चित और Y में पट।

यदि हम उपर चित आने को सफल मानते हैं और इन्हें ‘p’ से निरूपित करते हैं तब उपर की ओर पट आने पर वह असफल होगे और इसे ‘q’ से निरूपित करते हैं। अब,

दो चित आने की प्रायकिता $= p \times p = p^2$

एक चित एवं एक पट आने की प्रायकिता $= (p \times q + q \times p) = pq + pq = 2pq$

दो पट आने की प्रायकिता $= q \times q = q^2$

आप अवश्य हीं जानना चाहिए कि p^2, $2pq$ और q^2, व्यंजन $(p + q)^2$ का विस्तार हैं क्योंकि,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

इसी प्रकार, यदि हम एक उदाहरण दो के वजाय तीन सिक्के का लेते हैं, तब तीन चित आने कि प्रायकिता $= p \times p \times p = p^3$

दो चित और एक पट आने कि प्रायकिता $= \{(p\times p \times q) + (p \times q \times p) + (q \times p \times p)\} = 3p^2q$

एक चित और दो पट आने कि प्रायकिता $= \{(p \times q \times q) + (q \times p \times q) + (q \times q \times p)\} = 3pq^2$

तीन पट आने की प्रायकिता $= q \times q \times q = q^3$

आप अवश्य हीं जानना चाहिए कि p^3, $3p^2q$, $3pq^2$ और q^3 व्यंजन $(p + q)^3$ का विस्तार हैं क्योंकि,

$(a + b)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

आप निरीक्षण कर सकते हैं कि यदि परीक्षण दो सिक्कों पर किया जाय तो उसके परिणाम को $(p + q)^2$ के रूप में सरांशित किया जा सकता है और यदि परीक्षण तीन सिक्कों में बार–बार पालन किया जाय तो इसके परिणाम को $(p + q)^3$ के रूप में सरांशित कर सकते हैं। इस निष्कर्ष का सामान्यीकरण किया जा सकता है। इसका अर्थ है कि यदि पदों के लिए परीक्षण को बार–बार दोहराया जाय तब इसके परिणाम या को $(p + q)^3$ के रूप में सरांशित किया जा सकता है। आप आवश्य जानते हैं कि,

$(x + a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_rx^{n-r}a^r + \ldots\ldots\ldots + a^n$

यह विस्तार आपकों द्विपद वितरण से संबंधित व्यवहारिक समस्याओं को हल करने के लिए सहायक सिद्ध होगा।

उदाहरण 1: पांच सिक्कों को 100 बार उछाला जाता है, 0, 1, 2, 3, 4 और 5 आने कि क्या संभावनाएं हैं? प्रत्याशित आवृतियों के माध्य एवं प्रसरण की गणना करें।

हलः

चित आने की प्रायकिता $= p = \frac{1}{2}$

$\therefore$ पट आने कि प्रायकिता $= q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

यदि 5 सिक्कों को 100 बार हवा में उछाला जाय तब द्विपद विस्तार निम्नलिखित के हो सकते हैं:

$100\,(p + q)^5$ or $100\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^5$

$= 100\,[p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5]$

$=100[\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5]$

$= 100\left(\frac{1}{32}\right) + 100\ (5)\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 100\ (10)\ \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 100\ (10)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) +$
$100\ (5)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{16}\right) + 100\left(\frac{1}{32}\right)$

$= 3.125 + 15.625 + 31.25 + 31.25 + 15.625 + 3.125$

सारणी के रूप में:

चित की संख्या (m)	प्रत्याशित आवृति (f)	(mf)	d	d^2	fd^2
5	3.125	15.625	+2.5	6.25	19.53
4	15.625	62.500	+1.5	2.25	35.16
3	31.250	93.750	+0.5	0.25	7.81
2	31.25	62.500	−0.5	0.25	7.81
1	15.625	15.625	−1.5	2.25	35.16
0	3.125	0	−2.5	6.25	19.53
कुल योग	100.0	250			125

$$a = \frac{\sum mf}{n} = \frac{250}{100} = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{125}{100}} = \sqrt{1.25} = 1.12$$

द्विपद वितरण की विशेषता के अनुसार,

माध्य $= np$

$= 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$

$\sigma = \sqrt{npq}$

$= \sqrt{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{1.25} = 1.12$

उपरोक्त हल से आप परीक्षण कर सकते हैं कि हम द्विपद वितरण के माध्य मूल्रू एवं प्रमाप विचलन की गणना, उसकी विशेषता के आधार पर बहुत आसानी एवं जल्दी से कर पाते हैं। यदि आप इसकी गणना परम्परागत विधि से करेगें तो यह काफी लम्बा एवं अधिक समय लगने वाली प्रक्रिया प्रतीत होगी।

उदाहरण 2: महाविद्यालय में प्रवेश पाले वाले छात्रों के स्नातक होने की प्रायकिता 0.4 है। प्रायकिता निर्धारित करें कि 5 छात्रों में से (i) कोई स्नातक नहीं हैं, (ii) केवल एक स्नातक है, (iii) कम से कम एक हैं और (iv) सभी स्नातक हैं?

हलः

स्नातक होने की प्रायकिता = $p = 1.4$

$\therefore$ स्नातक नहीं होने की प्रायकिता = $q = 1 - 0.4 = 0.6$
चूंकि हमें 5 छात्रों के स्थिति से संबंधित प्रायकिता की गणना करनी है, अतः हमें $(p + q)^5$ या $(0.4 + 0.6)^5$ का द्विपद विस्तार को बढ़ाना पडेगा।
$\therefore$ द्विपद विस्तार होगा निम्न रूप से होगाः
$p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$
(i) कोई छात्र स्नातक न होने कि प्रायकिता = $q^5 = (0.6)^5 = 0.07776$
(ii) केवल एक छात्र का स्नातक होने की प्रायकिता = $5pq^4 = 5\,(0.4)\,(0.6)^4$
$= 2\,(0.1296) = 0.2592$
(iii) कम से कम एक छात्र का स्नातक होने की प्रायकिता
= 1 – कोई छात्र स्नातक न होने कि प्रायकिता
$= 1 - 0.07776 = 0.92224$
(iv) सभी छात्र के स्नातक होने की प्रायकिता = $p^5 = (0.4)^5 = 0.01024$

उदाहरण 3: एक गांव में 1,000 परिवार निवास करते हैं। प्रत्येक परिवार में तीन बच्चे हैं। इनमें से कितनों के, (i) कम से कम एक लड़की, (ii) दो लड़के एवं एक लड़की, (iii) अधिकतम दो लड़की, होने की प्रत्याशा या प्रायकिता है?

हलः

पुरूष जन्म होने की प्रायकिता = $p = \frac{1}{2}$
$\therefore$ महिला जन्म होने की प्रायकिता = $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
चूंकि, यहां प्रत्येक परिवार में 3 बच्चे हैं, अतः हमें द्विपद विस्तार $(p + q)^3$ या $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3$ का करना होगा जो निम्न प्रकार से हो सकते हैं।
वांछित द्विपद विस्तारः

$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

(i) कम से कम एक लड़की होने की प्रायकिता = $1 - p^3$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

कम से कम एक लड़की होने वाले परिवारों की प्रत्याशित संख्या = $1000 \times \frac{7}{8}$
= **875**

परिवार

(ii) दो लड़के एवं एक लड़की होने की प्रायकिता = $3p^2q$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

दो लड़कें एवं एक लड़के होने वाले परिवारों की प्रत्याशित संख्या = $1000 \times \frac{3}{8}$
= **375**

परिवार

(iii) अधिकतम दो लड़कियां होने की प्रायकिता = $1-q^3$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

कम से कम एक लड़की होने वाले परिवारों की प्रत्याशित संख्या = $1000 \times \frac{7}{8}$

= **875**

परिवार

उदाहरण 4: एक मशीन औसत रूप से 20 प्रतिशत दोषयुक्त बोल्ट बनाती है। बोल्ट को स्वीकार किया जायेगा यदि एक 5 बोल्ट की निदर्शन जत्था में कोई दोषयुक्त न हो और इसे अस्वीकार किया जायेगा यदि एक निदर्शन में 3 या उससे अधिक दोषयुक्त बोल्ट होगें। दूसरी स्थिति में, एक अन्य निदर्शन लिए जाते हैं। दूसरे निदर्शन की आवश्यकता की क्या प्रायकिता है?

हलः

दोषयुक्त बोल्ट की प्रायकिता = $p = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

गैर–दोषयुक्त बोल्ट की प्रायकिता = $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

चूंकि 5 बोल्ट वाली जत्था को लिया जाता है; अतः हमें $(p+q)^5$ या $\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^5$ का द्विपद विस्तार करना होगा।

वांछित द्विपद विस्तार होंगे:

$$p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

या, $\left(\frac{1}{5}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right) + 10\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3$
$+5\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^5$

दिये गये शर्त के अनुसार, द्वितीय निदर्शन केवल उस स्थिति में लिये जा सकते हैं जब दोषयुक्त बोल्ट की संख्या या तो 2 या फिर 1 हो।

∴ द्वितीय निदर्शन की आवश्यकता होने कि प्रायकिता

$$= 10\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4$$

$$= 0.2048 + 0.4096$$

$$= \mathbf{0.6144}$$

उदाहरण 5: निम्नलिखित पदों पर टिप्पणी करें:

एक द्विपद वितरण जिसका माध्य = 7 और प्रसरण = 11 है।

हलः

द्विपद वितरण में, माध्य = np और प्रसरण = npq

दिये गये मानों को रखने पर,

np = 7 और npq = 11

या, 7q = 11

$\therefore q = \frac{11}{7}$ = 1.57

हम जानते हैं कि, p + q = 1, इसलिए q कभी भी 1 से अधिक नहीं हो सकता है। अतः यह एक गलत कथन है।

उदाहरण 6: एक द्विपद वितरण के लिए माध्य मूल्य 6 एवं प्रमाप विचलन मूल्य $\sqrt{2}$ हैं। द्विपद वितरण के बाकि सभी पद को लिखें।

हलः

प्रश्न में ये दिया है कि माध्य = 6 एवं प्रमाप विचलन = $\sqrt{2}$ ।

$\therefore$ np = 6 और

$\sqrt{npq} = \sqrt{2}$ या npq = 2

$q = \frac{npq}{np} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

यदि, $q = \frac{1}{3}$, तब $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

जब, np = 6, या, $p = \frac{2}{3}$

तब, $n \times \frac{2}{3} = 6$, या 2n = 6 × 3 = 18, या $n = \frac{18}{2} = 9$

अब, हम दिये गये पदों के लिए द्विपद बंटन को बढाातें हैं। और द्विपद विस्तार

$(p + q)^9$ या $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^9$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right) + 36\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 84\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 126\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 126\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 84\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 36\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^7 + 9\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^8 + \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

14.3 प्रसामान्य वितरण

सत्त यादृच्छिक चर के प्रायकिता वितरण को हीं सत्त प्रायकिता वितरण कहते हैं। एक यादृच्छिक चर सत्त होगी यदि यह माना जाय कि इसके मूल्य कुछ अन्तराल में आते हों। सांख्यिकी के सम्पूर्ण जगत में, सबसे महत्वपूर्ण एवं प्रसिद्ध प्रायकिता वितरण को प्रसामान्य प्रायकिता वितरण कहते हैं।

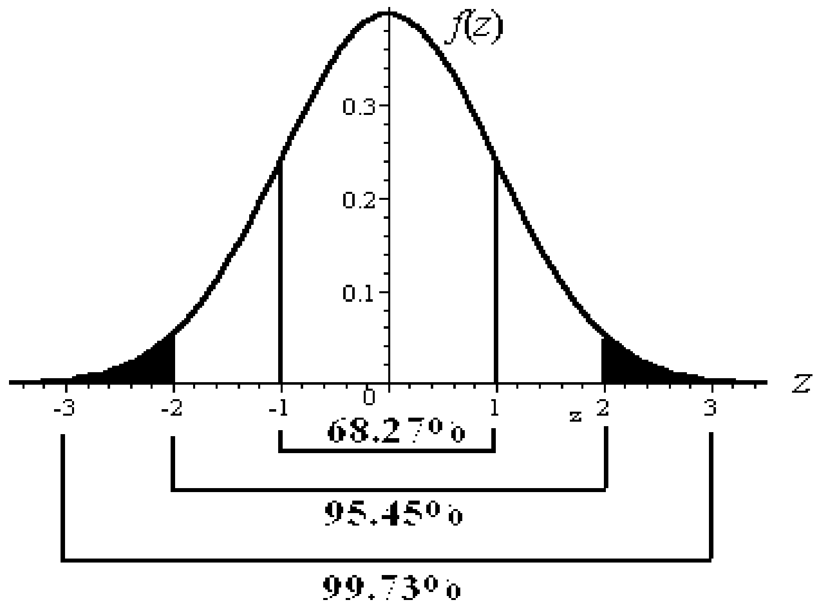
प्रसामान्य वितरण का विकास एक इंगलिश गणितज्ञ डि–मोर्वे ने 1733 ई. में सर्वप्रथम, खेल के सभांवनाओं को पता लगाने के लिए किया था। जब प्रसामान्य प्रायकिता वितरण अर्थात् प्रसामान्य वितरण को ग्राफ पेपर पर प्लॉट करते हैं तो प्राप्त वक्र प्रसामान्य वक्र कहलाता है जो पूर्णतया घंटी के आकार

का होता है। इस वक्र को 'त्रुटि के सामान्य वक्र', 'गौसियन वक्र', या 'सममितता वक्र' के नाम से भी जानते हैं। इस वक्र का एक और विशिष्ट लक्षण है कि यह दायें एवं बाएं दोनों तरफ असीमित मात्रा तक बढ़ती है पर कभी भी X-अक्ष को नहीं छूती है।

14.3.1 प्रसामान्य वितरण की विशेषताएं

प्रसामान्य वितरण की प्रमुख विशेषताएं निम्नलितखत हैं:

1. यह एक सत्त प्रायकिता वितरण हैं।
2. प्रसामान्य वितरण की माध्य, माध्यिका और बहुलक सभी एक समान होते हैं; इसका अर्थ है कि वे सभी एक हीं बिन्दु पर होगें। चूंकि, माध्य = माध्यिका = बहुलक, होते हैं इसलिए विषमता = 0, होते हैं।
3. प्रसामान्य वक्र घंटा आकार वाला होता है और माध्य के सापेक्ष पूर्णतया सममितीय होता है। इसका अर्थ है कि माध्य सदैव वक्र के कन्द्र पर अवस्थित होते हैं।
4. प्रसामान्य वक्र माध्य से दायें एवं बाएं दोनों तरफ असीमित मात्रा तक बढ़ती है पर कभी भी X-अक्ष को नहीं छूती है।
5. आकार को ध्यान न देते हुए, प्रसामान्य वक्र के कुल अधीनष्त क्षेत्र और क्षैतिज–अक्ष के उपर वाला भाग सदैव 1 के बराबर होता है।
6. प्रसामान्य वक्र का कोई भी भाग X-अक्ष के नीचे नहीं होते हैं।
7. माध्यिका से धनात्मक विचलनों का योग उसके ऋणात्मक विचलनों के योग के बराबर होते हैं।
8. बहुलक से दोनों तरफ आवृतियां समान दूरी पर अवस्थित होती है अर्थात दोनों ओर आवृतियां बराबर होती हैं।
9. प्रसामान्य वितरण का प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक माध्यिका से समान दूरी पर अवस्थित होते हैं। इस प्रकार, $Q_3 - M = M - Q_1$ or $Q_3 + Q_1 = 2M$।
10. एक प्रसामान्य वितरण के लिए माध्य विचलन 0.7979 प्रमाप विचलन के बराबर होता है या दूसरे शब्दों में , $\delta = \frac{4}{5}\ \sigma$ के बराबर होता है।
11. प्रसामान्य वितरण के लिए चतुर्थक विचलन 0.6745 प्रमाप विचलन या दूसरे शब्दों में $Q.D. = \frac{2}{3}\ \sigma$ के बराबर होता होता है।
12. प्रसामान्य वितरण में, $a \pm \sigma$, $a \pm 2\,\sigma$, $a \pm 3\sigma$ क्रमशः 68.27%, 95.45% और 99.73% भाग व पदों को सम्मिलित करते हैं। सामान्य उद्देश्य के लिए, $a \pm 1.96\sigma$ को संतोषजनक माना जाता है जो पदो के 95% भाग को ढ़कता या सम्मिलित करता है।



14.3.2 प्रसामान्य वक्र के अधिनश्त क्षेत्र

यदि Z, माध्य = 0 एवं प्रमाप विचलन = 1, के साथ एक प्रसामान्य वितरित यादृच्छिक चर है तब को Z प्रमाप प्रसामान्य चर कहते हैं। चूंकि, प्रमाप प्रसामान्य वक्र के अधिनश्त क्षेत्र 1 इकाई के बराबर होते हैं और माध्य पर कोटि अर्थात् Z = 0, दोनों क्षेत्रों को बराबर भागों में बांटता है, अतः बांए एवं दायें पक्ष के प्रत्येक क्षेत्र का मान कोटि Z = 0, पर 0.5 के बराबर होता है। इस संदर्भ में एक दूसरा और ध्यान देने योग्य बात है कि चूंकि प्रसामान्य वक्र सममितीय होता है, Z क्षेत्र का नकारात्मक मूल्य उसके संगत धनात्मक मूल्य के बराबर होते हैं। माध्य एवं प्रसामान्य विचलित मूल्य Z के बीच क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए एक सांख्यिकीय सारणी का प्रयोग किया जाता है। यदि X, माध्य μ एवं प्रमाप विचलन σ के साथ प्रसामान्य रूप से वितरित हो तभी भी एक प्रकार के सांख्यिकी सारणी का प्रयोग करते हैं; लेकिन सर्वप्रथम X के सभी मानों को प्रमाप या मानक प्रसामान्य चर Z में परिवर्तित करना होगा, जिसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जा सकाता हैः

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

उदाहरण 7: यदि एक वितरण का माध्य 30 एवं प्रमाप विचलन 5 है, तब प्रसामान्य वक्र के अधिनश्त माध्य एवं 38 के बीच कितना क्षेत्र सम्मिलित होगें?

हलः

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

जहां, Z = मानक प्रसामान्य अन्तर

X = दिये गये मूल्य

μ = माध्य

σ = मानक विचलन

$Z = \frac{38-30}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$

प्रासामान्य वक्र क्षेत्र सारणी के अनुसार, 1.6 σ भाग 0.4452 क्षेत्र से अच्छादित है. अतः, 0.4452 × 100 = **44.52%** क्षेत्र माध्य एवं 38 इकाई मूल्य के बीच अच्छादित है।

उदाहरण 8: पेट्रोल स्टेशन पर, वाहनों को बेची जाने वाली प्रतिदिन औसत लिटर 20 एवं मानक विचलन 10 लिटर है। किसी विशेष दिन 50 अतिरिक्त वाहनों के द्वारा 25 और अतिरिक्त लिटर पेट्रोल लेते हैं। पेट्रोल बिक्री को प्रसामान्य वितरण मानते हुए ज्ञात करें कि उस विशेष दिवस को कितने वाहनों ने पेट्रोल स्टेशन से खरीदी?

हलः

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{25-20}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

प्रसामान्य वक्र क्षेत्र के सारणी के अनुसार, 0.5 भाग 0.1915 क्षेत्र को अच्छादित करता है, अतः शेष क्षेत्र, 0.5–0.1915 = 0.3085, जो 25 लिटर के मूल्य से अधिक है, उस क्षेत्र से बाहर होगी। इसका अर्थ है कि 30.85% वाहनों ने उस विशेष दिवस को 25 या उससे अधिक लिटर पेट्रोल लिए थे। इस प्रकार, यदि N उस विशेष दिन पेट्रोल लिए गये वाहनों कुल संख्या को प्रदर्शित करता है, तब

$$0.3085 \times N = 50$$

या, $$N = \frac{50}{0.3085} = 162$$

अतः उस विशेष दिवस को **162 वाहनों** ने विहित पेट्रोल स्टेशन से पेट्रोल खरीदे थे।

उदाहरण 9: एक विद्युत बल्ब बनाने वाली कम्पनी के 2,000 बल्बों के जांच के परिणाम के आधार पर यह पाया गया कि बल्बों कि जीवन प्रत्याशा की औसत आयू 4,080 घंटे एवं मानक विचलन 120 घंटे हैं। इन सूचनाओं के आधार, बल्बों की संख्या का आंकलन कीजिए जोकि 3,920 घंटों से कम समय तक जलेगीं।

हलः

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{3920-4080}{120} = \frac{-160}{120} = -1.33$$

प्रसामान्य वक्र क्षेत्र सारणी के अनुसार –1.33σ भाग 0.4082 क्षेत्र को अच्छादित करता है, अतः शेष क्षेत्र, 0.5–0.4082= 0.0918 है जोकि, दिये गये मूल्य 3920 घंटे से बाहर होगें।

अतः बल्बों के एक 2000 दल में, $0.0918 \times 2{,}000 = 183.6$, अर्थात् **184 बल्बों** के ऐसी होने की सभावना है जो 3920 घंटे से कम जलेगीं।

एक प्रसामान्य वक्र में, कुल क्षेत्र 1.0, बहुलक के दोनों तरफ बराबर वितरित होते हैं अर्थात् 0.5 भाग बहुलक के बायें तरफ एवं 0.5 भाग बहुलक के दायें तरफ अवस्थित होते हैं। अतः, प्रसामान्य वक्र के अधीनश्त क्षेत्र के मूल्य को ज्ञात करते समय, Z के ऋणात्मक या धनात्मक चिन्ह् कोई अन्तर पैदा नहीं कर सकता है। Z के ऋणात्मक चिन्ह् यह इंगित करता है कि चर मूल्य प्रसामान्य अधीनष्त वक्र में बहुलक के बायें तरफ अवस्थित है।

उदाहरण 10: एक निश्चित श्रमिकों के समूह के औसत मजदूरी 500 रूपये एवं उनका मानक विचलन 100 रूपये है। ज्ञात करें कि कितने प्रतिशत श्रमिक हैं जो 375 रूपये से अधिक मजदूरी प्राप्त करते हैं?

हलः

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{375 - 500}{100} = \frac{-125}{100} = -1.25$$

प्रसामान्य वक्र क्षेत्र सारणी के अनुसार, -1.25σ भाग 0.3944 क्षेत्र को अच्छादित करता है। Z के ऋणात्मक चिन्ह् इंगित करता है कि इसके सभी मद बहुलक के बायें तरफ अवस्थित होगें। इसका अर्थ हुआ कि 0.3944 क्षेत्र, दिये गये मूल्य 375 एवं माध्य मूल्य 500 के बीच अच्छादित हैं। आपको यह भी पता होना चाहिए कि बहुलक या माध्य से दायीं ओर अन्तिम बिन्दु तक 0.5 क्षेत्र अच्छादित करता है। अतः, कुल अच्छादित क्षेत्र, $0.5 + 0.3944 = 0.8944$ होगें।

अतः, श्रमिकों की प्रतिशत संख्या जो 375 रूपये से अधिक मजदूरी प्राप्त करते हैं,

$= 0.8944 \times 100 = 89.44\%$ होगी।

उदाहरण 11: माना कि 800 लड़कियों के कमर की माप ली गई जोकि प्रसामान्य वितरित हैं के माध्य माप 66 सेन्टी मीटर एवं प्रमाप विचलन 5 सेन्टी मीटर है। लड़कियों की संख्या ज्ञात करें जिनके कमर की माप 65 सेन्टी मीटर से 70 सेन्टी मीटर है।

हलः

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

जब कमर की माप 65 सेमी. है, $Z = \frac{65-66}{5} = \frac{-1}{5} = -0.2$

जब कमर की माप 65 सेमी. है, $Z = \frac{70-66}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$

प्रसामान्य वक्र क्षेत्र के अनुसार, -0.2σ भाग 0.0793 क्षेत्र को अच्छादित करता है और 0.8σ भाग 0.2881 क्षेत्र को अच्छादित करता है। $-0.2\,\sigma$ भाग क्षेत्र माध्य के बायें तरफ और $0.8\,\sigma$ भाग क्षेत्र माध्य के दाहिनी ओर अवस्थित हैं। इसका अर्थ है कि -0.2σ एवं 0.8σ के बीच कुल अच्छादित क्षेत्र $= 0.0793 + 0.2881 = 0.3674$ होगी।

अतः 800 लड़कियों में से 65 से 70 सेमी तक कमर के माप वाले लड़कियों की संभावित संख्या

= 800 × 0.3674 = 293.92 = **294** है।

उदाहरण 12: जूत्ता स्टोरों के विभिन्न शाखाओं के औसत बिक्री 5,000 रूपये और मानक विचलन 1,500 रूपये है। दूकानों के अनुपात को ज्ञात करें जिनकी बिक्री 5,500 रूपये से 6,000 रूपये तक की है।

हलः

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

जब बिक्री 5,500 रूपये है, $Z = \frac{5,500 - 5,000}{1,500} = \frac{500}{1,500} = 0.333$

जब बिक्री 6,000 रूपये है, $Z = \frac{6,000 - 5,000}{1,500} = \frac{1,000}{1,500} = 0.666$

प्रसामान्य वक्र क्षेत्र सारणी के अनुसार, 0.333σ भाग 0.1293 क्षेत्र को अच्छादित करता है और $0.666\,\sigma$ भाग 0.2454 क्षेत्र को अच्छादित करता है। चूंकि, Z के दोनों मूल्य धनात्मक राशि है अतः, दोनों हीं प्रसामान्य वक्र के माध्य से दाहिनी ओर अवस्थित होगें। इसलिए, $0.333\,\sigma$ एव $0.666\,\sigma$ के बीच कुल अच्छादित क्षेत्र = 0.2454 – 0.1293 = 0.1161.

अतः, वांछित दूकानों के अनुपात जिसकी बिक्री 5,500 रूपये से 6,000 रूपये के बीच है = 0.1161 × 100 = **11.61%** होगा।

उदाहरण 13: 5000 व्यक्तियों के समूह के आय संबंध में जानकारी एकत्र की गई जोकि सामान्य रूप से वितरित है जिनका माध्य आय 9,000 रूपये एवं प्रमाप विचलन 750 रूपये है। 100 निर्धनों में सबसे अधिक आय किसकी थी?

हलः

100 निर्धनों की 5,000 व्यक्तियों में प्रतिशत

$$= \frac{1000}{5000} \times 100 = 2\% = 0.02$$

इसका अर्थ है कि 100 निर्धन व्यक्तियों के द्वारा 0.02 भाग क्षेत्र को अच्छादित करता है। इसलिए, शेष क्षेत्र = 0.5 – 0.02 = 0.48, माध्य के बायें तरफ है और प्रसामान्य वक्र क्षेत्र सारणी के अनुसार, 0.48 क्षेत्र के लिए Z का संगत मूल्य 2. 05 के बराबर है।

यदि X वांछित मूल्य है, तब

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

या, $-2.05 = \frac{x - 9000}{750}$

या, $-2.05 \times 750 = x - 9000$

या, $x = 9000 - 1537.5 = 7462.5$

इस प्रकार, 100 निर्धनों में सर्वाधिक आय **7,462.5 रूपये** है।

उदाहरण 14: यदि एक हीं समग्र में से 2 पदों को निकाला जाता है जिसका मानक प्रसामान्य विचलन क्रमशः +1.6 और –0.8 है तथा यदि उनका आकार क्रमशः 176 एवं 128 है, समग्र का माध्य मूल्य एवं मानक विचलन क्या है?

हलः

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

उपरोक्त सूत्र में दिये गये मूल्यों को रखने पर,

$$1.6 = \frac{176 - \mu}{\sigma} \qquad (1)$$

$$-0.8 = \frac{128 - \mu}{\sigma} \qquad (2)$$

या, $1.6\sigma = 176 - \mu$ (1)

$-0.8\sigma = 128 - \mu$ (2)

$+ \quad - \quad +$ [समीकरण (2) को (1) से घटाने पर]

$2.4\,\sigma = 48$

या, $\sigma = \frac{48}{2.4} = 20$

σ का मान समीकरण में (1) रखने पर

$1.6 \times 20 = 176 - \mu$

या, $\mu = 176 - 32 = 144$

अतः, समग्र का माध्य मूल्य 144 एवं प्रमाप विचलन मूल्य 20 है।

14.4 प्वॉयसन वितरण

आपने द्विपद बंटन के संकल्पना का अध्ययन किया है। द्विपद वितरण के अनुप्रयोग के लिए आवश्यक शर्त है कि किसी घटना के सफल और असफल हाने की प्रायकिता अग्रिम रूप से ज्ञात होनी चाहिए। लेकिन व्यवहारिक जीवन में, कभी–2 यह संभव होता है कि सफलता की संख्या (अर्थात्, एक घटना का घटित होना) को ज्ञात किया जाय लेकिन यह संभव नहीं होता है कि असफलता की संख्या (अर्थात् घटना का घटित न होना) को ज्ञात किया जा सके। उदाहरण के लिए, यह संभव है कि कार्यलीय अवधि या घंटे में प्राप्त फोन कॉल को गणना किया जा सके पर यह संभव नहीं कि इस अवधि या घंटे में कितने कॉल प्राप्त नहीं किये गये। अतः, यदि कुल संभावित परिणामों की संख्या ज्ञात नहीं किया जा सके या निर्धारित नहीं किया जा सके तब वहां द्विपद बंटन का प्रयोग नहीं किया जा सकता है। इन स्थितियों में, संभावित आवृतियों के गणना करने के लिए प्वॉयसन वितरण का प्रयोग किया जाता है।

प्वॉयसन वितरण के अवधारण का व्युत्पन्न एक फ्रांसिस गणितज्ञ सिमेओन डेनिस प्वॉयसन के द्वारा 1837 ई. में किया गया था। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग खण्डित यादृच्छिक चर के स्थिति में प्रयोग किया जाता है जहां सफल एवं असफल की प्रायकिता को निर्धारित नहीं किया जा सकता है। प्वॉयसन वितरण के अनप्रयोग के लिए, दिये गये अन्तराल में सफल घटनाओं की औसत संख्या की हीं आवश्यकता होती है। प्वॉयसन वितरण, एक अन्तराल के पर घटनाओं के घटित होने के खण्डित संख्याओं के उपर ध्यान केन्द्रित

करता है। प्वॉयसन सूत्र भी असंभावित घटनाओं के नियम पर आधारित होता है।

14.4.1 मान्यताएं

कुछ महत्वपूर्ण मान्यताएं हैं जिन्हें प्वॉयसन वितरण के अनुप्रयोग के लिए पालन करना आवश्यक है, जो निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं:

- घटनाओं का घटित होना स्वतंत्र है।
- एक एकल घटना के घटित होने की प्रायकिता दिये गये अन्तराल, उसके (अन्तराल के) लम्बाई के समानुपतिक होते हैं।
- एक से अधिक घटनाओं को बहुत हीं सूक्षम या छोटा अन्तराल में घटित होने की प्रायकिता न के बराबर होता है।
- एक आकार के सभी अन्तरालों में घटित होने वाले संभावित घटना को अवश्य हीं स्थिर व अपरिवर्तित रखते हैं।
- प्रत्येक अन्तराल में, घटित होने वाले घटनाओं को शून्य से असीमित तक परास या विस्तार में रखा जा सकता है।

14.4.2 सूत्र एवं विशेषताएं

प्वॉयसन वितरण में, संभावित आवृतियों को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं:

$$p^n = e^{-a} \times \frac{a^n}{n!}$$

जहां, p^n = संभावित प्रायकिता

e = 2.7183 (प्राकृत लघुगणक का आधार)

a = माध्य,

n = संख्या जिसके लिए संभावित आवृति की गणना करनी है।

प्वॉयसन वितरण के लिए, एक दीर्घ कालीन औसत का निर्धारण एक लम्बे समय अवधि में किया जा सकता है। गणित में, इस दीर्घ कलीन औसत को सामान्यतया ग्रीक अक्षर लेम्बडा (λ) से निरूपित किया जाता है और प्वॉयसन सूत्र को निम्न रूिप से चित्रित किया जाता है:

$$P(x) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}$$

जहां, $P(x)$ = एक अन्तराल में x घटित होने की प्रायकिता है।

λ= एक अन्तराल में संभावित मूल्य या माध्य घटित होने की संख्या

e = 2.7183 (प्राकृत लघुगणक का आधार)

प्वॉयसन वितरण की महत्वपूर्ण विशेषता या अचर मूल्य है कि इसका माध्य एवं प्रसरण एक हीं होते हैं। प्वॉयसन वितरण के माध्य या संभावित मूल्य को λ से निरूपित करते हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि एक प्वॉयसन वितरण, एक लम्बे समय अवधि में, एक दीर्घ कालीन औसत का निर्धारण किया जा सकता है। प्वॉवसन वितरण का प्रसरण भी λ होता है और मानक विचलन $\sqrt{\lambda}$ होता है।

14.4.3 उपयोगिता

प्वॉयसन वितरण एक वृहत रूप से प्रयोग किया जाने वाला वितरण है। इसका प्रयोग मुख्य रूप से उन विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है जहां दिये गये समय अन्तराल या निश्चित क्षेत्र के अन्तर्गत घटित होने वाले घटनाओं के संभावित संख्या की गणना करनी होती है। प्रति घंटा सर्वोच्च बाजार में आने वाले ग्राहकों की संख्या या एक व्यस्त सड़क पर प्रतिदिन होने वाले दूर्घटनाओं की संख्या या प्रति पृष्ट टाईपिंग त्रुटियों की संख्या या प्रतिघंटा कार्यलय में दूरभाष प्राप्ति की संख्या आदि कुछ प्वॉयसन प्रयोगों के अच्छं उदाहरण हैं। अतः, प्वॉयसन वितरण की स्थिति में, दिया गया समय अन्तराल कुछ भी हो सकता है जैसे एक मिनट, एक दिन, एक सप्ताह, एक माह या यहां तक एक साल या वर्ष भी हो सकता है। इसी प्रकार, विशेष स्थान या क्षेत्र में भी कुछ भी हो सकता है जैसे एक क्षेत्र या एक संगठन या एक पदार्थ का भाग। अधिकतर कालवाची वितरण एवं स्थानिक वितरण हीं प्वॉयसन वितरण का पालन या अनुकरण करते हैं।

14.4.4 प्वॉयसन बंटन, द्विपद बंटन का एक सन्निकटन के रूप में

किसी निश्चित परिस्थिति के अन्तर्गत, प्वॉयसन वितरण को द्विपद वितरण के तर्कसंगत या उचित सन्निकटन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। n के बड़े एवं p के छोटे मूल्य के साथ द्विपद समस्याओं में अर्थात् जब परीक्षणों की संख्या बड़ी हो लेकिन सफलता की द्विपद वितरण छोटा हो, तब द्विपद बंटन का सन्निकटन रूप का प्वॉयसन वितरण में किया जा सकता है। आप अवश्य हीं सोच सकते हैं कि n के बड़े एवं p के छोटे मूल्य क्या हो सकते हैं जिसका प्रयोग हम द्विपद वितरण के सन्निकटन के रूप में प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करें? सामान्यतया, n को 20 से बड़ा या बराबर एवं p को 0.05 से कम या बराबर कि स्थिति को प्वॉयसन वितरण के लिए द्विपद समस्याओं का सन्निकटन के रूप में उचित माना जाता है। अतः, हम प्वॉयसन वितरण के माध्य (λ) को द्विपद वितरण के माध्य (np) से प्रतिस्थापित कर सकते हैं। उस स्थिति में, प्वॉयसन वितरण का सूत्र निम्नलिखत रूप ले सकेगें:

$$P(x) = \frac{(np)^x \times e^{-(np)}}{x!}$$

उदाहरण 15: निम्नलिखित सारणी में 100 दिन के अवधि में दिनों की संख्या दी गई है जिसके दौरान ऑटोमोबाईल के द्वारा शहर में हुए दूर्घटना को दिखलाया गया है:

दूर्घटना की संख्या:	0	1	2	3	4
दिनों की संख्या :	40	35	15	6	4

आंकड़ों को प्वॉयसन वितरण में फिट कीजिए।

(दिया गया है: $e^{-0.99} = 0.3716$)

हलः सबसे पहले हमें दिये गये आवृति वितरण के लिए माध्य मूल्य को ज्ञात करना है:

दुर्घटनाओं की संख्या (m)	दिनों की संख्या(f)	गुणनफल (m × f)

0	40	0
1	35	35
2	15	30
3	6	18
4	4	16
कुल	100	99

a = $\frac{\sum mf}{\sum f} = \frac{99}{100} = 0.99$

प्वायसन सूत्र के अनुसार,

P(x) = $e^{-a} \times \frac{a^x}{x!}$

$P_{(0)} = 0.3716 \times \frac{0.99^0}{0!} = 0.3716 \times \frac{1}{1} = 0.3716$

$P_{(1)} = 0.3716 \times \frac{0.99^1}{1!} = 0.3716 \times \frac{0.99}{1} = 0.3678$

$P_{(2)} = 0.3716 \times \frac{0.99^2}{2!} = 0.3716 \times \frac{0.99 \times 0.99}{2 \times 1} = 0.1821$

$P_{(3)} = 0.3716 \times \frac{0.99^3}{3!} = 0.3716 \times \frac{0.99 \times 0.99 \times 0.99}{3 \times 2 \times 1} = 0.06$

$P_{(4)} = 0.3716 \times \frac{0.99^4}{4!} = 0.3716 \times \frac{0.99 \times 0.99 \times 0.99 \times 0.99}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 0.0148$

100 दिनों के अवधि में, शहर में ऑटोमोबाईल से हुए दूर्घटना के दिनों की संख्या को ज्ञात करने के लिए उपरोक्त प्वॉयसन मूल्य को 100 से गुणा करना होगा।

दूर्घटनाओं की संख्या	संभावित आवृतियां (दिनों की संख्या)
0	0.3716 × 100 = 37.16 या 37
1	0.3678 × 100 = 36.78 या 37
2	0.1821 × 100 = 18.21 या 18
3	0.06 × 100 = 6.0 या 6
4	0.0148 × 100 = 1.48 या 2

उदाहरण 16: माना कि निरीक्षण में यह पाया गया कि एक उत्पाद का निर्माता प्रत्येक इकाई में 2 त्रुटियुक्त उत्पाद तैयार करते हैं। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करके, त्रुटिरहित उत्पाद की प्रायकिता को ज्ञात करें।

(दिया है: $e^{-2} = 0.1353$)

हल:

माना कि X = प्रत्येक इकाई में त्रुटियुक्त उत्पाद की संख्या है
अतः, हमें $P_{(0)}$ के मूल्य को ज्ञात करना है।

$P(x) = e^{-a} \times \frac{a^x}{x!}$

यहां, a =2

$P_{(0)} = 0.1353 \times \frac{2^0}{0!} = 0.1353 \times \frac{1}{1} = 0.1353$

अतः, त्रुटिरहित उत्पाद ज्ञात करने की प्रायकिता 0.1353 है।

उदाहरण 18: यदि एक कम्पनी के द्वारा बनाएं गये 3% विद्युतीय बल्ब दोषयुक्त होता है, ज्ञात करें कि 100 बल्बों के निदर्शन में से बिल्कुल या ठीक 5 बल्ब के दोषयुक्त होने की क्या प्रायकिता है?

हलः

दोषयुक्त बल्ब की प्रायकिता = $p = \frac{3}{100} = 0.03$;

n=100 (दिया है)

वितरण का माध्य मूल्य = np = 100×0.03= 3

यहां, परीक्षणों की संख्या बहुत अधिक है और p का मूल्य बहुत छोटा है, यह द्विपद बंटन का प्वॉयसन सन्निकटन की स्थिति है। इसलिए वांछित सूत्र है निम्नलिखित हैः

$P(x) = \frac{(np)^x \times e^{-(np)}}{x!}$

हमें ज्ञात करना है कि केवल 5 दोषयुक्त बल्ब होने की प्रायकिता अर्थात् $P_{(5)}$ का मूल्य ज्ञात करना हैः

$P_{(5)} = \frac{3^5 \times 2.7183^{-3}}{5!} = \frac{243 \times .04979}{120} = 0.10082$

अतः, 100 बल्बों के निदर्शन में से केवल 5 बल्ब के दोषयुक्त होने की प्रायकिता = **0.10082** है।

उदाहरण 18: अभिलेख प्रदर्शित करता है कि किसी निश्चित पुल पर कार के चलाने से टायर का चपटा होने की प्रायकिता 0.00002 है। प्वॉयसन वितरण का प्रयोग करते हुए, प्रायकिता निर्धारित करें कि 20000 कारों को उस पुल से चलाने पर केवल एक से अधिक कार की टायर के चपटा न हो।
(दिया है: $e^{-0.4} = 0.6703$)

हलः

यह दिया है किः p = 0.00002, n=20000

$\therefore \lambda = np = 20000 \times 0.00002 = 0.4$

$P(x) = \frac{(np)^x \times e^{-(np)}}{x!}$

हमें एक से अधिक कार के टायर के चपटा न होने की प्रायकिता ज्ञात करना है। इसका अर्थ है कि हमें $P_{(0)}$ एवं $P_{(1)}$. मूल्य को ज्ञात करना है।

$P_{(0)} = \frac{0.4^0 \times 2.7183^{-0.4}}{0!} = \frac{1 \times 0.6703}{1} = 0.6703$

$$P_{(1)} = \frac{0.4^1 \times 2.7183^{-0.4}}{1!} = \frac{0.4 \times 0.6703}{1} = 0.26812$$

वांछित प्रायकिता = 0.6703 + 0.26812 = **0.93842 ।**

उदाहरण 19: 100 दिन के एक अवधि में एक शहर में 20 दुर्घटनाएं होती है। मान लिजिए कि दुर्घटनाओं की संख्या प्वॅायसन वितरण का पालन करती है, प्रायकिता ज्ञात करें कि एक दिन में 3 या उससे अधिक दुर्घटनाएं घटित होगी।

(दिया हैः $e^{-0.2} = 0.8187$)

हलः

प्रति दिन औसत दूर्घटनाओं की संख्या = $\frac{20}{100} = 0.2$

$P_{(0)} = 2.1783^{-0.2} \times \frac{0.2^0}{0!} = 0.8187$

$P_{(1)} = 2.1783^{-0.2} \times \frac{0.2^1}{1!} = 0.8187 \times 0.2 = 0.16374$

$P_{(2)} = 2.1783^{-0.2} \times \frac{0.2^2}{2!} = \frac{0.16374 \times 0.2}{2} = 0.016374$

अतः दो या दो से कम दुर्घटना होने कि प्रायकिता = 0.8187 + 0.16374 + 0.016374 = 0.998814

इसलिए, प्रतिदिन 3 या 3 से अधिक दुर्घटनाएं होने की प्रायकिता

= 1– 0.998814 = 0.001196 या **0.0012**

उदाहरण 20: एक कार किराया देने वाली फर्म के पास दो कार है जिनकों यह दिन प्रति दिन किराये पर देती है। प्रत्येक दिन कार के मांग की संख्या माध्य 1.5 के साथ प्वॅायसन वितरण के रूप में वितरित है। दिनों के अनुपात की गणना करें जिसमें (क) दोनों में से कोई भी कार का प्रयोग नहीं किया गया हो और, (ख) कुछ मांग को अस्वीकार की गई।

हलः

(क) हमें दिनों के अनुपात की गणना करनी है जिसमें कोई भी कार का प्रयोग नहीं होता है; इसका अर्थ है कि यदि कार X के मांग को प्रदर्शित करते हैं तब हमें $P_{(0)}$ के मूल्य की गणना करनी है।

$$P_{(0)} = 2.1783^{-1.5} \times \frac{1.5^0}{0!} = 0.2231 \times 1 = \mathbf{0.2231}$$

गया है; इसका अर्थ है कि कार के मांग को अस्वीकार तभी किया जायेगा जब 2 से अधिक कार की मांग हो क्योंकि फर्म के पास मात्र दो कार हैं।

$$P_{(0)} = 2.1783^{-1.5} \times \frac{1.5^0}{0!} = 0.2231$$

$$P_{(1)} = 2.1783^{-1.5} \times \frac{1.5^1}{1!} = 0.2231 \times 1.5 = 0.3347$$

$$P_{(2)} = 2.1783^{-1.5} \times \frac{1.5^2}{2!} = \frac{0.3347 \times 1.5}{2} = 0.2510$$

∴ वांछित प्रायकिता

= 1 – (0 मांग की प्रायकिता + 1 कार मांग की प्रायकिता + 2 कार मांग की प्रायकिता)

= 1 – (0.2231 + 0.3347 + 0.2510)

= 1 – 0.8088 = **0.1912**

उदाहरण 21: यदि दोषयुक्त ब्लेड की प्रायकिता 0.5 हैं, 1000 ब्लेड के एक दल मे से माध्य एवं प्रमाप विचलन को ज्ञात करें।

हलः

माध्य = np = 1000 × 0.5 = 500

मानक विचलन = $\sqrt{np}$ = $\sqrt{500}$ = 22.36

उदाहरण 22: निम्नलिखित पर टिप्पणी करें:

एक प्वॉयसन वितरण के लिए, जिसका माध्य = 36 और प्रसरण = 6

हलः

दिये गय कथन गलत हैं क्योंकि प्वॉयसन वितरण के लिए माध्य एवं प्रसरण दोनों बराबर होते हैं लेकिन दिये गये समस्या के स्थिति में, वे दोनों अलग है।

उदाहरण 23: $e^{-0.5}$ के मूल्य ज्ञात करें।

हलः

प्वॉयसन वितरण से संबंधित सभी प्रश्नों में जिनका हमने अभी तक हल किया है, या तो $e^{-0.5}$ के मूल्य दिये होते थे या फिर $e^{-0.5}$ का मूल्य सारणी से ज्ञात करते हैं। फिर भी, यदि $e^{-0.5}$ का मूल्य या मान दिया हो न तो सारणी हीं दिया हो इसके बावजूद $e^{-0.5}$ का मूल्य लघुगणक सारणी एवं पारस्परिक सारणी से ज्ञात कर सकते हैं। वर्तमान में दिये गये प्रश्न का हल भी इन्हीं मान्यताओं के आधारित है। दूसरी ध्यान देनी वाली बात है कि e प्राकृत लघुगणक का आधार हैं जो 2.7183 के बराबर है।

: $e^{-0.5}$ का मूल्य = $2.7183^{-0.5}$

= Rec. [A.L.(0.5 × log 2.7183)]

= Rec. [A.L. (0.5× 0.4343)]

= Rec. [A.L. 0.21715]

= Rec. 1.648

= 0.6069

14.5 सारांश

इस इकाई में हमनें सैद्धान्तिक आवृति वितरण का अध्ययन किया। सैद्धान्ति आवृति वितरण एक प्रायकिता वितरण जो वर्णन करता है कि कैसे प्रत्याशित परिणाम परिवर्तित हाते हैं। हमने तीन प्रकार के प्रायकिता वितरण के बारे में अध्ययन किया है– द्विपद, प्रसामान्य एवं प्वॉयसन; इनमें से द्विपद एवं प्वॉयसन खण्डित प्रायकिता वितरण है जबकि प्रसामान्य वितरण एक सत्त प्रायकिता वितरण है। द्विपद वितरण का अनुप्रयोग तब किया जाता है जब परीक्षणों की संख्या स्थिर व निश्चित हो और छोटा हो तथा प्रत्येक परीक्षण में केवल दो पारस्परिक अपवर्जी संभावित परिणाम हो। इन परिणामों को 'सफल'

(p) और 'असफल' (q) कहते हैं। द्विपद वितरण के माध्य एवं प्रसरण क्रमश *np* एवं *npq* हैं।

प्रसामान्य वितरण एक सत्त प्रायकिता वितरण है जिसकी खोज डि–मोर्वे के द्वारा की गई थी। इसे सममितीय वक्र के नाम से भी जानत हैं। प्रसामान्य वतिरण की स्थिति में माध्य, माध्यिका एवं बहुलक तीनों के मान एक हीं होते हैं। इस वितरण में , $a \pm \sigma$, $a \pm 2\sigma$, $a \pm 3\sigma$ एवं $a \pm 1.96\sigma$, 68.27%, 95.45%, 99.73% एवं 95% मदों को सम्मिलित करते हैं। मानक प्रसामान्य विचलन के मूल्य की गणना करने के लिए सूत्र $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ का प्रयोग करते हैं। प्वॉयसन वितरण का अनुप्रयोग खण्डित यादृच्छिक चर के स्थिति में करते हैं जहां सफलता एवं असफलता दोनों को हीं निर्धारित नहीं किया जा सकता हैं। प्वॉयसन वितरण के अनप्रयोग के लिए, केवल दिये गये अन्तराल में औसत सफलता की संख्या की आवश्यकता होती है।

प्वॉयसन वितरण में, सूत्र $P(x) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}$ का प्रयोग करके संभावित आवृतियों की गणना की जाती है। इस तिरण में, माध्य एवं प्रसरण दो एक हीं होते हैं। इसका प्रयोग मुख्य रूप से विभिन्न क्षेत्रों में दिये गय समय अन्तराल या किसी विशेष क्षेत्र में घटित होने वाले घटनाओं के परिणामों की गणना के लिए किया जाता है।

14.6 शब्दावली

(i) **परीक्षणः** एक परीक्षण को निष्पादन।

(ii) **सफलताः** घटना का घटित होना।

(iii) **असफलताः** घटना के घटित न होना।

14.7 बोध प्रश्न

(A) खाली स्थानों को भरें

(i) द्विपद वितरण का माध्य, इसके प्रसरण से ––––––––– होता है।

(ii) द्विपद वितरण को –––––––––– भी कहते हैं।

(iii) प्रसामान्य वितरण की स्थिति में, विषमता का मान –––––––होता है।

(iv) प्रसामान्य वितरण में, a ± 1.96 भाग –––––– प्रतिशत पद को सम्मिलित करता है।

(v) प्वॉयसन वितरण का माध्य एवं ––––––––– एक हीं होते हैं।

(vi) सामान्यतया, प्वॉयसन वितरण के माध्य को –––––– से प्रदर्शित किया जाता है।

(B) सत्य या असत्य बताएं।

(i) द्विपद वितरण एक सत्त प्रायकिता वितरण है।

(ii) प्वॉयसन वितरण एक असत्त या खण्डित वितरण है।

(iii) यदि द्विपद बंटन को माध्य 4 इकाई है तब इसका प्रसरण 16 होगें।

(iv) जब $P > 0.5$ तब द्विपद बंटन धनात्मक विषमता को प्रदर्शित करते हैं।

(v) प्रसामान्य वितरण में माध्य विचलन हीं मानक या प्रमाप विचलन होता है।

(vi) प्रसामान्य वितरण की सर्वप्रथम खोज जेम्स बर्नौली ने 1733 ई. में की थी।

(vii) प्रसामान्य वक्र असममितीय हो सकती है।

(viii) यदि प्वॉयसन वितरण का माध्य 3 हो तब इसका प्रसरण 9 होते हैं या होगें।

14.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(A)

(i) से अधिक, (ii) बर्नौली वितरण, (iii) शून्य, (iv) 95, (v) प्रसरण, (vi) λ

(B)

(i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य, (vi) असत्य, (vi) असत्य, (vii) असत्य, (viii) असत्य,

14.9 स्वपरख प्रश्न

1. प्रसामान्य वितरण होने के लिए कौन से शर्तों की आवश्यकता होती है? चित्र के सहायता से, प्रसामान्य वक्र की विशेषता के बिन्दुओं को बताएं।
2. द्विपद, प्वॉयसन और प्रसामान्य वितरण के विविध लक्षणों को बताएं। कब एक द्विपद वितरण प्वॉयसन वितरण में परिवर्तित हो जाता है?
3. प्वॉयसन वितरण को परिभाषित करें और उन स्थितियों को भी बताएं जहां इस वितरण का प्रयोग किया जाता है। ऐसे छः स्थितियों का भी वर्णन करें जहां प्वॉयसन वितरण का अनुप्रयोग किया जा सकता है।
4. पांच सिक्कों को 96 बार उछाला जाता हैः (क) एक सैद्धान्ति सारणी का निर्माण करें जहा चित की संख्या क्रमश 0, 1, 2, 3, 4 एवं 5 हैं, (ख) कम से कम 3 चित आने की संभावित संख्या ज्ञात करें। [(a) 3, 15, 30, 30, 15, 3; (b) 48]
5. माना कि एक शहर में 50 प्रतिशत लोग धुम्रपान करते हैं और मान लिजिए कि 400 अनुसंधानकर्ता वहां कार्य करते हैं तथा प्रत्येक 10 व्यक्तियों के बारे में पता लगाता है यदि वे धुम्रपान करते हैं, आप उम्मीद करते हैं कि कितने अनुसंधानकर्ता होगें जो 3 से कम या 3 व्यक्तियों के धुम्रपान को दर्ज करते हैं। [69]
6. एक बिक्रीकर्ता जितने लोगों से संर्पक करता है उसका औसत 40 प्रतिशत ग्राहक को सामान बेचता है। यदि 4 व्यक्यिों से आज संर्पक करता है, तब ठीक 2 व्यक्तियों को वस्तुएं बेचने कि क्या प्रायकिता है? [0.3456]
7. एक गांव में 100 परिवार रहते हैं। प्रत्येक परिवार में पांच बच्चे हैं। आप कितना उम्मीद करते हैं कि संभावितः (a) तीन लड़कियां हो, (b)

कम से कम एक लड़का हो, (c) सभी लड़के हो, (d) कोई लड़का न हो। माना कि लड़की जन्म होने कि प्रायकिता =1/2 है।
[(a) 31,(b) 97, (c) 3 (d) 3]

8. 15,000 छात्र एक परीक्षा में सम्मिलित होते हैं। औसत प्राप्तांक 49 और अंक वितरण का मानक विचलन 6 है। मान लिजिए कि प्राप्तांक प्रसामान्य रूप से वितरित हैं तब कितने विद्यार्थी ठीक 55 अंक प्राप्त करते हैं? [2381]

9. एक 1000 मदों के न्यायदर्श या निदर्शन में, औसत वनज एवं मानक विचलन क्रमशः 46 किलोग्राम एवं 15 किलाग्राम हैं। माना कि वजन प्रसामान्य रूप से वितरित है, तब ज्ञात करें कि वजन 40 किलो ग्राम एवं 60 किलो ग्राम के बीच कितने मद सम्मिलित हैं? [471]

10. एक वितरण का माध्य 60 और मानक विचलन 10 है। माना कि प्रसामान्य रूप से वितरित है, तब कितना प्रतिशत मद है जो (i) 60 एवं 72 के बीच आते हैं, (ii) 50 एवं 60 के बीच, (iii) 72 से अधिक और (iv) 70 से 80 के बीच? [(i) 38.49%, (ii) 34.13%, (iii) 11.51%, (iv) 13.59%]

11. 10,000 व्यक्तियों के एक समूह के आय माध्य 750 रूपये एवं मानक विचलन 50 रूपये के साथ प्रसामान्य रूप से वितरित है। 250 धनी व्यक्तियों में से कितने व्यक्ति होगें जिनकी आय सबसे कम होगी? [848]

12. एक बड़े नौभार में 2 प्रतिशत किताबें दोषयुक्त तरीके से लादी गई हैं। प्वॉयसन वितरण का द्विपद बंटन के सन्निकटन के रूप में प्रयोग करते हुए 400 किताबों में से यादृच्छिक रूप से चयन करने पर नौभार से केवल पांच किताबें हीं दोषयुक्त होगें कि प्रायकिता ज्ञात करें। (संकेतः e^{-8}= 0.00034)
[0.093]

13. निम्नलिखित आंकड़ों को प्वॉयसन वितरण में फिट करें और सैद्धान्तिक आवृतियों की गणना करें।

X:	0	1	2	3	4	5	6
Y:	143	90	42	12	9	3	1

(संकेतः $e^{-0.89}$ =0.4107) [123,110,49,14,3,1,0]

14. एक बैंक के काउन्टर में प्रति मिनट आने वाले ग्राहकों कि औसत संख्या 2 है। प्रायकिता ज्ञात करें कि दिये गये मिनट के दौरानः (i) कोई ग्राहक नहीं होते हैं, (ii) तीन या अधिक ग्राहक उपस्थित होते हैं।
(संकेतः e^{-2} = 0.1353) [0.1353, 0.3235]

15. एक 525 पृष्ठों वाले किताब में 42 टाईपिंग गलतियां हैं। यदि इस प्रकार की त्रुटियां पूरे किताब में यादृच्छिक रूप से वितरित हैं, 10 पृष्ठों के यादृच्छिक चयन कि प्रायकिता क्या होगीः (i) कोई त्रुटि नहीं, (ii) 3 गलतियां, (iii) अधिकतम दो त्रुटियां, और (iv) कम से कम 3 गलतियां?

(संकेतः $e^{-0.8} = 0.45$) [(i)0.45, (ii) 0.038, (iii) 0.954, (iv) 0.046]

16. द्विपद वितरण की क्या मान्यताएं हैं?
17. प्रसामान्य वितरण क्या है?
18. प्वॉयसन वितरण के मुख्य विशेषताएं बताएं।

14.10 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Roy Ramendu, *'Principles of Statistics'* Prayag Pustak Bhawan, Allahabad.
2. Thukral J.K., *'Business Statistics'* Taxman Publications, New Delhi.
3. Elhance D. N., *'Fundamentals of Statistics'*, Allahabad.

*****

इकाई 15 प्रमुख सांख्यिकी

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- राष्ट्रीय आय का वर्णन कर सकें।
- राष्ट्रीय आय की विभिन्न अवधारणाओं की व्याख्या कर सकें।
- राष्ट्रीय आय के सामान्य लक्षणों का वर्णन कर सकें।
- राष्ट्रीय आय के मापन की व्याख्या कर सकें।

15.1 प्रस्तावना

राष्ट्रीय आय को किसी राष्ट्र द्वारा उत्पादित समग्र शुद्ध आर्थिक वस्तुओं एवं सेवाओं के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। राष्ट्रीय आय की माप तीन अलग–अलग विधियों द्वारा किया जा सकता है। 1. आय प्रवाह के रूप में; 2. वस्तुओं एवं सेवाओं के प्रवाह के रूप में और 3. व्यय के प्रवाह के रूप में। राष्ट्रीय आय के मापन की ये तीन अलग–अलग विधियां हमें राष्ट्रीय आय के सम्बन्ध में तीन भिन्न माप प्रस्तुत करते हैं, जैसे; समग्र राष्ट्रीय आय, समग्र राष्ट्रीय उत्पाद और समग्र राष्ट्रीय व्यय। किसी अर्थव्यवस्था के सम्बन्ध में

तीन मापदण्डों से समान मूल्य हीं प्राप्त होगें। उत्पाद गणना विधि या मूल्य वर्धन विधि से राष्ट्रीय आय की गणना करने में अर्थव्यवस्था के आय उत्पादक क्षेत्रों को कई भागों में बांट दिया जाता है। उत्पाद गणना विधि के माध्यम से राष्ट्रीय आय के सही आंकलन के लिए 'शुद्ध मूल्य वर्धन' की अवधारणा सर्वाधिक उपयोगी है। इस अवधारणा से उत्पादों की दोहरी गणना के दोष से बचा जा सकता है। राष्ट्रीय आय के आंकलन के अंतिम व्यय तकनीकि को 'उपभोग' और निवेश' प्रणाली के रूप में भी जाना जाता है। इस तकनीक के लिए हमें अर्थव्यवस्था के अंतिम उपभोग और निवेश से संबंन्धित आंकड़ों को एकत्रित करना होता है। इस अध्याय में आप राष्ट्रीय आय की विभिन्न अवधारणाओं का अध्ययन करेंगें। कीन्ज के राष्ट्रीय आय से सम्बन्धित विचारों के साथ आप राष्ट्रीय आय के आधूनिक दृष्टिकोण तथा उसके मापन के विभिन्न विधियों का भी अध्ययन करेंगें।

15.2 राष्ट्रीय आय का अर्थ एवं परम्परागत परिभाषाएं

राष्ट्रीय आय से तात्पग्र किसी विशेष समयावधि में राष्ट्र की समग्र आय से है। राष्ट्रीय आय सम्बन्धी आंकड़े किसी देश के आर्थिक क्रियाकलापों का समग्र प्रदर्शन करते हैं। राष्ट्रीय आय कुल प्राप्तियों, कुल खर्च तथा कुल उत्पादन के मूल्य का प्रदर्शन है। चूंकि एक व्यक्ति की आय की दूसरे व्यक्ति का खर्च है और प्रत्येक वस्तु अपनी बाजार कीमत पर खरीदी और बेंची जाती है। अतः राष्ट्रीय आय लेखांन तीन आधारभूत समिकाओं पर आधारित है; (क) समग्र प्राप्तियां बराबर होती हैं, (ख) समग्र खर्च बराबर होते हैं, (ग) वस्तुओं एवं सेवाओं के विनिमय मूल्य के। इस प्रकार समष्टि स्तर पर हम तीन तीन समताएं प्राप्त करते हैंः

राष्ट्रीय आय = राष्ट्रीय खर्च = राष्ट्रीय उत्पाद

परम्परागत परिभाषाएं

राष्ट्रीय आय की परम्परागत परिभाषाएं प्रो. मार्शल, प्रो. पीगू और प्रो. फिशर द्वारा दी गई है।

1. **मार्शल की परिभा**षाः मार्शल के अनुसार, ''किसी देश का श्रम और पूंजी उसके प्राकृतिक संसाधनों पर कार्य करते हुए प्रत्येक वर्ष भौतिक तथा अभौतिक वस्तुओं जिसमें सेवाएं भी शामिल है , की निश्चित निवल मात्रा का उत्पादन करते हैं...... तथा इसमें विदेशों से प्राप्त हाने वाली निवल आय भी जोड़ देनी चाहिए। यहीं उस देश की प्रतिवर्ष वास्तविक राष्ट्रीय आय या राष्ट्रीय लाभांश है।''

   विशेषताएंः मार्शल की परिभाषा की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित हैः

   (i) राष्ट्रीय आय में सभी प्रकार के वस्तुओं और सेवाएं शामिल हैं चाहे वें बाजार में आती हों अथवा नहीं।

   (ii) निवल या शुद्ध आय से तात्पर्य है कि मशीनों की घिसावट और टूट–फूट पर व्यय आदि को घटा देना चाहिए।

   (iii) विदेशों से प्राप्त होने वाली शुद्ध आय को राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाना चाहिए।

कमियां: मार्शल की परिभाषा की प्रमुख कमियां निम्नलिखित हैः

(i) विभिन्न उत्पादित वस्तुओं तथा सेवाओं की सही गणना करना कठिन है।

(ii) इस प्रविधि में दोहरी गणना की संभावनाएं हैं। इसका अर्थ है कि कोई विशेष वस्तु जैसे, कच्चे माल, राष्ट्रीय आय में दो बार अथवा दो से अधिक बार शामिल किया जा सकता है।

(iii) राष्ट्रीय आय का सही आंकलन इसलिए भी कठिन है क्योंकि उत्पादित वस्तुओं का एक भाग बाजार में बिकने के लिए नहीं आता है। उत्पादक इसे या तो स्व–उपभोग के लिए रख लेता हैं अथवा किसी दूसरी वस्तु से बदल लेता है।

2. **पीगू की परि**भाषाः पीगू की परिभाषा राष्ट्रीय आय में उस आय को शामिल करते हैं जिसे मुद्रा में मापा जा सकता हैं। पीगू के अनुसार, ''राष्ट्रीय आय किसी देश या समुदाय की बाह्य आय का वह भाग है जिसमें विदेशों से प्राप्त होने वाली आय भी शामिल है तथा जिसे मुद्रा के रूप में मापा जा सकता है।''

विषेषताएंः पीगू की परिभाषा की प्रमुख विशेषताएं निम्न हैं:

(i) राष्ट्रीय आय में केवल उन्हीं वस्तुओं को शामिल किया जाना चाहिए जिनका मुद्रा से विनिमय किया जाता है।

(ii) विदेशी निवेश के रूप में प्राप्त आय को भी राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाना चाहिए।

(iii) पीगू की परिभाषा मार्शल की परिभाषा की तुलना मे अधिक स्पष्ट, सुविधाजनक और व्यावहारिक है।

कमियां: पीगू की परिभाषा में निम्नलिखित कमियां हैः

(i) यह ऐसी वस्तुओं तथा सेवाओं के बीच कृत्रिम भेद करती है जो मुद्रा के माध्यम से होकर गुजरती है तथा जो मुद्रा के माध्यम से नहीं गुजरती है।

(ii) यह परिभाषा अल्पविकसित तथा विकासशाील देशों में लागू योग्य नहीं हैं जहां वस्तु विनिमय प्रणाली चलन में हैं।

(iii) पीगू की परिभाषा राष्ट्रीय आय में उन सेवाओं को शामिल नहीं करती है जो एक व्यक्ति स्वयं के लिए, अपने परिवार के सदस्य के लिए अथवा अपने किसी मित्र के लिए बिना किसी मूल्य के करते हैं।

(iv) पीगू स्वयं अपनी परिभाषा मे एक विरोधाभास का अनुभव करते हैं जैसे, यदि कोई व्यक्ति अपनरी नौकरानी से शादी करता है तो राष्ट्रीय कम हो जाती हैं क्योंकि अब उसे उन सेवाओं के लिए कीमत नहीं चुकाना पड़ेगी, यद्यपि वहीं सेवाएं अब भी प्रदान की जा रही होती है।

3. **फिशर की परिभाषा**ः प्रो. फिशर राष्ट्रीय आय के आधार के रूप में उत्पादन के स्थान पर उपभोग का चुनाव करते हैं। फिशर के अनुसार

''राष्ट्रीय लाभांश अथवा आय में वहीं सेवायें सम्मिलित की जाती हैं जो कि उपभोक्ताओं को अपने भौतिक अथवा मानवीय वातावरण द्वारा प्राप्त होती है। इस प्रकार एक पियानों अथवा ओवरकोट जो कि मेरे लिए इस वर्ष बनाया गया है, इस वर्ष की आय का भाग नहीं है बल्कि पूंजी में वृद्धि हैं। केवल वहीं सेवाएं जो कि इनके प्रयोग से इस वर्ष मुझे प्राप्त होगीं, वहीं आय होगी।'' फिशर की परिभाषा मार्शल अथवा पीगू की परिभाषा से अधिक उतम मानी जाती है क्योंकि यह आर्थिक कल्याण की अवधारणा के अधिक करीब है। आर्थिक कल्याण किसी दिये गये समय में वस्तुओं तथा सेवाओं की उन मात्राओं पर निर्भर करता है जो उस समय में लोगों को प्राप्त होती हैं।

कमियांः फिशर के परिभाषा की प्रमुख कमियां नीचे दी गयी हैंः

(i) शुद्ध उत्पादन की तुलना में शुद्ध उपभोग की गणना करना कहीं अधिक कठिन हैं।

(ii) दूसरी प्रमुख कठिनाई, टिकाउ वस्तुओं के द्वारा बाद के वर्षों में किये जाने वाली सेवाओं के मूल्य को मापना बहुत कठिन है क्योंकि ऐसी वस्तुएं लम्बें समय तक चलती हैं।

(iii) टिकाउं वस्तुएं प्रायः एक हाथ से दूसरे को हस्तान्तरित होती रहती हैं तो उनके स्वामित्व का निर्धारण करना कठिन होता हैं।

निष्कर्ष के रूप में, मार्शल और पीगू की परिभाषाएं आर्थिक कल्याण को प्रभावित करने वाले कारकों को सामने लाने के लिए महत्वपूर्ण हैं जबकि फिशर की परिभाषा विभिन्न वर्षों के बीच आर्थिक कल्याण की तुलना करने में सहायता करती है।

15.3 राष्ट्रीय आय के कीन्ज अवधारणा

कीन्ज ने राष्ट्रीय आय के सन्दर्भ में तीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करते हैंः

1. **व्यय उपागमः** इस दृष्टिकोण के अनुसार, राष्ट्रीय आय कुल उपभोग यय तथा कुल निवेश व्यय के योग के बराबर होती है। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = C + I$, जहां, Y राष्ट्रीय आय, C कुल उपभोग व्यय और I कुल निवेश व्यय को प्रदर्शित करते हैं।
2. **साधन आय उपागमः** इस दृष्टिकोण के अनुसार उत्पादन के सभी साधनों को मिलने वाली आय का कुल योग हीं राष्ट्रीय आय हैं। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = F + E_p$, जहां, Y राष्ट्रीय आय, F भूमिपतियों को प्राप्त होने वाली आय के साथ श्रम और पूंजी को प्राप्त प्रतिफल हैं और E_p साहसी को प्राप्त होने वाले लाभ को प्रदर्शित करता है।
3. **विकय–लागत उपागमः** इस दृष्टिकोण के अनुसार, राष्ट्रीय ज्ञात करने के लिए कुल बिक्रय आय में से प्रायोगिक लागत को घटा देना चाहिए। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = A.U$ जहां, राष्ट्रीय आय, A सकल राष्ट्रीय उत्पाद तथा U समग्र प्रायोगिक लागत को प्रदर्शित करता है।

15.3.1 केन्ज के राष्ट्रीय आय एवं शुद्ध राष्ट्रीय आय की अवधारणा

कीन्स के अर्थव्यवस्था में रोजगार के निर्धारण के उद्देश्य से राष्ट्रीय आय को अपने विशिष्ट रूप से परिभाषित किया है। उन्होंने राष्ट्रीय आय की दो अवधारणाएं दी हैः 1. राष्ट्रीय आय एवं 2. शुद्ध राष्ट्रीय आय।

1. राष्ट्रीय **आयः** कीन्स का राष्ट्रीय आय का विचार, सकल राष्ट्रीय आय एवं निवल राष्ट्रीय आय के दृष्टिकोण के बीच न होकर, एक भिन्न अवधारणा है। (GNP), किसी दिये गये समय में उत्पादित अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं का मौद्रिक मूल्य हैं। जबकि, (NNP) निबल राष्ट्रीय आय, (GNP) सकल राष्ट्रीय आय में से मूल्य ह्रास या घिसावट को घटाने पर प्राप्त होता है। जबकि, कीन्स घिसावट से कुछ कम राशि ही घटाते हैं जिसे उन्होंने (User Cost) प्रायोगिक लागत कहा है।

    प्रायोगिक लागतः प्रायोगिक लागत किसी पूंजीगत मशीन या परिसम्पति को निष्क्रिय रखने के बजाय प्रयोग में लाने के लिए लगने वाली लागत हैं। कीन्ज के अनुसार, ''हमने प्रायोगिक लागत को किसी परिसम्पति के प्रयोग में लाये जाने पर होने वाले ह्रास में से उस सम्पति को निष्क्रिय रखने पर होने वाले घिसावट के घटाने के रूप में परिभाषित किया है।'' प्रायोगिक लागत किसी मशीन के उपयोग में आने पर होने वाले ह्रास तथा यदि यह प्रयोग में न होती है तो होने वाले ह्रास के बीच का अन्तर और इसके मरम्मत तथा रखरखाव पर किया जाने वाला व्यय है।

    उदाहरण के लिए, किसी मशीन का किसी वर्ष में उत्पादन के प्रारम्भ मूल्य 1000 रूपये हो, तथा वर्ष के अन्त में इसका मूल्य 800 रूपये शेष रहता है तो इसमें 200 रूपये की कमी को ह्रास के रूप में दर्ज किया जायेगा। लेकिन, यदि मशीन का प्रयोग उत्पादन में नहीं किया जाता तो भी जंग लगने के कारण इसके मूल्य में कमी होती। मान लीजिए, उस स्थिति में वर्ष के अन्त में इसका मूल्य 900 रूपये होता है। तब इस प्रकार, इसके मूल्य में 100 रूपये की कमी तथा 10 रूपये का इसके रख–रखाव व्यय होगा। इस प्रकार से प्रायोगिक लागत, 200 – (100 + 10) = 90 रूपये होगी।

    इस प्रकार, पूरी अर्थव्यवस्था की समग्र प्रायोगिक लागत को सकल राष्ट्रीय उत्पाद से घटाने पर हमें कीन्ज के दृष्टिकोण से राष्ट्रीय आय प्राप्त होगी। प्रतीकात्मक रूप में,

    राष्ट्रीय आय = A-U जहां, राष्ट्रीय आय, A सकल राष्ट्रीय उत्पाद तथा U समग्र प्रायोगिक लागत को प्रदर्शित करता है।

2. **शुद्ध राष्ट्रीय उत्पादः राष्ट्रीय आय** = A-U से पूरक लागत (U) को घटाने पर शुद्ध राष्ट्रीय आय प्राप्त होगी। इस प्रकार शुद्ध राष्ट्रीय आय = A-U-V। पूरक लागतें वे लागतें हैं जिनका अनुमान नहीं लगाया जा सकता है अथवा जो साहसी के नियन्त्रण से बाहर है। जैसे, आग लगना, प्लांट का पूराना हो जाना आदि। शुद्ध राष्ट्रीय आय के लिए सकल राष्ट्रीय आय में से ऐसी लागतों को घटा देना चाहिए।

निष्कर्ष रूप में कीन्स ने दो अवधारणाओं का प्रयोग किया हैः

(i) राष्ट्रीय आय = A-U जिस पर रोजगार का आकार निर्भर करता हैं और

(ii) शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद (A-U-V) जिस पर सामाज का उपभोग निर्भर करता है।

15.4 राष्ट्रीय आय के आधुनिक दृष्टिकोण

कीन्ज का अनुकरण करते हुए आधुनिक अर्थशास्त्री राष्ट्रीय के तीन पहलुओं पर विचार करते हैं और उनके बीच आधारभूत समरूपता पर जोर देते हैं। ये तीन पहलु हैंः (क) उत्पाद पक्ष, (ख) आय पक्ष एवं (ग) व्यय पक्ष। सयुंक्त राष्ट्र संघ की एक रिपोर्ट में राष्ट्रीय आय को तीन भिन्न–भिन्न विधियों से परिभाषित किया गया हैः

(i) शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद, अर्थात् जिसके अन्तर्गत एक निश्चित अवधि में सभी आर्थिक क्षेत्रों द्वारा आर्थिक क्रियाओं का शुद्ध मूल्य वर्धन और विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय है।

(ii) वितरणात्मक भागों का कुल योग, अर्थात् उत्पादन के साधनों को नियत समय में मजदूरी, लाभ, व्याज तथा लगान के रूप में प्राप्त होने वाली आय का समग्र योग है।

(iii) शुद्ध राष्ट्रीय व्यय अर्थात् अंतिम उपभोग वस्तुओं और सेवाओं पर किया गया व्यय तथा समग्र योग तथा घरेलू और विदेशी निवेश।

आधूनिक अर्थशास्त्री राष्ट्रीय आय को उत्पादन, आय तथा व्यय के प्रवाह के रूप में देखते हैं। जब वस्तुएं किसी फर्म के द्वारा उत्पादित की जाती है तो उत्पादन के साधनों को मजदूरी, लाभ, ब्याज तथा लगान के रूप में आय प्राप्त होती है। घरेलू क्षेत्र को प्राप्त होने वाली इस आय का एक भाग उपभोग वस्तुओं पर खर्च कर दिया जाता है तथा दूसरा भाग बचा लिया जाता है। बचतों का इस्तेमाल उत्पादकों द्वारा निवेश व्यय के लिए किया जाता है। इस प्रकार उत्पादन, आय तथा व्यय का एक चक्रीय प्रवाह होता है। इसे (क) उत्पादन के प्रवाह, (ख) आय के प्रवाह एवं (ग) व्यय के प्रवाह के रूप में देखा जा सकता है। इस प्रकार तीन समनताएं होगीः

कुल उत्पाद = कुल आय = कुल व्यय

15.4.1 राष्ट्रीय आय के अवधारणा के सामान्य लक्षण

राष्ट्रीय आय की प्रमुख विशेषताएं हैंः

वास्तव में, राष्ट्रीय आय एक विशेष समय में उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं का प्रवाह है।

(i) मुद्रा के रूप में, राष्ट्रीय आय किसी विशेष समय में राष्ट्र को उपलब्ध समग्र वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य है।

(ii) राष्ट्रीय आय सामान्यतः एक वर्ष के सन्दर्भ में व्यक्त की जाती है।

(iii) राष्ट्रीय आय लेखांकन में राष्ट्रीय आय को तीन रूपों में व्यक्त किया जाता है।

(क) राष्ट्रीय उत्पाद के प्रवाह के रूप में, (ख) राष्ट्रीय आय के प्रवाह के रूप में एवं (ग) व्यय के प्रवाह के रूप में।

(iv) राष्ट्रीय आय में तिहरी समानताएं हैंः राष्ट्रीय उत्पाद = राष्ट्रीय आय = राष्ट्रीय व्यय।

15.5 राष्ट्रीय आय की विभिन्न अवधारणाएं

वर्तमान समय में राष्ट्रीय आय तथा सामाजिक लेखांकन से संबंधित कई अवधारणाओं का विकास हुआ है। इन अवधारणाओं ने राष्ट्रीय आय के अध्ययन को अधिक विस्तृत तथा व्यापकता प्रदान की है। राष्ट्रीय आय की प्रमुख अवधारणाओं की ब्याख्या निम्नलिखित हैः

1. **बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद (GDP at MP):** बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद किसी एक वर्ष में किसी देश की घरेलू सीमा के भीतर उत्पादित अंतिम उपभोग वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य से है। हैन्सन के अनुसार, ''सकल घरेलू उत्पाद से हमारा आशय किसी समय अवधि में सामान्यतः, एक वर्ष में किसी देश की घरेलू सीमा के भीतर उत्पादित अंतिम उपभोग वस्तुओं और सेवाओं के मूल्य से है।'' सकल घरेलू उत्पाद की गणना करने के लिए सभी उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं को उनके मूल्य से गुणा कर दिया जाता है। प्रतीकात्मक रूप में,

$$\text{GDP at MP} = P \times Q,$$

जहां, GDP at MP बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद है, P उत्पाद का बाजार मूल्य तथा Q अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं की मात्रा है। सकल घरेलू उत्पाद में तीन प्रकार की अंतिम वस्तुएं और सेवाएं शामिल हैंः

(क) लोगों की तात्कालिक जरूरतों को पूरा करने वाली उपभोक्ता वस्तुएं और सेवाएं;

(ख) पूंजीगत वस्तुएं, जिसमें स्थिर पूंजी निर्माण, आवासीय निर्माण तथा अंतिम और मध्यवर्ती वस्तुओं का न बिका हुआ स्टॉक और,

(ग) सरकार द्वारा उत्पादित वस्तुएं एवं सेवाएं शामिल हैं।

विशेषताएंः

(i) सकल घरेलू उत्पाद, किसी देश के अन्दर उत्पादित वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य है।

(ii) सकल घरेलू उत्पाद में केवल अंतिम वस्तुओं और सेवाओं के मूल्य को हीं शामिल किया जाता है, जो एक समय अवधि में उत्पादित की जाती है।

(iii) अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य की गणना चालू बाजार कीमत पर की जाती है। इसी कारण सकल घरेलू उत्पाद को बाजार कीमत पर, सकल घरेलू उत्पाद के रूप में भी जाना जाता है।

(iv) सकल घरेलू उत्पाद में केवल उन्हीं वस्तुओं तथा सेवओं को शामिल किया जाता है, जिनका बाजार मूल्य हो और जो बाजार में बिक्रय हेतु आई हो।

(v) सकल घरेलू उत्पाद में, उत्पादन के दौरान पूंजीगत वस्तुओं के ह्रास को शामिल नहीं करते हैं।

(vi) हस्तान्तरण भुगतान, जैसे– पेंशन, मातृतव लाभ, बेरोजगारी भता आदि। जिनसे किसी भी प्रकार से उत्पादन में योगदान नहीं करते हैं, उन्हें सकल घरेलू उत्पाद में सम्मिलित नहीं किया जाता है।

(vii) सकल घरेलू उत्पाद में पूंजीगत लाभ को भी शामिल नहीं किया जाता है।

2. **बाजार कीमत पर सकल** राष्ट्रीय उत्पाद **(GNP at MP)** : बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद वार्षिक रूप में किसी देश में उत्पादित समस्त अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य एवं विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय का योग है। सकल घरेलू उत्पाद के तुलना सकल राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा व्यापक है। सकल राष्ट्रीय उत्पाद में सकल घरेलू उत्पाद के अतिरिक्त विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को भी शामिल किया जाता है। शुद्ध साधन आय, हमारे देश के निवासियों द्वारा विदेशों में अर्जित की जाने वाली आय तथा विदेशियों द्वारा हमारे देश के भीतर अर्जित की जाने वाली आय के बीच का अन्तर है।

बाजार कीमत पर राष्ट्रीय उत्पाद = बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद

+ विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

अथवा

बाजार कीमत पर राष्ट्रीय आय = बाजार कीमत पर सकल घरेलू आय +

विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

3. **बाजार कीमत पर शुद्ध** राष्ट्रीय उत्पाद **(NNP at MP)** : बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से ह्रास घटाने पर बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद प्राप्त होता है। उत्पादन प्रक्रिया में किसी निश्चित मात्रा में स्थिर पूंजी का प्रयोग किया जाता है। एक लेखा वर्ष के सकल राष्ट्रीय उत्पाद के मूल्य से ह्रास का मूल्य घटाने पर हमें शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद का मूल्य प्राप्त होता है। 'शुद्ध' शब्द से तात्पर्य हीं सकल में से या समग्र से ह्रास को अलग करना है।

बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद = बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद – मूल्य ह्रास या घिसावट।

4. **बाजार मूल्य पर षुद्ध** घरेलू उत्पादः बाजार कीमत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद, शुद्ध राष्ट्रीय आय एवं विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय के बीच अन्तर है।

बाजार कीमत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद = बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद – विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

5. **साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद(NNP at FC):** साधन लगात पर शुद्ध घरेलू उत्पाद अथवा घरेलू आय देश की क्षेत्रीय सीमाओं के भीतर उत्पादन के साधनों के द्वारा मजदूरी, लाभ, ब्याज तथा लगान के रूप अर्जित आय है। घरेलू आय में निम्नलिखित शामिल होते हैं, 1. लगान, जिसमें आंकलित लगान भी हैं, 2. मजदूरी, वेतन तथा रोजगार क्षतिपूर्ति, 3. ब्याज, 4. अंश धारकों को प्राप्त लाभांश या वितरित लाभ, 5. फर्मों की आरक्षित निधियां या निगमों की बचत, 6. निगम कर तथा अन्य प्रत्यक्ष कर, 7. स्वरोजगार में लगे व्यक्तियों की आय, 8. सरकारी निगमों के प्राप्त लाभ, 9. सरकारी परिसम्पतियों से प्राप्त आय और 10. गैर–विभागीय उद्यमों की बचतें।

   साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद **(NNP at FC)** या घरेलू आय = लगान (जिसमें आरोपित लगान भी हैं) + वेतन, मजदूरी तथा रोजगार की क्षतिपूर्ति + ब्याज + लाभांश + फर्मों की आरक्षित निधियां या निगमों की बचतें + निगम कर तथा अन्य प्रत्यक्ष कर + स्वरोजगार की समन्वित आय + सरकार की सम्पति तथा उद्यमिता से आय + गैर–विभागीय उपक्रमों की बचतें।

6. **साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद:** यदि ह्रास अथवा स्थिर पूंजी के उपभोग को, साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद में जोड़ दिया जाये तो हमें साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद प्राप्त हो जायेगा।

   साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद = साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद + ह्रास

   अथवा, GDP at FC = NDP at FC + Depreciation

7. **साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP at FC)**: साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद में विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को जोड़ देने के उपरान्त, हमें साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात हो जाता है।

   साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद = साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

8. **साधन लागत पर शुद्ध** राष्ट्रीय आय **(NNP at FC or National Income or NI)** : साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय उत्पादन के साधनों द्वारा मजदूरी, लाभ, ब्याज और लगान के रूप में अर्जित कुल आय तथा विदेशों से शुद्ध साधन आय का योग है। दूसरे शब्दों में, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद, साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद में विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को जोड़ देने पर प्राप्त होता है। साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद अथवा राष्ट्रीय आय की गणना साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद से ह्रास घटा कर भी की जा सकती है।

   साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय = साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

अथवा, NNP at FC or NI = NDP at FC + Net Factor Income from Income (NFIA)

अथवा, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय = साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद – ह्रास।

अथवा, NNP at FC or NI = GNP at FC – Depreciation

9. **निजी आयः** निजी आय, निजी क्षेत्र की सम्पूर्ण स्त्रोतों से होने वाली है। निजी आय में घरेलू उत्पाद में से निजी क्षेत्र का हिस्सा, हस्तान्तरण आय, अवितरित लाभ और विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय शामिल होती है। इस प्रकार निजी आय में साधन आय और हस्तान्तरण भुगतान दोनों शामिल होते हैं। साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद में; क. सरकार से हस्तान्तर भुगतान, ख. राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज और ग. विश्व से चालू हस्तान्तरण को जोड़कर तथा 1. सम्पति और उद्यम से सरकार की आय; 2. गैर–विभागीय उद्यमों की बचतें; और 3. सामाजिक सुरक्षा में योगदान को घटाकर निजी आय को प्राप्त किया जा सकता है या निजी आय की गणना की जा सकती है।

निजी आय = राष्ट्रीय आय या साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद + सरकार से हस्तान्तरण भुगतान + सरकार से हस्तान्तर भुगतान + विश्व से चालू हस्तान्तरण + राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज – सरकार की सम्पति और उपक्रमों से आय – गैर विभागीय उपक्रमों की बचतें – सामाजिक सुरक्षा में योगदान।

10. **व्यक्तिगत आयः** व्यक्तिगत आय किसी देश के घरेलू क्षेत्र द्वारा सभी स्त्रोतों से प्राप्त कुल आय है जिसमें प्रत्यक्ष कर शामिल नहीं है। निजी आय तथा व्यक्तिगत आय के बीच प्रमुख अन्तर यह है कि निजी आय में अवितरित लाभ शामिल होता है जबकि, व्यक्तिगत आय में अवितरित लाभ शामिल नहीं होता है।

व्यक्तिगत आय = निजी आय – अवितरित लाभ (जैसेः निगमों के लाभ पर कर + निगम बचतें) – विदेशी कम्पनियों की आय।

11. **व्यय योग्य आय (Personal Disposable Income):** व्यय योग्य आय, व्यक्तिगत आय का वह भाग है जो घरेलू क्षेत्र अपने अनुसार खर्च करता है। यह घरेलू क्षेत्र या परिवार क्षेत्र के क्रय शक्ति को व्यक्त करता है।

व्यय योग्य आय = व्यक्तिगत आय – प्रत्यक्ष कर।

व्यय योग्य आय का पूरा भाग उपभोग पर खर्च नहीं होता है बल्कि इसका कुछ हिस्सा बचा लिया जाता है। इस प्रकार व्यय योग्य आय = उपभोक्ता व्यय + बचत।

अथवा,

Personal Disposable Income = Consumption Expenditure + Saving

15.5.1 बाजार कीमत एवं साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद के मध्य संबंधः

बाजार कीमत पर राष्ट्रीय उत्पाद एक वर्ष में उत्पादित कुल अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं के बाजार मूल्य को व्यक्त करता है। जबकि, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद, उत्पादन के साधनों को प्राप्त आय को व्यक्त करता हैं जो कि मजदूरी, लाभ, लगान और ब्याज के रूप में होगी। इन दोनों अवधारणाओं के बीच अन्तर हैं। अतः इनसे प्राप्त राष्ट्रीय आय के मूल्य के बीच भी अन्तर होगा। साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद की गणना करने के लिए हमें बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध अप्रत्यक्ष कर घटाना होता है। या बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद में अप्रत्यक्ष कर घटाकर आर्थिक सहायता या अनुदान जोड़ देना होता है।

1. **अप्रत्यक्ष करः** अप्रत्यक्ष कर (जैसेः बिक्री कर, उत्पाद कर आदि) वस्तुओं पर लगाये जाते हैं। वे वस्तु के बाजार मूल्य में शामिल होते हैं परन्तु, सरकार को प्राप्त होते हैं। इस प्रकार से बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद से अप्रत्यक्ष कर की राशि के बराबर अधिक होता है। इसलिए, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद को प्राप्त करने के लिए हमें बाजार मूल्य पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद में से अप्रत्यक्ष करों को घटाना होता है।
2. **आर्थिक सहायता या अनुदानः** आर्थिक सहायता, अप्रत्यक्ष करों के विपरीत है। ये उत्पादकों को दिया जाने वाली मौद्रिक सहायता हैं जिसका उद्देश्य कुछ विशेष वस्तुओं का बाजार मूल्य कम करना होता है। आर्थिक सहायता के कारण बाजार मूल्य साधन लागत से कम हो जाता है। इस प्रकार, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात करने के लिए आर्थिक सहायता के बाजार मूल्य पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद में जोड़ दिया जाता है।
3. **शुद्ध अप्रत्यक्ष करः** अप्रत्यक्ष करों और आर्थिक सहायता के बीच के अन्तर को शुद्ध अप्रत्यक्ष कर कहा जाता है। इस प्रकार, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय की गणना करते समय बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध अप्रत्यक्ष करों को घटा दिया जाता है।

   साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद = बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद – शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।

   अथवा, NNP at FC = NNP at MP – Net Indirect Tax (NIT)
   = NNP at MP – Indirect Tax – Subsidy

   इन दोनों दृष्टिकोणों के तुलनात्मक महत्व पर जे. आर. हिक्स ने कहा है, ''जब किसी राष्ट्र का आर्थिक कल्याण मापना हो तो बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा का प्रयोग अधिक उपयोगी और जब किसी अर्थव्यवस्था की उत्पादकता की माप करनी हो तो साधन लागत पर निबल राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा अधिक उपयोगी होगी।

15.5.2 राष्ट्रीय आय के विभिन्न अवधारणाओं के मध्य संबंध

1. राष्ट्रीय आय = सकल घरेलू उत्पाद या बाजार कीमत पर, घरेलू सीमा के भीतर उत्पादित अंतिम वस्तुएं तथा सेवाएं + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।
2. शुद्ध राष्ट्रीय आय = सकल राष्ट्रीय उत्पाद – ह्रास।
3. बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय आय = बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद – ह्रास।
4. साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद = बाजार कीमतर शुद्ध घरेलू उत्पाद – निबल अप्रत्यक्ष कर।
5. साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद = साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद या घरेलू आय + ह्रास।
6. साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद = साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद या सकल घरेलू आय + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।
7. साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद = साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद – ह्रास।
8. साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय – सरकार की सम्पादित और साहसिक उद्यमिता से आय – गैर विभागीय निगमों की बचतें – सामाजिक सुरक्षा में योगदान – विदेशों से शुद्ध साधन आय = घरेलू उत्पाद में निजी क्षेत्र का हिस्सा + राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज + सरकार से हस्तान्तरण भुगतान + चालू विदेशी हस्तान्तरण भुगतान + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।
9. निजी आय = राष्ट्रीय आय – निगम कर – निगमों की बचतें – विदेशों निगमों की आय।
10. व्यक्तिगत आय = निजी आय – प्रत्यक्ष कर – सरकार की विभिन्न प्राप्तियां।
11. व्यय योग्य आय = उपभोग + बचत।

15.6 राष्ट्रीय आय का मापन

वस्तुओं और सेवाओं के उत्पादन से आय प्राप्त होती है, आय से वस्तुओं की मांग उत्पन्न होती है, मांग से व्यय होता है और व्यय पुनः उत्पादन को बढ़ाता है। इस प्रकार से उत्पादन, आय और व्यय का चक्रीय प्रवाह होता है। इन आधारभूत प्रवाह चरों के आधार पर राष्ट्रीय आय को भी निम्नलिखित तीन रूपों में देखा जा सकता है;

1. वस्तुओं और सेवाओं के प्रवाह के रूप में,
2. आय प्रवाह के रूप में,
3. वस्तुओं और सेवाओं पर व्यय के प्रवाह के रूप में।

इस प्रकार आय के इस चक्रीय प्रवाह के तीन चरण हैं, पहला उत्पादन, दूसरा वितरण या आय और तीसरा व्यय। इस प्रकार राष्ट्रीय आय की गणना किसी

भी एक चरण में की जा सकती है। इसी पर आधारित राष्ट्रीय आय के मापन की तीन विधियां हैं।

(i) उत्पाद विधि, जो राष्ट्रीय आय की गणना उत्पादन के चरण में की जाती है।

(ii) आय विधि, जो राष्ट्रीय आय का मापन, वितरण के स्तर पर या आय के रूप की जाती है।

(iii) व्यय विधि, जो राष्ट्रीय आय का मापन व्यय के चरण में की जाती है।

15.6.1 उत्पाद विधि

उत्पाद विधि द्वारा राष्ट्रीय आय की गणना उत्पादन के चरण में की जाती है। इस विधि को मूल्य वर्धन विधि भी कहते हैं। इस विधि द्वारा राष्ट्रीय आय की गणना के दो दृष्टिकोण हैं; 1. अंतिम उत्पाद विधि और 2. मूल्य वर्धन विधि।

1. **अंतिम उत्पाद विधि या दृष्टिकोणः** इस विधि में, किसी दिये हुए वर्ष में किसी अर्थव्यवस्था में उत्पादित अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं के बाजार मूल्य के योग को ज्ञात करके राष्ट्रीय आय की गणना जाती है। उत्पाद विधि से राष्ट्रीय आय की गणना के विभिन्न चरण इस प्रकार हैः

(i) किसी देश की सीमाओं के भीतर उत्पादित समस्त अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य को, बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद प्राप्त होता है। इस प्रकार,

GDP at FC = देश की सीमाओं में उत्पादित सभी वस्तुओं तथा सेवाओं का बाजार मूल्य।

(ii) बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद में विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को जाड़कर हम सकल राष्ट्रीय उत्पाद प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

GDP at MP = GDP at MP + विदेशों से शुद्ध साधन आय।

(iii) बाजर कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात करने के लिए बाजार मूल्य पर व्यक्त या ज्ञात सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से मूल्य ह्रास घटा दिया जाता है। इस प्रकार,

NNP at FC = GNP at MP – मूल्य ह्रास।

(iv) अब शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद जो कि बाजार मूल्य पर है, में से अप्रत्यक्ष कर घटाने से हमें साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

NNP at FC or National Income = NNP at MP – शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।

दोहरी गणना की समस्याः उत्पाद विधि से राष्ट्रीय की गणना करते समय केवल अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं के बाजार मूल्य को शामिल किया जाता है। मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को गणना में शामिल नहीं किया जाता है। यदि मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को भी शामिल किया गया हो तो इससे दोहरी गणना की समस्या पैदा हो जाती है। दोहरी गणना का अर्थ है कि उन निश्चित वस्तुओं को राष्ट्रीय आय की गणना करते समय एक से अधिक बार गिन लिया

जाता है। इससे राष्ट्रीय आय का अनुमान अधिक हो जाता है। इस कारण से दोहरी गणना की समस्या से बचने के लिए केवल अंतिम वस्तुओं के मूल्य को हीं गणना में शामिल किया जाता है, मध्यवर्ती वस्तुओं को नहीं। उदाहरण के लिए, ब्रेड अंतिम वस्तु है जबकि गेहूं और आटे का मूल्य शामिल होता है क्योंकि उत्पादन प्रक्रिया में इन लागतों का भुगतान किया जा चुका होता है। इस प्रकार राष्ट्रीय आय की गणना करते समय ब्रेड के साथ ही आटे और गेहूं का मूल्य भी शामिल करने से दोहरी गणना की समस्या उत्पन्न होगी जिससे बचा जाना चाहिए।

2. **मूल्य वर्धन विधिः** इस विधि से राष्ट्रीय आय की गणना करने के लिए सभी अंतिम वस्तुओं के बाजार मूल्य पर, उत्पादन के विभिन्न चरण या स्तर पर सृजित मूल्य को शामिल किया जाता है। इस प्रकार, इस विधि के अनुसार, उत्पादन प्रक्रिया में विभिन्न उत्पादक इकाईयों के द्वारा सृजित या वर्धित मूल्य का योग ही राष्ट्रीय आय होगी। मूल्य वर्धन का अर्थ कच्चे माल या आगतों के मूल्य में सृजन या वृद्धि है। वास्तव में, मूल्य वर्धन से आशय उत्पादक इकाई का उत्पादन के मूल्य में योगदान है। किसी विशेष चरण पर मूल्य वर्धन की गणना करने के लिए उत्पादन के कूल मूल्य से मध्वर्ती वस्तुओं की लागत घटा दी जाती है। इस प्रकार,

मूल्य वर्धन = उत्पादन का मूल्य – मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत।

सारणी 1: मूल्य वर्धन की गणना या आंकलन

मूल्य रूपये में

उत्पादक	उत्पादन का स्तर	निर्गत का मूल्य	मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत	सकल मूल्य वर्धन
किसान	गेहूं	500	–	500
मिलर	आटा	700	500	200
बेकर	ब्रेड	1000	700	300
	कुल	2200	1200	1000

सारणी 1 में एक उदाहरण के माध्यम से मूल्य वर्धन की गणना प्रस्तुत की गई है। इस उदाहरण में तीन उत्पादक इकाई किसान, मिलर, और बेकर है। किसान बिना खर्च उठाये गेहूं का उत्पादन करता है जिसे वह 500 रूपये में मिलर को बेचता है। इस प्रकार किसान द्वारा मूल्य संवर्धन 500 रूपये का है। मिलर गेहूं से आटा बना कर इसे 700 रूपये में बेकर का बेचता है। इस प्रकार मिलर के द्वारा वर्धित मूल्य 700 – 500 = 200 रूपये हुआ। बेकर आटे से ब्रेड बनाकर इसे उपभोक्ताओं को 1000 रूपये में बेंचता है। इस प्रकार बेकर के द्वारा मूल्य संवर्धन 1000 – 700 = 300 रूपये का हुआ। इस प्रकार से कुल मूल्य संर्वधन को निम्न रूप से देखा जा सकता है,

किसान के द्वारा = 500 – 0 = 500 रूपये।

मिलर के द्वारा = 700 – 500 = 200 रूपये।

बेकर के द्वारा = 1000 – 700= 300 रूपये।

———————————————————

कुल मूल्य संर्वधन = 2200 − 1200 = 1000 रूपये।

मूल्य संवर्धन विधि से दोहरी गणना की समस्या से बचा जा सकता है। उपरोक्त तीनों उत्पादकों के निर्गत का कुल मूल्य 2200 रूपये का है जिसमें गेहूं और आटे की दोहरी गणना शामिल है। इस समस्या से बचने के लिए मूल्य वर्धन विधि का प्रयोग किया गया है जो उत्पादन के प्रत्येक चरण पर मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को अलग कर देता है।

मूल्य संवर्धन दृष्टिकोण के विभिन्न चरणः मूल्य संर्वधन दृष्टिकोण घरेलू सीमा के भीतर प्रत्येक उत्पादक इकाई के योगदान की माप करता है। इस विधि में निम्नलिखित चरण होते हैः

(i) अर्थव्यवस्था की सभी उत्पादक इकाईयां विभिन्न औद्योगिक क्षेत्रों में उनकी उत्पादक इकाईयों के आधार पर बांट दिया जाता है। मुख्य औद्योगिक क्षेत्र निम्नलिखित हैः

  a) प्राथमिक क्षेत्र, जिसमें कृषि और संबंधित क्षेत्र, वानिकी, मतस्य—पालन, खनन शामिल हैं।

  b) द्वितीय क्षेत्र, जिसमें निर्माण, विनिर्माण, विद्युत, गैस और जलापूर्ति आदि आते हैं।

  c) तृतीय क्षेत्र, जिसमें बैंकिंग, बीमा, यातायात, संचार और वाणिज्य तथा व्यापार आदि शामिल हैं।

(ii) सकल मूल्य वर्धन की गणना उत्पादन के मूल्य में से मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत घटाकर किया जाता है। इस प्रकार,

सकल मूल्य वर्धन = निर्गत का मूल्य − मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत।

(iii) शुद्ध मूल्य वर्धन की गणना, सकल मूल्य वर्धन से ह्रास को घटाकर की जाती है। इस प्रकार,

निवल मूल्य वर्धन = सकल मूल्य वर्धन − ह्रास।

(iv) सभी क्षेत्रों के द्वारा निवल मुख्य वर्धन को जोड़कर हम साधन लागत पर निवल घरेलू उत्पाद को प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

NDP at FC = सभी क्षेत्रों द्वारा निवल मूल्य संवर्धन।

(v) साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद में विदेशों से शुद्ध साधन आय को जोड़कर हम साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय को ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार,

NNP at FC or NI = NDP at FC + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

15.6.2 आय विधि

आय विधि साधन आय पक्ष से राष्ट्रीय आय की गणना करती है। आय विधि को साधन आय विधि तथा वितरण योग्य भाग के नाम से भी जाना जाता है। इस विधि के अनुसार किसी देश के निवासियों द्वारा किसी एक वर्ष में उनके उत्पादक कार्यों हेतु प्राप्त भुगतान या आय को जोड़कर राष्ट्रीय आय ज्ञात की जा सकती है। इस प्रकार, आय विधि उत्पादन के साधनों द्वारा मजदूरी, लाभ, लगान तथा ब्याज के रूप में प्राप्त आय का योग ही राष्ट्रीय आय है।

यह उल्लेखनीय है कि प्रत्येक उत्पादक इकाई द्वारा शुद्ध मूल्य वर्धन ही उस इकाई द्वारा सृजित आय होगी। और घरेलू स्तर पर साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद, घरेलू साधन आय के बराबर होगा। इस प्रकार, आय विधि से वहीं अनुमान प्राप्त होना चाहिए, जो मूल्य वर्धन विधि से प्राप्त होता है, बशर्ते कि कोई त्रुटि न हो या आंकलन में आंकडत्रों की असंगतता या कमियां न हो।

आय विधि के चरणः आय विधि से राष्ट्रीय आय की गणना में निम्नलिखित चरण हैंः

(i) सभी उत्पादक इकाईयां प्राथमिक, द्वितीयक तथा तृतीयक क्षेत्रों में विभाजित है।

(ii) उत्पादक इकाईयों द्वारा साधनों को दी जाने वाली आया निम्न प्रकार विभाजित की जाती हैः

- a) लगान, जिसमें आरोपित लगान भी है।
- b) मजदूरी, वेतन और रोजगार क्षतिपूर्ति।
- c) ब्याज
- d) लाभ, जिसमें;
  1. लाभाश या वितरित लाभ
  2. निगम कर या अप्रत्यक्ष करः – अवितरित लाभ
  3. निगम बचतें या आरक्षित निधि
- e) स्वनियोजितों की मिश्रित आय
- f) सरकारी क्षेत्र से आय, जिसमें
  1. सरकारी उद्यमों का ला
  2. सरकारी सम्पति से आय
  3. गैर–विभागीय उद्यमों की बचतें जैसे एयर इंडिया।

(iii) मजदूरी आय तथा परिसम्पति आय जैसे– लगान, ब्याज, लाभ, मिश्रित आय आदि के रूप में अर्जित आय का योग जो देश के क्षेत्रीय या घरेलू सीमा के भीतर है साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद होगा। इस प्रकार,

साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद = लगान अर्थात् आरोपित लगान सहित

+ मजदूरी, वेतन, कर्मचारियों की क्षतिपूर्ति
+ ब्याज
+ अंश धारकों के लाभांश
+ निगम कर तथा अन्य प्रत्यक्ष कर
+ फर्मों की आरक्षित निधियां तथा निगम बचतें
+ स्वरोजगार से मिश्रित आय

\+ सम्पति तथा उद्यम से प्राप्त सरकारी आय
\+ गैर–विभागीय उपक्रमों की बचतें।

(iv) शुद्ध साधन आय हीं शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद है।

NNP at FC or NI = NDP at FC + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

(v) इस शुद्ध साधन आय ज्ञात करने के लिए यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि केवल उत्पादक तथा वैधानिक स्त्रोतों से प्राप्त आय को हीं राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाना चाहिए। साधन आय की गणना में निम्नलिखित सावधानियां रखनी चाहिए।

- (a) हस्तांरण आय को राष्ट्रीय आय में सम्मिलित नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि उससे सम्बन्धित किसी वस्तु या सेवा का उत्पादन या सृजन नहीं होता है।
- (b) आरोपित लगान को शामिल किया जाना चाहिए।
- (c) अवैध आय को शामिल नहीं किया जाना चाहिए।
- (d) अप्रत्याशित लाभ जैसे– लॉटरी आदि को भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए।
- (e) निगम कर आय का हिस्सा है और इसलिए शामिल किया जाना चाहिए।
- (f) उपहार कर, सम्पति पर कर और अप्रत्यसित लाभ पर कर को शामिल नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि वे चालू आय से भुगतान नहीं किये जाते हैं।
- (g) पुरानी वस्तु का पुर्नविक्रय से प्राप्त आय को भी शामिल नहीं करना चाहिए क्योंकि उससे सम्बन्धित उत्पादन नहीं किया गया होता है।
- (h) राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज भी हस्तान्तरण आय है इसलिए इसे भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए।

15.6.3 व्यय विधि

व्यय विधि के द्वारा किसी अर्थव्यवस्था में एक वर्ष में सकल घरेलू उत्पाद पर किये गये अंतिम व्यय के समग्र योग के रूप में राष्ट्रीय आय का मापन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, व्यय विधि सकल घरेलू व्यय का मापन करती है। इससे ''उपभोग और निवेश विधि'' तथा ''आय–व्यय विधि'' के नाम से भी जाना जाता है। अंतिम व्यय का अर्थ, अंतिम वस्तुओं पर किया गया व्यय है। किसी अर्थव्यवस्था की कुल आय (Y)या तो उपभोग वस्तुओं (C) पर खर्च की जाती है या निवेश वस्तुओं (I) पर। प्रतीकात्मक रूप में,

$$Y = C + I$$

अंतिम उपभोग व्यय में निम्नलिखित शामिल हैः

- (a) घरेलू क्षेत्र का उपभोग व्यय।
- (b) सरकारी अंतिम व्यय।

इसी प्रकार, अंतिम निवेश व्यय में (a) सकल अंतिम निवेश या सकल स्थिर पूंजी निवेश, (b) न बिके हुए स्टाक में परिवर्तनः (c) विदेशों में शुद्ध निवेश या वस्तुओं तथा सेवाओं का शुद्ध निर्यात शामिल है।

व्यय विधि के चरणः व्यय विधि राष्ट्रीय आय की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैंः

(i) GDP at MP = सकल राष्ट्रीय व्यय = निजी अंतिम उपभोग व्यय (C)
+ अंतिम सरकारी उपभोग व्यय (G)
+ सकल घरेलू निजी निवेश (I) ; जिसमें सकल स्थिर पूंजी निर्माण तथा स्टॉक में परिवर्तन है।
+ शुद्ध निर्यात या (X-M)

या, GDP at MP = GNE = C + I + G + (X-M)

(ii) बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद में विदेशों से शुद्ध साधन आय को जोड़कर हम बाजार मूल्य पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद को ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार,

GNP at MP = GDP at MP + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

(iii) बाजार मूल्य पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से निवल अप्रत्यक्ष करों को घटा कर हम साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात कर लेतें हैं। इस प्रकार,

GNP at FC = GNP at MP – शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।

(iv) साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से ह्रास को घटा कर हम राष्ट्रीय आय या साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार,

NNP at MP = GNP at FC – ह्रास (D)।

व्यय विधि में सावधानियांः–

(i) पूरानी या दोबारा बेंची जाने वाली वस्तुओं पर किया गया व्यय शामिल नहीं किया जाना चाहिए।

(ii) बॉण्ड तथा शेयरों पर किया गया व्यय भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि इसके लिए लिया गया भुगतान वस्तु अथवा सेवा के लिए नहीं किया जाता है।

(iii) हस्तान्तरण के रूप में सरकारी व्यय भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि इससे कोई वस्तु या सेवा के रूप योगदान नहीं किया जाता है।

(v) मध्यवर्ती वस्तुओं पर किये गये व्यय को भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि इससे दोहरी गणना की समस्या खड़ी हो जायेगी।

15.6.4 तीनों विधियों में समन्वय

चूंकि उपरोक्त तीनों विधियों से भौतिक उत्पादन का मापन तीन स्तरों पर मापा जाता है जो कि उत्पादन, वितरण और व्यय के स्तर या चरण है। इसलिए उनसे राष्ट्रीय आय का एक हीं मान प्राप्त होता है। निम्न चार्ट से उपरोक्त तीनों विधियों का समन्वय स्पष्ट हो जाता है जो कि बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद की गणना करता हैं:

चार्ट 1: तीनों विधियों से बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद

उत्पाद विधि	आय विधि	व्यय विधि
➢ साधन लागत पर प्राथमिक क्षेत्र मं निवल मूल्य वर्धन +	• रोजगार क्षतिपूर्ति +	❖ निजी अंतिम उपभोग व्यय +
➢ साधन लागत पर द्वितीयक क्षेत्र में निवल मूल्य वर्धन +	• लगान + ब्याज +	❖ सरकारी क्षेत्र का अंतिम उपभोग व्यय +
➢ साधन लागत पर तृतीय क्षेत्र में निवल मूल्य वर्धन +	• स्वरोजगार से मिश्रित आय +	❖ सकल पूंजी निर्माण + वस्तुएं तथा सेवाएं
➢ ह्रास या स्थिर पूंजी का उपभोग +	• ह्रास या स्थिर पूंजी का उपभोग +	
➢ शुद्ध अप्रत्यक्ष कर	• शुद्ध अप्रत्यक्ष कर	
बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद =	बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद =	बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद =

संख्यात्मक या गणितीय उदाहरण: निम्नलिखित उदाहरण से तीनों विधियों के द्वारा प्राप्त राष्ट्रीय की समानता स्पष्ट होती है।

A. उत्पादन या मूल्य वर्धन विधि	
	करोड़ रूपये में
1. साधन लागत पर प्राथमिक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	2000
2. साधन लागत पर द्वितीयक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	1100

3.	साधन लागत पर तृतीयक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	1000
4.	स्थिर पूंजी प्रयोग	500
5.	अप्रत्यक्ष कर	850
6.	'–' आर्थिक सहायता	–150
7.	साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8.	'–' शुद्ध अप्रत्यक्ष कर अर्थात अप्रत्क्ष कर – आर्थिक सहायता	700
9.	साधन लागत पर निवल घरेलू उत्पाद	4600
10.	'–' स्थिर पूंजी उपभोग	500
11.	साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद	4100
12.	विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13.	साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय	4200
B.	**आय विधि**	
		करोड़ रूपये में
1.	रोजगार क्षतिपूर्ति	1500
2.	ब्याज, लगान, और लाभ	600
3.	स्वरोजगार से मिश्रित आय	2000
4.	अप्रत्यक्ष कर	850
5.	'–' आर्थिक सहायता	150
6.	स्थिर पूंजी का उपभोग	500
7.	साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8.	'–' निवल अप्रत्यक्ष कर	– 700
9.	साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	4600
10.	'–' स्थिर पूंजी का उपभोग	500
11.	साधन लागत पर शुद्ध घरेलू आय	4100
12.	विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13.	साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय आय या राष्ट्रीय आय	4200
C.	**व्यय विधि**	
		करोड़ रूपये में
1.	निजी अंतिम उपभोग व्यय	3500
2.	सरकारी अंतिम उपभोग व्यय	600
3.	स्थिर वस्तुओं तथा सेवाओं का मूल्य	1000
4.	स्टॉक में परिवर्तन	300
5.	वस्तुओं तथा सेवओं का निर्यात	400
6.	'–' वस्तुओं तथा सेवाओं का आयात	–550
7.	बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8.	'–' शुद्ध अप्रत्यक्ष कर अर्थात् 850–150	700
9.	साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	4600
10.	'–' स्थिर पूंजी का उपभोग	–500

11.	साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद	4100
12.	विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13.	साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय	4200

15.7 राष्ट्रीय आय के आंकलन में कठिनाईयां

राष्ट्रीय आय के आंकलन में कई धारणात्मक तथा सांख्यिकीय कठिनाईयां सामने आती हैं। उनमें से कुछ महत्वपूर्ण निम्नलिखित हैः

1. **राष्ट्र या देश के घरेलू सीमा की परिभाषाः** सबसे महत्वपूर्ण 'राष्ट्र' शब्द को परिभाषित करने की समस्या है। राष्ट्रीय आय की गणना मे राष्ट्र की अवधारणा राजनीतिक सीमाओं से परे है। राष्ट्रीय आय में न केवल देश की भौगोलिक सीमा के भीतर उत्पादित आय शामिल की जाती है बल्कि राष्ट्र के साधनों द्वारा विदेशों में अर्जित आय भी शामिल होती है।
2. **वस्तुओं के चुनाव की समस्याः** वस्तुओं तथा सेवाओं के चुनाव की समस्या होती है। सामान्यतः जो वस्तुएं तथा सेवाएं मुद्रा से होकर गुजरती है उन्हें ही शामिल किया जाता है लेकिन कुछ वस्तुएं और सेवाएं मुद्रा से होकर नहीं गुजरती है। प्रेम तथा दया से की गई सेवाएं का मूल्य तो होता हैं परन्तु उनका मौद्रिक मूल्य नहीं अदा किया जाता है। समस्या यह है कि इस प्रकार की वस्तुओं को शामिल किया जाय या नहीं, यदि हां तो इनका मौद्रिक मूल्य कैसे मापा जाये।
3. **गणना के विधि का चुनावः** विभिन्न विधियों के बीच चुनाव की भी समस्या होती है। इस सम्बन्ध में सामान्य विचार है कि आंकड़ों की उपलब्धता के आधार पर सभी तीनों विधियों को एक साथ प्रयोग करना चाहिए।
4. **आर्थिक कियाकलापों का स्तरः** एक अन्य समस्या यह है कि आर्थिक क्रियाओं के किस चरण में राष्ट्रीय आय की माप की जाय । सर्वमान्य विचार यह है कि उत्पादन, वितरण तथा व्यय में से किसी भी एक चरण को अपने उद्देश्य के अनुसार चुना जा सकता है। यदि उद्देश्य अर्थव्यस्था की क्षमता तथा आर्थिक संवृद्धि प्रदर्शित करना हो तो उत्पादन का चरण अधिक अनुकूल होगा।
5. **दोहरी गणनाः** दोहरी गणना राष्ट्रीय आय आंकलन की प्रमुख समस्या है। इसका तात्पर्य किसी वस्तु की दो बार गणना करना है। इस से बचने के लिए केवल अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं को, गणना में शामिल किया जाना चाहिए।
6. **हस्तान्तरण भुगतानः** हस्तान्तरण भुगतान भी एक समस्या है क्योंकि पेंशन, बेरोजगारी भत्ता, व्याज, आदि के रूप में प्राप्त आय को राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाये या नहीं इस संबंध में कठिनाईयां हैं। ये भुगतान निजी या सरकारी हो सकते है। इस समस्या के निदान के लिए केवल व्यय योग्य आय पर विचार किया जाना चाहिए।

7. **अवैधानिक आयः** गैर–कानूनी तरीके से अर्जित आय को राष्ट्रीय आय में शामिल नहीं किया जाता है। इस लिए इस प्रकार की आय को अलग रखना चाहिए।
8. **आंकड़ों की अनुपलब्धताः** राष्ट्रीय आय अनुमान में सांख्यकीय आंकड़ों की उपलब्धता की भी समस्या है। प्रयाप्त तथा विश्वसनीय आंकड़ों की समस्या न केवल विकासशील देशों में है बल्कि विकसित देशों में भी है।
9. **गैर–मौद्रिक क्षेत्रः** राष्ट्रीय आय की गणना में गैर मौद्रिक क्षेत्र की भी कठिनाईयां भी है। ये समस्या प्रमुखतया अल्पविकसित देशों से संबंधित हैं। जहां, कुल उत्पादन का एक बड़ा भाग बाजार में बिकने नहीं आता है। एक बड़ा हिस्सा या ता स्व–उपभोग के लिए रख लिया जाता है या अन्य वस्तुओं से बदल लिया जाता है।
10. **ह्रास का मूल्यांकनः** सकल राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की गणना के लिए ह्रास को सकल घरेलू उत्पाद से घटाना पड़ता है परन्तु, ह्रास का मूल्यांकन सांख्यिकीय समस्या उत्पन्न करता है जैसे पूंजी स्टॉक की आयू, पूंजीगत वस्तु के मूल्य में वर्ष–दर–वर्ष परिवर्तन आदि।
11. **कीमत स्तर में परिवर्तनः** राष्ट्रीय आय मुद्रा के रूप मे व्यक्त की जाती है। परन्तु, कीमत स्तर में परिवर्तन होने के कारण मौद्रिक पैमाना स्थिर नहीं रहता है। इसका अर्थ है कि उत्पादन में परिवर्तन न होने पर भी राष्ट्रीय आय का मौद्रिक मान परिवर्तित हो सकता है। इस समस्या के हल के लिए वास्तविक राष्ट्रीय आय की अवधारणा का विकास हुआ है जिसका मुल्यांकन आधार वर्ष की कीमत पर किया जाता है। परन्तु तब कीमत सूचकांक के निर्माण की समस्या उत्पन्न होती है।
12. **विकासशील देशों की समस्याएंः** भारत जैसे विकासशील देशों में धारणात्मक तथा सांख्यकीय समस्याएं अधिक जटिल हो जाती है। प्रमुख कठिनाईयां निम्नलिखित हैः
    - (i) उत्पादन का बड़ा भाग मुख्यतः कृषि क्षेत्र से बाजार में बिक्रय हेतु नहीं लाया जाता है। यह या तो उत्पादक द्वारा स्वयं उपभोग किया जाता है अथवा वस्तु से विनिमय कर लिया जाता है।
    - (ii) लोग पिछड़े हुए तथा अन्धविश्वासी है और वे सही–सही अपनी आय की जानकारी नहीं देते हैं।
    - (iii) निरक्षरता के कारण कई उत्पादक अपने बही–खाते का हिसाब–किताब नहीं रखते हैं।
    - (iv) औद्योगिक क्षेत्र की आय की गणना करना कठिन होता है क्योंकि इन देशों में विशेषीकरण बहुत कम होता है और लोग एक ही समय कई आर्थिक क्रियाकलापों में लगे होते हैं।
    - (v) प्रर्याप्त आर्थिक आंकड़े उपलब्ध नहीं होते यदि हैं भी जो विश्वसनीय नहीं होते है।

(vi) प्रशिक्षित सांख्यिकीय अधिकारियों की कमी होती हैं।

(vii) क्षेत्रीय भिन्नताओं तथा प्रथाओं के कारण भी राष्ट्रीय आय की गणना में कठिनाईयां उत्पन्न होती है।

(viii) अधिकांशतः लोग राष्ट्रीय आय लेखांकन मे सहयोग नहीं करते हैं तथा तटस्थता प्रदर्शित करते हैं।

15.8 राष्ट्रीय आय के अध्ययन का महत्व

राष्ट्रीय आय की गणना अर्थव्यवस्था की वास्तविक उपलब्धियों तथा भविष्य की योजनाओं के निर्माण हेतु अत्याधिक महत्वपूर्ण हैं। राष्ट्रीय आय आंकलन का बढ़ता हुआ महत्व निम्नलिखित कारणों से हैः

1. **आर्थिक संरचना का सूचकः** राष्ट्रीय आय अनुमान अर्थव्यवस्था की संरचना का एक महत्वपूर्ण निदेशांक या सूचक है। इससे हमें यह पता चलता हैं कि देश में आय का अर्जन तथा व्यय कैसा है। अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों तथा राष्ट्रीय आय में अनके योगदान का ज्ञान प्रदान करते हैं।
2. **आर्थिक कल्याण का सूचकः** राष्ट्रीय आय देश के निवासियो के आर्थिक कल्याण का सूचक है। इन आंकड़ों के आधार पर विभिन्न देशों के निवासियों के जीवन स्तर की तुलना की जा सकती हैं तथा उसी देश के लोगों की विभिन्न समय पर जीवन स्तर की तुलना की जा सकती है।
3. **आर्थिक नीतियों में सहायकः** राष्ट्रीय आय संबंधी आंकड़े समग्र अर्थव्यवस्था के आर्थिक क्रिया कलापों पर प्रकाश डालते हैं। वे आर्थिक विकास हेतु आर्थिक नीतियों की उपलब्धियों की समीक्षा करते हैं।
4. **आर्थिक आयोजन में सहायकः** राष्ट्रीय आय के आंकड़े आर्थिक आयोजन के महत्वपूर्ण यंत्र हैं। किसी योजना का निर्माण करते समय पूर्व में राष्ट्रीय आय की प्रवृतियों का ज्ञान आवश्यक होता है।
5. **मुद्रा स्फीति एवं अवस्फीतिक अंतरालः** राष्ट्रीय आय के आंकड़े किसी अर्थव्यवस्था के स्फीतिक अंतराल तथा अवस्फीतिक अंतराल की सूचना प्रदान करते हैं। इस प्रकार वे स्फीति तथा अवस्फीति के विरोधी आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायता करते हैं।
6. **अंतर्राष्ट्रीय परिप्रेक्ष्य में महत्वः** अंतर्राष्ट्रीय पृष्टिभूमि में भी राष्ट्रीय आय के आंकड़े महत्वपूर्ण हैं;
   a) वे अंतर्राष्ट्रीय भुगतान दायित्व के आंवंटन में मदद करते हैं,
   b) इसके माध्यम से विभिन्न अर्न्तराष्ट्रीय संस्थाओं में जैसे, अर्न्तराष्ट्रीय मुद्रा कोष, संयुक्त राष्ट्र संघ, आई.बी.आर.डी. में विभिन्न देशों का कोटा निर्धारित किया जाता हैं।
7. **सहायता अनुदान का निर्धाणः** राष्ट्रीय आय के माध्यम से संघ सरकार राज्यों को दिये जाने वाले अनुदान का निर्धारण करती है।
8. **बजट नीति का आधारः** अब सरकारें राष्ट्रीय आय की सांख्यिकीय आंकड़ों के आधार पर बजट बनाती है तथा कर एंव ऋण नीतियों में

बदलाव करती है ताकि राष्ट्रीय आय के उच्चावचल को रोका जा सके।

9. **संरक्षा तथा विकासात्मक महत्वः** राष्ट्रीय आय लेखांकन हमें अर्थव्यवस्था में सुरक्षा तथा विकासात्मक व्यय आंबटन में मदद करता है। यह हमे बताता है कि राष्ट्रीय आय का कितना भाग रक्षा पर व्यय किया जा सकता है।

10. **ह्रास की पूर्तिः** राष्ट्रीय आय में यह स्पष्ट किया जाता है कि कैसे राष्ट्रीय आय का बंटवारा उपभोग व्यय तथा निवेश व्यय में किया जाता हैं। आगे यह हमें ह्रास के माध्यम से पूंजी स्टॉक को बनाये रखने के लिए आवश्यक निवेश की मात्रा बताता है। ह्रास से कम निवेश का अर्थ पूंजी स्टॉक में कमी तथा ह्रास से अधिक निवेश का अर्थ उपभोग मे अनावश्यक कमी करना होगा।

11. **सार्वजनिक क्षेत्र का महत्वः** राष्ट्रीय आय के आंकलन से अर्थव्यवस्था में निजी तथा सार्वजनिक क्षेत्र के योगदान पर प्रकाश डाला जाता है। इन अनुमानों के आधार पर सरकार सार्वजनिक क्षेत्र के लिए भविष्य भविष्य में व्यय का निर्धारण करती है।

12. **विकासशील देशों में महत्वः** राष्ट्रीय आय के आंकड़े अल्पविकसित तथा विकासशील देशों जैसे– भारत में विशेष रूप से महत्वपूर्ण हैं। वे इन देशों में पिछड़े हुए क्षेत्रों पर प्रकाश डालते हैं और समुचित आर्थिक नीति के निर्माण में सहायता प्रदान करते हैं।

13. **सामाजिक लेखांकन का आधारः** राष्ट्रीय आय संबंधी आंकड़े सामाजिक लेखांकन या राष्ट्रीय आय लेखांकन का आधार है। सामाजिक लेखांकन राष्ट्रीय आय के आंकड़ों का व्यवस्थित लेखा–जोखा तथा उनका प्रस्तुतीकरण है। सामाजिक लेखांकन का उद्देश्य राष्ट्रीय आय आंकड़ों का विभिन्न क्षेत्रों के बीच अर्न्तसंबन्धों पर प्रकाश डालना है।

14. **आर्थिक** विश्लेषण में **महत्वः** राष्ट्रीय आय अनुमान हमें अर्थव्यवस्था की संरचना, वृद्धि तथा कार्य–कारण का विश्लेषण करने में सहायक होता है। वे आर्थिक संवृद्धि के अध्ययन में महत्वपूर्ण है। विभिन्न क्षेत्रों की प्रवृतियों, अर्थव्यवस्था में उनका योगदान तथा समग्र आर्थिक चरों जैसे– समग्र उपभोग, समग्र निवेश, समग्र बचत आदि के विश्लेषण में सहायक होते हैं।

15. **कीन्स का योगदानः** आर्थिक विश्लेषण में राष्ट्रीय आय का महत्व कीन्स के योगदानों से अधिक महत्वपूर्ण हो गया है। प्रो. कुरीहारा के अनुसार, ''मुख्य रूप से कीन्स के योगदान के कारण राष्ट्रीय आय का महत्व; (a) राष्ट्रीय आय के सृजन तथा उसके प्रसारण, (b) राष्ट्रीय आय के विभिन्न घटकों के व्यवहार को प्रभावित करने वाले कारक, (c) राष्ट्रीय आय के किसी एक घटक में परिवर्तन का सामान्य प्रभाव तथा मुख्यता रोजगार पर प्रभाव, के विश्लेषण में बहुत बढ़ गया है।

निष्कर्षतः सैमुएलन के शब्दों में ''राष्ट्रीय आय के आंकड़ों के द्वारा हम देश को मंदी से संवृद्धि की ओर, इसके दीर्घकालीन स्थिर विकास दर, और

अंतिम रूप से अन्य देशों की तुलना में जीवन स्तर के भौतिक स्वरूप का चित्रांकन कर सकते हैं।''

15.9 सारांश

राष्ट्रीय आय आंकलन हमें यह बताता हैं कि कैसे आय का वितरण मजदूरी, ब्याज, लाभ तथा लगान में होता है। राष्ट्रीय आय को किसी राष्ट्र के आर्थिक क्रियाकलापों का सूचकांक माना जाता है। यदि राष्ट्रीय आय घटती है तो सरकार करों में कटौती करती हैं ताकि लोगों के पास खर्च के लिए अधिक आय रहे। सकल राष्ट्रीय उत्पाद, किसी देश द्वारा एक वर्ष में उत्पादित अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रि मूल्य तथा विदेशों से शुद्ध आय का योग है। राष्ट्रीय आय के प्रमुख अवधारणायें, जी.एन.पी., जी.डी.पी., एन.एन.पी., व्यक्तिगत आय और व्यय योग्य आय है। वास्तविक आय, वर्तमान राष्ट्रीय आय का किसी आधार वर्ष के मूल्य निर्देशांक के आधार पर प्रस्तुतीकरण है।

15.10 शब्दावली

- **राष्ट्रीय आयः** किसी दिये गये निश्चित समय अवधि में राष्ट्र के समस्त सृजित आय के योग को हीं राष्ट्रीय आय कहते हैं।
- **घरेलू आय या उत्पाद आयः** देश के समस्त उत्पादन इकाईयों द्वारा अपने संसाधनों का प्रयोग करके उत्पादन को सृजित करना हीं घरेलू उत्पाद कहलाता है।
- **मूल्य वर्धन विधिः** प्रचलित कीमत पर एक वर्ष के दौरान उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं के मौद्रिक मूल्य को हीं आंकलित किया जाता है।

15.11 बोध प्रश्न

खाली स्थानों को भरें

(i) ——————— से तात्पर्य किसी दिये गये निश्चित समय अवधि में राष्ट्र के अर्न्तगत कुल आय के योग से हैं।

(ii) किसी देशे के घरेलू सीमा में एक निश्चित समय अवधि में उत्पादित समस्त वस्तुओं एवं सेवाओं के अंतिम मूल्य को ही बाजार कीमत पर ———————— उत्पाद कहते हैं।

(iii) बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय आय से घिसावट को घटाने पर —————————— प्राप्त होता हैं।

(iv) ————————, किसी देश के घरेलू क्षेत्र द्वारा सभी स्त्रोतों से प्राप्त कुल आय है जिसमें प्रत्यक्ष कर शामिल नहीं है।

15.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

(i) राष्ट्रीय आय, (ii) सकल घरेलू उत्पाद, (iii) बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद, (iv) व्यक्तिगत आय।

15.13 स्वपरख प्रश्न

1. ''राष्ट्रीय आय'' से आप क्या समझते हैं? एक देश के राष्ट्रीय आय का आंकलन आप किस तरह से करेगें?

2. ''राष्ट्रीय आय के चक्रीय प्रवाह'' से आप क्या समझते हैं? मुक्त निजी अर्थव्यवस्था में आय के प्रवाह का वर्णन करें।
3. राष्ट्रीय आय के आंकलन में होने वाली विभिन्न कठिनाईयां क्या है?
4. निम्नलिखित पर लघु टिप्पणी लिखें:
   (a) आय विधि
   (b) व्यय विधि
   (c) उत्पाद विधि
5. आय वितरण विधि से राष्ट्रीय आय आंकलन के लिए प्रयोग किये जाने वाले सोपानों का उल्लेख करें।
6. व्यय विधि से राष्ट्रीय आय के आंकलन के प्रमुख चरणों क्या है?
7. एक अर्थव्यवस्था में समग्र अंतिम व्यय और समग्र साधन भुगतान क्यों बराबर होगें? वर्णन करें।
8. किस प्रकार आय वितरण विधि से संग्रहित राष्ट्रीय आय के संमकों का प्रयोग एक अर्थव्यवस्था के बारे में निर्णय लेने के लिए उपयोगी हैं, वर्णन करें।
9. राष्ट्रीय आय को परिभाषित करें। राष्ट्रीय आय के उत्पाद, आय एवं व्यय, समताओं के मध्य संबंध का वर्णन करें।
10. राष्ट्रीय आय के मूल्य वर्धन विधि की चर्चा करें।
11. राष्ट्रीय आय का महत्व आर्थिक विश्लेषण के अध्ययन एवं आर्थिक नीतियों के निर्माण के संदर्भ में करें।

15.14 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Fundamentals of Statistics : D.N. Elhance
2. Fundamentals of Statistics : Veena Elhance
3. Fundamentals of Statistics : B.M. Aggarwal
4. Fundamentals of Statistics : D.C. Sancheti
5. Fundamentals of Statistics : V.K. Kapoor
6. Statistics (Theory Methods & Applications) : S.L. Gupta
7. Fundamental of Statistics : B.N. Gupta

*****

इकाई 16 भारत में सांख्यिकीय व्यवस्था

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि –

- भारतीय सांख्यिकी के विकास का वर्णन कर सकें।
- सांख्यिकी के संकंलन में आने वाली कठिनाईयों का वर्णन कर सकें।
- कुल क्षेत्र एवं वर्गीकृत क्षेत्र का वर्णन कर सकें।
- भारत में कृषि जनगणना का वर्णन कर सकें।

16.1 प्रस्तावना

स्वतंत्रता के उपरान्त, देश ने देखा कि आर्थिक एवं सामाजिक विकास के लिए एक उपयुक्त सांख्यिकीय ढांचा की आवश्यकता है। महालानोबिस को 1949 में भारतीय कैबिनेट में मानद सांख्यिकी सालाहकार नियुक्त किया गया और उनके तकनीकी देखरेख में 1949 को हीं सचिवालय कैबिनेट में एक केन्द्रिय सांख्यिकी इकाई का गठन किया गया। अगले दो वर्षो के उपरान्त, 1951 में स्वतंत्र भारत के सांख्यिकी गतिविधियों को समन्वयित करने के लिए केन्द्रिय सांख्यिकी संगठन की स्थापना की गई। बहुअयामी, तथ्यान्वेषी इकाई के रूप में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण का निर्माण 1950 में किया गया। 1961 के

काल में सी.एस.ओ. एवं एन.एस.एस. को संपूर्ण सांख्यिकी विभाग के रूप में मान्यता प्रदान की गई। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन की स्थापना मुख्य रूप से विभिन्न मंत्रालयों में सांख्यिकी कार्यों एवं अन्य सरकारी एजेन्सीयों को समन्वय करने तथा उन्हें सलाह देने, परिभाषा के अनुकूल मानक को पूरा करने, संकल्पना एवं प्रक्रियाओं को पूरा करने, सलाह व परामर्श देने, अर्न्तराष्ट्रीय सांख्यिकी संगठन से सदैव संर्पक में रहने, वार्षिक सांख्यिकी सरांश और मासिक सांख्यिकी सरांश को तैयार एवं मुद्रित करने, संयुक्त राष्ट्र संघ के सांख्यिकी कार्यलय एवं वार्षिक सांख्यिकी को ग्राफ तथा चार्ट के साथ–साथ सारणी के रूप में जनसामान्य के प्रयोग योग्य बनाने एवं प्रसार करने के लिये किया गया। इस इकाई में आप भारतीय सांख्यिकी के विकास, भारत में सांख्यिकी संकंलन में आने वाली कठिनाईयों के बारे में सीखेंगें। आप कृषि सांख्यिकी के निर्देशांक एवं भारत के कृषि जनगणना के बारे में भी सीखेगें।

16.2 भारतीय सांख्यिकीः परिचय

'भारतीय सांख्यिकी' शब्द, विभिन्न स्त्रोतों एवं संगठन जिससे इस देश में सांख्यिकीक आंकड़ों को व्यवस्थित करते हैं, के अध्ययन को इंगित करता है और यह वर्तमान सांख्यिकीय व्यवस्था का आलोचनात्मक मूल्यांकन भी करता हैं साथ हीं इसके सुधार के लिए सुझाव भी बताने का कार्य करता है। सांख्यिकीय आंकड़ों के लिए यह साक्ष्य सत्य है कि जितना महत्व इसका आजकल है उतना पहले कभी नहीं था। भारत में स्वतंत्रता प्राप्ति से हीं, आंकड़ों के संकंलन में बड़ी और तीव्र गति से छलांग लगाया है। आधूनिक अर्थ में भारतीय सांख्यिकी, समंकों के संकलन एवं निर्वचन से संबंध रखता है, तब से हीं भारत ने नियोजित आर्थिक विकास से रास्ते का चयन करते हुए अग्रसर है। आर्थिक नियोजन के संदर्भ में, भारत जैस देश में सांख्यिकी का बड़ा महत्व है। आर्थिक नियोजन के द्वारा आर्थिक विकास का होना महज चमत्कार नहीं हैं जिसे देश किसी समय अवधि के उपरान्त प्राप्त कर सकती है। एक बेहतर एवं मजबूत अर्थव्यस्था बनाने के लिए समय लगता है। नियोजित आर्थिक के प्रगति के लिए ढांचा तैयार करने एवं जांचने परखने के लिए सांख्यिकी की आवश्यकता होती है। बिना प्रर्याप्त आंकड़ों के बेहतर आर्थिक विकास के लिए नियोजन नहीं किया जा सकता है और बिना अच्छा नियोजन या कार्यक्रम के प्रर्याप्त आंकड़े एकत्र करना भी असंभव है।

16.2.1 भारतीय सांख्यिकी का विकास

आधूनिक राज्य का संबंध केवल कानून एवं व्यवस्था को हीं बनाये रखना नही हैं लेकिन विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्माण करने के लिए तथ्यों के संकलन एवं उनके निष्पादन के परिणामों को जांचने का भी कार्य करते हैं। कुछ निश्चित सांख्यिकीय आंकड़े स्वतः एकत्रित हो जाते हें जब राज्य कई सारे कार्यों का निष्पादन करती है। ऐसे आंकड़े प्रशासन द्वारा उत्पादित होते हैं। आंकड़े राज्य के द्वारा भी अपने स्वयं के पहल पर एकत्र किये जाते हैं। भारत में भी, अन्य पूराने दशों के भांति, प्राचीन काल में सांख्यिकीय तथ्य राज्य के द्वारा एकत्र किये जाते थे। ऐसे सांख्यिकी का प्रयोग या तो सैन्य शक्ति का पता लगाने या फिर संबंधित विषयों से प्राप्त होने वाले राजस्व या कर देय

शक्ति/क्षमता का पता लगाने के लिए किया जाता था। 300 बी.सी. पूर्व से हीं भारत में सरकार ने आवश्यक सांख्यिकी का संकलन राजागण अपने सलाहकारों के सलाह पर करते थे। यद्यपि कुछ अभिलेख जैसे 'कौटिल्य का अर्थशास्त्र' एवं 'आईने–ए–अकबरी' आदि है, जो प्रदर्शित करते हैं कि आदि काल से हीं भारत में राज्य सांख्यिकी एकत्र करते थे, लेकिन सांख्यिकी का संकंलन राज्य का काम होता था और राज्य के सांख्यिकी संकलन के आधूनिक शब्द ब्रिटिश प्रशासन से आया है और वो भी 1868 के बाद। शायद भारतीय सांख्यिकी का विकास या सांख्यिकीय व्यवस्था कि स्थापना की महत्वपूर्ण घटना सर्वप्रथम सांख्यिकी समिति के रूप में 1862 ई. को, ''व्यापार, वित, शिक्षा, कृषि आदि के आंकड़ों के आदर्श प्रारूप के लिए'' हुई थी, जो 1868 ई. में ''ब्रिटिश इण्डिया के सांख्यिकीय सारांश'' के रूप में प्रथम वार्षिकी आई। यह पहली बार लन्दन से मुद्रित हुई और लगातार 1923 ई. तक प्रत्येक वर्ष वहीं से मुद्रित होती रही। इसके बाद इसका मुद्रण भारत से किया जाने लगा।

1874 में, सर जॉन र्स्टेची, उतर पश्चिम राज्य के गर्वनर (अब उतर प्रदेश कहलाता है) ने भारत के सचिव को सुझाव दिया कि व्यापार एवं कृषि से संबंधित सूचनाओं के सांख्यिकी को एकत्र करने के लिए एक अलग विभाग का निर्माण किया जाना चाहिए। उन्होंने यह भी सुझाव दिया कि एक कृषि एवं वाणिज्य का निदेशक भी नियुक्त किया जाना चाहिए। उन्हीं के सुझाव पर 1875 में उनके राज्य में अलग कृषि एवं वाणिज्य विभाग की स्थापना की गई। इस विभाग का एक महत्वपूर्ण कार्य था कि व्यापार सांख्यिकी का संकंलन करें और कृषि सांख्यिकी में सुधार के लिए सुझाव के उपाय एवं माध्यम भी बताए। बाद में सुझाव पर भारतीय आकाल आयोग का गठन किया गया। अन्य राज्यों में भी कृषि विभाग खोले गये और केन्द्रीय कृषि विभाग जो 1871 (लेकिन बाद में जो वित्तीय तंगी के कारण बन्द भी हुई थी) में स्थापित की गई, बाद में विभिन्न राज्यों के कृषि विभागों के कार्यों के साथ समन्वय बनाने के लिए पुर्नजिवित किया गया। यद्यपि इन कृषि विभागों ने प्राथमिक तौर पर कषि विकास से संबंध रखते थे, इसके बावजूद विभिन्न कृषि समस्याओं से संबंधित मूल्यवान सांख्यिकी सामग्रियों को भी संकलित करते थे। प्रथम जनसंख्या जनगणना 1881 में की गई। इसी वर्ष भारत का इम्पीरियल गजट प्रथम बार प्रकाशित हुआ। इसमें भारत के विभिन्न भागों के आर्थिक सांख्यिकी या आंकड़ों को सम्मिलित किया गया। 19वीं शताब्दी के कुछ वर्षों तक भारत सरकार के अन्य विभाग भी अपने विषय से संबंधित सांख्यिकीय सूचनाएं एकत्र करना प्रारम्भ किये और उन्हें प्रकाशित भी किया। 1883 में, कलकत्ता में एक सांख्यिकीय संगोष्ठी का आयोजन किया गया। संगोष्ठी ने अखिल भारतीय फसल पूर्वानुमान नामक संस्था स्थापित करने का सुझाव दिया और पशुधन बीमा गणना उसके जन्म के समय हीं करने का भी सुझाव दिया। इस प्रकार, 1894 ई. में सर्वप्रथम गेहूं उत्पादन के लिए फसल पूर्वानुमान किया गया। इसके बाद के वर्षों में अन्य कृषि सामाग्रीयों के लिए भी फसल पूर्वानुमान किया गया। वर्ष 1886 में, 'Returns of Agricultural Statistics of British India' शीर्षक से पत्रिका प्रकाशित की गई। 1895 में, एक सांख्यिकी ब्यूरो की स्थापना

केन्द्र में, सांख्यिकी महानिदेशक के अध्यक्षता में की गई जो दोनों, कृषिगत एवं विदेशी व्यापार सांख्यिकी और कीमत, मजदूरी तथा उद्योग से संबंधित संमंक एकत्र करने का कार्य करता था।

वर्ष 1905 में, व्यवसायिक इंटेलिजेंस के महानिदेशक का कार्यालय कलकता में स्थापित किया गया। इस संगठन की स्थापना भारत के सांख्यिकी विकास के इतिहास में ऐतिहासिक घटना थी। सांख्यिकी महानिदेशक को व्यवसायिक इंटेलिजेंस महानिदेशक द्वारा प्रतिस्थापित किया गया और व्यापारिक समुदाय से संर्पक बनाने जैसे अतिरिक्त कार्य भार भी दिये गये। निर्माण के समय, इस विभाग के अधीन निम्नलिखित कार्य थेः

1. व्यवसायिक आंकड़े एकत्र करना और वाणिज्य तथा व्यापार को सहायता करना,
2. भारतीय एवं विदेशी व्यवसायियों के मिलने के लिए महौल एवं जगह प्रदान करना,
3. सांख्यिकी आंकड़ों का व्यवस्थितिकरण एवं प्रकाशन जो पहले भारत सरकार से संबंधित मदों के रूप में वाणिज्यिक, न्यायिक, प्रशासनिक और कृषिगत महत्व के द्वारा प्रकाशित होते थे।

   प्रथम विश्व युद्ध से पहले, यह विभाग निम्नलिखित पत्रिकाओं या जॉरनल का प्रकाशन करते थेः

   (i) Review of Trade of India.
   (ii) Statement of Foreign Sea borne Trade and Navigation of British India.
   (iii) Statistical Abstract for British India.
   (iv) Estimates of Area and Yield of principal Crop in India.
   (v) Agricultural Statistics of British India.

व्यवसायिक इंटेलिजेंश विभाग ने 'इण्डियन ट्रेड जर्नल' का प्रथम अंक 1906 में प्रकाशित किया। वर्ष 1912 में, जब भारत सरकार की राजधानी कलकत्ता से दिल्ली स्थान्तरित हुई तब यह निर्णय लिया गया कि सांख्यिकी को व्यवसायिक इंटेलिजेंश से अलग किया जाये। यह स्थान्तरण दोनों हीं विभागों के कार्यों को विकेन्द्रीत किया। इसमें कई असूविधा होने के कारण, 1922 में यह निर्णय लिया गया कि दोनों हीं विभागों को एक हीं मिला दिया जाय। अब विभाग के प्रमुख के पद को बदल कर महानिदेशक व्यवसायिक इंटेलिजेंश और सांख्यिकी कहा गया।

प्रथम विश्व युद्ध सांख्यिकी सामग्रीयों के समक्ष अभाव को जन्म दिया जो देश में भी व्याप्त रहा। युद्ध अवधि में औद्योगिक विकास के लिए देश को हीं आरोप सहना पड़ा। परिणामस्वरूप औद्योगिक सांख्यिकी को एकत्र करना एक महत्वपूर्ण प्रश्न बन गया था। औद्योगिक आयोग जिसकी नियुक्ति 1916 में भारत सरकार के द्वारा की गई, ने सरकार के तरफ से अवलोकन से संबंधित जिम्मेवारी को प्रसांगिकता के साथ, युद्ध एवं शांति दोनों हीं स्थितियों में व्यवसायिक सांख्यिकी इंटेलिजेंश का संकलन, सावधानी पूर्वक व्यवस्थितिकरण, विश्लेषण एवं न्यायिक वितरण के कार्य को किया। जहां तक भारतीय औद्योगिक आयोग के सुझाव की बात है तो बड़ा हीं महत्वपूर्ण रहा है यहां तक

कि भारतीय औद्योगिक सांख्यिकी के विकास के संदर्भ में भी। वाणिज्यिक एवं औद्योगिक इंटेलिजेंश के निदेशक की नियुक्ति के लिए भी आयोग ने हीं सुझाव दिया। इस अधिकारी का कार्य था कि वर्तमान विदेशी व्यापार शुल्क, औद्योगिक उत्पादन एवं अन्य व्यापार तथा औद्योगिक सांख्यिकी से संबंधित आंकड़ों का एकत्रित एवं प्रक्रिया करना। इन सभी सुझावों पर भारत सरकार द्वारा कोई कार्यवाही नहीं की गई।

1925 में, सर एम. विश्वेश्वैरैया की अध्यक्षता में भारतीय आर्थिक जांच समिति का गठन किया गया जिसका काम था 'ब्रिटिश भारत के विभिन्न वर्ग के लोगों के आर्थिक स्थिति का वर्तमान में कृषि के लिए उपलब्धता की जांच; इसकी उपलब्धता को प्रेषित करना; एवं बेहतर व्यवहार के लिए सिफारिश करना जिससे यह सपूंरक कर सके और उस रेखा पर कार्य करे जिसपर कि ऐसे सिफारिशों का प्रभाव व्यय के आकलन में एक सामान्य आर्थिक सर्वेक्षण किया जाना चाहिए।' इससे संबंधित समस्याओं का समिति ने गहनता से अध्ययन किया और निम्नलिखित महत्वपूर्ण सिफारिशें भी दी है।

(i) बड़े उद्योगों में, पंचवर्षीय मजदूरी जनगणना को प्रारम्भ किया जाना चाहिए।
(ii) कॉटेज उद्योगों के द्वारा प्रयोग किये जाने वाले कच्चे माल एवं कुल गणवता तथा उत्पाद के मूल्य आदि से संबंधित आंकड़े एकत्र किये जाने चाहिए।
(iii) कुल नियोजित श्रमिकों की संख्या से संबंधित आंकड़े एकत्र किया जाना चाहिए।
(iv) एक केन्द्रीय सांख्यिकी ब्यूरो की स्थापना किया जाना चाहिए जो केन्द्रीय सांख्यिकी से संबंधित सामान्य सोच एवं उद्देश्य को प्राप्त कर सके।
(v) प्रान्तीय सांख्यिकी ब्यूरो की स्थापना किया जाना चाहिए।
(vi) विभिन्न सांख्यिकीय संगठनों को वैधानिक अधिकार दिया जाना चाहिए जो उनके कार्यों को और अधिक सुविधा प्रदान किया जा सके।

समिति के सिफारिशों को केवल आंशिक रूप से हीं सरकार द्वारा स्वीकार किया गया। ज्यादतर सिफारिशों को नजरअंदाज कर दिया गया।
1928 में, कृषि पर रोयॉल आयोग ने सुझाव दिया कि एक इम्पीरियल कौन्सिल ऑफ एग्रीकल्चर रिसर्च की स्थापना किया जाय जो कृषि शोध को प्रोत्साहित, मार्गदर्शन एवं समन्वयित करे। यद्यपि, सरकार ने आयोग के सिफारिशों को स्वीकार नहीं किया लेकिन बाद में 4 अगस्त 1930 को एक प्रस्ताव पारित करके, 1931 में भारतीय कृषि एवं शोध परिषद् के अन्तर्गत हीं सांख्यिकी खण्ड का गठन किया गया, जो अंत में कृषि शोध सांख्यिकी सस्थान के रूप में विकसित हुआ। बड़े घटनाओं में भारतीय सांख्यिकी संस्थान की स्थापना 1932 में और आर्थिक सलाहकार कार्यालय, फिर 1933 में वाणिज्य एवं उद्योग मंत्रालय की स्थापना गई।

भारत के सांख्यिकी विकास में एक दूसरा महत्वपूर्ण घटना, 1934 में बॉउले–रेर्बटसन् समिति का गठन होना था। बॉउले एवं रेर्बटसन यूनाईटेड

किंगडम के दो लक्षित अर्थशास्त्री को भारत सरकार ने निम्नलिखित जिम्मेवारी के लिए बुलायाः

(i) आगे भारत में आर्थिक समस्याओं के अध्ययन के लिए सुविधाएं मुहैया कराने के लिए;

(ii) प्रचलित व वर्तमान में सांख्यिकी सूचनाओं पर अपना पक्ष रखने तथा संगठनों के अन्तरालों के विशेष संदर्भ में;

(iii) उन्हें नत्थीकरण के माध्यम के लिए सुझाव देना;

(iv) संमंक के संकलन और भारत के संपूर्ण सांख्यिकी जांच के लिए केन्द्रीय सांख्यिकी विभाग नामक संस्था के लिए सिफारिश;

(v) जनगणना के उत्पादन के विषय या उद्देश्य एवं उसकी व्यवहारिकता पर चर्चा;

(vi) राष्ट्रीय आय को मापने के लिए उपलब्ध सामग्रियों के बारे में क्रान्तिक विचार देना;

(vii) कीमत, मजदूरी एवं उत्पादन का सूचकांक निर्माण करने के लिए सिफारिशें दी गई।

समिति नें केन्द्रीय सांख्यिकी निदेशक के अध्यक्षता में एक स्थाई संगठन के स्थापना एवं नियूक्ति की सस्तुति दी। समिति की दूसरी सिफारिश सांख्यिकी संगठन के समस्या, ग्रामीण एवं शहरी सर्वेक्षण, राष्ट्रीय आय के उत्पादन एवं मापन की जनगणना से संबंधित थी। इन सिफारिशों को सरकार द्वारा लागू नहीं किया जा सका। यद्यपि, भारतीय सरकार ने केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन की स्थापना का निर्णय लिया परन्तु, इसे लागू करने में वित्तीय कठिनाईयों के आने के कारण नहीं हो सका। 1938 में, आर्थिक सलाहकार कार्यालय को सृजित किया गया जो आर्थिक सांख्यिकी को एकत्र एवं विश्लषण करने का कार्य करती थी।

1939 में दूसरे युद्ध के आरभं के साथ, समस्या के बड़ी संख्या एवं सरकार ने अर्न्तविभागीय समिति का सुझाव दिया तथा दोनों, सैन्य एवं नागरिक क्षेत्र के गतिविधियों में सांख्यिकी आवश्यकताओं को मिलाने की आवश्यकता महसूस की गई। समिति ने पूनः केन्द्रीय सांख्यिकी कार्यालय, सांख्यिकी संवर्ग संस्थान, प्रान्तो में सांख्यिकी व्यूरो की स्थापना एवं पूरे देश के लिए समस्त महत्वपूर्ण सांख्यिकी के रख रखाव के हेतु निर्माण का निर्णय लिया। इन सिफारिशों को भी प्रभाव में नहीं लाया गया। फिर भी, छोटी सांख्यिकी संगठन की स्थापना केन्द्रीय और प्रान्तीय विभागों के संख्या के अनुसार की गई। 1942 में, औद्योगिक सांख्यिकी एक्ट या अधिनियम पारित हुआ। औद्योगिक सांख्यिकी विभाग 1946 में पहली बार निर्माण क्षेत्र के लिए जनगणना का आयोजन किया। श्रम ब्यूरो ने भी जीवन निर्वाह सूचकांक का निर्माण किसी निश्चित ग्रामीण एंव शहरी क्षेत्र के लिए, 1939 को आधार वर्ष मानते हुए करने लगा। आर्थिक सलाह कार्यालय भी सामान्य उद्देश्य वाले थोक मूल्य सूचकांक को प्रकाशित करने लगा।

स्वतंत्रता उपरान्त या आजादी के बाद

आजादी के बाद से हीं भारत में सांख्यिकीय गतिविधियों में काफी तेजी आई है। 1949 में प्रो. पी. सी. महालनोबिस को कैबिनेट के द्वारा सांख्यिकीय सलाहाकार के रूप में नियुक्त किया गया और सांख्यिकीय संगठन एक उचित आकार लेना प्रारम्भ कर लिया था। 1949 में कैबिनेट सचिवालय द्वारा एक केन्द्रीय सांख्यिकीय इकाई की स्थापना की गई जो कि 1951 में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (CSO) के रूप में विकसित हुआ, जिसका उद्देश्य एक अच्छे सांख्यिकीय व्यवस्था को बनाने में तकनीकी नेतृत्व प्रदान करना था। 1949 में भारत सरकार द्वारा राष्ट्रीय आय समिति का गठन किया गया। इसको वित मंत्रालय के अन्तर्गत स्थापित किया गया। इसके पश्चात् राष्ट्रीय आय का अनुमान नियमित रूप से प्रकाशित किया जा रहा है। 1950 से राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (NSS) के योजना के तहत विभिन्न आर्थिक समस्याओं पर विश्वसनीय आंकड़े एकत्रित किये जा रहे हैं। 1951 में कलकत्ता में एक अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय सम्मेलन हुआ था। इस संगोष्ठि में सांख्यिकीय समस्याएं, जो कि सभी देशों में सामान्यतया एक जैसी थी, के बारे में अध्ययन किया गया और आंकड़ों को एकत्र करने में संकल्पनात्मक रूप से एकरूपता लाने के दृष्टिकोण मे सुधारों के लिए सुझाव प्रदान किया। 1953 में सरकार ने सांख्यिकीय अधिनियम को पारित किया। इस अधिनियम ने सरकार को किसी भी मामले से संबंधित सभी प्रकार के आंकड़े एकत्रित करने का अधिकार दे दिया।

1954 मे वित मंत्रालय से राष्ट्रीय आय इकाई के स्थानान्तरण से केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन के कार्यों में विस्तार हुआ। योजना आयोग के सहयोग से योजना से संबंधित सांख्यिकी कार्यों हेतु केन्द्र तथा राज्य सांख्यिकी कर्मियों के लिए निर्माण एवं प्रशिक्षण सुविधाएं और 1957 में तत्कालीन मंत्रालय से औद्योगिक सांख्यिकी निदेशालय का वाणिज्य व उद्योग मंत्रालय में स्थानान्तरण किया गया। 1961 में भारत सरकार द्वारा निर्णय लिया, गया कि सांख्यिकी का एक पूर्ण विभाग, कैबिनेट सचिवालय में बनाया जाएगा और राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण निदेशालय के साथ हीं केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन इसका हिस्सा बन जाएगा। 1966 में सांख्यिकीय विभाग में इलेक्ट्रोनिक आंकड़ां प्रोसेसिंग की सुविधा प्रदान करने वाले एक संगणक केन्द्र की स्थापना किया गया। 1973 मे इस विभाग को योजना मंत्रालय के तहत लाया गया। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन के पूर्ण सहयोग से कई मंत्रालयों में सांख्यिकीय इकाईयों या खण्डों का लाया गया। प्रान्तीय सांख्यिकी ब्यूरो, राज्य स्तर पर सांख्किीय गतिविधियों के समन्वय से निपटाता है। स्वतंत्रता से पहले कुछ कार्यालय उत्तर प्रदेश, बिहार और बॉम्बे आदि राज्यों में हीं थी। द्वितीय पंचवर्षीय योजना (1956-61), में सांख्यिकी प्रणाली के एकीकृत विकास किया गया और 21 राज्यों व 9 केन्द्र शासित राज्यों मे सांख्यिकीय ब्यूरो व जिला सांख्यिकी कार्यालयों को स्थापित किया गया। सिक्किम का सांख्यिकीय ब्यूरो सबसे नवीनता है। पिछले दो दशक्ों में, इस प्रणाली मे काफी विकास हुआ है। 1953 में केन्द्र व राज्य सरकार और सार्वजनिक क्षेत्र में 170 सांख्यिकीय इकाईयां 4800 सांख्यिकी कर्मियों व 160 लाख सालाना व्यय के साथ विद्यमान थे।

1974–75 तक 510 सांख्यिकी इकाईयों की वृद्धि हुई व 33000 कर्मियों तथा बजट 3,000 लाख सलाना था।
सांख्यिकीय कार्यालय और कार्यरत कर्मियों के बारे में अन्य विवरण निम्न तालिका में दिया गया है–

वर्ष	सांख्यिकीय कार्यालयों की संख्या	सांख्यिकी कर्मियों की संख्या
1952-53	174	4,769
1954-55	181	7,421
1956-57	191	10,221
1957-58	229	11,971
1962-63	332	22,887
1965-66	431	26,617
1969-70	559	30,497
1972-73	611	32,110
1977-78	1120	42,548

स्वतंत्रता के बाद विभिन्न सरकारी संगठन, भारतीय सांख्यिकी संस्थान, कलकता; राष्ट्रीय अनुसंधान संस्थान, रिसर्च काउंसिल और विश्वविद्यालयों, सभी द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों का एकत्र करने में सहयोग कर रही है और सांख्यिकीय अनुसंधान को प्रोत्साहित कर रही है। इसके अलावा कुछ महत्वपूर्ण सांख्यिकविद्वों द्वारा जैसे कि प्रो. पी. सी. महालनोबिस, प्रो. पी. वी. सुखात्मे, प्रो. सी. आर. राव का सांख्यिकीय सिद्धान्तों में विशेष योगदान रहा है।

16.2.2 भारतीय सांख्यिकी का आलोचनात्मक मूल्यांकन

भारत में सांख्यिकी आंकड़े सामान्यतया प्रशासन का एक अभिन्न अंग रहा है। इसलिए भारत में उपलब्ध प्रमुख्तया अधिकांश सांख्यिकीय सामग्री कार्यालयी सांख्यिकी में समाविष्ट होती है। देश में गैर–कार्यालयी सांख्यिकी काफी कम है और उनमें से काफी अप्रकाशित ही रहती है। गैर–कार्यालयी आंकड़ों को समुचित और विश्वसनीय नहीं कहा जा सकता है जैसा कि एजेंसियों के आंकड़ें होते है और इनके जानकारियों के स्त्रोत पर निर्भर नहीं रहा जा सकता है। यद्यपि कुछ एजेसियों जैसे कि व्यवहारिक अर्थशास्त्र का राष्ट्रीय परिषद्, आर्थिक विकास अनुसंधान संस्थान, आर्थिक एवं सामाजिक परिवर्तन संस्थान आदि, सांख्यिकीय अध्ययन के क्षेत्र मे प्रशंसनीय कार्य कर रहे हैं। देश मे कार्यरत अन्य एजेंसियों के परिणाम को विश्वसनीय नहीं माना जा सकता है क्योंकि उनके संबंध या तो राजनैतिक दलों से या व्यावसायिक घरानों से होते हैं। आधिकारिक आंकड़ो के मुताबिक, हाल के वर्षों में देश की सांख्यिकीय प्रणाली को सख्ती के आधार पर रखने में प्रयास किए गए हैं। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन और संगणक केन्द्रों को शामिल करते हुए योजना मंत्रालय में सांख्यिकीय विभाग को अलग से स्थापित किया गया और देश के सांख्यिकीय विभाग को अलग से स्थापित किया गया और देश के सांख्यिकीय सामग्रियो की गुणवता में सुधार लाने के लिए यह भारतीय सांख्यिकीय संस्थान से निकटता बनाते हुए काम कर रही है। इसके बावजूद भी उपलब्ध सांख्यिकीय सामाग्री निम्न कमियों से जूझ रही है।

1. **आंकड़ों की अप्रर्याप्तताः** भारत में एकत्रित सांख्यिकीय आंकड़े अभी भी अप्रर्याप्त है। यद्यपि, स्वतंत्रता के पश्चात्, सांख्यिकीय आंकड़ों के विकास में राष्ट्रीय सरकार के द्वारा विशेष रूचि दिखाई गई है क्योंकि उसको यह अहसास हुआ है कि उनकी आयोजना तब तक सफल नहीं हो सकती है जब तक सम्पूर्ण तथ्य व चित्रों की पूरी जानकारी न हो। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, इस दिशा मे प्रशंसनीय कार्य कर रही है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण, भारतीय अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों से सम्बन्धित महत्वपूर्ण आंकड़ों को उपलब्ध करा रही है। आज हम कह सकते हैं कि हमारे पास सांख्यिकीय सामाग्री मे महत्वपूर्ण जानकारियां उपलब्ध है।

   यहां कुछ कमियां अभी भी है और उनको भरा जाना बाकी है और जल्द ही हम इस कमी को पूरा करने में सक्षम होगें और भारतीय सांख्यिकी सामाग्री दूनिया के अग्रिम देशों के समकक्ष हो जाएगी। लघु उद्योगों, उपयोग, रोजगार, बेरोजगारी, आय और धन आदि के वितरण से संबंधित आंकड़ों में अंतराल अभी भी भरे जाने है। संगठित उद्योग क्षेत्र में, जनगणना द्वारा वर्गीकृत 63 उद्यागों में से केवल 28 उद्योग हीं अभी तक शामिल किये गये हैं। कृषि आंकड़े पूरे क्षेत्र को शामिल नहीं करते हैं।

2. **आंकड़ों में अशुद्धिः** भारतीय सांख्यिकीय सामाग्री की शुद्धता हमेशा से प्रश्नवाचक रहा है। प्रथम, क्योंकि एजेंसियों के कर्मी जो कि प्राथमिक आंकड़ों को एकत्रित करते हैं, विश्वसनीय नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए कृषि सांख्यिकी पटवारियों के द्वारा एकत्रित किये जाते हैं जो कि इस काम के लिए तकनीकी रूप से प्रशिक्षित नहीं होते हैं। इसी प्रकार गणक काम के अवैतनिक प्रकृति के कारण वे अपने जनगणना कार्य में रूचिकर होते हैं। द्वितीय, प्राथमिक आंकड़ों के विश्लेषण में वैज्ञानिक तरीका बहुत हीं कम प्रयोग होता है। हाल के वर्षों में सरकार द्वारा प्रशिक्षित कर्मियों को नियुक्त करने और आंकड़ों को वैज्ञानिक विधि से एकत्र व विश्लेषण करने के लिए कुछ आवश्यक कदम उठाई जा रही है। ऐसे कदम, भारतीय सांख्यिकी के आंकड़ों को दूर करने में लम्बें समय में सहायक होगी।

3. **निरंतरता और पूर्णता का अभावः** यह एक और कमी है। आजादी के बाद से आंकड़ों के कवरेज में अपूर्णता काफी कम हो गई है, लेकिन वास्तव में अभी भी अपूर्णता बनी हुई हैं। इन कमियों को दूर करने के लिए केन्द्र व राज्य सरकार द्वारा कुछ कदम उठाये गये हैं। संग्रह, वर्गीकरण, सांख्यिकीय इकाई को परिभाषित करने, आंकड़ों को अद्वितीय बनाने के तरीकों में भी एकरूपता लाना है। इन वस्तुओं को मानकीकृत करने की आवश्यकता है। भारत की सरकार एक समान परिभाषाओं का सेट, नियम और प्रक्रिया आदि, आंकड़ों में एकरूपता लाने के लिए निर्धारित कर रही है।

4. **समन्वय का आभावः** भारतीय आंकड़ों में उचित समन्वय का आभाव रहा है। यद्यपि केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन को इसको समाप्त करने के लिए बनाया गया है लेकिन फिर भी आंकड़ों के संकलन में दोहराव व टकराव की स्थिति बनी हुई है। केन्द्र व राज्य के सांख्यिकीय संगठनों में काफी सहयोग की आवश्यकता है। समन्वय के आभाव में आंकड़ों को समेकित करने में काफी कठिनाई उत्पन्न होगी और काफी उर्जा व धन व्यर्थ होगा।
5. **गैर स्वव्याख्यात्मकः** अधिकारिक आंकड़ों की एक और कमी है कि सटीक महत्ता वाले, कार्यक्षेत्र और संकलन के तरीके व्यापक रूप से ज्ञात नहीं हैं और इसलिए वे स्व व्याख्यात्मक नहीं हैं। हलांकि आर्थिक सलाहकार का कार्यालय इस कमी को दूर करने के लिए प्रयासरत है और 'गाईड टू करेंट ऑफिशियल स्टेटिक्स' व 'भारतीय खाद्य सांख्यिकी' के तीन खंडों को प्रकाशित किये हैं।
6. **उचित विश्लेषण का आभावः** भारतीय आंकड़े उचित रूप से विश्लेषित और संसाधित नहीं किये गये हैं। आंकड़े प्रशासनिक आवश्यकताओं के अनुरूप एकत्रित किये जाते हैं और इसीलिए प्रशासनिक आवश्यकताएं, आर्थिक सिद्धान्तों और विचारों को ध्यान में रखते हुए अनका विश्लेषण किया जाता है।
7. **खराब कवरेजः** भारतीय आंकड़ों का कवरेज भी बहुत खराब है। स्वतंत्रता से पूर्व आंकड़े देश के सिर्फ उन्हीं हिस्सों के ज्ञात थे जो ब्रिटिश भारत के अन्तर्गत आते थे। यह दोष ज्यादा पाया नहीं गया हैं और भारतीय सांख्यिकी के दायरे और कवरेज क्षेत्र में विस्तार किया गया है।
8. **प्रकाशन में देरीः** यहां सांख्यिकी सामाग्रियों के प्रकाशन में प्रायः असामान्य देरी होती है। समय अन्तराल के पश्चात् आंकड़ों को प्रकाशन सामान्यतया अप्रचलित हो जाते हैं और अपनी उपयोगिता खो देते हैं। देरी कुछ चीजों की प्रकृति में घटित होती हैं लेकिन देरी कभी–कभी लाभदायक भी होते हैं।
9. **अप्रर्याप्त प्रचारः** आम तौर पर, जन कल्याण से संबंधित आंकड़े जनता के बीच आरेख, चार्ट इत्यादि के माध्यम से ठीक से प्रकाशित नहीं होते हैं। कई उपयोगी आंकड़े जनमत को जागरूक कर सकते हैं।

   यह काफी संतोषजनक है कि ये दोष धीरे–धीरे समाप्त हो रहे हैं। भारतीय आंकड़ों का आकार पूरी तरह से बदल चुका है और वर्तमान में इस दिशा में हुई प्रगति बहुत शानदार है।

16.2.3 भारत में आंकड़े एकत्र करने में कठिनाईयां

1. भारत में अधिकांश लोग अशिक्षित हैं। वे सांख्यिकी के महत्व को नहीं समझ नहीं पाते हैं। वे कोई रिकार्ड इत्यादि नहीं रखते हैं और उनकी सूचनाएं पूरी तरह सही नहीं होती हैं।
2. निरक्षरता और लंबे विदेशी वर्चस्व के कारण भारतीय लोग, विशेष रूप से ग्रामीण इलाकों में लोग सरकारी पूछताछ से डरते है। वे आवश्यक

सही सूचना को गणक के समक्ष प्रस्तुत करने में सहयोग नहीं करते हैं।

3. देश बहुत बड़ा है पूरे भारत के आधार पर अलग–अलग जगहों से आंकड़े एकत्र करना काफी मुश्किल हो जाता है। यातायात के साधनो के आभाव के कारण यह और भी ज्यादा कठिन हो जाता है।
4. भारत विविधताओं से भरा देश हैं। यहां लोगों के द्वारा बोले जाने वाली कई भाषाएं हैं। यहां लोगों के आर्थिक स्थिति में काफी अधिक विविधता हैं। उनके सामाजिक प्रथाएं अलग–अलग हैं। इन विविधता के कारण प्रतिदर्श या निदर्शन का अध्ययन करना और भी कठिन हो जाता है।
5. आंकड़ों के संकलन के संदर्भ में एजेंसियों की आपूर्ति के साथ–साथ जानकारी एकत्रित करने के मामले में उदासीन हैं।

16.2.4 सुधारों हेतु सुझाव

देश के सांख्यिकीय सामाग्रीयों और आकड़ों के जानकारियों में सुधारों हेतु निम्न सुझाव है:

1. सरकार को उत्पादन, धन, आय, रहने की लागत आदि के आंकड़ों को एकत्रित करना चाहिए और अन्य मामलों पर उपस्थित जानकारियों के गुणवता में सुधार लाना चाहिए।
2. आंकड़ों को एकत्रित करने वाले स्टॉफ को प्रशिक्षित होना चाहिए जिसमें शुद्व और विश्वसनीय आंकड़ों की सूचनाएं एकत्रित की जा सके।
3. केन्द्र व राज्य सरकारों के बीच समन्वय के अलावा अन्य एजेंसियों के मध्य भी समन्वय होना चाहिए।
4. संमंकों का प्रस्तुतीकरण ऐसा होना चाहिए जो लोगों के समझ में आये। परिभाषाएं, व्याख्या और सीमाओं को साधारण और बुद्धिमतापूर्ण के आधार पर बनानी चाहिए।
5. खर्च को घटाने के लिए कम महत्वपूर्ण और गैर जरूरी चीजों को हटा लेना चाहिए और ज्यादा से ज्यादा चार्ट और ग्राफ का प्रयोग किया जाना चाहिए।
6. आंकड़ों के अनुसंधान में सैद्धांन्तिक एवं व्यवहारिक पक्षों, दोनों के शोध के लिए बेहतर व्यवस्था होनी चाहिए। इस कार्य में शोध संस्थानों और विश्वविद्यालयों के साथ सहयोग की अपेक्षा होनी चाहिए।
7. सांख्यिकीय परिभाषाओं एवं तरीकों का एक मानक होना चाहिए।
8. जितना जल्दी संभव हो सके आंकड़ों को लोगों में उपलब्ध कराना चाहिए। अगर सूचनाएं एक साथ प्रकाशित नही हो सकती है तो इन्हें खण्ड में प्रकाशित करना चाहिए। आंकड़ों के प्रकाशन में विकेन्द्रीकृत होना चाहिए।
9. गैर–अधिकारिक एजेंसियों को विश्वसनीय और महत्वपूर्ण आंकड़ों के संकलन व प्रकाशन करने के लिए सरकार से प्रात्साहन मिलना चाहिए।

10. अन्त में, व्यापार एवं उद्योग के परस्पर सहयोग की मांग की जानी चाहिए।

अतः सांख्यिकी के बेहतर गुणवता और बड़ी मात्रा में सुधार के लिए सांख्यिकीय व्यवस्था और अपने देश के संमंकों में निश्चित परिवर्तन की आवश्यकता है। वर्तमान में इस मामले में स्थिति अभी अक्रमबद्ध है तथा इसमें और भी सुधार की आवश्यकता है। इसमे शीघ्र अति शीघ्र सुधार से इसे ज्यादा बेहतर बनाया जा सकता है।

16.3 कृषि सांख्यिकीः परिचय

भारतीय अर्थव्यवस्था पहले से हीं कृषि प्रधानता वाली रहीं है, कृषि सांख्यिकी के एक विश्वश्नीय और व्यापक प्रणाली की आवश्यकता को अत्याधिक महत्व दिया जा सका है। 'कृषि' शब्द का एक व्यापक अर्थ है और कृषि अर्थव्यवस्था पर असर डालने वाले सभी आंकड़ों को शामिल करने से संबंधित है। भारत में कृषि आंकड़ों का संग्रहण करना काफी प्राचीन समय से है। पुराने समय में राजा और साह ऐसे आंकड़ों को एकत्रित करवाते थे और राज्य के राजस्व की जमीन का एक रिकार्ड बनाए रखते थे। कौटिल्य के 'अर्थशास्त्र' और 'आईने–ए–अकबरी' उन दिनों में कृषि सांख्यिकी के एकमात्र तरीकों को बतलाते हैं। भारत में जब ब्रिटिश शासन स्थापित होने के बाद भूभि राजस्व के निर्धारण और एकत्रण को विशेष महत्व दिया गया। 19 वीं सदी के उतरार्द्ध में आवर्ती आकाल एवं सुखे ने वैज्ञानिक आधार पर कृषि आंकड़ो के संग्रह की अनिवार्यता को महत्वपूर्ण बनाया। 1871 में लार्ड मेयो के अनुशंसा पर केन्द्र में एक नए कृषि विभाग का निर्माण किया गया लेकिन बाद में अफगान युद्ध के कारण यह बंद हो गया। 1879 में कृषि विभाग का केन्द्रीय विभाग के आकाल आयोग के अनुशंसा पर इसे पुनः स्थापित किया गया और विभिन्न प्रांन्तों, उतरी पश्चिमी प्रांत (वर्तमान में उतर प्रदेश) के नेतृत्व में कृषि विभाग का निर्माण किया गया। 1883 में कोलकता में एक सांख्यिकी संगोष्ठि का आयोजन किया गया और यह भारत के प्रमुख फसलों के लिए पूर्वानुमान लगाने की अनुशंसा की। 1894 में पहली बार गेंहूं और धान की फसलों को पूर्वानुमान लगाया गया। 1905 में इसकी स्थापना के बाद से वाणिज्यिक खुफिया, महानिदेशालय और सांख्यिकी, कृषि मामलों के बारे में आंकड़ों एकत्र करते थे। 1948 में कृषि सांख्यिकी से सम्बन्धित सभी कार्य आर्थिक और सांख्यिकी महानिदेशालय, खाद्य एवं कृषि मंत्रालय, भारत सरकार के साथ केन्द्रीकृत हो गया।

कृषि सांख्यिकीय सभी राज्यों की प्राथमिक उत्तरदायित्व है। आर्थिक और सांख्यिकीय निदेशालय, कृषि और सिंचाई मंत्रालय के अन्दर एक केन्द्रीय समन्यवित एजेंसी है। आई.ए.आर.एस., एन.एस.एस.ओ. और सी.एस.ओ., कृषि सुधारों से सम्बन्धित अन्य केन्द्रीय संगठन है। 1949 में कृषि मंत्रालय द्वारा स्थापित कृषि सांख्यिकी के समन्वय पर एक तकनीकी समिति ने विभिन्न प्रक्रियाओं के लिए क्षेत्रों एवं उत्पादन की जाने वाली प्रक्रियाओं की जांच व अवधारणाओं में एकरूपता और परिभाषाओं को वर्गीकृत कर अपनाने के लिए

मानक रूप प्रदान किया। समिति ने कृषि सांख्यिकी में उपस्थित रिक्तियों की पहचान किया और इनको भरने के लिए उपयुक्त उपायों को बतलाया। रिर्पोटिंग क्षेत्रों के विस्तार के लिए प्रथम एवं द्वितीय पंचवर्षीय योजना (1956-61), के दौरान समिति की योजनाओं के सिफारिश के आधार पर कार्यान्वयन किया गया और कृषि अर्थशास्त्र से संबंधित सूचकांक संख्याओं को तैयार करने और गणना के आधार पर वर्गीकृत कर खाद्य और व्यावसायिक फसों की अनुमानित पर्यवेक्षण का आकलन किया गया। 1916 में कृषि मंत्रालय द्वारा इस विषय पर लगातार ध्यान बनाये रखने के लिए कृषि सांख्यिकी में सुधार हेतु एक स्थाई समिति का निर्माण किया गया। यह समिति समय–समय पर कृषि आंकड़ों के गुणवता में सुधार लाने के उद्देश्य से उपाय तैयार करेगी।

देश में कृषि सांख्यिकी को विकसित करने का प्रमुख उद्देश्य प्रशासन है। ये प्राथमिक रूप से राजस्व के उद्देश्य से एकत्रित किये जाते थे। कृषि सांख्यिकी व्यवसाय व व्यापार के लिए भी आवश्यक है। ये देश में भोजन/खाद्य स्थिति के आंकलन हेतु आवश्यक है। वे उपयुक्त कृषि नीतीयों को तैयार करने और उनकी प्रभावशीलता को पहचानने के लिए अपरिहार्य है। भारत में कृषि सांख्यिकी निम्न बिन्दुओं के तहत अध्ययन किये जा सकते हैं।

16.3.1 भूमि उपयोग के आंकड़े

'भूमि उपयोग' शब्द का प्रयोग उन आंकड़ों को दर्शाता है जो देश के भौगोलिक सीमाओं के भीतर आने वाले सभी क्षेत्रों के उपयोग से संबंधित होता है। देश के प्रत्येक इंच भूमि का उपयोग करना संभंव नहीं हैं क्योंकि भूमि में कुछ हिस्से जंगलों से ढंके होते हैं, कुछ हिस्सों तक पहुंचने में काफी कठिनाईयां उत्पन्न होंगी। भूमि उपयोग का सम्पूर्ण चित्र प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि कुल क्षेत्र, जंगल के अन्तर्गत क्षेत्र, जुताई के अनुपलब्ध क्षेत्र, अनुउपजाउ क्षेत्र, परती भूमि, बुवाई वाले क्षेत्रों इत्यादि की बड़ी मात्रा में आंकड़ों को एकत्रित लिए आय।

भारत में भूमि उपायो के आंकड़े 1884 के बाद से उपलब्ध है यद्यपि उनके कवरेज क्षेत्र में धीरे–धीरे विस्तार हो रहा है। आजादी के बाद से किये गए निरंतर प्रयासों के परिणामस्वरूप, देश के भूमि उपयोग के आंकड़ों के कवरेज क्षेत्र देश के भौगोलिक क्षेत्र के 69% से बढ़कर वर्तमान में लगभग 94% हो गये हैं। मोटे तौर पर पश्चिम बंगाल, उड़ीसा और केरल को छोड़कर, जहां क्षेत्र में आंकड़े प्रतिदर्श के आधार पर प्राप्त किये जाते हैं, बाकि क्षेत्रों में आंकड़े सभी भूखण्डों की रिकार्डिंग पर आधारित होता है।

आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय द्वारा भूमि उपयोग के आंकड़ों के दो खण्ड प्रकाशित किये गये हैं। खण्ड एक भारतीय संघ के विभिन्न राज्यों से सम्बन्धित जानकारी प्रदान करता है और खण्ड दो विभिन्न राज्यों से संबंन्धित जानकारी प्रदान करता है और खण्ड दो विभिन्न राज्यों के अलग–अलग जिलों से संबंधित है। भूमि उपयोग के आंकड़ों इस प्रकार उपलब्ध है:

1. कुल क्षेत्र एवं क्षेत्रों का वर्गीकरण;
2. सिंचित क्षेत्र और सिंचित फसल;

3. फसलों के क्षेत्र।

16.3.1.1 कुल क्षेत्र एवं क्षेत्र का वर्गीकरण

कुल क्षेत्र का मतलब देश की कुल भौगोलिक सीमा से नहीं हैं बल्कि कुल रिर्पोटिंग क्षेत्र से है। कुल रिर्पोटिंग क्षेत्र से आशय सम्भव भूमि उपयोग के पूर्ण लेखा से है। दूसरे शब्दों में यह उन क्षेत्रों से सम्बन्धित है जहां पर भूमि उपयोग के आंकड़े उपलब्ध हैं। कुल क्षेत्र को ज्ञात करने के दो स्त्रोत हैं–

a) भारत के सर्वेक्षक जनरल,

b) राज्यों के राजस्व विभाग द्वारा बनाए गये गांव रिकार्ड।

देश की कुल भौगोलिक क्षेत्र 32.8 करोड़ हेक्टेयर है और भूमि उपयोग में कुल रिर्पोटिंग क्षेत्र 30.6 करोड़ हेक्टेयर है।

भूमि उपयोग आंकड़े, भूमि के वास्तविक उपयोग आंकड़े, भूमि के वास्तविक उपयोग के अनुसार 9 उपखण्डों में प्रकाशित होते हैं जो निम्न हैं:

(i) **वनः** इसमें राज्य स्वामित्व व व्यक्तिगत स्वामित्व वाले जंगल क्षेत्र शामिल है।

(ii) **गैर–कृषि उपयोग की भूमिः** वे सभी भूमि जो कृषि के अलावा प्रयोग की जाती हैं जैसे कि नदी, नहर और अन्य भूमियों को शामिल करता हो।

(iii) **बंजर और परती भूमिः** वे सभी भूमि जो बंजर है या बिना जुताई किये छोड़ दिये गये हैं, इसमें शामिल होते हैं जैसे– पर्वत, मरूस्थल आदि।

   a) **स्थाई चारागाह व अन्य चारागाह क्षेत्रः** वे सभी चारागाह क्षेत्र जो स्थाई चारागाह के लिए निर्मित किये गये हैं या घास के मैदान।

   b) विविध वृक्ष एवं पौधे कुल बुआई क्षेत्र में शामिल नहीं होते हैं जैसे– घास, झाड़ियां, बांस इत्यादि।

   c) **खेती का कचराः** इसमें वे भूमि शामिल हैं जो जुताई योग्य तो हैं पर जोती नहीं गई हैं। ये खाली भी हो सकती या बिना किसी प्रयोग के।

   d) **वर्तमान में खाली भूमिः** ऐसे जुते हुए क्षेत्र जिसमें वर्तमान वर्ष में बुवाई नहीं की गई है जैसे कि खोई उर्वरता को प्राप्त करने के लिए भूमि का प्रयोग न करना।

   e) **अन्य खाली भूमिः** ऐसी भूमि जो पिछले वर्ष तो प्रयोग में लाई गई हो, लेकिन पांच या अधिक वर्षों से खाली छोड़ दी गई हो। यक कृषक के गरीबी, यानि आपूर्ति की अप्रर्याप्तता, बदलता मानसून, भूमि का अवसादन, मृदा अपरदन, अनियमित खेती इत्यादि के कारण हो सकती है।

   f) **कुल बुवाई क्षेत्रः** इसमें फसलों और बीजों से बोये हुए क्षेत्र शामिल है। एक से अधिक बार बोया जाने वाला क्षेत्र केवल एक बार गिना जाता है।

16.3.1.2 सिंचित क्षेत्र और सिंचित फसल

भूमि उपयोग के आंकड़े भारत के कृषि सांख्यिकी विभाग द्वारा प्रकाशित होती हैं, जो कि देश के कुल सिंचित क्षेत्र और फसलों के बारे में बतलाती हैं। सिंचित क्षेत्र के प्राप्त आंकड़े सिंचाई के विभिन्न माध्यमों पर आधारित होते है। वे निम्न हैंः (i) नहर, (ii) टैंक, (iii) कुआ एवं (iv) अन्य स्त्रोत जैसे वर्षा के पानी से निर्मित मेंढ़ों का बांध और धाराएं जो कि छोटे नहर के समान होते हैं।

16.3.1.3 फसलों के क्षेत्र

वर्तमान में भारत में विभिन्न फसलों के क्षेत्र के आंकड़ों के माध्यमों से प्राप्त होते हैं;

(i) भूमि रिकार्ड पर आधारित आधिकारिक श्रृंखला।

(ii) प्रतिदर्श सर्वेक्षण पर आधारित NSSO श्रृंखला।

(i) **आधिकारिक श्रृंखलाः** भारत के भूमि क्षेत्र का सुव्यवस्थित अध्ययन के लिए देश को दो भागों में विभाजित किया जाता हैं; जैसे 1. उतर प्रदेश, पंजाब, और तामिलनाडू के अस्थाई बसे हुए क्षेत्र, जहां भूमि राजस्व अस्थाई रूप से तय किया गया है जो अगले वर्ष बदल सकता है, 2. बिहार, बंगाल, उड़ीसा और उतर प्रदेश के पूर्वी भाग के तराई क्षेत्र जहां भूमि राजस्व हमेशा के लिए स्थिर कर दिये गये हैं।

(ii) **अस्थाई भुगतान क्षेत्रः** अस्थाई भुगतान की व्यवस्था 1892 में आया। इस क्षेत्र के सभी गांवों का सर्वेक्षण एवं मानचित्र विस्तृत रूप से किया जाता हैं। गांव का लेखाकार 'पटवारी' या 'लेखपाल' (दक्षिण में 'करनाल') के नाम से बुलाया जाता है। यह प्रत्येक गांव या छोटे समूह में जाकर निरीक्षण करता हैं और अपने अधिकार क्षेत्र में प्रत्येक गांव की स्थिति को दर्शाता हैं और विभिन्न तरह के आंकड़े एकत्रित करता है। पटवारी द्वारा इस गणना को पूर्ण गणना के नाम से जाना जाता है। पटवारी, 'खसरा' में फसल बुआई, स्वामित्व इत्यादि से संबंधित प्रत्येक का व्यक्तिगत रिकार्ड दर्ज करता है। पटवारी के निरीक्षण के द्वारा प्रत्येक फसल के कुल एकड़ भूमि को सही–सही जाना जा सकता है।

(iii) **स्थाई भुगतान क्षेत्रः** इस क्षेत्र में भूमि राज्य को प्रत्येक के लिए निर्धारित कर दी जाती है जो कि बदलता नहीं है, इसीलिए सत्य तथ्यों के संग्रह में रूचि नहीं दिखाते हैं। इन क्षेत्रों में सांख्यिकी तत्यों के संग्रहण का जिम्मा चौकिदार या गांव के मुखिया को सौंपा जाता है। हांलाकि वह इस संदर्भ में अप्रशिक्षित होता है फिर भी वह आंकड़ों का रिकार्ड बनाये रखता है। इन क्षेत्रों के आंकड़े अधिकाशंतः अशुद्ध होते हैं क्योंकि मुखिया के द्वारा दर्ज आंकड़ों का निरीक्षण करने के लिए कोई सुपरवाइजरी स्टॉफ नहीं होता है जो इसे सहीं तरीके से जांचे व सहीं करें। आय विभाग के उच्च अधिकारी सावधानी पूर्वक पुनः निरीक्षण भी नहीं करते हैं। वर्तमान में इन

क्षेत्रों के कृषि आंकड़ों के संग्रह में कुछ परिवर्तन आये हैं, लेकिन इन क्षेत्रों में स्थिति को सुधारने के लिए सहीं दृष्टिकोण हेतु एक एजेंसी की नियुक्ति करना होगा।

त्रुटियों के स्त्रोत

क्षेत्र सांख्यिकी के कुछ कमियां निम्नलिखित है।

1. **अप्रर्याप्त साधन एवं अयोग्य लेखपालः** लेखपाल केन्द्र बिन्दु होता है जिसके चारों तरफ प्रशासनिक राजस्व का एकत्रीकरण का कार्य होता है। लेकिन उसका कार्य, संमंक के संकलन से काफी दूर होता है, त्रुटिपुर्ण एवं संतोषजनक नहीं होता है। बहुत बार, वास्तविक क्षेत्र सर्वेक्षण के बावजूद सूचनाएं घर बैठे हीं भेजते है। उनके वरिष्ठ अधिकारियों के द्वारा जांच भी रोटिंग क्रम मे होता है जिसके चलते सहीं चीज सामने नहीं आती है। अल्प पारितोषिक, ज्ञान एवं प्रशिक्षण की कमी तथा विभिन्न व्यवसायों कार्यो से ज्यादा बोझिल होना लेखपाल को अयोग्य एवं गलत बना देता है।
2. **मिश्रित फसलः** बुवाई की गई क्षेत्र से गलत राजस्व का मिलना विभिन्न प्रकार के फसलों के खेती करने के कारण है और इन क्षेत्रों में कई प्रकार के फसल लगाये जाते हैं जो मिश्रित फसल का रूप होता है जिससे उनका सही अनुमान लगाने में कठिनाई होती है। राज्यों ने मिश्रित फसल के अंतर्गत फसल कटाई सर्वेक्षण विधि को कृषि संमंक के अनुमान के लिए अपनाया है।
3. **अकृषित टुकड़ाः** अकृषित टुकड़ा को बुआई वाले टूकड़ा में शामिल करने से क्षेत्र के आंकलन में कुछ त्रुटियां हो सकती है। यद्यपि लेखपाल इसका आकलन करता है, लेकिन उनका आंकलन कच्चे कार्य के तरह हीं होता है।
4. **किसी निश्चित क्षेत्र को सर्वेक्षण न होनाः** कुछ निश्चित क्षेत्र जिनका सर्वेक्षण नहीं किया गया है, लेकिन मानचित्र एवं संख्या में शामिल की गई हो। धीरे–धीरे इन कमियों को दूर कर लिया गया है।
5. **एकरूपता का अभावः** रिर्पोटिंग व्यवस्था के अर्न्तगत विभिन्न परिभाषाओं में एकरूपता का अभाव होता है। यह प्रायः कठिन होता है कि बुआई की गई क्षेत्रफल वास्तविक रूप से सफलता पूर्वक किया गया है या फिर कुछ बाकि भी है। यदि कुछ फलस असफल होते हैं तो उन्हें कुल खेती वाले क्षेत्रफल से घटाया जाना चाहिए।
6. **पर्वत श्रेणीयों को समावेशनः** खेती वाले क्षेत्रफल में पर्वत श्रेणियों या नदियों को समावेशित करना त्रुटिपूर्ण होता है क्योंकि इसमे न तो जुताई, न बुवाई और न हीं फसल होते हैं। भारत में इनका क्षेत्रफल अच्छा खासा है जो छोटे–2 भूखण्ड के भूमि धारिता के कारण इस प्रकार की त्रुटियां होती है।
7. **गलत आदतेंः** क्षेत्र सांख्यिकी भी असंगत होते हैं क्योंकि इसमें प्रायः क्षेत्र का आंकलन बोए गये बीज के मात्रा के अनुसार करते हैं। चूंकि, लेखपाल भी बीजों को ज्यादा समय तक सुरक्षित नहीं रख सकता है

इसलिए वह गैर बुवाई वाले क्षेत्र को भी बुवाई बता कर, गलत सूचनाएं प्रदान करता है। उनका इस तरह का सूचना वृहत त्रुटि को जन्म देता है।

8. **NSSO श्रेणी (राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन):** ग्रामीण अभिलेख से संमंक संकलन के अतिरिक्त, विभिन्न फसलों के क्षेत्रों के सर्वेक्षण चक्र समुच्च द्वारा संमंक एकत्र करने का दूसरा तरीका है। पूरे देश के लिए अनुमान करते हैं और किसी निश्चित जनसंख्या क्षेत्र या मण्डल के लिए भी किया जाता है। ये आंकड़े यादृच्छिक निदर्शन पर आधारित होते हैं। किसी क्षेत्र के अधीनष्त विभिन्न फसलों के अनुमान को सकल क्षेत्र वं चिन्हित क्षेत्र के रूप में व्यक्त करते हैं। सकल क्षेत्र को उस क्षेत्र के रूप में परिभाषित करते हैं जिसमें एक फसल क्षेत्र के साथ मिश्रित फसल क्षेत्र भी हो, जिसका वह फसल एक घटक हो। चिन्हित क्षेत्र के अधीनश्त वह क्षेत्र जिसमे केवल एक फसल के साथ मिश्रित फसल क्षेत्र के एक खण्ड को चिन्हित किया गया हो।

कार्यालयी एजेंसी एवं एन.एन.एस. के द्वारा एकत्रित संमंकों में भिन्नता या अन्तर होने के निम्नलिखित कारण हैंः–

1. संकलन करने के विधियों में भिन्नता,
2. फसल क्षेत्र में भिन्नता के कारण,
3. ऋतुओं में भिन्नता जिनसे संबंधित आंकड़े लिए गये हैं,
4. दो एजेंशियों के अध्ययन क्षेत्र में भिन्नता,
5. खाद्य एवं पशु चारा के फसल क्षेत्र के वर्गीकरण में भिन्नता,
6. मिश्रित फसल क्षेत्र के आंवटन के तरीकों में अन्तर,
7. NSSO के आंकलन में निदर्शन त्रुटि में भिन्नता के कारण।

सम्पूर्ण भारत के स्तर पर भूमि उपयोगिता सांख्यिकी का प्रकाशन, भारतीय कृषि सांख्यिकी में होता है, प्रत्येक राज्य अपना अलग से इन सांख्यिकी को ऋतु एवं क्रमशः राज्य फसल अभिलेख के रूप में भी प्रकाशित करते हैं। भूमि उपयोगिता के सांख्यिकी को निम्नलिखित प्रकाशन में सारांश के रूप में भी प्रकाशित करते हैं।

1. Agricultural Situation in India (मासिक)
2. Indian Agriculture in Brief
3. Abstract of Agriculture Statistics, India (वार्षिक)
4. Statistical Abstract of the Indian Union (वार्षिक)

फसल उत्पादन के आंकड़ें

कृषि क्षेत्र के उत्पादन सांख्यिकी से सामान्य अर्थ है कि खाद्य एवं गैर–खाद्य फसलों के उत्पादन के आंकड़े जिसमें रेशें, तिलहन आदि सम्मिलित हैं। इसके अतिरिक्त ये अन्य उत्पाद जिन्हें कृषि क्षेत्र के उत्पादन कहा जा सकता है जैसे जंगली उत्पाद, पशुधन उत्पाद आदि। यहां हम केवल खाद्य एवं गैर–खाद्य फसलों की बात करेगें। कृषि उत्पाद के सांख्यिकी का आंकलन तभी किया जाना चाहिए जब फसल पक जाय और उन्हें काट लिया जाय अर्थात पैदावार हो। तथापि, यह भारत जैसे विशाल देश में असंभव हैं जहां लाखों में

छोटे, बड़े भूमि धारक कृषक हैं जो किसी भी प्रकार के कृषि संबंधी खाते व अभिलेख को पूरा नहीं करते हैं। अतः फसल उत्पादन सांख्यिकी का अनुमान वास्तव में फसल के कटने से तुरंत पहले किया जाना चाहिए; अतः यह फसल पूर्वानुमान के स्वभाव में हीं निहित है। उत्पादन सांख्यिकी का आंकलन फसल अधीनष्त क्षेत्र को एक ऋतु में प्रति एकड़ संभावित उत्पादन के मात्रा से गुणा करके किया जाता है।

फसल उत्पाद के भी दो समुच्च उपलब्ध है। वे निम्नलिखित हैः

1. कार्यालयी श्रृंखला एवं 2. NSSO श्रृंखला।

1. **कार्यालयी श्रृंखलाः** कार्यालयी श्रृंखला के अन्तर्गत फसल के उत्पादन के लिए प्रयोग किये जाने वाली दो विधियां निम्नलिखित है।
   (a) परंपरागत विधियां;
   (b) यादृच्छिक निदर्शन विधि

(a) **परंपरागत विधियांः** इस विधि के अनुसार, पैदावार का आंकलन निम्नलिखित सूत्र से किया जाता है;

पैदावार = क्षेत्र × सामान्य पैदावार × शर्त कारक या मौसमी कारक

सामान्य पैदावार सामान्यतया एक वर्ष में औसत रूप से मिट्टी में बुआई से औसत पैदावार को लिया जाता है। वैसे सामान्य पैदावार के अवधारणा में बड़ा भ्रम सा प्रतीत होता है। पांच वर्षों या एक वर्ष के लिए सामान्य उपज को स्थिर रखते हैं। प्रत्येक पांच वर्षों में फसल कटने के प्रयोग के आधार पर इसे पुनरीक्षित किया जाता है, जो किसी चयनित भूखण्ड के लिए होता है। इन भूखण्डों में जोताई, निराई , बुआई, कटाई आदि सभी कार्य कृषि विभाग के पदाधिकारी के उपस्थिति में होता है। यह उम्मीद या संभावना व्यक्त की जाती है कि चयनित भूखण्ड संबंधित क्षेत्र प्रतिनिधित्व करता है। फसल कटाई के उपरान्त, इसका वजन या भार कृषि विभाग के पदाधिकारियों के समक्ष मापा जाता है। इसमें विद्यमान, नमी या आर्द्रता के लिए निश्चित भत्ते भी दिये जाते हैं। तथापि, यह आंकलन बहुत विश्वसनीय नहीं होते हैं। क्योंकि इसमें यादृच्छिक निदर्शन विधि का प्रयोग नहीं किया जाता है, जिसके चलते निदर्शन त्रुटि को आंकलन नहीं किया जा सकता है।

शर्त कारक एक वर्ष से दूसरे वर्ष परिवर्तित होते रहते हैं जो वर्षा आदि पर निर्भर करता है। शर्त कारक का निर्धारण पटवारी के द्वारा 'अन्नाज' के रूप में किया जाता है। यहीं कारण है कि इसे अन्नावारी व्यवस्था कहा जाता है। एक सामान्य पैदावार 16 'अन्नाज' के बराबर होते हैं, और इस वर्ष के फसल के आधार पर बहुत सारे वर्ष के 'अन्नाज' का अनुमान लगाया जाता है। परंपरागत विधि स्पष्ट रूप से व्यक्तिपरक होते है और यह व्यक्ति के उद्देश्य पर आधारित होते हैं।

संमंक संकंलन के दोनो हीं तकनीकों एवं विधियों में बहुत सारे परिवर्तन करने की आवश्यकता है। सभी राज्यों से फसल काटने के प्रयोग के उद्धरण को लेना चाहिए, और सामान्य पैदावार की गणना को प्रति एकड़ वास्तविक औसत पैदावार का चलायमान औसत पैदावार को लिया जाना चाहिए। भूखण्डों का चयन वैज्ञानिक आधार से किया जाना चाहिए और प्रत्येक फसल के लिए अलग–अलग शर्त कारक का आंकलन किया जाना चाहिए। एक राजस्व अंचल का औसत शर्त कारक, अधीनश्त ग्रामों के व्यक्तिगत शर्त कारक का साधारण माध्य होना चाहिए। एक तहसील या जिले के लिए प्रत्येक राजस्व अंचल औसत माध्य का भारांकित माध्य की गणना किया जाना चाहिए। अन्नावारी के संकल्पना को परिवर्तित करके प्रतिशत की अवधारणा को सम्मिलित किया जाना चाहिए।

हाल में, पैदावार के संकल्पना में परिवर्तन किये गये हैं। अब इसे, ''वास्तविक प्रति एकड़ पैदावार का चलायमान औसत जिसका निर्धारण 10 वर्ष के अवधि में फसल कटने के परिणाम के आधार पर की जाती हैं'' के रूप में परिभाषित किया जाता है।

(a) **यादृच्छिक निदर्शन विधिः** यादृच्छिक निदर्शन सर्वेक्षण विधि की सिफारिश वर्ष 1919 से पहले हीं की गई थी और कुछ राज्यों ने इसको अजमाया भी, लेकिन वित्तीय एवं कुछ अन्य कठिनाईयों के कारण इसको छोड़ दिया। ICAR ने यादृच्छिक प्रतिदर्श सर्वेक्षण विधि का सर्वप्रथम प्रयोग 1942 में सूती फसल के लिए किया। बाद में, इस विधि का विस्तार, खाद्य फसलों के लिए उतर प्रदेश, पंजाब, तामिलनाडू, उड़िसा में किया गया। मध्य प्रदेश में 1943 से, फसल काटने पर सर्वेक्षण, यादृच्छिक प्रतिदर्श विधि का आयोजन के ICAR निगरानी में पंश्चिम बंगाल को छोड़कर सभी राज्यों में किया गया, जहां के कार्य को भारतीय सांख्यिकी संस्थान के देखभाल में संपादित किया गया।

इस विधि के अनुसार, प्रत्येक तहसील के प्रत्येक ग्रामों में से 2–3 भूखण्डों को यादृच्छिक निदर्शन विधि के आधार पर चयन करते हैं। प्रत्येक चयनित क्षेत्र के (33’ × 16 ½) आकार वाले भूखण्ड का चयन यादृच्छिक तरीके से किया जाता है। चयनित भूखण्ड में फसल कटाई, दॉवाई, छांटाई, एवं वजन यथाशीघ्र हीं किया जाता है और विशेष प्रयोग के आयोजन के आधार पर हीं आर्द्रता के लिए भत्ता दिया जाता है। राज्य के राजस्व एवं कृषि विभाग के कर्मचारियों तथा अधिकारियों के द्वारा क्षेत्र कार्य को सम्पादित किया जाता है। इस सर्वेक्षण के लिए ICAR तकनीकी मार्गदर्शन देता है। यह विधि परंपरागत विधि से कहीं लाख गुना श्रेष्ठ विधि है। औसत पैदावार को सीधे ज्ञात किया जा सकता है। यह विधि

वस्तुनिष्ठ है और इसमें त्रुटियों को एक निश्चित मात्रा तक कम या निकाला जा सकता है।

2. **NSSO श्रृंखलाः**

NSSO मुख्य व बड़े अनाजों के लिए लगातार सर्वेक्षण करता रहा है। NSSO के अनुसंधानकर्ता गण जो ग्रामों में विविध प्रकार के आंकड़े एकत्र करते हैं उन्हें हीं फसल पैदावार सांख्यिकी के आंकड़े एकत्र करने की जिम्मेवारी भी सौंप दिया जाता है। NSSO इस काम में बहुत सफल नहीं हो सके क्योंकि अनुसंधानकर्ता बहुत बार संबंधित ग्रामों में फसल कटाई के समय नहीं पहुंच पाते थे। NSSO द्वारा एकत्रित आंकड़े लगभग 33% कार्यालयी आंकलन से श्रेष्ठ होते हैं। इस अन्तर का पता NSSO निम्नलिखित कारकों से लगाते हैं:

(i) दो ऐजेंसियों द्वारा लिये गये प्रतिदर्श भूखण्डों का बनावट और आकार में अन्तर और सीमा पक्षतपात एवं स्थैतिक पक्षपात के कारण।

(ii) 'नाली कारक' में अन्तर

(iii) चक्र के स्थिति में अनुसंधानकर्ताओं के लगातार चलायमान होने के कारण उपयुक्त फसल कटाई के समय की कठिनाईयां।

(iv) आंकलन के विधियों में अन्तर।

(v) निरीक्षण के विधियों में अन्तर।

फसल पूर्वानुमान

फसल उत्पादन के आंकलन की वस्तुगत या कर्मवाची प्रक्रिया, पूर्व की सामान्य पैदावार एवं शर्त कारक पर आधारित व्यक्तिपरक प्रक्रिया प्रतिस्थापित की गई। आज के समय में उत्पादन आंकलन 95 प्रतिशत अनाज के उत्पादन के फसल कटाई प्रयोग पर आधारित है। कृषि क्षेत्र के सूचकांक, उत्पादन एवं उत्पादकता पर लगातार तैयार किये जाते हैं। प्राथमिक अभिलेख कर्मचारी को गहन प्रशिक्षण और उनके कार्यों का व्यापक निरीक्षण किया जाता है।

कृषि सांख्यिकी के विकास में NSSO के द्वारा जो भूमिका निभाई गई वह सम्मानीय है, यह एक दोहरी भूमिका है, (1970-71) तक 25$^{\text{वां}}$ चक्र कर चुकी है। प्रथम, यह राज्यों कों एकरूपी संकल्पनाएं, परिभाषाएं एवं अन्य विस्तृत एवं परिणाम को समन्वयित करते हुए, फसल उत्पादन के सर्वेक्षण के आयोजन हेतु तकनीकी मार्गदर्शन प्रदान करता है। दूसरा, यह भूमि उपयोगिता सर्वेक्षण एवं 7 प्रमुख अनाज फसलों के उत्पादन के स्वतंत्र आंकलन हेतु फसल कटाई प्रयोग का आयोजन कराता है।

इन आंकलनों में विस्तृत विविधता है जो आंकलन राज्य एजेंसियों एवं फसल आंकलन के लिए 1963 में योजना आयोग द्वारा स्थापित एक तकनीकी समिति जिनका काम दो श्रेणियों के आंकलन में विद्यमान असदृश्यता का पता लगाना था। CSO समिति को सचिवीय सहायता देती है और इन विषयो में विभिन्न प्रकार के अध्ययन का भी आयोजन करती है। समिति के सिफारिशों पर आधारित, NSS के कार्य को 1970–71 से हीं अनुकूल बनाया जा रहा है ताकि NSS के विशिष्टता का कुशलता से प्रयोग किया जा सके मुख्य रूप से राज्य एजेसिंयों द्वारा फसल क्षेत्र के प्राथमिक गणना के सांख्यिकी जांच एवं

केवल प्रेक्षक स्तरीय पर फसल कटाई परीक्षण के कार्य को लिया ताकि राज्य के फसल आंकलन सर्वेक्षण को और बेहतर बनाया जा सके।

फसल पूर्वानुमान शुरू में 10 फसलों के साथ किया गया, अब 38 फसलों को इसमें सम्मिलित किया गया है, जिन्हें 6 बड़े समूहों में वर्गीकृत किया गया है, जैसा नीचे दिखलाया गया है। ये सभी प्रकाशित है।

1. अनाज – चावल, ज्वार, बाजरा, मक्का, रागी, छोटे बाजरा, गेंहू और जौ।
2. दाल – चना, टूर दाल, अन्य खारीफ एवं रबी दालें।
3. तिलहन – मूंगफली, सीजमम, रेप एवं सरसों, अलसी एवं अरंडी के बींज।
4. रेशें – सूती, जूट, सन सन एवं मेस्टा।
5. वृक्षारोपण – चाय, कॉफी, रबर एवे नारियल।
6. विविध – गन्ना, आलू, तम्बाकू, काली मिर्च, अदरक एवं मिर्च।

फसल पूर्वानुमान का प्रकाशन इस उद्देश्य से किया जाता है कि वास्तव में फसल को काटने से पूर्व हमारे पास एक जानकारी उपलब्ध हो सके कि कितना प्रत्याशित उत्पादन होगा। ऐसे सांख्यिकी की उपलब्धता इस बात पर निर्भर करता है कि प्रकाशन का समय वास्तविक रूप से फसल के कटाई से कितना पहले किया जा रहा है। इस विचार के अन्त के साथ, विभिन्न फसलों का अनुमान निरन्तर रूप से एक निश्चित अन्तराल में किया जाता है। सामान्यतया तीन आकलन को हीं प्रकाशित किया जाता है, लेकिन कुछ निश्चित फसल जैसे गेहूं और सूती आदि फसलों के लिए तीन से अधिक आंकलन का प्रकाशन किया जाता है। प्रथम आकलन का उद्देश्य, जो बुआई माह के बाद प्रथम अंक के रूप में प्रकाशित होता हैं, संकेत देता है कि बीज बुआई के समय फलस क्षेत्र का आकार एवं मौसम किस प्रकार का है। यह सरकार एवं व्यापारी को इस योग्य बनाता है कि फसल के चरित्र के बारे में एक संभावित विचार या भाव को समझ या जान सके। दूसरा आंकलन जो पहले अंक के दो महीन बाद प्रकाशित होता है, जो बुआई के क्षेत्र, कटाई के वक्त फसल का स्वभाव एवं कुछ फसलों के स्थिति मे संभावित पैदावार के बारे में विस्तृत जानकारी प्रस्तुत करता है। अन्तिम आंकलन कुल बुआई क्षेत्र, कटाई के बाद मात्रात्मक आंकलन या प्रत्याशित पैदावार के बारे में विस्तृत जानकारी प्रदान करता है। कीमत पर टिप्पणी, निर्यात आदि को भी अन्तिम आंकलन के अनुमान में सम्मिलित किया जाता है। ये आंकलन आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय, कृषि एवं सिंचाई मंत्रालय, भारत सरकार के द्वारा भारत में मुख्य फसलों के क्षेत्र एवं उत्पादन का आंकलन अंक में प्रकाशित होता है। हाल के वर्षों में आधारभूत आंकड़ों के उपलब्धता को तेज करने हेतु लिए गये कदम में, समय से योजना के रिर्पोटिंग के लिए योजना पर अत्याधिक बल दिया गया, जिसमें 1969–70 का मुख्य फसलों के क्षेत्र एवं उत्पादन का आंकलन सम्मिलित है। इस योजना का उद्देश्य प्रमुख फसलों के क्षेत्र एवं उत्पादन के आंकलन तथा बुआई एवं पैदावार के तुरंत बाद के प्राप्त उत्पाद के बीच समय पश्चत्ता को कम करना था। यह योजना 13 राज्यों में सफलता पूर्वक चल

रही है। ऐसा प्रतीत होता है कि अन्य राज्यों में भी इसे धीरे–धीरे विस्तृत किया जाय।

16.3.2 विविध कृषि सांख्यिकी

1. **खाद्य सांख्यिकी/आंकड़े:** खाद्य सांख्यिकी का प्रकाशन, एनुअल बुलेटिंन इशुड ऑन फूड स्टैटिसटिक्स में, आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय, कृषि एवं सिंचाई मंत्रालय के द्वारा किया जाता है। उस प्रकाशन में खाद्य अनाजों के आधिक्य या घाटा, खाद्य अनाजों का आयात आदि दिये जाते हैं।
2. **पशुधन एवं मुर्गी पालन सांख्यिकी:** मवेशी सम्पति का भारतीय अर्थव्यवस्था में शुरू से महत्वपूर्ण स्थान रहा है, और मवेशी सम्पति से संबंधित आंकड़ों का देश में महत्वपूर्ण उपयोग है। हमारे देश में पशुधन सांख्यिकी का पूर्व के काल से उपयोगी रहा है। भारत में पशुधन सांख्यिकी की गणना भारत के लिए राज्य सचिव के काल में 1883 मे कि गई थी जिसके लिए सांख्यिकी संगोष्ठी ने विहित रूप प्रदान किया जिससे मवेसी गणना को पूरा किया गया। उसी के समय से मवेशी के संख्या व आंकड़े को प्रत्येक पांच वर्ष में 'भारत के कृषि सांख्यिकी' नाम से प्रकाशित होता रहा है। 1916 में भारत सरकार ने इसके स्थिति में सुधार करने का निर्णय लिया और संपूर्ण भारत के लिए मवेशी गणना कराना चालू किया। 1920 में मवेशी गणना का आयोजन किया और तभी से यह प्रति पांच वर्ष के अन्तराल में इसकी गणना राज्य सरकार द्वारा की जाती है और जिसका समन्वय संपूर्ण भारत के आधार पर आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय करता है। निदेशालय पशुगणना की तिथि एवं उसके प्रारूप को निर्धारित करती है। निर्धारित तिथि के संदर्भ में राज्य सरकार ग्रामीण एवं शहरी दोनों क्षेत्रों से पशु गणना, व्यवस्थित एवं उन्हें प्रकाशित करता है। राज्य सरकार द्वारा प्रायोजित जनगणना के अवसर का उपयोग मुर्गीयों से संबंधित आंकड़े का, कृषि मशीनरी और क्रियान्वयन करता है।

   विविध शीर्षक, जिसके अन्तर्गत मवेशी, मुर्गी एवं कृषि मशीनरी के आंकड़े एकत्र किये जाते हैं:

   a) पशु धन;

   (i) मवेशी, (ii) भैंस, (iii) भेंड़, (iv) बकरी, (v) घोड़ा एवं पोनिश (vi) अन्य पशुधन (खच्चर, गदहा, उंट, एवं सुअर)।

   b) कुक्कुट

   c) कृषि मशीनरी: (i) हल चलाना, (a) लकड़ी, (b) लोहा, (ii) गाड़ी, (iii) गन्ना क्रसिंग मशीन, (a) कार्य एवं शक्ति, (b) बैल से कार्य, (iv) पम्प सेट तेल के साथ (सिंचाई के उद्देश्य) (v) विद्युत पम्प, (सिंचाई के उद्देश्य) (vi) ट्रक्कटर (केवल कृषि के उद्देश्य के लिए), (vii) घानीज (a) 5 किलाग्राम से अधिक, (b) 5 किलोग्राम से कम।

   जनगणना का आयोजन करने के प्राथमिक उद्देश्य से कृषि मंत्रालय द्वारा, पिछले जनगणना तथा योजना एवं जनगणना कार्य के

योजना के समीक्षा के लिए एक तकनीकी कार्य समूह का गठन किया गया। 1966 के जनगणना के लिए केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन ने जनगणना उपरान्त प्रतिदर्श समीक्षा एवं जनगणन के कार्य का दोनों हीं तरीके आवरण एवं विषयवस्तु के जांच हेतु NSS को जिम्मेवारी सौंपी थी। इसके नवीनतम जनगणना को वर्ष 1972 में पूरा किया गया। पशुधन जनगणना के एकत्रित आंकड़े भारतीय पशुधन जनगणना में प्रकाशित किया गया। इस प्रकाशन में दूध उत्पादन, मक्खन, घी, मांस, अण्ड एवं चमड़े, पशुधन में विदेशी व्यापार तथा पशुधन के उत्पाद के उपयोगिता आदि से संबंधित आंकड़े भी सम्मिलित किये गये। प्रमुख पशुधन उत्पाद के उद्देश्य एवं विश्वसनीय उत्पादन आंकलन के आंकड़े अभी भी सतत् आधारित उपलब्ध नहीं है। IARS के द्वारा पशुधन के पालन तथा उत्पादन एवं प्रबंधन पर आधारित संमंक संकलन के विधियां विकसित की गई, इनसे संबंधित योजनाओं को 1970 से हीं विभिन्न राज्यों में लागू किया गया है। कृषि मंत्रालय ने सभी राज्यों से एक साथ आवश्यक आंकड़ों के संकंलन के लिए एक व्यवस्थित प्रतिदर्श सर्वेक्षण योजना विकसित करने के एक तकनीकी समिति की स्थापना की। विहित उद्देश्यों पर दिये गये समिति के सुझावों को लागू किया गयाः

3. **वन सांख्यिकी/आंकड़ेः** देश के भूमि का लगभग 23 प्रतिशत भाग क्षेत्र वन से अच्छादित है। वन सांख्यिकी को प्रकाशन 'भारतीय वन सांख्यिकी' में प्रकाशित होता हैं जिसका निर्गमन आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय, कृषि एवं सिंचाई मंत्रालय द्वारा किया जाता है। यह बुलेटिन निम्नलिखित सूचनाओं को सम्मिलित करता हैः

(i) वन के अधीन अच्छादित क्षेत्र को मालिकाना अधिकार, वैधानिक स्थिति एवं इमारती लकड़ी के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है। मालिकाना हक के अनुसार, वन क्षेत्र को उनके स्वामित्व अधिकार के आधार पर वर्गीकृत किया जाता हैं जैसे, राज्य सरकार, नागरिक अधिकारी, निगम इकाई एवं निजि व्यक्ति आदि। वैधानिक स्थिति के अनुसार, वन क्षेत्र को आरक्षित वन, संरक्षित वन एवं प्रत्येक प्रकार में स्वमित्व के अधीनष्त लवारिश वन। इमारती लकड़ी के संयोजन के अनुसार वन को (i) शंकुवृक्ष वन एवं (ii बड़े पत्ते वाले साल, सागवान तथा अन्य किस्म के वन।

(ii) खड़ी इमारती वृक्षों की मात्रा, जलावन लकड़ी एवं अन्य बढ़ने वाले वने। भारतीय वन सांख्यिकी विभिन्न प्रकार के वनों के आंकड़ों के साथ उपलब्ध इमारती लकड़ियों के सकल वार्षिक वृद्धि, प्राकृतिक नष्ट, वार्षिक कमी एवं शुद्ध वृद्धि आदि।

(iii) इमारती लकड़ियों एवं अन्य छोटे उत्पादों का उत्पादन।

(iv) वन विभाग में कार्यरत व्यक्तियों की संख्या।

(v) वन विभागों के राजस्व एवं व्यय के आंकड़ें।
(vi) वन उत्पादों के विदेशी व्यापार।

4. **मत्सय सांख्यिकीः** मत्सय सांख्यिकी अप्रर्याप्त, अतुलनीय, असंगठित एवं असमन्वयित हैं। जहां भी इस प्रकार के आंकड़े उपलब्ध हैं वे सभी हाल के खोज से संभव हुआ है। प्राथमिक रूप से 1950 में, केवल छोटे मछलियों के सांख्यिकी जो उपलब्ध थे, तामिलनाडू एवं पश्चिम बंगाल के मत्सय विभाग के मत्सय अभिलेख का प्रकाशन किया गया था। उपलब्ध मत्सय सांख्यिकी निम्नलिखित प्रकार के हैः
(i) बाजार रिर्पोट में उपलब्ध आंकड़े – भारतीय मत्सय संघ को बाजार से उपलब्ध आंकड़े DMI के द्वारा समक्ष रखी गई।
(ii) आंकड़े जो मत्सय शोध संस्थान एवं केन्द्रीय समुन्द्री मत्सय शोध संस्थान के द्वारा उपलब्ध है।
(iii) आंकड़े जो राज्य गजट एवं मत्सय विकास सलाहाकार से उपलब्ध है।
(iv) आंकड़े जो मत्सय उपयोग से संबंधित आंकड़े NSSO के द्वारा एकत्र किये जाते हैं।
पांचवी पंचवर्षीय योजना के शुरूआत से हीं, मत्सय सांख्यिकी के संकंलन पर विशेष ध्यान दिया जा रहा है।

CSO अध्ययन दल के काफी करीब सें संबंधित है, एवं राष्ट्रीय कृषि आयोग ने कृषि सांख्यिकी, सिंचाई सांख्यिकी, पशुधन सांख्यिकी, मत्सय सांख्यिकी एवं वन सांख्यिकी के विकास के लिए समिति का गठन किया है। आयोग ने भूमि उपयोगिता एवं फसल सांख्यिकी के अच्छादित क्षेत्र को विस्तृत करने के लिए 1978–79 में समिति के कार्यालय को बढ़ाया और पश्चिम बंगाल, उड़िसा एवं केरल आदि राज्य में विभिन्न अवस्था में कृषि सांख्यिकी के आधार पर पूर्ण संमंक संकलन के विधि को लागू किया गया।

16.3.3 कृषि उत्पादन के सूचकांक

कृषि उत्पादन के सूचकांक देश में खाद्य आपूर्ति एवं खाद्य स्थिति के दिशा का अध्ययन करने के लिए बहुत हीं उपयोगी है। भारत में सूचकांक का निर्माण 19 वीं शताब्दी के चौथे, चौथाई में प्रारम्भ की गई, लेकिन कृषि उत्पादन के सूचकांक का निर्माण की शुरूआत केवल स्वतंत्रता के उपरान्त हीं हुई। कृषि एवं सिंचाई मंत्रालय इन निर्देशांकों का निर्माण करती है।

1950–51 तक, कृषि उत्पादन के सूचकांक का निर्माण, 19 प्रमुख कृषिगत पदार्थों पर, 1934–35 से 1938–39 के पंचवर्षीय अवधि को आधार मानते हुए आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय, खाद्य एवं कृषि मंत्रालय द्वारा किया गया था। ये सभी निर्देशांक निरपेक्ष थे और एक पुनरीक्षित निर्देशांक कृषि उत्पादन के लिए 1950–51 में, 1949–50 को आधार वर्ष मानकर निकाला गया। 1953–54 के बाद अन्तिम जून 1950 को बनाया गया। इसमें 28 फसलों को सम्मिलित किया गया जिसके उत्पादन के त्वरित आंकलन उपलब्ध थे। विभिन्न फसलों के लिए भार, प्रत्येक फसल का आधार वर्ष के दौरान कुल

उत्पादन के अनुपात के रूप में निर्धारित किया गया। सम्मिलित फसल एवं उनको दिये गये प्रत्येक भार निम्नलिखित सारणी में दी गई हैः

वस्तु/ पदार्थ	**समूह**	**भार**	**वस्तु/ पदार्थ**	**स्मूह**	**भार**
1. खाद्य अनाज			2. गैर खाद्य अनाज		
(a) अनाज			(a) तिलहन		
(i) खरीफः	चावल	35.3		मूंगफल	5.7
	ज्वार	5.0		सीमम	1.2
	बाजरा	2.7		रेप एवं मस्टर्ड	2.0
	मक्का	2.1		लिनसीड	0.8
	रबी	1.2		कैस्टर सीड	0.2
	छोटा बाजरा	1.5			
		47.8		कुल तिलहन	9.9
			(b) रेशें		
(ii) रबी:	गेहूं	8.5		सूती	2.8
	बेरली	2.0		जूट	1.4
		10.5		मेस्टा	0.3
	कुल अनाज	58.3		कुल रेशें	4.5
(b) दाल			(c) वृक्षारोपण,		
	ग्राम	3.7		चाय	3.3
	तुर	1.1		कॉफी	0.2
	अन्य दाल	3.8		रबर	2.1
	कुल दाल	8.6	कुल वृक्षारोपण		3.6
	कुल अनाज	66.9	(d) अन्य फसलें:		
				गन्ना	8.7
				तम्बाकू	1.9
				टालू	1.0
				मिर्च (काली)	1.2
				मिर्च (सुखा)	2.0
				अदरक (सुखा)	0.3
			कुल विविध फसलें		**15.1**
			कुल गैर अनाज फसलें		**33.1**

सूचकांक की गणना, प्रत्येक व्यक्तिगत फसल के लिए उत्पादन के सापेक्षिक भारित सामानान्तर माध्य ज्ञात किया जाता था। सापेक्षिक उत्पादन को ज्ञात करने के लिए चेन आधारित विधि के प्रयोग की अनुमति कॉबरेज को

बढ़ाने के साथ–साथ आंकलन तकनीक में भी परिवर्तन हेतु दी गई। इस प्रकार, प्रत्येक फसल के लिए अखिल भारतीय उत्पादन को सापेक्षिक उत्पादन, उसके पिछले वर्ष के उत्पादन को आधार मानकर व्यक्त किया गया। उत्तरकालीन, उस फसल विशेष के उत्पादन सूचकांक को ज्ञात करने के लिए संबंधित फसल के सापेक्षिक उत्पादन को आधार अवधि के उत्पादन से जोड़ा गया। उप समूह, समूह एवं सभी वस्तुओं के उत्पादन सूचकांक, फसल उत्पादन निर्देशांकों के भारित सामानान्तर माध्य की गणना करके ज्ञात किया जाता था।

पुनरीक्षित श्रृंखला

त्रैवार्षिक 1961–62= 100 के अन्त के साथ कृषि उत्पादन के सूचकांक के पुनरीक्षित श्रृंखला, आर्थिक एवं सांख्यिकी निदेशालय, भारत सरकार के द्वारा लाई गई। नई श्रृंखला 1965 ई. में डॉ. वी. जी. पान्सें के अध्ययक्षता में गठित तकनीकी समिति के सिफारिशों पर आधारित था, जो कृषि आर्थिक से संबंधित सूचकांक के विषय क्षेत्र, अच्छादन क्षेत्र, विधियां आदि के विभिन्न कृषि सांख्यिकी सूचकांक का विभिन्न स्तर पर देखना व अवलोकन करती थी। आगे, बहुत सारे श्रृखलांए अर्थात निवल बुआई क्षेत्र निर्देशांक, क्रॉपिंग पैर्टन, फसल गहनता एवं शुद्ध बुआई क्षेत्र के प्रति एकड़ उत्पादकता को भी पहली बार भारत में लाई गई एवं इन्हें लागू की गई।

पुनरीक्षित श्रृंखला के अन्तर्गत कुल 38 फसलों को सम्मिलित करते हुए इन्हें दो मुख्य समूह एवं आठ उप समूहों में विभाजित किया गया। पुनरीक्षित श्रेणी में देश में खेती की जाने वाली सकल फसल क्षेत्र के लगभग 94 प्रतिशत भाग को सम्मिलित किया गया। दो श्रेणियों में सतत्ता को का पालन करने के लिए, नये श्रेणी को पूराने श्रेणी के साथ उचित परिवर्तक कारक के द्वारा किसी विशेष फसल के आधार वर्ष/अवधि के अनुरूप्या सापेक्ष जोड़ा गया।

16.3.4 भारत में कृषि सांख्यिकी

कृषि की दशवार्षिक विश्व जनगणना, खाद्य एवं कृषि संगठन, संयुक्त राष्ट्र संघ के द्वारा प्रायोजित की जाती है। संपूर्ण प्रोजेक्ट विश्व के सभी जगहों का लगभग एक हीं समय में विश्व मापदंड के अनुसार राष्ट्रीय कृषि जनगणना को संकंलित किया जाता है। विश्व कृषि जनणना कि ओर प्रथम कदम सन् 1924 ई. में अर्न्तराष्ट्रीय कृषि संस्थान, रोम के द्वारा उठाया गया, जिसके लिए सदस्य देश सहमत हुए और अपने देशों में संस्थान द्वारा तैयार की गई समान तुलनीय सामान्य कृषि जनगणना को कराने लगे। इसका उद्देश्य था कि एक कार्यवाही में, इन सभी देशों से अर्न्तराष्ट्रीय स्तर पर फसल क्षेत्र भूमि धारिता के अनुसार, एवं पशुधन से संबंधित एक समान तुलनात्मक सूचनाएं प्राप्त किया जा सके। 63 देश एवं शासित देश सन् 1930 ई. के प्रथम जनगणना में सम्मिलित हुए थे एवं इनमे से केवल 46 देशों ने भूमि धारिता के अनुसार तथा बाकि देशों ने भौगोलिक क्षेत्रों को विभिन्न स्तरों के समग्र के रूप में प्रदर्शित किया। संस्थान का उद्देश्य वहीं था कि प्रत्यके दस वर्ष के निरंतर अन्तराल में जनगणना कराई जाये परन्तु 1939 में हीं दूसरे विश्व युद्ध छिड़ जाने के कारण 1940 में या तो कुछ देशों हुआ हीं नहीं और कुछ में चालू हुआ पर पूर्ण नहीं हो सका। अगला विश्व कृषि जनगणना का आयोजन 1950 ई. में खाद्य एवं

कृषि संगठन, संयुक्त राष्ट्र संघ के निगरानी में हुआ जिसने सन् 1945 ई. में अर्न्तराष्ट्रीय कृषि संस्था को प्रतिस्थापित किया और संस्था के उत्तरदायित्व को अपने कंधे में लिया। 106 देशों एवं शासित देशों ने इस जनगणना में भाग लिया। तीसरी विश्व कृषि जनगणना 1960 ई. में पूरी की गई। यह एक व्यापक जनगणना थी एवं इसका अच्छादन क्षेत्र भी सन् 1950 ई. के तुलना में अधिक था। चौथी विश्व कृषि जनगणना सन् 1970 ई. में प्रायोजित की गई।

भारत, FAO(खाद्य एवं कृषि संगठन) द्वारा प्रायोजित दस वार्षिक विश्व कृषि जनगणना में भाग लिया था। जनगणना कार्य को करने के लिए तकनीकी निगरानी, केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन से संबंधित कार्य समूह करती है। प्रथम दोनों 1954–55 एवं 1961–62, प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSSO) के संकल्पना पर आधारित थे एंव उनके परिणाम राज्य स्तर पर तथा सपूंर्ण भारत स्तर पर उपलब्ध थे।

कृषि विकास के नये रणनीतियों के संदर्भ में जिसे भारत सरकार ने 1966–67 में चालू किया, कृषि धारिता के संरचना एवं विशेषताओं का विस्तृत ज्ञान, प्रभावी एवं योग्य योजना तथा क्रियान्वयन के लिए अनिवार्य हो गया। उपरोक्त उद्देश्य के लिए, हम प्रचालन धारिता एवं स्वमित्व धारिता के अन्तर को समझने में ज्यादा रूचि रखते हैं। प्रचालन धारिता वे सभी भूमि होते हैं जिन्हे पूरा या आंशिक रूप से कृषि उत्पादन एवं निश्चित तकनीकी इकाई के द्वारा एक व्यक्ति बिना शीर्षक, वैधानिक रूप, स्थानिक के प्रचालन करता है। चूंकि प्रचालन धारिता एक कृषि में निर्णय लेने के लिए आधारभूत इकाई हैं और इसके फलस्वरूप विकास के उद्देश्य से कई व्यक्तिगत जोतकों में सुधार किया जा सकता है। प्रचालन भूमि धारिता पर जनगणना उनके संख्या, काश्तकारी संबंध, जोतों के आकार एवं जोत गतिविधि से संबंधित महत्वपूर्ण आंकड़े प्रदान करते हैं।

इन सभी विचारों के मध्य नजर, भारत सरकार ने पहली पर पूर्ण गणना पर आधारित कृषि जनगणना देश में कराई जाय। यह एक बड़ा हीं साहसिक कार्य था कि कृषि सांख्यिकी जिसके अन्तर्गत 60,00,00,000 भूमि धारक देश में मौजूद है, उनसे संबंधित आंकड़े एकत्र करना एक चुनौती भी है। अन्य देशों से भिन्न, भारत में कृषि सांख्यिकी एकत्र करने एवं रख–रखाव का विस्तृत प्रारूप है जो राजस्व तंत्र के द्वारा भूमि अभिलेख का रख–रखाव किया जाता है। वर्तमान कृषि सांख्यिकी, फिर भी, व्यक्तिगत क्षेत्र से संबंधित हैं और इसका समग्र विभिन्न भौगोलिक स्तरों जैसे ग्राम, राजस्व अंचल निरीक्षक, तालूका/तहसील, जिला आदि पर की जाती है। हमारे कृषि जनगणना में क्या आवश्यकता है, फिर भी संकलित आंकड़े प्रत्येक भूमि धारिता से संबंधित होती है।

भारत में सर्वप्रथम व्यापक रूप से कृषि जनगणना, कृषि वर्ष 1970–71 में संदर्भित तौर पर की गई थी। यह सदा के लिए भारत में कृषि सांख्यिकी के जगत में बड़ा साहसिक शुरूआत था। देश में एक लाख ग्ग्रम स्तरीय क्रियात्मक इकाईयां 70.5 मिलियन विभिन्न विशेषताओं वाले प्रचालन धारिता से आंकड़े

एकत्र करने में लगे हुए है। प्रचालन के आकार का ज्यादा महत्व नहीं है लेकिन इसके संकलन के लिए बुद्धिमता एवं उद्देश्यपूर्ण तरीके से सूक्ष्म स्तरीय योजना बनाना ज्यादा महत्व है। भूमि की प्रचालन धारिता कृषि में निर्णय लेने का आधारभूत इकाई है, अतः कृषि के विकास के लिए कोई भी अर्थपूर्ण एवं प्रभावी रणनीति बनाने में कृषि धारिता के संरचनात्मक विस्तृत आंकड़ों का हाने निरपेक्ष रूप से आवश्यक है। जनगणना के आंकड़े जो पश्चत्ता महशूस की जाती है उसे भरने में सहायक हो सकते हैं।

जनगणना का आयोजन राज्य संघों द्वारा कृषि मंत्रालय के संपूर्ण निगरानी में की जाती थी। ज्यादतर राज्यों में राजस्व विभाग के प्राथमिक अभिलेख एजेसिंयों द्वारा क्षेत्र कार्य सम्पादित किये जाते थे। कुछ राज्यों में, कृषि विभाग के प्राथमिक कर्मचारी को भी इस काम के लिए रख लिया जाता था। क्षेत्र कार्य का निरीक्षण, राजस्व प्रेक्षक अधिकारियों/भूमि अभिलेख/कृषि/राज्य सरकार के सांख्यिकी विभाग द्वारा की जाती है। ग्यारह राज्य एवं दो केन्द्रशासित राज्यों ने सारणीयन के यांत्रिक माध्यम को अपना कर विद्युतीय संगणक का प्रयोग करके आंकड़ों का प्रासेसिंग कर रहे हैं। शेष राज्य मानवीकी या हस्त लिपि का हीं प्रयोग करते हैं। इस उद्देश्य के लिए राज्यों में विशेष सारणीयन इकाई की स्थापना की गई थी। प्रत्येक राज्य/केन्द्रशासित राज्य को जनगणना आंकड़ों के विश्लेषण के साथ जिलेवार आंकड़े अभिलेखित या रिपोर्ट करनी होती है।

इन जनगणना आंकड़ों के कुछ महत्वपूर्ण उपयोग संक्षेप में निम्नलिखित दिये गये हैं:

1. **उच्च्य पैदावार किस्म के कार्यक्रमः** कार्यक्रम को बल देने एवं क्रियान्वयन करने के क्रम में, यह जानना महत्वपूर्ण होता है कि किस प्रकार के कृषक ऐसे उच्च्य पैदावर किस्म के कार्यक्रम को अपनाया है; क्या अनवेन्षक पूर्णतया बड़े समूह एवं मध्यम कृषि समूह या क्या किसान भी कार्यक्रम के द्वारा लिये गये हैं, क्या किसान सम्पूर्ण अने क्षेत्र को इस कार्यक्रम के अधीन सम्मिलित किया है या केवल कुछ हीं क्षेत्र के अंश को सम्मिलित किया है; क्या वे सभी क्षेत्र जो उच्च्य पैदावार किस्म कार्यक्रम के अधीन हैं सिंचित क्षेत्र के अन्तर्गत आते हैं या उसका एक भाग मात्र सम्मिलित है। एक बार इन प्रश्नों का उतर, वे सूचनाएं देती हैं जिनका प्रयोग भविष्य के कार्यक्रम बनाने में किया जा सकता है। इस उद्देश्य के लिए, यह जरूरी है कि धारिता के अनुसार आंकड़े हो जिसमें धारिता की संख्या प्रत्येक के आकार के साथ, कुल जोत के साथ अनाज के जोतों का आकार के आंकड़े, आग सिंचित असिंचित क्षेत्र से संबंधित आंकड़े भी मिलने चाहिए।
2. **बहुफसली योजनाः** यह उपाय लम्बे समय तक खेत में रहने वाले फसल के स्थान पर अल्प अवधि वाले वे फसल जो कम समय में हीं तैयार होता है जो दूसरे फसल के सिंचाई की आवश्यकता पर निर्भर करता है और अधिक गहन तरीक से इसका प्रयोग किया जाता है। यह आवश्यक होता है कि निश्चित फसल चक्र के लिए क्षेत्रीय स्तर

पर मिट्टी की उर्वरकता, सिंचाई की आवश्यकता आदि के बारे में जानकारी रखी जाय। यहां पुनः एक विस्तृत लक्ष्य को तय करने से पूर्व प्रत्येक क्षेत्र को तय करें एवं फसल गहनत एवं चालू फसल स्वरूप के लिए सूचनाएं एकत्र करें, यह आवश्यक है कि धारिता को उनके आकार के अनुसार वर्गीकृत किया जाय।

3. **सिंचाई योजनाः** सिंचाई एवं धारिता के आकार के बीच संबंध का अध्ययन बहुत करीब से करने की आवश्यकता है। वर्तमान में, बहुत से ऐसे क्षेत्र हैं जहां नहर से हीं सिंचाई करते है, बारहमास सिंचाई की आवश्यकता नहीं होती और उन्हें संरक्षित सिंचाई, एक फसल के लिए केवल एक सिंचाई की जाती है। सूक्ष्म सिंचाई योजना के लोकप्रियता जैसे बोरिंग, पंम्पसेट, आदि जो जल आपूर्ति को और अधिक परिवर्तनशीलता प्रदान करता है और अधिक निरन्तरता प्रदान करती है तथा गहन जल योजना का प्रयोग हीं गहन खेती से फसल की प्राप्ति करता है। यह देखना आवश्यक है कि किस प्रकार के फसल सिंचिंत शर्त पर वर्तमान में विभिन्न धारिता के साथ खेती की जाती है। क्या व्यवसायिक फसलों के बढ़ने से खाद्य फसलों के धारिता आकार के बीच कोई संबंध है, एवं क्या सिंचाई के प्रकार में अन्तर हैं, स्त्रोत एंव संयोग में कोई अन्तर है, एक दूसरे को सम्पूरक करते हैं, फसल स्वरूप की गहनता धारिता में आकार में अन्तर प्रयोग सामग्रीयों में भी अन्तर पैदा करता है। जब तक वर्तमान अनुभव एवं रूवरूप का सावधानी पूर्वक अध्ययन नहीं किया जाय, खेती के आकार के संबध को नहीं समझा जा सकता है, यह क्षेत्र स्तर पर बड़े कार्यक्रम को विस्तृत तरीके से रखना कठिन होगा।

4. **उर्वरकः** उर्वरक के संदर्भ में विपणन एवं साख, वितरण, उत्पादन के लिए एक अर्थपूर्ण निर्णय लेने के लिए धारिता का आकार एवं विशेषताएं दोनों की जानकारियां आवश्यक होती है, जिस पर वर्तमान में उर्वरक प्रयोग किये जाते एवं उर्वरक के वृद्धि तथा समस्यओं को अपनाने के लिए धारिता के विभिन्न आकार को जानना आवश्यक होता है।

5. **कृषि साखः** कृषि साख योजना बनाने के लिए, यह आवश्यक है कि विभिन्न प्रकार एवं आकार के धारिता के बारे में जानकारी ज्ञात हो जिसके लिए साख की आवश्यकता है और साख के उद्देश्य भी पता होना चाहिए। यद्यपि ये आवश्यकताएं प्रति एकड़ के आधार पर व्यय की मात्रा, जिसे दिया जाना है, किसानों के धारिता की विशेषता पर निर्भर करता है। एक बड़ा किसान अपने बड़े धारिता व भूखण्ड पर अधिक राशि निवेश कर सकता है पर उसे खुद के साधन से हीं अधिक भाग को पूरा करना होगा। इस प्रकार, धारिता अनुसार सूचनाएं काफी हद तक साख योजना के क्रियान्वयन में मदद कर सकता है।

इसी प्रकार, सही नीतियां बनाने के लिए कृषि जनगणना के आंकड़े आवश्यक हो सकते हैं और कृषि मशीनरी के अधीनष्त योजनाए एवं

उनका क्रियान्वय, विशेष क्षेत्र योजनाएं, सेवा विस्तार को मजबूती एव प्रवाह देना तथा योजना के संदर्भ में प्रभावी रूपरेखा जैसे लघु किसान विकास एजेंसी एवं सीमान्त किसान तथा कृषक श्रमिक एवं जनजातिय परियोजना।

जनगणना को पूरा करने की विधियों को दो संवर्ग में होते हैं:—

1. राज्य में विस्तृत भूमि रिकार्ड सूचना, आवश्यक मदों में, प्रचालन धारिता के आकार वर्ग के अनुसार, जैसे;

(i) प्रचालन धारिता की संख्या एवं क्षेत्र, (ii) रिर्पोटिंग सिंचित धारिता की संख्या एवं सिंचिंत क्षेत्र, (iii) काश्तकार के अनुसार संख्या एवं क्षेत्र, (iv) विभिन्न भूमि प्रयोगों के अधीनष्त क्षेत्र, (v) स्त्रोत अनुसार सिंचित क्षेत्र एवं (vi) फसल अधीनष्त क्षेत्र, की प्राप्ति जिसे पूर्नसारणीयन विधि कहते हैं,

2. राज्य जहां विस्तृत भूमि रिकार्ड उपलब्ध नहीं है और जहां फसल गणना की व्यवस्था जिसमें पूर्ण गणना पर आधारित प्रचलित न होना, दिये गये सभी सूचनाओं पर स्वतंत्र प्रतिदर्श सर्वेक्षण को पूरा करना।

कृषि सांख्यिकी 1970—71, मिजोरम को छोड़कर देश के सभी राज्य/केन्द्रशासित राज्यों को सम्मिलित किया गया। उसी समय धारिता सर्वेक्षण एवं आगतों का सर्वेक्षण NSSO के द्वारा सम्पादित किया गया। बाद के जनगणना में, CSO के मदद से विस्तृत रूप में सम्पादित किया गया।

16.3.5 भारतीय कृषि सांख्यिकी की त्रुटियां

भारतीय कृषि सांख्यिकी बहुत से त्रुटियों एवं कमियों से पीड़ित है। इन कमियों के कारण ऐसे आंकड़ों की विश्वशनियता प्रश्नवाचक है। खाद्यान्न जांच समिति 1957, ने अवलोकन किया ''कि खाद्यान्न से संबंधित उपलब्ध सांख्यिकी बहुत ही अविश्वश्नीय हैं, हमे प्रत्येक प्रश्न के साथ सावधानी पूर्वक ध्यान आकृष्ट किया जाना चाहिए।'' समिति आगे कहती है, ''कि खाद्य उत्पादन की सांख्यिकी अपने स्वभाव से परिपूर्ण नहीं हो सकता है और वे कभी भी सांख्यिकी जैसे फर्म है वैसे हो जैसे औद्योगिक उत्पादन या बैंक साख या मुद्रा पूर्ति। लेकिन भारत में खाद्य उत्पादन सांख्यिकी के गुणवता एवं अच्छादन में धीरे—धीरे वृद्धि हुई है और वे अब काफी बेहतर हो गये जैसे कि आज से 10 वर्ष पहले थे। इनके संकलन में स्वयं वृद्धि हुई है, फिर भी, हाल के वर्षों में निश्चित तत्व उत्पादन के आंकड़ो एवं पूर्व के वर्षो के तुलना में अन्तर अतुलनीय है। कुछ त्रुटियों को, कृषि सांख्यिकी के समन्वय करने वाली तकनीकी समिति ने निम्नलिखित रूप से बिन्दुवार रेखांकित किया हैः

1. **अच्छादन में अन्तरः** यद्यपि स्थिति में अब काफी हद तक सुधार हुआ है, फिर भी अभी काफी कुछ इस संदर्भ में करना बाकी है। कृषि सांख्यिकी के अच्छादन में अन्तर है। ये अन्तर तीन प्रकार के हैः

(i) **अच्छादन क्षेत्र में अन्तर**–उपलब्ध कृषि आंकड़े व सांख्यिकी कुल क्षेत्र के केवल 89 प्रतिशत को छूट प्रदान करता है (811 एकड़ में से 721 एकड़)। शेष के लिए सुविधाजनक तरीके से या सन्निकअकरण आंकलन दिया जाता है। कुछ क्षेत्र ऐसे भी होते हैं जहां पहुंचा भी नहीं जा सकता है। रिपोर्ट भाग के कुछ क्षेत्र एवं गैर–रिपोर्टिंग भाग के अधिकतम क्षेत्रों का सर्वेक्षण नहीं किया जाता है।

(ii) **फसलों के अच्छादन में अन्तर**– कुछ निश्चित फसलों के उत्पादन के सूचनाएं उपलब्ध नहीं होते हैं जैसे फल एवं सब्जी, छोटे अनाज, चारा आदि। फसलों के अच्छादन मे अन्तर कृषि सांख्यिकी के कार्यक्षेत्र को सीमित करता है।

(iii) **मदों के अच्छादन में अन्तर**– कृषि के निश्चित अनुकूल मदें एवं सीधे ढ़ोए जाने वाले अप्रर्याप्त उपलब्ध होते हैं। जोतक धारिता, पशुधन, साखरहित आदि कुछ उपयुक्त उदाहरण है।

2. **परिभाषा, वर्गीकरण एवं तकनीक में एकरूपता की कमीः** पूरे देश में सांख्यिकी इकाईयों के एकरूप परिभाषाएं नहीं है। गणना की प्रक्रिया एवं विधियां दोनों हीं अन्तर है। यहां तक संकलित आंकड़ों के विश्लेषण के तकनीक भी पूरे भारत कें एक समान नहीं हैं। क्षेत्र सांख्यिकी संकलन के विधि, अस्थाई भूगतान क्षेत्र एवं स्थाई भुगतान क्षेत्र के बीच में भी अन्तर होते हैं। एकड़ों में संग्रहित सांख्यिकी, पूरे देश में एक सामान गुणवता वाली नहीं है। उदाहरण के लिए, पंजाब दो साल के लिए बिना जोती गई भूमि परती या बंजर या हल्का भूरा कहलाता है, महाराष्ट्र में यह अवधि 10 साल की और उतर प्रदेश में 5 साल की है। पैदावार आंकलन की तहनीक भी एक राज्य से दूसरे राज्य में अलग–अलग है। कुछ राज्यों इसे ''अन्नावारी व्यवस्था'' कहते हैं। सामान्य फसल के ''अन्ना इक्वावैलेंट'' सभी राज्यों में एक जैसा नहीं है। भिन्न राज्य भिन्न नियमों का पालन करते हैं। कुछ में एक जगह से दूसरे जगह में अन्तर होता हैं, यहां तक एक हीं राज्य भी दो जगहों में भिन्नता पाई जाती है। कटाई या पैदावार कीमत की परिभाषा एक समान नहीं हैं, क्योंकि कुछ राज्यों के महत्वपूर्ण बाजारों में औसत थोक कीमत, दूसरे राज्यों में इसका अर्थ खुदरा कीमत होता है। मिश्रित फसल के अधीन एवं बांध के अधीन एवं बिना जोते गये टूकड़े या फाहे के रिकार्डिंग क्षेत्र की विधियां भी अलग–अलग है।

3. **सारणीयन एवं प्रसंस्करण में त्रुटियांः** कृषि सांख्यिकी का वर्गीकरण एवं सारणीयन आज तक संतोषजनक नहीं है। जहां तक वर्गीकरण की बात है, अधिकतर समय यहे संतोषजनक नहीं होती है। उदाहरण के लिए, भूमि उपयोगित सांख्यिकी की नई वर्गीकरण, भूमि का विभिन्न उद्देश्यों के लिए कोई उचित या उपर्युक्त विचार नहीं देता है। ये वर्गीकरण आर्थिक कारकों एवं अन्य कारकों पर ध्यान अंकित नहीं करते हैं जिससे इसकी उपयोगिता कम हो

जाती है। यहां कृषि सांख्यिकी के वर्गीकरण के क्षेत्र में एवं उचित प्रसंस्करण हेतु अधिक कार्य करने की आवश्यकता है।

4. **प्राथमिक अभिकरण की त्रुटियांः** प्राथमिक अभिकरण के रिर्पोटिंग में भी निश्चित त्रुटियां पाई जाती है। यद्यपि, कृषि सांख्यिकी में, अस्थाई भुगतान क्षेत्र में स्थाई भुगतान क्षेत्र के तुलना अधिक विश्वशनियता हैं लेकिन इसमें सुधार की अभी काफी आवश्यकता है। प्राथमिक अभिकरण के रिर्पोटिंग में त्रुटियां होने के पीछे निम्नलिखित कारण हैं:

(i) लेखपाल पर काम का अधिक बोझ एवं अतिरिक्त नियमित कार्य में शामिल होना,

(ii) उन्हें अल्प पारिश्रमिक का दिया जाना,

(iii) कार्य के निष्पादन हेतु उनमें प्रशिक्षण का अभाव,

(iv) प्राथमिक अभिकरणों की लापरवाही एवं पूर्वग्रह से ग्रस्ति होना।

5. **पर्यवेक्षण एवं निरीक्षण में त्रुटिः** लेखपाल के कार्य की जांच कानूनगो, नायब–तहसीलदार एवं तहसीलदार के द्वारा की जाती है। ये सभी अधिकारी पहले से हीं प्रशासनिक कार्यों से अधिक बोझिल होते हैं; अतः, वे संमंक संकंलन से संबंधित कार्यों के लिए समर्पित नहीं होते हैं। वास्तव में, लेखपाल द्वारा की गई सम्पूर्ण प्रविष्टी की जांच यादृच्छिक निदर्शन विधि से की जानी चाहिए। यह सूचना देते हुए खुशी है कि कुछ राज्य सरकारें अब प्राथमिक अभिकरण के रिर्पोटिं कार्य के बेहतर पर्यवेक्षण एवं जांच के लिए बल दे रही है और लेखपाल द्वारा किये गये कार्यों को यादृच्छिक निदर्शन विधि से जांच के तरीकों या निमयों का धीरे–धीरे पालन कर रही है। हाल में, भारत सरकार ने कन्द्रीय पर्यवेक्षण एवं जांच योजना को प्रारम्भ किया है। फिर भी, इन एजेंसियों के द्वारा की गई पर्यवेक्षण कार्य उच्च्य गुणवता वाले नहीं हैं।

6. **त्रुटिपूर्ण समन्वयनः** कृषि सांख्यिकी के वर्तमान व्यवस्था की दूसरी त्रुटि उपयुक्त समन्वयन एवं योजना में कमी का होना है। बहुत से राज्यों में, कृषि विभाग, खाद्य एवं नागरिक आपूर्ति आदि संस्थाएं कृषि सांख्यिकी के आंकड़े एक दूसरे से स्वतंत्र होकर एकत्रित करते हैं और इन आंकड़ों को समन्वयित नहीं करते हैं। यह कार्य का अनुकृति है। बहुत से विभाग एक हीं समस्या के लिए एक दूसरे से स्वतंत्र होकर तदर्थ सर्वेक्षण का आयोजना करते हैं, परिणाम यह होता है कि कार्य का अनुकृति, समय एवं उर्जा की बर्बादी होता है। अब राज्य सरकारों द्वारा प्रयास किया जा रहा है कि सांख्यिकीय कार्यो को विभिन्न विभागों से समन्वयित किया जाय। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन, राज्य के विभिन्न सांख्यिकीय संगठनों से सांख्यिकीय कार्य को समन्वयित करता है।

7. **प्रकाशन में देरीः** बिना कोई ठोस कारण के कृषि सांख्यिकी के संकलित आंकड़ों के प्रकाशन में देरी संमंक संकलन बहुत उद्देश्य को सीमित व संकुचित करता है। समस–समय पर विभिन्न समितियों एवं आयोगों की नियुक्ति, लगातार इन कमियों को उजागर करने के लिए की जाती है और सांख्यिकी के अनुशंसित प्रकाशन को समय से प्रकाशित किया जाय। भारत एक बड़ा देश है और विभिन्न राज्यों में विभिन्न फसलों के बुआई का समय भी अलग है। संकंलन का क्रिया भी लम्बा होता है। आंकड़े सर्वप्रथम ग्राम स्तर पर

लेखपाल द्वारा एकत्रित किय जाते हैं, फिर वे तहसील स्तर पर संकलित किये जाते हैं, फिर जिला स्तर पर एवं राज्य स्तर पर एकत्रित किये जाते हैं और अंत में केन्द्रीय अधिकारियों द्वारा समन्वयित किया जाता हैं, जहां से वे अन्तिम रूप से प्रसंस्करण एवं प्रकाशन किया जाता है। इस लम्ब श्रृंखला में, यदि आंकड़े किसी भी स्तर पर बिलम्ब किये गये तो कई गुणा विलम्ब होगा। देरी को कम करने के लिए, सांख्यिकीय कार्य में रेडटैपिज्म या लालफिता शाही को छोड़ दिया जाना चाहिए। जिला सांख्यिकी अधिकारी को सीधे केन्द्रीय समन्वयक अभिकरण से संर्पक स्थापित करना चाहिए।

8. **किसी निश्चित मदों से संबंधित सांख्यिकी का उपलब्ध न होनाः** यहां तक आज के स्थिति में भी ऐसे बहुत से मद हैं जिनसे संबंधित सांख्यिकीय आंकड़े उपलब्ध नहीं है। भारत एक कृषिगत देश होने के कारण, यह आवश्यक है कि ग्रामीण अर्थव्यस्था के विशेषताओं से संबंधित सांख्यिकी होने चाहिए। ग्रामीण क्षेत्र के टेक्ना–अर्थव्यस्था को बड़े स्तर पर सर्वेक्षण का आयोजन करना चाहिए।

अंतिम साढ़े तीन दशक् के दौरान, बहुत सारी योजनाएं कृषि सांख्यिकी के विषयवस्तु एवं अच्छादन को उन्नत बनाने के लिए प्रारम्भएवं उसके शुद्धता को सुधारने के लिए प्रयास किये गये हैं। फिर भी, सांख्यिकी के अन्य क्षेत्रों के तरह कृषि सांख्यिकी के सुधार की प्रक्रिया लगातार चल रही है। एक वृहत एवं विश्वश्नीय आंकड़ों के बिना किसी भी कृषि योजना को तैयार करना एवं उसका पालन करना अपंगता सा महसुस होता है। विकासात्मक उपायों के कारण अर्थव्यवस्था में वृद्धि, नये समस्याओं को जन्म देती हैं और प्रायोजनों के क्रियान्वयन को अधिक तेज करने एवं विकास के विविध आयाम उभर के आया है। आगे, संमकों के सुधार में विस्तार, गुणवता, विस्यवस्तु को शामिल किया जा सकता है। इसके संकल्पना, परिभाषा एवं वर्गीकरण के पुनरीक्षित रूप को अपनाने से एक नई स्थिति अवश्य हीं दृष्टिगोचर होगी। पूराने एवं नये उद्यम के नये प्रकार के आंकड़े आवश्यक होते हैं। योजना उद्देश्य के लिए घटनाक्रम अनुासार आंकड़ों की उपलब्धता, कृषि सांख्यिकी को और महत्वपूर्ण बना देता है, इसके प्रत्येक चरण महत्वपूर्ण हैं। सुधार के विभिन्न उपायों को एक निश्चित क्रम में पालन किया जाना चाहिए। उत्तरोतर पंचवर्षीय योजनाओं के दौरान बहुत से उपाय को इस विचार से लिया गया कि जो अन्तर वर्तमान या प्रचलित कृषि सांख्यिकी एवं नये तरीकों से प्राप्त नये प्रकार के आंकड़ो से भरा जा सके।

16.4 सारांश

आथिंक नियोजन के विषयवस्तु में, भारत के सांख्यिकी का महत्व, आर्थिक नियोजन के द्वारा तीव्र आर्थिक प्रगति का होना महज चमत्कार नहीं हैं जिसे देश केवल एक रात में प्राप्त कर सकता है। एक बेहतर अर्थव्यवस्था बनाने या तैयार करने में समय लगता है। एक नियोजित आर्थिक प्रगति के लिए सांख्यिकी का होना आवश्यक है जिससे इसे तैयार एवं जांचा परखा जा सके। बिना उचित या प्रर्याप्त आंकड़ों के अच्छी आर्थिक प्रगति का नियोजन

नहीं किया जा सकता है और एक बेहतर नियोजन या योजना बिना प्रर्याप्त संमंक संकलन विधि के नहीं किया जा सकता है।

16.5 शब्दावली

सांख्यिकीः सांख्यिकी संमंकों के संकंलन, संगठन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं निर्वचन का अध्ययन है।

निर्देशांकः एक अर्थव्यवस्था या सेक्यूरिटि बाजार में होने वाले परिवर्तनों का सांख्यिकीय माप है।

16.6 बोध प्रश्न

खाली स्थानों को भरेंः

(i) राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS) का सृजन ———————— में किया गया था।

(ii) —————————— को माननीय सांख्यिकीय सलाहाकार के रूप में कैबिनेट ने 1949 मे नियुक्त किया गया था।

(iii) भूमि उपयोगिता सांख्यिकी का प्रकाशन ————————— में किया गया था।

(iv) ———————— अपने निरंतर सर्वेक्षण के दौरान मुख्या खाद्यान्न फसलों के पैदावार से संबंधित आंकड़ो को संकलित करते हैं।

16.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

(i) 1950, (ii) प्रो. पी. सी. महालानोबिस, (iii) भारत का कृषि सांख्यिकी, (iv) NSSO

16.8 स्वपरख प्रश्न

1. भारत में सांख्यिकी व्यवस्था पर एक आलोचनात्मक निबंध लिखें।
2. कृषि सांख्यिकी के भूमिका की चर्चा करें।
3. भारतीय अर्थव्यवस्था में कृषि क्षेत्र का क्या महत्व है?
4. भारत में कृषि उत्पादकता के निम्न होने के क्या कारण है?

16.9 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Fundamentals of Statistics : D.N. Elhance
2. Fundamentals of Statistics : Veena Elhance
3. Fundamentals of Statistics : B.M. Aggarwal
4. Fundamentals of Statistics : D.C. Sancheti
5. Fundamentals of Statistics : V.K. Kapoor
6. Statistics (Theory Methods & Applications) : S.L. Gupta
7. Fundamental of Statistics : B.N. Gupta

*****

इकाई 17 भारत में शासकीय सांख्यिकी

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि —

- जनगणना की व्याख्या कर सकें।
- जनगणना आयोजन करने की विधियों का वर्णन कर सकें।
- जनगणना आयोजन करने की विधियों के गुण एवं विशेषताओं को परिभाषित कर सकें।
- जनगणना के लिए गणना की विधियों का वर्णन कर सकें।

17.1 प्रस्तावना

किसी देश के समस्त लोगों के जनसांख्यिकीय, सामाजिक, सांस्कृतिक एवं आर्थिक स्थिति से संबंधित आंकड़ों के संकंलन, व्यवस्थितिकरण, विश्लेषण एवं प्रसार करने की प्रक्रिया को हीं जनगणना कहते हैं। इसे दस वर्ष के बाद किसी एक समय बिन्दु में किया जाता है। भारत जैसे भौतिक लक्षण के विविधता वाले बड़े देशों में शांतिपूर्वक, समय से जनगणना का काम करवाना, प्रशासन के लिए बहुत बड़ा अभ्यास होता हैं। वर्तमान जनगणना, 1881 के जनगणना से लिया गया हो जो तत्कालिन जनगणना आयूक्त डब्लू. सी. पाउडेन के द्वारा 17 फरवरी 1881 में बड़ा कदम लेते हुए पहली बार वर्तमान जनगणना के स्वरूप की नींव रखी। इसके उपरान्त हीं प्रत्येक दस के अन्तराल

में यह जनगणना बिना किसी व्यवधान के कराई जाती है। स्वतंत्र भारत में पहली जनगणना 1951 में हुई जो जनगणना श्रृंखला की सांतवीं जनगणना थी। इस जनगणना का गणना अवधि 9 फरवरी से 28 फरवरी 1951 था। भारतीय जनगणना की योजना एवं कियावन्यन दोनों हीं बड़ा चुनौतीपूर्ण एवं दिलचस्प रहा है। इस इकाई में आप जनगणना के उपागम, जनगणना की विधियां एवं जनगणना की गणना करने की विधियों के बारे में भी सीखेगें।

17. 2 जनसंख्या जनगणनाः अर्थ एवं विशेषताएं

जनसंख्या के जनगणना को परिभाषित इस रूप में किया जा सकता है, ''देश या सीमांकित शासित राज्य के सभी व्यक्तियों से संबंधित आर्थिक एवं सामाजिक, जनसांख्यिकीय आदि सूचनाओं का संकलन से व्यवस्थिति करण एवं प्रकासन तक की सभी प्रक्रियाए जो एक निर्धारित समय बिन्दु या अवधि में सम्पादित होती है।'' (राष्ट्रीय जनसंख्या जनगणना के सिद्धान्त एवं सुझाव – यू. एन.)। जनगणना के दो प्रमुख उद्देश्य हैं, एक स्थैतिक एवं दूसरा प्रवैगिक। स्थैतिक अर्थ में, यह सामूदाय के चित्र को प्रस्तुत करता है और किसी समय विन्दू के लिए यह निश्चित होता है। प्रवैगिक अर्थ में, यह ऐसा पद है जो क्रमागत श्रृंखला को इस प्रकार प्रस्तुत करता है कि जनसंख्या के गतिमान चित्र का तुलना किया जा सके जिससे जनसंख्या के आकार एवं जनसांख्यिकीय प्रवृति की दिशा भी पता चल जाता है।

मुख्य विषेषताएं

उपरोक्त दिये गये परिभाषा के अनुसार, जनसंख्या जनगणना की विशेषताएं निम्नलिखित हैंः

1. **सर्वभौमिकताः** एक जनगणना को सर्वभौमिक होना चाहिए। देश के सभी नागरिकों को जनगणना में निश्चित रूप से जोड़ा जाना चाहिए। इसका पूरा ध्यान रखा जाना चाहिए कि कोई भी व्यक्ति छूटे नहीं।
2. **यूगमपत गणनाः** जनगणना के इस विशेषता का विशेष महत्व है। जहां तक संभव हो संकलित जनगणना के सभी समुच्च एक हीं समय किसी समय विन्दू में किया जाना चाहिए। संमंकों में इस प्रकार के समय पश्चतिता तुलना के लिए अनुपयुक्त होता है।
3. **क्षेत्र का संक्षेप में परिभाषाः** जनसंख्या की जनगणना स्पष्ट रूप से परिभाषित भौगोलिक एवं राजनैतिक क्षेत्र के अनुसार होना चाहिए। किसी क्रमागत जनगणना में होने वाले क्षेत्र में परिवर्तन का उल्लेख स्पष्ट रूप से किया जाना चाहिए।
4. **नियमितताः** यदि जनगणना एक निश्चित अन्तराल में न हो तब, आंकड़ो के बहुत सारे मान विलुप्त हो सकते हैं। जनसांख्यिकी संबंधी प्रवृति के अध्ययन के क्रम में, यह आवश्यक होता है कि जनगणना नियमित रूप से हो। इसके अलावा, सभी देशों में नियमित रूप से जनगणना कराने पर, अर्न्तराष्ट्रीय स्तर पर जनसंख्या संबंधी अध्ययन के लिए ज्यादा उपयुक्त होगा।
5. **निजि एवं व्यक्तिगत संमंक का संकंलनः** जनगणना में तथ्यों का संकलन निजि व्यक्तियों के बारे में किया जाता है। प्रत्येक व्यक्ति स्वयं

एवं अपने परिवार के बारे सूचना देता है। विहित जनगणना में प्रश्नों के उद्देश्य एवं क्षेत्र सांस्कृतिक स्तर पर निर्भर करता है।

6. **सरकारी प्रायोजनः** चूंकि जनगणना कराने के लिए वृहत संगठन एवं पूंजी की आश्यकता होती है, जिसका देख रेख सरकार के द्वारा अच्छी तरह से होता है और वह लोगों को सही सूचना देने के लिए बाध्य कर सकती है।

17.2.1 जनगणना की उपयोगिता

प्राथमिक रूप से जनगणना प्रशासन के उद्देश्य से अर्थशास्त्री, सामाजशास्त्री एवं व्यवसायियों को जनगणना से संबंधित बहुत हीं महत्वपूर्ण सूचनाएं प्रदान करती हैः

1. जनगणना के आधार पर दिये गये संख्यात्मक सूचना से अर्थशास्त्री देश की जनसंख्या के प्रवृति का अध्ययन कर सकते हैं, इनका व्यवसायिक संरचना, शहरीकरण की प्रवृति, इत्यादि। अन्य आंकड़ों के मदद से वह जनसंख्या वृद्धि एवं खाद्यान पूर्ति, व्यवासायिक परिवर्तन एवं औद्योगिक सूरक्षा प्रदान करने के प्रभाव के बीच और शहरीकरण एवं ग्रामीण हथकरघा आदि के बीच सहसंबंध का पता लगा सकते हैं। ऐसे आंकड़े देश के बहुत सारे सामाजिक आर्थिक समस्याओं कि ओर ध्यान आकृष्ट करते हैं एवं सरकार को नीतियां बनाने में सहायता प्रदान करता है। यह राष्ट्र के कार्य शक्ति के अनुमान, बेरोजगारी की मात्रा एवं उसके लिए शिक्षा तथा श्रमशक्ति योजना और आवास के निर्माण के लिए योजना बनाने; शहरी एवं क्षेत्रिय विकास आदि में मदद करता है। योजनागत आर्थिक वृद्धि, के लिए ऐसे सांख्यिकी बहुत महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि वे जनसंख्या से संबंधित सामाजिक आर्थिक तथ्यों के बारे में विस्तृत सूचनाएं प्रदान करते हैं।
2. सामाजशास्त्री उन संभावनाओं का अध्ययन कर सकते हैं जो शादी के उम्र या जो शिशु मृत्यु दर आदि को कम करने जैसे सुधारों के लिए प्रभावी हों। विभिन्न प्रश्नों जैसे, बेरोजगारी, रक्षा, प्रवास, परिवार नियोजन आदि को जनगणना के आंकड़ों के मदद से अच्छे तरीके से अध्ययन किया जा सकता है। सामाजिक बीमा योजना या ग्रामीण कल्याण योजना जनगणना के तथ्यों पर आधारित होते हैं।
3. सामान्यतः व्यापार यह महसूसा नहीं करता है कि जनगणना की रिर्पोट में ऐसी जानकारियां होती है जो व्यवसायी के लिए महत्वपूर्ण होती है। अगर उन्हें पता होता तो उनकी कई समस्याएं दूर हो सकती है। भारत में आंतरिक व्यापार का एक बड़ा हिस्सा है और जनगणना में दर्ज प्रत्येक मानव एक ग्राहक है। अपने उपभोक्ताओं के व्यावसायिक ज्ञान और उनके अवस्थिति का ज्ञान बहुत उपयोगी है। ऐसे क्षेत्रों का अनुमान, जहां बाजारों के विकास की संभावना है, विभिन्न क्षेत्रों की आबादी के जन घनत्व के ज्ञान के साथ बनाया जा सकता है। व्यावसायिक आंकड़ों के आधार पर, जिन वर्गों के लिए उनके सामान की विशेष जरूरत है जैसेः– शिशुओं, महिलाओं, सैनिकों के लिए एक

व्यापार से जोड़ा जा सकता है। वह वर्तमान व भविष्य के श्रम की आपूर्ति का अनुमान लगा सकता है और उत्पादन योजनाओं में समायोजन कर सकता है।

4. जनसंख्या रिर्पोट एक परिवहन एजेंसी जैसे, रेलवे को कई महत्वपूर्ण सूचनाएं प्रदान करती है। घनी आबादी वाले क्षेत्रों या यदि परिवहन के साधनों में सुधार या नये साधन को प्रस्तुत करना हो तो जनसंख्या रिर्पोट, परिवहन प्राधिकरण की ओर ध्यान आकर्षित करने चाहिए। विज्ञापन एजेंसियों के लिए ऐसे क्षेत्रों में अपने विज्ञापन को बढ़ावा देना अच्छा होगा। यदि किसी शहर की आबादी गिरती है तो उस क्षेत्र की मांग गिरती रहेगी, जब तक कि मौजूदा आबादी की मांग नहीं बढ़ जायेगी। इसी प्रकार आयु संरचना, लिंगानुपात, व्यावसायिक ढांचा में बदलाव भी वस्तु की मांग को उसी तरह प्रकाशित करेगी। जीवन बीमा कम्पनियां, जनगणना रिर्पोट में प्रकाशित लोगों के जीवन प्रत्याशा का अनुमान लगा सकती है। विद्यायी विधेयकों को निकालने के लिए विधायी प्रावधान तैयार करने की आवश्यकता का अध्ययन कर सकते हैं, जिनसे समाज, जनगणना के आधार पर कुछ तथ्यों से ग्रस्त हैं। जनगणना लोगों और राज्य दोनों के लिए बहुत उपयोगी है। चुनावी पुनर्स्थापन जनगणना के आधार पर की किये जाते हैं।

17.3 जनसंख्या जनगणना आयोजित करने की विधियां

सामान्यतया जनगणना आयोजित करने की दो विधियां हैं। ये विधियां निम्नलिखित हैं:

1. वास्तविक विधि (De-Facto Method) and
2. वैधानिक विधि (De-Jure Method)

1. **वास्तविक विधिः** इस विधि के अन्तर्गत जनगणना करते समय उन सभी व्यक्तियों का, जो उस देश मे क्षेत्रीय अधिकार क्षेत्र मे दिन या रात को उपस्थित हैं, जनगणना आंकड़ों में गिना या सम्मिलित किया जाता है। देश में रहने वाले सभी व्यक्तियों को एक साथ गिना जाता है जहां वे जनगणना रात में किये जाते हों। इसे गिनने की किया एक साथ, एक रात या एक विशेष तिथि को किया जाना चाहिए; इसीलिए इस विधि को 'एक रात गणना पद्धति' या साधारणतया 'एक तिथि प्रणाली' कहा जाता है।
2. **वैधानिक विधिः** जनगणना आबादी के इस पद्धति के तहत उनको उनको उसके रहने के आवास के आधार पर गिना जाता है कि जहां यह जनगणना के समय होता हो। इस विधि को गणना की 'आवधिक प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है।

17.3.1 इन विधियों के गुण एवं अवगुण

गुण	
वास्तविक विधि	**वैधानिक विधि**

(a) यह विधि बहुत साधारण है। गणनाकर्ताओं को उन सभी व्यक्तियों को सूचित करने के निर्देश दिये जा सकते है जो किसी निर्दिष्ट समय पर प्रत्येक घर या किसी अन्य स्थान पर मौजूद हैं। साथ में या बाहर रहने वाले व्यक्तियों जो अलग–2 परिस्थितियों या अलग–2 कारणों से अपने घर से दूर रहते हैं, का विस्तृत और विवरण देने की कोई जरूरत नहीं है।	(i) यह विधि स्थाई आबादी को प्रदर्शित करती है औ यही आवश्यक है।
(b) वास्तविक विधि की परिभाषा बहुत वस्तुनिष्ठ है। गणना करने वाले व्यक्ति को व्यक्तिगत फैसले के आधार पर किसी व्यक्ति को शामिल करने या निकालने के मामले की कोई सीमा रेखा नहीं हो सकती है।	(ii) यह विधि वास्तविक विधि के अपेक्षाकृत अधिक सटीक परिणाम देती है, अगर गिनती अधिक आबादी के समय तक चलती है। जहां तक घुमन्तु या खानाबदोश आबादी का संबंध है, अगर गणना की अवधि बढ़ा दी गयी है तो वहां दोहरी गिनती या चूक का खतरा होता है। डी फैक्टो काउन्ट मे एक बहुत गतिशील जनसंख्या के लिए गिनने की प्रक्रिया में गंभीर समस्या/ गलती हो सकती है यदि गणना लम्बी अवधि तक चले। हलांकि ऐसी स्थिति में वैधानिक गणना के भी गलत होने की संभावना है, फिर भी यदि लोगों की जनगणना के दौरान गतिशील अधिकांश लोग सामान्य आवास के एक स्थिर स्थान को बरकरार रखते हैं, तो त्रुटि भी कम हो सकती है।
(c) जनगणना गणना का वास्तविक तरीका अंतर्राष्ट्रीय तुलनात्मकता के लिए विशेष रूप से लाभ प्रद है, क्योंकि यह एक स्पष्ट मानक है जिसे स्थानिक स्थितियों में	(iii) कुछ कानूनी या संवैधानिक आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए जरूरी जनसंख्या की गणना आवश्यक होती है, जैसे संसद या विधानसभा चुनाव के

अतंर के बावजूद सार्वभौमिक रूप से लागू किया जा सकता है। अंतर्राष्ट्रीय एजेंसी के सिफारिश के अनुसार ''अंतर्राष्ट्रीय तुलनात्मकता के उद्देश्य के लिए यह अपेक्षित है कि वास्तविक गणना की जा सकती है अर्थात् गणना के समय देश में मौजूद सभी व्यक्यिों की संख्या।'' एक वैद्य आधार पर कोई भी आंकड़े जो वांछित हो सकता है, वास्तविक आंकड़ों के अलावा प्राप्त किया जाना चाहिए।	लिए, सीमांकित घटक, या कुछ विशेष अनुदान या सुविधाएं। कुछ देशों में जनसंख्या की गणना कानूनी रूप से आवश्यक होते हैं।
(d) वास्तविक आंकड़े पूलिस अधिकारियों, चिकित्सा देखभाल, सार्वजनिक उपयोगिताओं, परिवहन आदि की जरूरतों के आंकलन के लिए स्थानीय अधिकारियों के लिए उपयोगी होंगी और व्यावसायी जो निवासियों और आंगतुकों द्वारा उत्पाद या सेवाओं की मांग को पूरा करते हैं।	(iv) सीखने एवं कुछ समुदाय के प्रशासन के लिए आवास, शिक्षा आदि, वैधानिक विधि द्वारा एकत्र आबादी के आंकड़े वास्तविक आंकड़ों के मुकाबले ज्यादा उपयुक्त हैं। जन्म और मृत्यु दर की गणना के लिए, वैधानिक विधि द्वारा एकत्रित आबादी के आंकड़े अधिक उचित हाते हैं।

सीमाएं	
वास्तविक विधि	**वैधानिक विधि**
1. जनगणना एक रात मे पूरी नहीं हो सकती है। वास्तविक विधि से जनगणना के लिए भारी संख्या में व्यक्तियों को नौकरी पर सिर्फ एक रात के लिए रखना होगा और यह काफी खर्चीला होगा। यदि जनगणना कार्य कई दिनों तक चलता रहे तो परिणाम में दोहरी गणना की समस्या उत्पन्न होगी, इस प्रकार जनसंख्या की वास्तविक विधि दोषपूर्ण परिणाम उत्पन्न कर सकती है। इस कमी से छूटकारा पाने के लिए आप	1. जनसंख्या की गणना के वैधानिक विधि के अनुसार, संपूर्ण एवं सुसंगत रिर्पोटिंग सुनिश्चित करने के लिए अधिक दृढ़ परिभाषाएं और विशिष्ट निर्देश आवश्यक हैं। सामान्यतया, गिनती की इस पद्धति का उद्देश्य प्रत्येक व्यक्ति को रिकार्ड करना है, हालाकि इसमें कई व्यावहारिक कठिनाईयां हैं। यहां ऐसे व्यक्तियों की संख्या हो सकती हैं जिनके पास 'निश्चित आवास का स्थान' नहीं है।

तौर पर ये किया जाता है कि निर्दिष्ट दिन या रात के रिकार्ड की जांच की जाती है। अगर कोई यहां नहीं है तो उसकी प्रविष्टी हटा दी जाती है और नये लोगों की प्रविष्टि की जाती है। 2. हालांकि यह विधि सरल है, फिर भी यह सैन्य व कूटनीतिक कर्मियों के लिए अपवादों से जूझ रहा है। आबादी की इस पद्धति के तहत उन लोगों की भी गिनती की जाती है जो वास्तव में हमारे देश से संबंधित नहीं है लेकिन इस देश में हीं रह रहें हैं और वे लोग जो देश से संबंधित है लेकिन विदेशों में ड्यूटी कर रहे हैं, को बाहर रखा गया है। इस प्रकार आबादी के आंकड़े विकृत हो जाते हैं। हम उन लोगों के बारे मे आंकड़े एकत्र करते हैं, जिनके बारे में हमे कोई रूचि नहीं हैं, लेकिन उनके बारे में जानकारी नहीं मिलती, जिनके बारे में हम चितिंत है। 3. इस विधि के साथ एंक और समस्या भी है। यह उन निर्दिष्ट दिन या रात को यात्रा कर रहे हैं—उन्हें कैसे गिना जाना चाहिए? उस स्थान पर जहां रेलगाड़ी है या वहा, जहां वो व्यक्ति जा रहे हैं या वहां जहा से वे आ रहे हैं।	2. त्रुटि एवं चूक की संभावना एवं दोहराव की संभावना इस विधि मे अधिक है, उदाहरण के लिए स्कूल में बच्चे, शहर में या बाहर, व्यक्तिगत या परिवार जो अनिश्चित लम्बे समय के लिए काम करने के लिए घर छोड़ते हैं, गतिशील जनसंख्या, ऐसे परिवार जिनके पास एक से अधिक आवास हो, आदि। हलाकि विस्तृत निर्देश जारी कर ऐसे व्यक्तियों की गिनती के गिनती के लिए एक सामान आधार सुनिश्चित कर एक से अधिक बार गिनती किये जाने वाले लोगों को बाहर रखा जा सकता है। यहां तक कि उन लोगों के जिनके निवास स्थान की जगह निश्चित है लेकिन जनगणना के समय अनुपस्थित है, अगर उनके लिए रिर्पोटिंग करने वाले व्यक्तियों को उनके बारे में अच्छी जानकारी नहीं है तो उन्हे एक से अधिक बार गिनती कर सकते हैं।

17.4 गणना की विधियां

सामान्यतया गणना के दो तरीकें होते हैं।

1. **कैनवासर विधि या नियुक्त द्वारा गणनाः** इस विधि के अन्तर्गत सूचना एक व्यक्ति के साक्षात्कार द्वारा प्राप्त की जाती है और आधिकारिक तौर पर नियुक्त गणक द्वारा निर्धारित समय पर दर्ज किया जाता है।

2. **घरेलू विधि या आत्मगणनः** इस विधि के तहत अनुसूची पहले से ही फॉर्म भरने के निर्देशों के साथ घरों में वितरित कर दिये जाते हैं। जानकारी दर्ज करने के लिए घर के मूखिया को जिम्मेदारी दी जाती है। यह सूची बाद में अधिकारियों द्वारा एकत्रित किये जाते हैं।

कभी–कभी इन दोनों तरीकों के संयोंग का प्रयोग एक साथ किया जाता है, गणनाकर्ताओं द्वारा सूचनाओं के भाग और जवाब को भरा जाता है।

निम्नलिखित चित्र जनसंख्या गण्ना के विधि को प्रदर्शित करता है।

जनसंख्या गणना की विधि

वास्तविक विधि **वैधानिक**
विधि

वास्तविक कैनवासर वास्तविक घरेलू वैधानिक कैनवासर
वैधानिक घरेलू
विधि विधि विधि
विधि

17.5 भारत में जनसंख्या की जनगणना

भारत को 1981 में दूनिया की सबसे बड़ी जनणना करने का अनूठा अनुभव प्राप्त हुआ और सैकड़ों वर्षों के दशकीय जनगणनाओं का एक अखण्डित रिकार्ड भी है। भारतीय जनगणना को हमारे देश व लोगो के बारे में जानकारी का सबसे प्रामाणिक और व्यापक व विस्तृत स्त्रोत माना जाता है। भारतीय जनगणना का इतिहास वर्ष 1872 की तारीख है जब जनसंख्या के आंकड़ों को दर्ज करने के लिए एक सुव्यवस्थित प्रयास किया गया। 1801 ई. में ग्रेट ब्रिटेन में ब्रिटिश जनगणना श्रृंखला शुरू हुई थी लेकिन भारतीय जनगणना एक संपूर्ण रूप में 1851–52 में मद्रास प्रांत में शुरू हुई। 1852 ई. में उतर–पश्चिम सीमान्त प्रांत की जनगणना के बाद तथाकथित सिपाही विद्रोह (पहला स्वतंत्रता संग्राम–1857 ई.) में हस्तक्षेप किया गया। लेकिन आबादी के आंकड़ों का आधार 23 जुलाई, 1856 के सांख्यिकीय डिस्पैच संख्या–2 द्वारा निर्धारित किया गया था, जिसमें बताया गया है कि ''भारत सरकार ने उन साधनों पर विचार किया था, जिनके द्वारा भारत की जनसंख्या की सामान्य जनगणना 1861 में किया जायेगा।'' पहली जनगणना उत्तर–पश्चिमी सीमांत प्रांत में 10 जनवरी 1865 को डब्लू. सी. पॉउडेन द्वारा आयोजित की गई थी, ''इस सिद्धान्त पर कि आबादी को एक वास्तविक घर से घर की गणना करके उसी दिन निर्धारित किया जाना चाहिए। लिंग का विभेद, दोनों महान धर्म व लोगों को वर्गीकृत करना–कृषि या गैर–कृषि व्यवसायों के अनुसार, विभिन्न व्यवसायों से, लोगों के रूझानों और उनकी विभिन्न जातियों के आधार पर।'' 1869 में हंटर डाइरेक्टर जनरल ऑफ स्टेस्टिकल सर्वे के रूप में नियुक्त किये

गये, जो कि बाद में अपने प्रसिद्ध गजट के द्वारा सुसज्जित किये थे। उन्होंने भारत की जनगणना के लिए 1869 से 1872 तक व्याख्यात्मक सर्वेक्षण किये और उके बाद इस साल की एक परिपक्व जनगणना कराने की सलाह दी जो कभी भी बिना रूकावट के जारी रहे। 1872 की जनगणना न तो यूनिफॉर्म थी और न हीं पूरे देश में विस्तारित किया गया था। 1872 के बाद अगली जनगणना 1881 मे की गई थी औस तभी से यह नियमित रूप से प्रत्येक दस साल के अन्तराल के साथ चल रही है। नवीनतम जनसंख्या गणना 2011 में पूरा ड्डआ था। देश के जनसंख्या जनगणना के हमारे अध्ययन के लिए इस विभिन्न जनगणनाओं में बांट लेते हैं, जो कि निम्न प्रकार से हैं।

1. 1941 तक की जनगणना,
2. 1951 की जनगणना,
3. 1961 की जनगणना,
4. 1971 की जनगणना,
5. 1981 की जनगणना,
6. 1991 की जनगणना,
7. 2001 की जनगणना,
8. 2011 की जनगणना।

17.5.1 2011 की जनगणना

यह जनगणना इक्कीसवीं शताब्दी की दूसरी जनगणना तथा तीसरी सहस्त्राब्दी के रूप में एक ऐतिहासिक और युगान्तिक जनगणना है। यह देश में उपलब्ध प्रचुर मात्रा में मानव संसाधनों की स्थिति, उसकी जनसांख्यिकी, संस्कृति और आर्थिक संरचना जो एक शताब्दी से सौ साल के संक्रमण को प्रदर्शित करता है, के मापदण्ड एवं आंकड़ों को बतलाती है।

जनसंख्या

2011 की जनगणना के आधार पर भारत की जनगणना 1,210 मिलियन (623.1 मिलियन पुरूष एवं 587.4 मिलियन महिला) हैं। भारत 135.79 मिलियन वर्ग किलोमीटर के साथ विश्य के कुल सतही क्षेत्रफल का मात्र 2.4 प्रतिशत हीं है। जबकि, यह विश्व की 16.7 प्रतिशत जनसंख्या का भारी हिस्सा लिए हुए है। भारत की जनसंख्या जो कि 20वीं शताब्दी के समय लगभग 238. 4 मिलियन थी वह अब 1,210 मिलियन तक पहूंच चुकी है। 1911–21 की जनगणना को छोड़कर 1901 से लेकर अभी तक प्रत्येक जनगणना में जनसंख्या में वृद्धि दर्ज की गई है।

जनसंख्या घनत्व

जनसंख्या सघनता का एक महत्वपूर्ण सूचकांक जनसंख्या घनत्व है। यह प्रति वर्ग किलोमीटर व्यक्तियों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। 2011 में भारत की जनसंख्या घनत्व 382 प्रति वर्ग किलोमीटर था। जनसंख्या घनत्व 1991 से 2011 के मध्य सभी राज्यों और संघशासित प्रदेशों में बढ़ी है। प्रमुख राज्यों में दिल्ली 2011 में 11,320 के जनघनत्व के साथ सबसे ज्यादा घनी आबादी वाला राज्य है चंडीगढ़ दूसरे तथा पंडुचेरी का तीसरा स्थान है।

लिंगानुपात

लिंगानुपात प्रति हजार पुरूषों पर स्त्रियों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है यह एक महत्वपूर्ण सामाजिक सूचक है, जो दिये गये अवधि में समाज में स्त्री और पुरूष के बीच समानता मापने के लिए प्रयोग किया जाता है। 2011 में भारत में लिंगानुपात 943 था। 20वीं शताब्दी के शुरूआत में यह 972 था और 1941 तक नियमित रूप से गिरावट प्रदर्शित किया है।

साक्षरता

2011 की जनगणना के प्रयोजन के लिए साठ और उससे अधिक आयु वाले व्यक्ति, जो किसी भी भाषा को समझने के साथ, पढ़ और लिख सकते हैं, उन्हें साक्षर माना जाता है। एक व्यक्ति जो केवल पढ़ सकता है लेकिन लिख नहीं सकता है, साक्षर नहीं है। 1991 से पहले के आंकड़ों मे पांच साल से कम उम्र के बच्चों को निरक्षर माना जाता था। 2011 की जनगणना के परिणाम बताते हैं कि देश के साक्षरता दर में वृद्धि हुई है। देश की साक्षरता दर 73 प्रतिशत है जिनमें पुरूष की साक्षरता दर 80.90 प्रतिशत तथा महिलाओं की 64. 60 प्रतिशत है। 94.0 प्रतिशत की साक्षरता दर के साथ केरल राज्य पहले स्थान पर बरकरार है, जबकि 91.84 प्रतिशत के साथ लक्षद्वीप दूसरे और 91. 33 प्रतिशत के साथ मिजोरम तीसरे स्थान पर है। 61.80 प्रतिशत की साक्षरता दर के साथ इस सूची में बिहार अन्तिम पायदान पर है, जबकि 65.38 प्रतिशत अरूणाचल प्रदेश व 66.11 प्रतिशत के साथ राजस्थान क्रमशः हैं। केरला 96.11 प्रतिशत की पुरूष साक्षरता व 92.07 प्रतिशत की महिला साक्षरता दर के साथ दोनों में सर्वोच्च स्थान बनाये हुए है। जबकि, बिहार पुरूष (71.20 प्रतिशत) व महिला (51.50 प्रतिशत), दोनों में साक्षरता दर के अन्तिम पायदान पर स्थित है।

सारणीः जनसंख्या 1901–2011

जनगणन	जनसंख्या	दशकीय वृद्धि		दशकीय वृद्धि में परिवर्तन		औसत वार्षिक चरघातीय वृद्धि दर (%)	1901 के आधार पर प्रगतिशील वृद्धि दर (%)
		निरपेक्ष	प्रतिशत	निरपेक्ष	प्रतिशत		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1901	23,83,96,327	-	-	-	-	-	-
1911	25,20,93,390	1,36,97,063	5.75	-	-	0.56	5.75
1921	25,13,21,213	-7,72,177	-0.31	-1,44,69,240	-6.05	-0.03	5.42
1931	27,89,70,238	2,76,56,025	11.00	2,84,28,202	11.31	1.04	17.02
1941	31,86,60,580	3,96,83,342	14.22	1,20,27,317	3.22	1.33	33.67
1951	36,10,88,090	4,24,27,510	13.31	27,44,168	-0.91	1.25	51.47
1961	43,92,34,771	7,81,46,681	21.64	3,57,19,171	8.33	1.96	84.25
1971	54,81,59,652	10,89,24,881	24.80	3,07,78,200	3.16	2.22	129.94
1981	68,33,29,097	13,51,69,44	24.6	2,62,44,564	-0.14	2.20	186.64

		5	6				
1991	84,64,21,039	16,30,91,942	23.87	2,79,22,497	-0.79	2.14	255.05
2001	1,02,87,37,436	18,23,16,397	21.54	1,92,24,455	-2.33	1.95	331.47
2011	1,210,854,977	18,21,17,541	17.70	-860411	-0.47	1.64	407.64

स्त्रोतः जनगणना 2011

नोटः

1. देश के 1941.51 तथा 1951.61 की 'दशकीय वृद्धि' तथा 'दशकीय प्रतिशत वृद्धि' की गणना में, टूनसांग जिले की जनसंख्या 1951 (7,025) और 1961 की जनसंख्या (83,501) तथा मॉन जिले की 1961 की जनसंख्या (5,774), जो कि नागालैंड के जनगणना में शामिल नहीं किये गये हैं, क्योंकि इस क्षेत्र को 1951 में पहली बार गणना में शामिल किये गये, इस कारण तुलनीय नहीं है।
2. असामान्य परिस्थितियों की वजह से 1981 की जनगणना असम में नहीं हो पाई थी, इसलिए 1981 में असम की जनगणना 'प्रक्षेपण' द्वारा तैयार किया गया।
3. 1991 की जनगणना जम्मू और काश्मीर में, असामान्य स्थितियों के कारण नहीं की जा सकी। इसलिए, यहां की 1991 कि जनगणना के लिए आबादी का आंकड़ा 'प्रक्षेपण' द्वारा तैयार किया गया।
4. 2001 की जनगणना में मनिपुर राज्य के सेनापति जिले के पाओमाता, माओ–मरम और पुरूल उपखण्डों की अनुमानित संख्या शामिल थी।

17.5.2 जनसंख्या आकार के अनुसार राज्य एवं संघ शासित राज्य

2011 में कोटि या स्थान	राज्य / केन्द्रशासित राज्य	2011 में जनसंख्या	2001 में जनसंख्या	भारत की कुल जनसंख्या का प्रतिशत		2011 में कोटि या स्थान
				2011	2001	
1	2	3	4	5	6	7
1	उतर प्रदेश	199,812,341	166,197,921	16.51	16.16	1
2	महाराष्ट्र	112,374,333	96,878,627	9.28	9.42	2
3	बिहार	104,099,452	82,998,509	8.60	8.07	3
4	पं. बंगाल	91,276,115	80,176,197	7.54	7.79	4
5	आंध्र प्रदेश	84,580,777	76,210,007	6.99	7.41	5
7	मध्य प्रदेश	72,147,030	62,405,679	5.96	6.07	6
6	तमिलनाडू	72,626,809	60,348,023	6.00	5.87	7
8	राजस्थान	68,548437	56,507,188	5.66	5.49	8
9	कर्नाटक	61,095,297	52,850,562	5.05	5.14	9
10	गुजरात	60,439,692	50,671,017	4.99	4.93	10
11	उड़ीस	41,974,218	36,804,660	3.47	3.58	11
12	केरल	33,406,061	31,841,374	2.76	3.10	12
13	झारखण्ड	32,988,134	26,945,829	2.73	2.62	13

14	असम	31,205,576	26,655,528	2.58	2.59	14
15	पंजाब	27,743,338	24,358,999	2.29	2.37	15
17	हरियाणा	25,351,462	21,144,564	2.09	2.06	16
16	छतिसगढ़	25,545,198	20,833,803	2.11	2.03	17
18	दिल्ली	16,787,941	13,850,507	1.39	1.35	18
19	जम्मू और काश्मीर	12,541,302	10,143,700	1.04	0.99	19
20	उतराखण्ड	10,086,292	8,489,349	0.83	0.83	20
21	हिमांचल प्रदेश	6,864,602	6,077,900	0.57	0.59	21
22	त्रिपूरा	3,673,917	3,199,203	0.30	0.31	22
23	मेघालय	2,966,889	2,318,822	0.25	0.23	23
25	मणिपूर	1,855,794	2,93,896	0.15	0.22	24
24	नागालैंड	1,978,502	1,990,036	0.16	0.19	25
26	गोवा	1,458,545	1,347,668	0.12	0.13	26
27	अरूणांचल प्रदेश	1,383,727	1,097,968	0.11	0.11	27
28	पुडुचेरी	1,247,953	974,345	0.10	0.09	28
29	मिजोरम	1,097,206	888,573	0.09	0.09	30
30	चण्डीगढ़	1,055,540	900,635	0.09	0.09	29
31	सिक्किम	610,577	540,851	0.05	0.05	31
32	अंडमान निकोबार	380,581	356,152	0.03	0.03	32
33	दादर और नगर हवेली	343,709	220,490	0.03	0.02	33
34	दमन और द्वीव	243,247	158,204	0.02	0.02	34
35	लक्षद्वीप	64,473	60,650	0.01	0.01	35

नोटः

1. मणीपूर के सेनापति जिले के उन तीन उपखण्डों, माओ मारम, पाओ माता व पुरूल को 2001 की जनगणना में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से हटा दिया गया था, इनके अनुमानित आंकड़े मणिपू व भारत की जनसंख्या में शामिल किये गये हैं।
2. 1991 की जनगणना में असामान्य परिस्थितियों में राज्य जम्मू एवं काश्मीर की जनगणना न होने के कारण प्रक्षेपण विधि से जनसंख्या की गणना की गई थी।

17.5.3 जन घनत्व के आधार पर राज्य एवं केन्द्रशासित राज्य

2011 में कोटि या स्थान	राज्य/ केन्द्रषासित राज्य	जनसंख्या घनत्व		2011 में कोटि या स्थान
		2011	2001	
1	दिल्ली	11,297	9,340	1
2	चण्डीगढ़	9,252	7,900	2
3	पुदुचेरी	2,598	2,034	3
4	दमन व द्वीव	2,169	1,413	5
5	लक्षद्वीप	2,013	1,895	4
6	बिहार	1,102	881	7

7	पं. बंगाल	1,029	903	6
8	केरल	859	819	8
9	उतर प्रदेश	828	690	9
10	दादर व नगर हवेली	698	449	13
11	हरियाणा	573	478	12
12	तमिलनाडू	555	480	11
13	पंजाब	550	484	10
14	झारखण्ड	414	338	16
15	असम	397	340	15
16	गोवा	394	364	14
17	महाराष्ट्र	365	315	17
18	त्रिपूरा	350	305	18
19	कर्नाटक	319	276	20
20	आंध्र प्रदेश	308	277	19
21	गुजरात	308	258	21
22	उड़ीसा	269	236	22
23	मध्य प्रदेश	236	196	23
24	राजस्थान	201	165	24
25	उतराखण्ड	189	159	25
26	छतीसगढ़	189	154	26
27	मेघालय	132	103	29
28	जम्मू और काश्मीर	124	100	31
29	हिमांचल प्रदेश	123	109	28
30	मणिपूर	122	103	30
31	नागालैंड	119	120	27
32	सिक्किम	86	76	32
33	मिजोरम	52	42	34
34	अंडमान और निकोबार	46	43	33
35	अरूणांचल प्रदेश	17	13	35

नोटः

2001 में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से मणिपूर के सेनापति जिले के माओ मरम, पाओमाटा व पुरूल उपखण्डों के अनुमानित आंकड़ों को शामिल किया गया है।

17.5.4 लिगांनुपातः 1901–2011

जनगणना वर्ष	लिंगानुपात (प्रति 1,000 पुरूष महिलाओं की संख्या)
1901	972
1911	964
1921	955

1931	950
1941	945
1951	946
1961	941
1971	930
1981	934
1991	926
2001	933
2011	943

नोटः

1. 1981 के लिए असम के प्रक्षेपित आंकड़ों का प्रयोग किया गया है।
2. 1991 के लिए जम्मू एवं काश्मीर के प्रक्षेपित आंकड़ों 2001 की जनगणना के आधार पर किया गया है।
3. 2001 की जनगणना में मणिपूर के सेनापति जिले के तीनों उपखण्डों, माओंमरम, पाओमाटा व पुरूल में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से जनगणना न हो पाने के कारण इन्हें बाहर रखा गया है।

17.5.5 साक्षरता दरः 1951—2011

वर्ष	**व्यक्ति**	पुरूष	**महिला**
1	**2**	**3**	**4**
1951	21.82	30.32	12.87
1961	31.47	42.49	19.74
1971	36.95	47.60	25.56
1981	44.92	55.95	33.20
1991	61.29	73.13	48.64
2001	69.14	79.66	57.80
2011	79.31	87.23	70.73

नोटः

1951, 1961 एवं 1971 की साक्षरता दर पांच वर्ष की आयु से उपर तक के हैं। 1981 से 2011 तक की साक्षरता दर 7 वर्ष की आयु से उपर से संबन्धित है।

17.6 भारतीय जनसंख्या सांख्यिकी की कमियां

सरकार व अन्य कई एजेन्सियों द्वारा गंभीर प्रयासों के बावनूद देश में आबादी के आंकड़े विभिन्न क्वार्टरस में विवाद का मुद्दा बना हुआ है। जिसमें से कुछ कमियों निम्न हैं:

1. **भौगोलिक विस्तारः** आमतैर पर राजनीतिक क्षेत्र मे एक जनगणना से दूसरे में बदलाव आया हैं। स्वतंत्रता से पहले वर्मा, पाकिस्तान, बांगलादेश भारतीय जनसंख्या गणना के एक हिस्सा थे। 1951 में भारतीय संघ में विलय के चलते रियासतों को भी सम्मिलित किया गया था। इस जनगणना में जम्मू और काश्मीर जो कि देश का एक अभिन्न हिस्सा है, को शामिल नहीं किया गया था। यह केवल 1961 की

जनगणना में जब जम्मू और काश्मीर भारत का अभिन्न हिस्सा था तब जनगणना में शामिल किया गया है। इसके अलावा देश के विशाल भौगोलिक क्षेत्र के वजह से अधिकांश दूर के क्षेत्र, जहां पहुंच संभव नहीं था, उन्हें छोड़ दिया गया। ऐसे क्षेत्रों को 1961 की जनगणना में सम्मिलित करने का प्रयास किया गया था। इन परिस्थितियों में जनसंख्या के आंकड़े एक अवधि से दूसरे अवधि तक पूरी तरह से तुलना नहीं हो पाता है।

2. **उम्र की परिभाषा**ः अलग–अलग जनगणना में उम्र को काफी भिन्न रूप से परिभाषित किया गया है। 1921 तक वर्ष पूरा होने के अनुसार आयु की गणना की गई थी। 1931 से निकटतम् जन्मदिन की उम्र के रूप में दर्ज किया गया था। 1951 मे इसे निकटतम जन्मदिन के उम्र में बदल दिया गया। इसके बाद यही प्रक्रिया अपनाई गयी। इस संदर्भ में, इस उदाहरण के अलावा पूर्व में बच्चे की आयु हमेशा 5 के गुणज के रूप में व्यक्त किया गया। यहां तक की शादी के प्रयोजनों के लिए वास्तविक उम्र छूपाया गया था। यहां तक की वृद्ध लोग भी इस प्रगतिशील संसार में अपने वास्तविक उम्र के प्रति जागरूक नहीं हैं। यह एक आश्चर्यजनक तथ्य है कि अधिकांश वृद्ध लोग अपनी वास्तकि जन्मदिन नहीं जानते हैं। वे सामान्यतया अपने जन्मदिन का अनुमान कुछ घटनाओं जैसे, युद्ध, भूकंप, आकाल आदि से करते हैं। महिलाएं भी अपनी वास्तविक उम्र से कम दिखने के लिए उम्र छूपाती हैं।
3. **पक्षपात पूर्ण जानकारी**ः कई सारे अवसरों पर यह अनुभव किया गया कि जो सूचनाएं रिकार्डिंग कर्मिकों को दर्ज कराई जाती है, वह पूर्वाग्रह से ग्रसित होकर की जाती है। सामान्यतया, पागलपन, गूगां, बहरा होने की सूचनाएं छूपा ली जाती है।

17.7 सुधार हेतु सुझाव

- आबादी जनगणना की तुलना के लिए, राज्य के सभी क्षेत्रों को प्रासंगिक जनगणना में शामिल होना चाहिए। यह प्रक्रिया जनगणना के तुलनात्मक अध्ययन के लिए आधार प्रदान कर सकती है, जो निति–निर्माताओं के अनुमान व नीतियां बनाने में सहायता प्रदान कर सकती है।
- जांचकर्ताओं या गुणकों के सही सूचना एकत्र करने के लिए उचित प्रशिक्षण प्रदान किया जाय।
- उतरदाताओं से वास्तविक उम्र प्राप्त करने के लिए, विशेष जागरूकता कार्यक्रम का चलाया जाना चाहिए, जिससे प्रयोज्य अपनी वास्तविक उम्र को बताएं।

17.8 सारांश

देश मे सभी व्यक्तियों से संबंधित जनसांख्यिकीय, सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक आंकड़ों को इकट्ठा करने, संकलन, विश्लेषण और प्रसार करने की प्रक्रिया को आबादी जनगणना के रूप में जाना जाता है। जनसंख्या रिर्पोट

रेलवे जैसी परिवहन एजेंसियों को कई उपयोगी जानकारी प्रदान करती है। मोटे तौर पर जनगणना करने के दो तरीके होते हैं:

1. वास्तविक विधि और
2. वैधानिक विधि।

1981 में भारत को दुनिया की सबसे बड़ी जनगणना करने का अनूठा अनुभव प्राप्त हुआ और दशकों के सैकड़ों वर्षों से भी अधिक वर्षों का एक अभिन्न रिकार्ड भी प्राप्त है। लिंगानुपात, जो कि प्रति हजार पुरूषों पर महिलाओं की संख्या के रूप में परिभाषित होता हैं, एक महत्वपूर्ण सामाजिक सूचक होता है जो कि किसी समय विशेष पर समाज में पुरूषों और महिलाओं के बीच प्रचलित समानता की सीमा को मापता है।

17.9 शब्दावली

- **जनगणनाः** दी गई आबादी के सदस्यों के बारे में व्यवस्थित रूप से सूचनाओं को प्राप्त व दर्ज करने की प्रक्रिया।
- **घनत्वः** दिये गये क्षेत्र या जगह पर लोगों या वस्तुओं की मात्रा।
- **गणनाः** उन वस्तुओं का संग्रह, जो कि संग्रह मे सभी वस्तुओं की एक पूर्ण, आदेशित सूची है।

17.10 बोध प्रश्न

रिक्त स्थानों को भरें

1. स्वतंत्र भारत की पहली जनगणना वर्ष -------- में की गई थी।
2. --------- विधि के अन्तर्गत जनगणना करते समय उन सभी व्यक्तियों का, जो उस देश मे क्षेत्रीय अधिकार क्षेत्र मे दिन या रात को उपस्थित हैं, जनगणना आंकड़ों में गिना या सम्मिलित किया जाता है।
3. ------------विधि के अन्तर्गत अनुसूचियों को सभी घरों में स्वयं लोगों को भरने हेतु निर्देशों के साथ वितरित कर दिया जाता है।
4. --------- को प्रति वर्ग किलोमीटर रहने वाले लोगों के संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है।

17.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. 1951, 2. वास्तविक, 3. घरेलू विधि या स्वयं गणना विधि, 4. जनसंख्या घनत्व

17.12 स्वपरख प्रश्न

1. जन्म दर क्या है? 1951 से अब तक जन्म दर की प्रवृति का वर्णन करें।
2. भारत में तीव्र जनसंख्या वृद्धि दर को नियंत्रित करने की आश्यकता की व्याख्या करें। भारत में उच्च जनसंख्या वृद्धि दर से होन वाले समस्याओं के समाधान के लिए सुझाव बताएं।
3. जनसंख्या जनगणना करने की विभिन्न विधियों का वर्णन करें।
4. आर्थिक वृद्धि, जनसंख्या वृद्धि दर को किस प्रकार प्रभावित करती हैं वर्णन करें।

5. भारत में पूंजी निर्माण पर तीव्र जनसंख्या वृद्धि दर से होने वाले प्रभाव का उल्लेख करें।
6. भारतीय जनसंख्या सांख्यिकी की कमियों की चर्चा करें ।

17.13 सन्दर्भ पुस्तकें

1. Fundamentals of Statistics : D.N. Elhance
2. Fundamentals of Statistics : Veena Elhance
3. Fundamentals of Statistics : B.M. Aggarwal
4. Fundamentals of Statistics : D.C. Sancheti
5. Fundamentals of Statistics : V.K. Kapoor
6. Statistics (Theory Methods & Applications) : S.L. Gupta
7. Fundamental of Statistics : B.N. Gupta

*****